UNIVERSIDADE FEDERAL DO TOCANTINS
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DE PALMAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ANTONIO MARCOS ARAÚJO FERREIRA

CONHECENDO O TEOREMA DE BAYES

Sugestão de aplicação ao Ensino Médio

Palmas
2016

ANTONIO MARCOS ARAÚJO FERREIRA

CONHECENDO O TEOREMA DE BAYES

Sugestão de aplicação ao Ensino Médio

Dissertação apresentada ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.
Orientador: Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha.

Palmas
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da Universidade Federal do Tocantins

F383c Ferreira, Antonio Marcos Araújo.
CONHECENDO O TEOREMA DE BAYES: Sugestão de aplicação ao Ensino Médio . / Antonio Marcos Araújo Ferreira. – Palmas, TO, 2016.
43 f.

Dissertação (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Tocantins – Câmpus Universitário de Palmas - Curso de Pós-Graduação (Mestrado) Profissional em Matemática, 2016.

Orientador: Rogério Azevedo Rocha

1. Teorema de Bayes. 2. Thomas Bayes. 3. Probabilidades. 4. Ensino Médio. I. Título

CDD 510

ANTONIO MARCOS ARAÚJO FERREIRA

CONHECENDO O TEOREMA DE BAYES - Sugestão de aplicação ao Ensino Médio

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Tocantins como requisito parcial para obtenção do título de Mestre – Área de Concentração: Matemática. Orientador: Dr. Rogério Azevedo Rocha.

Aprovada em 26 / 08 / 2016

BANCA EXAMINADORA

Rogério Azevedo Rocha

Prof. Dr. Rogério Azevedo Rocha (Orientador-UFT)

Hellena Apolinário

Prof. Dra. Hellena Christina Fernandes Apolinário (UFT)

Prof. Dr. Antônio Rafael Bosso (IFTO)

Dedico este trabalho à minha amada esposa Fabrine Pereira de Brito.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter por me dado a graça do conhecimento;

Aos meus pais por terem me colocado nesse mundo e me proporcionado uma boa educação;

A todos os professores que contribuíram com minha formação ao longo da minha vida educacional e sobretudo do Mestrado Profissional em Matemática da UFT;

Ao meu orientador Prof. Dr. Rogério Azevedo pela confiança, estímulo e paciência;

Ao coordenador Prof. Dr. Andrés Lázaro pelo acompanhamento durante todo o mestrado;

Aos demais colegas do mestrado por fazerem parte da minha história;

À minha família e amigos por terem me apoiado e acreditado no meu esforço;

Principalmente à minha esposa por ter me ajudado a construir este trabalho.

Quando os fatos mudam, eu mudo minha opinião.
O que você faz senhor?

John Maynard Keynes

RESUMO

O trabalho tem como objetivo propor o estudo do Teorema de Bayes para as séries finais da educação básica. O desenvolvimento se deu a partir da pesquisa bibliográfica acerca do criador do Teorema, o reverendo inglês da igreja presbiteriana Thomas Bayes, descrevendo-se desde o primeiro experimento idealizado por ele até a evolução do Teorema como conhecemos hoje. Além da parte histórica, a metodologia incluiu o estudo dos elementos (definições, demonstrações) de probabilidade necessários à compreensão do Teorema. Para alcance do objetivo, sugeriu-se três propostas de aplicação do Teorema de Bayes, através de atividades, para alunos do Ensino Médio. As propostas consistem em aplicações teóricas e práticas que envolvem o problema de Monty Hall, a problemática do falso-positivo e o percentual de assertividade referente à sensibilidade do resultado de um exame. Essas atividades totalizam 240 minutos e foram planejadas para serem realizadas em sala de aula. O Teorema de Bayes é utilizado na Teoria de Resposta ao Item no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, se adequa à proposta das competências e habilidades definidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio e é utilizado em diversas áreas de conhecimento. Conclui-se que sua aplicação, como conteúdo complementar para o estudo das Probabilidades, utilizando-se as propostas como ponto de partida, é possível e proporciona aos alunos uma gama maior de conhecimentos, além de estimular a criatividade e o raciocínio.

Palavras-chave: Teorema de Bayes. Thomas Bayes. Probabilidades. Ensino Médio.

ABSTRACT

The work's objective is to propose the study of Bayes' Theorem for the middle education. A literature search was conducted on the creator of the theorem, the English Presbyterian Church Reverend Thomas Bayes, and also it was sought to describe the evolution of his Theorem from the first experiment conducted by him to the way we learn about his Theorem in the present. In addition to the historical part, the methodology included the study of the elements of probability, essential to the understanding of the Theorem (settings, demonstrations). To reach the goal, we suggested three proposals to apply Bayes' Theorem through activities for high school students. The proposals consist of theoretical and practical applications involving the Monty Hall problem, the problem of false-positive results and the percentage of assertiveness on the sensitivity of an examination's results. These activities totaled 240 minutes and were planned to be carried out in the classroom. Bayes' Theorem is used in Item Response Theory of the Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, and it fits to the proposal of the competencies and skills defined by the National Curriculum for High School, besides being used in other many areas of knowledge. It is concluded that the application of this Theorem, as a complemental content for the study of Probabilities, using the proposals as a starting point, it is possible and provides to students a wider range of knowledge, besides stimulate creativity and reasoning skills.

Keywords: Bayes' Theorem. Thomas Bayes. Probabilities. High School.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Frequentemente questões que envolvem probabilidades permeiam o cotidiano das pessoas e as soluções necessitam de teorias que não estão presentes no currículo do Ensino Médio. Por exemplo, o famoso Teorema de Bayes, que não é exigido na grade curricular, é ferramenta chave em disciplinas de Estatística do Ensino Superior e possui aplicações em diversas áreas, entre elas: Ciências da Saúde, Ciências da Computação e desenvolvimento de Inteligências Artificiais.

O trabalho tem como objetivo propor o estudo do Teorema de Bayes para as séries finais da educação básica brasileira, através do aprendizado de sua teoria e aplicações em sala de aula. O desenvolvimento dividiu-se entre pesquisa bibliográfica e teórica acerca do criador do Teorema, o reverendo inglês da igreja presbiteriana Thomas Bayes, o estudo dos elementos (definições, demonstrações) de probabilidade necessários à compreensão do Teorema, e a parte prática, que se deu com a elaboração das propostas de aplicação.

Durante o desenvolvimento do trabalho, encontrou-se grande parte das aplicações em pesquisas relacionadas à avaliação de métodos utilizados em diagnósticos de patologias. Também se encontrou o Teorema aplicado em pesquisa na área da psicologia, uma delas tratava sobre relações interpessoais. Na Computação faz-se uso do Teorema nas redes bayesianas, que são modelos gráficos de raciocínio baseados em incerteza. Ademais, o Teorema é utilizado na Teoria de Resposta ao Item para avaliação das pontuações dos participantes do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

Inicialmente apresenta-se o matemático Thomas Bayes, responsável pelo Teorema, contando um pouco de sua história e o contexto do surgimento de seus estudos relacionados ao Tema. Em seguida explica-se seu experimento, elencando na sequência os conhecimentos necessários para se chegar ao Teorema.

No capítulo 3 é mostrada a importância do estudo do Teorema de Bayes para o ensino médio e sua aplicação na Teoria de Resposta ao Item do ENEM.

No capítulo 4 estão descritas três propostas de instrução e aplicação do Teorema para turmas do segundo ano do Ensino Médio. A primeira proposta, que envolve o problema de Monty Hall, propõe atividades práticas com copos e premiações para os participantes, e tem o objetivo de introduzir os conceitos iniciais de condicionamento das probabilidades, além de ser mais atrativa ludicamente aos alunos.

A segunda e a terceira atividades, chamadas de falso-positivo e da assertividade, apresentam duas histórias que remetem às situações que podem ocorrer na realidade, e têm seu escopo na interdisciplinaridade, buscando levar informações sobre a saúde e conhecimentos preventivos, além dos cálculos matemáticos.

A pesquisa empírica não foi possível pela indisponibilidade de turmas, durante o cronograma proposto, que já tivessem os conhecimentos básicos necessários para a aplicação da proposta deste trabalho.

Por fim, as considerações sobre o trabalho.

2 CONHECENDO BAYES

2.1 A história de Bayes

Durante a pesquisa bibliográfica, outras fontes foram consultadas e concluiu-se que todas tinham como referência o livro "A Teoria que não morreria" (*The Theory that would not die)*, de Sharon Bertsch McGrayne (2011), do qual as informações sobre a história de Thomas Bayes e seu Teorema foram extraídas.

Reverendo Inglês da Igreja Presbiteriana, Thomas Bayes (1702-1761), viveu em uma época de conflitos religiosos e guerra civil. Considerado dissidente, por não apoiar a igreja da Inglaterra, seus interesses por matemática e teologia começaram a se mesclar por volta de seus 40 anos, quando respondeu a um panfleto do bispo anglicano irlandês George Berkeley que questionava matemáticos dissidentes, o cálculo, a matemática abstrata e o reverendo Isaac Newton, entre outros.

Em 1742 foi indicado como membro da "A Real Sociedade de Londres" (The Royal Society of London). Na Inglaterra, outras questões que envolviam religião e matemática, foram levantadas pelo filósofo escocês David Hume em 1748, que criticava conceitos sobre causa e efeito, que afetavam fundamentalmente o Cristianismo e a crença na existência de Deus. A explicação para o que Hume defendia era a seguinte:

> A concepção do mundo não prova a existência de um criador, uma causa suprema. Porque nós raramente podemos estar certos de que uma causa particular terá um efeito específico, nós devemos nos contentar em buscar somente causas previsíveis e efeitos prováveis. (MCGRAYNE, 2011, p.5-6, tradução nossa).

Tendo a polêmica de Hume como palco, Bayes dedicou-se a tratar os problemas das causas e efeitos matematicamente, porém seus estudos evoluíram à chamada questão inversa do efeito para a causa ou como é mais conhecida, *probabilidade inversa*. A partir desse novo interesse, Bayes decidiu que seu objetivo era estudar a probabilidade aproximada de um evento futuro do qual ele não sabia nada, exceto o seu passado.

Bayes nunca enviou seus manuscritos para publicação, mesmo suas ideias tendo sido discutidas nos círculos da Real Sociedade. Após sua morte em 1761, sua família pediu a Richard Price – pastor presbiteriano e matemático amador, defensor das liberdades civis e revoluções americanas e francesas – para examinar os documentos matemáticos de Bayes.

Price usou o ensaio de Bayes sobre probabilidade inversa, com o propósito de responder ao ataque que Hume sobre o nexo de causalidade, acrescentando referências e citações, encaminhou-o para a Real Sociedade de Londes para publicação, com uma justificativa religiosa, mesmo o autor original não tendo feito menção a Deus em seus estudos.

Em 1763, o grupo intitulado "Transações Filosóficas da Real Sociedade de Londres" (*Philosophical Transactions of the Royal Society of London*) publicou o "Ensaio para Resolver um Problema na Doutrina das Chances" (*Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances*). Para evitar controvérsias religiosas, o título destacou o método de aplicação em apostas.

Em 1774, o matemático francês, Pierre Simon Laplace, desenvolveu um método para determinar as causas mais prováveis de eventos e fenômenos que ele chamou de "Memorial sobre a Probabilidade das Causas dos Eventos" (*Memoir on the Probability of the Causes of Events)*.

> A matemática confirma que Laplace descobriu o princípio da forma independentemente. Bayes resolveu um problema distinto sobre um plano de mesa usando um processo de duas etapas que envolveu uma suposição prévia e novos dados. Laplace ainda não sabia sobre a estimativa inicial, mas lidou com o problema em geral, tornando-o útil para uma variedade de problemas. Bayes laboriosamente explicou e ilustrou por que probabilidades uniformes eram admissíveis, Laplace assumiu-as institivamente. (MCGRAYNE, 2011, p.22, tradução nossa).

Laplace creditou a Bayes o pioneirismo da teoria utilizada no método, percebeu tempos depois que sua própria matemática tinha deficiências e, após décadas de estudos, apenas entre 1810 e 1814, chegou à fórmula hoje reconhecida como Teorema de Bayes.

2.2 O Teorema de Bayes

Bayes idealizou um experimento; imaginou uma mesa, onde uma bola lançada sobre ela teria a mesma chance de cair em qualquer ponto.

Sentado de costas para a mesa e com um pedaço de papel em mãos ele desenharia uma tabela que representaria a superfície da mesa. Ele teria um assistente que atiraria essa bola de bilhar imaginária sobre o plano dessa mesa. A referência será sempre essa primeira bola, chamada bola de bilhar.

Ele pediria a seu colega para jogar uma segunda bola sobre a mesa e informar se ela pousou à direita ou à esquerda da bola de bilhar. Se para a esquerda, Bayes perceberia que é mais provável que a bola de bilhar estivesse do lado direito da mesa. Mais uma vez o assistente lançaria uma nova bola e informaria se caiu à direita ou à esquerda da bola de bilhar. Se para a direita, Bayes perceberia que a bola de bilhar não poderia estar na borda mais à direita da mesa.

O experimento requer uma série de arremessos, assim cada nova informação sobre as bolas lançadas faz a bola de bilhar oscilar para trás e para frente dentro de uma área mais limitada. Se, excepcionalmente, todos os lançamentos caíssem à direita da bola de bilhar, Bayes concluiria, provavelmente, que a bola estaria na margem extrema esquerda da mesa e sua recíproca também seria verdadeira. Bayes nunca poderia afirmar precisamente onde a bola caiu, mas ele poderia contar com o aumento da confiança que está sendo definida com a restrição de um intervalo específico. (MCGRAYNE, 2011, p. 7)

> Usando seu conhecimento do presente (as posições esquerda ou direita das bolas lançadas), Bayes figurou como dizer algo sobre o passado (a posição da primeira bola). Ele poderia até mesmo julgar o quão confiante ele poderia estar sobre sua conclusão. (MCGRAYNE, 2011, p.7, tradução nossa).

Se bem analisado, o sistema de Bayes pode ser considerado simples. As opiniões podem ser seguramente modificadas a partir de dados objetivos. Em seguida serão apresentados os conceitos iniciais necessários para se alcançar o Teorema de Bayes.

2.3 Como chegar ao Teorema

A experiência de Bayes com a bola, que resultou em seu Teorema, envolve conhecimentos acerca de experimentos aleatórios, espaços amostrais, eventos e probabilidades, portanto cada elemento será sucintamente discorrido com o intuito de evidenciar as partes da matemática a serem utilizadas no estudo deste Teorema.

2.3.1 Experimento Aleatório

O termo probabilidade é utilizado de forma ampla no dia-a-dia remetendo à incerteza sobre eventos que ocorrem no presente e que ocorreram no passado. Há, portanto, eventos que derivam em dúvidas frequentes por parte da população, tais como: Irá chover hoje? Irei ganhar na loteria? Se eu jogar uma moeda, dará cara ou coroa? Esses eventos, tais como outros, são considerados *experimentos aleatórios*, pois não sabemos se apresentarão resultados iguais ou desejados, mesmo que o evento seja repetido várias vezes e sob as mesmas condições.

> Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidas em idênticas condições, produzem resultados que não podem ser previstos com certeza. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer. As variações de resultados, de experimento para experimento, são devidas a uma multiplicidade de causa que não podemos controlar, as quais denominamos acaso. (HAZZAM, 2010, p. 89).

A bola jogada sobre a mesa diversas vezes, no experimento de Bayes, é um experimento aleatório, pois os resultados não podiam ser previstos, apesar da bola estar sendo jogada sempre na mesma condição.

2.3.2 Espaço Amostral

Ao conjunto que possui todos os resultados possíveis de um experimento aleatório, damos o nome de *espaço amostral* e geralmente é representado pela letra grega ômega (Ω) ou (S) da palavra inglesa *Space* (espaço em português).

Exemplos:

a) Lançamento de uma moeda: $\Omega = \{c, k\}$ sendo c = cara e k = coroa
b) Lançamento de duas moedas: $\Omega = \{cc, ck, kc, kk\}$
c) Lançamento de um dado de 6 faces: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
d) Retirada de uma carta do baralho:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\diamondsuit)\\ &A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\heartsuit)\\ &A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\spadesuit)\\ &A\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ J\ Q\ K\ (\clubsuit)\}\end{aligned}$$

e) Lançamento de dois dados de 6 faces:

$$\begin{aligned}\Omega = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

2.3.3 Evento

Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de *Evento*, por exemplo: Seja o evento E – sair um número ímpar no lançamento de um dado de 6 faces. Assim, $E = \{1, 3, 5\}$.

> Chamamos de evento ou acontecimento, e geralmente indicamos por uma letra maiúscula, todos os subconjuntos do espaço amostral de um experimento aleatório. Cada um dos elementos do espaço amostral é denominado evento elementar. (SOUZA, 2013, p. 246).

Existem sete tipos de eventos, a saber:

- *Evento simples*: É aquele formado por um único elemento do espaço amostral, pode ser chamado também de evento elementar. Exemplo: Seja o evento A – sair um número primo maior que 3 no lançamento de um dado de 6 faces. Assim, A = { 5 }.
- *Evento composto*: É aquele que possui mais de um elemento do espaço amostral. Exemplo: Seja o evento B – sair um número par no lançamento de um dado de 6 faces. Assim, B = {2, 4, 6}.
- *Evento certo*: Chamamos de evento certo, quando um evento coincide com o espaço amostral. Exemplo: Seja o evento C – sair um número menor do que 7 no lançamento de um dado de 6 faces. Assim, C = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, ou seja, C = Ω.
- *Evento impossível*: Quando um evento é vazio, ele é chamado de evento impossível. Exemplo: Seja o evento D – sair um número maior do que 6 no lançamento de um dado de 6 faces. Assim, D = $\emptyset$.
- *Eventos independentes*: Ocorrem quando um evento não interfere na ocorrência de um outro evento.
- *Eventos mutuamente excludentes*: Ocorrem quando um evento não puder ocorrer simultaneamente com um outro evento, ou seja, a realização de um evento exclui a realização de um outro evento. Exemplo: No lançamento de uma moeda, o evento cara nunca ocorrerá simultaneamente com o evento coroa, sendo assim, são eventos mutuamente excludentes.
- *Eventos complementares*: São eventos que se completam como espaço amostral não possuindo elementos em comum. Sendo um evento A, o complementar representa a não-ocorrência do evento A, e o chamaremos de complementar de A representado por $\bar{A}$.

Propriedades: i) $A \cup \bar{A} = \Omega$

ii) $A \cap \bar{A} = \emptyset$

Exemplo: Seja o evento A – sair um número maior do que 3 no lançamento de um dado de 6 faces, A = {4, 5, 6}, o seu complementar será $\bar{A} = \{1, 2, 3\}$.

2.3.4 Probabilidade

Seja Ω o espaço amostral finito de um experimento aleatório, n (Ω) o número de elementos desse espaço amostral, seja A um evento e n(A) o número de elementos do evento A, para que se possa calcular a probabilidade onde o espaço amostral é equiprovável utiliza-se:

$$P(A) = \frac{\text{número de elementos do evento } A}{\text{número de elementos do espaço amostral}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

Exemplo: Qual a probabilidade de aparecer uma face par no lançamento de um dado?

Solução: Seja o evento A – aparecer um número par. Então A={2, 4, 6}, ou seja, o número de elementos do evento A é 3. O número de elementos do espaço amostral é 6, pois Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Portanto:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Logo, a probabilidade de parecer um número par no lançamento de um dado é $\frac{1}{2}$, 0,5 ou 50%.

- *Propriedades Consequentes da Definição de Probabilidade*

i) A probabilidade de um evento A deve ser um número maior ou igual a zero e menor ou igual a 1.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

ii) A probabilidade do evento certo é 1.

$$P(\Omega) = 1$$

iii) A probabilidade do evento impossível é igual a zero.

$$P(\emptyset) = 0$$

- *Probabilidade da União de Eventos*

Se A e B forem dois eventos mutuamente exclusivos ($A \cap B = \emptyset$), então:

$$P(A \cup B) = P(A + B) = P(A) + P(B)$$

A probabilidade da união pode ser generalizada para um número maior de eventos, desde que eles sejam 2 a 2 mutuamente exclusivos. Assim se A, B e C forem dois a dois mutuamente exclusivos:

$$(A \cap B = \emptyset\ ;\ A \cap C = \emptyset\ ;\ B \cap C = \emptyset\ ), \text{ então:}$$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Se A e B não forem mutuamente exclusivos, então:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- *Probabilidade da Intersecção de Dois Eventos Independentes*

Se A e B forem dois eventos independentes, a probabilidade de ocorrer independentemente os eventos A e B é o produto da probabilidade de ocorrer o evento A pela probabilidade de ocorrer o evento B.

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

Exemplo: No lançamento de dois dados, qual a probabilidade de que tenhamos um número inferior a 3 no 1º lançamento e um número primo no 2º lançamento? Considerando como evento A, o lançamento do primeiro dado, e como evento B, o lançamento do segundo dado, temos:

$$A = \{1, 2\}, \text{ logo } P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$B = \{2, 3, 5\}, \text{ logo } P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P\ (A \cap B) = P\ (A).\ P\ (B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

- *Probabilidade Condicional*

Sejam A e B dois acontecimentos aleatórios associados à mesma experiência aleatória. Denotar-se por P(A|B) a probabilidade condicionada do acontecimento A quando B tiver ocorrido. Se P(B) > 0, então:

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(B)}$$

Esta última expressão lê-se: probabilidade de A dado B ou probabilidade de A condicionada a B. Note que se Ω for finito e com resultados igualmente possíveis pode-se calcular uma probabilidade condicionada, além da definição anterior, usando a expressão:

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{n(A \cap B)}}{n(B)}$$

Quando os eventos são independentes, tem-se que:

$$P\ (A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

$$\mathrm{P(A|B)} = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(B)} = \frac{\mathrm{P(A)} \cdot P\mathrm{(B)}}{P(B)} = \mathrm{P(A)}$$

Exemplo: De um baralho de 52 cartas retirou-se ao acaso uma carta, sabendo que é de “Copas”, qual a probabilidade de ser um “Ás”? Note que o fato de se explicitar que a escolha foi feita ao acaso significa que cada uma das cartas ter igual probabilidade de ser retirada.

i) definir os acontecimentos necessários à resolução:

A= {“52 cartas”}, B = {“Carta de copas”} e C = {“Carta ser um Ás”};

ii) Calcular P(C | B):

Note que $(C \cap B) = \{$Ás de copas$\}$ e que cada naipe tem 13 cartas.

1º processo: pela definição tem-se $P(C \mid B) = \dfrac{P(C \cap B)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \dfrac{1}{13}$

2º processo: calculando diretamente, $P(C \mid B) = \dfrac{n(C \cap B)}{n(B)} = \dfrac{1}{13}$

- *Regra do Produto das Probabilidades*

A regra do produto das probabilidades é consequência da definição de probabilidade condicional. Sejam A e B eventos de Ω e P(B) > 0 , tem-se que:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad P(A \cap B) = P(A|B) \,.\, P(B)$$

ou

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \qquad \text{sendo } P(A) > 0 \qquad P(A \cap B) = P(B|A) \,.\, P(A)$$

Dito de outra maneira, "a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos de um mesmo espaço amostral é igual à probabilidade de um deles ocorrer, pela probabilidade condicional do outro, dado o primeiro" (MARTINS, 2012, p. 191).

Exemplo: Retiram-se sem reposição duas peças de um lote de 11 peças, onde 5 são boas. Qual a probabilidade de que ambas sejam defeituosas?

Sejam os eventos A = {a 1ª peça ser defeituosa} e B = {a 2ª peça ser defeituosa}

Se 5 são boas, teremos 6 defeituosas. Então $P(A) = \dfrac{6}{11}$ e $P(B|A) = \dfrac{5}{10}$, que é a probabilidade de a 2ª peça ser defeituosa, dado que a 1ª foi defeituosa.

Sendo assim, tem-se:

$$P(A \cap B) = P(B|A) \,.\, P(A) = \frac{5}{10} \cdot \frac{6}{11} = \frac{30}{110} = \frac{3}{11}$$

- *Teorema da Probabilidade Total*

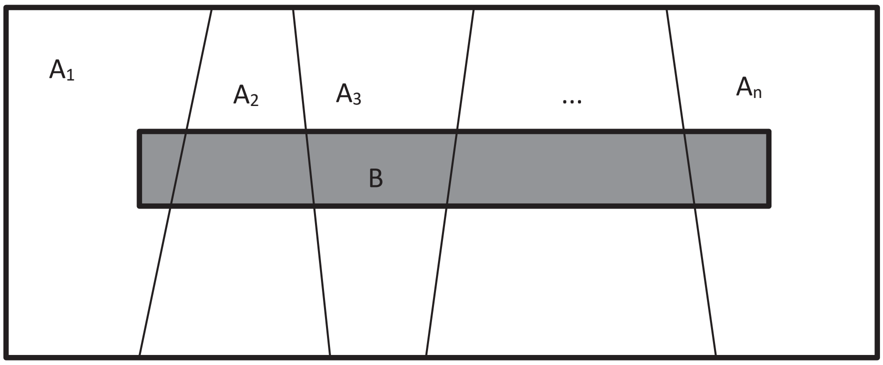
Sejam $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ eventos que constituem uma partição do espaço amostral **Ω**, isto é:

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_n = \Omega$$

$$P(A_i) > 0, \text{ para todo } i = 1, 2, 3, ..., n$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j$$

Figura 1: Partição do espaço amostral para o Teorema da Probabilidade Total



Fonte: Próprio autor

Assim, se B, representado na Figura 1 pela área escura particionada, representa um evento, temos o seguinte teorema, conhecido como Teorema da Probabilidade Total:

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^{n} P(B|A_i).P(A_i)$$

Ou seja,

$$P(B) = P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + P(B|A_3).P(A_3) + ... + P(B|A_n).P(A_n)$$

Demonstração:

$$B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup (B \cap A_3) \cup ... \cup (B \cap A_n) .$$

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + P(B \cap A_3) + ... + P(B \cap A_n)$$

$$P(B) = P(B|A_1).P(A_1) + P(B|A_2).P(A_2) + P(B|A_3).P(A_3) + ... + P(B|A_n).P(A_n)$$

Exemplo: Um médico plantonista está examinando uma vítima de envenenamento que acaba de dar entrada no hospital. Um rápido exame preliminar leva o médico a concluir que o envenenamento é devido à ingestão de um produto tóxico A ou B ou C. Ele dispõe de dois tipos de medicamentos com o seguinte quadro de eficácia (Figura 2) (SILVA et al, 1999, p. 175):

Figura 2: Quadro de eficácia de medicamentos em relação a produto tóxico ingerido

Produto tóxico \ Medicamento	Eficácia específica (%)	
	M_1	**M_2**
A	70	50
B	40	90
C	80	60

Fonte: SILVA et al, 1999, p. 175.

Qual é o medicamento que o plantonista deve ministrar, se a urgência da situação não lhe permite outras opções?

Solução:

$$P(M_1|A) = 70\% \qquad P(M_1|B) = 40\% \qquad P(M_1|C) = 80\%$$

$$P(M_2|A) = 50\% \qquad P(M_2|B) = 90\% \qquad P(M_2|C) = 60\%$$

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$$

A possibilidade de ocorrer ingestão dos tóxicos A, B ou C são idênticas.

Cálculo de eficácia do medicamento 1:

$$P(M_1) = P(M_1|A).P(A) + P(M_1|B).P(B) + P(M_1|C).P(C)$$

$$P(M_1) = 0{,}7 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}8 \cdot \frac{1}{3}$$

$$P(M_1) = 0{,}6333$$

Cálculo de eficácia do medicamento 2:

$$P(M_2) = P(M_2|A).P(A) + P(M_2|B).P(B) + P(M_2|C).P(C)$$

$$P(M_2) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}9 \cdot \frac{1}{3} + 0{,}6 \cdot \frac{1}{3}$$

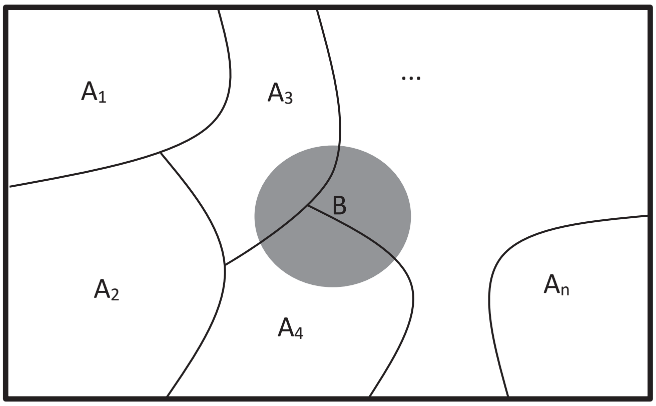
$$P(M_2) = 0{,}6666$$

Portanto, o medicamento 2 é o melhor a ser administrado por apresentar a maior eficácia.

- *Teorema de Bayes*

Considere $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ eventos mutuamente excludentes cuja união representa o espaço amostral Ω, isto é, um dos eventos necessariamente deve ocorrer (Figura 3).

Figura 3: Partição do espaço amostral para o Teorema de Bayes



Fonte: Próprio autor

Seja B, um acontecimento qualquer de Ω e $A_1, A_2, \ldots, A_n$ representam uma partição de Ω , onde $P(A_i) > 0$ e $P(B) > 0$ então para i=1,...,n tem-se

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i).P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B \mid A_i)}$$, chamado de Teorema de Bayes.

A demonstração do Teorema de Bayes é consequência dos teoremas apresentados anteriormente. Suponha-se que o evento B tenha ocorrido. Essa informação será usada para calcular a probabilidade *a posteriori* do evento A_i, isto é, vamos calcular $P(A_i \mid B)$. Por definição, tem-se que:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

Com $P(A_i \cap B) = P(A_i).P(B|A_i)$, tem-se:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i).P(B \mid A_i)}{P(B)}$$

Então, se P (B) > 0 e i = 1, 2, 3, ..., n, pelo Teorema da Probabilidade Total:

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i).P(B \mid A_i)}{P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + ... + P(A_n).P(B \mid A_n)}$$

"O resultado acima é bastante importante, pois, como vimos, relaciona probabilidades a *priori*: $P(A_i)$ com probabilidades a *posteriori*: $P(A_i \mid B)$, probabilidade de A_i depois que ocorrer B" (MARTINS, 2012, p. 192). Sabe-se que o teorema apresentado permite determinar as probabilidades dos vários eventos A_1, A_2, A_3, ..., A_n que podem ser causa da ocorrência do evento B. Devido a isto, o teorema de Bayes é também conhecido como Teorema da Probabilidade das Causas.

Exemplo: Há 3 urnas com bolas das cores preta, branca e vermelhas distribuídas conforme a Figura 4:

Figura 4: Quadro de relação entre urnas e bolas no exemplo do Teorema de Bayes

URNAS / CORES	**U_1**	**U_2**	**U_3**
PRETAS	3	4	2
BRANCAS	1	3	3
VERMELHAS	5	2	3

Fonte: MARTINS, 2012, p. 193.

Escolheu-se uma urna ao acaso e dela extraiu-se uma bola ao acaso, verificando-se que a bola é branca. Qual a probabilidade de a bola ter vindo da urna 2? Solução: Probabilidades a *priori*: $P(U_1) = \frac{1}{3}$ $P(U_2) = \frac{1}{3}$ $P(U_3) = \frac{1}{3}$

Probabilidades condicionais: $P(br \mid U_1) = \frac{1}{9}$ $P(br \mid U_2) = \frac{1}{3}$ $P(br \mid U_3) = \frac{3}{8}$

Calculando-se $P(U_2 \mid br)$ através do Teorema de Bayes:

$$P(U_2 \mid br) \ = \ \frac{P(U_2).P(br \mid U_2)}{P(U_1).P(br \mid U_1) + P(U_2).P(br \mid U_2) + P(U_3).P(br \mid U_3)}$$

Portanto:

$$P(U_2 \mid br) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}} \ = \ \frac{24}{59}$$

Que é a probabilidade *a posteriori*, isto é, a probabilidade de ser escolhida a urna 2, dada a informação de que a bola retirada foi branca.

3 A IMPORTÂNCIA DO ESTUDO DO TOREMA DE BAYES NO ENSINO MÉDIO

Após a morte de Laplace em 1827, considerado como o primeiro bayesiano do mundo, o Teorema de Bayes entrou em declínio por quase um século porque os principais teóricos deixaram de usá-lo pela dificuldade de compreensão dos cálculos.

O Teorema voltou a ser fortemente utilizado na Segunda Guerra Mundial pelos britânicos, a fim de decifrarem os códigos que os alemães e soviéticos utilizavam durante a guerra pelas linhas telefônicas. Após a rendição dos alemães, ao final da guerra, foi ordenada a destruição de todas as provas de que a decodificação havia sido promissora, ficando o Teorema mais uma vez no esquecimento. Sobre os usos do Teorema de Bayes, McGrayne elenca uma série deles em seu livro:

> (...)atuários de seguros usam-no para definir taxas; Alan Turing usou-o para decodificar o código criptografado alemão e indiscutivelmente, salvar os aliados de perderem a Segunda Guerra Mundial, a Marinha dos Estados Unidos usou-o para procurar uma bomba H perdida e localizar submarinos soviéticos; RAND Corporation utilizou-o para avaliar a probabilidade de um acidente nuclear; e pesquisadores de Harvard e Chicago utilizaram-no para verificar a autoria de O Federalista[1]. (MCGRAYNE, 2011, p. 3, tradução nossa)

Todas as vezes que a teoria bayesiana era esquecida uma outra vertente, a estatística frequentista, se fortalecia, entretanto, esta só funcionava bem quando uma hipótese era um caso especial de outra, mas quando hipóteses estavam competindo e tinham mudanças bruscas nos dados o frequentismo não funcionava. A ideia por trás do frequentismo afirma que a incerteza num problema estatístico resulta apenas da coleta de dados relacionada a uma fatia da população e não ao todo, o que acarreta uma margem de imprecisão em sua previsão. De acordo com o Teorema de Bayes, uma previsão é, de forma simplificada, um tipo de atividade ligada ao processamento de informação — uma questão que se resume a usar novos dados para testar uma hipótese sobre o mundo objetivo, com o propósito de nos aproximar de concepções cada vez mais precisas ao seu respeito.

A teoria bayesiana era esquecida sobre o pretexto de que possuía um cálculo mais complexo, porém isso mudou nos anos 90, quando os computadores se tornaram mais rápidos e ajudaram a lançar a revolução bayesiana em vários campos, como o da saúde, o da tecnologia, o da matemática, etc.

[1] Corresponde a um conjunto de 85 artigos que argumentam para a ratificação da Constituição dos Estados Unidos, após a Convenção da Filadélfia, publicados na imprensa de Nova York entre os anos de 1787 e 1788, assinados por "Publius" – pseudônimo coletivo de James Madison, Alexander Hamilton e John Jay. (LIMA, 2011, p. 129)

Apesar da resistência ao longo dos anos para a utilização do Teorema, o mesmo se mostrou eficaz no desenvolvimento de pesquisas e novas tecnologias e mostra-se viável e próspero à utilização com estudantes de nível médio.

Tendo como base os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio – PCN, sobretudo para a área das Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, as competências e habilidades definidas para a investigação e compreensão abrangem,

> Desenvolver a capacidade de questionar processos naturais e tecnológicos, **identificando regularidades**, apresentando interpretações e **prevendo evoluções**. Desenvolver o raciocínio e a capacidade de aprender.
> • Formular questões a partir de situações reais e compreender aquelas já enunciadas.
> • Desenvolver modelos explicativos para sistemas tecnológicos e naturais.
> • **Utilizar instrumentos de medição e de cálculo**.
> • Procurar e sistematizar informações relevantes para a compreensão da situação-problema.
> • Formular hipóteses e **prever resultados**.
> • Elaborar estratégias de enfrentamento das questões.
> • Interpretar e criticar resultados **a partir de experimentos e demonstrações**.
> •Articular o conhecimento científico e tecnológico numa perspectiva interdisciplinar.
> • Entender e aplicar métodos e procedimentos próprios das Ciências Naturais.
> • **Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades**.
> • Fazer uso dos conhecimentos da Física, da Química e da Biologia para explicar o mundo natural e para planejar, executar e avaliar intervenções práticas.
> • Aplicar as tecnologias associadas às Ciências Naturais na escola, no trabalho e em outros contextos relevantes para sua vida. (PCN, 1996, p. 12, grifo nosso)

Conforme a citação e relacionado ao já exposto, o Teorema se adequa ao proposto pelo PCN. O estudo do Teorema de Bayes seria uma extensão do conteúdo que compõe o currículo para os alunos de Ensino Médio criando uma base mais sólida na área da probabilidade, a ser utilizada, entre outros campos, nas diversas áreas de formação superior.

3.1 O Teorema de Bayes na Teoria de Resposta ao Item do ENEM

As possibilidades de uso do Teorema são amplas e relacionadas ao cotidiano do aluno do Ensino Médio, ele inclusive é utilizado como avaliador das notas do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM.

O sistema de avaliação do ENEM é a Teoria de Resposta ao Item, baseada em estatística Bayesiana e que considera três informações essenciais para avaliar a qualidade do item e, consequentemente, a qualidade do participante:

> a) **parâmetro de discriminação:** é o poder de discriminação que cada questão possui para diferenciar os participantes que dominam dos participantes que não dominam a habilidade avaliada naquela questão (item);
> b) **parâmetro de dificuldade:** associado à dificuldade da habilidade avaliada na questão, quanto maior seu valor, mais difícil é a questão. Ele é expresso na mesma escala da proficiência. Em uma prova de qualidade, devemos ter questões de diferentes níveis de dificuldade para avaliar adequadamente os participantes em todos os níveis de conhecimento;
> c) **parâmetro de acerto casual:** em provas de múltipla escolha, um participante que não domina a habilidade avaliada em uma determinada questão da prova pode responder corretamente a esse item por acerto casual. Assim, esse parâmetro representa a probabilidade de um participante acertar a questão não dominando a habilidade exigida. (INEP, 2012, p. 13)

O objetivo principal da Teoria de Resposta ao Item é ponderar os conhecimentos dos participantes diferenciando aqueles que de fato dominam os conteúdos e os que acertam as questões ao acaso (chutam). O reconhecimento do acerto casual acontece pelas questões que o participante acerta, se ele acerta questões difíceis e erra questões fáceis será considerado como um participante que pontua ao acaso, e assim suas notas caem em relação aos participantes que acertam grande parte das questões fáceis de forma consciente, mesmo que errem as difíceis. Isso justifica os casos em que um participante que acertou 40 questões em matemática tenha uma pontuação inferior a um participante que acerte apenas 37 questões.

Tentou-se buscar as fórmulas que são utilizadas para os cálculos das notas dos participantes, porém o INEP – Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira – apenas cita o que está no edital e em sua página:

> O cálculo das proficiências dos Participantes, a partir de suas respostas às questões de múltipla escolha das provas objetivas, tem como base a Teoria de Resposta ao Item (TRI). O documento com a metodologia utilizada e com os critérios adotados pela banca poderá ser obtido no endereço eletrônico <http://portal.inep.gov.br/enem>. (INEP, 2016, p. 19)

E na sua página na internet está disponível uma apostila que explica da seguinte forma o método utilizado:

> Considerando que o cálculo das proficiências de acordo com a TRI exige um conhecimento avançado de estatística e a utilização de software próprio, o Inep, com o objetivo de ter a máxima confiança nos resultados, exige que os cálculos sejam realizados de forma independente por três grupos distintos (especialistas do Cespe/UnB, especialistas da Cesgranrio e os especialistas do Inep). Este procedimento de tripla conferência garante a qualidade dos resultados do Enem. Todos os profissionais com larga experiência na área e com formação em estatística, matemática ou psicometria. Somente com 100% de concordância entre os resultados obtidos pelos três grupos para cada participante é que o resultado é divulgado. Este documento teve o objetivo de explicitar que a TRI tem bases científicas e que ela garante uma avaliação do conhecimento do participante de forma mais justa do que a Teoria Clássica. Não é simples explicitar os detalhes dos cálculos devido à exigência

> de conhecimento mais avançado em matemática e estatística. Todavia, o Inep tem adotado mecanismos para garantir um alto grau de confiabilidade nos resultados divulgados. (INEP, 2011, p. 4)

A Teoria de Resposta ao Item é um método de avaliação utilizado em testes de proficiência em diversos países. Apesar de considerarem os cálculos avançados demais para quem não é da área, a sua divulgação talvez estimulasse o aprofundamento de conteúdos relacionados à probabilidade no ensino médio, já que o próprio sistema de avaliação dos participantes do ENEM é através do Teorema de Bayes, que ainda não faz parte dos Planos Curriculares do Ensino Médio.

4 PROPOSTAS DE APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

As propostas consistem em aplicações teóricas e práticas que totalizariam 240 minutos, sendo a primeira parte teórica estimada em 50 minutos. Para a atividade prática com os copos seriam reservados em torno de 90 minutos, a proposta do desafio do falso-positivo levaria cerca de 50 minutos e a última proposta, da assertividade, foi planejada para 50 minutos, conforme será explicado na sequência.

4.1 Proposta 1 – Teoria e atividade com copos

Após o conteúdo sobre Probabilidade – experimentos aleatórios, eventos, espaços amostrais, definições de probabilidade, probabilidade da união de eventos, probabilidade da intersecção de eventos, probabilidade condicional, tiverem sido ministrados, com bastante exemplos práticos, o professor deverá apresentar aos alunos os conceitos e demonstrações sobre Probabilidade Total, Teorema de Bayes e sua história. Lembrando que para entender o Teorema de Bayes é necessário compreender o Teorema da Probabilidade Total. Na sequência, propõe-se que sejam utilizados exemplos para facilitar a compreensão dos alunos, podendo ser até mesmo os citados anteriormente, no item 2.3.4 Probabilidade.

A aula iniciar-se-á com a apresentação do Problema de Monty Hall, fazendo-se uma adaptação para aguçar o interesse dos alunos, para a atividade e para o conhecimento do teorema que o envolve.

Monty Hall era o nome do apresentador de um famoso programa americano nos anos 70, "Vamos Fazer um Acordo" (*Let's Make a Deal)*, no qual os participantes tinham que escolher entre 3 portas àquela que escondia um carro. Nas outras duas portas escondiam-se bodes. O problema se forma a partir do momento em que o apresentador abria uma das portas com um bode, diferente daquela que o participante havia escolhido. O apresentador então questiona sobre as opções do participante de permanecer com a porta previamente escolhida ou trocar para a outra porta que ainda não foi aberta. O participante ficava confuso ao ver o bode em uma das portas e achava que sua chance de acertar, ao não mudar sua escolha, aumentava de 33,33% para 50%, o que não era verdade. Ao escolher uma das portas, quando havia três alternativas, sua chance de acertar o carro era de 33,33%, mas ao trocá-la quando o apresentador restringia as opções para apenas duas portas, sua chance passaria a ser de 66,66%, pois essa era a probabilidade das portas que o participante não escolheu no início. Esse programa desafiou matemáticos e pessoas de QIs elevados na época, por não compreenderem o problema.

No ano de 1990, entretanto, Marilyn Vos Savant, colunista na revista “Parada” (*Parade)*, respondendo a perguntas de leitores sobre matemática e ciência avançada, publicou que o concorrente deveria trocar de portas, pois a probabilidade de ganhar o carro se aceitasse a mudança de escolha seria de 2/3, enquanto que, se não trocasse, a probabilidade seria de apenas 1/3. (SAVANT, 1990) A resposta de Marilyn Vos Savant desencadeou uma polêmica discussão envolvendo leitores da revista, matemáticos e cientistas.

Com a chegada dos computadores, ficou comprovado que ela tinha razão, pelo aumento do número de vezes que a teoria foi testada através de programas, chegava-se aos valores que ela estimou. E pelo Teorema de Bayes se certificaram que realmente as probabilidades estavam corretas. Pensando nesse debate de algumas décadas atrás, resolveu-se trazer algo similar para a sala de aula.

Serão necessários três copos grandes de isopor, classificados alfabeticamente, pincel para ser utilizado no quadro branco e vários bombons que servirão como premiação.

Um aluno deve ser escolhido para participar da brincadeira, ele deverá permanecer de costas enquanto o professor coloca o bombom embaixo de um dos copos.

Em seguida, o aluno deverá ficar de frente e escolher um dos três copos. Após a escolha, o professor, sabendo onde está o copo com o bombom, mostrará um outro copo que não contém o bombom e perguntará: Você deseja trocar de copo? Nesse momento, assim como no problema de Monty Hall, muitos não trocarão por convicção e ainda acharão que suas chances aumentaram de 33,33% para 50% pelo fato de um dos copos estar vazio.

Caso deseje trocar, como veremos adiante, pelo Teorema de Bayes, a chance do aluno ganhar o bombom será de 2/3. Se por acaso ele preferir continuar com aquele copo, a sua chance de ganhar o bombom será de 1/3.

No quadro branco estará disposta uma planilha (Figura 5) onde serão colocadas as informações acerca das trocas e resultados, para que os alunos possam visualizar durante todo o experimento possíveis padrões.

Figura 5: Quadro de resultados da dinâmica sobre copos

Participante	**1º copo escolhido**	**Trocou de copo?**	**Ganhou o prêmio?**	**Prêmio estava em qual copo?**
Maria	A	Não	Não	B
João	B	Sim	Sim	C
Carlos	A	Sim	Sim	B

Fonte: Próprio autor

Essa atividade poderá ser feita com vários alunos até que eles percebam que normalmente quem opta por trocar o primeiro copo escolhido, terá acertado mais do que os que não o trocaram.

Em um segundo momento, poderá ser feito um teste com 60 copos descartáveis brancos ou coloridos, distribuídos em 2 blocos com 10 filas de 3 copos. Em cada fila será colocado um pedaço de papel ou qualquer outro item, desde que seja pequeno, em um dos copos, simulando a premiação. Deverá ser anotado em um caderno em qual copo o papel está em cada fileira, para que o professor não se perca na hora de levantar um dos copos.

No 1º bloco, após a escolha do copo pelo participante e o levantamento de um dos copos que não contém o prêmio, não será trocado o copo escolhido, pois a ideia é que aquele bloco seja dos que não trocam a sua primeira escolha por nada. No 2º bloco, após a escolha do copo por outro participante, será oferecida a mudança após ser mostrado que um dos copos não tem o prêmio escolhido e assim trocar-se-á o copo inicial pelo outro copo que poderá conter o prêmio.

Isso será feito repetidas vezes, até que se chegue ao final dos dois blocos de copos. Analisadas todas as filas, os alunos verificarão em qual dos blocos houve o maior número de acertos de onde o prêmio estava. Os mesmos irão observar que a troca da primeira opção pela outra é mais vantajosa do que manter sua escolha inicial até o fim.

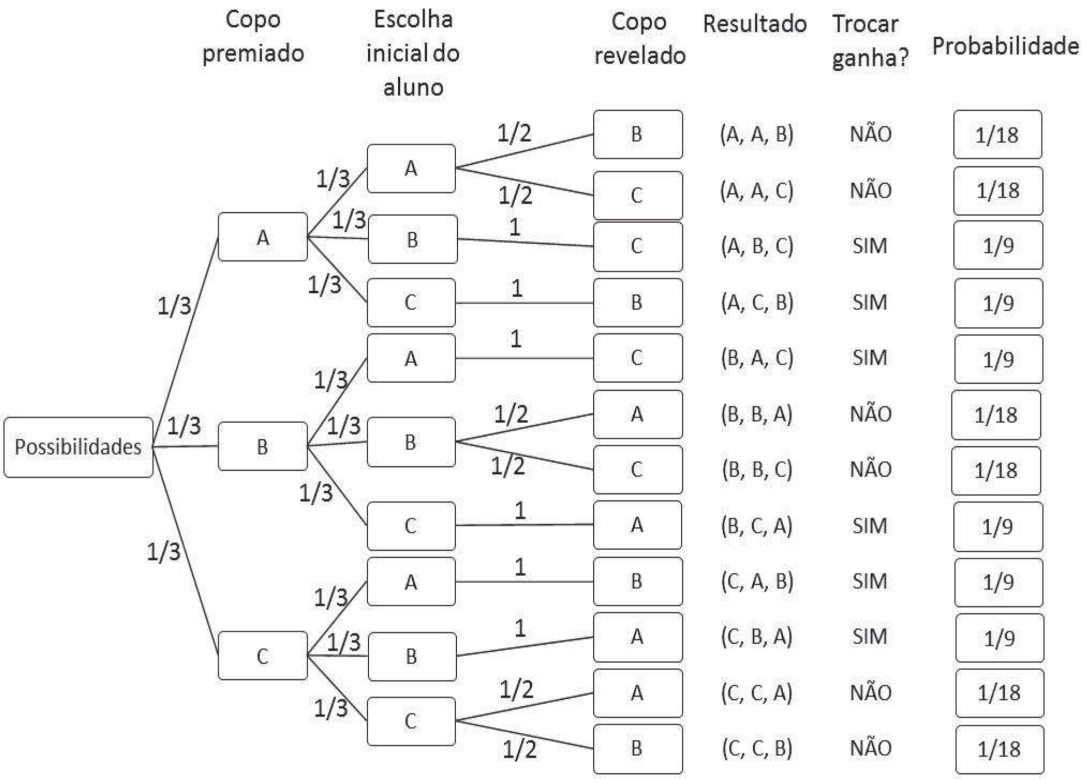
A solução do problema pode ser apresentada de duas formas:

- 1ª Solução

A primeira solução pode ser apresentada pela árvore das possibilidades, que demonstra todos os caminhos possíveis em uma combinação dos resultados obtidos.

Na Figura 6 tem-se a Árvore das Possibilidades, que apresenta os seguintes dados: Na 1ª coluna estão os copos em que o professor escolhe onde disporá os prêmios, na 2ª coluna estão os copos escolhidos pelo aluno inicialmente. A 3ª coluna é representada pelos copos que o professor mostra que estão vazios. O caminho percorrido desde a distribuição do prêmio até os copos vazios é representado na 4ª coluna. Na próxima coluna, as linhas que estão com uma estrela são as linhas em que ao trocar de copo o participante ganha o prêmio. Já a última coluna apresenta a probabilidade de cada caminho efetuado.

Figura 6: Árvore das possibilidades



Fonte: Próprio autor

A probabilidade de cada resultado é o produto de cada probabilidade no caminho entre a raiz da árvore e o resultado, representado na Figura 7.

Figura 7: Cálculos das probabilidades da árvore de possibilidades

CAMINHO	GANHA TROCA?	CÁLCULO DA PROBABILIDADE
P (A, A, B)	NÃO	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
P (A, A, C)	NÃO	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
P (A, B, C)	SIM	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{9}$
P (A, C, B)	SIM	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{9}$
P (B, A, C)	SIM	$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{9}$

P (B, B, A)	NÃO	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
P (B, B, C)	NÃO	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
P (B, C, A)	SIM	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$
P (C, A, B)	SIM	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$
P (C, B, A)	SIM	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{9}$
P (C, C, A)	NÃO	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$
P (C, C, B)	NÃO	$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

Fonte: Próprio autor

A probabilidade do evento E – o aluno ganhar o prêmio caso ele mude o copo escolhido inicialmente é:

$$P(E) = P(A, B, C) + P(A, C, B) + P(B, A, C) + P(B, C, A) + P(C, A, B) + P(C, B, A)$$

$$P(E) = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Caso o aluno mantenha o primeiro copo escolhido, a sua chance de ganhar será de $\frac{1}{3}$.

- 2ª Solução

A segunda forma de apresentar o resultado do problema dos 3 copos é utilizando o Teorema de Bayes. Nesse momento é interessante relembrar aos alunos a parte teórica do teorema.

Logo após, será resolvido o problema dos copos. Sejam os seguintes eventos:

-PA: o prêmio está em A

-PB: o prêmio está em B

-PC: o prêmio está em C

-RA: o apresentador revela o copo (vazio) de A

-RB: o apresentador revela o copo (vazio) de B

-RC: o apresentador revela o copo (vazio) de C

Caso I: O aluno não troca de copo:

Se o aluno escolheu o copo A, e B é o copo vazio aberto pelo professor, a probabilidade de interesse passa a ser P (PA|RB). Pelo Teorema de Bayes, tem-se:

$$P(PA \mid RB) = \frac{P(RB \mid PA).P(PA)}{P(RB \mid PA).P(PA) + P(RB \mid PB).P(PB) + P(RB \mid PC).P(PC)}$$

$P(RB \mid PA) = \frac{1}{2}$, porque o professor pode escolher os copos B ou C.

$P(RB \mid PB) = 0$, porque o professor nunca levanta o copo onde está o prêmio.

$P(RB \mid PC) = 1$, porque o professor nunca levanta o copo onde está o prêmio então ele só pode mostrar o copo B, pois o A é o escolhido inicialmente e o C seria onde o prêmio está.

$$P(PA \mid RB) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$$

Caso II: O aluno troca de copo:

Agora supondo-se que quando o professor pergunte ao aluno se ele aceita trocar de copo, por exemplo pelo copo C.

$$P(PC \mid RB) = \frac{P(RB \mid PC).P(PC)}{P(RB \mid PA).P(PA) + P(RB \mid PB).P(PB) + P(RB \mid PC).P(PC)}$$

$$P(PA\,|\,RB) = \frac{1\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+1\cdot\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}+0+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{6}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

Logo, é mais vantajoso trocar o copo probabilisticamente. Há a possibilidade do aluno escolher o copo premiado inicialmente e nesse caso seria mais vantajoso mantê-lo, mas como trata-se de você não saber onde está o prêmio, o Teorema de Bayes ajuda na probabilidade de calcular as formas de ganhá-lo.

4.2 Proposta 2 – Desafio do falso-positivo

A segunda proposta é um desafio de aplicação do Teorema para os alunos descobrirem as chances de um indivíduo não sofrer de uma enfermidade, apenas calculando as probabilidades.

A situação a ser passada aos alunos será a seguinte:

> *Uma doença está presente em 1% da população da cidade de Palmas no Tocantins. Um morador da cidade chamado* (propor aos alunos nomear o indivíduo) *fez o teste para a doença e o resultado foi positivo. Digamos que o teste esteja certo em 99% dos casos. Qual a probabilidade de* (nome do indivíduo escolhido pelos alunos) *não ter essa enfermidade caso o resultado seja um falso-positivo?*

Os dados estão organizados na Figura 8. Ao serem questionados, os alunos poderão chegar à conclusão de que há mais de 99% de chances de o indivíduo ter a enfermidade. Após todos exporem suas conclusões, armaremos e resolveremos o problema usando a definição do Teorema de Bayes. Sejam:

D – o evento ter a doença;

N – o evento não ter a doença;

T – o evento TESTE dar positivo.

Figura 8: Quadro de dados do desafio do falso-positivo

TIPOS DE PROBABILIDADE	TEM A DOENÇA	NÃO TEM A DOENÇA
Probabilidade a *priori*	0,01 ou 1%	0,99 ou 99%
Probabilidade Condicional (teste estar certo por ter dado positivo)	0,99 ou 99%	0,01 ou 1%

Fonte: Próprio autor

$$P(N\,|\,T) = \frac{P(T\,|\,N).P(N)}{P(T\,|\,D).P(D) + P(T\,|\,N).P(N)}$$

$$P(N\,|\,T) = \frac{0{,}01 \cdot 0{,}99}{0{,}99 \cdot 0{,}01 + 0{,}01 \cdot 0{,}99}$$

$$P(N\,|\,T) = \frac{0{,}0099}{0{,}0099 + 0{,}0099}$$

$$P(N\,|\,T) = 0{,}5$$

Ou seja, a chance de João não ter a doença dado que seu teste foi positivo é de 50%. Esse resultado pode não ser exatamente o que os alunos esperam e acabam sendo surpreendidos. Apesar de ser corriqueiro na medicina, o tema não é muito familiar ao ambiente escolar, o que leva os alunos a terem respostas intuitivas, por isso a importância de se trabalhar o Teorema de Bayes.

4.3 Proposta 3 – Cálculo da assertividade

Outra atividade a ser aplicada em sala de aula mostra a probabilidade de uma mulher descobrir se o resultado de sua mamografia retrata a realidade. No caso fictício, em que o exame deu positivo para neoplasia, procurar-se-á se ele realmente indica a presença do câncer de mama. A aula será iniciada com o pequeno texto abaixo:

Na publicação das Diretrizes para a Detecção Precoce do Câncer de Mama no Brasil (2015) ficamos cientes das seguintes informações:

- *Diagnóstico precoce é a identificação, o mais precocemente possível, do câncer de mama em indivíduos sintomáticos (que não sentem o efeito da doença), enquanto rastreamento é a identificação do câncer de mama em indivíduos assintomáticos (que é o oposto de sintomático).*

• *De modo geral, a população feminina de cada país apresenta um determinado risco padrão (ou populacional) de desenvolver um câncer de mama.*
• *No mundo, o risco cumulativo de uma mulher, com idade de 74 anos, ter apresentado esse tipo de câncer durante a vida é de 4,62%. Risco cumulativo é a razão entre o número de casos novos de uma doença e o total da população sob risco.*

A sensibilidade (probabilidade de confirmar a presença ou ausência de patologia em um indivíduo) da mamografia é de 85%, mas em 9,6% dos casos ele acusa resultados positivos para mulheres que não possuem a doença. Suponhamos que uma mulher (propor aos alunos nomeá-la) *pega o resultado da sua mamografia e descobre que o exame deu positivo. Com base nos dados, qual a probabilidade de* (nome da mulher) não *ter câncer de mama?*

O professor deve permitir aos alunos refletirem um pouco e após alguns minutos perguntar se é alta, baixa ou média a possibilidade dela ter câncer, em seguida começar a montar no quadro uma planilha (Figura 9).

Figura 9: Quadro de dados do cálculo da assertividade 1

TIPOS DE PROBABILIDADE	**TEM CÂNCER**	**NÃO TEM CÂNCER**
Probabilidade *a priori*	0,0462 ou 4,62%	0,9538 ou 95,38%

Fonte: Próprio autor

Ter o câncer de mama e não ter o câncer de mama são eventos mutuamente excludentes.

O resultado da mamografia: se o câncer está presente, a probabilidade condicional da mamografia ser positiva é 0,85 (85%) e se não está presente é de 0,096 (9,6%). Os dados devem ser acrescentados à planilha, conforme Figura 10.

Figura 10: Quadro de dados do cálculo da assertividade 2

TIPOS DE PROBABILIDADE	**TEM CÂNCER**	**NÃO TEM CÂNCER**
Probabilidade *a priori*	0,0462 ou 4,62%	0,9538 ou 95,38%
Probabilidade Condicional	0,85 ou 85%	0,096 ou 9,6%

Fonte: Próprio autor

Multiplicando a probabilidade *a priori* pela condicional, obtemos a probabilidade conjunta (Figura 11):

Figura 11: Quadro de dados do cálculo da assertividade 3

TIPOS DE PROBABILIDADE	**TEM CÂNCER**	**NÃO TEM CÂNCER**
Probabilidade *a priori*	0,0462 ou 4,62%	0,9538 ou 95,38%
Probabilidade Condicional	0,85 ou 85%	0,096 ou 9,6%
Probabilidade Conjunta	0,0462 . 0,85 = 0,0393	0,9538 . 0,096 = 0,0916

Fonte: Próprio autor

Percebe-se que a soma das probabilidades *a priori* é 1, porém o mesmo não ocorre com as probabilidades conjuntas. Nesse caso, usa-se o fator de normalização que é a divisão de cada probabilidade pela soma dos valores, no caso 0,0393 + 0,0916 = 0,1309. Assim chega-se à soma 1 que significará 100%. Realizando a divisão por 0,1309 encontra-se a probabilidade *a posteriori* (Figura 12):

Figura 12: Quadro de dados do cálculo da assertividade 4

TIPOS DE PROBABILIDADE	**TEM CÂNCER**	**NÃO TEM CÂNCER**
Probabilidade *a priori*	0,0462 ou 4,62%	0,9538 ou 95,38%
Probabilidade Condicional	0,85 ou 85%	0,096 ou 9,6%
Probabilidade Conjunta	0,0462 . 0,85 = 0,0393	0,9538 . 0,096 = 0,0916
Probabilidade *a posteriori*	0,0393/0,1309 = 0,3002	0,0916/0,1309 = 0,6998

Fonte: Próprio autor

Usando-se a definição do Teorema de Bayes, tem-se:

C – o evento ter câncer;

N – o evento não ter câncer;

M – o evento exame de mamografia dar positivo.

$$P(N \mid M) = \frac{P(M \mid N).P(N)}{P(M \mid C).P(C) + P(M \mid N).P(N)}$$

$$P(N \mid M) = \frac{0{,}096 \cdot 0{,}9538}{0{,}85 \cdot 0{,}0462 + 0{,}096 \cdot 0{,}9538}$$

$$P(N \mid M) = \frac{0{,}096 \cdot 0{,}9538}{0{,}85 \cdot 0{,}0462 + 0{,}096 \cdot 0{,}9538}$$

$$P(N \mid M) = \frac{0{,}09156}{0{,}03927 + 0{,}09156}$$

$$P(N \mid M) = \frac{0{,}09156}{0{,}13083}$$

$$P(N \mid M) = 0{,}6998$$

Pode-se observar que as chances da paciente não ter câncer são de 69,98%, mais que o dobro da chance dela ter câncer, que é de 30,02%, o que acabará gerando surpresa nos alunos pelo resultado ter dado positivo inicialmente. Esse é um raciocínio bayesiano muito utilizado em exames médicos para detectar falso-positivos, casos em que são preferíveis errar pelo excesso de zelo e não pela falta. “Os resultados falso-positivos do rastreamento podem trazer danos à saúde em função do impacto psicológico da possibilidade do diagnóstico de câncer e dos riscos inerentes à realização de exames de investigação diagnóstica” (INSTITUTO, 2015, p. 93).

Essa atividade, além de estimular a curiosidade matemática, mostra aos alunos que a matemática está inserida em diversos campos de conhecimento e é uma oportunidade à interdisciplinaridade, até com campanhas de saúde dentro da escola.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Thomas Bayes provou, através do seu experimento, que teve influências de Richard Price e Pierre Simon Laplace, sendo este último responsável pela versão moderna do Teorema, que uma crença inicial pode ser modificada por uma nova informação objetiva.

O Teorema de Bayes passou por diversas fases ao longo da história, do total esquecimento ao seu uso primordial em fatos históricos, como a Segunda Guerra Mundial. Atualmente a aplicação do Teorema é fundamental para a ciência, desenvolvimento de pesquisas e novas tecnologias, é ensinado na disciplina de Estatística nos primeiros semestres dos cursos superiores, mas seu ensino tem sido subestimado às séries finais da educação básica.

Como demonstrado, o Teorema de Bayes se adequa à proposta das competências e habilidades definidas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio; é a ferramenta de avaliação da pontuação dos participantes do ENEM; e sua aplicação em sala de aula é possível.

Portanto, o tema, como continuidade do conteúdo de probabilidade, é viável e pode ser próspera sua utilização com estudantes de nível médio, dando-lhes um leque maior de conhecimento e instigando suas capacidades criativas e de raciocínio no ensino da matemática, capacitando-os a utilizar o aprendizado fora da sala de aula, além da mera reprodução de informações.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Lei de diretrizes e bases da educação nacional, Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. **Diário Oficial [da] República Federativa do Brasil**, Brasília - DF, 20 dez. 1996. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>. Consultado em: 01 abr. 2016.

HAZZAN, Samuel. **Fundamentos da Matemática Elementar 5**: combinatória, probabilidade. 7ª edição. São Paulo: Atual, 2004.

INEP. Edital nº10, de 14 de abril de 2016. **ENEM 2016**. Brasília – DF. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/edital/2016/edital_enem_2016.pdf>. Consultado em: 15 mai. 2016.

____________. **Entenda a sua nota do ENEM** – Guia do Participante. Brasília – DF: Ministério da Educação, 2012. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/guia_participante/2013/guia_do_participante_notas.pdf> . Consultado em: 10 fev. 2016.

____________. **Nota Técnica** – Procedimento de cálculos das notas do Enem. Brasília – DF: Ministério da Educação, 2011. Disponível em: <http://download.inep.gov.br/educacao_basica/enem/nota_tecnica/2011/nota_tecnica_procedimento_de_calculo_das_notas_enem_2.pdf> . Consultado em: 15 mai. 2016.

INSTITUTO NACIONAL DE CÂNCER JOSÉ ALENCAR GOMES DA SILVA. **Diretrizes para a detecção precoce do câncer de mama no Brasil**. Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <http://www1.inca.gov.br/inca/Arquivos/livro_deteccao_precoce_final.pdf>. Consultado em: 09 ago. 2016.

LIMA, Rogério de Araújo. **Os Artigos Federalistas** – A contribuição de James Madison, Alexander Hamilton e John Jay para o surgimento do Federalismo no Brasil. Brasília a.48 n. 192 out./dez.2011. Disponível em: <https://www2.senado.leg.br/bdsf/bitstream/handle/id/242934/000936215.pdf?sequence=3>. Consultado em: 31 jan. 2016.

MARTINS, Gilberto de Andrade. **Princípios de estatística**. 4ª edição. 13ª reimpressão. São Paulo: Atlas, 2012.

MCGRAYNE, Sharon Bortsch. **The Theory that would not die**: how Beys' rule craked the enigma code, hunted down Russian submarines, and emerged triumphant from two centuries of controversy. Yale – UK: Yale University Press. New Haven & London, 2011.

SAVANT, Marilyn Vos. **Game Show Problem**. 1990. Disponível em: < http://marilynvossavant.com/game-show-problem/> . Consultado em: 10 fev. 2016.

SILVA, Ermes Medeiros, et al. **Estatística 1**. 3ª edição. São Paulo: Atlas, 1999.

SOUZA, Joamir. **Novo Olhar – Matemática**. Vol. 2 Ensino Médio. São Paulo: FTD, 2013.