



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos

por

Fernando Cesar de Abreu Viana

2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional



Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos †

por

Fernando Cesar de Abreu Viana

sob orientação do

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Mate-
mática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN
- UFPB, como requisito parcial para obtenção do tí-
tulo de Mestre em Matemática.

Março/2013

João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio da CAPES, Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Estudo e Aplicações de Probabilidade Geométrica e Paradoxos

por

Fernando Cesar de Abreu Viana

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Probabilidade.

Aprovada por:

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB

Prof. Dr. Gilberto Fernandes Vieira - UFCG

Março/2013

Agradecimentos

A Deus por todas as coisas boas que tem me proporcionado durante toda a minha vida.

À minha esposa Raquel e minha filha Natália por todo companheirismo e por toda compreensão nos momentos em que não pude estar presente durante esses dois últimos anos.

Aos meus pais Josimar e Ana a quem agradeço de coração por terem me proporcionado condições morais e estruturais para que eu pudesse chegar nessa etapa acadêmica.

Aos meus irmãos Ana Paula, Marco e Carol por terem sido parceiros e amigos de uma vida inteira.

Aos professores e coordenadores do Mestrado pelas ótimas aulas e pelas valorosas contribuições matemáticas, em especial aos professores Bruno e Napoleón.

Aos meus colegas de Mestrado, que estiveram junto comigo nessa caminhada durante os dois últimos anos, pelo companheirismo e amizade, em especial Herbert, Geraldo e Marcelo.

Ao meu amigo Sheldon pelas imensuráveis contribuições no Latex e sempre pelo torcida do sucesso.

Aos professores Uberlandio, Gilberto e Elisandra, membros da Banca Examinadora pelas correções e sugestões.

Ao meu orientador professor Manassés Xavier que, além de ter sido o professor da disciplina que inspirou esse trabalho, acompanhou, corrigiu e o redirecionou por diversas vezes sempre com dedicação e sabedoria.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa concedida.

Dedicatória

*À minha esposa Raquel e a minha filha
Natália que tornam a minha vida bela.*

Resumo

Este trabalho, após uma breve resumo histórico e teórico sobre probabilidade, aborda o tema probabilidade geométrica. Entendemos que esse é um ramo importante da teoria das probabilidades e tivemos oportunidade de apresentar alguns exemplos. Inicialmente, estudamos o mais famoso problema de probabilidade geométrica, que é o problema da agulha de Buffon. Após alguns anos, a aplicação desse problema possibilitou Allan MacLeod Cormack e Godfrey Newbold Hounsfield, ganhadores do Prêmio Nobel da Medicina, o invento e desenvolvimento da tomografia computadorizada. No trabalho também é apresentado uma forma interessante de calcular áreas de figuras não elementares usando a probabilidade geométrica através do Método de Monte Carlo. Um outro tópico abordado diz respeito aos paradoxos probabilísticos. Os paradoxos apresentados são aqueles que são contrário ao senso comum.

Palavras-Chave: Probabilidade geométrica, paradoxo, intuição, problema da agulha de Buffon.

Abstract

This work, after a brief history and theory of probability, approaches the subject geometric probability. We believe it is an important branch of probability theory and we had the opportunity to present some examples. Initially, we studied the most famous problem in geometric probability, which is the problem of Buffon's needle. After a few years, the application of this problem allowed Allan MacLeod Cormack and Godfrey Newbold Hounsfield, Nobel Prize winners in Medicine, the invention and development of computed tomography. This work also presents an interesting way to calculate areas of no elementary figures by using the geometric probability via the Monte Carlo Method. Another topic addressed concerns probabilistic paradoxes. The paradoxes presented are those which are contrary to common sense.

Keywords: Geometric probability, paradox and intuition, Buffon's needle.

Sumário

1	Um Pouco de História	1
1.1	Introdução	1
1.2	Jogos de Azar	2
1.3	Gerolamo Cardano	4
1.4	Pascal e Fermat	6
2	Breve Revisão de Probabilidades	8
2.1	Experimento Aleatório e Experimento Determinístico	8
2.2	Espaço Amostral	9
2.3	Evento	9
2.4	Probabilidade (Definição Clássica)	10
2.5	Eventos Equiprováveis e Eventos não Equiprováveis	11
2.6	Algumas propriedades de probabilidade	12
2.7	Probabilidade Condicional	13
2.8	Propriedades da probabilidade condicional	14
2.9	Eventos independentes	17
3	Probabilidade Geométrica	19
3.1	Um Pouco de História	19
3.2	O problema da agulha de Buffon	20
3.2.1	Valores experimentais para π	25

3.2.2	Aplicação na Medicina	28
3.3	Uma variação do problema da agulha	29
3.4	O Problema de Laplace	32
3.5	Extensão do problema de Laplace	35
3.6	Método de Monte Carlo para cálculo de áreas. Uma aplicação em sala de aula.	37
3.6.1	Experiência	38
4	Paradoxos	44
4.1	Paradoxo do Aniversário	45
4.2	Paradoxo dos Três Dados	49
4.3	O problema de Monty Hall	51
4.4	Paradoxo das Coincidências	57
4.4.1	O problema da secretária desatenta	60
4.5	O Paradoxo de Bertrand	60
4.6	O problema das moedas	64
A	Apêndice	69
A.1	Permutações caóticas ou desarranjos	69
A.2	Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet .	72
	Referências Bibliográficas	74

Introdução

A teoria das probabilidades é um ramo da Matemática extremamente aplicável nas mais diversas áreas e iniciamos o nosso trabalho fazendo um pequeno retrospecto da sua história. No primeiro capítulo fizemos uma referência à motivação inicial do estudo das probabilidades, que foram os jogos de azar, muito difundidos na idade média e na idade moderna até os dias atuais.

O início da formalização do estudo da probabilidade com Cardano, Pascal e Fermat também foi abordado. No segundo capítulo, fizemos uma breve revisão da teoria, relembramos a definição clássica, as principais propriedades, a probabilidade condicional, o Teorema do produto e o Teorema de Bayes. Os pontos estudados servem de alicerces para o entendimento dos capítulos seguintes.

Já no terceiro capítulo, tratamos de probabilidade geométrica. Fizemos uma análise do principal problema de probabilidade geométrica que é o problema da agulha de Buffon que pede para determinar qual a probabilidade de uma agulha lançada aleatoriamente em um assoalho com linhas paralelas cair sem haver interseção com essas linhas.

Fizemos uma aplicação interessante que foi estimar o valor de π usando o problema da agulha de Buffon. Usamos também a probabilidade geométrica para realizar cálculos de áreas não elementares de figuras planas.

No quarto e último capítulo, tratamos alguns paradoxos probabilísticos. A palavra paradoxo foi usada no sentido de ser contra a opinião comum. Fizemos um estudo

detalhado dos paradoxos do aniversário e dos três dados. Em seguida discutimos o famoso problema de Monty Hall e usamos o Teorema de Bayes na demonstração de alguns desses resultados. Por fim, fizemos uma análise do paradoxo das coincidências e do problema das moedas. Também foi escrito um apêndice no qual os leitores mais interessados podem obter informações sobre permutações caóticas e sobre o princípio das gavetas de Dirichlet.

Capítulo 1

Um Pouco de História

1.1 Introdução

A probabilidade está muito presente em nosso dia a dia. No início de toda partida do campeonato brasileiro de futebol, o juiz lança uma moeda para cima e os capitães dos clubes fazem a escolha entre cara e coroa. Ao descobrir que está grávida, uma mulher e seu marido, e muitos familiares costumam “apostar” qual será o sexo do bebê. Ao verificarmos a previsão do tempo para o final de semana, ficamos sabendo qual a chance de chover. Quando jogamos na loteria, sabemos que o nosso bilhete tem, embora muito pequena, uma chance de ser o premiado.

A esses e muitos outros acontecimentos do nosso cotidiano temos a *probabilidade* como figura principal. Mesmo os leigos em Matemática parecem entender que existe um número que quantifica a chance de algo vir a ocorrer.

A teoria das probabilidades é o ramo da Matemática que pesquisa e desenvolve modelos para o estudo dos mais diversos fenômenos aleatórios. A palavra probabilidade é derivada do latim *probare*, que significa provar ou testar. É comum usarmos a palavra provável para indicar algo que não se tem certeza que vai acontecer. Também é frequente esta palavra estar associada às palavras sorte, azar, incerto, chance

e duvidoso, de acordo com o contexto da frase.

As primeiras manifestações catalogadas envolvendo probabilidade referem-se a práticas de “jogos de azar”.

1.2 Jogos de Azar

Jogos de azar são aqueles que não dependem totalmente da habilidade do jogador, mas exclusiva ou predominantemente de sua sorte ou de seu azar. Em outras palavras, se você repetir a realização do evento em condições idênticas a anterior, ainda assim não poderá prever com exatidão qual será o resultado.

Os jogos de dados surgiram há muito tempo, mas não eram da forma como conhecemos hoje. Os dados comuns possuem seis faces numeradas de 1 a 6 e têm a forma de um hexaedro regular. Os dados antigos, que eram conhecidos como *astrálagos*, eram formados por ossos de patas de animais, tais como veados, bezerros, ovelhas ou cabras e, embora possuíssem seis faces não regulares, apenas quatro possuíam estabilidade suficiente para servirem de apoio no chão. Para as faces maiores, eram atribuídos os números 3 e 4, enquanto que para as menores eram atribuídos os números 1 e 6. Dessa forma, as frequências dos resultados para o *Tali* (como eram conhecidos os jogos de ossos) eram bem diferentes, como nos mostra a tabela a seguir. Esses dados também eram utilizados para realizar previsões acerca do futuro. Para isso, eram jogados vários ossos de uma vez e realizado uma “leitura”.

Faces	1	3	4	6
Frequência	0,12	0,37	0,39	0,12

Os gregos e os romanos também utilizavam o astrálogo em seus jogos, porém com 4 unidades de uma vez. A *jogada de vênus*, a mais valiosa do jogo, era aquela que

as quatro faces voltadas para cima eram todas distintas. Já o lance menos valioso do jogo, era a obtenção de quatro uns, conhecida como “os cães”. Curiosamente, o lance menos valioso do jogo era também o mais raro de acontecer, com probabilidade aproximada de 1 em 5000, mas os gregos e os romanos não possuíam tal informação.

No Brasil, a Lei 3688 de 1941 (Lei dos jogos de azar) proíbe “o jogo em que o

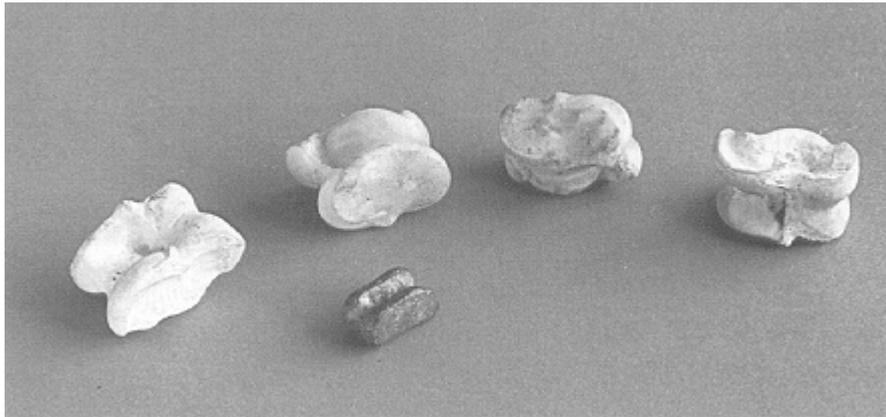


Figura 1.1: Astrálagos.

ganho e a perda dependem exclusiva ou principalmente da sorte”. A exceção é feita aos jogos autorizados pela Caixa Econômica Federal ou jogos que não envolvam vantagens financeiras. Os jogos de azar motivaram o desenvolvimento da teoria das probabilidades.

Em 960 o bispo belga Wibold, da cidade de Cambrai, enumerou corretamente (sem as permutações) os 56 resultados possíveis no jogo de 3 dados. Para cada um dos resultados, ele atribuiu uma virtude e criou assim um jogo moral. Com isso o Bispo deu um passo no caminho da formalização da teoria da probabilidade.

Mais tarde, entre 1220 e 1250, Richard de Fornival escreveu um poema latino, dividido em três livros e intitulado *De Vetula*. Abaixo segue a tradução de uma passagem do poema (vide [1]) que apresenta as possibilidades para o lançamento de 3 dados, agora com a permutação:

Talvez, diremos que certos números são melhores
Do que outros para uso em jogos, pela razão que,
Desde que um dado tenha seis lados e seis números unitários,
Em três dados existem dezoito,
Dos quais apenas três podem estar nas faces superiores dos dados.
Eles variam em diferentes maneiras e deles,
Dezesseis números compostos são produzidos. Eles não são, porém,
De igual valor, desde que o maior e o menor deles
Ocorra raramente e os do meio mais frequentemente,
E o restante, o quanto mais próximo estão daqueles do meio,
Melhores são e mais frequentemente ocorrem.
Esses, quando ocorrem, têm apenas uma configuração de faces nos dados,
Aqueles são seis, e os restantes têm configurações intermediárias entre os dois,
Tais que existem dois números maiores e exatamente a mesma quantidade de
menores,
E esses têm uma configuração. Os dois seguintes,
O maior, e o outro menor, têm duas configurações de faces nos dados cada um.
Novamente, depois deles existem três cada um, então quatro cada um.
E cinco cada um, como eles seguem em sucessão de aproximação.
Os quatro números do meio têm seis configurações de faces nos dados cada um.

1.3 Gerolamo Cardano

É impossível desvincular o estudo dos jogos de azar de Gerolamo Cardano (1501 - 1576). Filho de Fazio Cardano, que era um bem sucedido conselheiro e de Chiara

P. OVIDII NASONIS					
666					1
665					2
664	655				3
663	654	555			4
662	653	644	554		5
661	652	643	553	445	6
651	642	633	552	543	7
641	632	551	542	533	8
631	622	541	532	442	9
621	531	522	441	432	10
611	521	431	422	332	11
511	421	331	222		12
411	321	221			13
311	221				14
211					15
111					16

Figura 1.2: Trecho do poema De Vetula na versão impressa em 1534 (vide [1]).

Micheri, Cardano nasceu em Pavia depois de um doloroso trabalho de parto que durou três dias. A parteira fez uma previsão de uma morte breve, cerca de uma hora de vida para Cardano, mas para a surpresa de todos e para o bem da Matemática, ele sobreviveu por quase 75 anos. Ainda bebê, Cardano contraiu a peste bubônica e contrariou mais uma vez a expectativa de uma morte breve. Seus três irmãos, que também contraíram a peste, não tiveram a mesma sorte e morreram. Em 1516 Cardano decidiu deixar a casa da família e viajar para estudar Medicina, contrariando seu pai que gostaria que Cardano estudasse Direito e tivesse assim permissão de receber uma ajuda de custo anual de 100 coroas.

Para manter-se longe da família e custear os estudos, Cardano começou a participar dos jogos de azar. Por ter compreendido um pouco dos resultados, mais e menos prováveis nas apostas, em pouco tempo já havia juntado 1.000 coroas, o equivalente a uma década da ajuda do custo anual para o curso de Direito.

Cardano criou uma regra, em seu livro *Liber De Ludo Aleae* (O livro dos jogos de azar) que foi publicado em 1665, quase um século após a sua morte, que em

linguagem atual se traduz por: “Suponha que um processo aleatório tenha muitos resultados igualmente prováveis, alguns favoráveis (ou seja, ganhar), outros desfavoráveis (perder). A probabilidade de obtermos um resultado favorável é igual a proporção entre resultados favoráveis e o total de resultados. O conjunto de todos os resultados possíveis é chamado de espaço amostral” (vide [2]) .

Essa regra de Cardano é a definição clássica de probabilidade que será retomada em breve. Como seu livro demorou muito tempo para se tornar público, dois outros personagens tiveram papel predominante para impulsionar a formalização da teoria das probabilidades: Blaise Pascal (1623 - 1662) e Pierre de Fermat (1601 - 1665).

1.4 Pascal e Fermat

Pascal nasceu ao sul de Paris e aos 13 anos já participava de reuniões em um grupo de discussão com importantes intelectuais como René Descartes (1596 - 1650). Já em 1651, com o falecimento de seu pai, Pascal herdou uma grande herança e passou a participar de diversas festas. Um de seus companheiros de festa, Antoine-Gombaud (Chevalier de Mére), um conhecido apostador, fez a seguinte pergunta a Pascal: *se você e outro jogador, igualmente hábil, participam de um jogo em que o vencedor é aquele que atingir certo número de pontos, e antes do final, com um jogador na liderança, o jogo é interrompido, como seria a divisão justa do dinheiro apostado?* Esse problema é conhecido como o *problema dos pontos*.

Pascal percebeu que as ferramentas para a resolução desse problema ainda não existiam e escreveu para seu amigo Pierre de Fermat, começando uma das trocas de correspondências mais importantes da história da Matemática. Nessa época, Fermat ocupava um alto cargo na corte criminal de Toulouse e não era um profissional da Matemática. Fermat, por sua genialidade, é considerado o maior matemático amador da história. Tanto Pascal quanto Fermat chegaram à solução do problema considerado anteriormente, embora cada um tenha escolhido uma abordagem dife-

rente.

Conceitos importantes como probabilidade e a esperança matemática foram sendo formalizados a partir das correspondências de Pascal e Fermat. Nos anos que se sucederam, outros importantes matemáticos como James Bernoulli, Laplace, Gauss e Poisson contribuíram com novos conceitos, formalização e aplicações da probabilidade.

Capítulo 2

Breve Revisão de Probabilidades

2.1 Experimento Aleatório e Experimento Determinístico

Se fizermos repetidos lançamentos de um dado, com suas faces numeradas de 1 a 6, com a mesma altura do solo, jogando sempre com a mesma intensidade de força, efetuando o lançamento sempre do mesmo local, ou seja, em condições idênticas, veremos resultados diferentes. Não podemos determinar antecipadamente qual será o resultado obtido, pois ele dependerá do *acaso*. *Experimento aleatório* é aquele que repetido diversas vezes, sob condições idênticas, produzem resultados diferentes.

O lançamento de uma moeda é um experimento aleatório, pois não podemos prever com exatidão se o resultado será cara ou coroa. Retirar aleatoriamente uma carta de um baralho que contém 52 cartas, sortear um número entre 1 a 10, sortear uma bola de uma urna que contém 5 bolas de cores diferentes são outros exemplos de experimentos aleatórios.

Agora, se você faz um experimento para saber qual será a temperatura em que a água pura, em condições normais, ferve, terá como resultado $100^{\circ}C$. Se o experimento for para descobrir qual o ponto de fusão do gelo, o resultado será $0^{\circ}C$.

Experimento determinístico é aquele que repetido em condições idênticas produz resultados idênticos. O experimento determinístico é único e previsível.

2.2 Espaço Amostral

Imagine a seguinte situação: você deverá descrever todos os resultados possíveis no lançamento de um dado de 6 faces. Os resultados possíveis com a face voltada para cima são: 1, 2, 3, 4, 5, ou 6. Chamamos de *espaço amostral* e representaremos por Ω o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Então temos que o espaço amostral no lançamento desse dado de seis faces é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

No lançamento de duas moedas, teremos como espaço amostral o conjunto $\Omega = \{(K, K), (K, C), (C, K), (C, C)\}$, onde a letra K representa o resultado cara e a letra C representa o resultado coroa.

Nos dois exemplos acima, o espaço amostral era formado por um conjunto finito, porém se a situação fosse escolher um número real no intervalo $[1, 10]$, teríamos um espaço amostral com infinitos elementos.

2.3 Evento

Imagine uma situação em que você participa de um jogo de tabuleiro com alguns colegas e para ganhar precisa tirar um número maior ou igual a cinco no lançamento de um dado comum de seis faces. O conjunto que representa os resultados que darão a vitória a você é $A = \{5, 6\}$. Observe que esse conjunto é um subconjunto do espaço amostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Este subconjunto é o evento desejado por você para ganhar o jogo. Qualquer subconjunto do espaço amostral é chamado de *evento* e geralmente é representado por letras do nosso alfabeto: A, B, C, \dots

2.4 Probabilidade (Definição Clássica)

Ao lançarmos uma moeda, usando a nossa intuição, dizemos que a chance de cair qualquer uma das faces voltadas para cima é a mesma, ou seja, que existe 50% de chance dela cair com a face coroa voltada para cima e 50% de chance dela cair com a face cara voltada para cima. A chance da ocorrência de um desses eventos é chamada de *probabilidade*.

A probabilidade da ocorrência de um evento A , indicada por $P(A)$ é a razão entre o número de elementos do evento $n(A)$ e o número de elementos do espaço amostral $n(\Omega)$, ou seja,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}, \quad (2.1)$$

ou, de forma equivalente,

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis ao evento } A}{\text{número de resultados possíveis do experimento}}.$$

Essa foi a definição usada por Cardano em seu livro *Liber De Ludo Aleae*.

Exemplo 1 *No lançamento de um dado de seis faces, qual a probabilidade de obtermos um número par?*

Solução: O evento A será dado por $A = \{2, 4, 6\}$. Logo, $n(A) = 3$. O espaço amostral é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Logo, $n(\Omega) = 6$. Portanto, a probabilidade de obtermos um número par no lançamento de um dado é calculado fazendo uso da fórmula (2.1), ou seja,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

ou seja, 50%. Observe que os resultados podem ser dados em fração, decimal ou porcentagem, sendo o primeiro geralmente o mais fácil de ser trabalhado.

Da definição, podemos extrair algumas consequências:

(a) $P(A) \geq 0$;

(b) Se A e B são dois subconjuntos disjuntos de Ω , isto é, $A \cap B = \emptyset$, tem-se que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

(c) $P(\Omega) = 1$. Neste caso, dizemos que o evento é *certo*.

(d) $P(\emptyset) = 0$. Neste caso, dizemos que o evento é *impossível*.

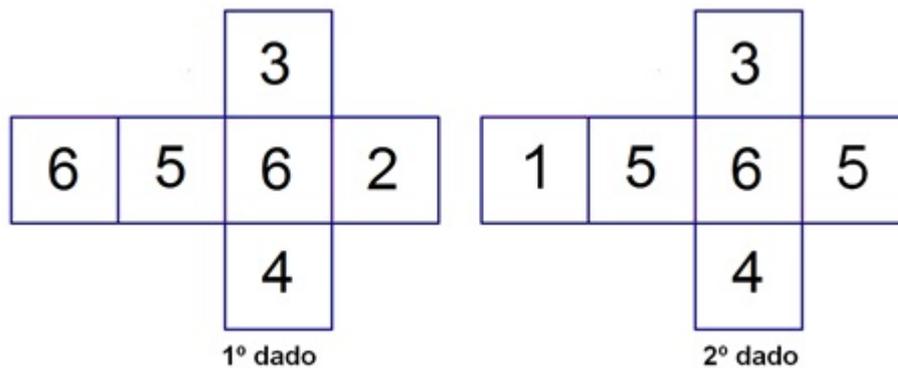
2.5 Eventos Equiprováveis e Eventos não Equiprováveis

Quando você faz o lançamento de uma moeda, a probabilidade de sair a face cara voltada para cima é de 50% e de sair a face coroa é também de 50%, como vimos. Já no lançamento de um dado de seis faces, a probabilidade individual de sair qualquer uma das faces é $1/6$. A esses eventos, que tem a mesma probabilidade de ocorrer, damos o nome de *eventos equiprováveis*. Neste caso, dizemos que o dado é *perfeito, honesto* ou *não viciado*.

Agora, imagine um jogador desonesto que confecciona um dado de seis faces, porém sem a face com o número 1, com duas faces com o número 6 e as demais faces com a incidência normal. No lançamento desse dado, qual seria a probabilidade de sair a face com o número 1 voltada para cima? E com a face número 4? E com a face número 6?

É fácil observar que as respostas são, respectivamente, $P(A) = 0$ (evento impossível), $P(B) = 1/6$ e $P(C) = 2/6 = 1/3$. Esses eventos não têm a mesma probabilidade de acontecer e são chamamos de *eventos não equiprováveis*. O dado

do exemplo anterior é chamado de dado *imperfeito*, *desonesto* ou *viciado*. Na figura abaixo temos a planificação de dois dados viciados de 6 faces.



2.6 Algumas propriedades de probabilidade

Nesta seção, vamos demonstrar algumas propriedades referentes às probabilidades.

Proposição 1 *Valem as seguintes propriedades das probabilidades:*

- (a) $P(A^c) = 1 - P(A)$, onde A^c é o evento complementar de A .
- (b) Se $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$.
- (c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Demonstração: (a) De fato, como os conjuntos A e A^c são disjuntos, segue que

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

e, portanto,

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

(b) Se $A \subset B$, então $B = A \cup (B - A)$, donde

$$P(B) = P[A \cup (B - A)]$$

e, portanto,

$$P(B) = P(A) + P(B - A).$$

Daí, $P(A) = P(B) - P(B - A) \leq P(B)$, o que conclui a demonstração de (b).

(c) Veja que $A \cup B = A \dot{\cup} (B - A)$. Logo, $P(A \cup B) = P(A) + P(B - A)$. Além disso, como $B = (A \cap B) \dot{\cup} (B - A)$, temos que $P(B) = P(A \cap B) + P(B - A)$.

Portanto,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) - P(B) &= P(A) + P(B - A) - P(B) \\ &= P(A) + P(B - A) - P(A \cap B) - P(B - A) \\ &= P(A) - P(A \cap B). \end{aligned}$$

Daí, segue o resultado. ■

2.7 Probabilidade Condicional

Considere a situação em que você precisa acertar antecipadamente em uma única tentativa, o número da face que ficará voltada para cima de um dado honesto de seis faces. Obviamente a probabilidade de você acertar o resultado é $1/6$, pois $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e você possui apenas uma tentativa. Porém, se após o lançamento, alguém passa a informação de que o resultado foi um número par, intuitivamente você sabe que sua chance aumenta consideravelmente. A probabilidade de acerto salta para $1/3$, pois o seu novo espaço amostral é $\Omega' = \{2, 4, 6\}$. Dessa forma, definiremos $P(B|A)$ como sendo a probabilidade de ocorrer o evento B , sabendo

que o evento A já ocorreu. Daí, podemos escrever que

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}. \quad (2.2)$$

Por exemplo, considere um dado honesto de 6 faces e os eventos A : *sair um número par* e B : *sair um número primo*. Qual a probabilidade de acontecer o evento B , sabendo que o evento A já ocorreu? Temos que $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$ e $P(A \cap B) = 1/6$. Portanto, por (2.2), temos que

$$P(B|A) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

2.8 Propriedades da probabilidade condicional

Nesta seção, vamos descrever algumas propriedades fundamentais da probabilidade condicional.

Proposição 2 *Considere um evento A de um espaço amostral Ω . Teremos as seguintes propriedades:*

- (a) $P(\emptyset|A) = 0$.
- (b) $P(\Omega|A) = 1$.
- (c) $0 \leq P(A|B) \leq 1$.

Demonstração: De fato, para o item (a), note de (2.2) que

$$P(\emptyset|A) = \frac{P(\emptyset \cap A)}{P(A)} = \frac{0}{P(A)} = 0.$$

Já para o item (b), temos

$$P(\Omega|A) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Finalmente, como $A \cap B \subset A$, segue que $P(A \cap B) \leq P(A)$, donde

$$0 = \frac{0}{P(A)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \stackrel{(2.2)}{=} P(A|B) \leq \frac{P(A)}{P(A)} = 1,$$

o que prova o último item. ■

Proposição 3 (Teorema do Produto) *Dados A_1, A_2, \dots, A_n eventos de um espaço amostral Ω , temos que*

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \\ = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}). \end{aligned}$$

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre n . O caso $n = 1$ é imediato. Suponha que $n = 2$. Então, temos por (2.2) que

$$P(A_2|A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)},$$

o que implica que

$$P(A_2 \cap A_1) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1).$$

Esta última equação é a propriedade referente à proposição com $n = 2$. Suponha, então, que a igualdade é válida para $n = m$. Daí, de

$$P(A_{m+1}|A_1 \cap \dots \cap A_m) = \frac{P(A_1 \cap \dots \cap A_m \cap A_{m+1})}{P(A_1 \cap \dots \cap A_m)}$$

vem que

$$\begin{aligned} P(A_1 \cap \dots \cap A_{m+1}) &= P(A_1 \cap \dots \cap A_m) \cdot P(A_{m+1}|A_1 \cap \dots \cap A_m) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdots P(A_{m+1}|A_1 \cap \dots \cap A_m), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é justificada pela hipótese de indução. ■

Lema 2.1 *Uma aplicação do teorema do produto é a seguinte. Considere A_1, A_2, \dots, A_n partições de um espaço amostral Ω e B um evento qualquer desse espaço amostral.*

Então, podemos escrever

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

e também

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B).$$

Portanto,

$$P(B) = P[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)]$$

e, então,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B).$$

Assim, usando o teorema do produto, temos que

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B|A_1) + P(A_2) \cdot P(B|A_2) + \dots + P(A_n) \cdot P(B|A_n).$$

Este resultado é conhecido como o *Teorema da Probabilidade Total*.

Teorema 1 (Teorema de Bayes) *Considere A_1, A_2, \dots, A_n partições de um espaço amostral Ω e B um evento qualquer desse espaço amostral. Então,*

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Dessa forma, estamos calculando a probabilidade $P(A_i|B)$ como sendo a probabilidade de ocorrer o evento A_i , sabendo que o evento B já ocorreu. O número $P(A_i)$ é denominado *probabilidade a priori* do evento A_i e $P(A_i|B)$ é denominado *probabilidade a posteriori* do evento A_i .

Demonstração: Sabemos que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}.$$

Daí, usando o teorema do produto e a observação acima, temos o resultado. ■

2.9 Eventos independentes

Sejam A e B dois eventos do espaço amostral Ω . Os eventos A e B são ditos *independentes* quando $P(A|B) = P(A)$ e $P(B|A) = P(B)$. Em outras palavras, ter acontecido um dos eventos não exerce nenhuma influência na probabilidade de acontecer o outro.

Lema 2.2 *Se A e B são eventos independentes, temos que*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Com efeito, como $P(A|B) = P(A)$ e $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$, segue que

$$P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

e, portanto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Exemplo 2 *Qual a probabilidade de um casal ter duas crianças, sendo que a mais velha é uma menina e a criança mais nova é um menino?*

Solução: Observe que o resultado do sexo da primeira criança não exerce influência na probabilidade do resultado do sexo da segunda. São, portanto, eventos independentes. Considere o evento A como sendo a primeira criança ser menina e o evento B como sendo a segunda criança ser menino. Dessa forma, a probabilidade do casal

ter duas crianças, sendo que a mais velha é uma menina e a criança mais nova é um menino é dada por

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Observe ainda que esse exemplo nos remete a resolver uma confusão muito comum, que é o de confundir eventos independentes com *eventos mutuamente excludentes* ou *mutuamente exclusivos*, que são aqueles em que a ocorrência de um, automaticamente, exclui a ocorrência do outro. Se o casal quisesse ter apenas uma criança, e o evento A fosse nascer menina e o evento B fosse nascer menino, é óbvio que $A \cap B = \emptyset$. Portanto, $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0$.

Capítulo 3

Probabilidade Geométrica

3.1 Um Pouco de História

Em 1707 em Montbard, uma pequena cidade do sul da França, nasceu Georges-Louis Leclerc que mais tarde seria conhecido como Conde de Buffon. Filho de Benjamin-François Leclerc e de Anne-Cristine Marlin, Georges nasceu em uma família rica e era o mais velho de cinco filhos. Quando Georges tinha 10 anos, sua mãe herdou uma grande quantia em dinheiro, o que permitiu que seu marido se tornasse o Conde de Montbard. Seguindo as orientações do pai, Georges se mudou para Dijon e foi estudar Direito no Colégio Jesuíta de Gordans, mas logo a inclinação por Matemática e Ciências começou a aflorar.

Em 1732 herdou uma considerável quantia em dinheiro e poucos anos depois, já como Conde de Buffon, ingressou na Academia Francesa de Ciências, o que possibilitou que ele se dedicasse a escrever uma obra com 44 volumes sobre História Natural (vide [3]). O Conde de Buffon foi precursor de Darwin e de Lamarck, e é considerado um dos maiores biólogos de todos os tempos.

O início do estudo da probabilidade geométrica se deu por volta do século XVIII a partir de um problema conhecido como *problema da agulha de Buffon*. Nesse

problema, o Conde de Buffon estava interessado em determinar algebricamente qual a probabilidade de uma agulha lançada aleatoriamente em um assoalho com linhas paralelas cair sem haver interseção com essas linhas.

Já em 1733, o Conde de Buffon apresentou um trabalho intitulado de “jogo de Franc Carreau”, no qual ele descrevia a probabilidade de uma moeda lançada aleatoriamente em um piso ladrilhado com lajotas congruentes, cair completamente dentro de um dos ladrilhos, ou seja, sem cortar qualquer linha dos ladrilhos. Esses ladrilhos poderiam ser triangulares, quadrangulares, pentagonais, etc.

3.2 O problema da agulha de Buffon

Um assoalho com linhas paralelas entre si e uma agulha extremamente fina foram os materiais que Buffon possuía ao iniciar suas observações a respeito de probabilidade geométrica.

Considere o seguinte problema. Um plano é marcado por linhas paralelas equidistantes entre si. A distância entre uma linha e outra mede d e uma agulha de comprimento l e de espessura desprezível será lançada aleatoriamente sobre esse plano. *Qual a probabilidade da agulha cruzar uma das linhas do plano?* Para responder a esta pergunta, vamos dividir o problema em três partes.

Primeiro caso: (Caso clássico) $l = d$. Analisando as Figuras 3.1 e 3.2, observamos que os eventos de interesse são aqueles em que x é menor que o cateto adjacente do triângulo OPA de argumento θ , onde x denota a distância entre o centro da agulha e a linha do plano mais próxima. Sabemos que $OP = l/2$ e, pela definição de cosseno, que

$$\cos \theta = \frac{OP}{OA}$$

o que implica que

$$OP = \frac{l}{2} \cdot \cos \theta.$$

3.2. O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

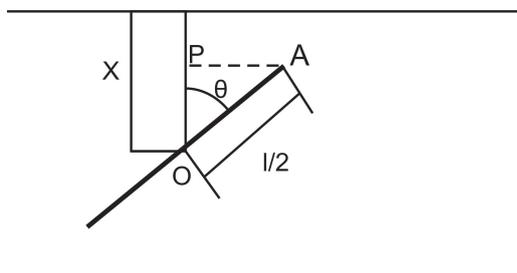


Figura 3.1: A agulha não intersecta uma das linhas.

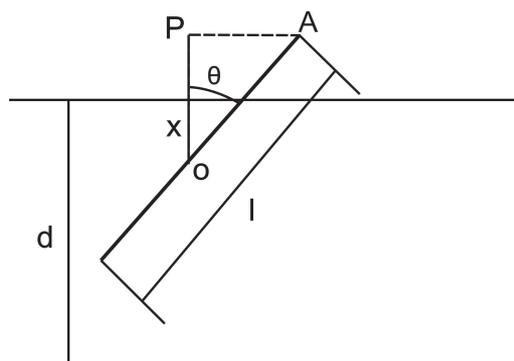


Figura 3.2: A agulha intersecta uma das linhas.

Dessa forma, existem duas possibilidades para o evento:

- (1) quando $x < \frac{l}{2} \cdot \cos \theta$, a agulha cruzará uma das linhas do plano.
- (2) quando $x \geq \frac{l}{2} \cdot \cos \theta$, a agulha não cruzará uma das linhas do plano.

Para facilitar a interpretação geométrica, podemos observar o gráfico da Figura 3.3 abaixo em função de x e θ . É importante observar que $x \in [0, l/2]$ e que $\theta \in [0, \pi/2]$, e que as variáveis x e θ são variáveis independentes.

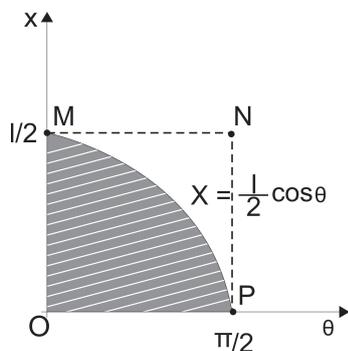


Figura 3.3: Gráfico das possibilidades do evento

Os casos favoráveis ao evento estão representados pela área sombreada, enquanto o espaço amostral do evento está representado pela área interna do quadrilátero

3.2. O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

OMNP. Como a distribuição de x e θ é uniforme, a probabilidade da agulha cair cruzando uma das linhas do plano é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}.$$

A área sombreada pode ser calculada pela integral de 0 e $\pi/2$ de $(l/2) \cdot \cos \theta$. Mas

$$\int_0^{\pi/2} \frac{l}{2} \cdot \cos \theta d\theta = \frac{l}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{l}{2} \cdot \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \text{sen}(0) \right) = \frac{l}{2}.$$

Além disso, a área interna do quadrilátero é dada por

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi \cdot l}{4}.$$

Portanto, a probabilidade da agulha cair cruzando uma das linhas do plano será

$$P(A) = \frac{l/2}{\pi \cdot l/4} = \frac{2}{\pi}.$$

Segundo caso: (Agulha curta) $l < d$. De forma análoga ao caso anterior, temos que os casos favoráveis ao evento estão representados pela área sombreada, enquanto o espaço amostral do evento está representado pela área interna do quadrilátero *OMNP* da Figura 3.4.

Como a distribuição de x e θ é uniforme, a probabilidade da agulha cair cruzando uma das linhas do plano é dada por:

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}.$$

Analogamente, a área sombreada é dada por $l/2$, enquanto que a área interna do

3.2. O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

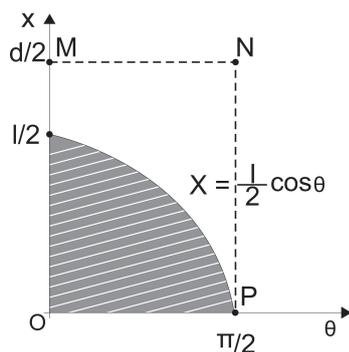


Figura 3.4: Segundo caso.

quadrilátero por

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d}{4}.$$

Portanto a probabilidade da agulha cair cruzando uma das linhas do plano será

$$P(A) = \frac{l/2}{\pi \cdot d/4} = \frac{2l}{\pi \cdot d}.$$

Observe que quando o comprimento da agulha é a metade da distância entre duas linhas paralelas, ou seja, $l = d/2$, temos que a probabilidade é dada por $P(A) = 1/\pi$.

Terceiro caso: (Agulha longa) $l > d$. Seguindo o que foi feito anteriormente, temos novamente que

$$P(A) = \frac{\text{área sombreada}}{\text{área interna do quadrilátero}}.$$

Para calcular a área sombreada da Figura 3.5, faremos a divisão em duas áreas menores, A_1 e A_2 . Considerando o ponto $Q = (\theta_1, d/2)$ e a função $x = \frac{l}{2} \cos \theta$ teremos que $\frac{d}{2} = \frac{l}{2} \cdot \cos \theta_1$, ou seja, $\cos \theta_1 = d/l$, donde $\theta_1 = \cos^{-1}(d/l)$. Portanto, a

3.2. O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

área A_1 é dada por:

$$A_1 = \frac{d}{2} \cdot \theta_1 = \frac{d}{2} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{d}{l} \right).$$

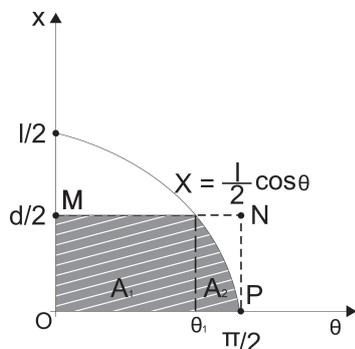


Figura 3.5: Terceiro caso.

Já a área A_2 é dada por:

$$A_2 = \int_{\theta_1}^{\pi/2} \frac{l}{2} \cdot \cos \theta d\theta = \frac{l}{2} \cdot \left(\text{sen} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \text{sen} \theta_1 \right).$$

Como $\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta = 1$, segue que

$$A_2 = \frac{l}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{l} \right) = \frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2}.$$

Como a área do quadrilátero $OMNP$ é $\pi d/4$ temos que a probabilidade da agulha cruzar pelo menos uma das linhas do plano será

$$P(A) = \frac{\frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - d^2}}{2} + \frac{d \cos^{-1} \left(\frac{d}{l} \right)}{2}}{\frac{\pi \cdot d}{4}} = \frac{2l - 2\sqrt{l^2 - d^2} + 2d \cos^{-1} \left(\frac{d}{l} \right)}{\pi d}.$$

Como aplicação do problema da agulha de Buffon, podemos calcular valores aproximados do número π como vemos abaixo.

3.2.1 Valores experimentais para π

O valor de π pode ser estimado empiricamente fazendo-se diversos lançamentos das agulhas, ou seja, repetindo diversas vezes a experiência de Buffon e contando pacientemente as agulhas que cruzaram as linhas paralelas.

Esse método é conhecido como *Método de Monte Carlo* e é bastante utilizado na estatística em simulações estocásticas, ou seja, em situações que tem origem em processos não determinísticos. O método de Monte Carlo teve origem durante a construção da bomba atômica na segunda guerra mundial, onde eram feitas simulações probabilísticas que estavam relacionados com o coeficiente de difusão do nêutron em certos materiais. O nome “Monte Carlo” é uma alusão à cidade de Monte Carlo, no principado de Mônaco, famosa por seus cassinos e roletas que geram números aleatórios.

Para simplificar os cálculos, iremos considerar o primeiro caso estudado, onde $l = d$. Considere $P(A) = \frac{k(n)}{n}$, onde $k(n)$ representa o número de vezes que a agulha cruza uma das linhas paralelas do assoalho e n representa o número de lançamentos. De acordo com (Magalhães, M, N - 2011), um conceito importante de probabilidade, a “lei dos grandes números”, definida inicialmente por Jakob Bernoulli (1654 - 1705), que diz que se um evento de probabilidade p é repetido em ocasiões independentes por diversas vezes, a razão entre a frequência observada desse evento e o número de repetições converge para a probabilidade p , quando o número de repetições se torna absurdamente grande, se o experimento pudesse ser realizado um número infinito de vezes, teríamos que $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n}$. Mas vimos anteriormente que $P(A) = \frac{2}{\pi}$ e, portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = \frac{2}{\pi}$$

o que implica que

$$\frac{k(n)}{n} \approx \frac{2}{\pi},$$

3.2. O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

isto é, $\pi \approx \frac{2n}{k(n)}$, para n suficientemente grande.

Durante alguns anos, diversos matemáticos estimaram empiricamente o valor de π usando o método descoberto por Buffon e aprimorado, um pouco depois, por Laplace. A Tabela 3.1 nos mostra os resultados de algumas dessas experiências.

Matemático	Ano	Razão (l/d)	N. de Jo- gadas	N. de cruza- mentos	Valor estimado de π
Wolf	1850	0,8	5.000	2.532	3,1596
Smith	1855	0,6	3.204	1.218,5	3,1553
D. Morgan	1860	1,0	600	382,5	3,137
Fox	1864	0,75	1.030	489	3,1595
Lazzerini	1901	0,83	3.408	1.808	3,1415929
Reina	1925	0,5419	2.520	869	3,1795

Tabela 3.1: Gristead, C. M. 1997, Pág. 56

Os valores não inteiros (metades) na coluna dos números de agulhas que cruzaram a linha se dão pela incerteza da agulha ter cruzado ou não uma das linhas.

Entretanto, anos antes, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) já havia obtido uma aproximação melhor para π usando série de potências:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Dessa forma, esses resultados aproximados para π não eram novidade, mas confirmaram a coerência entre a teoria desenvolvida na época por Buffon e a prática empírica.

Segundo N.T. Gridgeman (vide [4]), 10.000 tentativas normalmente não dariam mais que uma casa decimal de precisão para o número π e os matemáticos foram muito felizes nos resultados obtidos. Portanto, sabendo previamente o valor aproxi-

3.2. O PROBLEMA DA AGULHA DE BUFFON

mado para π , alguns podem ter realizado o término da experiência em um momento oportuno, ou seja, aquele em que o valor está muito próximo de π .

O resultado do experimento de Lazzerini é um resultado que chama atenção. Com “apenas” 3.408 lançamentos, ele conseguiu chegar ao valor aproximado de π com a precisão de 6 casas decimais. Segundo Roberto Rodríguez del Río em seu artigo *El número π : de la Geometría al Cálculo Numérico*, são necessários $1,156675 \cdot 10^{14}$ lançamentos de agulhas para se obter um erro da ordem de 0,0000002. Retirando uma agulha a cada 5 segundos (tempo para o lançamento, verificação da posição em que agulha caiu e anotação do resultado), seriam necessários aproximadamente 3.600.000 anos para essa precisão. O que reforça a tese de, no mínimo, uma interrupção estratégica nos lançamentos.

De acordo com Gristead (vide [5]) Lazzerini já conhecia a aproximação obtida no século V, por volta do anos 480 pelo matemático chinês Tsu Chung Chi de $355/113$ para o número π . Esse valor de 3,1415929 “coincidentemente” é o mesmo resultado obtido por ele com intrigantes 3.408 lançamentos.

Tudo indica que a estratégia utilizada por Lazzerini foi conhecendo a fórmula $P = 2l/d\pi$. Ele realizou a experiência com a razão entre o comprimento da agulha e a distância entre as linhas paralelas igual a $5/6 \approx 0,83$. Daí, obteve que

$$P(A) = \frac{2l}{d\pi} = \frac{2 \cdot \frac{5}{6}d}{d\pi} = \frac{5}{3\pi}.$$

Mas $P(A) = k(n)/n$ e, portanto,

$$\frac{5}{3\pi} = \frac{k(n)}{n},$$

donde $\pi = 5n/3k(n)$. Não é raro pesquisadores suporem que Lazzerini conhecia o

resultado de Tsu Chung Chi de $355/113$ para o número π . Ele resolveu a equação

$$k(n) = \frac{5n \cdot 113}{3 \cdot 355} = \frac{565n}{1065} = \frac{113n}{213}.$$

Como $k(n)$ e n são números inteiros, basta que a cada 213 lançamentos de agulhas, 113 caiam cortando uma das linhas. Caso haja um resultado diferente, repete-se o experimento. Observando que $3408 = 213 \cdot 16$, Lazzerini deve ter repetido o conjunto de lançamento 16 vezes.

3.2.2 Aplicação na Medicina

Esse jogo de agulhas em um assoalho possibilitou um avanço vultoso na Medicina. Segundo Nilson José Machado (vide [6]), em 1979 o Bioquímico e físico nuclear sul-africano Allan MacLeod Cormack e engenheiro elétrico inglês Godfrey Newbold Hounsfield ganharam conjuntamente o prêmio Nobel de Medicina pelo invento e desenvolvimento da tomografia computadorizada. Fato que revolucionou o diagnóstico médico em todo mundo.

As linhas de um assoalho podem ser comparadas a um feixe plano de radiações paralelas (laser, raio X ou similar) disparado sucessivas vezes nas mais diversas direções sobre determinado objeto que se deseja saber o comprimento. Como aqui não é possível jogar a agulha nas linhas, jogam-se as linhas nas agulhas. O valor da probabilidade é calculado da mesma forma que Buffon fez, há mais de dois séculos, contando os feixes que cruzam o objeto e dividindo pelo total de feixes emitidos. Como o computador pode fazer isso com precisão e agilidade, o resultado obtido é o ideal.

3.3 Uma variação do problema da agulha

Em 1733 o Conde de Buffon apresentou um trabalho intitulado de *jogo de Franc Carreau*, que era um jogo muito popular e jogado na alta corte francesa, e também pelas crianças de forma geral em momentos de diversão.

Em seu trabalho, Buffon descrevia a probabilidade de uma moeda lançada aleatoriamente em um piso ladrilhado com lajotas congruentes, cair completamente dentro de um dos ladrilhos, ou seja, sem cortar qualquer linha dos ladrilhos. Na Figura 3.6, podemos verificar as diversas possibilidades do jogo em um ladrilho quadrangular regular.

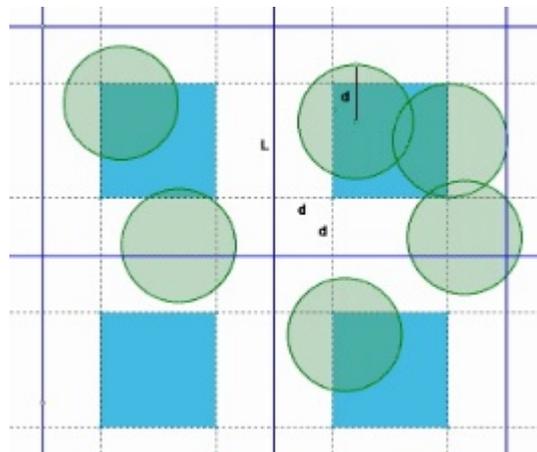


Figura 3.6: Posições diferentes da moeda em relação ao quadrado

O resultado favorável do evento é quando a moeda cai totalmente na parte interna de um dos quadrados, ou seja, a circunferência que delimita a moeda não intersecta os segmentos que delimitam os quadrados. Por simplicidade e sem perda de generalidade, modelaremos o problema com um quadrado de lado unitário ($L = 1$) e um círculo perfeito de raio r , com $r < 1/2$.

Para determinar a probabilidade da moeda cair completamente dentro do quadrado seguiremos os seguintes passos:

3.3. UMA VARIAÇÃO DO PROBLEMA DA AGULHA

- (1) Iremos construir um sistema de coordenadas ortogonais de tal forma que a origem do sistema coincida com o centro do quadrado.
- (2) Adotaremos como o centro da moeda o ponto de coordenadas (X, Y) .
- (3) Definiremos o domínio das duas variáveis aleatórias contínuas como sendo: $-1/2 < X < 1/2$ e $-1/2 < Y < 1/2$.
- (4) Como a moeda cai aleatoriamente, temos que o ponto de coordenadas (X, Y) pode assumir qualquer valor dentro do intervalo do domínio e que ocorre uma distribuição uniforme dentro do espaço.

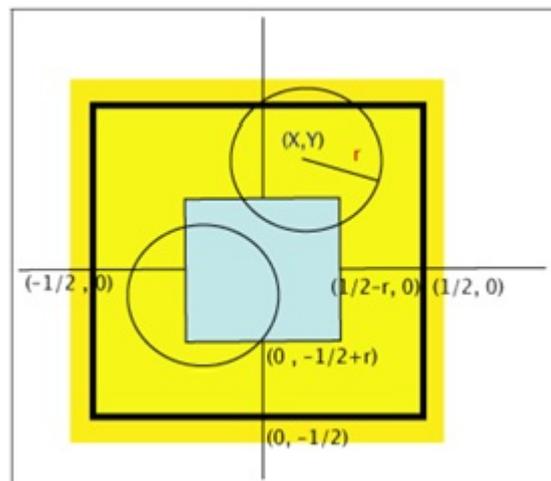


Figura 3.7: Casos favoráveis e casos possíveis para a posição do centro da moeda.

É fácil observar que se o centro da circunferência encontra-se sobre qualquer ponto interior ou da fronteira do quadrado azul, temos que a circunferência não cortará qualquer linha do quadrado externo e dessa forma estará completamente dentro do último quadrado. Caso contrário, teremos que a circunferência cortará uma ou duas linhas do quadrado de lado unitário.

Os comprimentos dos lados dos quadrados exterior e interior são respectivamente L e $L - 2r$. Dessa forma, a probabilidade da moeda *não cortar* qualquer uma das

3.3. UMA VARIAÇÃO DO PROBLEMA DA AGULHA

linhas do quadrado de lado unitário será:

$$P(\text{n\~ao cortar}) = \frac{\text{área interna do quadrado de lado } L - 2r}{\text{área interna do quadrado de lado } L} = \frac{(L - 2r)^2}{L^2}.$$

Assim, se $L = 1$, temos que $P(\text{n\~ao cortar}) = (1 - 2r)^2$. A probabilidade da moeda cortar um dos lados do quadrado é complementar à probabilidade dela não cortar um dos lados, ou seja,

$$P(\text{cortar}) = 1 - \frac{(L - 2r)^2}{L^2} = \frac{4Lr - 4r^2}{L^2}.$$

Logo, se $L = 1$, temos que $P(\text{cortar}) = -4r^2 + 4r$. Na Figura 3.8 é exposta a probabilidade da moeda cortar uma das linhas do quadrado, em função do raio r da moeda, no caso mais simples, quando $L = 1$.

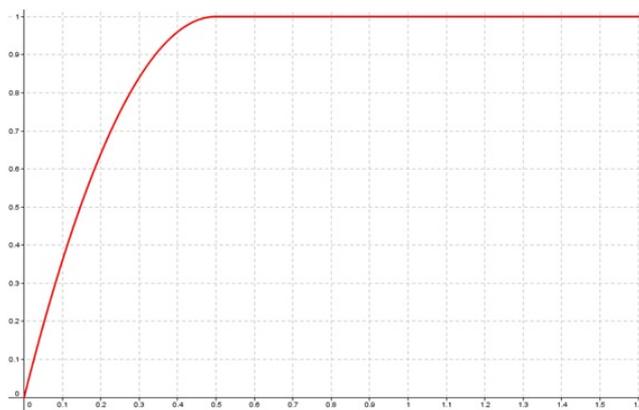


Figura 3.8: A probabilidade da moeda cortar uma das linhas do quadrado.

Observando a função $P : [0, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $P(r) = -4r^2 + 4r$ na Figura 3.8, vemos que o valor máximo ou probabilidade máxima da função já é atingida quando $r = \frac{1}{2}$.

Para entender o sentido prático do resultado obtido, faremos, como exemplo, $r = \frac{L}{4}$. Assim, teremos que a probabilidade da moeda *n\~ao* cortar uma das linhas

do quadrado será $\frac{1}{4}$. De fato,

$$P(\text{n\~ao cortar}) = \frac{\left(L - 2 \cdot \frac{L}{4}\right)^2}{L^2} = \frac{\left(L - \frac{L}{2}\right)^2}{L^2} = \frac{1}{4} = 25\%.$$

Vemos, ent\~ao, que a probabilidade da moeda cortar um dos lados do quadrado, neste caso, \u00e9 dada por $P(\text{cortar}) = 75\%$.

Uma observa\u00e7\~ao interessante \u00e9 que se a medida do raio da moeda for igual \u00e0 metade da medida do lado do quadrado, ou seja, se $r = \frac{L}{2}$ ent\~ao a probabilidade da moeda *n\~ao* cortar qualquer um dos lados do quadrado ser\u00e1 nula. Com efeito, se $r = \frac{L}{2}$, ent\~ao

$$P(\text{n\~ao cortar}) = \frac{\left(L - 2 \cdot \frac{L}{2}\right)^2}{L^2} = \frac{(L - L)^2}{L^2} = 0.$$

3.4 O Problema de Laplace

Outro matem\u00e1tico que teve destaque na hist\u00f3ria das probabilidades, foi o tamb\u00e9m franc\u00eas Marquis de Laplace (1749 - 1827). Laplace nasceu em Paris e foi matem\u00e1tico, f\u00edsico e astr\u00f4nomo, e autor de uma cole\u00e7\u00e3o com cinco volumes intitulados *M\u00e9canique C\u00e9leste* (Mec\u00e2nica celeste). Laplace \u00e9 famoso pela formula\u00e7\u00e3o da equa\u00e7\u00e3o de Laplace e da transformada de Laplace utilizadas em diversos ramos da Matem\u00e1tica e da F\u00edsica. Tamb\u00e9m fez uma interessante extens\u00e3o do problema da agulha de Buffon, como descreveremos a seguir.

Um plano \u00e9 coberto por ret\u00e2ngulos congruentes entre si. Uma agulha de espessura desprez\u00edvel e comprimento l , onde l \u00e9 menor do que qualquer um dos lados do ret\u00e2ngulo, \u00e9 lan\u00e7ada ao acaso. *Qual a probabilidade da agulha cair inteiramente dentro de um dos ret\u00e2ngulos, ou seja, qual a probabilidade da agulha n\u00e3o cruzar*

qualquer linha dos retângulos?

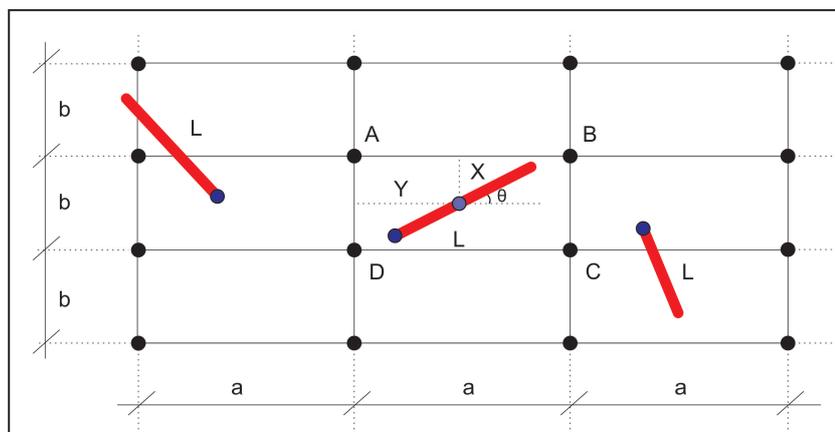


Figura 3.9: Diferentes possibilidades para a posição em que a agulha pode cair no plano.

A probabilidade de interesse é aquela em que a agulha está totalmente dentro do retângulo. Tome $AB = a$ e $BC = b$ e considere que $l < a$ e $l < b$, onde l é o comprimento da agulha. Considere também x e y as coordenadas do centro da agulha e θ o ângulo formado entre a agulha e o eixo horizontal. Considerando x , y e θ três variáveis independentes, onde $0 < x < a$, $0 < y < b$ e $0 \leq \theta < \pi$, temos que o espaço amostral é dado pelo volume de um paralelepípedo.

Para facilitar o entendimento e a visualização, iremos considerar primeiramente que θ é constante. Dessa forma, os pontos em que a agulha cai completamente dentro do retângulo, são aqueles em que as coordenadas (X, Y) encontram-se na área interna da região $PQRS$, ou seja, os casos favoráveis ao evento “não cruzar as linhas do retângulo” são representados pela área hachurada na figura 3.10. Temos, com isso, valores positivos e negativos para $\cos\theta$. As áreas que expressam os casos favoráveis do evento podem ser divididas em dois casos.

(a) Se $0 \leq \theta \leq \pi/2$, então a área do quadrilátero $PQRS$ será dada por

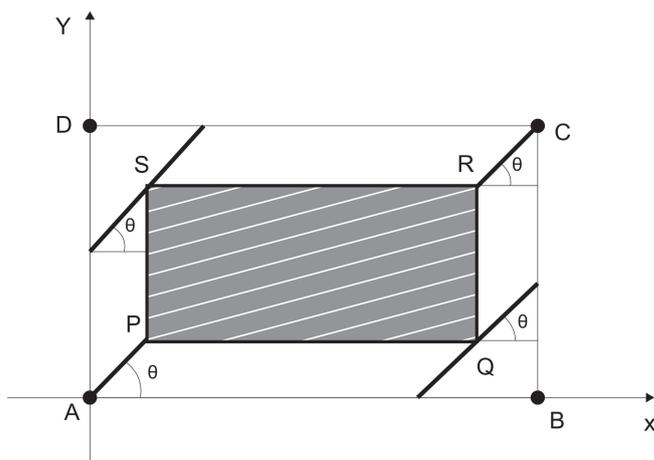


Figura 3.10:

$$(a - l \cdot \cos \theta) \cdot (b - l \cdot \text{sen } \theta).$$

Logo, a área do quadrilátero $PQRS$ é

$$a \cdot b - a \cdot l \cdot \text{sen } \theta - b \cdot l \cdot \cos \theta + l^2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta.$$

(b) Se $\pi/2 \leq \theta < \pi$, então a área do quadrilátero $PQRS$ é dada por

$$(a + l \cdot \cos \theta) \cdot (b - l \cdot \text{sen } \theta).$$

Logo, a área do quadrilátero $PQRS$ é

$$ab - a \cdot l \cdot \text{sen } \theta + b \cdot l \cdot \cos \theta - l^2 \cdot \text{sen } \theta \cdot \cos \theta.$$

Portanto, para qualquer valor de θ no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$, temos que a área do quadrilátero é dada por

$$ab - a \cdot l \cdot \text{sen } \theta - b \cdot l \cdot |\cos \theta| + \frac{1}{2} \cdot |l^2 \cdot \text{sen}(2\theta)|.$$

3.5. EXTENSÃO DO PROBLEMA DE LAPLACE

Havíamos feito θ constante, mas a função que fornece a área do quadrilátero $PQRS$ para $0 \leq \theta < \pi$ é

$$F(\theta) = ab - a \cdot l \cdot \sin \theta - b \cdot l \cdot |\cos \theta| + \frac{1}{2} \cdot |l^2 \sin(2\theta)|.$$

O volume do espaço amostral que representa a agulha totalmente dentro de $ABCD$ é dado por

$$\begin{aligned} v &= \int_0^\pi F(\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \left(ab - a \cdot l \cdot \sin \theta - b \cdot l \cdot |\cos \theta| + \frac{1}{2} \cdot |l^2 \sin(2\theta)| \right) d\theta \\ &= \pi ab - 2al - 2bl + l^2. \end{aligned}$$

Como o volume do paralelepípedo é $V = \pi ab$, temos que a probabilidade procurada é

$$\begin{aligned} P(A) = \frac{v}{V} &= \frac{\pi ab - 2al - 2bl + l^2}{\pi ab} \\ &= 1 - \frac{2al + 2bl - l^2}{\pi ab} \\ &= 1 - \frac{l \cdot (2a + 2b) - l^2}{\pi ab}. \end{aligned}$$

3.5 Extensão do problema de Laplace

Faremos agora a extensão do problema de Laplace para um polígono convexo qualquer. Suponha que o polígono convexo em estudo seja um pentágono, e seus lados e seus respectivos comprimentos sejam $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ e λ . Suponha ainda que cada lado seja menor que a distância d entre duas linhas consecutivas no problema de Buffon. A agulha pode ou não intersectar o polígono, mas caso intersecte, por causa da convexidade, será em exatamente dois lados do polígono. A interseção pelos

3.5. EXTENSÃO DO PROBLEMA DE LAPLACE

vértices do polígono tem probabilidade desprezível e não será levada em consideração neste momento.

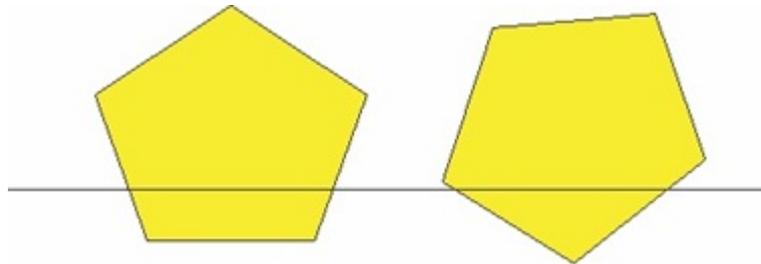


Figura 3.11: Duas possibilidades de interseção da agulha com o polígono

Como o corte ocorre em dois lados, temos 10 possibilidades ($C_{10,2}$), que são os pares: (α, β) , (α, δ) , (α, γ) , (α, λ) , (β, δ) , (β, γ) , (β, λ) , (δ, γ) , (δ, λ) e (γ, λ) . A probabilidade de haver a interseção será dada, então, por

$$P(A) = P(\alpha, \beta) + P(\alpha, \delta) + P(\alpha, \gamma) + P(\alpha, \lambda) + P(\beta, \delta) \\ + P(\beta, \gamma) + P(\beta, \lambda) + P(\delta, \gamma) + P(\delta, \lambda) + P(\gamma, \lambda).$$

Cada um dos lados pode ser cortado de quatro formas mutuamente excludentes. O lado α pode ser cortado por um segmento que passe também por β ou δ ou γ ou λ . De forma análoga, repetimos o procedimento para os demais lados. Assim, temos que

$$P(\alpha) = P(\alpha, \beta) + P(\alpha, \delta) + P(\alpha, \gamma) + P(\alpha, \lambda),$$

$$P(\beta) = P(\beta, \alpha) + P(\beta, \delta) + P(\beta, \gamma) + P(\beta, \lambda),$$

$$P(\delta) = P(\delta, \alpha) + P(\delta, \beta) + P(\delta, \gamma) + P(\delta, \lambda),$$

$$P(\gamma) = P(\gamma, \alpha) + P(\gamma, \beta) + P(\gamma, \delta) + P(\gamma, \lambda),$$

$$P(\lambda) = P(\lambda, \alpha) + P(\lambda, \beta) + P(\lambda, \delta) + P(\lambda, \gamma),$$

3.6. MÉTODO DE MONTE CARLO PARA CÁLCULO DE ÁREAS. UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA.

onde $P(\alpha, \beta)$ denota a probabilidade da agulha cortar simultaneamente os lados α e β . Somando membro a membro as igualdades acima, obtemos

$$P(\alpha) + P(\beta) + P(\delta) + P(\gamma) + P(\lambda) = 2P(A).$$

Mas, como

$$P(\alpha) = \frac{2\alpha}{\pi d}, \quad P(\beta) = \frac{2\beta}{\pi d}, \quad P(\delta) = \frac{2\delta}{\pi d}, \quad P(\gamma) = \frac{2\gamma}{\pi d}, \quad P(\lambda) = \frac{2\lambda}{\pi d},$$

temos que

$$2P(A) = \frac{2\alpha}{\pi d} + \frac{2\beta}{\pi d} + \frac{2\delta}{\pi d} + \frac{2\gamma}{\pi d} + \frac{2\lambda}{\pi d}$$

e, portanto,

$$P(A) = \frac{\alpha + \beta + \delta + \gamma + \lambda}{\pi d} = \frac{2p}{\pi d},$$

onde p é o semiperímetro do polígono em questão.

O resultado obtido é geral, tendo em vista que independe do número de lados do polígono, mas a demonstração para um polígono de n lados pode ser feita sem dificuldade por indução sobre n .

3.6 Método de Monte Carlo para cálculo de áreas.

Uma aplicação em sala de aula.

Durante o ensino básico, o estudante se depara com diversos problemas em que há a necessidade de cálculo de áreas de figuras planas. Mas, em geral, os cálculos são feitos usando figuras elementares, tais como triângulos, quadrados, retângulos, trapézios, losangos, hexágonos regulares dentre outros.

Ao iniciar o ensino superior, já nos primeiros semestres, muitos estudantes aprendem a calcular áreas de figuras irregulares. Para isso, fazem uso de uma poderosa

ferramenta que é a *integral*. Com a utilização da integral, diversas áreas de figuras irregulares podem ser calculadas, mas ainda há necessidade de conhecer a função geradora da curva que a define. O problema persiste já que o assunto integral não é ensinado para os alunos no ensino médio.



Figura 3.12: Área não elementar de uma figura plana.

Aqui apresentaremos, através de uma experiência, o Método de Monte Carlo para áreas que é uma interessante forma de estimar o valor da área de uma figura plana irregular.

3.6.1 Experiência

Embora tenhamos assistido nos últimos anos a uma melhora considerável no processo de ensino da Matemática, a sua aprendizagem tem se mantida como um sério obstáculo para grande parte dos alunos. Esta é a razão pela qual se torna necessário que o ideal da clareza, da motivação e da fácil compreensão da disciplina seja perseguido, procurando-se minimizar os entraves do seu ensino.

Através dessa experiência, que é uma proposta de construção por parte do aluno com material concreto, esperamos elaborar uma atividade não rotineira em sala de aula. Uma atividade prática ajuda a tornar a aula mais atraente, diversificada e ilustrada.

A construção de um material concreto, juntamente com a sua utilização tem por objetivo cristalizar o conteúdo aprendido em sala de aula. Tem também como ponto importante tornar a Matemática mais significativa para o aluno, contextualizando

3.6. MÉTODO DE MONTE CARLO PARA CÁLCULO DE ÁREAS. UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA.

e relacionando a teoria com a prática. Dessa forma, o aluno poderá calcular áreas de figuras planas irregulares e exercitar o uso da probabilidade geométrica.

Os materiais a serem utilizados nesta experiência são

- Caixa de sapato,
- Grãos de milho ou grãos de feijão,
- Cola,
- Tesoura,
- Calculadora,
- Mapa do Brasil ou da sua cidade/região em escala,
- Régua.



Figura 3.13: Materiais utilizados.

Vamos agora ao procedimento de montagem.

- (1) Recorte um quadrado e cole no fundo da caixa,
- (2) Meça as dimensões do quadrado e do fundo da caixa.

3.6. MÉTODO DE MONTE CARLO PARA CÁLCULO DE ÁREAS. UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA.



Figura 3.14: Quadrado colado no fundo da caixa.

Vamos agora ao experimento. Coloque de forma aleatória uma quantidade *conhecida* de grãos no fundo da caixa. Quanto maior a quantidade de grãos, maior será a precisão para a estimativa da área. É razoável uma quantidade entre 100 e 300 grãos. Espalhe os grãos de forma que não fiquem todos em uma mesma região. Uma forma de deixar os grãos espalhados de forma aleatória é colocar a tampa e realizar algumas batidas no fundo da caixa.

Conte quantos grãos estão sobre a região do quadrado. Repita a operação por mais quatro vezes, determine a média aritmética simples e em seguida utilize a proporção:

$$\frac{\text{quantidade média de grãos na região do quadrado}}{\text{quantidade de grãos no fundo da caixa}} \approx \frac{\text{área do quadrado}}{\text{área do fundo da caixa}}.$$

Note que realmente chegamos a um resultado aproximado. Por exemplo, suponha que o quadrado colado no fundo da caixa tenha lado igual a 8 cm, que as dimensões do fundo da caixa sejam 16 cm por 25 cm e que tenham sido utilizados 200 grãos nessa experiência. Suponha ainda que as quantidades de grãos em cima da região

3.6. MÉTODO DE MONTE CARLO PARA CÁLCULO DE ÁREAS. UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA.



Figura 3.15: Quadrado colado no fundo da caixa.

do quadrado nas cinco repetições do experimento foram dados pela Tabela 3.2

Contagem	Quantidade de grãos
1	31
2	33
3	30
4	32
5	33
MÉDIA	31,8

Tabela 3.2: Quantidade de grãos sobre o quadrado.

Assim, de acordo com o que expomos anteriormente, teremos:

$$\frac{31,8}{200} \approx \frac{8 \cdot 8}{16 \cdot 25} \approx 0,159 \approx 0,160.$$

Ocorreu um erro de 0,001 que, para o nosso experimento, é desprezível.

Passemos agora para o cálculo de áreas de figuras planas irregulares. Já vimos,

3.6. MÉTODO DE MONTE CARLO PARA CÁLCULO DE ÁREAS. UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA.

empiricamente, que o método funciona e, então, podemos realizar uma estimativa bem aproximada para a área de uma figura plana qualquer. Vamos verificar qual o procedimento para calcular a área de uma região utilizando um mapa em escala e o Método de Monte Carlo.

Tome um mapa em escala, por exemplo, do Brasil. Caso não seja informado qual a escala utilizada, é possível descobrir utilizando uma informação complementar.

A distância entre os dois pontos extremos Monte Caburaí (RR) e Arroio Chuí (RS) é de aproximadamente igual a 4.395 km. Esses dois pontos são facilmente identificados em um mapa.

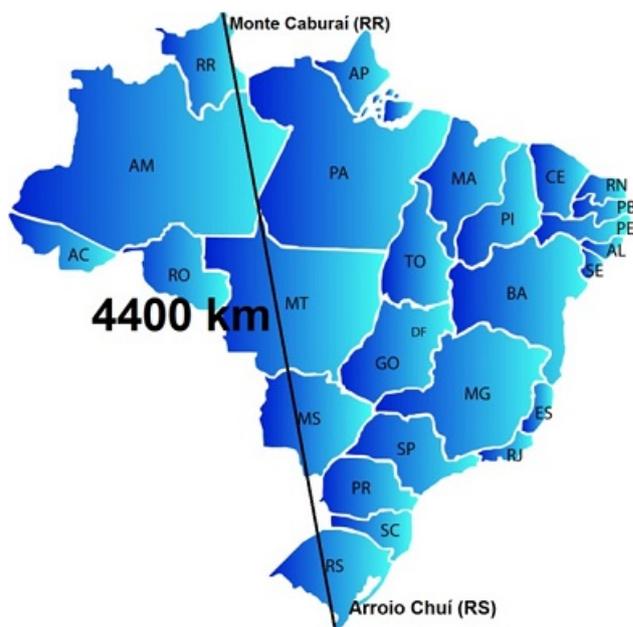


Figura 3.16: Extremos do Brasil.

Siga, portanto, os seguintes passos:

- (1) Verifique qual a distância entre os dois pontos no mapa utilizando uma régua.
- (2) Repita o procedimento da experiência de contagem de grãos, feita anteriormente.

3.6. MÉTODO DE MONTE CARLO PARA CÁLCULO DE ÁREAS. UMA APLICAÇÃO EM SALA DE AULA.

(3) Utilize a relação

$$\frac{\text{quantidade média de grãos sobre o mapa}}{\text{quantidade de grãos no fundo da caixa}} \approx \frac{\text{área do mapa}}{\text{área do fundo da caixa}}.$$

Assim, teremos aproximadamente a área do mapa, mas devemos lembrar que o mapa está em uma determinada escala, então usando a relação abaixo iremos identificar a área da superfície brasileira:

$$\left(\frac{\text{distância entre os extremos do mapa}}{\text{distância real entre os extremos}} \right)^2 \approx \frac{\text{área do mapa}}{\text{área do Brasil}}.$$

Esse procedimento, envolvendo probabilidade geométrica, pode ser realizado para estimar as mais diversas áreas.

Capítulo 4

Paradoxos

No início do século XX, mais precisamente em 1902, o matemático e filósofo Bertrand Russell (1872-1970) escreveu uma carta endereçada ao também matemático e filósofo Gottlob Frege (1848-1925), a qual continha um paradoxo que colocava em dúvida a fundamentação teórica da teoria dos conjuntos, desenvolvida na época em que Frege já estava finalizando o seu segundo volume. Ele reagiu com as seguintes palavras ao ler a carta de Russel: *nada mais indesejável para um cientista do que ver ruir os fundamentos do edifício, justamente no momento em que ele está sendo concluído. Foi nessa incômoda situação que me encontrei ao receber uma carta do Sr. Bertrand Russell no momento em que meu trabalho já estava indo para o prelo.*

O *paradoxo de Russel* diz o seguinte: em uma vila, todos os dias, um barbeiro faz a barba de todos os homens que não barbeiam a si mesmos e não faz a barba de quem se barbeia sozinho. O paradoxo está em: quem faz a barba do barbeiro? Isto é,

- se o barbeiro é um homem que não se barbeia sozinho, então o barbeiro (ele próprio) deveria fazer a sua barba.
- se ele é um homem que se barbeia sozinho, então o barbeiro estaria fazendo a sua barba.

Como pode, portanto, o barbeiro fazer e não fazer a própria barba?

A moderna teoria dos conjuntos foi elaborada pelo matemático russo George Cantor (1845 - 1918) e, originalmente, foi concebida de maneira menos rigorosa, mais livre e nos leva a paradoxos insuperáveis, como é o caso do paradoxo acima. Durante a história, muitos paradoxos surgiram. Alguns mais simples, outros mais complexos. Alguns com maior uso da linguagem matemática, outros puramente filosóficos.

Um outro exemplo, ainda simples, diz respeito a um reino onde existiam apenas duas opções para a pena de morte: forca ou fogueira. O rei avisou a um prisioneiro: *Você morrerá na fogueira se suas últimas palavras encerrarem uma verdade e morrerá na forca se elas indicarem algo falso.* O condenado, pouco antes da execução disse: *Eu morrerei na forca.* Dessa forma, o rei não pôde executá-lo.

Segundo o dicionário Aurélio, a palavra paradoxo significa aquilo que é contra à opinião comum, que é contradição como na frase *falo melhor quando emudeço.*

4.1 Paradoxo do Aniversário

Dado um grupo com 60 pessoas, qual a probabilidade de que pelo menos duas delas faça aniversário no mesmo dia?

Para determinar a probabilidade desse evento acontecer, iremos desprezar as variações da distribuição, tais como anos bissextos e irmãos gêmeos. Sabemos, pelo Princípio das casas dos pombos ou Princípio das gavetas de Dirichlet (vide Apêndice), que são necessários pelo menos 366 pessoas no grupo para termos a convicção de que pelo menos duas delas farão aniversário no mesmo dia. O senso comum nos diz que a probabilidade não deve ser tão alta, tendo em vista que um grupo de 60 pessoas representa, numericamente, menos de 1/6 do ano. Mas será que essa intuição está correta?

Para obter um resultado preciso desta probabilidade, utilizaremos o *raciocínio*

destrutivo, ou seja, faremos a diferença entre o número 1 e a probabilidade de todas as pessoas do grupo fazerem aniversário em dias diferentes. Sendo assim, o evento “pelo menos duas pessoas fazerem aniversário no mesmo dia” é o complementar do evento “todas as pessoas fazerem aniversário em dias distintos”.

Iremos calcular as probabilidades $\bar{P}(n)$ e $P(n)$ que são, respectivamente, as probabilidades de que todas as pessoas façam aniversário em dias diferentes e de que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia. Assim, temos dois casos:

Primeiro caso: Se $n > 365$, então, pelo Princípio das casas dos pombos, temos que $\bar{P}(n) = 0$ e, portanto, $P(n) = 1$.

Segundo caso: Agora, se $n \leq 365$, então

$$\bar{P}(n) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{365}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{365}\right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \bar{P}(n) &= \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdots \frac{365 - (n-1)}{365} \\ &= \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdots (365 - n + 1)}{365^n} \\ &= \frac{365!}{365^n (365 - n)!}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\bar{P}(n) = \frac{365!}{365^n (365 - n)!} \tag{4.1}$$

e

$$P(n) = 1 - \bar{P}(n). \tag{4.2}$$

Assim, com o auxílio de uma calculadora, podemos construir a Tabela 4.1:

n	$P(n)$
1	0 %
2	$\approx 0,27\%$
3	$\approx 0,82\%$
10	$\approx 11,70\%$
20	$\approx 41,14\%$
23	$\approx 57,04\%$
30	$\approx 70,63\%$
40	$\approx 89,12\%$
50	$\approx 97,04\%$
60	$\approx 99,41\%$

Tabela 4.1:

Podemos, portanto, observar que em um grupo com 60 pessoas, existe uma probabilidade de 99,41% de duas delas fazerem aniversário no mesmo dia, aproximadamente.

Com o intuito de esboçar um gráfico para a função probabilidade $P(n) : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, usaremos $\bar{P}(n) = \frac{365!}{365^n(365-n)!}$ e a série de Taylor para a função exponencial. Lembre-se que

$$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (4.3)$$

Então, fazendo $x = -n/365$ em (4.3), teremos que

$$e^{-n/365} = 1 + \frac{(-n/365)^1}{1!} + \frac{(-n/365)^2}{2!} + \frac{(-n/365)^3}{3!} + \dots$$

Agora, fazendo uma aproximação por truncamento, obtemos que

$$e^{-n/365} \approx 1 + \frac{(-n/365)^1}{1!} = 1 - \frac{n}{365}.$$

4.1. PARADOXO DO ANIVERSÁRIO

Essa aproximação pode ser feita, pois quando $n \geq 2$ o valor da fração obtida em cada parcela é insignificante. Mas usando (4.1), tem-se que

$$\bar{P}(n) = e^{-0/365} \cdot e^{-1/365} \cdot e^{-2/365} \dots e^{-(n-1)/365} = e^{-(0/365+1/365+2/365+\dots+(n-1)/365)}.$$

Logo,

$$\bar{P}(n) = e^{-\frac{(0+(n-1)n)}{365 \cdot 2}} = e^{-\frac{n^2-n}{730}}$$

e, portanto $P(n) = 1 - e^{-\frac{n^2-n}{730}}$. Embora aparentemente grosseira, as aproximações nos dão valores bem realistas a respeito das probabilidades.

Observando o gráfico da figura 4.1, vemos que o crescimento inicial é muito rápido e depois de um certo ponto tende a se estabilizar.

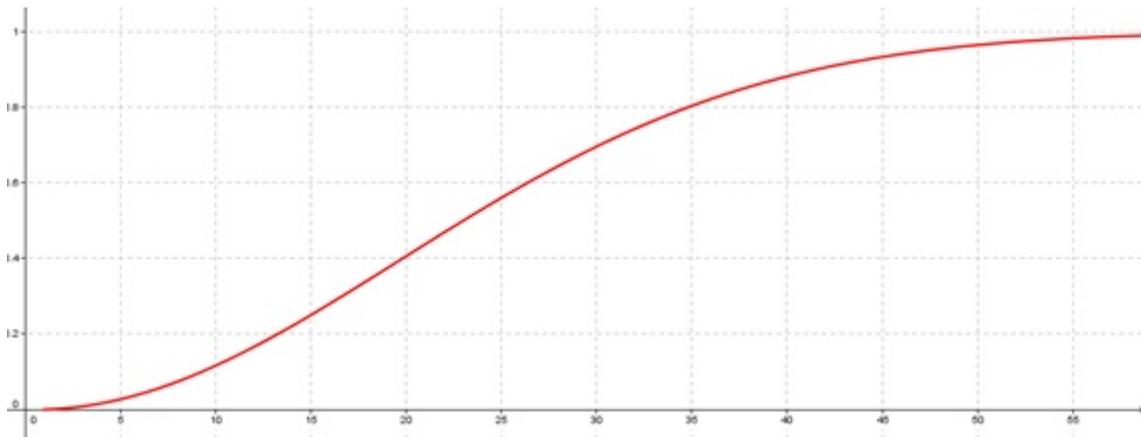


Figura 4.1:

Possivelmente, a falha na intuição acontece devido ao fato de que cada pessoa no grupo acha ser pouco provável ter outra pessoa que faça aniversário no mesmo dia que ela. Ou seja, ao particularizar o problema ocorre uma modificação drástica na probabilidade.

4.2 Paradoxo dos Três Dados

Em 1583, um jovem estudante da Universidade de Pisa, observou, enquanto assistia a uma missa na Catedral, que um grande lustre suspenso realizava oscilações. Utilizando seu pulso como cronômetro, ele observou que o tempo gasto para o lustre percorrer um grande arco era o mesmo tempo gasto para percorrer um arco menor. Dessa forma, sugeriu uma lei afirmando que o tempo da oscilação de um pêndulo independe da amplitude do arco. Essa observação simples e prática representou uma nova abordagem na descrição de diversos fenômenos físicos. Esse brilhante jovem se chamava Galileu Galilei (1564 - 1642) e de forma interessante contribuiu com a teoria das probabilidades.

Segundo Mlodinow, Galileu produziu um artigo sobre jogos de azar intitulado *Ideias sobre Jogos de Dados*. O trabalho foi produzido a pedido do seu patrono, o grão-duque da Toscana. O duque, como muitos daquela época, era viciado em apostas e jogos de azar e apresentou para Galileu o seguinte problema: *em um jogo com três dados comuns, por que a soma 10 aparece com uma frequência maior que a soma 9?* Isso, antes de tudo, prova que o duque havia jogado bastante, pois a diferença das probabilidades, como veremos mais adiante, é realmente sutil.

Observe que para se obter soma 9 existem 6 possibilidades como também para que a soma seja 10. Observe a Tabela 4.2.

Soma 9	Soma 10
1 + 2 + 6	1 + 3 + 6
1 + 3 + 5	1 + 4 + 5
1 + 4 + 4	2 + 2 + 6
2 + 2 + 5	2 + 3 + 5
2 + 3 + 4	2 + 4 + 4
3 + 3 + 3	3 + 3 + 4

Tabela 4.2: Resultados possíveis para as somas 9 e 10.

4.2. PARADOXO DOS TRÊS DADOS

O que eles não observaram é que deveriam ser levadas em consideração as permutações simples e as permutações com elementos repetidos que existiam. Por exemplo, para obter 9 pontos com os resultados 1, 2 e 6, poderíamos ter, além da terna (1; 2; 6), as ternas: (1; 6; 2), (2; 1; 6), (2; 6; 1), (6; 1; 2) e (6; 2; 1). Dessa forma, teríamos a permutação simples de 3. Ou seja, $P_3 = 3! = 6$. Para os mais incrédulos, que acreditam que essa ordem não faz diferença e não deve ser contabilizada, podemos imaginar os dados distinguíveis. Por exemplo, um branco, um amarelo e outro vermelho, sendo todos com bolinhas pretas. É evidente que a probabilidade de se obter determinada soma não irá mudar, mas o entendimento de que existem mais possibilidades para os mais resistentes será facilitado.

Galileu observou que, por conta das permutações, nem sempre os eventos eram equiprováveis. Por exemplo, só existe uma maneira para obter soma 9 com os pontos 3, 3 e 3. As possibilidades para a obtenção das somas 9 e 10 estão representadas na tabela 4.3.

Soma 9	N. de Possibilidades	Soma 10	N. de Possibilidades
1 + 2 + 6	6	1 + 3 + 6	6
1 + 3 + 5	6	1 + 4 + 5	6
1 + 4 + 4	3	2 + 2 + 6	3
2 + 2 + 5	3	2 + 3 + 5	6
2 + 3 + 4	6	2 + 4 + 4	3
3 + 3 + 3	1	3 + 3 + 4	3
TOTAL	25	TOTAL	27

Tabela 4.3: Total de resultados possíveis para as somas 9 e 10.

Como existem 25 possibilidades para a obtenção de 9 pontos e 27 possibilidades para a obtenção de 10 pontos, as probabilidades são, respectivamente,

$$P(A) = \frac{25}{216} \approx 11,57\% \quad \text{e} \quad P(B) = \frac{27}{216} \approx 12,50\%.$$

A diferença é realmente pequena, menor do que 1 ponto percentual. Dessa forma, Galileu mostrou que com 3 dados era, de fato, mais provável obter soma 10 do que soma 9.

Uma simulação feita por computador por Ilydio P. de Sá nos dá uma ideia dos resultados para o lançamento de três dados. Veja tabela 4.4.

N. de Lançamentos	Soma 9	Soma 10
100	12	11
1.000	137	124
10.000	1.183	1.260
20.000	2.287	2.493

Tabela 4.4: Simulação no computador .

É claro que os apostadores da época não dispunham dessa tecnologia para fazer simulações, então para que a diferença fosse percebida, era preciso uma grande observação e muito tempo de apostas. Diante do exposto, os apostadores da época intuitivamente descobriram a *Lei dos Grandes Números*, que somente seria formalizada um século depois por Jakob Bernoulli.

4.3 O problema de Monty Hall

Em [7], o professor Nicolau C. Saldanha apresenta o seguinte problema:

Problema: *Em um programa de auditório, o convidado deve escolher uma dentre três portas. Atrás de uma das portas há um carro e atrás de cada uma das outras duas há um bode. O convidado ganhará o que estiver atrás da porta.*

Devemos supor, neste problema, que o convidado prefere ganhar o carro, logicamente. O procedimento para a escolha da porta é o seguinte: o convidado

4.3. O PROBLEMA DE MONTY HALL

escolhe inicialmente, em caráter provisório, uma das três portas. O apresentador do programa, *que sabe o que há atrás de cada porta*, abre neste momento uma das outras duas portas, sempre revelando um dos dois bodes. O convidado agora tem a opção de ficar com a primeira porta que ele escolheu ou trocar pela outra porta fechada. Que estratégia deve o convidado adotar? Escolhida uma boa estratégia, que probabilidade o convidado tem de ganhar o carro?

Esse problema aparentemente simples e inocente ficou famoso por causar muita controvérsia entre expectadores, palpiteiros de plantão e matemáticos profissionais. O programa de televisão intitulado *Let's Make a Deal* (Vamos fazer um acordo) foi exibido de 1963 a 1976 nos Estados Unidos e comandado pelo apresentador Monty Hall. O programa fez tanto sucesso que por diversas vezes foi relançado entre 1980 e 1991.



Figura 4.2: Apresentador do *Monty Hall*.

No início da década de 90, esse problema foi sugerido à Marilyn vos Savant, uma famosa e muito inteligente colunista que, durante muitos anos, foi considerada pelo Guinness, a pessoa com o maior QI já registrado até então, que era de 228. Ela disse que o mais vantajoso para o participante do programa, seria trocar de porta após o

apresentador revelar o primeiro bode.

Marilyn recebeu uma avalanche de cartas. Em suas estimativas 10.000, e dessas, mais de 9.000 afirmando, veementemente, que ela estava errada. Aproximadamente 1.000 PhDs americanos e, dentre eles, muitos matemáticos também concordavam que Marilyn estava errada.

A intuição dizia claramente que se restavam duas portas, a mudança ou permanência não fazia a menor diferença, pois a probabilidade de ganhar o carro que era de $1/3$ passava a ser de $1/2$.

Segundo Mlodinow (vide [2]), um matemático da Universidade George Mason escreveu: *Você errou feio! Deixe-me explicar: se mostrarmos que uma das portas não contém o prêmio, essa informação altera a probabilidade das duas escolhas remanescentes para $1/2$, e nenhuma das duas apresenta motivos para ter probabilidade maior que a outra. Como matemático profissional, estou muito preocupado com a falta de conhecimentos matemáticos do público em geral. Por favor, ajude a melhorar essa situação confessando o seu erro e sendo mais cuidadosa no futuro.*

Outro matemático da Universidade Estadual de Dickinson escreveu: *Estou chocado ao ver que, depois de ser corrigida por ao menos três matemáticos, a senhora ainda não tenha percebido o erro.* Da Universidade Georgetown veio: *Quantos matemáticos enfurecidos são necessários para que a senhora mude de ideia?*

As cartas continuavam a chegar e Marilyn manteve-se firme justificando o seu raciocínio, até que em um determinado instante decidiu não discutir mais sobre o tema. Mas será que Marilyn estava realmente errada ou a intuição da população e dos especialistas falhou? Vamos resolver o problema.

Primeiramente, é de suma importância que o entendimento do enunciado esteja cristalizado. O apresentador não abre a porta de forma aleatória. Com o conhecimento prévio do que está por trás de cada porta, ele sempre revelará um dos dois bodes.

Uma forma de entender que a mudança de porta dá ao participante uma chance diferente de ganhar o carro é fazer uma extensão do problema. Considere o mesmo problema, porém com 1.000.000 de portas e, por trás de apenas uma existe um carro e nas demais bodes. O participante é convidado a escolher livremente uma das portas. Suponha que ele escolha a porta de número 1.000. É verdade que a chance dele ter acertado a porta que possui o carro é muito pequena, 1 em 1.000.000, ou seja, 0,00001%. O apresentador abrirá 999.998 portas, sempre revelando bodes. No final, as únicas portas que não foram abertas foram as portas de número 1.000 (escolhida pelo participante) e, digamos, a porta de número 127.489. Nesse instante, o apresentador pergunta ao participante se ele quer ou não mudar a porta escolhida. Será mesmo que tanto faz realizar a mudança ou permanecer na porta escolhida? Será que o participante era realmente sortudo de ter acertado a porta que o levaria ao prêmio máximo na primeira tentativa com tantas outras portas?

É claro que realizar a mudança é muito mais vantajoso. Para o leitor que ainda não está convencido e acha que a probabilidade, permanecendo na primeira porta escolhida, é de 50%, fazemos a sugestão de imaginar agora um número muito grande de portas, por exemplo, 10^{1000} . Podemos dizer que a probabilidade do participante acertar a porta que possui o carro na primeira tentativa é completamente desprezível, ficando claro que a troca de porta no momento oportuno é muito mais vantajosa. Essa maneira de ampliar, de forma considerável, o número de portas é a melhor maneira de convencer que a melhor opção é trocar de porta no momento oportuno.

Passamos agora ao raciocínio matemático. Os cálculos da probabilidade de ganhar o carro mudando ou não de porta pode ser resolvido de forma simples. Observe a Tabela 4.5 e suponha, sem perda de generalidade, que o participante tenha inicialmente escolhido a porta 1, e que a distribuição dos bodes e do carro seja feita, em cada caso, sem repetição e de forma aleatória. Lembremos que o questionamento feito ao participante é se ele deseja ou não mudar de porta após um bode ser

4.3. O PROBLEMA DE MONTY HALL

revelado.

Casos	Probab.	Porta 1	Porta 2	Porta 3	Mantendo a porta	Trocando de Porta
1	1/3	Carro	Bode	Bode	Carro	Bode
2	1/3	Bode	Carro	Bode	Bode	Carro
3	1/3	Bode	Bode	Carro	Bode	Carro

Tabela 4.5: A porta escolhida inicialmente foi a Porta 1.

Quando o participante não muda de porta, a probabilidade dele ganhar o carro é $1/3$, porém fazendo a mudança no momento oportuno a probabilidade de vitória passa a ser de $2/3$. Isso se dá pelo fato de que se não houver a mudança da porta escolhida, a única forma do participante ganhar o carro é ele ter escolhido a porta correta na primeira tentativa. Caso o participante escolha as portas 2 ou 3, claro que a verificação é feita de forma análoga.

Vamos agora provar este problema usando o Teorema de Bayes. Sem perda de generalidade, vamos definir como

- a porta escolhida pelo expectador de a ,
- a porta aberta pelo apresentador de b ,
- a terceira porta de c .

Definamos também os eventos

- A , B e C para representarem, respectivamente, o prêmio por trás das portas a , b e c ,
- X o evento que é a abertura da porta b pelo apresentador.

O problema consiste em saber se a afirmação de que $P(A|X)$ e $P(C|X)$ são iguais está correta. Em outras palavras, a dúvida é se a probabilidade independe da

4.3. O PROBLEMA DE MONTY HALL

mudança de porta pelo participante. Pelo Teorema de Bayes temos que

$$P(A|X) = \frac{P(A) \cdot P(X|A)}{P(X)} \quad \text{e} \quad P(C|X) = \frac{P(C) \cdot P(X|C)}{P(X)}.$$

De acordo com o problema, temos que $P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$. Usando probabilidade condicional, podemos concluir que

- (1) $P(X|A) = 1/2$, se atrás da porta a , escolhida pelo expectador, tiver um carro, pois o apresentador pode escolher para abrir as portas b ou c . Portanto, um caso favorável dentre dois possíveis.
- (2) $P(X|B) = 0$, se atrás da porta b tiver um carro, pois o apresentador não pode escolher a porta b .
- (3) $P(X|C) = 1$, se atrás da porta c tiver um carro, pois o apresentador só pode escolher a porta b .

Antes de calcularmos $P(X)$, note que

$$X = (X \cap A) \cup (X \cap B) \cup (X \cap C)$$

e ainda que $X \cap A$, $X \cap B$ e $X \cap C$ são mutuamente exclusivos. Dessa forma,

$$\begin{aligned} P(X) &= P(X \cap A) + P(X \cap B) + P(X \cap C) \\ &= P(A) \cdot P(X|A) + P(B) \cdot P(X|B) + P(C) \cdot P(X|C) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 \\ &= 1/2. \end{aligned}$$

Portanto, usando o Teorema de Bayes, segue que

$$P(A|X) = \frac{P(A) \cdot P(X|A)}{P(X)} = \frac{1/3 \cdot 1/2}{1/2} = 1/3.$$

e

$$P(C|X) = \frac{P(C) \cdot P(X|C)}{P(X)} = \frac{1/3 \cdot 1}{1/2} = 2/3.$$

Concluimos, então, que se mudarmos de porta, dobramos as chances de ganhar o prêmio.

Para generalizar este problema, considere A como sendo o evento de ganhar o carro e \bar{A} de não ganhar o carro. Como A e \bar{A} são complementares, temos que $P(A) + P(\bar{A}) = 1$. Se o jogo for realizado nos mesmos moldes com n portas, $n - 1$ bodes e um carro, temos que

$$P(A) = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Observe a Figura 4.3. Muitos matemáticos somente se convenceram quando realizaram diversas e diversas simulações em computador, de tal forma que verificaram que a probabilidade de ganhar o carro trocando de porta era $2/3$.

4.4 Paradoxo das Coincidências

No Brasil, é muito comum nas festas de final de ano, participarmos de uma saudável brincadeira chamada de *amigo oculto* ou *amigo secreto*. Nessa brincadeira, os nomes de todos os participantes são escritos em pedaços de papel e colocados em uma urna que pode ser uma caixinha, um copo ou até mesmo as mãos de um participante. Cada participante é convidado a retirar, aleatoriamente, um pedaço de papel contendo um nome. Caso o nome retirado seja o do próprio participante, a brincadeira é reiniciada para preservar o sigilo. Será que uma pessoa retirar o próprio nome na brincadeira do amigo oculto é muito comum? Será que aumentando consideravelmente o número de participantes, será mais difícil disso acontecer?

A nossa intuição nos diz que quanto maior o número de participantes, menor a

4.4. PARADOXO DAS COINCIDÊNCIAS

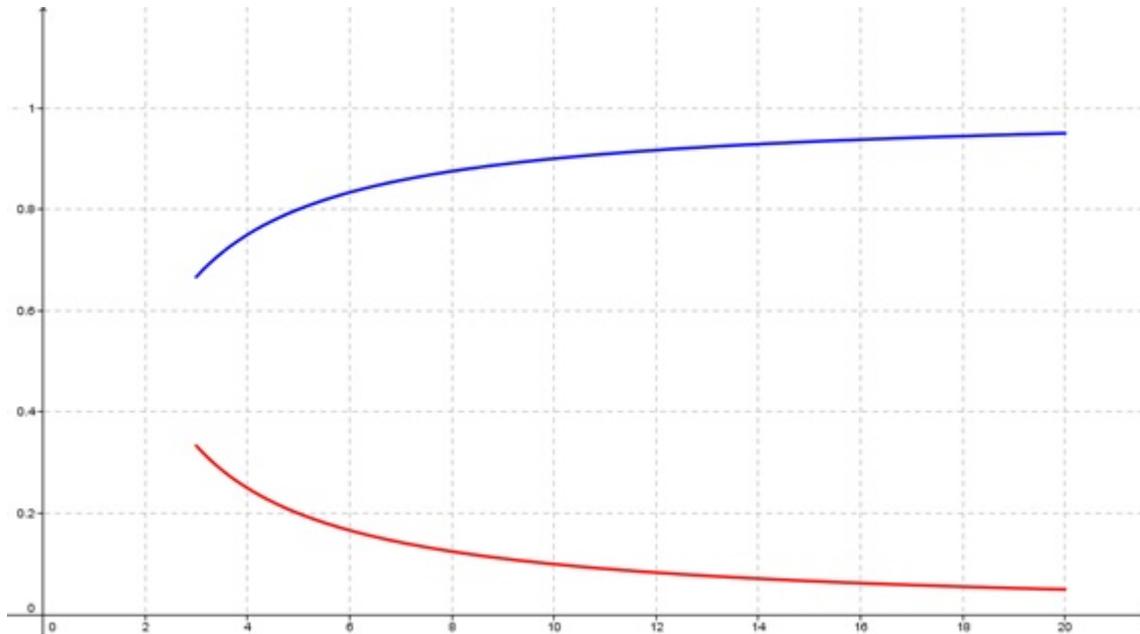


Figura 4.3: O gráfico na cor vermelha representa $P(A)$ e o gráfico na cor azul representa $P(\bar{A})$.

probabilidade de uma pessoa retirar o próprio nome. Isso nos parece muita coincidência. Vejamos se nossa intuição está correta.

Esse problema foi exibido a primeira vez em 1708 por Pierre Rémondde Montmort(1678 - 1719) em seu livro *Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (Ensaio da análise sobre jogos de azar). Posteriormente, um problema semelhante foi estudado por Leonhard Euler.

Para calcular a probabilidade de nenhum dos participantes retirar o próprio nome, teremos que utilizar inicialmente uma técnica de agrupamento chamada de *permutação caótica* ou *desarranjo*. Permutação caótica é aquela em que nenhum dos elementos ocupa a posição original. A demonstração da fórmula da permutação caótica encontra-se no Apêndice desse trabalho.

O total de maneiras diferentes de n pessoas poderem retirar nomes na brincadeira do amigo oculto é $n!$ e o total de permutações caóticas ou desarranjos com n

elementos é dado por

$$n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right). \quad (4.4)$$

Agora, como

$$P(A) = \frac{\text{números de casos favoráveis ao evento } A}{\text{número de resultados possíveis do experimento}},$$

teremos que

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{n! \left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right)}{n!} \\ &= 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Consequentemente, fazendo $x = -1$ em (4.3), obtemos

$$P(A) = e^{-1} \approx 0,367879441 \approx 36,79\%.$$

Muitas pessoas acreditavam que aumentando o número de participantes, a probabilidade de ninguém retirar o próprio nome diminui. Outras achavam justamente o contrário. Mas o que poucos poderiam esperar é que concomitante ao aumento no número de participantes, ocorre uma estabilização da probabilidade. Para que ocorra uma tendência de estabilização são necessários poucos participantes, como podemos verificar na Tabela 4.6.

Para $n = 12$ já encontramos 0,36787944 que é muito próximo de e^{-1} com erro menor do que 0,00000001.

N. de Participantes no Amigo Oculto	Probabilidade de alguém retirar o próprio nome
1	0
2	$1/2 = 0,5$
3	$1/3 \approx 0,333$
4	$3/8 \approx 0,375$
5	$11/30 \approx 0,36667$
6	$53/144 \approx 0,36806$

Tabela 4.6:

4.4.1 O problema da secretária desatenta

O *problema da secretária desatenta* é um problema clássico e muito semelhante ao anterior. Uma secretária ineficiente coloca n cartas distintas em n envelopes com endereços distintos. Qual a probabilidade de pelo menos uma carta chegar ao seu destino? Esse problema, com uma pequena variação, foi proposto pela primeira vez por Nicolaus Bernoulli (1687 - 1759) e resolvido posteriormente por Euler.

A resolução é feita de maneira análoga ao problema anterior e vale lembrar que com o aumento do número de cartas, a probabilidade tende a se estabilizar. Com uma quantidade ainda considerada pequena ($n = 12$) o valor da probabilidade já é extremamente próximo a $1 - e^{-1}$. Ou seja, $P(A) \approx 0,63212056$.

4.5 O Paradoxo de Bertrand

Joseph Louis François Bertrand (1822 - 1900) nasceu em Paris e foi matemático e historiador de ciências. Bertrand apresentou o seguinte problema:

Problema: *Em um círculo unitário, representado na Figura 4.4, o triângulo equilátero inscrito tem lado igual a $\sqrt{3}$. Qual a probabilidade de uma corda desse círculo,*

escolhida ao acaso, ter comprimento maior que o lado desse triângulo?

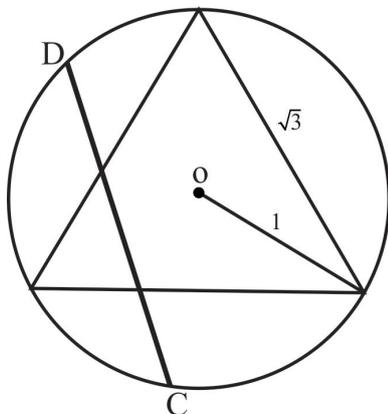


Figura 4.4: Paradoxo de Bertrand.

Esse problema possui algumas interpretações. Trataremos individualmente cada uma delas.

1ª Interpretação: Análise da corda por meio do ponto de interseção com uma linha qualquer perpendicular à circunferência, passando pelo centro do círculo.

Neste caso, escolhe-se um ponto P no interior do círculo. Traça-se um segmento de reta unindo o ponto P ao centro do círculo, ponto O . A corda é traçada passando pelo ponto P de tal forma que seja perpendicular ao segmento OP . Veja a Figura 4.5.

Tome a medida do segmento DC igual a $\sqrt{3}$, que é o comprimento mínimo que satisfaz o enunciado do problema, e lembre que OD invariavelmente mede 1 e OP mede x . Usando o Teorema de Pitágoras temos que $x = 1/2$. Dessa forma, a probabilidade da corda ter comprimento maior que o lado do triângulo será dada por:

$$P(A) = \frac{\text{área do círculo}(O, 1/2)}{\text{área do círculo}(O, 1)} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{\pi \cdot 1} = \frac{1}{4}.$$

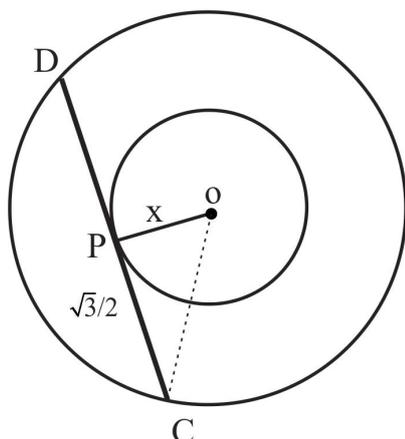


Figura 4.5: Paradoxo de Bertrand - 1ª Interpretação.

Passemos agora à segunda interpretação.

2ª Interpretação: Análise da corda por meio das extremidades sobre a circunferência.

Lembrando que a corda é o segmento de reta que une dois pontos da circunferência, podemos fixar a origem da corda em qualquer ponto sobre a circunferência. O arco que corresponde ao comprimento da circunferência, mede 2π . Veja Figura 4.6.

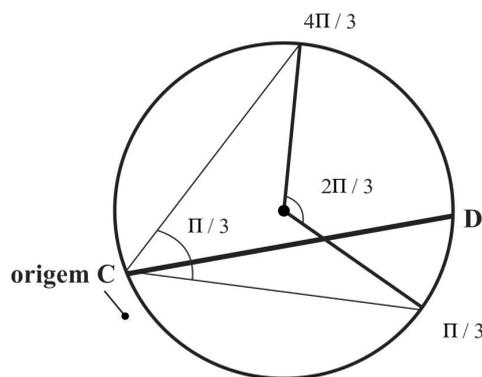


Figura 4.6: Paradoxo de Bertrand - 2ª Interpretação.

Sem perda de generalidade, podemos fazer uma das extremidades da corda coin-

cidir com um dos vértices do triângulo (extremidade C). Para que o comprimento da corda seja maior que o comprimento do lado do triângulo, a outra extremidade da corda deve estar entre os outros dois vértices do triângulo. Dessa forma, a probabilidade procurada será:

$$P(A) = \frac{\text{medida do arco} \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right)}{2\pi} = \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}.$$

Finalmente, consideremos a terceira interpretação.

3ª Interpretação: Análise da corda por meio do ponto de interseção com uma reta fixada, passando pela origem do círculo.

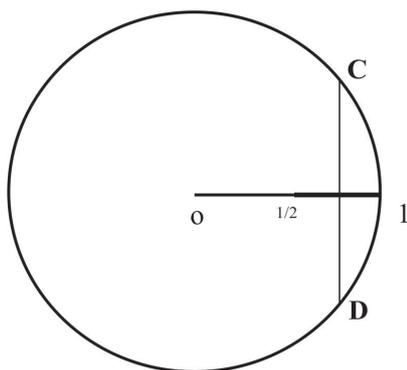


Figura 4.7: Paradoxo de Bertrand - 3ª Interpretação.

O comprimento de uma corda depende da sua distância ao centro do círculo e, nesse contexto, a sua direção é completamente irrelevante. Observando a Figura 4.7, podemos ver que basta a distância da corda ao centro ser menor que $1/2$ (que é metade do raio) para que o comprimento da corda seja maior do que $\sqrt{3}$. Dessa forma, assumamos o espaço amostral como sendo o intervalo real $[0, 1]$ e como casos favoráveis ao evento qualquer ponto pertencente ao intervalo $[0, 1/2]$. Teremos que

a probabilidade procurada será a razão entre os comprimentos $1/2$ e 1 . Portanto,

$$P(A) = \frac{\text{comprimento do intervalo}[0, 1/2]}{\text{comprimento do intervalo}[0, 1]} = \frac{1}{2}.$$

Como podemos ter três resultados diferentes para o mesmo problema? O que ocorre, fazendo uma análise mais aprofundada, é que os problemas também são distintos. Os resultados “paradoxais” se devem às diferentes interpretações da frase *escolhida ao acaso*. De forma muito resumida, as três interpretações poderiam ser respostas aos problemas:

- Qual é a razão entre as áreas de um círculo de raio $1/2$ e um círculo de raio 1 ?
- Qual é a razão entre um arco de medida $2\pi/3$ e um arco de medida 2π ?
- Qual a razão entre um segmento de comprimento $1/2$ e um segmento de comprimento 1 ?

A Matemática, como ciência exata, se destaca pela *precisão* de seus teoremas, definições e enunciados de suas questões. Assim, a pergunta necessita ser mais precisa com o intuito de evitar diferentes interpretações. O espaço amostral deve estar bem definido e a unicidade da solução deve ser algo incessantemente perseguido nos problemas de probabilidade.

4.6 O problema das moedas

Arnaldo tem 2009 moedas, enquanto Bernaldo tem 2010 moedas. Ambos lançam suas moedas simultaneamente e observam o número de caras obtidas. Qual a probabilidade de que Bernaldo obtenha mais caras do que Arnaldo? Esse problema foi apresentado na IV Olimpíada São-Carlense de Matemática em 2009 e tem uma resposta que geralmente foge à intuição.

Para ficar claro, iremos, inicialmente, exemplificar um caso mais simples, com um número reduzido de moedas. Considere C a moeda que cai com a face coroa voltada para cima e K a moeda que cai com a face cara voltada para cima. Suponha que Arnaldo tenha 1 moeda e que Bernaldo tenha 2 moedas. A probabilidade de Arnaldo obter tanto cara como coroa é de $1/2$. Assim, se Arnaldo tira C , então Bernaldo ganha se tirar KK ou KC (nesse último, estamos considerando $KC = CK$). A probabilidade desse último acontecer é: $1/4 + 2/4 = 3/4$. Portanto, a probabilidade de Bernaldo obter mais caras do que Arnaldo, neste caso, é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$$

Analogamente, se Arnaldo tira K , então Bernaldo ganha se acontece KK , cuja probabilidade é de $1/4$ e, daí, a probabilidade de Bernaldo obter mais caras do que Arnaldo, neste caso, é de

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Daí, juntando todos os casos, podemos afirmar que a probabilidade de Bernaldo obter mais caras do que Arnaldo é de

$$\frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

A nossa intuição diz que se aumentarmos o número de moedas, a probabilidade de Bernaldo obter mais caras que Arnaldo diminui, pois percentualmente a diferença entre as quantidades de moedas diminui. Mas façamos um aumento gradual na quantidade de moedas. Considere o caso em que Arnaldo tenha 2 moedas e Bernaldo 3 moedas. Caso ocorra CC para Arnaldo, cuja probabilidade é $1/4$, então Bernaldo terá mais caras se ocorre KKK , KKC ou KCC , que tem probabilidade de ocorrer

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}.$$

4.6. O PROBLEMA DAS MOEDAS

Neste caso, a probabilidade de Bernaldo obter mais caras do que Arnaldo é de

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{32}.$$

Agora, se ocorre KC para Arnaldo, cuja probabilidade é de $2/4$, então para Bernaldo obter mais caras é preciso que ele tire KKK ou KKC , cuja probabilidade é de

$$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{4}{8}$$

e, portanto, a probabilidade de Bernaldo obter mais caras do que Arnaldo é de

$$\frac{2}{4} \cdot \frac{4}{8} = \frac{8}{32}.$$

Se Arnaldo tirar KK , então Bernaldo deverá tirar KKK cujas probabilidades são, respectivamente, $1/4$ e $1/8$, donde a probabilidade de Bernaldo obter mais caras do que Arnaldo é de $1/32$. Sendo assim, no total, a probabilidade de Bernaldo obter mais caras do que Arnaldo é de

$$\frac{7}{32} + \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{1}{2}.$$

Observação: Quando indicamos KKC , é levado em consideração todas as sequências possíveis para obtenção de duas caras e uma coroa, ou seja, $\binom{3}{2}$ sequências possíveis.

Considerando n o número de moedas de Bernaldo, teremos que

$$P(A) = \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\binom{n-1}{0} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} + \binom{n-1}{1} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} + \dots \right. \\ \left. + \binom{n-1}{n-1} \sum_{k=0}^0 \binom{n}{k} \right]. \quad (4.5)$$

Por exemplo, se $n = 4$, então usando (4.5), temos que

$$P(A) = \frac{1}{2^{2 \cdot 4 - 1}} \left[\binom{3}{0} \sum_{k=0}^3 \binom{4}{k} + \binom{3}{1} \sum_{k=0}^2 \binom{4}{k} + \right. \\ \left. + \binom{3}{2} \sum_{k=0}^1 \binom{4}{k} + \binom{3}{3} \sum_{k=0}^0 \binom{4}{k} \right].$$

Portanto,

$$P(A) = \frac{1}{2^7} [1 \cdot (1 + 4 + 6 + 4) + 3 \cdot (1 + 4 + 6) + 3 \cdot (1 + 4) + 1 \cdot 1].$$

Escrevendo novamente $P(A)$ da direita para a esquerda e somando estas duas expressões que definem $P(A)$ membro a membro, teremos:

$$2P(A) = \frac{1}{2^7} [(1 + 3 + 3 + 1) \cdot (1 + 4 + 6 + 4 + 1)] = \frac{1}{2^7} (2^3 \cdot 2^4) = 1.$$

Para Arnaldo com 2009 moedas e Bernaldo com 2010 moedas, fazemos $n = 2010$

em (4.5):

$$P(A) = \frac{1}{2^{2 \cdot (2010) - 1}} \left[\binom{2009}{0} \sum_{k=0}^{2009} \binom{2010}{k} + \binom{2009}{1} \sum_{k=0}^{2008} \binom{2010}{k} + \binom{2009}{2} \sum_{k=0}^{2007} \binom{2010}{k} + \dots + \binom{2009}{2009} \sum_{k=0}^0 \binom{2010}{k} \right].$$

Escrevendo-se novamente $P(A)$ da direita para a esquerda e somando estas duas expressões que definem $P(A)$ membro a membro, teremos:

$$2P(A) = \frac{1}{2^{4019}} \left[\sum_{k=0}^{2009} \binom{2009}{k} \cdot \sum_{k=0}^{2010} \binom{2010}{k} \right] = \frac{1}{2^{4019}} [2^{2009} \cdot 2^{2010}] = 1,$$

ou seja, $P(A) = 1/2$.

Em geral, isto sempre ocorre. Com efeito, utilizando a mesma ideia das duas situações anteriores, temos que

$$2P(A) = \frac{1}{2^{2n-1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \right].$$

Portanto, $2P(A) = \frac{1}{2^{2n-1}} \cdot 2^{n-1} \cdot 2^n$, donde

$$P(A) = \frac{1}{2}.$$

Ou seja, em todo problema em que uma pessoa tem n moedas e outra tem $n - 1$ moedas, a probabilidade da pessoa que possui uma moeda a mais ter um número maior de caras sempre será $1/2$.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Permutações caóticas ou desarranjos

Uma permutação dos elementos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ é dita *caótica*, ou é um *desarranjo*, quando *nenhum* dos a_i 's ocupa a sua posição original, ou seja, na i -ésima posição. Assim, por exemplo, as possibilidades para as permutações caóticas do número 123 são 231 e 312.

Seja D_n o número de desarranjos da sequência $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Então, se $n = 1$, não existem desarranjos, pois existirá apenas o elemento a_1 e, dessa maneira, $D_1 = 0$. Se $n = 2$, então a sequência possui os elementos a_1 e a_2 e, portanto, $D_2 = 1$. Já se $n = 3$, então os elementos que fazem parte da sequência são a_1, a_2 e a_3 . Assim, os únicos desarranjos possíveis são $a_3a_1a_2$ e $a_2a_3a_1$ e, então $D_3 = 2$. Podemos continuar analisando dessa maneira os D_n 's, mas a partir de um certo n , o trabalho fica bastante difícil, já que os números de possibilidades aumentam. Por exemplo, para $n = 4$, existem $24 = 4!$ possibilidades, mas somente 9 são, de fato, caóticas. Para $n = 5$, temos $D_5 = 44$. Precisamos, então, obter uma fórmula geral para determinação desses números. É o que faremos a partir de agora.

Mostraremos por indução que

$$D_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right), \quad (\text{A.1})$$

se $n \geq 2$. De fato, temos que

$$D_2 = 2! \cdot \frac{1}{2!} = 1$$

que, como já vimos, é uma igualdade verdadeira. Suponha que (A.1) seja verdadeira para $n - 1$, isto é, suponha que vale a seguinte igualdade:

$$D_{n-1} = (n-1)! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right).$$

Multiplicando ambos os membros desta última equação por n , obtemos que

$$nD_{n-1} = n(n-1)! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right).$$

Mas assumindo verdade a igualdade

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n, \quad \forall n \geq 2, \quad (\text{A.2})$$

que será provada adiante, temos que $nD_{n-1} = D_n - (-1)^n$. Assim,

$$D_n - (-1)^n = n(n-1)! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right).$$

Daí,

$$\begin{aligned} D_n &= n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right) + (-1)^n \\ &= n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right) + n! (-1)^n \frac{1}{n!} \\ &= n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right), \end{aligned}$$

como queríamos.

Resta-nos, então, provar a igualdade (A.2). Para tanto, raciocinemos da seguinte maneira. Seja $abcde \dots$ um arranjo de n letras. Para que este arranjo se torne caótico, é necessário que rearranjemos esses números de forma que nenhum deles volte a sua posição original. Fazendo isto, existem $n - 1$ opções para a primeira letra, já que ela não pode ser a . Suponha, sem perda de generalidade, que a primeira letra seja b . Assim, D_n é dado pelo produto do número de variações das demais letras por $n - 1$, pois existem $n - 1$ opções para a primeira letra. Temos, portanto, duas possibilidades. A primeira possibilidade é quando consideramos como sendo a a segunda letra logo após a letra b . Neste caso, precisamos rearranjar $n - 2$ letras de modo que nenhuma volte a sua posição de origem. Este é o mesmo problema com que iniciamos, reduzido duas letras, havendo, portanto D_{n-2} formas de fazê-lo. O segundo é o contrário do primeiro, isto é, quando a não é a letra imediatamente após b . Neste caso, o problema passa a ser rearranjar $n - 1$ letras que ficarão à direita de b e isso pode ser feito de D_{n-1} maneiras. Como os rearranjos das duas alternativas pertencem a conjuntos distintos, temos que, quando b é a primeira letra, existem $D_{n-1} + D_{n-2}$ desarranjos possíveis. Como existem $n - 1$ opções para a primeira letra, pelo Princípio Multiplicativo de Contagem, temos

$$D_n = (n - 1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

Assim, se $n = 3$, então

$$D_3 = 2(D_2 + D_1).$$

Podemos ainda escrever D_3 da seguinte maneira:

$$D_3 = (-D_2 + 3D_2) + 2D_1$$

e, portanto,

$$D_3 - 3D_2 = -(D_2 - 2D_1).$$

Fazendo o mesmo para os casos em que $n = 4$ e $n = 5$, obtemos

$$D_4 - 4D_3 = -(D_3 - 3D_2) \quad \text{e} \quad D_5 - 5D_4 = -(D_4 - 4D_3).$$

Sendo assim, para $n \geq 3$, tem-se que

$$D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}).$$

Multiplicando todas essas expressões e fazendo suas devidas substituições, obtemos

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1).$$

Só que $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_2 = 1$ e $D_1 = 0$. Logo, temos (A.2).

A.2 Princípio da Casa dos Pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichlet

Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859), foi um matemático alemão a quem se atribui a moderna definição de função e o princípio das gavetas ou princípio das casas dos pombos.

O *princípio da casa dos pombos* afirma que se existem n casas e $n+1$ pombos, pelo menos uma casa receberá mais de um pombo. Esse princípio também é conhecido como *princípio das gavetas de Dirichlet*: se $n+1$ ou mais objetos são colocados em n ou menos gavetas, então pelo menos uma gaveta recebe mais de um objeto.

A interpretação é bem simples. Imagine 10 pombos e apenas 9 casas. Poderia (embora pouco provável) que todos os pombos ficassem em uma mesma casa. Agora,

é impossível que cada pombo fique em uma casa distinta, pelo simples fato de existirem mais pombos do que casas, então pelo menos uma casa receberá mais de um pombo.

Um outro exemplo é o seguinte: em um grupo de 13 pessoas, podemos garantir que pelo menos 2 pessoas fazem aniversário no mesmo mês? Se existem mais pessoas do que meses do ano, teremos que, em pelo menos um mês, mais de uma pessoa faz aniversário, portanto a afirmação é verdadeira.

Referências Bibliográficas

- [1] Bellhouse D.R., *De Vetula: a medieval manuscript containing probability calculations*. International Statistical Review, 2000.
- [2] Dorrie, H., *100 Great Problems of Elementary Mathematics, their history and solution*, Dover Publications, 1958.
- [3] Donovan, D. *The www Tackles The Monty Hall Problem*, 1998.
- [4] Gomes, C. , Tertuliano, I. *Probabilidade de A a P*, 23ª semana da Matemática - UFRN
- [5] Gridgeman, N. T., *Geometric Probability and the number π* , Scripta Mathematica, 1960.
- [6] Gridgeman, N. T. , *Introduction to Probability, 2nd edition*, American Mathematical Society, 2003.
- [7] Ilydio P. de Sá, *Leitura Complementar: Paradoxos, Probabilidades e Lei dos Grandes Números*, Universidade Severino Sombra
- [8] James, B., *Probabilidade: um curso de nível intermediário*, IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [9] Machado, N. J., *Matemática e língua materna*, 3º edição - Cortez Editora, 2006.
- [10] Magalhães, M.N *Probabilidades e variáveis aleatórias*, 2ª edição - Edusp, 2006.

- [11] Mlodinow, L., *O andar do bêbado*, Jorge Zahar Ed., Rio de Janeiro, 2009.
- [12] Morgado, A. C. O., *Análise Combinatória, e Probabilidade*, Rio de Janeiro, 1991.
- [13] Morgado, A. C. O., *Os dois bodes*, RPM 33, p. 26-29, Rio de Janeiro, 1990.
- [14] Pereira, C.A.B., *Alguns Tópicos em Probabilidade Geométrica*, Dissertação de Mestrado, Unicamp, 2011.
- [15] Saldanha, Nicolau C., *Como Perder Amigos e Enganar as Pessoas*, Eureka! Número 1, 1998. 12 p. 623-727, 1959.
- [16] Sarkissian, R., *Buffon's Needle Problem*, Dissertation. University of Waterloo, 2010.