UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

RACIOCÍNIO LÓGICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: POSSIBILIDADES NA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

FLAVIANA PAULA MEDEIROS E OLIVEIRA

Cruz das Almas - Bahia
2016

RACIOCÍNIO LÓGICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: POSSIBILIDADES NA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

FLAVIANA PAULA MEDEIROS E OLIVEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. MSc. Gilberto da Silva Pina

Cruz das Almas - Bahia
2016

FLAVIANA PAULA MEDEIROS E OLIVEIRA

RACIOCÍNIO LÓGICO NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: POSSIBILIDADES NA EDUCAÇÃO PROFISSIONAL

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pela Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Cruz das Almas, Bahia, 28 de julho de 2016:

Comissão Examinadora

Gilberto da Silva Pina

Profº Me. Gilberto da Silva Pina – CETEC/UFRB
Orientador (Presidente)

Adson Mota Rocha.

Profº Me. Adson Mota Rocha – CETEC/UFRB

Profª Me. Yuri Tavares dos Passos – CETEC/UFRB

"A missão do professor não é dar respostas prontas.
As respostas estão nos livros, estão na internet.
A missão dos professores é provocar a inteligência,
é provocar o espanto, a curiosidade"
Rubem Alves

AGRADECIMENTOS

Este trabalho é dedicado ao meu avô Jonas, que partiu há poucos dias, vítima de Alzheimer, doença que tirou suas memórias, seu sorriso, mas que nos fez refletir sobre como os nossos hábitos podem afetar nosso cérebro. Mais que a doença de um indivíduo, esta é uma doença de uma sociedade, das escolhas e das possibilidades dadas a um povo. O trabalho desenvolvido com meus alunos sempre visa a exercitar seus cérebros para afastar ao máximo a rotina, uma tentativa de retardar o surgimento de demências: ah, se eu pudesse ter feito isso antes, pelo meu avô...

Não tenho palavras para agradecer ao meu filho João, que desde os 3 anos teve que ficar sem a mãe às sextas e sábados, e ao Daniel, que sempre assumiu os dois papéis durante minhas faltas. Espero que com o tempo, eu possa recompensá-los por todo esse apoio, e que essa conquista traga bons frutos para nossa vida juntos.

Agradeço à minha família mineira, que precisou se acostumar com minhas ausências, mesmo nas poucas vezes em que eu estive presente fisicamente (sempre havia listas de exercícios, provas, exames de qualificação): Mãe, Pai, Gui, Di, Lalá, Bacana, Sofia e Samuel, obrigada por serem meu chão, meu conforto, meu refúgio.

Sou grata também à minha família baiana, que me deu todo o suporte durante esse anos, cuidando do João, me levando até a rodoviária de madrugada, entendendo meu cansaço e minhas aflições: Renato, Eulina e Quell, muito obrigada.

Minha gratidão aos colegas de curso, que sempre foram companheiros de estudos e discussões, que não raramente se estendiam pelas madrugadas e, mesmo depois, continuavam pelo *WhatsApp*: Adenise, Ângelo, Catiane, Carlos, Denise, Eduardo, Gilberto, Joelma, Patrícia, Rogério, Ronaldo, Tânia e Uéric, nossa história ainda terá muitos capítulos. Aos colegas de outros polos, Flávio, Daniel, Cristiano e Eduardo, obrigada pela parceria à distância e torcida.

Agradeço aos amigos do Senac, que sempre me apoiaram e ajudaram em todos os sentidos, em especial à minha gerente Kátia Lucena, que possibilitou a realização dessa formação, mesmo quando apareceram empecilhos. Àqueles que estavam lidando comigo diariamente, Dôra, Régia, Luca e Ernani, meu muito obrigada por terem suportado minha loucura durante todo esse tempo.

Aos professores Eleazar, Érikson, Juarez, Mariana, Jaqueline e Adson, que nos acompanharam nessa jornada, minhas reverências por todo o conhecimento compartilhado, apoio e ajuda nos momentos mais difíceis. Ao meu orientador Prof.Gilberto, que tanto me confortou e norteou nesta etapa crucial do curso, nunca terei como agradecer e levarei pra toda a vida seus ensinamentos: muito obrigada!

Aos meus amigos, primos e tios, agradeço pela torcida, saber que tenho vocês em minha vida é muito importante.

Aos que já partiram, mas continuam cuidando de nós, agradeço pela luz e pelas benções.

RESUMO

Este trabalho é um compilado de atividades, problemas, jogos e questões utilizadas ao longo dos anos de trabalho com Educação Profissional. Como o público desta modalidade de ensino necessita de uma abordagem diferenciada, optamos por trabalhar os conteúdos matemáticos de forma desafiadora, instigando a criatividade e capacidade de dedução dos alunos. Dessa forma, trazemos no texto uma fundamentação sobre a trajetória da Educação Profissional no Brasil, seguida de uma base teórica sobre Raciocínio Lógico e apresentamos um portfólio baseado em resolução de problemas, com diversas questões que podem ser utilizadas em sala de aula.

Palavras-chave: Educação Profissional, Raciocínio Lógico, Resolução de Problemas.

ABSTRACT

This paper is a compiled of activities, problems, games and questions used throughout the years in the work with Professional Education. Since the audience for this type of learning modality requires a different approach, we decided to work the mathematical contents in a challenging way, encouraging students deductive reasoning and creativity. Thus, we brought to the text a theoretical foundation on the of Professional Education trajectory in Brazil, followed by a theoretical basis on Logical Reasoning. It was also presented a portfolio based on problem solving, with a number of questions that can be used in the classroom.

Keywords: Professional Education, Logical Reasoning, Problem Solving.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

O tema dessa dissertação é parte significativa do meu fazer pedagógico e do meu estar no mundo. Sou licenciada em Matemática e trabalho na área de educação há mais de 15 anos. Neste período, trabalhei com o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, mas me encantei pela Educação Profissional, à qual me dedico há quase 13 anos. Dentro da educação para o trabalho, pude atuar em cursos de aperfeiçoamento, de capacitação, extensão universitária e também com formação de professores, o que me trouxe um olhar mais abrangente sobre os processos de formação e os roteiros formativos dos sujeitos.

Durante essa etapa de aprendizagem, me deparei inúmeras vezes com estudantes que detestavam Matemática e se viam acuados diante da necessidade de estudá-la novamente, agora já adultos, se preparando ou se aperfeiçoando para o mundo do trabalho. Uma das soluções encontradas foi trabalhar conceitos e conhecimentos matemáticos de forma lúdica, com uso de jogos, problemas e desafios, que necessitam de base, cálculos e estratégias matemáticas, sem exigir a formalidade e o rigor, comuns na educação tradicional.

Dessa forma, ao longo desses anos venho estudando, pesquisando e recolhendo atividades, problemas e questões de raciocínio lógico que utilizam conhecimentos matemáticos em suas resoluções, formando um portfólio amplo que é fonte para elaboração de aulas e de materiais didáticos nos mais variados cursos em que trabalho, como formação de Garçom, Cozinheiro, Chefe de Cozinha, Auxiliar de Cozinha, Técnico em Enfermagem, Desenvolvedor de Games, Tutoria Online etc.

A partir destes estudos, surgiu a pesquisa sobre Raciocínio Lógico na resolução de problemas: possibilidades na Educação Profissional, cujo objetivo principal é apresentar atividades criativas, que integram o portfólio criado ao longo do trabalho no Senac e podem ser utilizadas por outros professores em suas práticas docentes com crianças, jovens ou adultos, no intuito de exercitar seus cérebros, estimular o desenvolvimento da inteligência lógico-matemática, diminuindo a distância entre a Matemática escolar e a Matemática do mundo do trabalho, focando na resolução de problemas e desafios lógicos.

Pensar criativamente, resolver problemas práticos e encontrar soluções para situações corriqueiras são desafios encontrados por grande parte da população. Estas dificuldades estão muito relacionadas à leitura, à interpretação de textos e ao raciocínio lógico. Cabe aos professores, condutores dos processos de formação educacional, adotarem práticas que proporcionem aos alunos a "busca de uma compreensão maior e melhor do mundo em que vivem, desenvolvendo o espírito criativo e o raciocínio lógico".(DANTE, 2002).

Durante a pesquisa, que consiste na análise, seleção, organização e apresentação de exemplos de atividades e questões, seguidas de suas resoluções e indicações de abordagem, são também apresentadas fundamentaçẽs teóricas de matemáticos e educadores como Polya (1977), Dante (2002), Alencar (1976), Youssef (2004), dentre outros.

Incentivar os alunos a resolverem questões que exigem pensamentos complexos fortalece suas capacidades cognitivas, estimula o raciocínio e transforma a dinâmica da sala de aula tornando-a muito mais atraente, ainda mais num mundo conectado e integrado como o atual, em que as atividades rotineiras não são bem aceitas pela maioria dos estudantes.

> [...] nos últimos anos, pode-se notar um interesse crescendo por parte de psicólogos e educadores pelo estudo da criatividade: sua conceituação, condições que a favorecem e barreiras que impedem o seu desenvolvimento. Parte desse interesse se deve ao mercado profissional que necessita mais do que nunca de indivíduos que sejam não apenas competentes do ponto de vista de domínio de conhecimentos, mas também inovadores, com condições de sugerir soluções para problemas novos, de criticar e reformular o conhecimento existente.(ALENCAR, 1976).

O texto está estruturado de forma que, no capítulo 1, o leitor conheça um pouco mais sobre a Educação Profissional. No segundo capítulo, apresentaremos os princípios do Raciocínio Lógico e, no terceiro capítulo, apresentaremos o portfólio de questões e atividades, frutos da pesquisa, bem como suas resoluções de forma detalhada.

As atividades propostas no capítulo 3, visam a despertar os alunos para o benefício de uma rotina estimulante ao cérebro, além de promover atividades que contribuam para que essa rotina seja produtiva intelectualmente. A maior parte das questões serão apresentadas em forma de problemas, e serão agrupadas por tipos e métodos de resolução. É importante salientar que as atividades aqui descritas não são de autoria própria, mas sim fruto de pesquisas em fontes que serão devidamente citadas.

CAPÍTULO 1

EDUCAÇÃO PROFISSIONAL NO BRASIL

De acordo com as Diretrizes Nacionais (2000), Educação Profissional no Brasil iniciou-se como uma medida para amparar os órfãos e os demais desvalidos da sorte, assumindo um caráter assistencialista que tem prevalecido ao longo dos anos. Foi Dom João VI que, em 1809, criou o Colégio das Fábricas, primeiro registro de Educação Profissional no Brasil. Em 1816, era criada a Escola de Belas Artes, com a proposta de articular o ensino das ciências e do desenho para os ofícios mecânicos.

A partir de 1840, foram criadas as Casas de Educando e Artífices em capitais de província, com o objetivo de atender prioritariamente aos menores abandonados, visando a diminuição da criminalidade e da vagabundagem. Posteriormente, foram criados os Asilos da Infância dos Meninos Desvalidos, direcionados aos menores abandonados, que aprendiam as primeiras letras e eram encaminhados às oficinas públicas e particulares, mediante fiscalização do Juizado de Órfãos. Outras iniciativas se destacaram no intuito de amparar as crianças abandonadas, como o Liceu de Artes e Ofícios, criado a partir da segunda metade do século XIX, oferecendo aos órfãos instrução teórica e prática e iniciando-os no ensino industrial.

A Educação Profissional continuou mantendo o mesmo traço de assistencialismo durante o início do século XX, porém, houve um início de esforço público para a organização da formação profissional, migrando o objetivo maior de atender aos menores abandonados para outro, o de preparar operários para o exercício profissional.

Conforme o mundo do trabalho sofria alterações, a Educação Profissional também mudava, para garantir que não faltasse mão de obra especializada para atender às demandas. Em 1906, a Educação Profissional passou a ser atribuição do Ministério da Agricultura, Indústria e Comércio. Neste período, destaca-se a criação das Escolas de Aprendizes Artífices, destinadas aos pobres e humildes e voltadas para o ensino industrial, o ensino agrícola, objetivando formar chefes de cultura, administradores e capatazes, e escolas-oficinas, destinadas à formação profissional de ferroviários.

Na década de 20, uma série de debates sobre a extensão do ensino profissional para todos, ricos e pobres, acontecia na Câmara dos Deputados. Neste período, foi criado o Ministério da Educação e Saúde Pública e do Trabalho, Indústria e Comércio.

Após contribuições e discussões de vários educadores brasileiros, imbuídos de ideias inovadoras em matéria de educação, foram criadas a Associação Brasileira de Educação (1924) e o Conselho Nacional de Educação (1931). Em 1932, foi lançado o Manifesto dos Pioneiros da Educação Nova, que de acordo com a Legislação Básica da Educação Profissional,

> preconizava a organização de uma escola democrática, que proporcionasse as mesmas oportunidades para todos e que, sobre a base de uma cultura geral comum, de forma flexível, possibilitasse especializações para as atividades de preferência intelectuais (humanidades e ciências) ou de preponderância manual e mecânica (cursos de caráter técnico).(2001,p.105)

A Constituição de 1937 tratou das escolas vocacionais e pré-vocacionais, como um dever do Estado para com as classes menos favorecidas (Art. 129). As indústrias e sindicatos deveriam colaborar com o Estado e criar, na esfera de sua especialidade, escolas de aprendizes, destinadas aos filhos de seus operários e associados, com o objetivo de suprir a demanda de mão de obra que a industrialização da década de 30 criou. A Educação Profissional, apesar das tentativas dos educadores, continuava voltada para os menos favorecidos econômica e socialmente, sendo menosprezada pela sociedade.

As Diretrizes Nacionais (2000) nos trazem que, em decorrência, a partir de 1942 são baixadas as conhecidas Leis Orgânicas da Educação Nacional, que tratavam do Ensino Secundário, Industrial, Comercial, Primário, Normal e Agrícola. Nelas, o objetivo do ensino secundário e normal era o de formar as elites condutoras do país e o objetivo do ensino profissional era o de oferecer formação adequada aos filhos dos operários, aos desvalidos da sorte e aos menos afortunados. Foram criadas então entidades especializadas como o Serviço Nacional de Aprendizagem Industrial (SENAI), em 1942, e o Serviço Nacional de Aprendizagem Comercial (SENAC), em 1946, além da transformação das Escolas de Aprendizes Artífices em Escolas Técnicas Federais. O dualismo continuava segregando cada vez mais os segmentos educacionais existentes: Profissional, para as classes baixas, Normal para as mulheres e Secundário, para os filhos das classes altas, que seguiriam profissões consideradas mais importantes.

Ainda em 1942, o Governo Vargas estabeleceu o conceito de menor aprendiz para os efeitos da legislação trabalhista e dispôs sobre a Organização da Rede Federal de Estabelecimentos de Ensino Industrial. Assim, o ensino profissional se consolidou no Brasil, apesar de continuar sendo considerado como educação de segunda categoria.

Apesar de tardiamente, na década de 50, os cursos profissionalizantes começaram a equivaler aos estudos acadêmicos, o que permitia ao estudante continuar a sua formação após a profissionalização, desde que fosse aprovado em exames prévios e demonstrasse ter o nível de conhecimentos necessários para seguir os estudos acadêmicos superiores.

A plena equivalência entre os cursos do mesmo nível, sem a necessidade dos exames e provas, aconteceu a partir da promulgação da Lei Federal n ° 4.024/61, a primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, que Anísio Teixeira chamou de meia vitória, mas vitória. A partir dessa lei, todos os cursos, tanto profissionalizantes como acadêmicos, seriam igualmente tratados para fins de continuidade de estudos em níveis subsequentes. Essa foi uma das primeiras medidas que transformariam o caráter assistencialista da educação profissional no Brasil.

Segundo a Legislação Básica,

> A Lei Federal n°5.692/71, que reformulou a Lei Federal n°4.024/61 no tocante ao então ensino de primeiro e segundo graus, também representa um capítulo marcante na história da Educação Profissional, ao generalizar a profissionalização no ensino médio, então denominado 2° Grau. (...) Entre seus efeitos, vale destacar: a introdução generalizada do ensino profissional no segundo grau se fez sem a preocupação de se preservar a carga horária destinada à formação de base; o desmantelamento, em grande parte, das redes públicas do ensino técnico então existentes, assim como a descaracterização das redes de ensino secundário e normal mantidas por estados e municípios; a criação de uma falsa imagem da formação profissional como solução para os problemas de emprego, possibilitando a criação de muitos cursos mais por imposição legal e motivação político-eleitoral que por demandas reais da sociedade. (2001, p.108)

O sistema público estadual também ficou responsável pela oferta dos cursos profissionais, além de lidar com uma demanda crescente de estudantes no primeiro grau sem o repasse financeiro que tais obrigações exigiam. O resultado foi a queda da qualidade dos cursos oferecidos pela rede pública.

Esses efeitos foram atenuados após as modificações trazidas em 1982, que tornaram facultativa a profissionalização do ensino de segundo grau. Essa medida praticamente restringiu a formação profissional às instituições especializadas, o que ocasionou a diminuição da oferta de profissionais para o mercado, em pleno período de modernização industrial. O ensino profissional passou a ser então oferecido a classes mais abastadas por instituições particulares, mantendo em suas mãos os conhecimentos referentes às novas tecnologias, que começavam a chegar ao mercado de trabalho brasileiro.

A Lei Federal n° 9.394/96, a Lei das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) configura a identidade do ensino médio como um aprimoramento do educando, uma consolidação da educação básica. A LDB dispõe, ainda, que "a educação profissional, integrada às diferentes formas de educação, ao trabalho, à ciência e à tecnologia, conduz ao permanente desenvolvimento de aptidões para a vida produtiva". A desvalorização e o preconceito que envolvia a educação profissional, até então, são tecnicamente superados. Os cursos de formação específica começam a ser procurados por um número cada vez maior de estudantes com situação econômica estável, que buscam o conhecimento acerca das mudanças tecnológicas e não apenas um emprego.

A formação profissional, associada unicamente à formação de mão de obra, tem reproduzido o dualismo existente na sociedade brasileira, levando a maioria da população a considerar o ensino normal e a educação superior como não tendo nenhuma relação com a educação profissional. De acordo com a Legislação Básica da Educação Profissional (p.109), "após o ensino médio, a rigor, tudo é educação profissional. Nesse contexto, tanto o ensino técnico e tecnológico quanto os cursos sequenciais por campo de saber e os demais cursos de graduação devem ser considerados como cursos de educação profissional".

Ainda hoje é incomum à população considerar que o Ensino Superior faz parte da Educação Profissional, mas analisando o significado real desse tipo de ensino, a associação é possível e justa. Os cursos de nível superior, assim como os técnicos, são cursos que formam profissionais para o mundo do trabalho, para atender a um mercado que está em constante mudança, exigindo conhecimentos específicos e atualizações constantes.

De acordo com Francisco Cordão (2011),

> A Educação Profissional e Tecnológica, no cumprimento dos objetivos da Educação Nacional, integra-se aos diferentes níveis e modalidades de educação e às dimensões do trabalho, da ciência e da tecnologia. Os cursos de Educação Profissional e Tecnológica poderão ser organizados por eixos tecnológicos, possibilitando a construção de diferentes itinerários formativos, observadas as normas do respectivo sistema e nível de ensino. De acordo com o novo ordenamento legal definido em 2008, a Educação Profissional e Tecnológica abrangerá os seguintes cursos:
>
> 1. formação inicial e continuada ou qualificação profissional;
> 2. educação profissional técnica de nível médio;
> 3. educação profissional tecnológica de graduação e pós-graduação.
>
> A Educação Profissional será desenvolvida em articulação com o ensino regular ou por diferentes estratégias de educação continuada, em instituições especializadas ou no ambiente de trabalho.

Ainda de acordo com o autor,

> A modalidade da Educação Profissional e Tecnológica conta com um tratamento especial na atual LDB, uma vez que ela atende a dois dos direitos fundamentais do cidadão, que devem ser assegurados à criança e ao adolescente, com absoluta prioridade, pela família, pela sociedade e pelo Estado: o direito à educação e o direito à profissionalização. A Constituição Federal brasileira, em seu art. 205, estabelece que a educação, direito de todos e dever do Estado e da família, será promovida e incentivada com a colaboração da sociedade, visando ao pleno desenvolvimento da pessoa, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. (CORDÃO, 2011)

Tratando especificamente dos cursos de Formação Inicial e Continuada de Trabalhadores-FIC, nosso foco no presente trabalho, são considerados formação complementar à Educação Básica, e podem ser desenvolvidos em escolas, instituições especializadas ou no próprio ambiente de trabalho. As determinações legais possibilitam que estas instituições ofereçam cursos que atendam demandas específicas do mercado de trabalho ou da comunidade. Esses cursos apresentam uma grande flexibilidade em termos de duração e pré-requisitos. Neste sentido, podem-se realizar em duas categorias: Formação Inicial (com exigência mínima de carga horária - 160 horas) e Formação Continuada (sem nenhuma exigência de carga horária).

Cabe à cada instituição que oferece cursos FIC a elaboração dos seus respectivos currículos, adaptando-os às realidades locais e particulares de cada público. De acordo com o Senac, instituição em que o presente trabalho se baseia, os cursos FIC são assim definidos:

> Com programações e grades curriculares constantemente atualizadas, os cursos FIC desenvolvem no aluno as competências necessárias para que ele desempenhe uma ocupação, o que possibilita inserção imediata no mundo do trabalho. As ofertas desses cursos são destinadas a pessoas com escolaridade variável.(SENAC, 2013)

Dessa forma, há uma certa liberdade para que a equipe pedagógica pense as unidades curriculares, os indicadores e os elementos de competência a serem desenvolvidas em cada curso e assim, as possibilidades de se trabalhar de forma a desenvolver o raciocínio lógico, nossa proposta neste material, são muitas.

CAPÍTULO 2

RACIOCÍNIO LÓGICO

A arte de raciocinar é o processo pelo qual, partindo de premissas e graças à estrutura formal das mesmas, pode-se chegar a uma determinada conclusão. Dessa forma, raciocinar é pensar ordenando ideias, conceitos e outras informações para chegar a uma conclusão.

De acordo com o FNDE, raciocínio lógico é um modo de pensar que ajuda na resolução de problemas, na tomada de decisões e na chegada a conclusões sobre determinados assuntos. Existem diferentes tipos de raciocínio lógico: dedutivo, indutivo e abdução.

- **Raciocínio Dedutivo:** ou método dedutivo, é um tipo de raciocínio que faz uso da dedução para obter uma conclusão a respeito de determinado ponto. Exemplo: "Quando chove, a grama fica molhada. Choveu hoje. Portanto, a grama está molhada.";
- **Raciocínio Indutivo:** ou método indutivo, é um tipo de raciocínio que parte de um ponto particular para chegar a uma conclusão ampla. Exemplo: "A grama ficou molhada todas as vezes em que choveu. Então, se chover amanhã, a grama ficará molhada";
- **Abdução:** Neste método, usa-se a conclusão e a regra para defender que a premissa poderia explicar a conclusão. Exemplo: "Quando chove, a grama fica molhada. A grama está molhada, então pode ter chovido."

Em alguns exercícios matemáticos, o raciocínio lógico pode ajudar o aluno a desenvolver determinadas aptidões. Entretanto, não é algo que possa ser ensinado, mas sim trabalhado por meio da resolução de problemas matriciais, geométricos, aritméticos, jogos etc.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN trazem como um dos objetivos principais que os alunos sejam capazes de "questionar a realidade formulando-se problemas e tratando de resolvê-los, utilizando para isso o pensamento lógico, a criatividade, a intuição, a capacidade de análise crítica, selecionando procedimentos e verificando sua adequação."(MEC, 1998).

Em outro trecho, em que trata da relação entre Matemática e Cidadania, a legislação traz:

> Para tanto, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. É importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação.(MEC, 1997)

Para atender a esses objetivos, é necesssária uma adequação dos materiais didáticos utilizados, uma nova configuração e organização do fazer pedagógico, para que a capacidade de raciocinar seja contemplada durante o planejamento de cada ação docente. De acordo com Luis Carlos Pais,

> O aluno deve ser estimulado a realizar um trabalho voltado para uma iniciação à "investigação científica". (...) Assim, aprender a valorizar o raciocínio lógico e argumentativo torna-se um dos objetivos da educação matemática, ou seja, despertar no aluno o hábito de fazer uso de seu raciocínio e de cultivar o gosto pela interpretação e resolução de problemas. (PAIS, 2001,p.35-36)

Com esse intuito, no capítulo que segue, reunimos um portfólio com atividades, problemas, desafios e jogos, que buscam estimular e desenvolver o raciocínio lógico dedutivo, com a finalidade de contribuir para essa prática docente inovadora. Todas elas foram utilizadas na Educação Profissional, mas podem ser adaptadas (ou não) e utilizadas em diferentes níveis educacionais, por professores de disciplinas diversas, objetivando o desenvolvimento da criatividade e do pensamento lógico.

CAPÍTULO 3

SUGESTÕES DE ATIVIDADES PARA DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO LÓGICO

Este capítulo traz uma seleção de atividades, desafios, problemas e jogos, coletados ao longo dos anos de trabalho com a Educação Profissional. Como o público atendido nesta modalidade de ensino é formado por adultos, em sua maioria com a educação formal já concluída, percebeu-se a necessidade de trabalhar os conceitos matemáticos de forma mais dinâmica e menos conteudista, visando a despertar a criatividade e estimular o desenvolvimento do raciocínio lógico. Para tal, são usados diferentes recursos, que quebram a rotina escolar tradicional e adicionam uma pitada de desafio ao trabalho, tanto do aluno quanto do docente.

3.1 Resolução de problemas lógicos

> Estudar Matemática é resolver problemas. Portanto, a incumbência dos professores de Matemática, em todos os níveis, é ensinar a arte de resolver problemas. O primeiro passo nesse processo é colocar o problema adequadamente. (THOMAS BUTTS, apud DANTE 2002).

Problema é a descrição de uma situação em que se procura algo desconhecido, não tendo nenhum algoritmo prévio que garanta sua solução. A resolução do problema exige certa dose de iniciativa e criatividade, aliada ao conhecimento de algumas estratégias.

Segundo Polya (1977), são quatro as etapas principais para a resolução de um problema:

1. Compreensão do problema;

2. Elaboração de um plano;

3. Execução do plano;

4. Retrospecto ou verificação.

Propor a resolução de problemas, mesmo que as soluções não sejam encontradas, é uma maneira de valorizar a dedicação e o empenho em resolvê-los, pois o ato de tentar já é um grande aprendizado, promovendo uma atividade cerebral benéfica, aumentando as capacidades cognitivas e auxiliando também outras áreas.

> A Resolução de problemas é um método eficaz para desenvolver o raciocínio e para motivar os alunos para o estudo da Matemática. O processo ensino e aprendizagem pode ser desenvolvido através de desafios, problemas interessantes que possam ser explorados e não apenas resolvidos (LUPINACCI e BOTIN, 2004).

A utilização de problemas durante a aprendizagem da matemática é fundamental, pois permite aos alunos realizar questionamentos, definir estratégias, raciocinar logicamente e não apenas utilizar regras padronizadas.

Apresentaremos, a seguir, alguns exemplos de problemas com esta finalidade. Os problemas estão separados por tipos, e são antecedidos de breves explanações dos conteúdos matemáticos necessários para sua resolução. É importante ressaltar que quanto menos necessitarmos de conhecimentos matemáticos específicos para resolvê-los, mais benéficas serão as atividades para o desenvolvimento do raciocínio lógico, uma vez que a criatividade será bastante exigida.

3.1.1 Problemas envolvendo operações entre conjuntos

De acordo com Youssef (2004), é atribuída aos matemáticos ingleses Augustus De Morgan (1806-1871) e George Boole (1815-1864) as noções que originaram a Teoria dos Conjuntos. Em

1854, Boole apresentou, em sua obra, os fundamentos de uma Álgebra para estudar a Lógica e usou em seus trabalhos relações entre conjuntos de objetos, mas não desenvolveu o conceito de conjuntos adequadamente. Georg Cantor (1845-1918), matemático russo que é conhecido como o criador da Teoria dos Conjuntos, publicou em 1890 um série de proposições e definições que se constituíram numa linguagem simbólica para a Lógica, a Teoria dos Conjuntos dentre outros. Cantor também utilizou formas de representação em diagramas já usadas por Leonhard Euler (1707-1783) e John Venn (1834-1923). A notação de conjuntos e a linguagem simbólica só foram adotadas e praticadas após a terceira década do século XX.

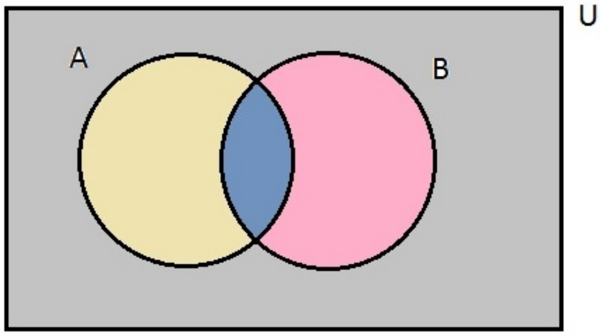
Algumas notações básicas devem ser relembradas quando trabalhamos com conjuntos focando o desenvolvimento do raciocínio lógico. Vamos indicar como *n(A)* o número de elementos distintos de um conjunto A:

- **Conjuntos finitos:** conjuntos com uma quantidade limitada de elementos;
- **Conjuntos infinitos:** conjuntos com quantidade ilimitada de elementos;
- **Conjuntos vazios:** conjuntos que não possuem elementos, ou seja, $n(A) = 0$.
  Notação: $A = \{\ \}$ ou $A = \emptyset$;
- **Conjuntos unitários:** conjuntos que contêm apenas um elemento: $n(A) = 1$;
- **Conjunto universo:** conjunto amplo, ao qual os elementos dos conjuntos que desejamos representar pertençam. Todos esses conjuntos são subconjuntos de **U**, que é a representação do conjunto universo.

Os elementos do conjunto podem ser descritos de maneiras distintas. Podemos usar o modelo de extensão, em que os elementos aparecem descritos, entre chaves. Exemplo: $A = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$. Outra forma de apresentar um conjunto é através da compreensão, em que descrevemos uma característica do grupo. Exemplo: conjunto dos números ímpares.

Uma terceira forma de expor um conjunto é utilizando o Diagrama de Venn (Figura 3.1). O matemático John Venn criou uma diagramação baseada em figuras planas, com o objetivo de representar as relações entre conjuntos e que também pode ser usada em análise de dados estatísticos. O diagrama pode ser usado na sua representação, no intuito de estabelecer uma melhor demonstração e compreensão dos elementos.

Figura 3.1: Diagrama de Venn



(a) Fonte: elaborada pela autora

Vejamos algumas outras representações e operações importantes para o trabalho com conjuntos:

Igualdade

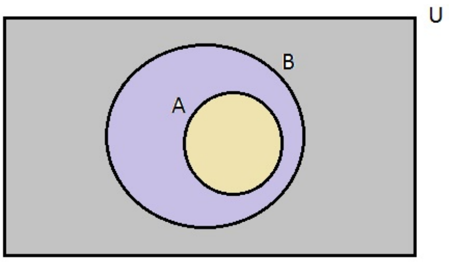
Dados os conjuntos A e B, dizemos que eles são iguais se todo elemento de A pertencer a B e todo elemento de B pertencer a A. Isso ocorre se, e somente se, A e B possuem os mesmos elementos. Em linguagem matemática, temos $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

Inclusão

Se todos os elementos de um dado conjunto A também pertencerem ao conjunto B, temos então que A está contido em B, ou A é um subconjunto de B. Outra possibilidade é dizer que B contém A, ou seja, $B \supset A$. Em linguagem matemática, temos $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in U)(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Vejamos abaixo a representação em diagrama (Figura 3.2).

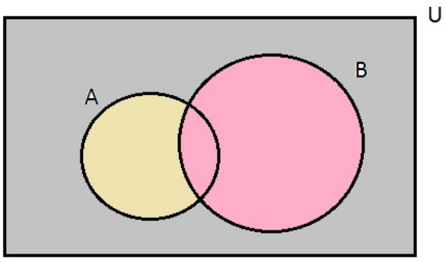
Existindo pelo menos um elemento de A que não pertença a B, dizemos que A não é subconjunto de B, ou que B não contém A, ou ainda que A não está contido em B, ou seja, $(\exists x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B) \Rightarrow A \not\subset B$. Representando em diagrama, temos a Figura 3.3:

Figura 3.2: Diagrama de Venn - Inclusão entre conjuntos - Caso 1



(a) Fonte: elaborada pela autora

Figura 3.3: Diagrama de Venn - Inclusão entre conjuntos - Caso 2

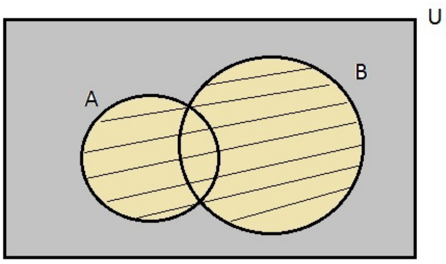


(a) Fonte: elaborada pela autora

Operações com Conjuntos: União

Chamamos de reunião ou união de dois conjuntos A e B o conjunto formado por todos os elementos pertencentes a A ou a B, ou seja, $A \cup B = \{x \in U \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$. Representando em diagrama, temos a Figura 3.4:

Figura 3.4: Diagrama de Venn - Operações com Conjuntos: União

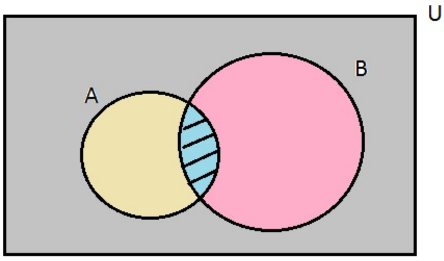


(a) Fonte: elaborada pela autora

Operações com Conjuntos: Interseção

Chamamos de interseção de dois conjuntos A e B o conjunto formado pelos elementos pertencentes a A e a B, ou seja, $A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$. Representando em diagrama, temos a Figura 3.5:

Figura 3.5: Diagrama de Venn - Operações com Conjuntos: Interseção

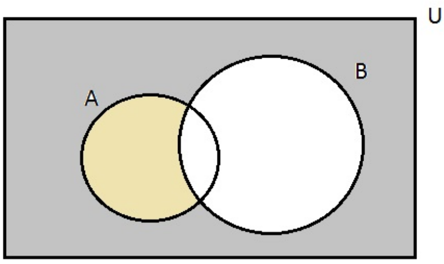


(a) Fonte: elaborada pela autora

Operações com Conjuntos: Diferença

Chamamos de diferença A - B ao conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e não pertencem a B, ou seja, $A - B = \{x \in U \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$. Representando em diagrama, temos a Figura 3.6:

Figura 3.6: Diagrama de Venn - Operações com Conjuntos: Diferença

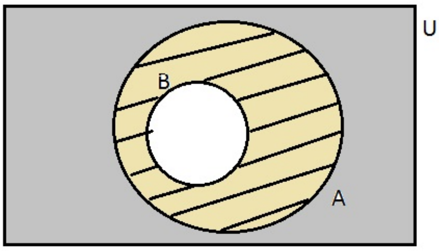


(a) Fonte: elaborada pela autora

Operações com Conjuntos: Complementar

Quando dois conjuntos A e B são tais que $B \subset A$, a diferença $A - B$ é chamada de complementar de B em relação a A, ou seja, $B \subset A \Rightarrow \complement_A^B = A - B$. Representando em diagrama, temos a Figura 3.7:

Figura 3.7: Diagrama de Venn - Operações com Conjuntos: Complementar



(a) Fonte: elaborada pela autora

Princípio da Inclusão e Exclusão

A teoria dos conjuntos é base para as análises lógicas, e conhecer é essencial para compreender as relações que podem ser estabelecidades. Dessa forma, apresentamos este princípio, comumente usado na resolução de questões de forma dedutiva. Segundo Morgado (apud Bezerra 2013), o Princípio da inclusão e exclusão é uma fórmula para contar o número de elementos que pertencem à união de vários conjuntos não necessariamente disjuntos.

Teorema 3.1. *Sejam A e B dois conjuntos finitos quaisquer. Então:*

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Demonstração. Para demonstrarmos este teorema, recorreremos ao Princípio Aditivo, um dos princípios básicos de Análise Combinatória, que nos diz que, se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui p + q elementos, ou seja, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, se $n(A \cap B) = 0$.
Observe que $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B)$ (1)
Analogamente, temos que $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) \Rightarrow n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ (2)
Substituindo (2) em (1), temos: $n(A \cup B) = n(A) - n(A \cap B) + n(B)$

□

Trataremos agora do Teorema da Inclusão e da Exclusão para três conjuntos:

Teorema 3.2. *Sejam A, B e C três conjuntos finitos quaisquer. Então:*

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) + n(A \cap B \cap C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C)$$

Demonstração. Do Teorema 3.1 temos que:
$n(A \cup B \cup C) = n(A \cup (B \cup C)) = n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C))$

Como sabemos que $n(A \cap (B \cup C)) = n((A \cap B) \cup (A \cap C))$, pelo Teorema 3.1, podemos afirmar que $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B \cup C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C))$, ou seja,
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n((A \cap B) \cup (A \cap C))$ (1)

Podemos afirmar também que:
$n((A \cap B) \cup (A \cap C)) = n(A \cap B) + n(A \cap C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C))$ (2)

Substituindo (2) em (1), temos:
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - [n(A \cap B) + n(A \cap C) - n((A \cap B) \cap (A \cap C))]$

Como $n((A \cap B) \cap (A \cap C)) = n(A \cap B \cap C)$, então:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(B \cap C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

□

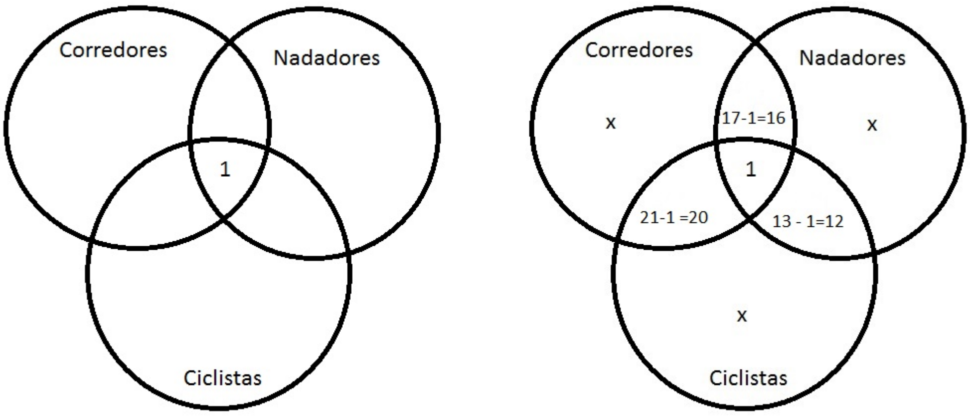
De acordo com as notações e operações entre conjuntos apresentadas, seguem alguns exemplos de atividades que podem ser propostas aos mais diferentes públicos, utilizando o teorema nas resoluções, ou outro método mais dedutivo:

EXEMPLO 1: Em um grupo de 100 **atletas,** 17 **são corredores e nadadores;** 13 **são nadadores e ciclistas;** 21 **são corredores e ciclistas. Apenas** 1 **atleta pratica essas três modalidades.**

Os demais estão distribuídos igualmente na prática de apenas uma dessas modalidades. Ao todo, qual o número de ciclistas desse grupo?

Para resolver esse problema, recorreremos ao Diagrama de Venn. O primeiro passo é construir o diagrama com a representação de três conjuntos, já que temos três modalidades esportivas. Em seguida, devemos inserir os elementos comuns aos três conjuntos, ou seja, 1 atleta apenas (Figura 3.8 a). Este atleta deve ser diminuído nas próximas interseções, onde iremos acrescentar os elementos em cada dupla de conjuntos. Como o texto informa que "os demais estão distribuídos igualmente na prática de apenas uma dessas modalidades", chamaremos de $\boldsymbol{x}$ a incógnita, que será comum aos três conjuntos (Figura 3.8 b).

Figura 3.8: Diagrama de Venn representando as modalidades esportivas



(a) Fonte: elaborada pela autora (b) Fonte: elaborada pela autora

Como sabemos que o total de atletas é 100, podemos montar uma equação. Vejamos:

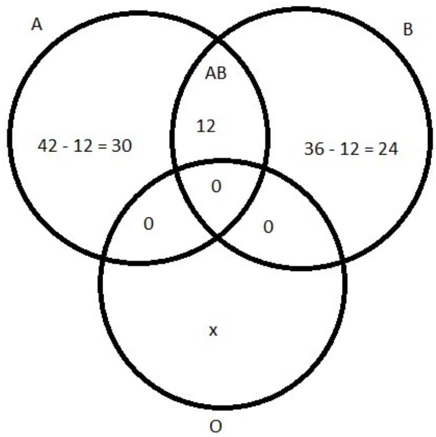
$$x + x + x + +1 + 16 + 20 + 12 = 100$$
$$3x + 49 = 100 \ \Rightarrow \ x = 17.$$

Isso nos diz que há 17 atletas que são apenas ciclistas, 17 que são apenas nadadores e 17 que são apenas corredores. Como foi pedido o número total de ciclistas, temos que incluir também os que praticam mais de uma atividade esportiva. Sendo assim, temos $17 + 20 + 1 + 12 = 50$. Então, temos **50** ciclistas no grupo.

EXEMPLO 2: No dia 17 de maio passado, houve uma campanha de doação de sangue em uma Universidade. Sabemos que o sangue das pessoas pode ser classificado em quatro tipos quanto a antígenos. Uma pesquisa feita com um grupo de 100 alunos da Universidade constatou que 42 deles têm o antígeno A, 36 têm o antígeno B e 12 o antígeno AB. Sendo assim, podemos afirmar que o número de alunos cujo sangue tem o antígeno O é:

Neste caso temos 3 tipos de antígenos: A, B e O. O tipo anguíneo AB tem tanto o antígeno A quanto o antígeno B, ou seja, pode ser representado, no Diagrama de Venn, como a interseção entre os conjunto A e B. Vejamos a representação gráfica (Figura 3.9):

Figura 3.9: Diagrama de Venn representando os antígenos A, B e O

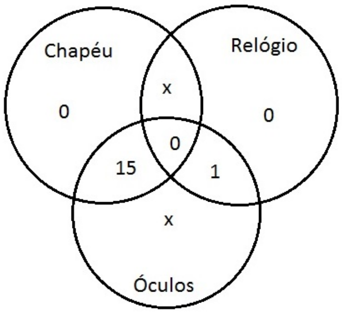


(a) Fonte: elaborada pela autora

Como foi informado que o total de alunos é 100, temos então: $30 + 12 + 24 + x = 100 \Rightarrow x = 100 - 66 \Rightarrow x = 34$. Logo, 34 alunos têm o antígeno O.

EXEMPLO 3: (VUNESP/2011**). Neste grupo de pessoas, usar só chapéu ou só relógio, nem pensar. Tampouco usar óculos, chapéu e relógio ao mesmo tempo. Quinze pessoas usam óculos e chapéu ao mesmo tempo. Usam chapéu e relógio, simultaneamente, o mesmo número de pessoas que usam apenas os óculos. Uma pessoa usa óculos e relógio ao mesmo tempo. Esse grupo é formado por** 40 **pessoas e essas informações são suficientes para afirmar que nesse grupo o número de pessoas que usam óculos é . . .**

Figura 3.10: Diagrama de Venn representando o uso de óculos, chapéu e relógio



(a) Fonte: elaborada pela autora

Podemos observar (Figura 3.10) que a interseção entre os três conjuntos é nula, assim como os casos de somente chapéu e somente relógio. Dessa forma, podemos construir o Diagrama de Venn e inserir os valores informados, chamando de x os valores ignorados, que são iguais. Como foi informado que o total de pessoas é 40, podemos equacionar os dados: $2x + 16 = 40 \Rightarrow x = 12$ pessoas. Para calcular o total de pessoas que usam óculos, devemos considerar também as interceções: $12 + 15 + 1 = 28$. Logo, há 28 pessoas no grupo que usam óculos.

EXEMPLO 4: O quadro abaixo (Figura 3.11) mostra uma pesquisa sobre as revistas que os estudantes do Ensino Fundamental costumam ler. Pergunta-se:

Figura 3.11: Resultado da pesquisa com leitores

Revista	A	B	C	A e B	A e C	B e C	A, B e C	Nenhuma
Leitores	50	54	40	22	20	16	12	12

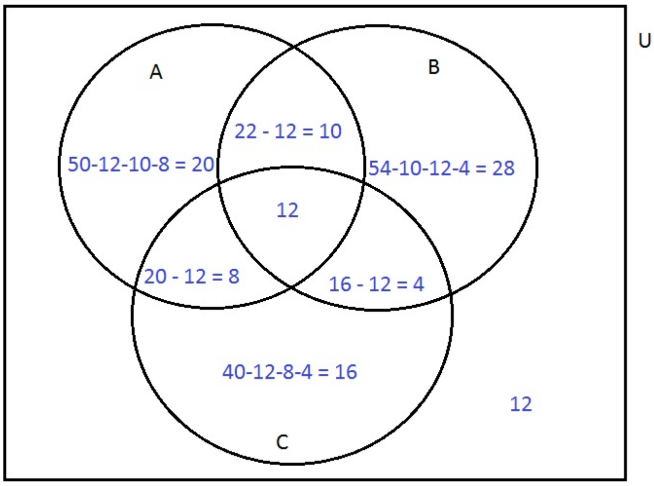
(a) Fonte: elaborada pela autora

1. **Quantos foram os estudantes consultados?**
2. **Quantos estudantes leem apenas a revista A?**
3. **Quantos estudantes leem a revista B e não leem a revista C?**
4. **Quantos estudantes não leem a revista A?**

5. Quantos estudantes leem a revista A ou a revista C?

Devemos preencher o Diagrama de Venn (Figura 3.12) a partir do final da tabela, lembrando que 12 alunos não leem nenhuma revista, mas esse número faz parte do conjunto universo. Vejamos na imagem abaixo todos os cálculos realizados a partir dos fornecidos. De posse desses dados, podemos responder aos questionamentos, um a um:

Figura 3.12: Diagrama de Venn representando o resultado da pesquisa com leitores



(a) Fonte: elaborada pela autora

1. Somando os valores encontrados nos cálculos iniciais, temos: $20 + 8 + 10 + 12 + 28 + 4 + 16 + 12 = 110$ estudantes consultados;

2. Conforme o diagrama, temos que $50 - 12 - 10 - 8 = 20$ estudantes leem apenas a revista A;

3. Como 54 estudantes leem a revista B e 16 leem B e C, então $54 - 16 = 38$ estudantes leem B e não leem C;

4. Partindo do conjunto universo, que contém 110 elementos, temos que $110 - 50 = 60$ estudantes não leem a revista A;

5. O conectivo "ou" significa a união entre os elementos dos dois conjuntos. Dessa forma, temos $50 + 16 + 4 = 70$ estudantes leem as revistas A ou C.

3.1.2 Problemas envolvendo figuras

Durante a resolução de problemas, muitas vezes há necessidade da representação por meio de desenhos para analisar melhor os dados fornecidos e escolher a melhor estratégia a seguir. Por outro lado, quando o problema já se apresenta em forma de desenho, é preciso interpretar o que está exposto graficamente e, a partir daí, esquematizar possibilidades de solucionar o desafio.

Geralmente, a imagem já traz dicas da linha de raciocínio a seguir, seja pelo formato do desenho utilizado, que pode indicar sentido, ordem, direção; seja pela estrutura do desenho, que traz em si ideias a serem seguidas.

Muitas questões trazem, em suas resoluções, mesmo que de forma não expressa, métodos e princípios matemáticos bem interessantes. Nos exemplos que apresentaremos a seguir teremos, em suas bases, conceitos de Indução Matemática e de Sistemas Lineares. Faremos uma breve explanação sobre cada um deles.

Indução Matemática

Também chamado de Princípio da Indução Finita, o princípio da Indução Matemática é um processo de prova, onde assume-se que um dado número possui uma propriedade, é demonstrado que o sucessor desse número também a possui e, consequentemente, é válida para todo o conjunto.

Segundo Morgado (2013),

> Suponhamos que desejemos provar que uma propriedade $P(n)$ relativa ao número natural n seja válida para todos os naturais de $\mathbb{N}$. Ou seja, desejamos provar que o conjunto $X = \{n|P(n)\}$, que é um subconjunto de $\mathbb{N}$ é, na verdade, igual ao próprio $\mathbb{N}$. Pelo axioma da indução basta mostrar que $1 \in X$ e que o sucessor de cada elemento de X também está em X. Em termos da propriedade $P(n)$, isto equivale a mostrar que:
> i) $P(1)$ é válida;
> ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.
> Verificados estes dois fatos, conclui-se a validez de $P(n)$ para todos os valores de n.

Ainda segundo Morgado (2013), reescrevendo o axioma da indução usando a linguagem das propriedades, temos:

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que

i) $P(1)$ é válida;

ii) Para todo $n \in \mathbb{N}$, a validez de $P(n)$ implica na validez de $P(n+1)$.

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vejamos uma questão para exemplificar a utilização deste método:

EXEMPLO 5: Mostre que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 15n - 1$ **é divisível por 9.**

i) O primeiro passo é verificar se a afirmativa é válida para $n = 1$. Como $4^1 + 15.1 - 1 = 18$, e 18 é divisível por 9, $P(1)$ é, de fato, verdadeira.

ii) Suponhamos que $P(n)$ seja válida para algum n, ou seja, $4^n + 15n - 1$ é divisível por 9. Isto significa que existe um inteiro k, tal que $4^n + 15n - 1 = 9k$, o que é equivalente a dizer que $4^n = 9k - 15n + 1$.
Multiplicando ambos os membros da igualdade por 4, temos que $4^{n+1} = 9k - 60n + 4$.
Somando aos dois membros $15(n+1) - 1$, obtemos $4^{n+1} + 15(n+1) - 1 = 9k - 60n + 4 + 15(n+1) - 1 = 9k - 45n + 18 = 9(k - 5n + 2)$.
Portanto, $4^{n+1} + 15(n+1) - 1$ é divisível por 9, o que nos prova que $P(n+1)$ é verdadeira.
Assim, provamos que $P(n)$ implica em $P(n+1)$, para todo n natural.
Logo, pelo Princípio da Indução Finita, $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sistemas Lineares

Um sistema linear é um conjunto de equações lineares que, por usa vez, são da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \ldots + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ são os coeficientes; $x_1, x_2, x_3, \ldots, xn$

são as incógnitas e b é o termo independente. Uma solução para um sistema linear é uma atribuição de números às variáveis que satisfaça simultaneamente todas as equações do sistema.

Um sistema geral de m equações lineares com n incógnitas pode ser escrito como:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

São exemplos de sistemas de equações lineares:

- Sistema linear com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 20 \\ x - 5y = 2 \end{cases}$$

- Sistema linear com duas equações e três incógnitas:

$$\begin{cases} 9x - 10y + 5z = 20 \\ 10x - 12y - 4z = 30 \end{cases}$$

- Sistema linear com três equações e três incógnitas:

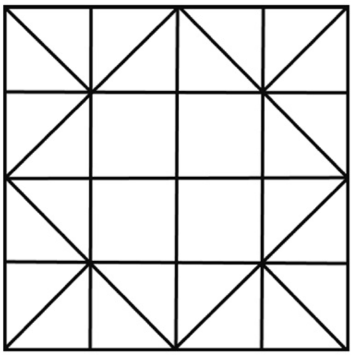
$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$$

Existem vários métodos de resolução de sistemas: método da substituição, da comparação, fatorização de matrizes, Regra de Crammer, etc. Como nosso público, em sua maioria, não tem grandes anseios por aprofundamentos matemáticos, utilizaremos alguns exemplos resolvidos através do método da substituição, que consiste em isolar uma incógnita em uma das equações, obtendo igualdade com um polinômio. Em seguida, substituir essa mesma incógnita em outra das equações pelo polinômio ao qual ela foi igualada.

Vejamos alguns exemplos de atividades que podem ser utilizadas, com base nos conceitos apresentados acima, mas sem a necessidade explícita do rigor matemático na sua resolução, beneficiando assim o desenvolvimentos do raciocínio lógico e da criatividade.

EXEMPLO 6: Quantos triângulos existem na imagem abaixo (Figura 3.13)[1]?

Figura 3.13: Questão relativa à quantidade de triângulos

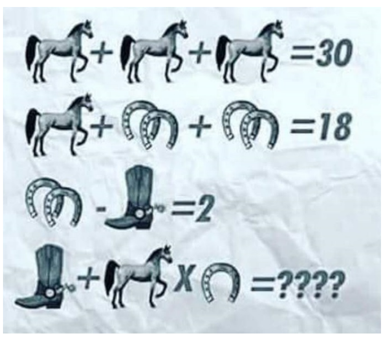


(a) Fonte: Página Concursos Públicos no Facebook

Esta atividade pode ser muito interessante para discutir possibilidades de construções, uma vez que apresenta triângulos retângulos, isósceles e equiláteros. O resultado final traz **48** triângulos distintos.

EXEMPLO 7: Qual é o valor final (Figura 3.14)[2] ?

Figura 3.14: Questão relativa aos cavalos, botas e ferraduras



(a) Fonte: Portal WhatsApp

[1]Disponível em <https://www.facebook.com/ConcursosPublicosAgora/photos>. Acesso em 25 ago 2016

[2]Disponível em <http://www.portalwhatsapp.com/brincadeiras-whatsapp/resposta-desafio-cavalo-ferradura-e-bota/>. Acesso em 25 ago 2016

Primeira solução:

Podemos observar que esta questão trata de um sistema de equações lineares, em que as incógnitas são representadas por objetos. Se chamarmos cada cavalo de x, a ferradura de y e a bota de z, conseguimos facilmente montar um sistema:

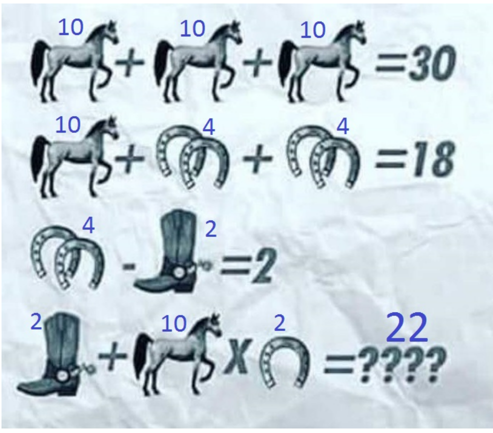
$$\begin{cases} x + x + x = 30 & (1) \\ x + 2y + 2y = 18 & (2) \\ 2y - z = 2 & (3) \\ z + x.y = ? & (4) \end{cases}$$

Utilizando o método da substituição, temos em (1) que $3x = 30$, ou seja, $x = 10$. Substituindo em (2), temos: $10 + 4y = 18 \Rightarrow y = 2$. Temos em (3) que $4 - z = 2$, ou seja, $z = 2$. Dessa forma, em (4) temos que $2 + 10.2 = 2 + 20 = 22$. Logo, a resposta para o desafio é **22**.

Segunda solução:

Podemos permitir que os alunos resolvam esta questão de maneira intuitiva, precisando apenas de conhecimentos básicos, como as 4 operações. É um momento interessante para relembrar as regras para a resolução de expressões numéricas que, caso faltem, induzirão o aluno a um resultado equivocado. Vejamos a resolução final (Figura 3.15):

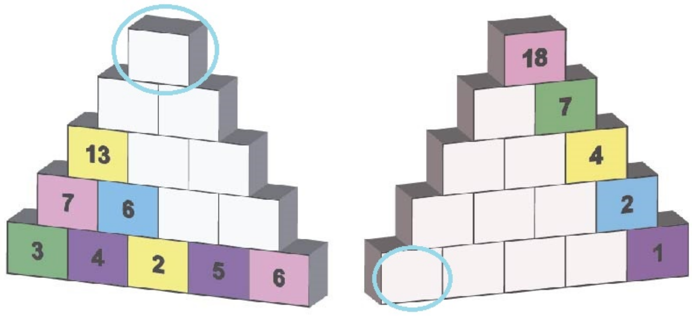
Figura 3.15: Questão relativa aos cavalos, botas e ferraduras: resolução



(a) Fonte: Portal WhatsApp

EXEMPLO 8: Nas pirâmides abaixo (Figura 3.16), que seguem a mesma lógica em suas construções, descubra os valores equivalentes aos tijolos destacados em cada uma delas.

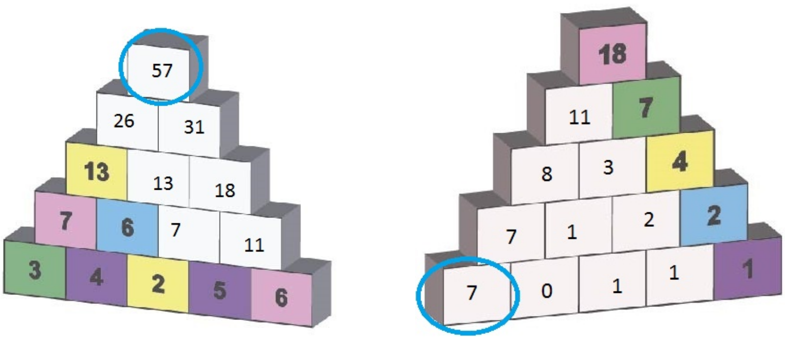
Figura 3.16: Questão relativa à construção das pirâmides



(a) Fonte: elaborada pela autora

Como os números estão ocupando os lugares dos tijolos das pirâmides, muito provavelmente a imagem tenha alguma influência na resolução. Se observarmos a base da primeira pirâmide e a linha acima da base, podemos perceber que a cada par de tijolos somados, teremos como resultado o número que está no tijolo logo acima. O mesmo raciocínio se repete aos escolhermos pares de tijolos ao longo da base, o que, por indução, nos leva a concluir que se repetirá em toda a figura. Na segunda pirâmide, seguimos o mesmo raciocínio, desta vez usando subtrações para encontrar os valores da base. Vejamos as respectivas resoluções (Figura 3.17):

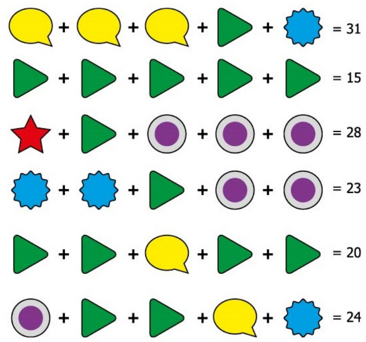
Figura 3.17: Questão relativa à construção das pirâmides: resolução



(a) Fonte: elaborada pela autora (b) Fonte: elaborada pela autora

EXEMPLO 9: Observe o quadro abaixo (Figura 3.18). Realize seus cálculos, encontre o valor correspondente a cada figura e responda: quanto vale a estrela vermelha?

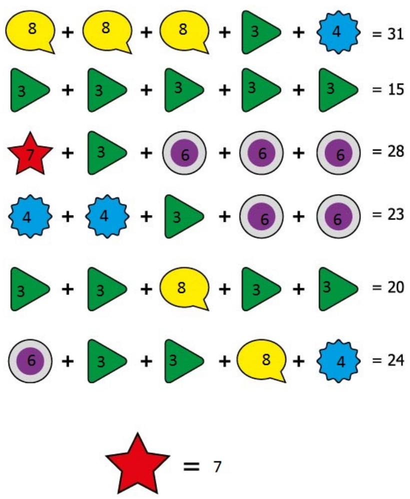
Figura 3.18: Questão relativa à soma de figuras



(a) Fonte: elaborada pela autora

Esta atividade nos remete aos conceitos de sistemas de equações lineares apresentados anteriormente, mas também é possível resolvê-la de forma mais intuitiva. Como sugestão, basta começar pelas figuras verdes (Figura 3.19), que somadas resultam em 15, logo cada uma vale 3. Em seguida, podemos encontrar o valor da figura amarela, que somada a 4 figuras verdes resulta em 20. Temos então que a figura amarela vale 8. Realizando os demais cálculos teremos os seguintes resultados:

Figura 3.19: Questão relativa à soma de figuras: resolução



(a) Fonte: elaborada pela autora

3.1.3 O problema dos quatro quatros

O problema foi apresentado por Malba Tahan, heterônimo do professor brasileiro Júlio César de Mello Souza (1895-1974), em seu livro intitulado "O homem que calculava". De acordo com o autor, trata-se de um problema bastante antigo, inclusive sendo citado por W.J.Reichmann em seu livro "La Fascination des Nombres"(Paris, 1959) como velhíssimo. O problema dos quatro quatros é o seguinte:

> Escrever, com quatro quatros e sinais matemáticos, uma expressão que seja igual a um número inteiro dado. Na expressão não pode figurar (além dos quatro quatros) nenhum algarismo ou letra ou símbolo algébrico que envolva letra, tais como *log*, *lim* etc.(TAHAN, 2002, p.263)

Muitos matemáticos e curiosos vêm trabalhando neste problema, tendo inclusive encontrado formas de escrever os 100 primeiros números naturais inteiros utilizando apenas quatro quatros. Como nosso enfoque são alunos de educação profissional, nos limitaremos somente aos 10 primeiros naturais. Uma sugestão é restringir que, para encontrar os resultados, os estudantes utilizem somente as operações básicas, recorrendo à ajuda de parênteses, se houver necessidade. Vejamos algumas possíveis soluções:

$$
\begin{gathered}
4+4-4-4=0 \\
(4+4) \div (4+4)=1 \\
4 \times 4 \div (4+4)=2 \\
(4+4+4) \div 4=3 \\
(4-4) \times 4+4=4 \\
(4 \times 4+4) \div 4=5 \\
(4+4) \div 4+4=6 \\
4+4-(4 \div 4)=7 \\
4-4+4+4=8 \\
4+4+(4 \div 4)=9
\end{gathered}
$$

Tal questão tem suas bases na Análise Compbinatória, que pode e deve ser abordada a fim de justificar as inúmeras possibilidades de resultados que alcançamos quando associamos quatro quatros e os sinais matemáticos disponíveis. Análise Combinatória é considerada um conjunto de procedimentos que possibilita a construção de grupos diferentes formados por um número finito de elementos de um conjunto sob certas circunstâncias. Nessa oportunidade, trazemos aqui alguns de seus princípios básicos, que também são base para muitas outras questões aqui disponibilizadas.

Princípio Fundamental da Contagem

De acordo com Morgado (2013), "o princípio fundamental da contagem diz que há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é $x.y$."

EXEMPLO 10: Com 7 homens e 7 mulheres, de quantos modos podemos formar um casal heterossexual?

Para formar um casa heterossexual, tomaremos duas decisões:
D_1: Escolher uma mulher (7 modos);
D_2: Escolher um homem (7 modos).

Há, portanto, $7 \times 7 = 49$ modos de formal um casal heterossexual.

Permutações e Combinações

Segundo Morgado (2013), há alguns problemas de combinatória que aparecem com muita frequencia e, por isso, merecem maior atenção:

• *Problema das permutações simples:* De quantos modos podemos ordenar em fila n objetos distintos?

O objeto que ocupará a primeira posição pode ser escolhido de n modos. Já o segundo objeto pode ser escolhido de $(n-1)$ modos, já que os objetos devem ser distintos; o terceiro objeto pode ser escolhido de $(n-2)$ modos, e assim sucessivamente, até que o último objeto seja escolhido de apenas 1 modo. Sendo assim, temos $n \times (n-1) \times (n-2) \ldots \times 1$ modos de ordenar a fila, ou seja, $n!$ modos. Dessa forma, o número de permutações simples de n objetos distintos é $P_n = n!$.

Em alguns casos, como os em que haja repetições entre os objetos, precisamos abater estes elementos. Assim, de acordo com Morgado(2013), "de um modo geral, que o número de permutações de n objetos dos quais α são iguais a A, β são iguais a B, γ são iguais a C, etc, é $P_n^{\alpha,\beta,\gamma,\ldots} = \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots}$."

EXEMPLO 11: Quantos são os anagramas da palavra AMOR?

Cada anagrama é obtido através da alteração da ordem das 4 letras que compõem a palavra. Assim, temos $P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ anagramas.

EXEMPLO 12: Quantos são os anagramas da palavra CRONOGRAMA?

Se as letras que compõem a palavra fossem distintas, teríamos 10! anagramas. Mas, como as letras A, O e R aparecem duas vezes cada, precisamos abater do resultado final os anagramas que se repetirão ao alternarmos letras iguais. Dessa forma, teremos $P_{10} = \frac{10!}{2!2!2!} = \frac{10!}{8} = \frac{3628800}{8} = 453600$ anagramas.

• *Problema das combinações simples:* De quantos modos podemos selecionar p objetos distintos entre n objetos distintos dados?

Para resolver este problema, precisamos selecionar p objetos entre os n disponíveis, ou seja, dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são selecionados, e um grupo de $n - p$ objetos, que são os não selecionados. Dessa forma, temos que a combinação simples de classe p de n elementos $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

EXEMPLO 13: Com 5 homens e 4 mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, exatamente 3 homens e 2 mulheres, podem ser formadas?

Como precisamos escolher 3 entre os 5 homens e 2 entre as 4 mulheres, temos:

$C_5^3.C_4^2 = \frac{5!}{3!(5-3)!}.\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{5!}{3!.2!}.\frac{4!}{2!.2!} = 10.6 = 60$ comissões.

Arranjos

As combinações, conforme apresentadas acima, são caracterizadas pela natureza dos elementos. Os arranjos, por sua vez, além de se caracterizarem pela natureza, também levam em consideração a ordem dos elementos. Dessa forma, seu resultados são obtidos através de $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.

EXEMPLO 14: Em uma competição, 10 atletas dispitam os 3 primeiros lugares para subirem ao pódio. De quantas maneiras distintas o pódio pode ser configurado?

Observe que a ordem entre os atletas influencia no resultado final, pois o pódio tem 3 lugares diferentes, e um mesmo trio pode se configurar de 6 formas distintas (de acordo com o princípio fundamental da contagem). Sendo assim, devemos utilizar os princípios de arranjo para chegar ao resultado, ou seja:

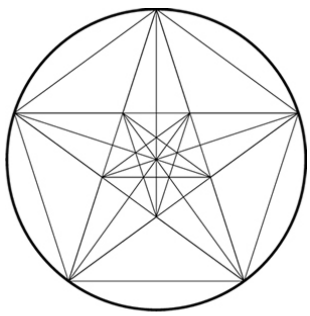
$A_{10}^3 = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{(7)!} = 10.9.8 = 720$ maneiras distintas.

3.2 Sequências lógicas

A busca por padrões é algo que fascina os seres humanos, e registros dos mais diversos tipos de observações de padrões podem ser encontrados em documentos de civilizações antigas, a exemplo dos egípcios, que observavam os períodos de seca e cheia do Rio Nilo para saber quando plantar e quando colher. Esses padrões de movimentação dos leitos dos rios foram e são extremamente importantes para a sobrevivência dos povos e acompanham a humanidade há milênios. A observação dos movimentos dos astros celestes, seus padrões e repetições são a base da Astronomia.

Um exemplo muito interessante de sequência foi apresentado pelo matemático Leonardo de Pisa (1170-1250), conhecido também por Fibonacci: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...)$. Famosa como Sequência de Fibonnaci, sua lei de formação é bastante simples: basta somarmos dois termos subsequentes e, como resultado, teremos o termo seguinte. Vejamos: $1 + 1 = 2$; $1 + 2 = 3$; $2 + 3 = 5$; $3 + 5 = 8$ e, assim, sucessivamente. Outro ponto interessante dessa sequência pode ser observado a partir da divisão: Seja n a posição ocupada pelos termos da sequência de Fibonacci, temos que, para todo $n \geqq 5$, $f(n) \div f(n-1) \sim 1,618$. Vejamos alguns exemplos: $5 \div 3 = 1,666...$; $8 \div 5 = 1,6$; $144 \div 89 \sim 1,617977...$. Este número é conhecido como número áureo, ou número de ouro, e é representado pela letra grega Φ . Os pregos da escola pitagórica representavam o número de ouro através do Pentagrama (Figura 3.20)[3], que contém a proporção áurea em todos os segmentos.

Figura 3.20: Pentagrama



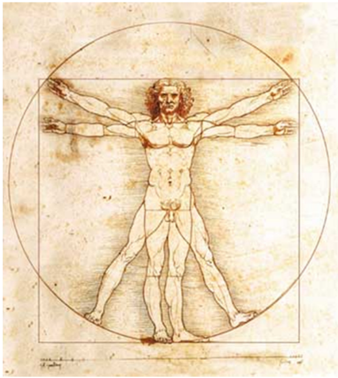
(a) Fonte: Escola Kids

[3]Disponível em <http://escolakids.uol.com.br/numero-de-ouro.htm>. Acesso em 26 ago 2016

Estudiosos que sucederam Fibonacci encontraram muitas relações entre esta sequência e elementos da natureza, como é o caso dos espirais encontrados em conchas marinhas, do crescimento dos galhos de algumas plantas, dos dentes dos elefantes, dentre outros. De acordo com Sá (2013), na arquitetura, seus elementos podem ser observados no Partenon (Figura 3.21 a)[4], construído em Atenas por volta de 440 a.C., pelo arquiteto grego Fídias (490-430 a.C.). A fachada do edifício era um retângulo que continha um quadrado de lado igual à sua altura. Esta forma retangular é considerada esteticamente perfeita devido a suas proporções e é chamada de retângulo de ouro ou retângulo áureo.

Figura 3.21: O número de ouro na arte

(a) Partenon, em Atenas - Grécia. Fonte: Wikipedia.org



(b) Homem Vitruviano, de Da Vinci (1490). Fonte: Site Prefeitura de São Paulo

Encontramos o número Φ em obras arquitetônicas, como é o caso das pirâmides de Gizé: a razão entre a altura de uma face e metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao número de ouro. No corpo humano, acredita-se que quanto mais próximas de Φ sejam as proporções de determinada pessoa, mais bela ela é. Uma imagem clássica dessa representação é a obra de Leonardo Da Vinci, o Homem Vitruviano (Figura 3.21 b)[5], de 1490. Nesta obra podemos observar com clareza que o corpo humano, assim como natureza, segue a proporção do número de ouro: se medirmos nossa altura e divirmos pela medida do nosso umbigo até o chão, encontraremos $\sim 1,618$. Essa medida se repete ao dividirmos a medida do braço pela do antebraço, a medida da perna pela medida da canela, etc.

[4]Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Partenon>. Acesso em 26 ago 2016

[5]Disponível em <http://www.prefeitura.sp.gov.br/cidade/secretarias/upload/assistencia_social/cecoas/AULA_3_Formatacao_Principais_Conceitos.pdf>. Acesso em 26 ago 2016

3.2.1 Sequências numéricas

As sequências numéricas possuem uma relação bastante estreita com a contagem e com os sistemas de numeração. É por esse motivo que encontramos registros de diversos tipos de sequências em documentos de civilizações antigas.

Na vida diária, as sequências aparecem em diversas situações:

- $(1930,\ 1934,\ 1938,\ldots)$, que é a sequência dos anos em que aconteceram as Copas do Mundo;
- $(2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ldots)$, que é a sequência dos números primos;
- (segunda-feira, terça-feira, quarta-feira, ...) , que é a sequência dos dias da semana.

Teremos uma sequência ou sucessão sempre que houver uma ordem entre os elementos do conjunto, de forma que cada elemento ocupe uma posição dentro deste.

Trabalhar esses conceitos de sequências numéricas de forma intuitiva é deixar que o sujeito observe a ordem em que os elementos do conjunto são apresentados e tente encontrar alguma relação entre eles, de forma autônoma, sem uso de fórmulas pré-estabelecidas.

Vejamos alguns exemplos de atividades que podem ser usadas com essa finalidade:

EXEMPLO 15: (CODESP 2010/FGV) Observe a sequência numérica a seguir:

$$135279114131517619212 38\ldots$$

Mantida a lei de formação, quais serão os dois próximos algarismos da sequência?

Inicialmente, os alunos devem ser estimulados a analisar todas as possibilidades, de forma intuitiva. Caso não consigam visualizar nenhuma relação entre os elementos da sequência, uma boa estratégia é destacar os números pares. Vejamos:

$$135\color{blue}{2}\color{black}{7911}\color{blue}{4}\color{black}{131517}\color{blue}{6}\color{black}{192123}\color{blue}{8}\color{black}{\ldots}$$

Com esta dica, facilmente eles conseguirão perceber que trata-se da sequência dos números ímpares mesclada com a dos números pares.

$$1, 3, 5, 2, 7, 9, 11, 4, 13, 15, 17, 6, 19, 21, 23, 8, \ldots$$

Dessa forma, os dois próximos algarismos são 2 e 5.

EXEMPLO 16: Qual o próximo número da série 144, 121, 100, 81, 64, ...**?**

Para solucionar esta questão os alunos poderão recorrer à subtração ou à potenciação. Vejamos:

$$144 - 23 = 121 \; ; \; 121 - 21 = 100 \; ; \; 100 - 19 = 81 \; ; \; 81 - 17 = 64 \; .$$

Podemos observar que os números da série estão sendo diminuídos por números ímpares, em ordem decrescente. Logo, teremos $64 - 15 = 49$, que será a solução.

Outra opção de resolução é via potenciação: $144 = 12^2$; $121 = 11^2$; $100 = 10^2$; $81 = 9^2$; $64 = 8^2$. Logo, o próximo número será $7^2 = 49$.

EXEMPLO 17: Quais os dois próximos números da série 9, 6, 18, 15, 45, 42, 126, ...**?**

Há uma tendência em esperar que as séries sigam em ordem crescente ou decrescente, mas há inúmeras outras possibilidades. Neste caso, podemos observar que o segundo termo é igual ao primeiro termo diminuído de três, e o terceiro termo é o segundo termo multiplicado por três. Dessa forma, teremos: $9 - 3 = 6$; $6 \times 3 = 18$. Prosseguindo, partindo sempre do termo de ordem ímpar, temos:

$$18 - 3 = 15 \; ; \; 15 \times 3 = 45$$
$$45 - 3 = 42 \; ; \; 42 \times 3 = 126$$

Dessa forma, temos então que $126 - 3 = 123$; $123 \times 3 = 369$, ou seja, os dois próximos números são **123** e **369**.

EXEMPLO 18: Qual o próximo número da sequência 1, 9, 25, 49, ...**?**

Devemos incentivar os alunos a observarem a sequência de números e identificarem alguma relação entre eles. Nestas observações as 4 operações são base para as análises.

Primeira solução: Podemos perceber que:

$$\begin{aligned} 1 + 8 &= 9 \\ 9 + 16 &= 25 \\ 25 + 24 &= 49 \end{aligned}$$

É fácil ver que a cada elemento da série é somado um múltiplo de 8, de acordo com a posição que esse número ocupa na sequência. Ao primeiro termo é somado 8×1; ao segundo termo é somado 8×2; ao terceiro termo, 8×3. Logo, ao quarto termo será somado 8×4. Sendo assim, teremos $49 + 32 = 81$, ou seja, o próximo número da sequência será **81**.

Segunda solução: Pensando agora em outras operações, como multiplicação e potenciação, temos outra possibilidade de resolução:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 3^2 &= 9 \\ 5^2 &= 25 \\ 7^2 &= 49 \end{aligned}$$

Podemos observar que, nas potências de índice 2, as bases crescem numa sequência de números ímpares. Como o próximo ímpar é 9, temos então que $9^2 = 81$. Então, o próximo número da sequência é **81**, confirmando o resultado da primeira solução.

EXEMPLO 19: Os números abaixo estão dispostos de maneira lógica. Qual o valor do número oculto?

8, 1, 12, 10, 14, 11, ? , 3, 7, 5, 16, 9**.**

Analisando os números desta sequência limitada, e reallizando cálculos básicos entre seus elementos, podemos identificar uma relação entre os termos equidistantes do centro da série: a soma do primeiro e o último elemento é 17; a soma do segundo e do penúltimo elemento também é 17; e assim sucessivamente. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned} 8 \;+\; 9 &= 17 \\ 1 \;+\; 16 &= 17 \\ 12 \;+\; 5 &= 17 \\ 10 \;+\; 7 &= 17 \\ 14 \;+\; 3 &= 17 \end{aligned}$$

Seguindo esta linha de pensamento, temos que $11 \;+\; 6 = 17$. Logo, o número oculto é **6**.

3.2.2 Sequências envolvendo operações matemáticas básicas

Algumas questões aparecem sem um texto específico, mas a forma como as informações são apresentadas já sinalizam o caminho a seguir: geralmente trazem como incógnita o ponto de interrogação. Na maior parte dos casos, são realizadas operações matemáticas básicas e estas se repetem, tornando o desafio uma sequência de operações. Muitas dessas questões têm ganhado visibilidade nas redes sociais e são ótimas atividades para aproximar professores e alunos.

EXEMPLO 20: Sequência de Operações:

$$\begin{aligned} 6 \;\mathbf{e}\; 4 &= 210 \\ 9 \;\mathbf{e}\; 2 &= 711 \\ 8 \;\mathbf{e}\; 5 &= 313 \\ 5 \;\mathbf{e}\; 2 &= \;\mathbf{?} \end{aligned}$$

Observando as informações acima e realizando cálculos mentais, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} 6-4=2\,;\; 6+4=10 \\ 9-2=7\,;\; 9+2=11 \\ 8-5=3\,;\; 8+5=13 \end{aligned}$$

Seguindo a mesma linha de pensamento, temos então que $5 - 2 = 3$; $5 + 2 = 7$, o que nos dá como resultado 37. Levando em consideração que na questão todos os resultados tem 3 casas decimais, então podemos considerar duas soluções para este caso:

$$5 \text{ e } 2 = 37$$
$$5 \text{ e } 2 = 307$$

EXEMPLO 21: Sequência de Operações:

$$1 \ \textbf{e} \ 4 = 5$$
$$2 \ \textbf{e} \ 5 = 12$$
$$3 \ \textbf{e} \ 6 = 21$$
$$8 \ \textbf{e} \ 11 = \textbf{?}$$

Recorrendo novamente às quatro operações básicas, é possível chegar a três soluções possíveis para este desafio (por isso é importante permitir que os alunos expressem suas ideias, pois podem existir ainda outras soluções). Vejamos cada uma delas detalhadamente:

Primeira solução: $1 + 4 = 5$. Somando este resultado à próxima linha, e assim sucessivamente, teremos:

$$5 + 2 + 5 = 12$$
$$12 + 3 + 6 = 21$$
$$21 + 8 + 11 = 40$$

Desta forma, a primeira solução para este desafio é **40**.

Segunda solução: Levando em consideração que o primeiro e o segundo termo das operações aumentam em razão 1 : {1, 2, 3, ...} e {4, 5, 6, ...} ; e que o resultado das operações aumenta numa sequência de números ímpares: { 7, 9, ... }; podemos preencher as lacunas que faltam até chegar à oitava linha. Teremos então:

$$1 \text{ e } 4 = 5$$
$$2 \text{ e } 5 = 5 + 7 = 12$$
$$3 \text{ e } 6 = 12 + 9 = 21$$

$$\begin{aligned} 4 \quad e \quad 7 &= 21 + 11 = 32 \\ 5 \quad e \quad 8 &= 32 + 13 = 45 \\ 6 \quad e \quad 9 &= 45 + 15 = 60 \\ 7 \quad e \quad 10 &= 60 + 17 = 77 \\ 8 \quad e \quad 11 &= 77 + 19 = 96 \end{aligned}$$

Desta forma, a segunda solução para este desafio é **96**.

Terceira solução: Outra forma de solucionar este problema é associando multiplicação e soma: a soma do primeiro termo à multiplicação entre o primeiro e o segundo termo, resulta nos valores apresentados. Vejamos:

$$\begin{gathered} 1 + (1 \times 4) = 5 \\ 2 + (2 \times 5) = 12 \\ 3 + (3 \times 6) = 21 \\ 8 + (8 \times 11) = 96 \end{gathered}$$

Logo, a terceira solução para este desafio também é **96**.

EXEMPLO 22: Sequência de Operações:

$$\begin{gathered} 1 + 4 = 10 \\ 4 + 16 = 40 \\ 2 + 8 = 20 \\ 8 + 32 = \ \textbf{?} \end{gathered}$$

Esta é uma sequência bastante simples, e pode ser apresentada a alunos de séries iniciais, devido à baixa complexidade de resolução. Para resolver, basta observar que o resultado da soma é sempre multiplicado por 2:

$$\begin{gathered} 1 + 4 = 5\,;\ 5 \times 2 = 10 \\ 4 + 16 = 20\,;\ 20 \times 2 = 40 \\ 2 + 8 = 10\,;\ 10 \times 2 = 20 \end{gathered}$$

Seguindo esta mesma linha de raciocínio, temos que:

$$8 \ + \ 32 = 40 \ ; \ 40 \times \ 2 \ = 80$$

Sendo assim, a solução para o desafio é **80**.

EXEMPLO 23: Sequência de Operações:

$$\begin{aligned} 1 &= 02 \\ 2 &= 08 \\ 3 &= 18 \\ 4 &= 32 \\ 5 &= 50 \\ 7 &= ? \end{aligned}$$

Analisando a sequência de igualdades, podemos observar que não há uma operação matemática explícita. Dentre as possibilidades, iniciando com as quatro operações básicas, podemos identificar a seguinte relação:

$$\begin{aligned} 1 \times 2 &= 02 \\ 2 \times 4 &= 08 \\ 3 \times 6 &= 18 \\ 4 \times 8 &= 32 \\ 5 \times 10 &= 50 \end{aligned}$$

É fácil ver que os números iniciais são inteiros e estão em sequência de razão 1. Estes estão sendo multiplicados pela sequência dos números pares. Completando a primeira coluna com o número 6, que até então estava ausente, temos:

$$\begin{aligned} 6 \times 12 &= 72 \\ 7 \times 14 &= 98 \end{aligned}$$

Logo, a ? pode ser substituída por 98.

EXEMPLO 24: Coloque, dentro da tabela abaixo, o número que corresponde à ?:

14	336	12
16	?	15

Analisando as relações entre os números que compõem a tabela, podemos observar que $(14 \times 12) \times 2 = 336$. Podemos seguir o mesmo raciocínio e teremos $(16 \times 15) \times 2 = 480$, ou seja, a ? corresponde ao número 480.

É importante sinalizar aos alunos que não há uma forma única de resolver algumas questões, por isso, outras possibilidades de respostas são válidas, desde que tenham uma justificativa convincente.

EXEMPLO 25: Na tabela abaixo, descubra qual é o número que corresponde a ?:

582	26	718
226	?	474

Analisando as relações entre os termos que ocupam os extremos da tabela, temos que:

$$582 + 718 = 1300$$
$$226 + 474 = 700$$

É fácil ver que $1300 = 50 \times 26$. Seguindo esta linha, temos que $700 = 50 \times 14$. Logo, o valor correspondente a ? é 14.

3.2.3 Sequências alfanuméricas

Algumas sequências podem trazer uma mistura entre letras e números. Estas séries seguem a mesma lógica das totalmente numéricas, necessitando apenas de um pouco mais de cuidado já que o alfabeto é um conjunto limitado. Em casos em que a sequência extrapole os 26 elementos alfabéticos, a contagem deve ser reiniciada, de forma cíclica, tornando assim o conjunto infinito.Em alguns casos, são necessários conhecimentos básicos de Análise Combinatória, como arranjos, permutações, etc, já apresentados anteriormente. Vejamos alguns exemplos de questões:

EXEMPLO 26: Que números e/ou letras devem ser colocados no lugar das interrogações para completar a série?

2	C	3	J	4	?
A	5	F	7	O	?

Analisando a tabela acima, podemos identificar duas sequências: uma numérica e uma alfabética. Os números da primeira linha crescem em razão 1, sempre sendo alternados por letras. O próximo número desta sequência é 5, mas como há alternância, a ? da primeira linha deverá ser substituída por uma letra.

Analogamente, na segunda linha também acontece uma alternância entre letras e números, então a ? da segunda linha deverá ser substituída por um número. Podemos observar que os números da segunda linha crescem em razão 2, então, o próximo número será **9**. Podemos reforçar essa teoria através da soma: dois números subsequentes da primeira linha resultam no número da segunda linha: $2 + 3 = 5$; $3 + 4 = 7$. Então, $4 + 5 = 9$.

Observando agora a sequência alfabética, podemos perceber que ela está em zig-zag, alternando-se entre a segunda e a primeira linha: $\{$ A, C, F, J, O, $\ldots\}$

Preenchendo as lacunas entre cada um dos elementos, temos:

{ A, (1 letra ausente) , C, (2 letras ausentes), F, (3 letras ausentes), J, (4 letras ausentes) , O, ? }

É fácil ver que as letras ausentes seguem um padrão, aumentando na razão 1, o que nos leva à conclusão que a próxima letra deve estar distante 5 letras de O. Logo, a ? da primeira linha deverá ser substituída pela letra **U**. Teremos então a seguinte solução:

2	C	3	J	4	U
A	5	F	7	O	9

EXEMPLO 27: Jorge é o funcionário responsável por criar uma senha mensal de acesso ao sistema financeiro de uma empresa. A senha deve ser criada com 8 caracteres alfanuméricos. Observe as senhas de quatro meses seguidos.

Janeiro: $008CA511$
Fevereiro: $014DB255$
Março: $026EC127$
Abril: $050FD063$

Jorge informou que as senhas seguem um padrão sequencial, mês a mês. Sendo assim, a única alternativa que contém 3 caracteres presentes na senha preparada para o mês de Junho é: a) 1 - I - 6 ; b) 9 - H - 5 ; c) 1 - G - 2 ; d) 4 - F - 3 ; e) 8 - J - 1

Para decifrarmos esse enigma, precisamos analisar letras e números separadamente.

Após observar vários aspectos, podemos concluir que as letras seguem a sequência alfabética normal, sendo que a primeira coluna começa em C e a segunda coluna em A. Sendo assim, temos para a primeira coluna de letras {C, D, E, F, G, H} e a segunda coluna de letras {A, B, C, D, E, F }.

Analisando agora os grupos de números, podemos observar que $8 + 6 = 14$; $14 + 12 = 26$; $26 + 24 = 50$ e assim sucessivamente. Sendo assim, podemos concluir que o número da primeira coluna será sempre somado ao dobro do múltiplo de 6 que foi somado ao número anterior.

Na segunda coluna de números, a operação matemática utilizada foi a divsão por 2, antecedida de uma subtração de 1, para que o número seja par. Vejamos a continuação da sequência, chegando até o mês de Junho:

$$\text{Janeiro: } 008 \quad CA \quad 511$$
$$\text{Fevereiro: } (008 + 6) = 014 \;\; DB \;\; 255 = (511 - 1) \div 2$$
$$\text{Março: } (014 + 12) = 026 \;\; EC \;\; 127 = (255 - 1) \div 2$$
$$\text{Abril: } (026 + 24) = 050 \;\; FD \;\; 063 = (127 - 1) \div 2$$
$$\text{Maio: } (050 + 48) = 098 \;\; GE \;\; 031 = (063 - 1) \div 2$$
$$\text{Junho: } (098 + 96) = 1\mathbf{9}4 \;\; \mathbf{H}F \;\; 01\mathbf{5} = (031 - 1) \div 2$$

Logo, a opção correta é **9 - H - 5**.

EXEMPLO 28: As pastas de um arquivo são nomeadas com 4 caracteres alfanuméricos da seguinte maneira:

Caractere 1: uma letra escolhida entre {L, M, N, P, Q, R, S, T, U }
Caractere 2: um algarismo escolhido entre {0, 1, 2, 3, 4, 5 }

Caractere 3: uma letra escolhida entre {A, B, C, D, E, F, G, H, J, K, L }
Caractere 4: um algarismo escolhido entre {2, 3, 4, 5, 6, 7 }

Cada pasta tem um nome único e todas as pastas estão ordenadas de maneira que a pasta L0A2 é a primeira, L0A3, a segunda, seguindo a ordem alfabética e numérica, até a última pasta, de nome U5L7. Seguindo esse padrão, a pasta de nome R2D2 ocupa qual posição?

Para resolver essa questão podemos recorrer aos conhecimentos de Arranjos, ou deixar que os alunos pensem livremente sobre como solucionar esse problema. Como nosso objetivo é desenvolver o raciocínio lógico, escolheremos a segunda opção.

O primeiro passo é contar a quantidade de elementos em cada conjunto: 9, 6, 11 e 6 elementos respectivamente. Partindo agora do conjunto de pastas iniciadas com a letra L, temos:

$$L \times 6 \times 11 \times 6 = 396 \text{ pastas}$$

A mesma quantidade de pastas terá início com as letras M, N, P, Q, totalizando 1980 pastas até então.

$$M \times 6 \times 11 \times 6 = 396 \text{ pastas}$$
$$N \times 6 \times 11 \times 6 = 396 \text{ pastas}$$
$$P \times 6 \times 11 \times 6 = 396 \text{ pastas}$$
$$Q \times 6 \times 11 \times 6 = 396 \text{ pastas}$$

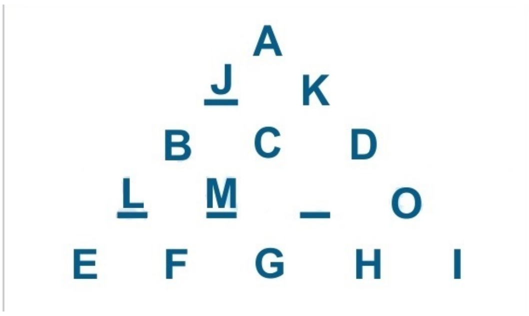
Analisando agora as pastas iniciadas com a letra R, podemos especificar mais detalhadamente até nos aproximarmos da pasta R2D2. Vejamos:

$$R0 \times 11 \times 6 = 66 \text{ pastas}$$
$$R1 \times 11 \times 6 = 66 \text{ pastas}$$
$$R2A \times 6 = 6 \text{ pastas}$$
$$R2B \times 6 = 6 \text{ pastas}$$
$$R2C \times 6 = 6 \text{ pastas}$$

Temos até agora 1980 + 66 + 66 + 6 + 6 + 6 = 2130 pastas. A próxima pasta é a que estamos procurando, ou seja, a pasta R2D2 ocupa a posição de número **2131.**

EXEMPLO 29: Complete a imagem (Figura 3.22)[6]com a letra apropriada:

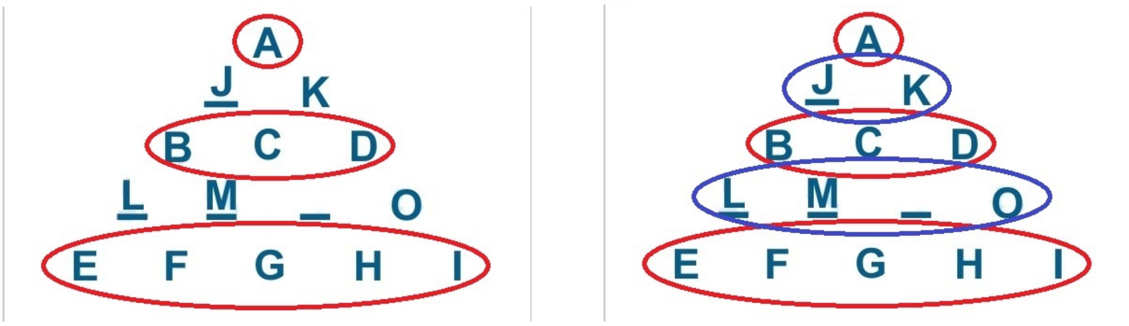
Figura 3.22: Desafio com as letras do alfabeto



(a) Fonte: Página Help Concursos no Facebook

Podemos observar que as letras apresentam um padrão simples, seguindo a sequência alfabética completa, somente alternando as linhas em que as letras são expostas, como destacamos na Figura 3.23:

Figura 3.23: Desafio com as letras do alfabeto: resolução



Logo, a letra que falta é **N**.

[6]Disponível em <https://www.facebook.com/helpconcursos/photos>. Acesso em 25 ago 2016

3.2.4 Sequências de palavras

Existem muitas possibilidades de séries envolvendo palavras: temas, fonética, iniciais, quantidade de letras, de vogais, de consoantes, etc, são pontos a serem observados e analisados neste tipo de questões. Tais atividades podem ser exploradas tanto por professores de Matemática quanto de outras disciplinas, podendo-se criar uma sequência inédita de termos, voltados para determinado tema que esteja sendo trabalhado em sala de aula, por exemplo. Vejamos alguns casos:

EXEMPLO 30: Qual a próxima palavra da sequência: Pá, Xale, Japeri, ?

a) Casa; b) Café; c) Anseio.

A primeira análise pode ser relacionada ao tema que envolve as três palavras da série, mas como não há nenhuma relação explícita, devemos partir para outras possibilidades. No caso acima, podemos perceber, ao analisar somente as vogais de cada palavra da sequência, que:

- Pá tem o seguinte conjunto de vogais: {a};
- Xale tem o seguinte conjunto de vogais: { a, e};
- Japeri tem o seguinte conjunto de vogais: { a, e, i}.

Logo, a próxima palavra deve ter como vogais o conjunto { a, e, i, o}, nesta ordem. Logo, a opção correta é a palavra **Anseio**.

EXEMPLO 31: A sequência de palavras a seguir segue uma determinada regra. Dentre as opções abaixo, qual é a próxima palavra?

Camiseta, acetona, macaco, abacaxi, mágico, . . .

a) cavalo; b) azeite; c) maionese; d) basquete; e) publicação

Como as palavras não são relacionadas por tema, podemos analisar a escrita de cada uma delas. Observando atentamente podemos perceber que a letra C ocupa a primeira posição na palavra Camiseta, a segunda posição na palavra Acetona, a terceira posição na palavra Macaco, e assim sucessivamente. Dessa forma, a palavra que ocupará a sexta posição deve ter a letra C na sexta casa. Logo, a opção correta é **Publicação**.

EXEMPLO 32: A seguinte sequência de palavras foi escrita obedecendo a um padrão lógico:

Pata - Realidade - Tucupi - Voto - ?

Considerando que o alfabeto é o oficial, a palavra que, de acordo com o padrão estabelecido, poderia substituir o ponto de interrogação é:

a) Qualidade; b) Sadia; c) Waffle; d) Xampu; e) Yesterday.

Podemos analisar esta questão por dois ângulos distintos (o que não descarta a possibilidade de haver uma terceira possibilidade, ou mais). Vejamos:

Primeira solução: Se observarmos as iniciais de cada palavra que compõe a série, teremos:

P, R, T, V, ...

Comparando esta sequência com a ordem alfabética original, notamos com facilidade que há uma letra oculta em cada intervalo.

P, Q, R,S, T, U, V, W, X, ...

Dessa forma, a próxima inicial será **X** e a palavra que completa a série é **Xampu**.

Segunda solução: Olhando por outro ângulo, podemos observar que as letras que finalizam cada palavra também estão em sequência:

A, E, I, O, ...

Dessa forma, podemos concluir que a próxima palavra termina em **U**, ou seja, **Xampu**.

3.2.5 Sequências numéricas envolvendo figuras

Neste tipo de atividade, as figuras podem fazer parte da sequência, como uma série de objetos, ou podem ser uma base para os cálculos e linhas de pensamento. Uma determinada base pode dar o sentido ou indicar a ordem em que a série deve ser visualizada. Devemos sempre analisar os sentidos horário, anti-horário, direita, esquerda, acima, abaixo, pêndulo etc. Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 33: Descubra o valor da ? na imagem abaixo (Figura 3.24):

Figura 3.24: Desafio: sequência de números apresentados no sentido horário

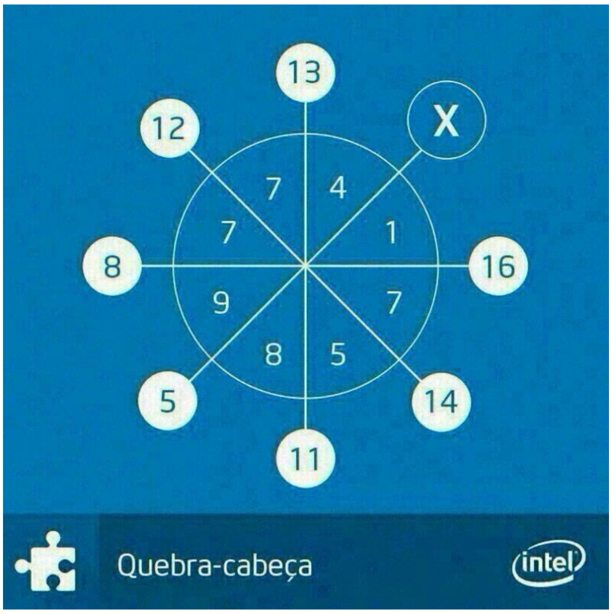
Podemos observar que há uma seta, na própria imagem, indicando o sentido horário. Dessa forma, devemos seguir a indicação e analisar as possíveis relações entre os números sobre a figura. Analisando a partir das quatro operações básicas, conseguimos encontrar a seguinte relação:

$$1 \times 1 = 1$$
$$1 \times 2 = 2$$
$$2 \times 3 = 6$$
$$6 \times 4 = 24$$

É fácil ver que os resultados estão sendo multiplicados de acordo com a sequência dos números naturais. Dessa forma, podemos concluir que a próxima operação a ser realizada será: $24 \times 5 = 120$. Logo, a ? equivale ao número **120** e a opção correta é a letra C.

EXEMPLO 34: Qual o valor desconhecido na Figura 3.25[7]?

Figura 3.25: Quebra-cabeça Intel



(a) Fonte: Página na Intel no Twitter

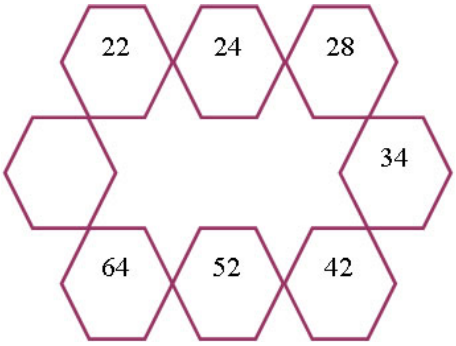
Neste tipo de questão, é importante permitir que os alunos analisem todas as possibilidades e orientar que, após encontrar alguma relação entre os números, testem com os demais para ter certeza da validade do padrão, seguindo o princípio da indução matemática. No caso acima, temos que a soma de dois números que estejam lado a lado dentro do círculo maior, está representada no círculo menor imediatamente oposto. Temos então:

$$
\begin{gathered}
9+7=16 \\
7+7=14 \\
7+4=11 \\
4+1=5 \\
1+7=8 \\
7+5=12 \\
5+8=13 \\
8+9=x\text{, ou seja, } x=17.
\end{gathered}
$$

[7]Disponível em <https://twitter.com/intelbrasil>. Acesso em 25 ago 2016.

EXEMPLO 35: Complete a Figura 3.26[8] com o número que está faltando:

Figura 3.26: Desafio da estrela



(a) Fonte: Brasil Escola

Se analizarmos a sequência numérica no sentido horário, poderemos observar que os números vão crescendo num padrão regular. Vejamos:

$$22 + 2 = 24$$
$$24 + 2 + 2 = 28$$
$$28 + 2 + 2 + 2 = 34$$
$$34 + 2 + 2 + 2 + 2 = 42$$
$$42 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 52$$
$$52 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 64$$

Dessa forma, temos que $64 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = \mathbf{78}$, ou seja, o número que falta é 78.

EXEMPLO 36: Qual número preenche logicamente o espaço em branco?

2	9	7
3	11	8
5	7	
4	10	6

[8]Disponível em <http://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/sequencia-logica.htm>. Acesso em 25 ago 2016.

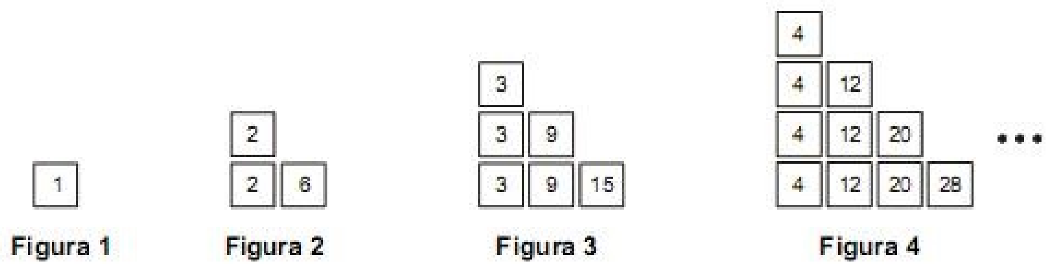
Levando em consideração que temos uma figura com 4 linhas e 3 colunas e, analisando as possibilidades de relações nesses sentidos, chegamos à seguinte conclusão: a coluna do meio é resultado da soma dos elementos das extremidades, em cada linha. Vejamos:

$$2 + 7 = 9$$
$$3 + 8 = 11$$
$$6 + 4 = 10$$

Logo, seguindo este padrão de cálculo, temos que $5 + 2 = 7$, ou seja, o espaço em branco corresponde ao número 2.

EXEMPLO 37: Considere a sequência de figuras abaixo (Figura 3.27)[9], em que as fichas numeradas e o seu posicionamento obedecem a uma mesma lógica de formação:

Figura 3.27: Desafio dos números em forma de escada



(a) Fonte: Casa das questões

Qual é a soma de todos os números que aparecem na formação da figura 5 **?**

Podemos observar que cada figura tem a quantidade de colunas e de linhas iniciais iguais à posição que ocupa na sequência. Notamos também que a primeira coluna de cada figura segue a sequência dos números naturais; a segunda coluna equivale à primeira coluna multiplicada por 3; a terceira coluna é a primeira coluna multiplicada por 5; a quarta coluna é a primeira coluna multiplicada por 7. Dessa forma, como as multiplicações estão seguindo a sequência

[9]Disponível em <https://acasadasquestoes.com.br/simulados/resolver/q3460>. Acesso em 25 ago 2016.

dos números ímpares, temos que a quinta coluna será resutado da multiplicação da primeira coluna pelo número 9. Temos então a Figura 3.28:

Figura 3.28: Desafio dos números em forma de escada: resolução

5				
5	15			
5	15	25		
5	15	25	35	
5	15	25	35	45

(a) Fonte: elaborada pela autora

Logo, a soma dos valores que aparecem na figura 5 é 275.

3.3 Jogos

Jogos educativos podem facilitar e tornar mais interessante, desafiador e prazeroso o processo de ensino-aprendizagem. Tais atividades, se bem estruturadas e utilizadas no momento certo, podem ser ótimos recursos didáticos para os educadores e instrumentos ricos para a construção do conhecimento.

Ao longo da história, a parceria entre jogos e educação foi estudada e colocada em prática por pensadores de renome. O filósofo russo Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) defendia uma educação através do contato com a natureza e propunha o uso de jogos, brinquedos e esportes, instrumentos variados, linguagem, música e Matemática, em substituição a outra disciplina rígida, e ao uso excessivo da memória. Segundo Rousseau (2004, p.175), “a instrução das crianças é um ofício em que é necessário saber perder tempo, a fim de ganhá-lo”.

Em seu livro intitulado "Jogando com a Matemática", Isabel Lara (2003) sugere aos professores romper com o tradicional, oferecendo novas estratégias pedagógicas baseadas nos jogos. Para a autora, os jogos, além de facilitarem o processo de ensino aprendizagem, possibilitam o trabalho com uma matemática prazerosa, interessante e desafiante, capaz de desenvolver o raciocínio lógico, a criatividade, a capacidade de manejar situações reais e estimular o pensamento independente.

Podemos utilizá-los de várias formas e em vários formatos: há jogos de tabuleiro, jogos de caneta e papel, jogos online etc. Veremos abaixo alguns exemplos de jogos que podem ser utilizados com o intuito de desenvolver o pensamento lógico matemático.

EXEMPLO 38: Sudoku

Sudoku é um jogo de raciocínio e lógica. Apesar de ser bastante simples, promove uma intensa atividade cerebral na área responsável pela memória, e a longo prazo promove um ganho importante. Além disso, durante o jogo é preciso elaborar estratégias para inserir os números que faltam nas linhas e nas colunas, respeitando as regras pré-estabelecidas: preencher os espaços vazios com algarismos de 1 a 9. Os algarismos não podem se repetir nas linhas verticais e horizontais, nem nos quadrados menores (3x3). Observação: Essas regras são válidas para o Sudoku tradicional. Algumas variações do Sudoku (Hyper Sudoku, Killer Sudoku, etc) apresentam regras mais específicas.

O nome Sudoku vem do japonês, sendo que SU significa "número" e DOKU significa "sozinho". Apesar do nome ser japonês, a criação do jogo é creditada ao matemático suíço Leonhard Euler (1707 - 1783), que teria criado as bases do jogo durante as horas vagas.

Em 1974, após algumas modificações, um jogo chamado "Number Place" foi publicado pela editora americana Dell Magazines, editora responsável por revistinhas de passatempos de raciocínio e lógica. O jogo atravessou o pacífico e chegou ao Japão e, em 1984, o jogo apareceu na revista japonesa Monthly Nikolist. Em pouco tempo virou um sucesso na terra do sol nascente. Como utiliza somente números, ou seja, não depende de um alfabeto, o jogo se espalhou rapidamente pelo mundo e, atualmente, pode ser considerado um "passatempo internacional".

Na Figura 3.29[10] é possível ver a imagem da versão online do jogo tradicional:

Figura 3.29: Sudoku tradicional

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

(a) Início. Fonte: Wikipedia

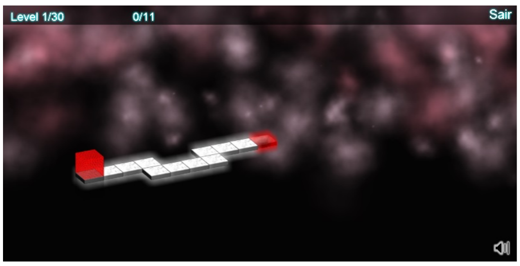
5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

(b) Final. Fonte: Wikipedia

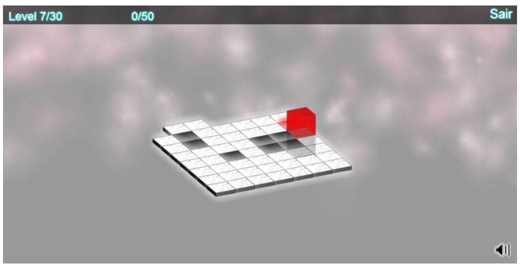
EXEMPLO 39: Jogo online - Cubo vermelho

Jogo online de estratégia, cujo objetivo é levar o cubo vermelho até a base vermelha, passando pelos pisos, utilizando as setas do teclado. Pelos pisos brancos é possível passar apenas uma vez; pelos pisos pretos, é possível passar duas vezes e os pisos azuis funcionam como teletransporte. Há 27 níveis, o que torna o jogo bastante desafiador conforme as mudanças de fase acontecem. Vence o jogo quem conseguir concluir todas as fases. Abaixo podemos observar na Figura 3.30[11] a imagem das fases 1 e 7 do jogo online.

Figura 3.30: Jogo online: Cubo vermelho



(a) Fase 1. Fonte: Rachacuca



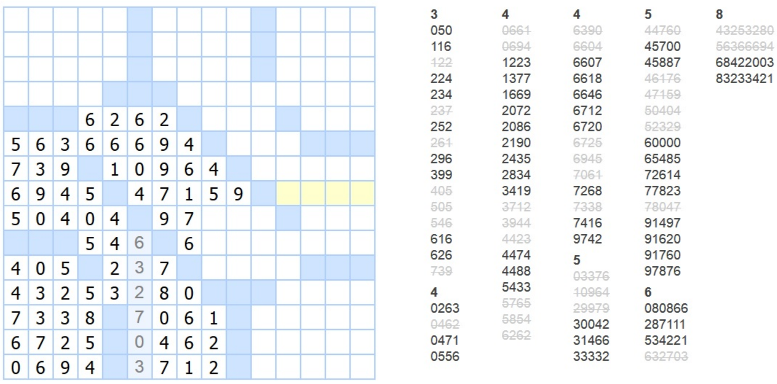
(b) Fase 7. Fonte: Rachacuca

[10] Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Sudoku>. Acesso em 25 ago 2016.
[11] Disponível em <https://rachacuca.com.br/jogos/cubo-vermelho/>. Acesso em 25 ago 2016.

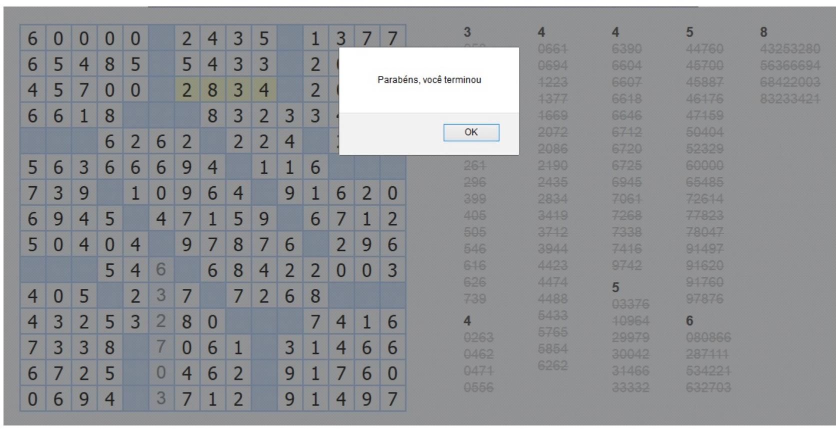
EXEMPLO 40: Jogo - Quase nada / Numerox

Jogo semelhante às palavras cruzadas, mas que usa números ao invés de palavras. Pode ser apresentado na forma online ou impressa, e solicita do jogador um pensamento estratégico e lógico. São apresentados números com diferentes quantidades de algarismos, e à medida em que as lacunas vão sendo preenchidas, os números usados devem ser riscados, pois cada número é utilizado uma única vez no jogo. Ao final do jogo, todos os números devem ter sido utilizados. Abaixo podemos ver a Figura 3.31[12], com imagens do início e do final da versão online do jogo.

Figura 3.31: Jogo: Quase nada / Numerox



(a) Início. Fonte: Rachacuca



(b) Final. Fonte: Rachacuca

[12]Disponível em <https://rachacuca.com.br/logica/quase-nada/>. Acesso em 25 ago 2016.

EXEMPLO 41: Jogo online - 2048

Jogo online de raciocínio, cujo objetivo é somar os blocos iguais até totalizar 2048. Para tal, o jogador deve usar as setas do teclado para movimentar os blocos (que tem valor inicial igual a 2) e, ao se chocarem, blocos de valores iguais se somam e se tornam um único bloco com o novo valor. O objetivo é movimentar as setas de forma estratégica, para que seja possível continuar com os movimentos e chegar à soma final de 2048. Após movimentações com a seta para a direita, para baixo, para cima e para a esquerda, as somas vão sendo realizadas. A cada movimentação aparece um novo bloco, em local aleatório, com valor 2. Vence o jogo quem conseguir chegar ao valor de 2048. A Figura 3.32[13] apresenta três etapas do jogo.

Figura 3.32: Jogo online: 2048

(a) Início. Fonte: Rachacuca (b) Meio. Fonte: Rachacuca (c) Final. Fonte: Rachacuca

EXEMPLO 42: Mancala

Jogo milenar de origem africana, data de 2000 anos antes de Cristo, mas há relatos de que sua criação tenha mais de 7000 anos, o que o torna o jogo mais antigo da história. Mancala (do árabe *naqaala* - "mover") é, na verdade, a denominação genérica de aproximadamente 200 jogos diferentes. Há duas vertentes principais da Mancala: uma asiática, mais simples e jogada principalmente por mulheres e crianças; e a vertente africana, com regras mais complexas e

[13]Disponível em <https://rachacuca.com.br/raciocinio/2048/>. Acesso em 25 ago 2016.

variadas, jogada principalmente por homens (Figura 3.33 a)[14]. Há autores que consideram o jogo mais complexo que o xadrez, pois ao movimentar as peças toda configuração é alterada, tanto do jogador quanto do seu oponente.

Figura 3.33: Tabuleiro de Mancala

(a) Jogando Oware em Gana. Fonte: Exploring Africa

(b) Tabuleiro de madeira. Fonte: A página

Um jogo bastante interessante, com bases filosóficas, é jogado com pequenas pedras ou com sementes, num tabuleiro com doze buracos pequenos (seis de cada lado) e dois buracos maiores, onde ficarão armazenadas as sementes conquistadas por cada jogador. A movimentação das peças tem um sentido de “semeadura” e “colheita”. Cada jogador deve recolher sementes (que, neste momento, não pertencem a nenhum dos jogadores), e semeá-las nas casas do tabuleiro, inclusive nas casas do adversário, no sentido anti-horário. Seguindo as regras, em dado momento o jogador faz a colheita de sementes, que passam a ser suas. Ganha quem chegar ao final com o maior número de sementes. Não há sorte envolvida no jogo, somente raciocínio lógico e matemático.

É possível construir o tabuleiro em madeira (Figura 3.33 b)[15], metal, ou utilizando materiais como embalagens plásticas ou de ovos. Há também a versão *online*, em que o jogador disputa com o computador.

[14] Disponível em <http://dev2.matrix.msu.edu/expafr/games-and-recreation/>. Acesso em 25 ago 2016.

[15] Disponível em <http://apaginaff5.blogspot.com.br/2011/01/jogos-de-mancala.html>. Acesso em 25 ago 2016.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal dessa dissertação foi apresentar um portfólio de atividades e questões que podem ser resolvidas de forma dedutiva, com o intuito de desenvolver o raciocínio lógico e a criatividade.

Iniciamos com uma apresentação da trajetória da Educação Profissional no Brasil, seus objetivos primários e os atuais, uma grande modificação do ponto de vista do público alvo e de suas necessidades: o que antes era voltado para os desvalidos da sorte, hoje tem como clientela pessoas das mais diversas formações, que buscam uma nova relação com o mundo do trabalho e/ou um aprimoramento da prática já exercida, mas ainda não certificada.

Em seguida, trouxemos uma fundamentação sobre Raciocínio Lógico e seus métodos: dedutivo, indutivo e abdução, e a abordagem dos PCN sobre a temática, que é importante para o desenvolvimento do pensamento crítico, da criatividade e da capacidade expressiva.

No último capítulo, trouxemos uma base sobre a importância da resolução de problemas para o desenvolvimento do raciocínio lógico, nosso foco principal. Em seguida, foi apresentado um portfólio com várias questões, atividades, desafios e jogos, antecedidas de suas bases matemáticas, quando necessário.

O material apresentado visa a sensibilizar professores para trabalhar nesta perspectiva, fugindo do tradicionalismo habitual, instigando os alunos a exercitarem seus cérebros através de questões mais desafiadoras.

Sugerimos que este material seja apenas um ponto de partida e que, a partir dessa sensibilização, novas práticas sejam pesquisadas e utilizadas com o objetivo de desenvolver o raciocínio lógico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] AGÊNCIA BRASIL: **Seminário discute diretrizes para a Educação Profissional e a Distância.** Disponível em: <http://www.agenciabrasil.gov.br/noticias>. Acesso em 20 jun 2007.

[2] ALENCAR, E. M. L. S. de. **A estimulação do pensamento criador.** Educação, Brasília. DF, v.22, 1976.

[3] ALVARENGA, Mauro. **Jogos antigos: Mancala**. Disponível em <http://www.jogos.antigos.nom.br/mancala.asp>. Acesso em 18 mai 2016.

[4] APROVA CONCURSOS. **Questões de concursos.** Disponível em <https://www.aprovaconcursos.com.br/questoes-de-concurso/questoes/banca/FCC/cargo>. Acesso em 07 abr 2016.

[5] BRASIL. Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Raciocínio Lógico**. Disponível em <http://www.fnde.gov.br/programas/dinheiro-direto-escola/dinheiro-direto-escola-consultas/item/4080-item-01>. Acesso em 15 ago 2016.

[6] ——. Ministério da Educação. **Educação Profissional: Legislação Básica**. Brasília, 2001.

[7] ——. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais.** Brasília: MEC/SEF, 1998. 436 p.

[8] ——. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1997. 142 p.

[9] ——. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Diretrizes curriculares nacionais para a Educação profissional de nível técnico.** Brasília: MEC/SEMT, 2000.

[10] BRASIL ESCOLA. **Sequência Lógica**. Disponível em <http://educador.brasilescola.uol.com.br/estrategias-ensino/sequencia-logica.htm>. Acesso em 03 jun 2016.

[11] CONCURSOS PÚBLICOS. **Facebook**. Disponível em <https://www.facebook.com/Concursos-Públicos-1022805564443303/timeline>. Acesso em 29 mar 2016.

[12] CORDÃO Francisco Aparecido. **As novas diretrizes curriculares nacionais para a educação básica e suas implicações na educação profissional técnica de nível médio.** Boletim Técnico Senac: a Revista da Educação Profissional, Rio de Janeiro, v. 37, n° 3, set./dez. 2011.

[13] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática. Ensino Médio**. São Paulo: Scipione, 2008.

[14] ——. **Didática da resolução de problemas de Matemática.** São Paulo: Editora Ática, 2002.

[15] ENRIQUEZ, Susana Paz. **Testes de Lógica**. Colaboração da Equipe Editorial Libsa; Trad. Alberto Allende. São Paulo: Marco Zero, 2010.

[16] HELP CONCURSOS. **Desafios: lógica da sequência de números.** Disponível em <http://www.helpconcursos.com.br/blog/desafios>. Acesso em 27 mai 2016.

[17] IMENES, Luiz Márcio Pereira. **Matemática. 7 ° série** - São Paulo: Scipione, 1997.

[18] LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática de 5 ° a 8 ° série**. São Paulo: Rêspel, 2003.

[19] LUPINACCI, M. L. V. e BOTIN, M. L. M. **Resolução de problemas no ensino de matemática.** Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, Recife, p.$1-5$.

[20] MORGADO, Augusto César. CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Matemática Discreta**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[21] MUNDO EDUCAÇÃO. **Exercícios sobre conjuntos.** Disponível em: <http://exercicios.mundoeducacao.bol.uol.com.br/exercicios-matematica/exercicios-sobre-operacoes-com-conjuntos.htm>. Acesso em 07 jun 2016.

[22] PAIS, Luis Carlos. **Didática da Matemática: uma análise de influência francesa.** Belo Horizonte. Autêntica, 2001.

[23] PLAY MANCALA. **Mancala.** Disponível em <http://play-mancala.com/>. Acesso em 28 mai 2016.

[24] POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

[25] QCONCURSOS.COM. **Questões de concursos.** Disponível em <https://www.qconcursos.com/questoes-de-concursos/questao/3529badb-ad>. Acesso

em 11 abr 2016.

[26] RACHACUCA. Disponível em <https://rachacuca.com.br/>. Acesso em 04 Abr 2016.

[27] ROUSSEAU, Jean Jacques. **Da Educação**: tradução, Roberto Leal Ferreira, 3 ° ed. - São Paulo: Martins Fontes, 2004.

[28] SÁ, Robison. **O número de ouro.** Disponível em <http://www.infoescola.com/matematica/o-numero-de-ouro/>. Acesso em 26 ago 2016.

[29] SENAC. **Formação Inicial e Continuada.** Disponível em <http://www.senac.br/cursos/formacao-inicial-e-continuada.aspx>. Acesso em 12 out 2016.

[30] TAHAN, Malba. O homem que calculava. Rio de Janeiro: 58 ° ed. - Record, 2002.

[31] YOUSSEF, Antônio Nicolau. SOARES, Elizabeth. FERNANDEZ, Vicente Paz. **Matemática: Volume Único para o Ensino Médio** - São Paulo: Scipione, 2004. - (Coleção De olho no mundo do trabalho).