Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Centro de Ensino Superior do Seridó
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

CALCULANDO DISTÂNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL USANDO MATERIAL MANIPULÁVEL COMO RECURSO DIDÁTICO

José Carlos Vieira de Souza

CAICÓ - RN
2013

José Carlos Vieira de Souza

CALCULANDO DISTÂNCIA EM GEOMETRIA ESPACIAL USANDO MATERIAL MANIPULÁVEL COMO RECURSO DIDÁTICO

Dissertação apresentada à Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:

Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino

CAICÓ - RN
2013

Catalogação da Publicação na fonte

Universidade Federal do Rio Grande do Norte.
Centro de Ensino Superior do Seridó.
Biblioteca Setorial Professora Maria Lúcia Bezerra da Costa - Caicó

Souza, José Carlos Vieira de.
Calculando distância em geometria espacial usando material manipulável como recurso didático / José Carlos Vieira de Souza - Caicó, 2013.

Orientador: Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino

Dissertação (Mestre em Matemática) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ensino Superior do Seridó. Centro de Ciências Exatas e da Terra. Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional.

1. Geometria espacial. 2. Cálculo de distância. I. Bernardino, Adriano Thiago Lopes. II. Título.

UFRN/CERES/BS CAICÓ CDU: 514

JOSÉ CARLOS VIEIRA DE SOUZA

Calculando Distância em Geometria Espacial Usando Material Manipulável como Recurso Didático

Esta Dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovado em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, do Centro de Ciências Exatas e da Terra, da Universidade Federal do Rio Grande do Norte.

Banca Examinadora

Prof. Dr. Adriano Thiago Lopes Bernardino – UFRN

Fágner Lemos de Santana

Prof. Dr. Fagner Lemos de Santana – UFRN

Joedson Silva dos Santos.

Prof. Dr. Joedson Silva dos Santos – UFS

Maio de 2013

Agradecimentos

Agradeço esta Dissertação primeiro a Deus por ter me abençoado com saúde para chegar até este momento, em especial a minha esposa Danielly Karine pela paciência e compreensão dos momentos difíceis, aos meus pais por estarem sempre torcendo por mim, aos meus amigos de trabalho do IFRN Giancarlos e José Rauryson pela disponibilidade sempre que solicitado, aos meus novos amigos e companheiros de Mestrado, bem como, aos nobres professores que, com muita paciência e boa vontade, contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional, acreditando em minha capacidade para alcançar mais essa vitória, a CAPES pela atenção dada a este programa através da disponibilização de bolsas de estudo para seus participantes, incentivando-os na busca constante pelo aperfeiçoamento docente e ainda aos professores Dr. Fagner Lemos, Dr. Joedson Silva por terem aceito o convite para fazer parte da banca examinadora e em especial ao professor Dr. Thiago Bernardino que de forma atenciosa e eficiente contribuiu para realização desse trabalho como meu orientador.

Resumo

Esse trabalho objetiva apresentar uma proposta de ensino para a introdução do estudo de Geometria Espacial buscando demonstrar que a utilização de materiais manipuláveis como recurso didático pode ser uma alternativa facilitadora da aprendizagem para a fixação dos conceitos primitivos da geometria, dos postulados e teoremas, das posições relativas entre pontos, retas, planos e do cálculo de distâncias. O desenvolvimento lança mão de uma sequência de atividades que visa garantir que os alunos possam construir uma aprendizagem mais sistematizada, sendo estas divididas em quatro etapas.

Palavras chave: Geometria Espacial. Materiais Manipuláveis. Cálculo de Distância.

Abstract

This work presents a proposal for introducing the teaching of Geometry Space study attempts to demonstrate that the use of manipulatives as a teaching resource can be an alternative learning facilitator for fixing the primitive concepts of geometry, the postulates and theorems, position relationships between points, lines and planes and calculating distances. The development makes use of a sequence of activities aimed at ensuring that students can build a more systematic learning and these are divided into four steps.

Keywords: Space Geometry. Manipulatives. Distance Calculation.

Sumário

1 Introdução

O fato de ponto, reta, plano e espaço serem noções primitivas da Geometria não significa que não se possa reforçar a intuição do aluno a respeito dessas noções. De uma certa forma, isto ocorria já nos elementos de Euclides, por exemplo: ponto é definido como aquilo que não possui partes, ou seja, é indivisível; linha é o que possui comprimento mas não largura; reta é uma linha que jaz igualmente com respeitos a todos os seus pontos, isto é, uma linha onde não existem pontos especiais. Embora tais descrições não possam ser utilizadas como definição por utilizarem outros termos não definidos, como comprimento e largura, ajudam a correlacionar entidades matemáticas com imagens intuitivas [10].Visando alcançar um melhor entendimento, este trabalho fará uso de figuras, folhas de isopor, palitos de churrasco coloridos e taxas coloridas, os quais são materiais manipuláveis, para fazer representações daquilo que é puramente abstrato. O ponto será representado pela ponta de uma taxa colorida, a reta será representada por um palito de churrasco colorido e o plano por uma folha de isopor. A utilização desses materiais para fazer tais representações deve ser feita de modo que não se permita que os alunos abstraiam conceitos equivocados, chegando a imaginar, por exemplo, que ponto possui dimensão e que tanto a reta quanto o plano são limitados. Essa possibilidade de abstrair conceitos equivocados sempre acontece quando se utiliza material concreto para representar objetos que são abstratas. No entanto, a utilização de material manipulável não perde sua credibilidade, segundo Hartshor e Boren em [8], que afirmam que os materiais manipuláveis podem ser usados para introduzir ou reforçar conceitos matemáticos. Tal proposta de utilização de materiais manipuláveis teve sua introdução no ensino da matemática definida durante o século XIX com grandes nomes como Pestalozzi e Froebel que atuavam na Educação Infantil. Johann Heinrich Pestalozzi, educador suíço, acreditava que o aluno aprendia melhor utilizando seus próprios sentidos descobrindo as coisas por si mesmo. O seu livro Como Gertrude Ensina seus Filhos é um dos clássicos da educação. Friedrich Wilhelm August Frobel foi o primeiro educador a enfatizar o uso de brinquedo e de atividades lúdicas nas situações de aprendizagens. Administrou uma gráfica que fazia impressões de instruções de brincadeiras e canções para serem aplicadas nas escolas. Essa nova forma de se abordar o ensino, a partir da utilização de recursos didáticos nas situações de aprendizagens, só fora chegar ao Brasil por volta do ano de 1920, mais especificamente durante o auge da tendência empírico-ativista em que o pressuposto básico era de como se deveria ensinar, nesse contexto, a matemática [6]. Assim pretende-se com o uso de materiais manipuláveis, proporcionar a aprendizagem dos alunos referentes aos conceitos primitivos (postulados) e propriedades da geometria espacial, capacitando-os para realizar cálculo de distâncias entre dois pontos, entre um ponto e uma reta, entre um ponto e um plano, entre duas retas, entre uma reta e um plano e entre dois planos.

Essa proposta de trabalho visa atender os alunos da segunda série do Ensino Médio ou os alunos que estão numa série do Ensino Médio em que esteja sendo iniciado o assunto de Geometria Espacial. Tem como objetivo consolidar os conceitos primitivos de ponto, reta e plano, bem como de identificar e calcular distâncias entre pontos, retas e planos.

Para a realização do trabalho deve-se dispor em média de quatro aulas de cinquenta minutos cada. Tal trabalho será desenvolvido em quatro etapas:

- Primeira: Fazer uma revisão de ponto, reta, plano e de alguns postulados usando os seguintes materiais: uma folha de isopor; duas folhas de isopor coladas; palitos coloridos de churrasco; taxas coloridas;

- Segunda: Discutir as possibilidades de distâncias entre pontos, retas e planos usando os materiais da primeira fase;

- Terceira: Usar o material manipulável para calcular distâncias construindo um bloco retangular e uma pirâmide de base quadrangular regular com palitos de churrasco coloridos e cola quente (caso o professor verifique que o manuseio de cola quente traga algum risco para os discentes, pode usar algum outro produto como por exemplo cola de contato);

- Quarta: Estimular a representação espacial por meio de desenhos com as resoluções de problemas, bem como representar no papel situações envolvendo os materiais manipuláveis.

2 Justificativa

Ao analisar, por meio de leituras e estudos, alguns livros didáticos [3; 12], usados nas escolas públicas do Ensino Médio do município de Caicó, cidade do interior do Rio Grande do Norte, e em conversas com alguns professores que lecionam Geometria Espacial, pôde-se observar que esse assunto se restringe, muitas vezes, ao cálculo de áreas e volumes dos principais sólidos, deixando-se de lado a parte inicial que contempla conceitos primitivos da geometria, postulados, propriedades e teoremas, posições relativas entre pontos, retas e planos, propriedades de paralelismo e perpendicularismo, projeções ortogonais, cálculo de distâncias e ângulos, ou seja, o professor normalmente optar por não trabalhar os assuntos citados anteriormente passando diretamente para o cáculo de volumes, tendo em vista a complexidade em se abordá-los pois em sua essência são apenas teóricos, abstratos e de difícil compreensão, tornando-se tedioso e desestimulante o aprendizado desses conceitos por parte dos alunos. Para tanto, visando superar essas dificuldades, bem como evitar tais ´´pulos´´ e tornar mais prazeroso e acessível o ensino desses conteúdos, e além disso percebendo-se que apenas os livros didáticos como ferramenta de trabalho não são suficientes para apoiar o professor em sala de aula na sua práxis, buscou-se mais uma alternativa: o uso de materiais manipuláveis como recurso didático para apresentar os conceitos primitivos, os postulados considerados mais importantes e alguns teoremas da Geometria Espacial. A experiência do professor mostra que numa sala de aula a aprendizagem não acontece de forma igual e nem ao mesmo tempo com todos os alunos [7], por isso a visão espacial, que é um dos requisitos essenciais à compreensão do estudo da geometria espacial, é muitas vezes um privilégio de poucos e é justamente nesse ponto que o docente deve buscar alternativas para democratizar e tornar acessível o conhecimento e proporcionar uma aprendizagem satisfatória para todos. Por isso, ao se discutir conceitos primitivos, postulados e teoremas de forma manipulável, tal ação proporciona uma alternativa a mais para os alunos, principamente àqueles que não detém a percepção espacial, para compreender e assimilar melhor os assuntos e a partir daí ao se depararem com problemas que abordem posições relativas dos elementos fundamentais e do cálculo de distâncias possam usar os conhecimentos teóricos adquiridos nas atividades manipulativas para terem êxitos em suas soluções.

3 Desenvolvimento

3.1 Da geometria aos sólidos geométricos: Um breve comentário

Desde o início dos tempos, a Geometria apresenta-se profundamente ligada à vida humana, haja vista a sua presença marcante nos mais variados lugares, seja na natureza, na arquitetura ou nas artes, essa área da matemática tem auxiliado o homem a encontrar soluções para os mais diversos tipos de problemas, com os quais o mesmo se depara em seu cotidiano. Nesse sentido, Vidigal em [16] afirma que ter um conhecimento básico de Geometria é importante para a pessoa no dia-a-dia, seja para se orientar, para se comunicar, para apreciar a beleza das formas na natureza e nas artes.

De acordo com Pires em [14], é por meio da investigação, da experimentação e da exploração de objetos do mundo físico, ou seja, de objetos presentes no cotidiano humano, bem como de outros materiais mais específicos ao universo matemático, que os estudos de espaço e forma acontecem, sendo de suma importância despertar e estimular a observação e a percepção do discente para tais semelhanças. Dessa forma, para estudar Geometria, faz-se necessário desenvolver:

- Um conhecimento real de mundo;
- Um processamento de interpretação visual;
- Um raciocínio lógico e dedutivo;
- Um pensamento abstrato.

Cotidianamente é bastante comum ter contato com diversos tipos de objetos como caixa de papelão, dado, casquinha de sorvete e velas, aos quais são dados nomes cujos significados no campo da matemática não são os mesmos utilizados no dia-a-dia humano, salvo em alguns casos específicos. Segundo

Lacerda [9] é no estudo da forma dos corpos e de suas propriedades que a Geometria reduz os corpos a conjuntos de pontos, construindo símbolos, classificando-os e denominando-os de Sólidos Geométricos. Nesse contexto, são denominados sólidos os objetos que apresentam-se ao nosso redor, cujas formas são as mais variadas, ocupando um lugar no espaço; podendo ter superfícies planas ou curvas, caracterizando-se poliedros ou não. Em [9] Lacerda valida o que já fora dito afirmando que:

> **Os Sólidos Geométricos estão presentes no mundo que nos rodeia, apesar de por vezes, não nos apercebermos da sua existência. Através de formas e desenhos, eles estão cada vez mais acessíveis e presentes no nosso dia-a-dia, desde as civilizações mais antigas, em vários exemplos da arte chinesa, egípcia, céltica e outras.**
>
> **Na natureza, podemos encontrá-los nas suas diversas formas: desde, por exemplo, os planetas e seus satélites aos cristais de quartzo, nas árvores, num favo de mel, e ainda numa simples concha.**

3.2 A utilização de materiais manipuláveis

Para professores que estão comprometidos com a missão de educar, a busca de novas estratégias e metodologias de ensino torna-se uma constante, e no campo da matemática isso não poderia ser diferente. A utilização de materiais manipuláveis no universo matemático é algo que ainda merece bastante atenção e espaço para maiores esclarecimentos, haja visto que alguns professores ainda apresentam algumas dúvidas e restrições quanto a sua aplicação em sala de aula. Como a matemática é algo que assusta alguns alunos, a percepção é algo que também deve ser trabalhada pelos professores, com vistas a concretização de algumas ideias, e para tanto, dentre as inúmeras possibilidades, a utilização de materiais manipuláveis é uma estratégia que viabiliza a obtenção de bons resultados, uma vez que permite ao aluno concretizar o que até então lhe era abstrato e desconhecido.

No cotidiano das salas de aula, é comum identificar as dificuldades encontradas pelos alunos no estudo dos conteúdos matemáticos, bem como a necessidade que estes alunos apresentam no tocante à sistematização da aprendizagem. Para que a aprendizagem ocorra de forma eficaz e significativa, o discente deve estar numa posição que esteja diretamente envolvido e atuando ativamente em seu processo de construção do conhecimento, vivenciando os conteúdos matemáticos, de tal forma a observar, refletir, interagir e concluir acerca do que está sendo estudado. Nesse sentido, percebe-se que o ensino da matemática não deve ocorrer como uma mera transmissão e recepção de conceitos e informações já prontamente elaborados. Tal fato é notoriamente percebido no ato da exposição oral e da resolução de exercícios, onde o aluno assume a função de espectador, e não de agente atuante de seu processo de aprendizagem; evidenciando-se, portanto, uma situação de transmissão de conteúdos, onde pode não ocorrer a construção significativa do conhecimento acerca dos conteúdos matemáticos; fato que pode ter consequências indesejáveis, como a apatia por parte dos alunos para com tais conteúdos.

Para não tornarem as aulas de Matemática tão enfadonhas, alguns pesquisadores da área destacam os inúmeros atrativos que rodeiam o campo escolar, colocando como fonte inspiradora para o desenvolver de novas estratégias de ensino, e referenciando a necessidade que os educadores têm em buscar novas metodologias. Estes propõem a utilização de materiais manipuláveis como instrumentos que auxiliem os professores quanto a chamar atenção dos alunos, de maneira a melhor organizar o pensamento dos mesmos com vistas a uma melhor compreensão dos conteúdos ora ministrados, possibilitando aos mesmos a oportunidade de participar da construção de seu conhecimento a partir da interação.

Como reafirmação desta nova proposta de trabalho a partir da manipulação de objetos concretos no ensino da Matemática, alguns estudiosos de outras áreas do conhecimento vêm, nos últimos séculos, destacar a importância de se utilizar materiais manipuláveis como apoio visual-tátil, tendo em vista facilitar, estimular e desacomodar o aluno em seu processo de aquisição e construção do conhecimento. Dentre tantos estudiosos, destacamos Jean Piaget, quando este nos coloca que o conhecimento ocorre pela ação refletida sobre o objeto, ou seja, para ele a inteligência, ou a capacidade de raciocinar, se constrói a partir das relações mentais, manipuláveis e das trocas do ser humano com o meio onde ele vive [13]. Outro nome a ser mencionado é o de Gerard Vergnaud, uma vez que este, propondo a teoria dos campos conceituais, afirma que o conhecimento se constrói e se desenvolve no tempo, em interação adaptativa do indivíduo com as situações que vivencia. Em [15] Verganud aborda que um dos maiores problemas na educação decorre do fato de que muitos professores consideram os conceitos matemáticos como objetos prontos, não percebendo que estes conceitos devem ser construídos pelos alunos.

Segundo Estephan, em [5], a partir da manipulação de materiais os alunos desenvolvem a capacidade de observação e, com isso, podem vir a estabelecer relações lógicas, indo das mais sutis até as mais intrínsecas no campo da Matemática.

De acordo com Carvalho (veja [2]) a função do material manipulável, quando utilizado como instrumento didático, não deve ser meramente ilustrativo, haja vista que a ênfase não está sobre os objetos que ora estão sendo manipulados, mas sim sobre as operações e instruções que com eles se realizam. Nesse contexto, Pires em [14] ressalta a importância em se oportunizar ao aluno situações que venham a favorecer o desenvolvimento do pensamento abstrato através da experiência da matematização por meio da manipulação de materiais concretos, uma vez que, durante a ação pedagógica, torna-se de suma importância a manipulação de tais materiais, pois os mesmos possibilitam ao educando sentir, tocar, modificar e ajustar os objetos de maneira a facilitar sua compreensão acerca de determinado conteúdo matemático.

Fazendo uma breve retrospectiva, podemos perceber que tal assunto já vem sendo discutido desde muito tempo, pois como bem nos coloca Lorenzato em [11], no ano de 1650, o grande estudioso do campo da educação Jan Amos Komenský, mais conhecido como Comenius, já defendia que o ensino, independente de sua área específica, deveria ocorrer do concreto ao abstrato, demonstrando com isso que o conhecimento se inicia pelo sentido, e que é fazendo que se aprende.

Já no ano de 1680, Lacke reafirma tal colocação dizendo que é indispensável a experiência sensível para se alcançar o conhecimento. Rousseau, por sua vez, sugeriu a experiência direta sobre os objetos, tendo por objetivo a aprendizagem significativa. Pestalozzi e Frooebel, no ano de 1800, defenderam que o ensino deveria iniciar pelo concreto. No mesmo período, Herbart afirmou ser pelo campo sensorial que a aprendizagem tem início. Já em 1900, Dewey reafirma o valor da experiência direta, sendo esta a base para a construção do conhecimento. Poincaré, no campo da matemática, já aconselhava o uso de imagens vivas, ou seja, de objetos concretos, para esclarecer as verdades matemáticas. Montessori, em seu momento, expôs diversos exemplos de materiais manipuláveis, que poderiam ser utilizados didaticamente, bem como atividades de ensino que viessem a valorizar a aprendizagem por meio dos sentidos, especialmente, através do tato (veja [5; 11; 1]).

Com isso, pode-se perceber que a partir da própria experiência adquirida por cada indivíduo, este terá um meio facilitador para a construção do seu conhecimento, nesse caso, matemático. E dessa forma, através de uma metodologia apoiada no exercício do raciocínio próprio, o mesmo poderá melhor desenvolver e utilizar o raciocínio formal, lógico e dedutivo, os quais são bastante característicos do campo da Matemática.

3.3 Atividade manipulável

Como as atividades são baseadas em uma turma de quarenta alunos, divide-se a turma em cinco grupos de oito e distribui-se o material entre eles. Note que cada grupo receberá: uma folha de isopor, duas folhas de isopor coladas, oito palitos de churrasco coloridos e oito taxas coloridas.

3.3.1 Primeira etapa: Revisão de ponto, reta, plano e de alguns postulados

Nessa etapa o professor pode optar por levar o material todo pronto: folhas soltas, folhas de isopor coladas, palitos de churrasco pintados e as taxas coloridas (ver figura 1), ou fazê-los com os alunos em sala de aula, isso dependerá da disponibilidade de tempo. O material utilizado será:

1. Folhas de isopor (cinco);

2. Duas folhas de isopor coladas por uma fita adesiva colorida (cinco);

3. Palitos de churrascos coloridos (quarenta);

4. Taxas com pontas coloridas (quarenta).

Figura 1: Material manipulável que será utilizado

Distribuído o material, é hora de estimular o pensamento! Lembre-se, será feita uma revisão dos conceitos primitivos de ponto, reta e plano e de alguns postulados. Realizada a revisão, escreve-se no quadro os seguintes postulados (veja [10; 12]):

P_1 Existem infinitos pontos que pertencem a uma reta, assim como infinitos pontos que não pertencem a ela;

P_2 Dados dois pontos distintos do espaço existe uma, e somente uma, reta que os contém;

P_3 Dados três pontos não colineares do espaço existe um, e somente um, plano que os contém;

P_4 Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano;

P_5 Se dois planos possuem um ponto em comum, então eles possuem pelo menos uma reta em comum.

Em seguida convida-se os grupos para apresentar os postulados usando o material manipulável. Sugestão: Cada grupo pode apresentar um postulado.

As imagens a seguir representam o que os alunos podem apresentar sobre os postulados.

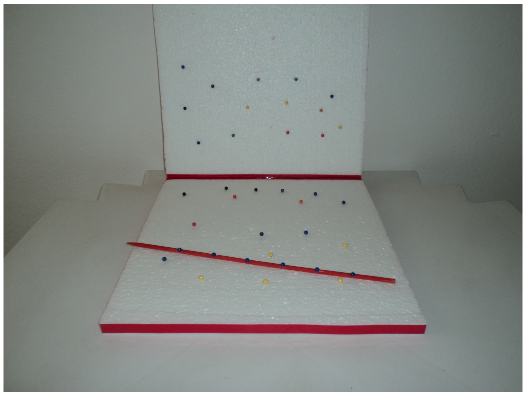

Figura 2: Postulado 1

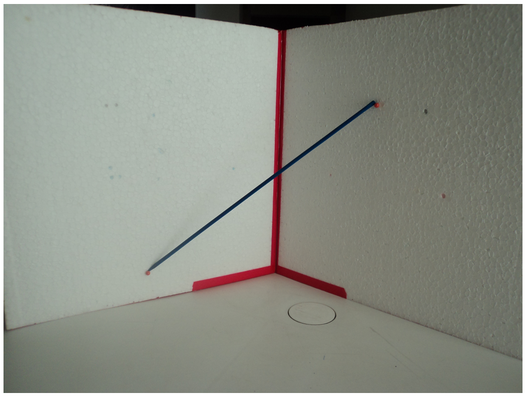

Figura 3: Postulado 2

Figura 4: Postulado 3

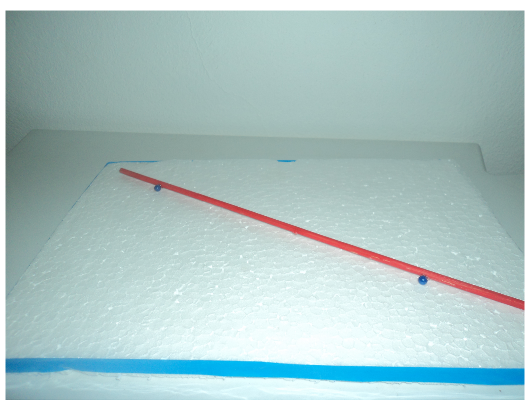

Figura 5: Postulado 4

Figura 6: Postulado 5

3.3.2 Segunda etapa: As possibilidades de distâncias entre ponto, reta e plano

Com os conceitos primitivos e alguns axiomas entendidos da fase anterior, algumas definições vistas em [4] podem ser apresentadas visando um melhor desenvolvimento da atividade:

- Duas retas são coincidentes quando possuem todos os pontos comuns;
- Retas coplanares são retas que estão contidas no mesmo plano;
- Duas retas são concorrentes se, e somente se, elas possuem um ponto em comum;
- Duas retas são paralelas se, e somente se, ou são coincidentes ou são coplanares e não têm ponto comum;
- Duas retas são reversas se, e somente se, não existe plano que as contenha;
- Uma reta é secante a um plano quando possuem apenas um ponto em comum com o plano (ela fura o plano);

- Dois planos distintos que se intersectam (se cortam) são chamados de secantes (ou concorrentes).

Usa-se agora o material manipulável. As folhas de isopor para representar planos; os palitos de churrascos para representar retas e as taxas para representar pontos visando introduzir as posições relativas dos entes fundamentais: ponto, reta e plano. Para isso interroga-se a turma sobre as possíveis posições que podem ser estabelecidas entre eles. Espera-se que nessa fase os alunos percebam pelo menos seis possibilidades de distâncias que serão trabalhadas envolvendo essas entidades geométricas que são:

- Distância entre dois pontos;
- Distância entre ponto e reta;
- Distância entre ponto e plano;
- Distância entre duas retas (paralelas e reversas);
- Distância entre reta e plano (reta paralela ao plano);
- Distância entre dois planos (paralelos).

Nesta fase, eventualmente, pode ser questionado pelos alunos as seguintes situações

- Qual seria a distância entre duas retas concorrentes?
- Qual seria a distância entre uma reta secante a um plano e o plano?
- Qual seria a distância entre dois planos secantes?

Visando o esclarecimento das situações citadas acima, surge a necessidade dos alunos terem contato com a definição que se tem a respeito de distância entre duas figuras. Um bom exemplo que pode ser dado para motivar a compreensão da definição seria interrogá-los sobre a distância entre uma parábola e uma elipse num plano, apesar de nosso foco ser apenas distâncias entre ponto, reta e plano. Abaixo temos o esboço dessa situação:

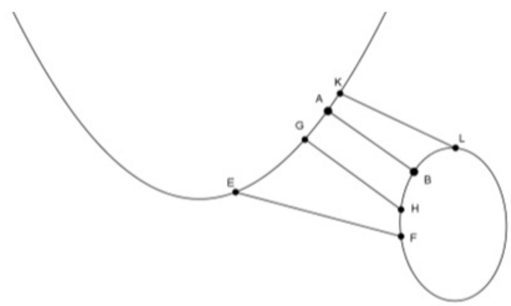

Figura 7: Esboço de uma parábola e uma elipse no plano

A seguir apresenta-se a definição de distância entre duas figuras. Sabemos que o conceito de distância é bem abrangente chegando até o envolvimento do conceito de função num curso mais avançado, no entanto, para esse nível, é suficiente dizer que:

Dadas duas figuras F_1 e F_2, definimos a distância entre F_1 e F_2 como o comprimento do menor segmento que tem um extremo em F_1 e o outro extremo em F_2 (Veja [10]).

Com isso, espera-se que seja percebido pelos alunos:

- Que o comprimento do segmento AB é uma boa opção de escolha para ser a distância entre a parábola e a elipse;
- Que as distâncias envolvendo duas retas concorrentes, uma reta secante a um plano ou ainda de dois planos secantes será igual a zero;
- Que a distância entre duas retas só será diferente de zero se elas forem paralelas ou reversas;
- Que a distância entre uma reta e um plano só é diferente de zero se a reta for paralela ao plano;
- Que a distância entre dois planos só será diferente de zero se eles forem paralelos.

3.3.3 Terceira etapa: Usando o material manipulável para calcular distâncias

É importante que nesta etapa os alunos já sejam capazes de definir com suas próprias palavras os conceitos de distâncias que serão trabalhados, bem como, usar o material para mostrar tais distâncias. O professor pode, se julgar necessário, apresentar, logo em seguida, as definições formais das distâncias que serão trabalhadas. Seguem como sugestão, as definições de distâncias envolvendo ponto, reta e plano.

- A distância entre dois pontos A e B é simplesmente a medida do segmento AB;
- Dado um ponto P e uma reta r do espaço, com P não pertecente a r, se o ponto Q é a projeção ortogonal de P sobre r, então o comprimento do segmento PQ é a distância de P a r;
- A distância de um ponto P a um plano a é definida como o comprimento do segmento da perpendicular traçada de P ao plano a;
- A distância entre duas retas paralelas é comprimento do segmento determinado por qualquer perpendicular a ambas;
- A distância entre duas retas reversas é o comprimento do menor segmento determinado por qualquer perpendicular a ambas;
- A distância de uma reta paralela a um plano é o comprimento do segmento perpendicular que tem extremidade em qualquer ponto da reta e o outro extremo no plano;
- A distância entre dois planos é o comprimento do segmento perpendicular que tem uma extremidade em um plano e a outra extremidade no outro plano.

Para determinar a distância entre os entes fundamentais pontos, retas e planos no espaço, escolhe-se um plano que contenha os elementos (pontos e segmentos de retas) envolvidos e procura-se indentificar um triângulo no qual a distância que se quer encontrar seja um dos lados. Se o triângulo visualizado for retângulo usa-se o Teorema de Pitágoras, se não, a lei dos cossenos ou uma outra relação qualquer.

Uma boa atividade para reforçar o raciocínio comentado acima é pedir aos alunos para calcular o comprimento da diagonal de um bloco retangular (ver figura 8).

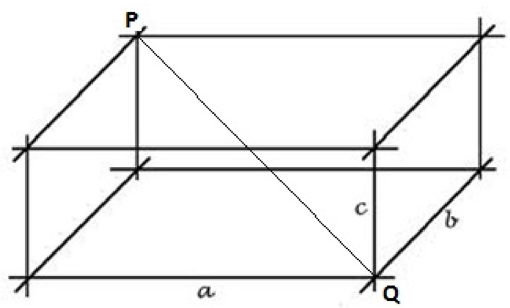

Figura 8: Esboço do paralelepípedo

Note que o cálculo dessa diagonal corresponde a distância entre dois pontos do espaço, neste caso, a distância entre os vértices P e Q.

Podemos desenvolver a atividade descrita acima fazendo manipulações, ou seja, estimula-se agora a construção de um bloco retangular (denominado também de Paralelepípedo Retângulo) visando calcular distâncias e comparar resultados.

Algumas definições podem ser vistas em [4] antes de partir para construção, são elas:

- Paralelogramo é todo quadrilátero cujo lados opostos são paralelos;
- Paralelepípedo é um prisma cujas bases são paralelogramos;
- Prisma reto é aquele cujas arestas laterais são perpendiculares aos planos da base;
- Paralelepípedo reto é um prisma reto cujas bases são paralelogramos;
- Paralelepípedo retângulo é um prisma reto cujas bases são retângulos.

A construção do bloco retangular pode ser feita com os palitos de churrasco coloridos e a cola quente, devendo-se ter a preocupação para as arestas ficarem perpendiculares. As figuras a seguir representam construções onde pode-se fazer manipulações.

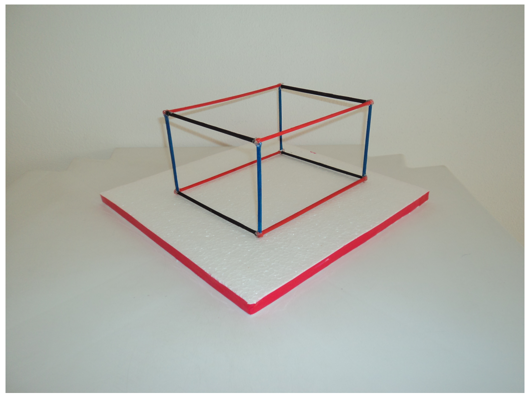

Figura 9: Bloco retangular construído

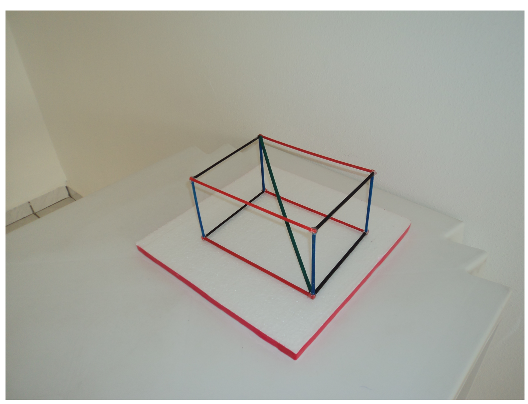

Figura 10: Bloco retangular construído com diagonal

Outra atividade para reforçar o cálculo de distâncias entre os entes geométricos é pedir aos alunos para calcular a altura de uma pirâmide de base quadrada.

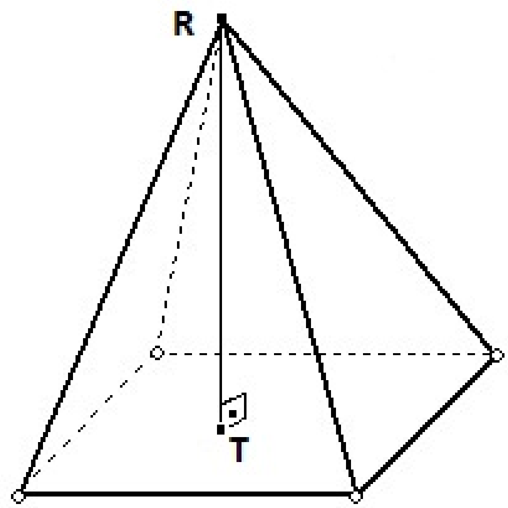

Figura 11: Esboço da pirâmide quadrangular

Note que o cálculo dessa altura corresponde a distância entre um ponto e um plano do espaço, neste caso, a distância entre o vértice R e o ponto T pertecente ao plano que contém a base da pirâmide.

Algumas definições podem ser vistas em [4]. No entanto, para o texto ser mais auto suficiente apresentaremos algumas delas:

- Um polígono é dito regular quando ele possui todos os lados e ângulos congruentes;

- Pirâmide regular é aquela que apresenta um polígono regular em sua base.

A contrução da pirâmide quadrangular (pirâmide regular de base quadrada) pode ser feita com palitos de churrasco e cola quente, devendo-se ter a preocupação para a base ser um polígono regular, pois com isso o centro do polígono da base coincidirá com o pé da altura da pirâmide. As figuras a seguir representam construções onde pode-se fazer manipulações.

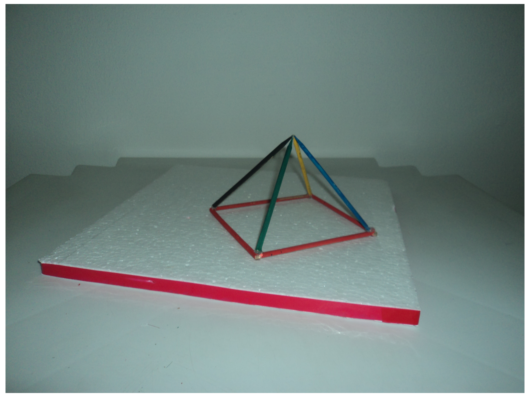

Figura 12: Pirâmide quadrangular construída

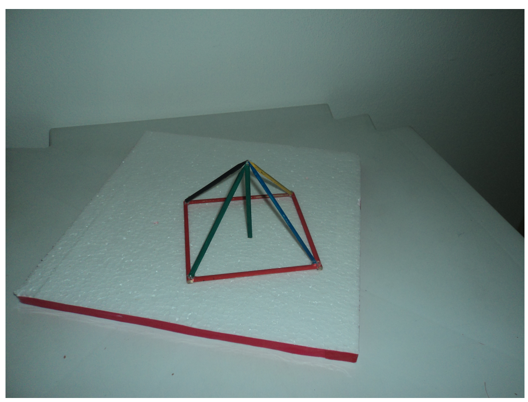

Figura 13: Pirâmide quadrangular construída com altura

3.3.4 Quarta etapa: Estimular a representação espacial por meio de desenho

Essa etapa visa estimular a criatividade e o raciocínio lógico-dedutivo, bem como, a visão espacial. Com isso propõe-se para os alunos desenharem em uma folha de papel as seguintes situações:

- Um plano e um ponto fora dele;
- Uma reta perpendicular a um plano passando por um ponto não pertencente ao plano;
- Um bloco retangular e um segmento de reta que une o centro de duas faces laterais adjacentes;
- Um cubo de vértices A, B, C, D, E, F, G,H e o plano definido pelos vértices B, D e G;
- Uma pirâmide de base quadrada, sua altura, o apótema da base e o apótema da face.

4 Avaliação

A seguir, segue-se uma atividade avaliativa contendo algumas questões visando avaliar como os alunos irão abordar os problemas para resolvê-los após ter vivenciado o trabalho proposto.

Q_1 Qual é a distância entre os centros de duas faces adjacentes de um cubo de aresta $20cm$?

Q_2 Num paralelepípedo reto $ABCDEFGH$ as arestas da base medem $19,3cm$ e $15,3cm$ e a altura mede $10,3cm$. Calcule a área da figura determinada pela diagonal do paralelepípedo, com a diagonal da base e a aresta lateral que une as xtremidades dessas diagonais.

Q_3 A figura abaixo indica um cubo de aresta $20cm$. Sendo B, C, D e G quatro de seus vértices. Qual adistância do vértice C até o plano que contém os vértices B, D e G?

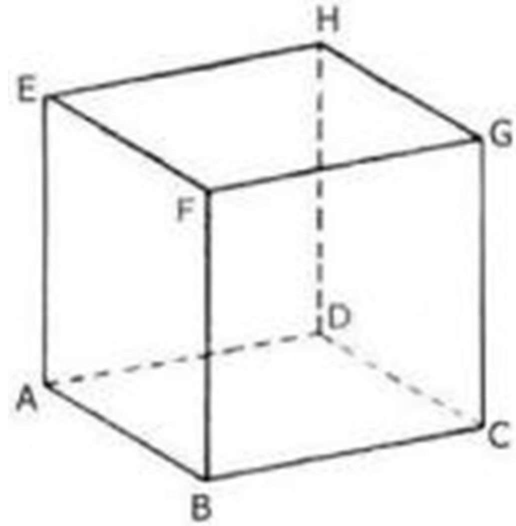

Figura 14: Cubo

Espera-se que os alunos apresentem respostas semelhantes as que seguem:

Resolução da questão 1

Solução usando o material manipulável:

Constroe-se um cubo de aresta $20cm$, marca-se os centro de duas faces adjacentes e os une por meio de um pedaço de palito como na Figura 15. Em seguida com o auxílio de uma régua mede-se a distância entre os dois centros que no caso será o comprimento do pedaço de palito cuja medida foi de aproximadamente $13,5cm$

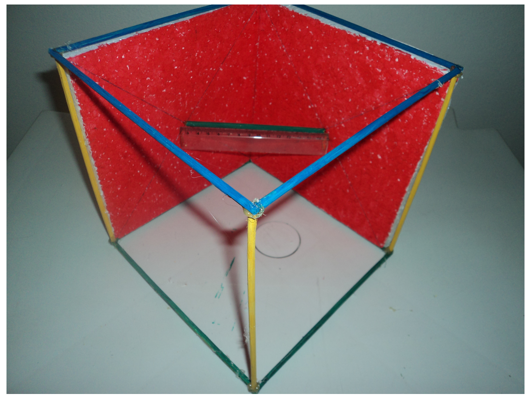

Figura 15: Esboço da situação

Solução analítica:

Faz-se um esboço da situação (ver Figura 16). Sejam B e C os centros das faces do cubo. Temos $AB = 10cm$ e $AC = 10cm$, como as faces adjacentes do cubo são perpendiculares segue-se que o triângulo ABC é retângulo em A. Usando o teorema de Pitágoras:

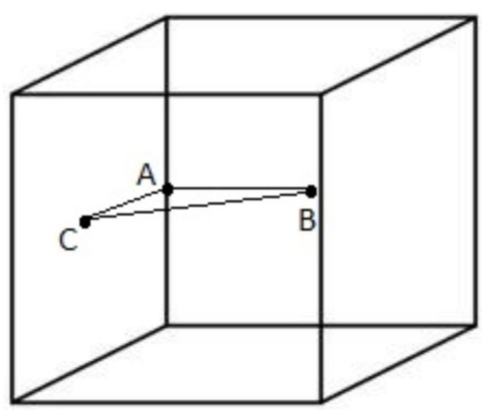

Figura 16: Esboço da situação

$$BC^2 = AC^2 + AB^2$$

$$BC^2 = 10^2 + 10^2$$

$$BC = \pm\sqrt{200}$$

$$BC = 10\sqrt{2}cm.$$

Espera-se que os alunos percebam que o valor calculado usando manipulação foi bem próximo daquele calculado analitacamente.

Resolução da questão 2

Solução usando o material manipulável:

Constroe-se um bloco retangular de dimensões $19,3cm$; $15,3cm$ e $11,3cm$. Determina-se o triângulo retângulo cuja hipotenusa é a diagonal do bloco retangular e a outra diagonal e a aresta são os catetos (ver Figura 17). Em seguida com o auxílio de uma régua mede-se-se a medida da diagonal da base que foi de aproximadamente $24,3cm$ e com o auxilio de uma malha quadriculada mede-se a área do triângulo cuja medida foi de aproximadamente $130cm^2$

Para medir a área coloca-se o triângulo construído sobre a malha como na Figura 18. Em seguida conta-se quantas unidades de áreas estão contido dentro do triângulo.

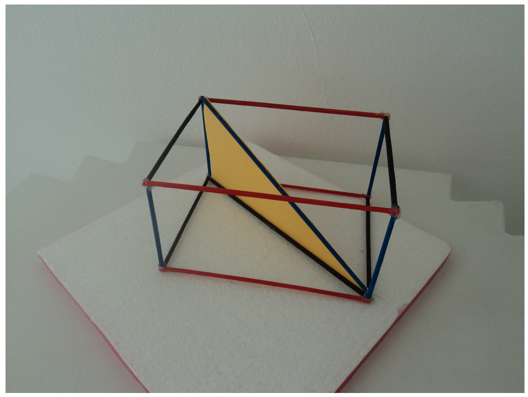

Figura 17: Esboço da situação

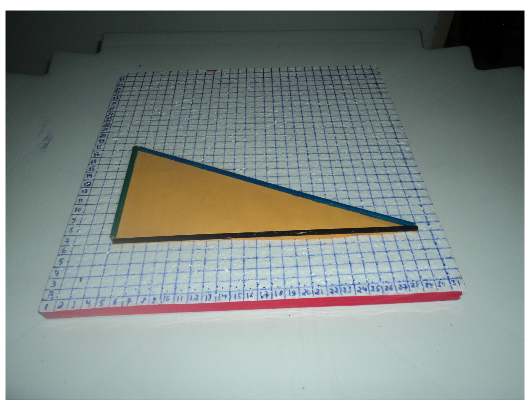

Figura 18: Esboço da situação

Solução analítica.

Considerando o esboço do paralalelepípedo reto $ABCDEFGH$ ver figura 19. Os dados nos diz que a figura pode ser o triângulo retângulo ACF reto em A. Usando a fórmula que calcula a área S de um triângulo ficamos com:

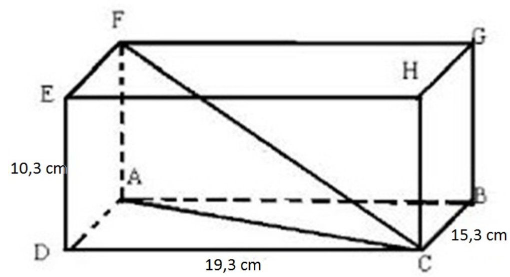

Figura 19: Esboço da situação

$$S = \frac{AC \times AF}{2}.$$

Calculando AC temos:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$AC^2 = 15,3^2 + 19,3^2$$

$$AC = \pm\sqrt{234,09 + 372,49}$$

$$AC = \sqrt{606,58}$$

$$AC = 24,62.$$

Segue-se que

$$S = \frac{24,62 \times 10,3}{2}$$
$$S = 126,79cm^2.$$

Espera-se que os alunos percebam que a área calculada usando manipulação foi bem próxima daquela calculada analitacamente.

Resolução da questão 3

Solução usando o material manipulável.

Constroe-se um cubo de aresta $20cm$, com o palito preto toma-se a diagonal da base, com o palito vermelho a reta que parte do vértice até a diagonal da base, com o palito azul a semidiagonal da base e com o palito verde a distância pedida no problema, ver figura 20. Em seguida mede-se os lados do triângulo retângulo formado que no caso foram, catetos $14,2cm$ e $20cm$; hipotenusa $23,8cm$ e a distância pedida $11,3cm$.

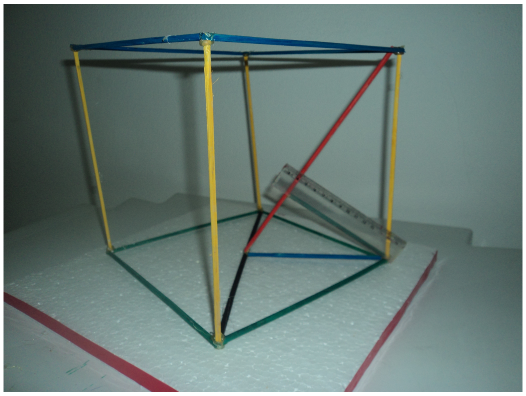

Figura 20: Esboço da situação

Solução analítica.

Fazendo um esboço da situação do problema e lembrando da definição de distância de um ponto a uma reta vemos que h é a distância pedida na questão, ver figura 21.

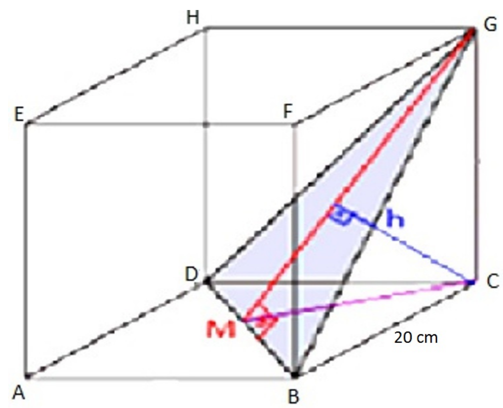

Figura 21: Esboço da situação

As relações métricas no triângulo retângulo CGM reto em C nos dá

$$GM \times h = CM \times CG. \qquad (I)$$

Temos que:

$CG = 20$ que é a aresta do cubo;
$CM = 10\sqrt{2}$ metade da diagonal da face $ABCD$.
Assim,

$$BG^2 = BM^2 + GM^2$$

$$20\sqrt{2}^2 = 10\sqrt{2}^2 + GM^2$$

$$400 \times 2 = 200 + GM^2$$

$$GM^2 = 800 - 200$$

$$GM^2 = 600$$

$$GM = \pm\sqrt{600}$$

$$GM = 24,49cm.$$

De (I) segue-se que:

$$24,49 \times h = 10\sqrt{2} \times 20$$

$$24,49 \times h = 14,14 \times 20$$

$$h = \frac{282,8}{24,49}$$

$$h = 11,5cm.$$

Espera-se que os alunos percebam que o valor medido no material manipulável foi bem próximo daquele calculado analiticamente.

5 Considerações Finais

No contexto escolar, mais especificamente no âmbito da sala de aula, o educador, ao preparar sua aula, já tem em mente quais recursos irá utilizar, de forma a contemplar todas as suas expectativas para o desenvolvimento da aula, e com isso, ter maior perspectiva de atingir os objetivos previamente definidos.

No entanto, por mais planejada e detalhada que seja a aula, infelizmente ela não contempla a todos de maneira igualitária, tão pouco ao mesmo tempo, haja vista que cada ser humano compreende e aprende as informações que lhes são transmitidas de forma diferente, e isso se deve à diversididade que compõe o âmbito da sala de aula. Sendo esta diversidade uma das razões pelas quais o professor busca motivação diária para conseguir alcançar êxito em suas atividades docentes (veja [7]).

Quanto ao ensino da Matemática Básica, sabe-se que este tem sido fortemente criticado quando se observam os índices de avaliações. Por outro lado temos, em geral, professores sempre buscando alternativas para desempenhar seu ofício da melhor maneira possível, ministrando suas aulas de tal forma que os conteúdos sejam compreendidos de maneira agradável e que seja ainda instrumento que possibilite o aluno avançar nos seus estudos.

Nesse sentido, percebe-se que o professor, ao propor uma atividade diferenciada, a partir da utilização de metodologias diversificadas, aumenta suas chances de atingir seus objetivos de maneira positiva, principalmente ao desenvolver atividades que estimulem e desafiem o estudante a construir seu aprendizado. Diante disso, o uso de materiais manipuláveis entra como uma estratégia de ensino para possibilitar a aprendizagem dos conceitos abstratos da Geometria Espacial.

Buscou-se com essa proposta uma metodologia de ensino que fez uso de materiais manipuláveis como recurso didático, visando desenvolver uma estratégia para o ensino de Geometria Espacial, tentando concretizar situações que envolvem o cálculo de distância. Pode-se ainda, com este trabalho, fazer uso dos mesmos procedimentos para se discutir outros tópicos da Geometria Espacial, tais como: Propriedades de paralelismo e perpendicularismo, ângulos, áreas e volumes dos principais sólidos para despertar nos alunos o interesse de pesquisar e desenvolver materiais concretos manipuláveis visando o ensino da Matemática.

Portanto, percebe-se que ao inovar em sua prática através da utilização de matérias manipuláveis, o professor adquire mais uma alternativa metodológica para o ensino da matemática.

Referências

[1] AZEVEDO, E. D. M. *Apresentação do trabalho Montessoriano.* Educação & Matemática, n.3, p. 26-27, 1979.

[2] CARVALHO, D. L. *Metodologia do Ensino da Matemática.* São Paulo: Cortez, 2000.

[3] DANTE, L. R. *Matemática-Contexto e Aplicações. Vol.2.* São Paulo: Ática, 2004.

[4] DOLCE, O. e POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar. Vol.10.* Atual Editora - 6a edição, 2005.

[5] ESTEPHAN, V. M. *Perspectivas e Limites do Uso de Material Didático Manipulável na Visão de Professores de Matemática do Ensino Médio.* Dissertação de Mestrado. UFPR, Curitiba, 2000.

[6] FIORENTINI, D. e MIORIM, M. A. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática.* Boletim da SBEM/SP, ano 4, n.7, p. 5-10, 1990.

[7] FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra, Coleção Leitura, 1996.

[8] HARTSHOR, R., and BOREN, S. *Experiential learning of mathematics: using manipulatives.* 1990.

[9] LACERDA, A. C. G. *O espaço Cotidiano dos Sólidos Geométricos.* Vitória, 2003.

[10] LAGES, E. L; CARVALHO, P. C. W. E. M. A. C. *A Matemática do Ensino Médio. Vol.2.* Sociedade Brasileira de Matemática, 1995.

[11] LORENZATO, S. *O Laboratório de Ensino de Matemática.* Campinas: Autores Associados, 2006.

[12] PAIVA, M. *Matemática-Paiva. Vol.2*. São Paulo: Moderna, 2009.

[13] PIAGET, J. *A Construção do real na criança*. São Paulo: Ática, 2001.

[14] PIRES, M. N. M. *Prática Educativa do Pensamento Matemático*. IESDE: Curitiba, 2004.

[15] VERGNAUD, G. *A Teoria dos Campos Conceptuais. IN: BRUN, J. Didáctica das Matemáticas*. Delachaux et Niestlé, S.A, 1996.

[16] VIDIGAL, A. *Matemática e Você*. São Paulo: Saraiva, 2002.