UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

AJUSTANDO O TOM COM A MATEMÁTICA: ALGUMAS APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA NA MÚSICA

ADENISE MARIA DOS SANTOS FERREIRA

Cruz das Almas - Bahia

2016

AJUSTANDO O TOM COM A MATEMÁTICA: ALGUMAS APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA NA MÚSICA

ADENISE MARIA DOS SANTOS FERREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof^{o} MSc. Gilberto da Silva Pina

Cruz das Almas - Bahia

2016

FICHA CATALOGRÁFICA

F383a

Ferreira, Adenise Maria dos Santos.

Ajustando o tom com a matemática: algumas aplicações da álgebra na música / Adenise Maria dos Santos Ferreira._ Cruz das Almas, BA, 2016.

88f.; il.

Orientador: Gilberto da Silva Pina.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Álgebra – Estudo e ensino. 2.Matemática – Teoria musical. 3.Educação básica – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 512

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

AJUSTANDO O TOM COM A MATEMÁTICA: ALGUMAS APLICAÇÕES DA ÁLGEBRA NA MÚSICA

ADENISE MARIA DOS SANTOS FERREIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Gilberto da Silva Pina

Profº Me. Gilberto da Silva Pina – CETEC/UFRB
Orientador (Presidente)

Jaqueline Alexsandra de Souza Azevedo

Profº Ma. Jaqueline Alexsandra de Souza Azevedo – CETEC/UFRB

Luiz Alberto de Oliveira Silva

Profª Dr. Luiz Alberto Oliveira Silva – CETEC/UFRB

Cruz das Almas-BA, 1º de agosto de 2016.

Às minhas mães: Anôra (in memorian) e Hildete.

Aos meus filhos: Jonatas e Victor.

A música é uma ciência que necessita possuir um estatuto definido. Suas regras devem ser extraídas de um princípio claro, inconcebível sem o auxílio da Matemática. Apesar de toda a experiência que eu possa ter em Música por associar-me a ela por tanto tempo, devo confessar que somente com o auxílio da Matemática, minhas ideias tornaram-se claras e a luz substituiu uma escuridão da qual eu não estava ciente."

Rameau, 1722

"A música é uma arte e é, ao mesmo tempo, uma ciência. Como arte, não é senão a manifestação do belo por meio dos sons. Esta manifestação repousa sobre uma ciência exata, formada pelo conjunto das leis que regem a produção dos sons e suas relações de altura e duração."

Hugo Riemann

AGRADECIMENTOS

À Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade de avanço na minha formação, gerada pela oferta do curso.

Aos professores do Profmat da UFRB, pela dedicação e compreensão. Em especial, ao meu orientador Gilberto, pelo apoio, paciência e confiança.

Aos professores da banca examinadora, pela contribuição ao enriquecimento deste trabalho.

À CAPES, pelo apoio, concedendo a bolsa.

Aos meus colegas de curso, tanto aos que inciaram conosco a caminhada e por algum motivo não puderam continuar, quanto aos que ficaram até o fim. Cada um desses contribuiu, direta ou indiretamente, para o meu crescimento nesta caminhada.

Aos amigos músicos Elisama Gonçalves e Filipe Palma, pela atenção e motivação.

A todos aqueles que acreditaram em mim.

Adenise Maria dos Santos Ferreira

RESUMO

O presente trabalho procura mostrar a relação entre a Matemática e a transposição de tonalidade. Para tanto, traz um breve percurso histórico da formação das escalas musicais utilizadas no Ocidente. Introduz algumas noções de teoria musical e de Àlgebra Moderna a fim de estabelecer algumas aplicações da Aritmética Modular, Grupos Cíclicos e Permutações ao transporte de tonalidades em melodias. Por fim, apresenta uma proposta de minicurso envolvendo o tema para estudantes da Educação Básica.

Palavras-chave: Aritmética Modular, Grupos Cíclicos, Tonalidade, Transposição de tonalidade.

ABSTRACT

The present work shows the relationship between mathematics and the tonality's transposition . For this, it presents a brief historical background of the formation of musical scales used in the West. Introduces some music theory concepts and Modern Algebra in order to establish some applications between Modular Arithmetic, Groups Cyclic, Permutations and tonality's transposition in melodies. Finally, it proposes a short course involving the theme for students of Basic Education.

Keywords: Modular Arithmetic, Cyclic Groups, Tonality, Tonality's transposition.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

INTRODUÇÃO

Articular conteúdos da Matemática com outras áreas do conhecimento é uma forte tendência no ensino da Matemática atualmente. Isto permite uma aprendizagem significativa, ao estabelecer relações com elementos concretos e presentes no repertório sociocultural dos estudantes. Ainda temos um modelo de ensino em que os conteúdos de Matemática são apresentados de forma fragmentada e descontextualizada. Vista como muito abstrata, implica na criação de um preconceito de que é uma disciplina complicada e sem aplicações práticas.

No entanto, nem sempre houve esta desarticulação. Na Antiguidade Clássica Greco-romana e em parte da Idade Média, por exemplo, se pregava a universalidade do conhecimento e ensinava-se as chamadas Artes Liberais Clássicas, reunidas no *trivium* e *quadrivium*. Este último reunia a Aritmética, a Geometria, a Astronomia e a Música(Grout e Palisca, 1996).

Com o passar do tempo e o desenvolvimento das ciências, se fez necessário o estudo específico dos mais diferentes objetos, originando as mais diversas áreas do conhecimento e daí veio a criação das universidades. Isto influenciou o ensino no nível básico, que se organizou sob a forma de classes seriadas e numa grade de disciplinas.

Na atualidade, vivemos numa sociedade em rede. Nossas crianças e jovens, na sua maioria, tem acesso fácil e rápido à informação, com múltiplas possiblidades de conexões. As tecnologias se multiplicam e evoluem velozmente. Em contrapartida, na maioria das escolas de educação básica, o ensino ainda é baseado num currículo fragmentado, desarticulado e estático. A Matemática ainda é vista sob o senso comum como de difícil assimilação e distante da realidade.

Em contrapartida, podemos utilizar os mais variados temas de interesse popular com conteúdos desta disciplina, sob um enfoque que possibilite a articulação com outros campos do conhecimento. Isto sob o aspecto da não linearidade na organização curricular. Ou seja, rompendo com a exigência de apresentar conteúdos de forma gradual tidos como pré-requisitos, aparecendo predominantemente sem significado para o aluno. Para tanto, uma boa estratégia é o trabalho com eixos temáticos, apontada por muitos pesquisadores como exitosa na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Um dos temas mais motivadores é a Música. O seu ensino, inclusive, tornou-se obrigatório na educação básica brasileira a partir da Lei 11.769/2008. Sendo assim, este trabalho apresenta uma proposta de articulação entre Álgebra (inteiros e grupos) e Música. Visa estabelecer uma relação entre a transposição musical no sistema tonal (afinação), aritmética modular e grupos cíclicos. Transpor uma música é mudar a sua tonalidade, cujo o objetivo é afinar vozes e instrumentos.

Embora aritmética modular e grupos não sejam contéudos específicos da educação básica, existe a possibilidade de se fazer uma transposição didática adaptando os conteúdos abstratos a algumas aplicações na Música, que atenda o nível de compreensão dos estudantes. Dentre os objetivos temos:

- Estimular o espírito investigativo em Matemática a partir de aplicações.
- Contribuir para o desenvolvimento da visão de que a Matemática é uma ferramenta indispensável no estudo e compreensão de padrões existentes nos objetos de estudo das mais diversas áreas do conhecimento.
- Compreender o padrão criado para fins de afinação, na música ocidental, através de um modelo matemático adequado.
- Introduzir noções de aritmética modular e grupos cíclicos na educação básica em articulação com as regras de transposição musical, de forma intuitiva e lúdica.

O primeiro capítulo relata um breve histórico entre a relação Música e Matemática. O segundo apresenta algumas noções de Teoria Musical necessários à compreensão do tema em questão. O capítulo 3 traz alguns tópicos de Álgebra Moderna. O quarto capítulo descreve, finalmente, o padrão matemático presente na transposição musical e o último capítulo propõe algumas atividades que podem ser realizadas por estudantes da Educação Básica.

CAPÍTULO 1

MÚSICA E MATEMÁTICA: UMA RELAÇÃO HISTÓRICA

A interação entre a Matemática e a Música remonta à Antiguidade. Para Wright(2009), isto não é de surpreender já que a primeira é a mais abstrata das ciências e a segunda a mais abstrata das artes. Uma tenta entender a verdade lógica-conceitual e aprecia a beleza intrínseca nesta. A outra, provoca espontaneamente reações humanas inatas, evocando o humor e a emoção através da combinação de sons e ritmos.

Tanto a Música quanto a Matemática existem desde a humanização do homem. A primeira, nas manifestações religiosas e na expressão de sentimentos. A segunda na organização, quantificação e medição dos objetos tanto discretos quanto contínuos. O contato com a natureza levou a percepção dos diferentes sons, sejam os melódicos, harmônicos ou apenas ruídos emitidos por animais, água, trovões, vento, etc. Inspirou confecção de objetos com madeira, osso e outros materiais extraídos do meio ambiente, com a finalidade de imitar sons provenientes de fontes naturais. A necessidade de enfrentamento e adaptação ao meio natural impulsionou a construção dos conceitos matemáticos. As formas de medir a terra (espaço) e o tempo; a quantificação (contagem) da colheita, da criação de animais, da troca de mercadorias; a construção de meios de transporte e habitações; a confecção de armas de guerra e de instrumentos de trabalho; dentre outras necessidades, contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Até certo tempo, eram manifestações separadas.

> A interação entre estas áreas torna-se fortemente manifesta a partir da necessidade de equacionar e solucionar o problema da *consonância* no sentido de buscar fundamentos científicos capazes de justificar tal conceito. As distintas explicações possíveis para consonância/dissonância incluem fatores socioculturais bem como concepções físicas e matemáticas.(ABDOUNOR, 1999, p. 3)

A interação com base teórica mais remota trazida pela História está na Grécia Antiga, com os filósofos. Os saberes matemáticos faziam parte do *quadrivium*, constituído da Astronomia, Aritmética, Geometria e Música, articulados entre si.

1.1 A organização das escalas musicais

As escalas musicais se organizaram de diferentes formas entre povos e épocas distintas, mas com alguns aspectos em comum. Diferentes teóricos musicais gregos dedicaram-se à construção de escalas utilizando diferentes critérios matemáticos para a afinação dos sons. De acordo com Abdounor (1999), estes desenvolveram tetracordes (conjuntos de quatro notas) e depois escalas com sete tons. Os chineses, desde a Antiguidade, desenvolveram as sequências pentatônicas chinesas, contendo por exemplo, as notas dó-ré-mi-sol-lá, correspondente às cinco primeiras notas do ciclo das quintas, apresentado no capítulo 2, subseção 2.4.5. Estas notas são comparadas aos cinco elementos da filosofia natural: água, fogo, madeira, metal e terra. Os árabes elaboraram escalas com 17 notas e os hindus com 22.

A música ocidental herdou dos gregos a sua base teórica. A escala diatônica atual possui sete notas. A tonalidade se baseia neste tipo de escala.

1.1.1 A escala musical grega e a gama pitagórica

Os gregos construíam as escalas de uma ou mais oitavas a partir dos tetracordes, grupos de quatro notas, formando um intervalo de quarta (distância contada a partir da primeira nota até a última do grupo das quatro notas). Este foi um dos três primeiros intervalos primários reconhecidos como consonantes (agradáveis ao ouvido).

Possivelmente, Pitágoras descobriu as consonâncias a partir de quocientes simples ao dividir uma corda vibrante em partes iguais. Este foi o famoso experimento com o monocórdio, que consiste num instrumento com uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha e um cavalete móvel com a função de dividir a corda (figura 1.1).

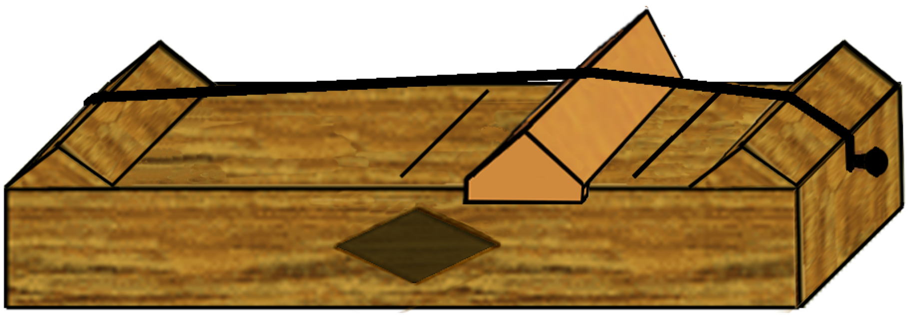


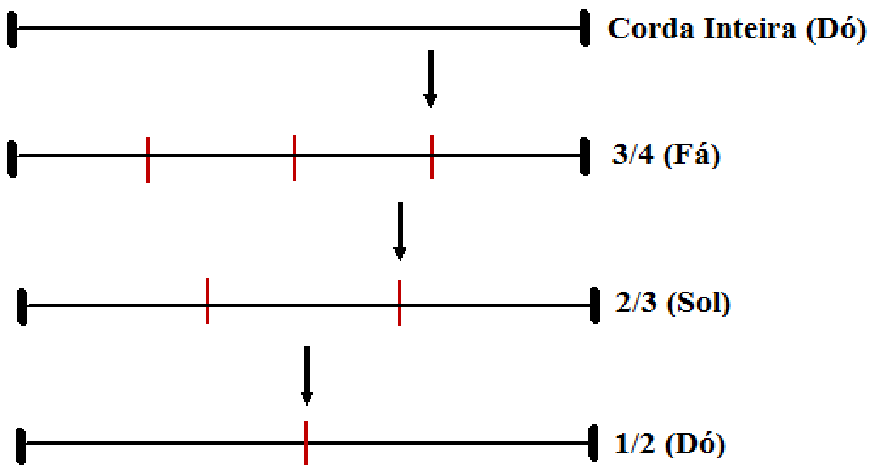
Figura 1.1: Monocórdio (Fonte: http://auladeviola.com)

A escola pitagórica buscava relações de comprimentos, razões de números inteiros, que produzissem intervalos sonoros. Para os pitagóricos, a Matemática se revestia de um aspecto místico e tudo no mundo era regido pelos números.

> Nos ensinamentos de Pitágoras e seus seguidores, a Música e a Aritmética não eram disciplinas separadas; os números eram considerados a chave de todo o universo espiritual e físico; assim o sistema dos sons e ritmos musicais sendo regido pelo número, exemplificava a harmonia do cosmos e correspondia a essa harmonia."(GROUT e PALISCA, 1994, p.19)

Em seu experimento, Pitágoras (século VI a.C) observou que pressionando um ponto situado a 3/4 do comprimento da corda em relação a sua extremidade, ou seja, reduzindo a corda a 3/4 do seu tamanho original, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira(Abdounor, 1999). Por exemplo, se o tom da corda inteira é *dó*, 3/4 da corda soará como um *fá*. Ao pressionar nos 2/3 do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima. Por exemplo, se a corda original soa como dó, 2/3 da corda soará como um *sol*. Ao pressionar a metade da corda, obtém-se uma oitava acima do som original. Ou seja, a nota obtida é a mesma, só que soa mais aguda.

Figura 1.2: Exemplo da divisão de uma corda que emite a nota Dó



Já que os intervalos obtidos desta forma soam consonantes, era importante estabelecer afinações contendo estes intervalos puros. Partindo da ideia de que a oitava mostrava-se como intervalo fundamental, esta é tomada como base para a formação da escala.

> A partir desta hipótese, o problema do estabelecimento de uma escala reduzia-se a dividir a oitava em sons que determinassem o alfabeto através do qual a linguagem musical pudesse se expressar, tornando-se portanto natural a partir de uma nota-determinanate da oitava-universo juntamente com sua oitava superior-caminhar em intervalos de quintas ascendentes e descendentes, retornando à nota equivalente - acrescida ou diminuída de um número inteiro de oitavas.(ABDOUNOR, 1999, pp.8-9)

Para exemplificar, vamos utilizar a nomenclatura que temos hoje, já que na época outros nomes eram atribuídos às notas musicais. Começando pelo Dó, após uma quinta(contamos cinco notas a partir do dó) obtemos um sol. Esta nota, por sua vez, acrescida de uma quinta, obtém-se um ré, ultrapassando a oitava. E, assim, sucessivamente até obter as sete notas, sendo que todas as outras notas estão separadas destas por um número exato de oitavas. Esta sequência de notas, obtida desta forma (conforme o experimento do monocórdio), é constituída de quintas puras, isto é, estão numa razão de $2/3$. E denomina-se ***gama pitagórica.*** Este percurso, denominado *ciclo das quintas*, deu origem à formação das escalas maiores e menores do sistema tonal, utilizado até os dias de hoje e será abordado no capítulo 2.

1.1.2 A escala diatônica

A sequência gerada pela gama pitagórica apresenta intervalos sucessivos de notas separadas por mais de uma oitava. Para se formar uma escala de sons sucessivos no limite de uma oitava, isto é, de forma que a razão entre as primeiras notas de uma oitava e da imediatamente seguinte fosse de $1/2$, adotou-se, na Grécia Antiga, o seguinte método: toma-se uma escala inicial como referência, por exemplo, partindo de um dó. Percorre-se, então, a escala por quintas ascendentes (como na pitagórica) transpondo as notas obtidas à oitava inicial, caso esta ultrapasse este intervalo(Abdounor, 1999). Desta forma, utilizando a notação atual e fixando, sem perda de generalidade, o comprimento 1 a uma corda que soe como a nota dó ao ser vibrada, temos, vamos obter as razões para nota desta escala, onde a oitava referencial é a que começa com o *dó* aqui fixado. E, vamos, seguindo as quintas, ou seja, dividindo cada razão correspondente à da quinta anterior por $2/3$.

O dó com comprimento 1.

Seguindo o ciclo das quintas de forma ascendente (contam-se cinco notas, incluindo a primeira e a última da sequência), obtemos:

- Sol: $2/3$.
- Ré: $2/3 \cdot 2/3 = 4/9$. Mas este ré está uma oitava acima do ré da oitava referencial. Ou seja, sua razão é a metade do ré da oitava referencial. Sendo assim, o ré da escala será $8/9$.

- Lá: $8/9 \cdot 2/3 = 16/27$. Portanto, o lá tem razão $16/27$.
- Mi: $16/27 \cdot 2/3 = 32/81$. Este mi está uma oitava acima da referencial. E sua razão é a metade do mi pretendido, que será de $64/81$.
- Si: $64/81 \cdot 2/3 = 128/243$.
- O fá, conforme visto na subseção anterior, tem razão $3/4$.

A configuração, na ordem tal qual conhecemos hoje, será a seguinte (ABDOUNOR, 1999, p.11):

dó	ré	mi	fá	sol	lá	si	dó
1	8/9	64/81	3/4	2/3	16/27	128/243	1/2

Esta sequência de notas sucessivas constituem a escala diatônica.

A partir da nota dó da escala seguinte, seria possível continuar o percurso das quintas, gerando notas bastante próximas daquelas adquiridas no primeiro ciclo, o que em termos de frequências (termo que não existia ainda nesta época) estabelece uma configuração que se desenvolve como uma espiral infinita (figura 1.3). Mas num certo momento, não se é mais possível a percepção da nota, já que "a diferença entre 12 quintas e 7 oitavas puras, o que equivale matematicamente a: $(3/2)^{12} : 2^7 = 1,01364326 \cdots \neq 1$, chamada coma pitagórica"(ABDOUNUR, 1999, p.12)

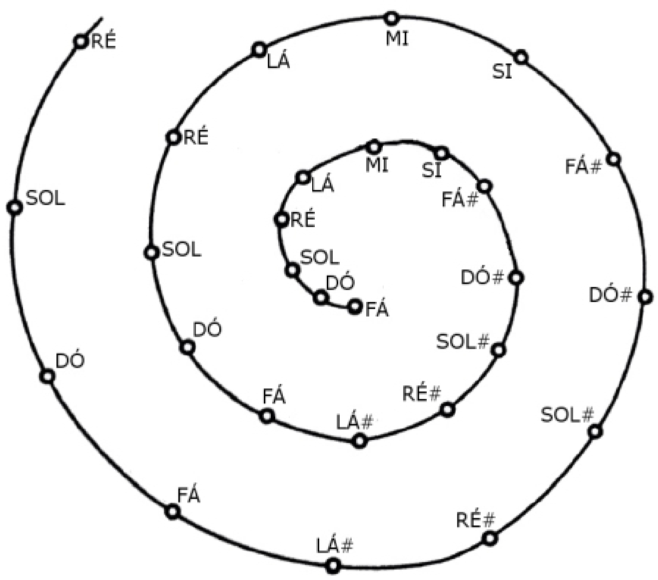


Figura 1.3: Ciclo das quintas em forma de espiral (Fonte:https://laboratoriodeluthieria.files.wordpress.com)

Este fato contribuiu fortemente para a necessidade do temperamento, que seria uma forma de se ajustar os ciclos, adequando os intervalos a um número inteiro de oitavas. Durante muito tempo se utilizou as escalas com um temperamento que ainda não estabelecia intervalos com freqûencias de razões de proporções exatas, dado o conhecimento dos números se restringir aos racionais. Isto fazia com que as oitavas tivessem afinações diferentes. A adequação da escala só virá com a criação do temperamento igual que veremos a seguir.

1.1.3 A escala de temperamento igual

No final da idade Média e início do Renascimento, a Música foi tomando caminhos que precisavam se desprender de concepções estabelecidas pelos pitagóricos. Surgiu a necessidade de se utilizar modulação e transposição, sem que para isso fosse necessário a reafinação de um instrumento tocado a cada modificação de tonalidade. A solução mais satisfatória encontrada para resolver problemas com a afinação foi a introdução da escala de temperamento igual.

No temperamento igual, o intervalo de oitava é dividido em 12 semitons associados a relações de frequência exatamente iguais. O temperamento igual foi proposto em 1691, pelo músico Andreas Werkmeister. Matematicamente, as notas escolhidas são baseadas:

> na progressão geométrica-oitava = 2/1; semitom = $2^{1/12}$. Euler pesquisou um sistema de afinação que permitiu aos compositores modularem para e de quaisquer dos 12 centros tonais sem distorções geradas por intervalos correspondentes que apresentavam-se, até então, assimétricos em diferentes escalas. (O'KEEFEE *apud* ABDOUNUR, 1999, p.84)

Esse modelo de afinação foi desenvolvido e sistematizado, entre o final do século XVII e início do XVIII, por Johann Sebastian Bach. Este escreveu 24 prelúdios e fugas, cobrindo as 24 tonalidades maiores e menores, chamada de *O Cravo Bem Temperado*.

No capítulo 2, abordaremos com maiores detalhes o sistema musical baseado neste tipo de escala.

CAPÍTULO 2

ALGUNS ELEMENTOS DE TEORIA MUSICAL

A Música é definida como a arte de combinar os sons, dispostos e ordenados em diversos padrões (Alves, 2005). Os seus elementos princiapis são:

- Melodia: é a combinação de sons sucessivos.
- Harmonia: é a combinação de sons simultâneos.
- Ritmo: é a ordem e a proporção com que estão dispostos os sons que constituem a melodia e a harmonia (Med, 1996).

O objeto central deste estudo se concentra na Melodia. No entanto, neste capítulo alguns elementos de Ritmo são abordados a fim de facilitar a compreensão de algumas passagens musicais mostradas ao longo deste trabalho.

2.1 Os sons e as notas musicais

Os sons são oscilações de pressão do ar que se propagam através de um meio material. Ou seja, os sons são ondas mecânicas e portanto não se propagam no vácuo. Resultam das vibrações de corpos elásticos. No caso dos sons musicais, estas vibrações são periódicas (Med, 1996).

Vamos definir, a seguir, alguns componentes básicos de uma onda.

A **amplitude (A)** é a distância entre dois extremos de uma onda (Med, 1996). Que chamam-se cristas e vales. Vide figura 2.1.

O **Período (T)** é o intervalo de tempo utilizado para realizar uma oscilação completa. (Gaspar, 2005)

A **Frequência (f)** é o número de oscilações numa unidade de tempo. É o inverso do período e a sua unidade de medida é o Hertz (Hz). A faixa de frequência captada pelo ouvido humano é de 20 a 20000 Hz.(Gaspar, 2005)

O **Comprimento de onda(λ)** é a distância entre duas cristas ou dois vales.

A **Velocidade de Propagação (v)** é uma grandeza física que depende da característica do meio; seu valor pode ser estabelecido utilizando as propriedades periódicas".(KANTOR,et.al.,2010, p.19). Como a velocidade média é a razão entre o espaço percorrido e o tempo, então:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \dot{v}$$

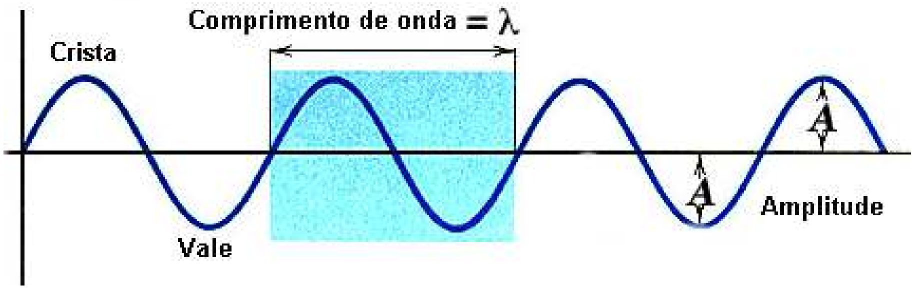


Figura 2.1: Elementos de uma onda periódica (Fonte:www.guia.heu.nom.br)

Observação 2.1. "Na propagação ondulatória ocorre o deslocamento de uma forma; não há deslocamento de um corpo ou ponto material. Por isso , na descrição desse movimento só se pode utilizar o conceito de velocidade escalar, pois não há sentido atribuir caráter vetorial a uma forma que se propaga."(GASPAR, 2005, p.218)

"A **fonte sonora** é qualquer corpo capaz de fazer o ar oscilar com ondas de frequência e amplitude detectáveis pelo ouvido humano."(GASPAR, 2005, p.240). Na Música, destacamos o nosso aparelho fonador e os instrumentos musicais. Nestes últimos estão as fontes mais ricas e variadas em qualidade sonora. A frequência dos sons emitidos depende da ressonância em sistemas físicos oscilantes: cordas, tubos ou membranas. Os tons e as escalas musicais são associados a tais frequências.

2.1.1 As propriedades do som

O som tem quatro propriedades elementares: a altura, a intensidade, a duração e o timbre.

A **altura** é a propriedade do som ser mais grave ou mais agudo. Possui relação com a frequência. Sons mais altos (mais agudos) têm uma maior frequência. Os sons mais baixos (mais graves) têm uma menor frequência.

A **intensidade** é a propriedade do som ser mais forte ou mais fraco. A amplitude das ondas sonoras determinam a intensidade. Quanto maior a amplitude, mais forte é o som emitido."É determinada pela energia, por unidade de tempo, da onda sonora que atinge o sistema auditivo. Enquanto se propaga, a onda sonora se espalha em todas as direções dispersando energia e, assim, diminuindo a intensidade do som."((KANTOR,et.al.,2010, p.28).

A **duração** está relacionada com o tempo de prolongamento do som. As figuras musicais e o andamento indicam a duração do som numa peça musical.

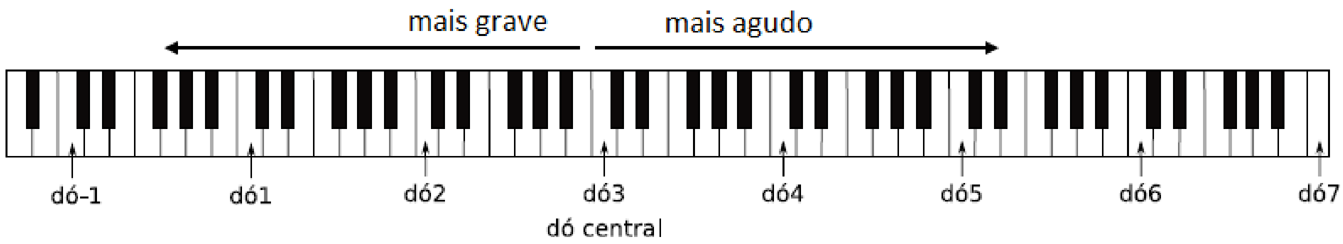
O **timbre** é a qualidade do som que permite reconhecer sua origem. É o que possibilita diferenciar os sons produzidos pelos diferentes instrumentos ou vozes.

2.1.2 As notas musicais

Nota em Música se refere à altura do som. A atual nomenclatura das notas musicais é atribuída ao monge italiano Guido D'Arezzo, a partir das primeiras sílabas do texto de um hino a São João Batista, em latim, e posteriormente foram assim fixadas: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá e Si. No idioma inglês se utiliza as sete primeiras letras do alfabeto para representar o nome das notas em latim: A (Lá), B (Si), C (Dó), D (Ré), E (Mi), F (Fá), e G (Sol). No Brasil, nós utilizamos a nomenclatura latina e interpretamos as letras do alfabeto como cifras que representam as notas. Neste trabalho, utilizaremos as cifras na maioria dos exemplos, a fim de facilitar a leitura e compreensão.

A altura das notas está relacionada à sua frequência. O dó central, por exemplo, emite aproximadamente 261,7 Hz. Os nomes das notas se repetem de sete em sete. Uma nota que tem uma distância da outra num intervalo de sete notas, uma oitava, tem a sua freqûencia na razão 1:2. No piano estas sete notas correspondem às teclas brancas. A figura 2.2, ilustra a disposição das teclas de um piano. De qualquer dó para cima ou para baixo ao próximo dó corresponde a uma oitava. Todas as notas de um dó acima, mas não incluindo o próximo dó, estão no mesmo registro de oitava. As notas mais agudas, tocam-se na direção direita e as mais graves na direção esquerda.

Figura 2.2: Localização das notas no piano



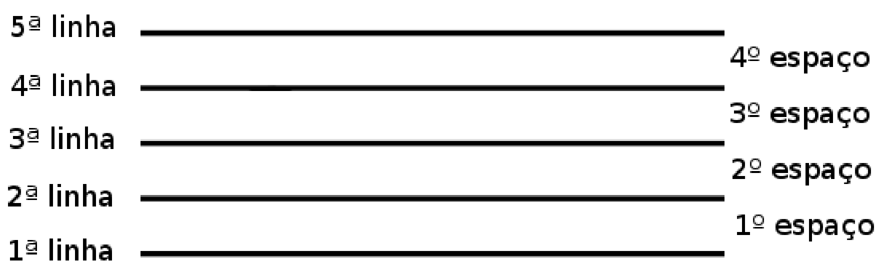
2.2 A notação musical

A escrita musical permite representar a altura, duração e intensidade dos sons que combinados sucessiva ou simultaneamente descrevem uma composição. Neste trabalho, serão apresentadas as principais notações para a altura e duração.

2.2.1 A pauta musical

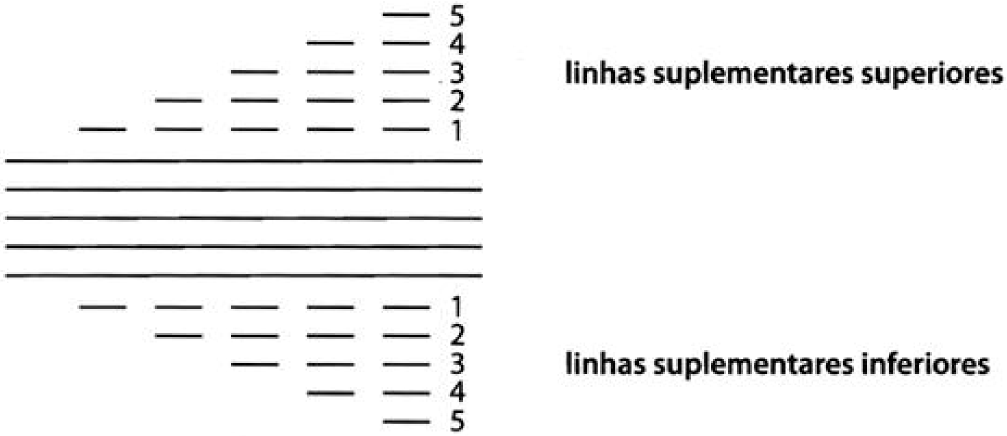
"Uma pauta é usada na música para indicar a altura precisa desejada.(KOSTKA, 2015, p.2) A pauta consiste de cinco linhas e quatro espaços onde e escreve as notas. As linhas e os espaços são contados de baixo para cima. As notas mais agudas são escritas mais para cima da pauta e as mais graves, vice-versa.

Figura 2.3: Pentagrama ou pauta



As linhas e espaços não são suficientes para se representar notas mais graves ou mais agudas desejadas, então o pentagrama pode ser estendido por linhas e espaços suplementares. São contadas de forma análoga à pauta simples.

Figura 2.4: Linhas e espaços suplementares



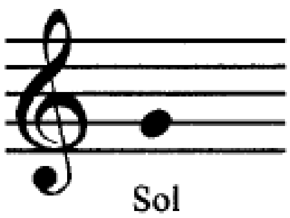
2.2.2 As claves

As claves são sinais que aparecem no início da pauta e estabelece os nomes das notas. A nota leva escrita na linha onde está assinada a clave leva o seu nome. Nos espaços e linhas subsequentes, ascendentes ou descendentes, as notas são nomeadas sucessivamente na ordem: Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si. A palavra clave vem do latim e significa chave. As claves utilizadas atualmente são de três tipos: Sol, Fá e Dó. Para a finalidade deste trabalho, no entanto, apresentaremos apenas as claves de Sol e de Fá na quarta linha.

- **A clave de Sol**

O seu desenho vem de uma deformação histórica da letra G utilizada nas indicações das linhas nas pautas primitivas. Ela é assinada na segunda linha, e portanto, a nota que está na segunda linha recebe o nome de sol.

Figura 2.5: Clave de Sol



Seguindo a ordem descendente na pauta, a partir da nota Sol chega-se a nota Dó central do piano (Dó$_3$). Ascendendo a partir de Sol, chega-se ao Dó$_4$, localizado uma oitava acima do Dó central (Alves, 2005). Observe figuras 2.6 e 2.7, extraídas de Alves (2005, p.16).

Figura 2.6: Notas na clave de Sol na ordem ascendente

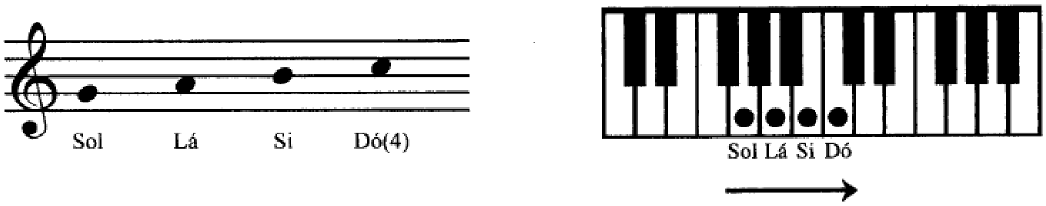
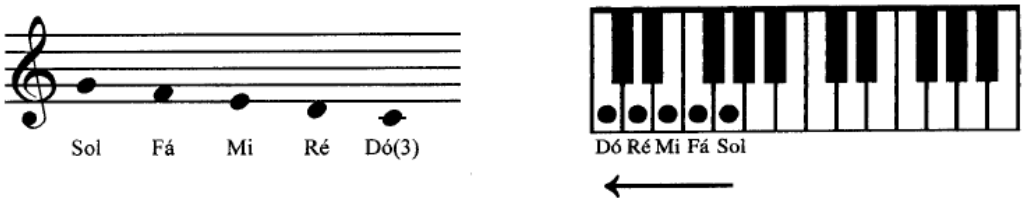
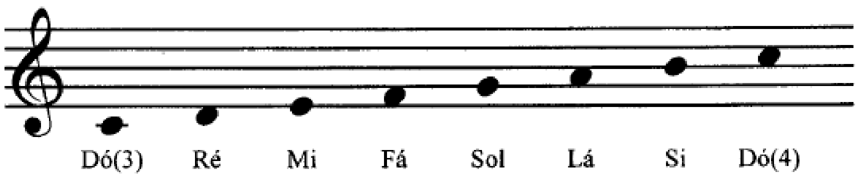


Figura 2.7: Notas na clave de Sol na ordem descendente



Portanto, uma oitava escrita na clave de Sol, partindo do Dó central, corresponde ao que mostra a figura 2.8.

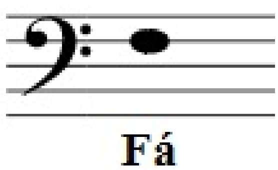
Figura 2.8: Notas na clave de Sol



- **A clave de Fá na quarta linha**

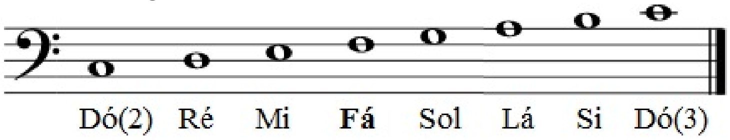
A clave de Fá é utilizada na representação das notas mais graves. Utiliza-se dois pontos após o símbolo para definir a posição da nota Fá na pauta. Estes dois pontos são resíduos da letra F, cujo desenho foi se transformando com o tempo. Observe as figura 2.9.

Figura 2.9: Clave de Fá na quarta linha



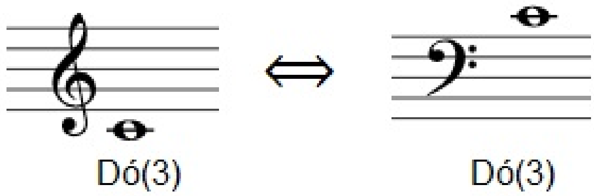
A partir da posição da nota Fá, obtemos a posição das outras notas. A figura 2.10 mostra uma oitava escrita na clave de Fá na quarta linha. Uma estratégia de leitura utilizada por iniciantes é ler as notas como se estivessem assinadas na clave de Sol num espaço ou linha imediatamente superior. Por exemplo, no segundo espaço da clave de Fá lemos como um espaço acima na clave de Sol e daí a nota a ser lida é o *dó*. Uma nota na terceira linha na clave de Fá lemos como uma linha acima na clave de Sol e a nota a ser lida é o *ré*.

Figura 2.10: Notas na clave de Fá



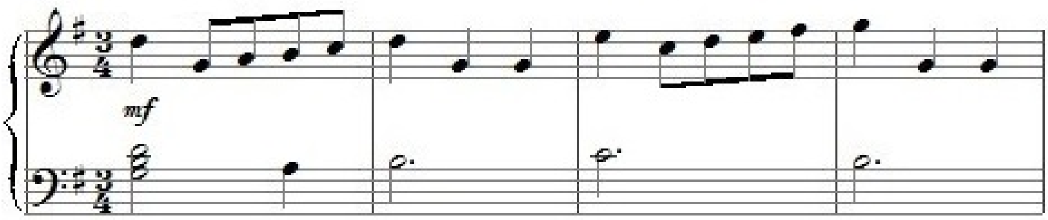
Observação 2.2. *A estratégia de leitura citada anteriormente se restringe ao nome da nota. Isto é, as notas lidas têm apenas o nome em comum. Não correspondem, no entanto, à mesma altura. Veja na figura 2.11 a relação entre essas duas claves, considerando a mesma nota grafada nas clave de Sol e de Fá na quarta linha. Esta nota é o Dó(3), que é o* ***Dó central****, localizado no meio do teclado do piano.*

Figura 2.11: Relação entre as claves de Sol e Fá



A clave de Fá é comumente utilizada na escrita para piano. A figura 2.12 mostra um trecho de uma partitura para piano, *Minueto em Sol Maior* de J. S. Bach (1865-1750), do *Pequeno Livro de Anna Magdalena*. São duas pautas. A pauta superior, escrita na clave de Sol é tocada com a mão direita. A pauta inferior, na clave de Fá, é tocada com a mão esquerda.

Figura 2.12: Trecho de uma partitura para piano



2.2.3 Símbolos de duração

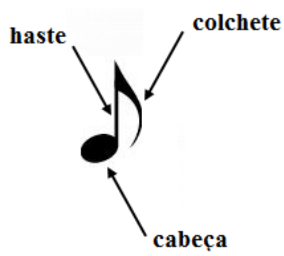
Sabemos que na Música há sons longos e sons breves, assim como há momentos de silêncio. O ritmo é definido justamente pela relação de duração dos sons. "Valor é o sinal que indica a duração relativa do som e do silêncio."(MED, 1996, p.20). Os símbolos que indicam os valores são as **figuras rítmicas**, que indicam a duração dos sons, e **pausas**, que indicam a duração dos silêncios. As figuras rítmicas são sete. Para cada figura existe uma pausa correspondente. A figura 2.13 mostra o nome de cada figura, a figura e sua pausa correspondente.

Figura 2.13: Figuras musicais

Nomenclatura	Semibreve	Mínima	Semínima	Colcheia	Semicolcheia	Fusa	Semifusa
Figura	𝅝	𝅗𝅥	♩	♪	𝅘𝅥𝅯	𝅘𝅥𝅰	𝅘𝅥𝅱
Pausa	𝄻	𝄼	𝄽	𝄾	𝄿	𝅀	𝅁

A figura é formada de até três partes: cabeça, haste e colchete ou bandeirola. A precisão na grafia das figuras é imprescindível.

Figura 2.14: Partes da figura musical



Quando se escreve seguidamente colcheias, semicolcheias, fusas e semifusas as hastes podem ser unidas por traços horizontais.

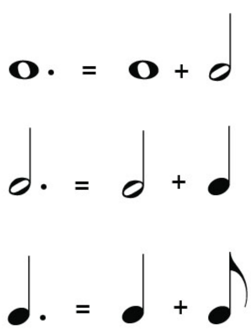
Figura 2.15: Figuras unidas pelas hastes

2.2.4 Valores relativos das figuras

As figuras de notas possuem uma relação binária fixa entre si. Ou seja, partindo da semibreve que tem a maior duração, cada figura vale o dobro da seguinte.

Figura 2.16: Valores relativos das figuras

Observação 2.3. Um ponto colocado à direita de uma figura aumenta a metade do seu valor. A nota e a pausa com um **ponto de aumento** é chamada "**nota pontuada**"ou "**pausa pontuada**".

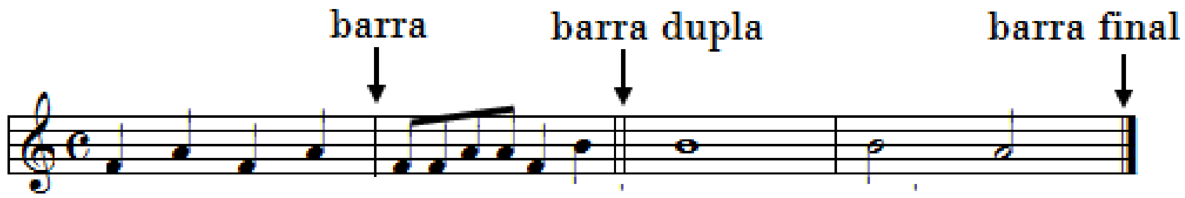


2.2.5 Compassos

Além das figuras musicais, o compasso também é um elemento de métrica do ritmo. É o compasso quem indica a divisão da música em intervalos regulares.

Os compassos são separados por uma linha vertical, chamada **barra de compasso** ou **travessão**. Uma barra dupla ou travessão final indica final de uma música ou final de um trecho da música.

Figura 2.17: Barra de compasso



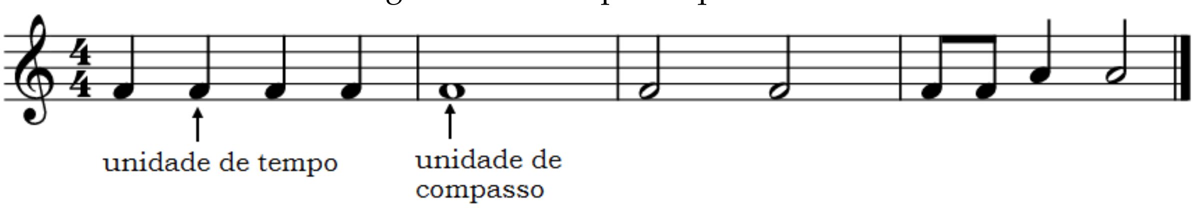
2.2.6 Fórmula de compasso

A fórmula de compasso é colocada no início de cada peça e indica o tamanho do compasso. Geralmente é apresentada na forma de fração. O numerador indica a quantidade de tempos quantas figuras cabem no compasso e o denominador qual é o tipo de figura. Os compassos podem ser:

- Binários: os tempos são agrupados de dois em dois.
- Ternários: os tempos são agrupados de três em três.
- Quaternários: os tempos são agrupados de quatro em quatro.

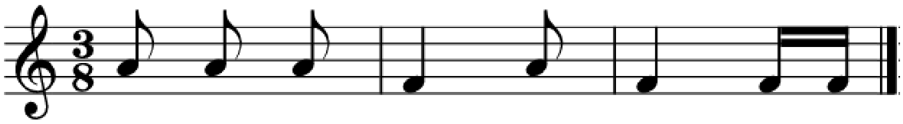
Exemplo 2.1. O compasso $\frac{4}{4}$, também representado pela letra C, é quaternário e sua unidade de tempo é a semínima. Como a semibreve vale quatro semínimas (figura 2.16), então ela vale quatro tempos neste compasso, e neste caso é chamada **unidade de compasso**, por preencher unicamente todo o compasso.

Figura 2.18: Compasso quaternário



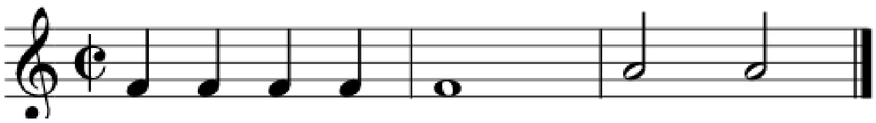
Exemplo 2.2. O compasso $\frac{3}{8}$ é ternário. **A unidade de tempo** neste compasso, a figura que vale um tempo, é a colcheia. Observe que o seu valor relativo é o 8 (figura 2.16). Então três colcheias preenchem todo o compasso. As demais figuras devem guardar a proporção 1:2. Ou seja, como cada figura é o dobro da seguinte, então neste compasso, a semicolcheia vale a metade do tempo, a semínima vale dois tempos, etc.

Figura 2.19: Compasso ternário



Exemplo 2.3. O compasso $\frac{2}{2}$, também representado pela letra C cortada, é binário. A unidade de tempo é a mínima. Como a semibreve vale duas mínimas (figura 2.16), então ela vale dois tempos neste compasso, e é a unidade de compasso.

Figura 2.20: Compasso binário



2.3 Noções de intervalos

Sons musicais de alturas diferentes guardam uma distância mínima entre si, a qual chamamos de intervalo. O menor intervalo que o ouvido humano pode perceber é chamado coma. No entanto, o intervalo considerado para composições musicais variam nas diferentes culturas.

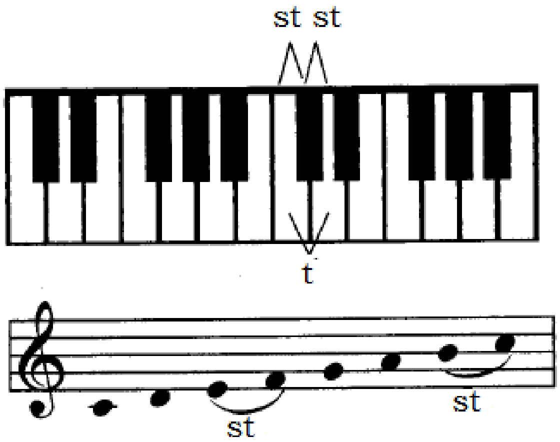
2.3.1 Tom e semitom

Na cultura ocidental, como vimos no capítulo 1, o sistema adotado é o temperado. E daí, o menor intervalo entre duas notas é um semitom. O tom tem nove comas. Então, semitom tem quatro comas e meio. O temperamento permitiu que se dividisse o intervalo entre duas notas em partes iguais. Algumas culturas orientais, no entanto, utilizam em seu sistema musical frações menores que um semitom: um quarto de tom, um oitavo de tom (Med, 1996).

A escala temperada consiste na divisão da oitava em doze semitons. Nos instrumentos temperados, como o piano, o órgão e o teclado, os sons são fixos. Ou seja, produzem as notas na escala temperada. Já nos instrumentos não temperados, como o violino, o trombone, etc, os sons não são fixos e podem produzir notas do sistema natural, ou seja, que não guardam os intervalos regulares de semitons. Ao acompanhar um instrumento temperado, o musicista fará as adaptações necessárias, combinando os dois sistemas.

Entre as notas mi-fá e si-dó há uma distância de um semitom(st). Entre as notas dó-ré, ré-mi, fá-sol, sol-lá e lá-si a distância é a de um tom(t). No teclado, o intervalo entre cada imediatamente vizinha é de um semitom.

Figura 2.21: Tom e semitom



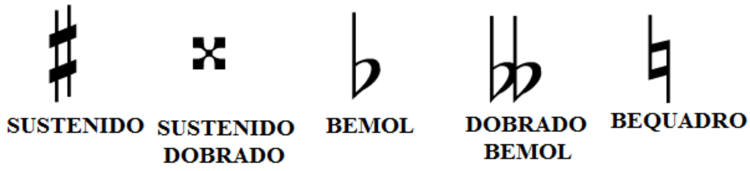
2.3.2 Sinais de alteração

Acidentes ou alterações são sinais que colocados diante da nota modificam a sua altura.

Os acidentes mais utilizados são:

- O **sustenido** eleva a altura da nota natural em um semitom.
- O **dobrado sustenido** ou **sustenido duplo** eleva a altura da nota natural em um tom.
- O **bemol** abaixa a nota natural em um semitom.
- O **dobrado bemol** abaixa a nota natural em um tom.
- O **bequadro** anula o efeito dos demais acidentes, tornando a nota natural.

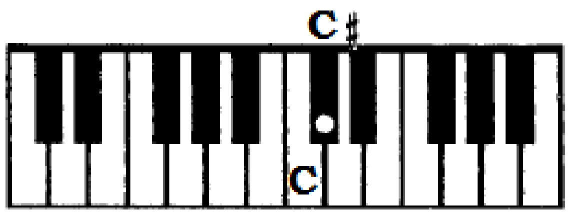
Figura 2.22: Acidentes



No piano, as teclas pretas podem ser sustenidos ou bemóis. Isto deve ao temperamento, nas notas naturais com a distância de um tom, temos entre elas uma nota intermediária.

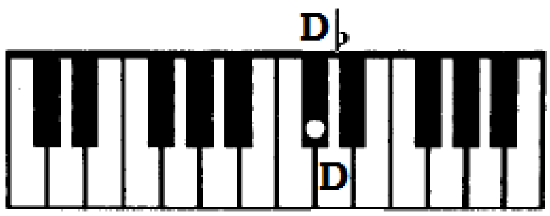
Exemplo 2.4. Aplicando um sustenido ao Dó natural (C), o mesmo é elevado em um semitom e passa a ser Dó sustenido (C♯), e a tecla a ser tocada é a preta logo após o Dó (Alves, 2005).

Figura 2.23: Dó ♯



Exemplo 2.5. Aplicando um bemol ao Ré natural (D), o mesmo é abaixado em um semitom e passa a ser Ré bemol (D♭), e a tecla a ser tocada é a preta logo antes do Ré. (Alves, 2005).

Figura 2.24: Ré ♭



Logo, as notas Dó♯ e Ré♭ são tocadas na mesma tecla preta. Estas notas são chamadas **enarmônicas**. Possuem nomes diferentes, mas representam o mesmo som. Nos instrumentos não temperados, há uma pequena diferença entre estes dois sons, embora quase imperceptível.

2.3.3 Tipos de semitom

O semitom pode ser diatônico ou cromático.

"Semitom **Diatônico**: formado por notas de nomes diferentes. Como Dó e Ré♭ ou Ré e Dó♯.

Semitom **Cromático**: formado por notas com o mesmo nome. Como Dó e Dó♯ ou Ré e Ré♭." (ALVES, 2005, p.55)

Figura 2.25: Tipos de semitom (ALVES, 2005, p.55)

2.3.4 Classificação dos intervalos

O intervalo entre duas notas é calculado contando-se as notas sucessivas, contendo a primeira e a última notas que formam o intervalo.

Há intervalos **melódicos** (notas sucessivas) e os intervalos **harmônicos** (notas simultâneas). Para a finalidade deste trabalho, vamos considerar apenas os intervalos melódicos.

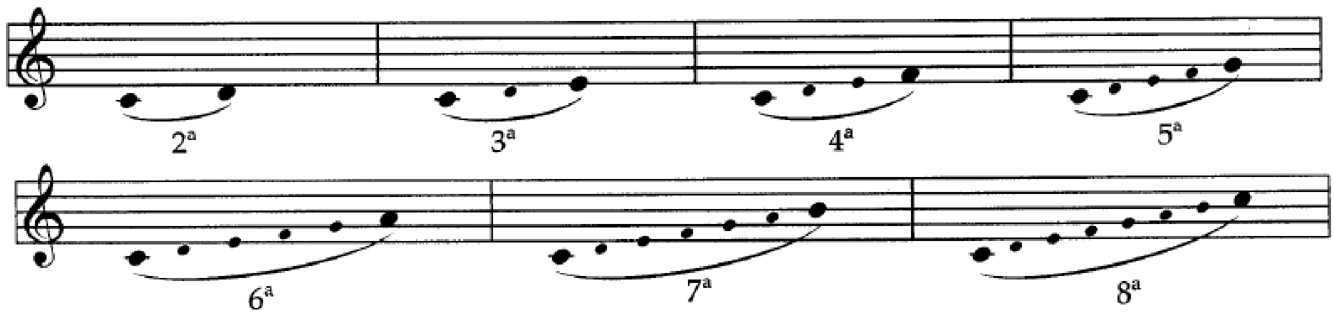
A **classificação numérica dos intervalos** é feita de acordo com o número de notas contidas no intervalo e não leva em consideração nem os acidentes nem as claves (Med, 1996). Nos intervalos **simples** as notas estão dentro de uma oitava. Nos **compostos**, ultrapassam uma oitava.

Os intervalos são nomeados com numerais ordinais de acordo com o seu número de notas. Com exceção dos intervalos com três notas, que chamamos de terças.

Temos que devido a identidade cíclica, todo intervalo composto tem o seu correspondente simples. As notas possuem o mesmo nome, variando apenas a altura, que pode ser de uma ou mais oitavas. A diferença entre um intervalo composto e o simples correspondente é sempre de um múltiplo de sete notas.

Quanto à direção os intervalos podem ser **ascendentes** ou **descendentes**.

Figura 2.26: Intervalos simples na forma melódica ascendente (ALVES, 2005, p.60)

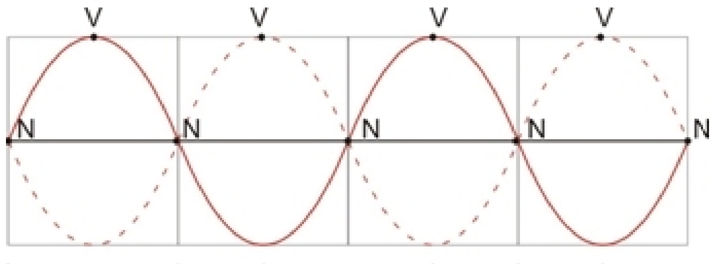


2.3.5 Série harmônica

Um som musical não se costitui de uma nota apenas. Juntamente com o som principal soam sons secundários, bem fracos e quase imperceptíveis ao ouvido humano. O som principal é chamado **som fundamental** e os sons que o acompanham são os **sons harmônicos** (Med, 1996).

Considere uma corda esticada como a de um violão. Ao ser tocada, ela vibra produzindo ondas que se refletem nas extemidades fixas e se sobrepõem de forma contínua em toda a sua extensão. Certas frequências de vibração da corda produzem situações em que alguns pontos dela, chamados **nós**, não vibram, enquanto o ponto médio entre dois nós , chamado **ventre**, oscila sempre com amplitude máxima em relação à amplitude dos demais pontos da corda (Kantor, et. al., 2010). Ou seja, nas extremidades, as perturbações são refletidas e voltam em sentido contrário sucessivamente, formando assim uma onda estacionária.

Figura 2.27: Pontos notáveis de uma onda estacionária



A figura 2.28 ilustra os vários modos de vibração de uma corda fixada em seus extremos e faz a comparação entre o comprimento de onda (λ) e o comprimento da corda (L).

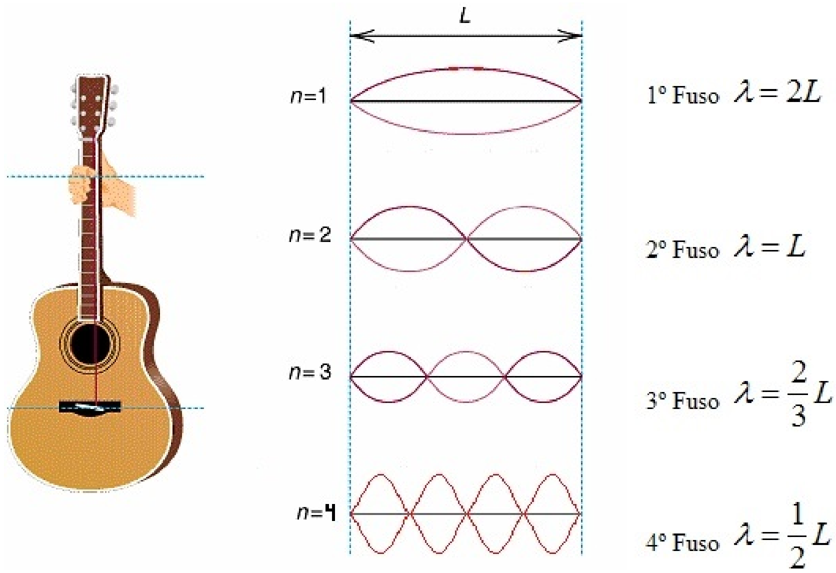


Figura 2.28: Os quatro primeiros harmônicos (Fonte: Infoescola)

"Logo, o som é definido como a soma da frequência fundamental e seus harmônicos."(ALVES, p.11). O conjunto de todas as frequências compõem a série harmônica. A série harmônica é infinita, teoricamente. No entanto, na prática, observam-se os primieros 16 harmônicos, pois após estes , os intervalos da série são menores que um semitom (Med, 1196). A figura 2.29 mostra a série harmônica da nota dó, associando cada nota a ordem do harmônico correspondente e os intervalos gerados (em número de semitons).

Figura 2.29: Série harmônica da nota dó

"Cada nota tem, proporcionalmente, a mesma série harmônica. Porém, a intensidade e a qualidade de harmônicos variam de instrumento para instrumento."(MED, 1996, p.94). Ou seja, a série harmônica é responsável pelo timbre.

2.3.6 Qualificação dos intervalos

Além da classificação numérica, os intervalos admitem uma qualificação. Esta é feita de acordo com o número de tons e semitons contidos num determinado intervalo (Med, 1996).

Na música tonal, quando dois ou mais sons são tocados simultaneamente produzem um efeito de consonância ou dissonância. A consonância produz uma sensação de repouso e estabilidade e a dissonância, de movimento e tensão (Med, 1996). Os intervalos mais próximos da frequência fundamental costumam ser sentidos como intervalos mais consonantes por terem uma relação matemática que envolve números inteiros de menor valor do que os intervalos mais distantes da frequência fundamental, que são mais dissonantes, veja subseção anterior.

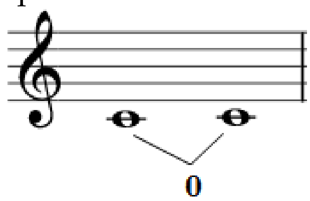
Os intervalos são qualificados de acordo com a quantidade de semitons entre as notas ou a consonância representada por eles. Há cinco tipos de intervalos: justos ou perfeitos, maiores, menores, aumentados e diminutos.

•Intervalos justos

Os intervalos justos têm a ver com a sua consonância. Nestes intervalos, a distância é racionalmente perfeita. Ou seja, a distância é representada por um número racional. Isto se deve à herança grega, como vimos no primeiro capítulo.

A **Primeira Justa (1ª J)**, também chamado de prima, compreende dois sons do mesmo nome e mesma altura. A distância é de 0 (zero) semitom. Mas na prática, este não é propriamente um intervalo, mas um fenômeno acústico.

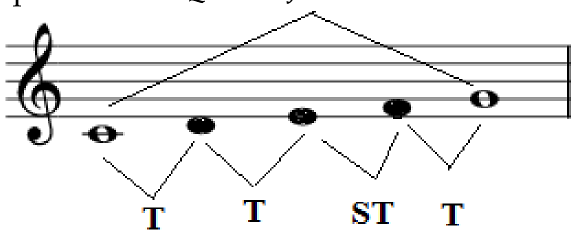
Figura 2.30: Exemplo de um intervalo de Primeira Justa



A **Oitava Justa (8ª J)** é o intervalo mais consonante de todos. Tem razão 1:2 e percebemos os dois sons similares, um mais agudo que o outro. A sua distância é a de doze semitons. Ou seja, obtemos notas com o mesmo nome, porém com alturas diferentes.

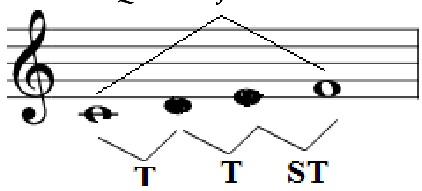
A **Quinta Justa (5ª J)** é o segundo intervalo mais consonante, formado entre o 2º e o 3º harmônicos, é o de razão 2:3. É formada por 7 semitons.

Figura 2.31: Exemplo de uma Quinta Justa: Intervalo entre as notas Dó e Sol



A **Quarta Justa (4^{a} J)** é o terceiro intervalo mais consonante, é o de razão 3:4 e é formado entre o 3^{o} e o 4^{o} harmônicos. É formada por 5 semitons.

Figura 2.32: Exemplo de uma Quarta Justa: Intervalo entre as notas Dó e Fá

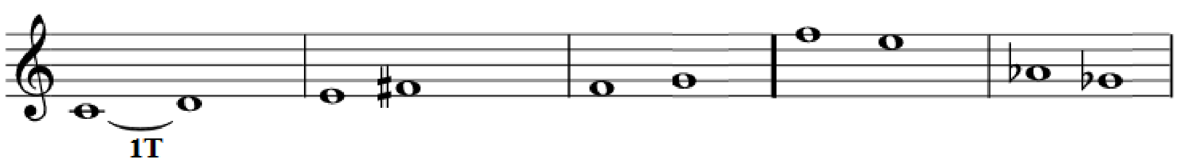


•Intervalos maiores e menores

Considerando a classificação do intervalo, vista na subseção 2.3.4, qualificamos os intervalos maiores ou menores de acordo com o seu número de semitons.

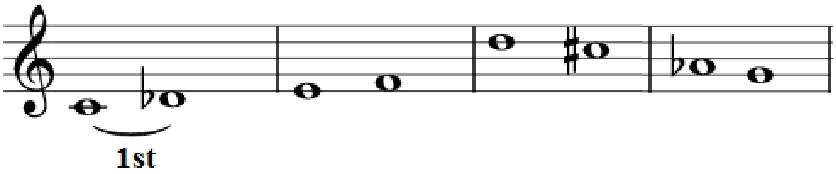
O intervalo de **Segunda Maior (2^{a} M)** é formado por 2 semitons. Observe a localização das notas na pauta: uma nota do intervalo está grafada na linha e a outra, no espaço. Chamamos de **intervalo conjunto** (notas imediatamente próximas).

Figura 2.33: Exemplos de intervalos de 2^{a}M



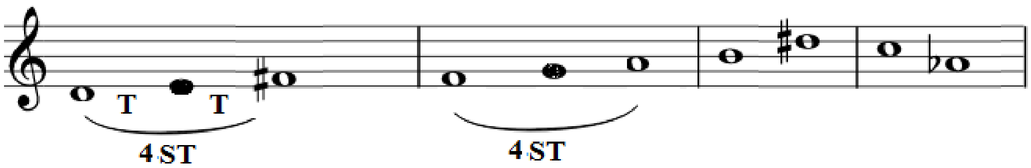
O intervalo de **Segunda Menor (2^{a} m)** é formado por 1 semitom.

Figura 2.34: Exemplos de intervalos de 2ª m



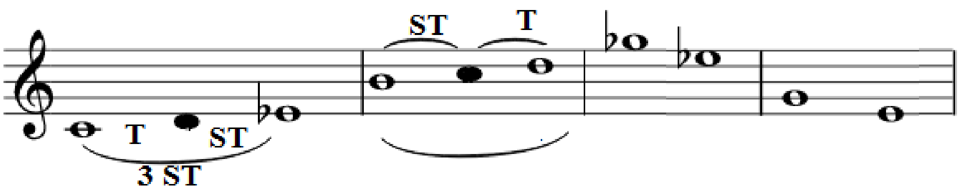
O intervalo de **Terça Maior (3ª M)** é formado por 4 semitons.

Figura 2.35: Exemplos de intervalos de 3ªM



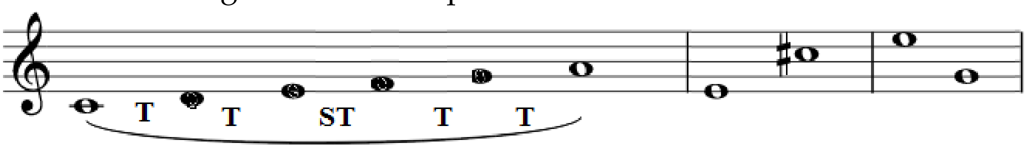
O intervalo de **Terça Menor (3ª m)** é formado por 3 semitons.

Figura 2.36: Exemplos de intervalos de 3ª m



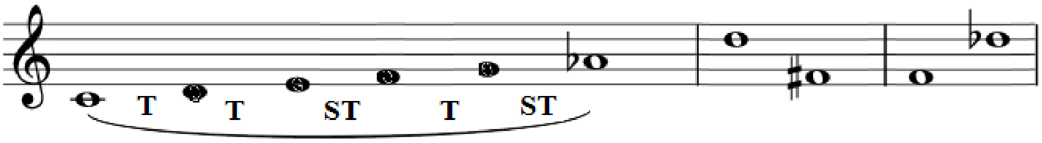
O intervalo de **Sexta Maior (6ªM)** é formado por 9 semitons.

Figura 2.37: Exemplos de intervalos de 6ª M



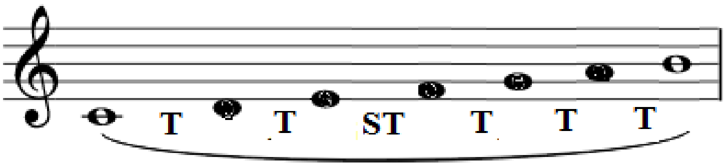
O intervalo de **Sexta Menor (6ª m)** é formado por 8 semitons.

Figura 2.38: Exemplos de intervalos de 6ª m



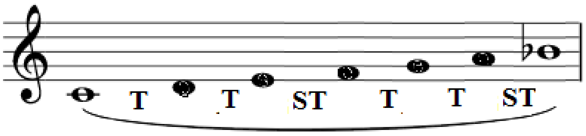
O intervalo de **Sétima Maior (7ªM)** é formado por 11 semitons.

Figura 2.39: Exemplo de um intervalo de 7ª M: Intervalo entre Dó e Si



O intervalo de **Sétima Menor (7ª m)** é formado por 10 semitons.

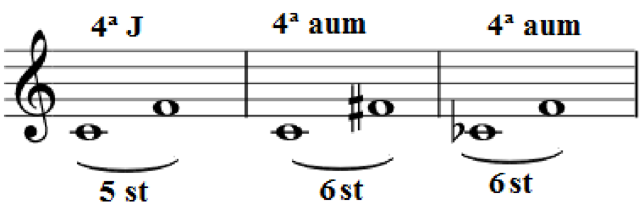
Figura 2.40: Exemplo de um intervalo de 7ª m: Intervalo entre Dó e Si bemol



•Intervalos aumentados e diminutos

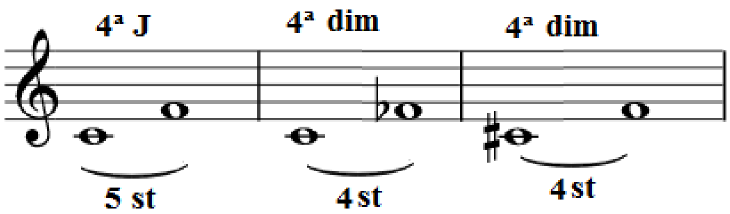
"**Intervalos aumentados (aum)** são aqueles que têm um semitom cromático a mais que os justos ou maiores."(MED, 1996, p.71).

Figura 2.41: Exemplo de um intervalo de 4ª aumentado



"**Intervalos diminutos (dim)** são aqueles que têm um semitom cromático a menos que os justos ou maiores."(MED, 1996, p.71).

Figura 2.42: Exemplo de um intervalo de 4ª diminuto



•Trítono

Trítono é o intervalo de três tons entre duas notas. Se estas notas forem tocadas simultaneamente produzem um efeito considerado dissonante na Música Tonal. Na Idade Média, foi proibida a sua execução pela Igreja Católica por causar um demasiado efeito de tensão(Grout e Palisca, 1994). Por isso foi apelidado do "som do diabo". A quarta aumentada e a quinta diminuta são trítonos.

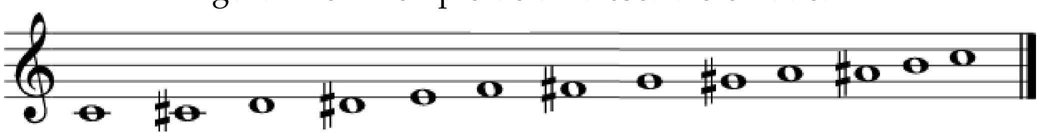
2.4 Escalas

Escala musical é uma sucessão de notas diferentes e consecutivas, dispostas de forma ascendente ou descendente. Na música ocidental, usa-se a escala de sete notas.

2.4.1 Escala cromática

A escala cromática é uma sequência de notas, numa oitava, separadas por um semitom. No piano obtém-se a escala cromática tocando-se, sucessivamente as teclas brancas e pretas. Notas com o mesmo nome, diferem-se pelas alterações (acidentes).

Figura 2.43: Exemplo de uma escala cromática



A escala cromática é o ponto de partida para a estruturação do sistema tonal. O sistema tonal é formado de várias escalas, cada qual com sete notas, que são as escalas diatônicas e que veremos a seguir.

2.4.2 Escala diatônica

Escala diatônica ou natural é uma sequência de notas diferentes consecutivas formando uma oitava.

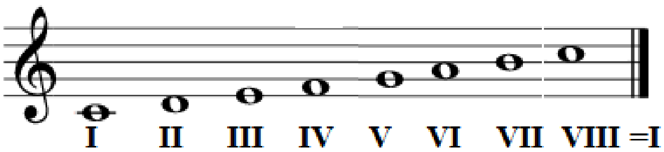
Figura 2.44: Escala diatônica de Dó Maior

2.4.3 Graus da escala

As notas de uma escala diatônica são identificadas por graus, numerados ordinalmente com algarismos romanos. Cada grau recebe um nome especial de acordo com a função que exerce dentro da escala.

Os graus são numerados de acordo com uma escala ascendente.

Figura 2.45: Identificação dos graus numa escala



Os graus, seus nomes e características estão descritos na tabela 2.1.

Os graus, de acordo com as suas características, podem ser agrupados em **modais** ou **tonais**.

Os graus **tonais** são o I, IV e V. Caracterizam o tom para fins de harmonia.

Os graus **modais** são os III, VI e VII. São os que definem os modos, como veremos a seguir.

Tabela 2.1: Nomenclatura e caracterísitcas dos graus da escala

Grau	Nome	Características
I	TÔNICA	Principal grau. Nomeia a escala e o tom.
II	SUPERTÔNICA	Um grau acima da tônica.
III	MEDIANTE	Intermediário da tônica e dominante.
IV	SUBDOMINANTE	Um grau abaixo da dominante.
V	DOMINANTE	Mais importante depois da tônica.
VI	SUPERDOMINANTE	Um grau acima da dominante.
VII	SENSÍVEL	Um semitom abaixo da tônica.
VII	SUBTÔNICA	Um tom abaixo da tônica.

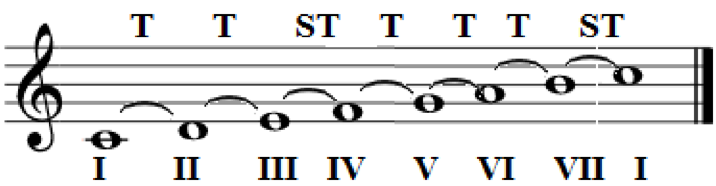
2.4.4 Modos

Modo é o caráter da escala. Ela varia conforme a posição dos tons e semitons e suas relações com a tônica.

Os graus predominantes são o maior e o menor.

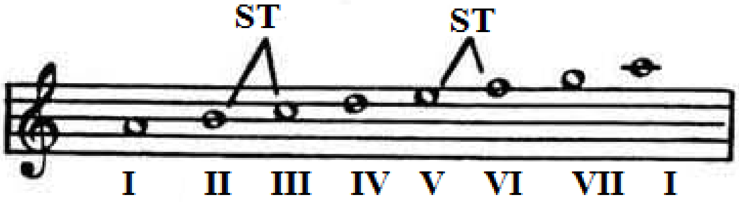
• **Modo maior**: os semitons se localizam entre os graus III-IV e VII-I. Entre os outros graus há um tom. Caracterizam a escala maior.

Figura 2.46: Escala de Dó Maior



•**Modo menor**: os semitons se localizam entre os graus II-III e V-VI. Entre os outros graus há um tom. Caracterizam a escala menor.

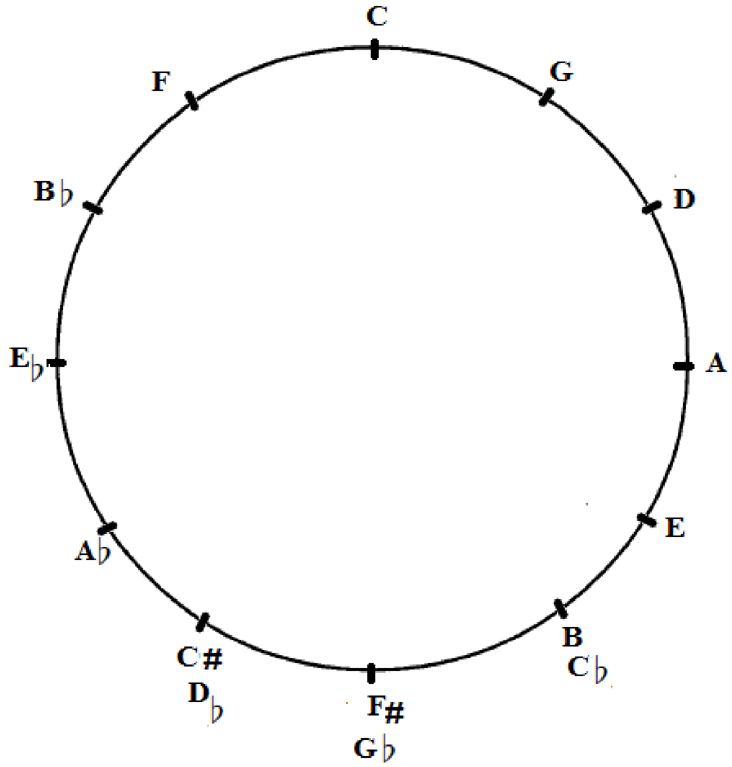
Figura 2.47: Escala de Lá Menor



2.4.5 O ciclo das quintas e das quartas

As escalas maiores podem ser formadas a partir do ciclo das quintas ou das quartas. O ciclo ou círculo das quintas é uma sequência de doze notas que se distanciam por intervalos de quinta justa. O ciclo ou círculo das quartas é o inverso do ciclo das quintas, isto é, coincide com o ciclo da quita descendente (no sentido anti-horário). Na figura 2.48, visualizamos o ciclo das quintas girando no sentido horário e das quartas no anti-horário.

Figura 2.48: Ciclo das quintas e quartas



Quanto mais próximas duas notas no ciclo, menos alterações nas suas notas sofrem as escalas que as têm como tônicas.

2.4.6 Escalas maiores

As escalas maiores são escalas diatônicas que possuem as caraceterísticas do modo maior. São em número de quinze: a natural, sete com sustenidos e sete com bemóis. Mas na prática são utilizadas doze.

A escala de Dó maior é uma escala natural (figura 2.46), ou seja, não tem acidentes. Serve de base para a formação das demais escalas maiores.

Para formar as **escalas maiores com os sustenidos** basta seguir o ciclo das quintas. Partindo da escala de Dó Maior, conservamos as alterações das escalas anteriores e elevamos um semitom da sensível (grau VII), conservando a estrutura do modo maior. A nota que inicia a escala é a tônica (grau I) e dá nome à escala. A ordem dos sustenidos na armadura da clave é Fá - Dó - Sol - Ré - Lá- Mi - Si (Ciclo das quintas a partir de Fá).

Exemplo 2.6. *Seguindo o ciclo das quintas, depois da escala de Dó Maior, temos a de* ***Sol Maior****. No sétimo grau, elevamos a nota um semitom, sinalizando com um sustenido. Esta nota corresponde à nota fá. Então, na armadura da clave, coloca-se o sinal de alteração ♯ na linha onde se registra a nota fá, que na clave de sol corresponde à quinta linha.*

Figura 2.49: Escala de Sol Maior

Para formar as **escalas maiores com bemóis**, seguimos o ciclo das quartas. Na nota do IV grau, descemos um semitom. Para as escalas seguintes, conservamos as alterações das anteriores. A ordem dos bemóis segue o ciclo das quartas a partir de Si, na armadura da clave: Si - Mi - Lá - Ré - Sol - Dó- Fá.

Exemplo 2.7. *Seguindo o ciclo das quartas, a partir da escala de Dó Maior, temos a de Fá Maior. No quarto grau, que corresponde à nota Si, baixamos um semitom, sinalizando com um bemol. Na armadura de clave, colocamos um bemol na linha correspondente à nota si, que na clave de sol localiza-se na terceira linha.*

Figura 2.50: Escala de Fá Maior

2.4.7 Escalas relativas menores

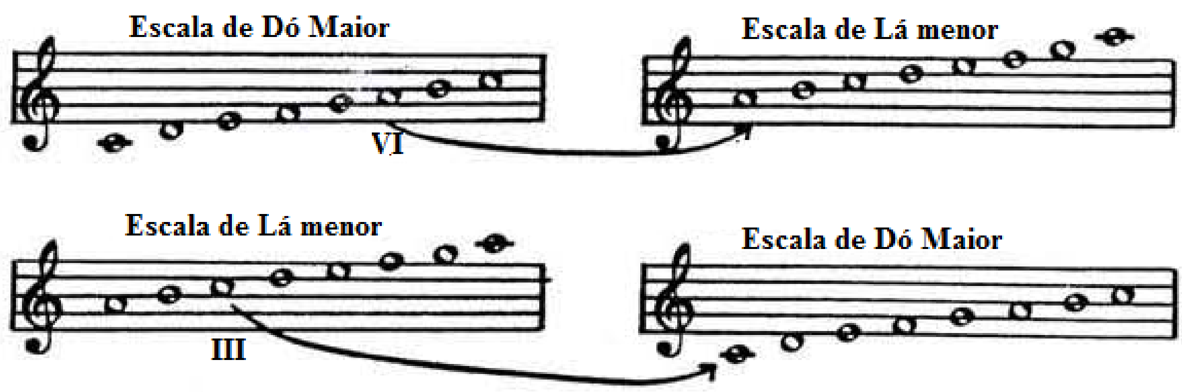
As escalas menores têm como principal característica a distância de um semitom entre os graus II e III. Ou seja, um intervalo de terça menor entre os graus I e III. As escalas menores são independentes das maiores. No entanto, para facilitar a compreensão da formação dessas escalas, costuma-se comparar as duas escalas. Toda escala maior tem a sua relativa menor. (Med 1996)

As **escalas relativas** são duas escalas que possuem as mesmas notas e a mesma armadura de clave, mas de modos diferentes: uma maior e outra menor.

A tônica da escala relativa menor coincide com o sexto grau da relativa maior. Por sua vez, a tônica da maior coincide com o terceiro grau da menor.

Exemplo 2.8. *As escalas de Dó maior e Lá menor são relativas entre si.*

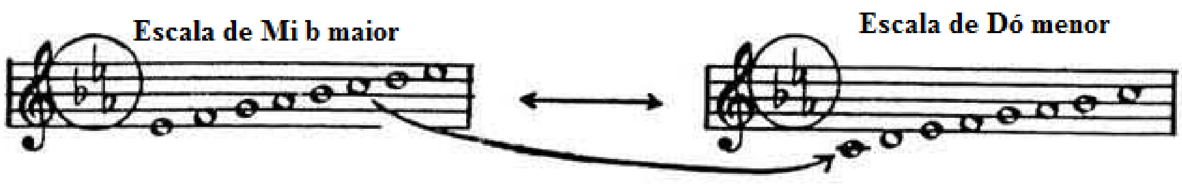
Figura 2.51: Relação entre Dó maior e Lá menor



Portanto, para se formar as escalas menores relativas, toma-se cada uma das quinze escalas maiores e, a partir do seu sexto grau forma-se a relativa menor. A escala menor tem os mesmos acidentes da maior.

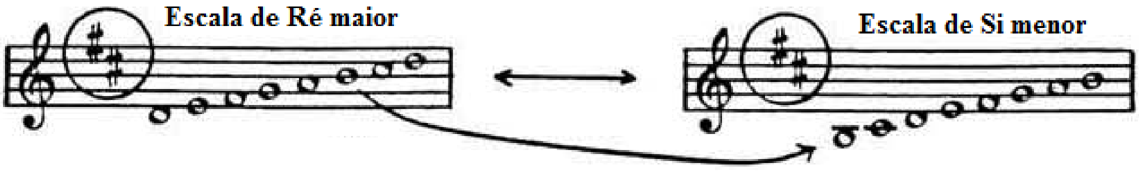
Exemplo 2.9. *A relativa da escala de Mi♭ maior é a de Dó menor.*

Figura 2.52: As escalas relativas de Mi♭ maior e Dó menor



Exemplo 2.10. *A relativa da escala de Ré maior é a de Si menor.*

Figura 2.53: As escalas relativas de Ré maior e a de Si menor



A lista das escalas maiores e suas relativas menores se encontram no apêndice A deste trabalho.

2.5 Tonalidade

A melodia de uma música se desenvolve, utilizando as notas de uma escala maior ou menor. Isto caracteriza a **música tonal**, onde existe uma hierarquia de sons, havendo uma distinção do centro de atração nas relações entre si:

> A base da construção perceptiva do sistema tonal é a dicotomia tensão - relaxamento. Ou seja, expectativa e preenchimento (ou violação) da expectativa, sendo que intervalos consonantes dão maior sensação de relaxamento – devido à sua estabilidade – e intervalos dissonantes dão maior sensação de tensão devido à sua instabilidade. A partir dessa relação entre tensão e relaxamento, temos o conceito de tonalidade, que é uma noção que está fortemente ligada às escalas do sistema tonal, por se tratar da série de relações hierárquicas entre as notas, em que uma particular, a chamada tônica, é central. Partindo da polaridade de base da constituição da tonalidade, a tônica de uma escala é a nota de relaxamento, enquanto todas as outras notas se relacionam a ela de acordo com seu grau de tensão. (SANTANA, 2010. pp.21-22)

No caso dos acordes que acompanham a melodia, objeto de estudo da Harmonia, se formam sobre a mesma escala que serve de base à melodia. Já vimos em 2.4.3 que os graus da escala possuem diferentes funções. **Tonalidade**, portanto, é definida como "o sistema que rege as escalas ou tons, segundo o princípio de que os seus diferentes graus estão na dependência da nota principal, ou seja, da tônica."(MED, 1996, p.90.

Tom é a altura em que se realiza a tonalidade. Ou seja, o tom está relacionado à escala que lhe serve de base.

2.6 Transposição de tonalidade

Muitas vezes é necessário adequar a altura de uma melodia a uma textura vocal ou afinação de um instrumento. Para tanto, é necessário se fazer o a **transposição ou transporte** de uma melodia, mudando o seu tom. Por exemplo, quando um intérprete necessita "forçar"a voz para executar notas agudas ou graves. No primeiro caso, é necessário baixar o tom, no segundo elevar.

"A transposição conserva o modo e a estrutura rítmico-melódica da música. Modifica a altura absoluta dos sons, mas conserva os intervalos entre as notas e suas funções."(MED, 1996, p.176).

A transposição pode ocorrer com ou sem mudança de clave. Os músicos que tocam os instrumentos transpositores, geralmente fazem a transposição com a mudança de clave. Neste trabalho, no entanto, os exemplos apresentados são apenas sem a mudança de clave.

Na maioria das músicas, se começa numa tonalidade principal, muda-se de tom no decorrer e volta-se à tonalidade principal, na qual terminam. A isto chamamos de **modulação.** E seus princípios são objeto de estudo da Harmonia.

> Uma peça musical tonal raramente se mantém unicamente em torno de uma mesma região tonal, querendo dizer que se uma peça está em Dó Maior, ela não necessariamente será constituída apenas das notas pertencentes a essa escala e nem sempre será o dó que fará papel de tônica. Por isso é que dizemos que uma peça está, por exemplo, na tonalidade de Sol Maior, e não na escala de Sol Maior: porque, ainda que o centro tonal (a tônica principal) seja sempre a nota sol, podem-se utilizar notas que pertencem a outras escalas, migrando-se temporariamente de uma tônica a outra. (SANTANA, 2010. pp.29)

Só é possível transportar uma melodia no mesmo modo. Ou seja, não é possível transpor do modo maior para o menor ou vice-versa.

Melodias transpostas em tonalidades próximas no ciclo das quintas, soam mais "agradáveis".

Neste trabalho, mostramos um modelo matemático para a tranposição de melodias e algumas atividades que podem ser aplicadas na escola básica. Para tanto, utilizamos melodias simples, sem muita variedade de alterações, que consistem em trechos de canções considerando a tonalidade principal.

CAPÍTULO 3

NOÇÕES DE ÁLGEBRA

Como neste trabalho será abordada a relação existente entre as notas no sistema temperado e o grupo quociente $\mathbb{Z}_{12}$, neste capítulo são apresentadas algumas noções de álgebra moderna necessárias à compreensão deste tipo de conjunto.

3.1 Noções de Aritmética Modular

Inicialmente, vamos introduzir a noção de relações de equivalência, usadas para classificar os elementos de um conjunto, que gozam das mesmas propriedades, em subconjuntos.

Definição 3.1. *Seja A um conjunto não vazio onde está definida uma relação δ. Esta é uma relação de equivalência se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades, quaisquer que sejam x, y e $z \in A$.*

1. *δ é reflexiva: $x \, \delta \, x$, isto é, todo elemento de A se relaciona consigo mesmo.*

2. *δ é simétrica : se $x \, \delta \, y$, então $y \, \delta \, x$.*

3. *δ é transitiva: se $x \, \delta \, y$ e $y \, \delta \, z$, então $x \, \delta \, z$.*

A seguir mostraremos que a relação de congruência é uma relação de equivalência.

Definição 3.2. *Sejam a,b e n inteiros, sendo $n > 1$. Dizemos que a e b são congruentes módulo n, se (a - b) é um múltiplo de n. Escrevemos:*

$$a \equiv b \ (mod\ n)$$

Exemplo 3.1. *$25 \equiv 4$ (mod 7), já que 25 - 4 = 21, múltiplo de 7.*

Exemplo 3.2. *32 $\equiv$ 8 (mod 12), já que 32 - 8 = 24, múltiplo de 12.*

Proposição 3.1. *Sejam os inteiros a,b,c e n, com n > 1. Temos que:*

i) *$a \equiv a$ (mod n).*

ii) *Se $a \equiv b$ (mod n), então $b \equiv a$ (mod n).*

iii) *Se $a \equiv b$ (mod n) e $b \equiv c$ (mod n), então $a \equiv c$ (mod n).*

Demonstração. Os itens i) e ii) seguem imediatos da definição.
iii) Como a$\equiv$ *b (mod n)* e *b* $\equiv$ *c (mod n)*, temos que (*a*-*b*) e (*b*-*c*) são múltiplos de *n*. A soma de múltiplos de *n* também é um múltiplo de *n*, então (*a* - *c*) = (*a* - *b*)+(*b* - *c*) é um múltiplo de *n*. Logo, $a \equiv c$ (*mod n*). E, portanto, a congruência é uma relação de equivalência. □

3.1.1 O conjunto $\mathbb{Z}_n$

Agora, vamos definir o conjunto formado pelas classes de congruência módulo *n*.

Definição 3.3. *Seja $a \in \mathbb{Z}$. A classe de congruência de a módulo n é definida como a classe de equivalência de a com respeito à relação de congruência módulo n. Isto é, a classe formada por todo $x \in \mathbb{Z}$, tal que (x-a) é múltiplo de n : (x-a) = qn, para algum $q \in \mathbb{Z}$. Podemos escrever:*

$$\bar{a} = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv a \ (mod\ n)\}$$
$$= \{x \in \mathbb{Z}; x = a+nq, \exists\, q \in \mathbb{Z}\}$$

.

Definição 3.4. *O conjunto $\mathbb{Z}_n$ é formado pelas classes $\bar{0}$, $\bar{1}$, ..., $\overline{n-1}$.*

Definição 3.5. *Um conjunto formado por um elemento de cada classe de congruência módulo n, da $\bar{a}$ com $0 \leq a \leq$ n-1, com n > 1, é um sistema completo de restos módulo n.*

Em particular, o conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ = $\{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{11}\}$.

Proposição 3.2. *Sejam a e $n \in \mathbb{Z}$, com n > 1. O resto r e a são congruentes módulo n, na divisão de a por n.*

Demonstração. Se $a \in \mathbb{Z}$, ao efetuarmos a divisão euclidiana de *a* por *n*, obtemos únicos *q* e *r* inteiros, tais que: *a = nq + r e* $0 \leq r \leq n$ *-1*. Então temos que *a - r = nq* é um múltiplo de *n*. Logo, $a \equiv r$ *(mod n)*. E daí, $\bar{a} = \bar{r}$. Como $r \in \{0,1,\cdots, n-1\}$, segue que $\bar{a} \in \{\bar{0}, \bar{1}, \cdots, \overline{n-1}\}$.Temos ainda que duas destas classes não podem ser iguais. Já que seus elementos são incongruentes dois a dois. □

3.1.2 A imagem geométrica de $\mathbb{Z}_n$

O conjunto $\mathbb{Z}$ em geral é visto geometricamente como um conjunto de pontos marcados, de uma em uma unidade, numa reta horizontal. Consideremos uma circunferência com comprimento n, marcando os pontos do zero ao n. Enrolando a reta que representa $\mathbb{Z}$ nesta circunferência, podemos perceber que os pontos cujas coordenadas são múltiplos de n coincidem todos com o ponto zero. Cada uma das classes de equivalência de $\mathbb{Z}_n$ corresponde a um ponto da circunferência.

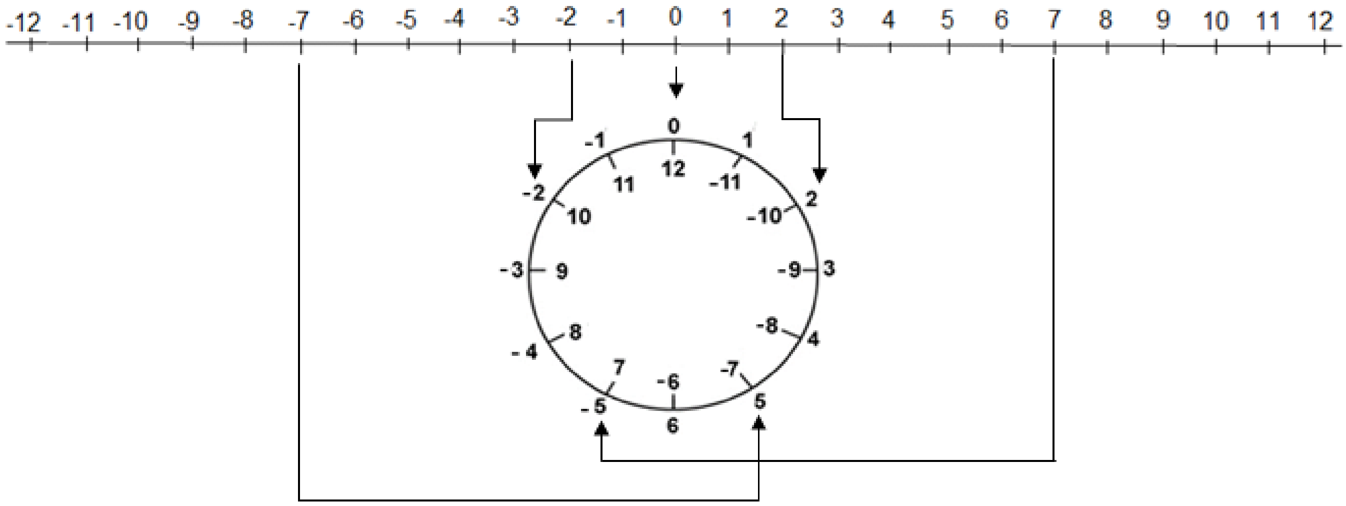


Figura 3.1: Ilustração da imagem geométrica de $\mathbb{Z}_{12}$

3.1.3 As operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_n$

A seguir, são apresentadas as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{Z}_n$ e algumas das suas propriedades.

Definição 3.6. *Sejam duas classes de congruência $\overline{x}$ e $\overline{y} \in \mathbb{Z}_n$. Definimos a classe $\overline{a+b}$ à soma $\overline{a}$ + $\overline{b}$. E a classe $\overline{a.b}$ ao produto $\overline{a}$. $\overline{b}$.*

Proposição 3.3. *As operações de soma e produto de classes estão bem definidas.*

Demonstração. Sejam $\overline{a} = \overline{c} \in \mathbb{Z}_n$ e $\overline{b} = \overline{d} \in \mathbb{Z}_n$. Como $a \equiv c$ *(mod n)* e $b \equiv d$ *(mod n)* , então *(a-c)* e *(b-d)* são múltiplos de n. Como a soma de dois múltiplos de n é um múltilpo de n, então: *(a - c)+(b - d)= (a + b)-(c + d)* é múltiplo de n. Logo, $\overline{a+b} = \overline{c+d}$.

Agora, suponhamos que $a = c + qn$ e $b = d + tn$, q e $t \in \mathbb{Z}_n$. Segue que: $a.b = (c + qn).(d + tn) = c.d + (ct + dq + tqn)n$. E, assim, $(a.b - c.d)$ é um múltiplo de n. Portanto, $\overline{a.b} = \overline{c.d}$.

Assim, os resultados da soma e da multiplicação em $\mathbb{Z}_n$ são únicos. Isto é, independem dos representantes escolhidos para as classes. $\square$

3.1.4 Propriedades das operações em $\mathbb{Z}_n$

As operações em $\mathbb{Z}_n$, apresentadas no início desta seção, gozam de propriedades semelhantes às operações correspondentes em $\mathbb{Z}$.

Proposição 3.4. *Para quaisquer $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$, a adição em $\mathbb{Z}_n$ goza das seguintes propriedades:*

i) *Associatividade: $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$.*

ii) *Comutatividade: $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$.*

iii) *Elemento neutro: $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a}$.*

iv) *Elementos simetrizáveis: $\overline{a} + (-\overline{a}) = \overline{0}$*

Demonstração. Sejam $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$:

i) $(\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c} = \overline{a+b} + \overline{c} = \overline{a+b+c} = \overline{a+(b+c)} = \overline{a} + \overline{b+c} = \overline{a} + (\overline{b} + \overline{c})$

ii) $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b} = \overline{b+a} = \overline{b} + \overline{a}$

iii) $\overline{a} + \overline{0} = \overline{a+0} = \overline{a}$

iv) Seja $0 \leq a \leq n\text{-}1$. Tome $\overline{n-a} \in \mathbb{Z}_n$. Temos que $(n - a)\text{-}(-a) = n$. Logo, por definição, $n - a \equiv -a \ (mod\ n)$. Assim, $\overline{a} + \overline{n-a} = \overline{a+n-a} = \overline{n} = \overline{0}$. Portanto, verificamos que $\overline{n-a}$ é o simétrico de $\overline{a}$ em $\mathbb{Z}_n$.

□

Proposição 3.5. *Para quaisquer $\overline{a}$, $\overline{b}$ e $\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$, a multiplicação em $\mathbb{Z}_n$ goza das seguintes propriedades:*

i) *Associatividade: $(\overline{a} \cdot \overline{b}) \cdot \overline{c} = \overline{a} \cdot (\overline{b} \cdot \overline{c})$.*

ii) *Comutatividade: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$.*

iii) *Elemento neutro: $\overline{a} \cdot \overline{1} = \overline{a}$.*

A demonstração para estas propriedades é análoga a das três primeiras da adição.

Exemplo 3.3. *Neste trabalho, serão úteis as operações em $\mathbb{Z}_{12}$. Por exemplo, ao somar as classes $\overline{4}$ e $\overline{9}$ em $\mathbb{Z}_{12}$, obtemos $\overline{13}$. Mas 13 - 1 = 12. E daí 13 e 1 são congruentes módulo 12. Portanto $\overline{13} = \overline{1}$. Já que devemos considerar o sistema reduzido de restos, ou seja, $0 \leq a \leq n - 1$. Vide tabela 3.1.*

Tabela 3.1: Tábua da adição em $\mathbb{Z}_{12}$

$\oplus$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
$\overline{6}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{8}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$
$\overline{9}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$
$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$

3.2 Alguns elementos de Teoria de Grupos

Algumas relações entre a transposição musical e a Matemática têm por base a Teoria de Grupos.

3.2.1 Grupos

Definição 3.7. *Um conjunto G onde está definida uma operação $(x, y) \longrightarrow (x * y)$ sobre G é um grupo se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Associatividade: quaisquer que sejam $a, b, c \in G$ temos que*
$$a * (b * c) = (a * b) * c.$$

2. *Elemento neutro: existe um elemento neutro $e \in G$ tal que para todo $a \in G$ temos*
$$a * e = e * a = a.$$

3. *Elemento inverso: para todo $a \in G$, existe um $b \in G$ tal que*
$$a * b = b * a = e$$

Observação 3.1. *Se a operação é comutativa, o grupo é chamado abeliano. Isto é, para quaisquer $a, b \in G$ vale $a * b = b * a$.*

Exemplo 3.4. ***Grupo ($\mathbb{Z}_n$, +)***

O conjunto $\mathbb{Z}_n$ é um grupo abeliano para a operação de adição. De fato. As propriedades da adição em $\mathbb{Z}_n$ foram verificadas na proposição 3.4 . Podemos observar o caso em que n=12 na figura 3.2 (tábua de adição em $\mathbb{Z}_{12}$) no exemplo 3.3. Verificamos que todo elemento em $\mathbb{Z}_n$ tem o seu simétrico e vale a propriedade comutativa.

3.2.2 Propriedades de um grupo

Proposição 3.6. *Todo grupo* $(G, *)$ *satisfaz as seguintes propriedades:*

i) *O elemento neutro é único.*

ii) *O elemento inverso é único.*

iii) *(Lei do cancelamento) Todo elemento de G é regular para a operação $*$. Isto é, para quaisquer a, b, c $\in G$, se $a * b = a * c$, ou $b * a = c * a$, então $b = c$.*

Demonstração. **i)** Suponhamos que e e e' sejam os elementos neutros do grupo G. Então $e * e'$ = e'. Analogamente, $e * e'$ = e. Portanto e = e'.

ii) Suponhamos que a, $b \in G$ são os elementos simétricos de $x \in G$. Então, $a * x = e$. Assim como $b * x = e$. Operando com a em ambos os membros desta última igualdade, temos: $b * x * a = e * a \Leftrightarrow b * (x * a) = e * a \Leftrightarrow b * e = a * e$. E daí, $a = b$.

iii) Sejam $a, b, c \in G$. Suponhamos que $a * b = a * c$ ou $b * a = c * a$ e seja a' o simétrico de a. Temos que $a' * (a * b) = a' * (a * c)$. Como, por definição, a operação $*$ é associativa em G, então podemos escrever $(a' * a) * b = (a' * a) * c \Longrightarrow e * b = e * c \Longrightarrow b = c$. De forma análoga, provamos que se $b * a = c * a \Longrightarrow b = c$.

□

3.2.3 Subgrupos

Por vezes se faz necessário operar com elementos de um determinado grupo G que possuam especificidades pertinentes a um determinado padrão, objeto de estudo. Então podemos formar com tais elementos um subconjunto de G de forma que este possua, por si próprio, a estrutura de um grupo.

Definição 3.8. *Seja (G,$*$) um grupo.Um subconjunto H, não vazio de G, é um subgrupo de G quando (H,$*$) também é um grupo. Denota-se H < G. Isto é, se satisfaz as seguintes condições:*

i) *O elemento neutro de G pertence a H.*

ii) *Quaisquer que sejam a, b $\in$ H, a $*$ b $\in$ H.*

iii) *O inverso de qualquer elemento de H também pertence a H.*

iv) *Para todo a, b , c $\in$ H, a $*$ (b$*$ c) = (a $*$ b) $*$ c.*

Os grupos G e $\{e\}$ são os subgrupos triviais de G.

Exemplo 3.5. *($\mathbb{Z}_n$, +) é um subgrupo de ($\mathbb{Z}$, +).*

3.2.4 Grupo de permutações

Definição 3.9. *Permutação designa uma bijeção de um conjunto nele mesmo. O grupo de permutações sobre E,* **(**$S_E, \circ$**)***, é o conjunto das permutações dos elementos de E. Sendo que E é um conjunto não vazio e S(E) é o conjunto de todas as funcões bijetoras f: E $\rightarrow$ E. A composição de funções é a operação sobre S(E).*

Um caso particular é quando E = 1, 2, $\ldots$, n, onde $n \geq 1$, inteiro. Neste caso, denotamos *S(E)* por S_n. Temos ainda que o número de elementos de S_n é *n!* .

Exemplo 3.6. *Se f: E $\rightarrow$ E for definida por $f(i) = a_i$, para todo i $\in$ E, então:*

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Vejamos no caso em que E =$\{$ 1,2,3$\}$ e α, $\beta \in S_3$. Considere:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Então, temos:

$$\alpha \circ \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$

Um exercício interessante é montar a tábua de operação deste grupo.

Definição 3.10. *Uma permutação $\alpha \in S_n$ é uma* ***permutação cíclica*** *ou* ***ciclo de comprimento k****, se existirem $a_1, a_2, \ldots, a_k$ elementos todos distintos pertencentes a $E = \{1, 2 \ldots, k\}$ aplicados de forma que $\alpha(a_1) = a_2, \alpha(a_2) = a_3, \ldots, \alpha(a_{k-1}) = a_k, \alpha(a_k) = a_1$ e os demais elementos fixos, ou seja $\alpha(a_j) = a_j$, $j \in E$. Ciclos de comprimento $k = 2$, são chamados de* ***tranposições****. Podemos denotar como $(a_1, \ldots, a_k)$.*

Exemplo 3.7. Considere os seguintes elementos de S_5*:*

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ é um ciclo de comprimento 3, denotamos por $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$

é uma tranposição denotada por $\begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Observação 3.2. Não vamos confundir esta transposição aqui mostrada com a transposição em Música. Embora haja uma relação entre as notas da escala temperada e um determinado subgrupo de permutações, como veremos no capítulo 4.

Definição 3.11. Os ciclos $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix}$ *, a, b* $\in \{1, 2, \ldots, n\}$ dizem-se disjuntos se $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_k \end{pmatrix} \cap \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \ldots & b_k \end{pmatrix} = \varnothing$.

Exemplo 3.8. *Sejam os ciclos pertencentes a S_5 :*

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$ *são disjuntos. Já os ciclos* $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}$ *não são disjuntos, já que 4 move ambos.*

Observação 3.3. "Dois ciclos disjuntos comutam."(Proposição 26, DOMINGUES, 2003).

Observação 3.4. Toda permutação, diferente da identidade, pode ser escrita, a menos da ordem como um produto de ciclos disjuntos, com $k \geq 2$, segundo proposição V.10.5. em Garcia (2003).

Exemplo 3.9. *Em S_5:*

$$\textit{Seja } \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Temos que o ciclo que começa em 1:

$$1,\ \alpha\ (1) = 2,\ \alpha\ (2) = 4 \text{ e } \alpha\ (4) = 1 \text{ é o } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

E o ciclo que começa em 3:

$$3,\ \alpha(3) = 5 \ \text{ é o } \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Logo, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3.2.5 Homomorfismo e Isomorfismo de Grupos

A bijeção entre dois grupos garante a mesma cardinalidade e preserva as operações (DOMINGUES e IEZZI, 2003). Veremos, no capítulo 4, que se pode estabelecer uma bijeção entre o grupo de classes de notas musicais e o grupo aditivo $\mathbb{Z}_{12}$. E ainda, estudaremos uma aplicação em $\mathbb{Z}_{12}$ relacionada à transposição em Música. Para tanto, se faz necessário compreender o conceito de isomorfismo de grupos e algumas de suas propriedades, apresentados neste tópico.

Definição 3.12. *Sejam dois grupos $(G, *)$ e $(H\ , \circ)$. Uma função f: $G \rightarrow H$ é chamado de* ***homomorfismo de grupos*** *se para todo $x,\ y \in G$:*

$$f\,(x * y) = f(x) \circ f(y).$$

Se f for também uma bijeção, então chamamos de ***isomorfismo*** *do grupo G no grupo H. Dizemos que G e H são isomorfos. Denotamos por $G \simeq H$.*

3.2.6 Teorema de Cayley

Neste tópico, apresentamos noções que dão suporte ao entendimento sobre um determinado tipo de operação aplicada à transposição em Música, que é uma transformação baseada no fato de que todo grupo é isomorfo a um grupo de permutações conveniente.

Definição 3.13. *Seja G um grupo aditivo. Para cada $a \in G$ e qualquer $x \in G$, a aplicação*

$$\varphi_a : G \longrightarrow G$$

$$\varphi_a(x) = a + x$$

é uma translação à esquerda. De forma análoga, definimos translação à direita. Denotamos por T(G) o conjunto das translações em G.

Proposição 3.7. *Toda translação φ_a, com $a \in G$, é uma bijeção.*

Demonstração. Seja $a \in G$. Por definição, $\varphi_a(x) = a + x$. Tomemos $x, y \in G$. Suponhamos que $\varphi_a(x) = \varphi_a(y)$. Então, temos que $a + x = a + y$. Pela proposição 3.6. (iii), $x = y$. Logo φ_a é injetora.

Agora, seja $a + x = y$. Esta equação sempre tem solução em G, para todo $y \in G$, pois todo elemento em G admite um inverso. Logo, φ_a é sobrejetora. Portanto φ_a é uma bijeção.

□

Proposição 3.8. ***(Teorema de Cayley)*** *Seja G um grupo e $a \in G$. A aplicação:*

$$f : G \longrightarrow T(G)$$

$$f(a) = \varphi_a$$

é um isomorfismo de grupos.

Demonstração. f é sobrejetiva. Como toda translação é do tipo $\varphi_a(x)$, $\forall\ a,\ x \in G$, então f é sobrejetiva. Dados quaisquer $a, b, x \in G$, temos que:

$$f(a+b) = \varphi_{(a+b)}(x) = (a+b) + x = a + (b+x) = a + \varphi_b(x) = \varphi_a(\varphi_b(x)) = \varphi_a \circ \varphi_b = f(a) \circ f(b).$$

Portanto, f é um homomorfismo.

Além disso f é injetiva. De fato. Se $a, b \in G$ e $f(a) = f(b)$, então $\varphi_a = \varphi_b$. Logo, $\varphi_a(x) = \varphi_b(x)$, $\forall\, x \in G$. Daí, $a + x = b + x \Longrightarrow a = b$.

Logo, f é um isomorfismo.

□

Exemplo 3.10. O grupo ($\mathbb{Z}_4$, +) é isomorfo ao subgrupo de S_4. Isto é, à permutação dos elementos de $\{0, 1, 2, 3\}$, obedecendo à lei de formação $\varphi_a(x) = a + x$. Temos os seguintes elementos:

$$\varphi_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ a+0 & a+1 & a+2 & a+3 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \text{identidade}$$

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3.2.7 Grupos cíclicos

Considere um elemento $a \in G$. Vamos representar por $\langle a \rangle$ o subconjunto formado pelos elementos de G que são múltiplos de a, isto é, $\langle a \rangle = \{m \cdot a | m \in \mathbb{Z}\}$.

Definição 3.14. *Um grupo aditivo G é cíclico se, para algum elemento $a \in G$, se verificar $G = \langle a \rangle$. O elemento a é chamado **gerador** do grupo G.*

Exemplo 3.11. $\overline{5}$ *é um gerador do grupo* ($\mathbb{Z}_6$, +).

$$\langle a \rangle = \{\cdots, \overline{-5}, \overline{0}, \overline{5}, \overline{10}, \overline{15}, \overline{20}, \overline{25} \cdots\}.$$

Escrevendo na forma reduzida, isto equivale ao conjunto: $\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\} = \mathbb{Z}_6$.

Observe que $10 \equiv 4$ (mod 6), $15 \equiv 3$ (mod 6), $20 \equiv 2$ (mod 6) e $25 \equiv 1$ (mod 6). Os demais elementos, são múltiplos destes, obviamente.

Proposição 3.9. *(Identidade de Bézout) Sejam a e b inteiros positivos. Existem x e $y \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$ax + by = d, \text{ onde } d = mdc(a, b)$$

Corolário 3.1. *Sejam a e b inteiros não nulos. O mdc(a, b)=1, se e somente se, existirem x e y inteiros tais que*

$$ax + by = 1.$$

As demonstrações desta proposição e corolário podem ser lidas em Muniz Neto (2012), pp.15,16.

Proposição 3.10. *Seja $a \in \mathbb{Z}$. Então $\overline{a}$, gera o grupo ($\mathbb{Z}_n$, +) se, e somente se, mdc(a,n) = 1.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Suponha que $\overline{a}$ gera o grupo ($\mathbb{Z}_n$, +). Então existe $\overline{a} \in (\mathbb{Z}_n, +)$ tal que $\overline{a} \cdot \overline{x} = \overline{a \cdot x} = \overline{1}$. Assim, $ax \equiv 1 \ (mod\ n)$. E daí, $1 - ax = ny$, para algum $y \in \mathbb{Z}$. Ou seja, $ny + ax = 1$. E, pelo colorário 3.1., temos que *mdc (a , n) = 1*.

$\Leftarrow$) Se *mdc (a , n) = 1*, pela proposição 3.9., existem a e $y \in \mathbb{Z}$ tais que $ax + ny = 1$.
Então, $1 - ax = ny \Rightarrow ax \equiv 1 \ (mod\ n) \Rightarrow \overline{ax} = \overline{1}$. Tome $\overline{m} \in \mathbb{Z}_n$, temos que:

$$\overline{m} = \overline{m} \cdot \overline{1} = \overline{m} \cdot \overline{a \cdot x} = \overline{m \cdot a \cdot x} = \overline{a} \cdot \overline{m \cdot x} = \overline{a} \cdot \overline{m \cdot x}$$

Logo, $\overline{a}$ gera ($\mathbb{Z}_n$, +). □

Definição 3.15. *Para qualquer $n \in \mathbb{Z}_+$ definimos a **função ϕ de Euler** à função ϕ: $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que corresponde ao número de inteiros de 1 a n que são primos com n. Denotamos por $\phi(n)$.*

Temos então que podemos determinar o número de geradores do grupo ($\mathbb{Z}_n$, +) através da função de Euler.

Vejamos como calcular $\phi(n)$.

Primeiramente, temos que se p é primo, então

$$"\phi(p^k) = p^{k-1} \cdot (p-1)$$

E ainda, se m e n são inteiros positivos, com *mdc(m,n)*=1, então $\phi(mn) = \phi(m) \cdot \phi(n)$". (COUTINHO, 1997, p.142).

Exemplo 3.12. *Embora possamos enumerar facilmente os geradores do grupo $\mathbb{Z}_{12}$, vamos aplicar a fórmula acima apenas como exemplo.*

$$\phi(12) = \phi(2^2 \cdot 3) = \phi(2^2) \cdot \phi(3) = 2(2-1) \cdot 3^0(3-1) = 4$$

Logo, o grupo $\mathbb{Z}_{12}$ tem quatro geradores, que são os elementos $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$ e $\overline{11}$. Observe tabela 3.2.

Tabela 3.2: Tábua da multiplicação em $\mathbb{Z}_{12}$

$\odot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{10}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{10}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{10}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{11}$	$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

No capítulo a seguir veremos a aplicação na Música dos conceitos aqui abordados .

CAPÍTULO 4

A ÁLGEBRA E A TRANSPOSIÇÃO DE TONALIDADE

Primeiramente, vamos associar a oitava, na escala cromática (ou temperada), a uma identidade cíclica. Já vimos que a menor distância entre duas notas, nesta escala, é de um semitom. Esta partição corresponde a todas as teclas do piano. Utilizando a notação cifrada, apresentada no capítulo 2, esta correspondência pode ser vista na figura 4.1.

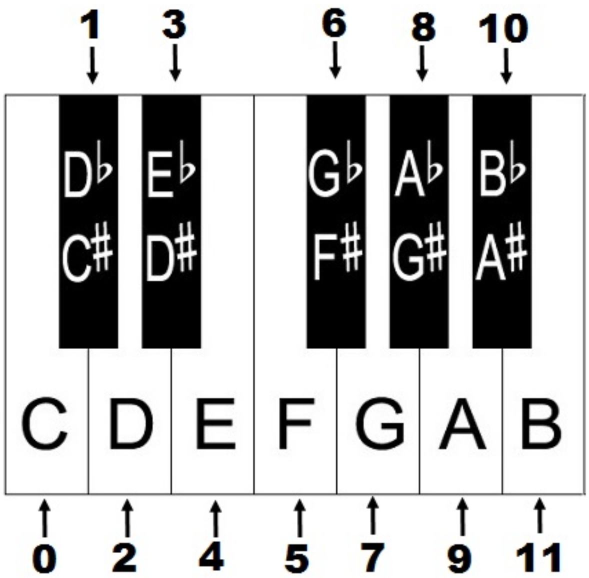


Figura 4.1: Correspondência entre notas, teclas e inteiros

4.1 O grupo de classes de notas

Trabalhando com a escala temperada podemos agrupar as notas em classes de equivalência. Duas notas são equivalentes se estão separadas por um número exato de oitavas. Isto é, duas notas soam em uníssono se a distância entre elas é de $12n$ semitons, $n \in \mathbb{Z}_+$. Então o modelo matemático a ser aplicado é o grupo $\mathbb{Z}_{12}$, ao qual vamos associar cada elemento de uma classe de notas a um elemento em $\mathbb{Z}_{12}$.

Definição 4.1. *Classe de notas é o conjunto formado por todas as notas equivalentes entre si. Isto é, todos os elementos de uma mesma classe que distam entre si 12n semitons, $n \in \mathbb{Z}_+$.*

> Faremos uma distinção entre uma *nota* (um som com certa frequência) e uma *classe de notas* (um grupo de notas com o mesmo nome. A classe de notas Lá, por exemplo, contém todas as notas chamadas Lá. Para colocar de outra maneira, qualquer nota chamada Lá é um membro da classe de notas Lá. [...] Quando dizemos que a nota mais grave do violoncelo é um Dó, nós estamos nos referindo a uma nota específica.[...] Quando dizemos que a tônica da Quinta Sinfonia de Beethoven é Dó, estamos nos referindo não a uma nota Dó específica, mas à *classe de notas* Dó. A classe de notas Dó é uma abstração e não pode ser adequadamente notada em pautas musicais). (STRAUS, 2013, p.3)

Devido à equivalência enarmônica, mostrada no capítulo 2, temos doze classes de notas diferentes. Por exemplo, todos os $F_\sharp$ e $G_\flat$ são elementos de uma única classe de notas. Vide figura 4.1.

O conjunto das classes de notas é constituído pelas doze classes de notas. Toda nota pertence a uma dessas classes. Ao adicionarmos ou subtrairmos 12 semitons a uma nota, isto é, subirmos ou descermos uma oitava, teremos uma outra nota da mesma classe. O efeito será, respectivamente, mais agudo ou mais grave. No entanto, soará o mesmo som.

Se, por exemplo, tomarmos uma nota $F_\sharp$ acima do Dó central e subirmos 12 semitons, chegamos a um som mais agudo, porém voltamos à classe de notas do $F_\sharp$. Vamos atribuir a cada nota da oitava, na ordem crescente de sua altura, os valores de 0 a 11, fixando o Dó com o zero. Vamos imaginar um mostrador de relógio circular (figura 4.2). Observe que partindo de qualquer valor e movendo 12 "casas", voltamos ao ponto de partida.

Como vimos em 3.1.1, a imagem geométrica de $\mathbb{Z}_n$ tem a forma de uma circunferência. E qualquer elemento $x \in \mathbb{Z}_n$ é da forma $x \equiv a \ (mod\ n)$, onde $a \in \mathbb{Z}_n$. No caso de $n = 12$, temos que $x \equiv a \ (mod\ 12)$.

Logo, podemos estabelecer uma bijeção entre o conjunto de classes de notas e o conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ (Townsend, 2011).

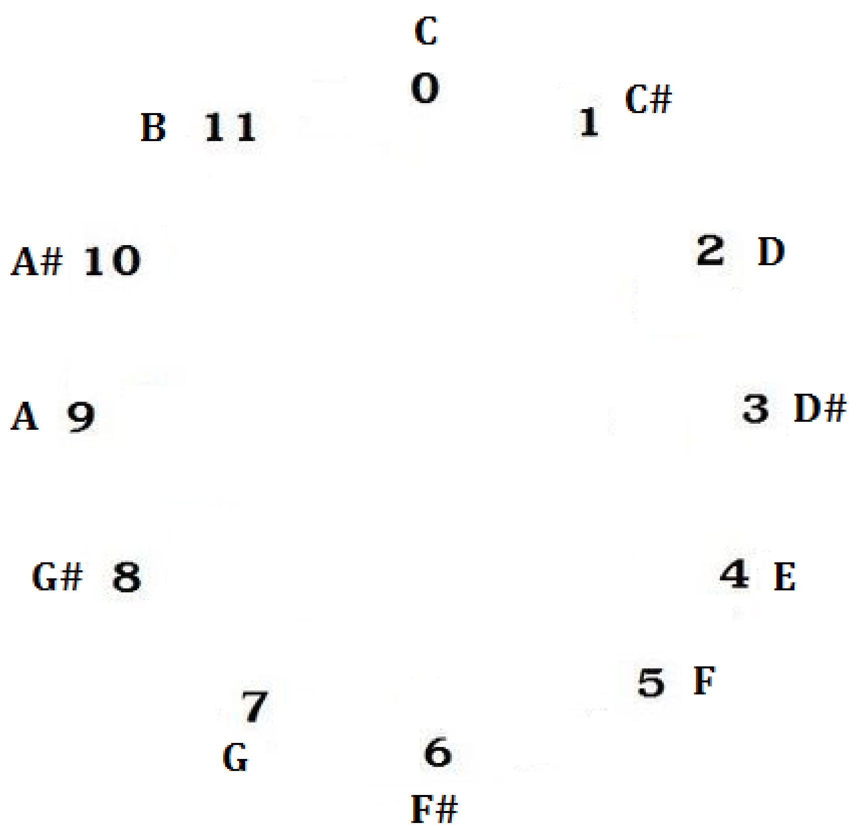


Figura 4.2: Disposição notas/inteiros

Observação 4.1. *Esta notação poderia ser escrita de outra forma, atribuindo-se o número zero, arbitrariamente, a uma nota qualquer e a partir daí associar as outras.*

Os números inteiros são tradicionalmente utilizados para representar certas relações musicais. Nem toda a operação que faz sentido numérico faz sentido musical. Não faz muito sentido musical dividir 7 por 11. No entanto somar ou subtrair valores inteiros fazem sentido musical. Por exemplo, ao subtrair 7 de 11, estamos computando a distância entre Sol e Si, ou seja, calculando o intervalo entre estas notas (Straus, 2013).

4.2 O grupo de classes de intervalos

No capítulo 2, definimos os intervalos e vimos que existem distinções entre intervalos que são congruentes, ou seja que possuem a mesma distância em semitons, na música tonal. Ou seja, neste sistema, uma terça maior e uma quarta diminuta têm uma distinção de acordo com a sua função tonal. (Straus, 2013). No entanto, se considerarmos apenas o tamanho dos intervalos teremos que, numericamente, o conjunto dos intervalos cromáticos pode ser denotado por:

$$I = \{d \in \mathbb{Z}; d = x - a, \forall x, a \in \mathbb{Z}\}$$

Um intervalo entre Ré(D) e Fá(F), por exemplo, contém 3 semitons. Se denotarmos, como na figura 4.2, o Ré como 2 e o Fá como 5, temos que, d = 5 - 2 = 3 semitons. Que corresponde a uma 3ª menor ou 2ª aumentada, conforme 2.6.5. O tipo de intervalo a ser adotado depende da sua função tonal. Por ora, nos interessa o intervalo determinado pelo número de semitons.

E no caso de um intervalo conter mais de doze semitons? Esse tipo de intervalo é composto, como vimos no item 2.6.4. E a diferença entre um intervalo composto e o seu respectivo simples é de sete notas, ou seja, a distância entre eles é de 12 semitons. Assim, temos que todos os intervalos podem ser agrupados em classes. Onde cada classe corresponde a um intervalo simples e seus correspondentes compostos. Há, portanto, 12 classes de intervalos, já que numa oitava temos 12 semitons. Então podemos estabelecer uma bijeção entre o conjunto I e o conjunto $\mathbb{Z}_{12}$. E assim, no sistema reduzido de restos, $0 \leq d \leq 11$.

Vejamos alguns nomes de intervalos tradicionais, já vistos em 2.6.5, de acordo com o número de semitons:

Tabela 4.1: Nomes tradicionais de alguns intervalos e número de semitons

Nº de semitons	Intervalos correspondentes
1	2ª menor , 1ª aumentada
2	2ª maior , 3ª diminuta
3	3ª menor , 2ª aumentada
4	3ª maior , 4ª diminuta
5	4ª justa , 3ªaumentada
6	5ª diminuta, 4ª aumentada
7	5ª justa , 6ª diminuta
8	6ª menor , 5ª aumentada
9	6ª maior , 7ª diminuta
10	7ª menor , 6ª aumentada
11	7ª maior , 8ª diminuta
12	8ª justa , 7ª aumentada

Podemos abreviar:

Tabela 4.2: Abreviatura dos intervalos

Maior	M
Menor	m
Justo	J
Aumentado	aum
Diminuto	dim

Observação 4.2. *O intervalo de 1ª aumentada é teórico. Na prática, o menor intervalo considerado é o de 2ª menor. No caso de um intervalo entre Dó e Dó♯, por exemplo, é um intervalo cromático. Mas teoricamente, pode ser classificado como um intervalo de 1ª aumentada já que tem um semitom a mais que o intervalo de 1ª justa.*

Como ($\mathbb{Z}_{12}$, +) é um grupo cíclico (exemplo 3.12), então os geradores de I são os elementos $\overline{1}, \overline{5}, \overline{7}$ e $\overline{11}$. Considerando a nomenclatura mais utilizada, correspondem aos intervalos: $\overline{1} \rightarrow$ 2ª menor; $\overline{5} \rightarrow$ 4ª justa; $\overline{7} \rightarrow$ 5ª justa e $\overline{11} \rightarrow$ 7ª maior.

Com a ajuda da tabela 3.1, podemos observar que são opostos os elementos $\overline{1}$ e $\overline{11}$, isto é, $\overline{1} + \overline{11} = \overline{12} = \overline{0}$. Estes intervalos estão relacionados com formação das escalas cromáticas ascendentes e descendentes (capítulo 2, subsecçao 2.9). E os elementos $\overline{7}$ e $\overline{5}$, ou seja, $\overline{5} + \overline{7} = \overline{12} = \overline{0}$. Que geram respectivamente o ciclo das quintas e a sua inversão: o ciclo das quartas (figura 2.48), que como vimos no capítulo 2, são a base para a formação das escalas diatônicas.

As tabelas 4.3 a 4.6 associam cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ gerados por $\overline{1}, \overline{11}, \overline{5}$ e $\overline{7}$, respectivamente, a um representante de cada classe de intervalos. Para tanto, consideramos a tabela 3.2 e as subseções 2.3.4 e 2.3.6 (resumidas na tabela 4.1).

Tabela 4.3: Escala cromática ascendente a partir de Dó, gerada pelo intervalo de 2ª menor($\overline{1}$)

$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$	$\overline{10}$	$\overline{11}$
C	D♭	D	E♭	E	F	G♭	G	A♭	A	B♭	B
Prima	2ªm	2ªM	3ªm	3ªM	4ªJ	5ªdim	5ªJ	6ªm	6ªM	7ªm	7ªM

Tabela 4.4: Escala cromática descendente a partir de Dó, gerada pelo intervalo de 7ª maior($\overline{11}$)

$\overline{0}$	$\overline{11}$	$\overline{10}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$
C	B	B♭	A	A♭	G	G♭	F	E	E♭	D	D♭
Prima	7ªM	7ªm	6ªM	6ªm	5ªJ	5ªdim	4ªJ	3ªM	3ªm	2ªM	2ªm

Tabela 4.5: Ciclo das quintas, gerado pelo intervalo de 5ª justa($\overline{7}$)

$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$	$\overline{6}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{5}$
C	G	D	A	E	B	$F_\sharp$	$C_\sharp$	$G_\sharp$	$D_\sharp$	$A_\sharp$	F
prima	5ªJ	2ªM	6ªM	3ªM	7ªM	4ªaum	1ªaum	5ªaum	2ª aum	6ªaum	4ªJ

Tabela 4.6: Ciclo das quartas, gerado pelo intervalo de 4ª justa($\overline{5}$)

$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{10}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{6}$	$\overline{11}$	$\overline{4}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$
C	F	$B_\flat$	$E_\flat$	$A_\flat$	$D_\flat$	$G_\flat$	B	E	A	D	G
prima	4ªJ	7ªm	3ªm	6ªm	2ªm	5ªdim	7ªM	3ªM	6ªM	2ªM	5ªJ

Em suma, o conjunto de classes de intervalos cromáticos é cíclico e isomorfo a $\mathbb{Z}_{12}$, com estrutura de um grupo cuja operação é a composição de intervalos. "Qualquer intervalo cromático modular tem uma equivalência única a um representante de classe n semitons, onde $0 \leq n \leq 11$."(WRIGHT, 2009, p.12)

Exemplo 4.1. *Considere a composição de uma terça menor e uma quarta justa. Estes intervalos são representados em semitons como 3 e 5, respectivamente. No entanto, a oitava pode ser representada por 0 semitom. A composição dos três intervalos produz o intervalo cromático modular representado por 8 semitons, que é uma sexta menor. Ou seja,* $\overline{3} + \overline{5} = \overline{8}$ *em* $\mathbb{Z}_{12}$.

Exemplo 4.2. Relação entre a 5ª Justa, a 6ª Maior e a 6ª Menor.

$5^aJ + 2^aM \Rightarrow \overline{7} + \overline{2} = \overline{9} \Leftrightarrow 6^a\ M.$

$5^aJ + 2^a\ m \Rightarrow \overline{7} + \overline{1} = \overline{8} \Leftrightarrow 6^a\ m.$

O contexto estabelecido nesta seção é apenas de ordem algébrica. Não estamos considerando os efeitos de sonoridade, com relação aos aspectos do sistema tonal, conforme citado no início desta seção e subseção 2.5. Ou seja, o objetivo aqui foi estabelecer uma bijeção entre o conjunto de classes de intervalos e o grupo $\mathbb{Z}_{12}$, considerando apenas o número de semitons e não a sua função tonal.

Neste trabalho, não vamos aprofundar o estudo de outras aplicações algébricas sobre os intervalos, já que damos ênfase à melodia. Os intervalos, como já mencionamos, são objetos da Harmonia. No sistema tonal, os acordes, que são notas emitidas simultaneamente, obedecem a determinadas leis de composição, que respeitam a hierarquia entre os sons, podendo ser consonantes ou dissonantes. Já no sistema atonal e pós tonal, por exemplo, essas distinções são irrelevantes.

O estudo da Harmonia pode ser consultado em Kotska (2015) e da Álgebra aplicada à Harmonia em Benson(2008).

4.3 A transposição de tonalidade como uma transformação em $\mathbb{Z}_{12}$

Já vimos que o conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ com a operação de adição tem uma estrutura de grupo. E que há uma bijeção entre este e o conjunto de classes de notas. Assim, o conjunto de classes de notas é um grupo com a operação de adição. Conforme definição 3.13, sendo G um grupo aditivo, translação (φ_a) é uma aplicação $G \to G$, onde $\varphi_a = a + x$, qualquer que sejam a, $x \in G$. Seja G o grupo das classes de notas. Pelo Teorema de Cayley, proposição 3.8, a aplicação que leva um elemento de G a uma translação é um isomorfismo de grupos. Ou seja, o grupo das classes de notas é isomorfo a um subgrupo de permutações. Este subgrupo é o S_{12}, ou seja, a permutação dos elementos $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.

Assim, a transposição musical obedece a seguinte lei de formação:

$$T_a : Z_{12} \to Z_{12}, \text{ tal que } T_a(x) = x + a \text{ mod } 12 \text{ (Townsend, 2011).}$$

Vamos adotar a conversão adotada conforme figura 4.2. e tabela 4.7. A fim de facilitar a notação omitiremos a barra para os elementos de $\mathbb{Z}_{12}$.

Tabela 4.7: Conversão representante de cada classe de notas para $\mathbb{Z}_{12}$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C	C♯ D♭	D	D♯ E♭	E	F	F♯ G♭	G	G♯ A♭	A	A♯ B♭	B

Exemplo 4.3. *Vamos considerar o seguinte trecho da canção Asa Branca, de Luiz Gonzaga, na tonalidade de Dó Maior:*

$$(C, D, E, G, G, E, F, F, C, D, E, G, G, F, E) \Longleftrightarrow (0, 2, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 0, 2, 4, 7, 7, 5, 4)$$

Tomando a = *7, temos que* $T_7(x) = x + 7$ *mod 12. Com base na tabela 3.1, segue que:*

$$(0, 2, 4, 7, 7, 4, 5, 5, 0, 2, 4, 7, 7, 5, 4 \Longrightarrow (7, 9, 11, 2, 2, 11, 0, 0, 7, 9, 11, 2, 2, 0, 11)$$
$$\Longleftrightarrow (G, A, B, D, D, B, C, C, G, A, B, D, D, C, B).$$

Daí obtemos a tonalidade Sol Maior, correspondente ao intervalo de quinta justa.

Um músico hábil realiza uma transposição com facilidade, dado seu conhecimento sobre intervalos ser aprofundado. A escrita na pauta para o primeiro trecho, em Dó maior, é exibida na figura 4.3.

Figura 4.3: Trecho de Asa Branca em Dó Maior

A escrita transposta para Sol Maior corresponde à figura 4.4.

Figura 4.4: Trecho de Asa Branca em Sol Maior

Exemplo 4.4. *Vejamos no modo menor, com o trecho da melodia de* Terezinha de Jesus *(folclore brasileiro). Vide figura 4.5.Vamos transpor de Mi menor para Si menor. Para tanto, aplicaremos T_7, já que o intervalo de um para o outro é uma quinta justa, correspondente a 7 semitons. Temos que:*

$$(G, B, E, E, G, B, E, B, E, B, B, C, B, A, G\sharp, A) \Longleftrightarrow (7, 11, 4, 4, 7, 11, 4, 11, 11, 0, 11, 9, 8, 9)$$

Figura 4.5: Trecho de Terezinha de Jesus em Mi menor

Transpondo para Si menor, obtemos:

$$(7, 11, 4, 4, 7, 11, 4, 11, 11, 0, 11, 9, 8, 9) \Longrightarrow (2, 6, 11, 11, 2, 6, 11, 6, 7, 6, 4, 3, 4) \Longleftrightarrow$$
$$(D, F\sharp, B, B, D, F, B, F\sharp, F\sharp, G, F, E, D\sharp, E.$$

A escrita na pauta corresponde à figura 4.6.

Figura 4.6: Trecho de Terezinha de Jesus em Si menor

Observação 4.3. *Neste último exemplo, podemos observar que utilizamos o Ré♯ e não Mi♭. Isso se justifica devido ao fato de que associamos cada nota transposta a um intervalo de quinta justa com relação à nota original. No caso de utilizarmos o Mi♭ teríamos uma sexta menor. Como estamos apenas considerando a melodia, estas notas são enarmônicas e portanto soam igual. No entanto, para efeitos harmônicos, no sistema tonal, esta distinção é importante, já que a formação dos acordes tomam por base a qualificação dos intervalos.*

Assim, a transposição de uma melodia é uma aplicação que associa cada nota musical a outra nota, obedecendo a lei de formação que consiste numa translação dos elementos do conjunto de notas, ou seja, a adição do mesmo intervalo a todas as notas de uma melodia. No caso da modulação, a transposição ocorre no decorrer da obra musical. Neste trabalho, consideramos a transposição em toda a melodia. Daí apresentarmos apenas melodias simples.

CAPÍTULO 5

PROPOSTA DE MINICURSO: AJUSTANDO O TOM COM A MATEMÁTICA

Conteúdos de Matemática quando abordados com aplicações, pela nossa própria experiência docente, em geral são convidativos para os estudantes. Estes se mostram motivados, com interesse em participar das atividades. A Música é atrativa e presente no cotidiano de todas as pessoas, de todas as idades, em todas as culturas.

Alguns conteúdos de Matemática neste minicurso, em geral, não são trabalhados na Educação Básica. No entanto, os que não constam no currículo deste nível de ensino, serão abordados de forma intuitiva, sem que haja, no entanto, perda de base teórica. O público-alvo preferencial é de alunos que tenham a disciplina Música, ou Artes com eixo em Música, na escola. O recomendável é que seja desenvolvido a partir do 7º ano.

5.1 Objetivos

O projeto contribui para o despertar da visão de que a Matemática facilita a compreensão dos fenômenos e padrões musicais. Possibilita reconhecer que, ao longo da História, foi de grande importância para a solução de problemas com a afinação de instrumentos e vozes. Estimula o interesse na aquisição de conceitos matemáticos básicos utilizados nas mais diversas áreas e pré-requisitos para a aprendizagem de conteúdos matemáticos mais avançados. Além disso, temos os objetivos que já foram citados na introdução deste trabalho:

- Estimular o espírito investigativo em Matemática a partir de aplicações.

- Contribuir para o desenvolvimento da visão de que a Matemática é uma ferramenta indispensável no estudo e compreensão de padrões existentes nos objetos de estudo das mais diversas áreas do conhecimento.
- Compreender o padrão criado para fins de afinação, na música ocidental, através de um modelo matemático adequado.
- Introduzir noções de aritmética modular e grupos cíclicos na educação básica em articulação com as regras de transposição musical, de forma intuitiva e lúdica.

5.2 Conteúdos

Os conteúdos serão abordados de forma integrada. São os seguintes:

- Congruências: aritmética dos restos; construção das tábuas de adição e multiplicação de $\mathbb{Z}_{12}$.
- Permutações dos elementos de $\mathbb{Z}_{12}$.
- A Música e seus elementos.
- Propriedades do som.
- As notas musicais: nomenclatura e notação na pauta.
- As figuras de notas e os compassos.
- Noções de intervalo: tom e semitom; principais intervalos (ciclo das quintas)
- Noções de escala: escalas diatônica e cromática.
- Tonalidade.
- Transposição aplicando a translação aos elementos de $\mathbb{Z}_{12}$.
- Histórico da evolução das escalas.

5.3 Desenvolvimento

As oficinas serão desenvolvidas em sete momentos com duração de 100 min cada.

5.3.1 1º momento

Inciaremos com a apresentação de um pequeno trecho da música Asa Branca em duas tonalidades diferentes, tocadas pelo mesmo instrumento.

Os alunos serão questionados se conseguem perceber alguma diferença e qual. Caso percebam que houve uma diferença, segue-se o passo seguinte. Caso contrário, serão apresentadas mais algumas transposições e alunos de vozes diferentes serão convidados a canatarolar, acompanhando, até que percebam a alteração na altura ou alguém poderá sentir que forçou a voz em alguma tonalidade. Identificando, assim, se há alguma dificuldade de execução vocal.

Logo depois, a proposta do curso será apresentada.

5.3.2 2º momento

Assistiremos ao trecho do vídeo *Donald no país da Matemágica* , disponível no canal *Youtube*.

Conversaremos sobre o vídeo.

Em seguida, serão apresentados os elementos do som e suas propriedades; os elementos da Música e as notas musicais (nomenclatura); pauta e clave de sol.

Após mostrar aos alunos as notas da escala natural num teclado virtual, teremos a atividade de reconhecimento das notas no teclado.

5.3.3 3º momento

Executaremos vocalmente algumas escalas ascendentes e descendentes. Serão executadas as de Dó Maior, Sol Maior e Ré Maior.

Conversaremos sobre a necessidade do uso das escalas musicais. Assistiremos ao vídeo *A Matemática da Música* (Programa 8) da Série *Arte e Matemática* - TV Cultura faixa 2:00 - 19:30 (aproximadamente).

Em seguida, será feita a introdução de noções de intervalo: tom e semitom. Juntos, identificaremos estes intervalos no teclado. Logo depois, serão apresentados os sinais de alteração.

Serão relacionadas as notas da escala cromática com um conjunto que possui 12 elementos e a estrutura cíclica do conjunto de notas (classes de equivalência).

Finalizando essa sessão teremos o reconhecimento de notas no teclado, associando cada nota a um elemento de $\mathbb{Z}_{12}$ (numerar de 0 a 11, a partir do dó, vide tabela 4.7).

5.3.4 4º momento

Assistiremos ao vídeo com um trecho do filme *Carruagens de Fogo*, com a principal música da trilha sonora, homônima ao filme, de autoria de *Vangelis*. Disponível no canal *Youtube*.

Através da nomenclatura das notas com cifras, será porposto aos alunos que toquem num teclado virtual um trecho da canção *Carruagens de Fogo* de Vangelis, na tonalidade Dó Maior. (Partitura e cifra no apêndice B).

Os alunos serão estimulados a terem atenção com a métrica.

Serão apresentados as figuras de notas e os compassos.

Será mostrada a partitura da música.

Identificaremos cada nota com os números fixados de 0 a 11, de acordo com a tabela 4.7.

5.3.5 5º momento

Retomaremos a execução da música do último momento.

Será apresentado o áudio com a música numa outra tonalidade e os alunos serão questionados se perceberam a diferença.

A definição de transposição de tonalidade será apresentada.

Será mostrado que podemos fazer a transposição utilizando a Matemática.

O conjunto $\mathbb{Z}_{12}$ e as suas operações serão apresentados.

Construiremos as tábuas de operação em $\mathbb{Z}_{12}$.

5.3.6 6º momento

Retomaremos a tábua de multiplicação de $\mathbb{Z}_{12}$, onde destacaremos as linhas onde aparecem como resultado um representante de cada elemento de $\mathbb{Z}_{12}$. Observaremos que os elementos $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{7}$ e $\overline{11}$ geram todos os elementos de $\mathbb{Z}_{12}$.

Observaremos pela tábua de adição que os elementos $\overline{1}$ e $\overline{11}$ são inversos (ou simétricos) com relação à adição. Constataremos pela tábua de multiplicação que os resultados da multiplicação por $\overline{1}$ gera a escala cromática ascendente e os resultados da multiplicação por $\overline{11}$ geram a escala cromática descendente.

Também através da observação da tábua de adição verificaremos que os elementos $\overline{7}$ e $\overline{5}$ são inversos (ou simétricos) com relação à adição. E que seus resultados correspondem a geração do ciclo das quintas ascendente e o ciclo das quintas descendente (ou das quartas ascendente), respectivamente.

Apresentaremos o ciclo das quintas e a sua relação com a construção das escalas.

Analisaremos as relações intervalares (em tons e semitons) na escala de Dó maior. Generalizaremos para todas as escalas.

A turma será convidada a tocar num teclado virtual a canção *SMILE* em Fá Maior (partitura no Apêndice B), pela pauta e para o próximo encontro os alunos deverão trazer a associação do primeiro trecho da canção aos números de 0 a 11, conforme a tabela 4.7.

5.3.7 7º momento

Faremos a transposição do primeiro trecho das músicas *SMILE* e *Carruagens de Fogo* para outras tonalidades, apenas utilizando as translações em $\mathbb{Z}_{12}$. Por exemplo, T(7), T(5) e T(3). Verificaremos pela tabela 4.1. quais os intervalos estão associados a estas translações.

Após realizarmos a conversão, os alunos tocarão num teclado virtual e farão a comparação das tonalidades. Verificarão se a melodia soa similar.

Observação 5.1. *Há programas de edição de composições musicais como o score editor (online e gratuito) disponível em: http://www.noteflight.com/demo, onde se pode escrever na pauta a melodia original e o próprio programa efetua a transposição, de acordo com o intervalo indicado. Pode ser usado com alunos iniciantes como um gabarito. Ou seja, primeiro o aluno faz a leitura na pauta, utilizando os números* *de 0 a 11 para nomear as notas. Em seguida, escolhe o intervalo e realiza manualmente a transposição. Verifica quais as notas correspondentes e escreve na pauta. Logo após, edita a música original na pauta no programa e solicita a transposição, conferindo se acertou.*

5.4 Avaliação

Cada aluno escreverá um pequeno texto descrevendo a trajetória no minicurso, o que aprendeu, o que mais gostou, críticas e sugestões. Uma possilidade também seria realizar um jogo de perguntas e respostas sobre os conteúdos trabalhados, com o uso de slides.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

As relações entre a Álgebra e a Música aqui abordados foram apenas uma gota num universo vasto. A transposição de tonalidade aqui, se restringiu à melodia. Sabemos, no entanto, que a função tonal está fortememnte relacionada à Harmonia: a estrutura dos acordes, a inversão dos intervalos, dentre outros elementos. Tem-se muito a pesquisar, a estudar, a questionar.

A Matemática está presente onde houver padrões. Quem se dispõe a estudar e ensinar Matemática precisa adquirir a sensiblidade de perceber os padrões existentes nas mais variadas formas, fenômenos e elementos quaisquer, sejam os presentes na natureza, sejam os criados pelo homem. E desenvolver a capacidade de modelar matematicamente esses padrões.

A Música, assim como outras artes, tem uma relação histórica com a Matemática. E, à medida que esta última evolui, abre horizontes para a compreensão e desenvolvimento da primeira. Estudar as aplicações da Matemática às artes é prazeroso e instigante. Na Música, em particular, é enriquecedor.

Este trabalho pode contribuir para uma valorização ainda maior da interdisciplinaridade entre a Matemática e outros campos do saber. Aproveitar esta tendência na educação básica, aproxima o estudante desta disciplina, quebrando o paradigma da dificuldade de aprendê-la por ser abstrata e distante do mundo real.

Obviamente, que todo aprendizado exige dedicação, interesse e concentração. Estudar Música tem mais este elo em comum com a Matemática. Ao se dedicar ao estudo de um instrumento ou canto, por exemplo, é preciso disciplina. Há momentos tensos, com obstáculos. Há momentos de conquistas, que dão satisfação e "sabor"de vitória.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ABDOUNOR, Oscar João. **Matemática e Música: pensamento analógico na construção de significados**. São Paulo: Escrituras, Editora, 1999. (Série Ensaios Transversais).

[2] ALVES, Luciano. **Teoria MusicaL: lições essenciais**. São Paulo: Irmãos Vitale, 2005.

[3] BENSON, Dave. **Music: A Mathematical Offering**. Department of Mathematics, Meston Building, University of Aberdeen, Scotland, UK: 2008. Disponível em $http://www.maths.abdn.ac.uk/\sim bensondj/$. Acesso em 15/01/2016.

[4] COUTINHO, Severino Collier. **Números inteiros e criptografia RSA**. Rio de Janeiro: IMPA/SBM, 1997.

[5] DOMINGUES, Hygino H; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. 4. ed. São Paulo, SP: Atual. 2003.

[6] GARCIA, Analdo; LEQUAIN Yves.**Elementos de Álgebra**. Ed. IMPA, 2003.

[7] GASPAR, Alberto. **Física: Volume único**. 1 ed. Sãao Paulo: Ed. Ática, 2005.

[8] GROUT, J. Donald; PALISCA, Claude V. **História da Música Ocidental**. Lisboa, Portugal: Gradiva- Publicações, Ltda. 1994.

[9] KANTOR, Carlos. A. *et al*. **Física, 2º ano: ensino médio (Coleção Quanta Física)**. 1.ed. São Paulo: Editora PD, 2010.

[10] KOSTKA, Stefan e PAYNE, Dorothy. **Harmonia Tonal**. Traduzido a partir da Sexta Edição, de 2008 por Hugo L. Ribeiro, Jamary Oliveira e Ricardo Bordini. Última atualização: 14 Abril 2015. Disponível em http:$//hugoribeiro.com.br/biblioteca-digital/kostka_Payne-Harmonia_Tonal.pdf$. Acesso em 10.02.2016.

[11] MED, Bohumil.**Teoria da Música**. 4 ed. Brasília, DF: Musimed, 1996.

[12] MUNIZ NETO, Antonio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar: teoria dos números**. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[13] SANTANA, Beatria Pires. Os padrões que ouvimos: uma introdução à interface Música-Linguagem. Monografia. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2010.

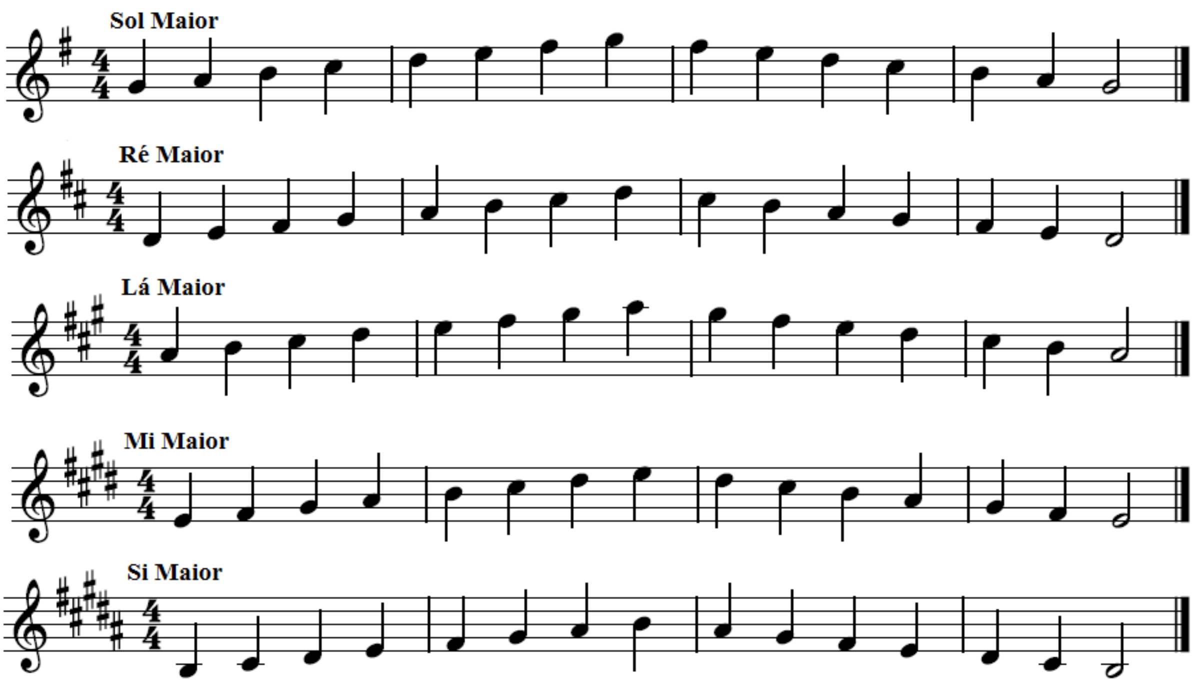
[14] STRAUS, Joseph N. **Introdução à teoria pós tonal**. Salvador: EDUFBA, 2013.

[15] TOWNSEND, Adam. **Maths and Music Theory**. University College London Undergraduate Maths Coloquium, 2011.

[16] WRIGHT, David. **Mathematics and Music**. St Louis: Departamento de Matemática da Washington University, 2009.

APÊNDICE A
RELAÇÃO DAS ESCALAS MAIORES E MENORES

A.1 Escalas maiores construídas com os sustenidos



A.2 Escalas maiores construídas com bemóis

A.3 Escalas relativas menores

APÊNDICE B

PARTITURAS CITADAS NO CAPÍTULO 5

Carruagens de Fogo

Tema das Olimpíadas

Facilitado

Vangelis

Outros símbolos musicais

- ***Ritornello*** é o sinal parecido com um colchete precedido de dois pontos, com a terceira linha entre eles, presente na escrita supra citada. Tem a finalidade de se evitar a repetição de trechos musicais idênticos. A execução deve ser repetida do trecho onde aparece o último colchete ao imediatamente anterior.

- Casa de números 1 e 2: executa-se a música do início ao fim do *ritornello* (incluindo o trecho da casa 1). Volta-se ao início do *ritornello* anterior, pula a casa 1 e executa-se da casa 2 em diante.

- Na escrita acima também aparece um sinal ligando duas notas de mesmo nome e altura, que é a nota *sol* nos segundo e terceiro compassos. A primeira é tocada e seu valor prolongado pela segunda. Ou seja, a segunda não é tocada, mas o seu tempo de duração é mantido. Este sinal é chamdo **ligadura**.

SMILE

Facilitado

Charles Chaplin

SMILE

Facilitado

Charles Chaplin