



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

LIÇÕES ELEMENTARES SOBRE LOGARITMOS

Fabício José da Silva Viana

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato

BELÉM
Julho de 2016

Fabrcio José da Silva Viana

LIES ELEMENTARES SOBRE LOGARITMOS

Dissertao submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Pará, como um pré-requisito para a obteno do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Renato Fabrcio Costa Lobato

BELÉM
Julho de 2016

Viana, **Fabício José da Silva, 1976 -**

LIÇÕES ELEMENTARES SOBRE LOGARITMOS/
Fabício José da Silva Viana. - 2016.

Orientador: Renato Fabrício Costa Lobato.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Pós-Graduação em Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2016.

1. Logaritmos. 2. Matemática-Estudo e ensino. 3. Motivação na educação-Matemática. 4. Logaritmos-Conhecimentos e aprendizagem. 5. Estratégias de aprendizagem-Matemática. I. Título.

CDD 22. ed. 512.922.

Fabício José da Silva Viana

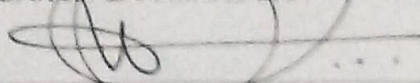
LIÇÕES ELEMENTARES SOBRE LOGARITMOS

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) da Universidade Federal do Pará, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

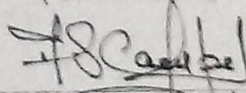
Conceito: Aprovado

Aprovada em 27 de Julho de 2016, por

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Renato Fabrício Costa Lobato
FACET/UFGA
(Orientador)



Prof. Dr. Anderson David de Souza Campelo
FACMAT/UFGA



Prof. Dr. Valcir João da Cunha Farias
FAEST/UFGA

BELEM

Julho de 2016

A minha saudosa Vó Osmarina Cassiano Viana.

“Na maior parte das ciências, uma geração põe abaixo o que a outra construiu, e o que a outra estabeleceu a outra desfaz. Somente na Matemática é que cada geração constrói um novo andar sobre a antiga estrutura.”
(Hermann Hankel)

Agradecimentos

Na feitura deste trabalho tive diversos contratempos. Falta de tempo (por conta do trabalho), obrigações com a família, entre outras preocupações foram impecílios que tive superar nessa jornada. E sem a compreensão e ajuda, certamente minha empreitada seria mais difícil. Assim, faço meus sinceros agradecimentos pela, de alguma forma, colaboração em mais essa conquista na vida.

✓ A Deus pai todo poderoso, por todas as coisas boas e más que me aconteceram. Cada uma delas, ao seu modo, me fizeram chegar onde eu cheguei, e me fizeram ser quem eu sou. Foi a minha jornada de tropeços, vitórias e derrotas, que me fez enxergar o verdadeiro significado e beleza da vida.

✓ A meus pais José das Graças Cassiano Viana e Alba Célia da Silva Viana, que mesmo com todas as dificuldades nunca deixaram de torcer pelo meu sucesso, me dando amor e carinho.

✓ A minha avó Osmarina Cassiano Viana que durante o nosso convívio fez o que pode em pró de minha educação).

✓ A minha esposa **Luciângela Santos Baia Viana**, grande parceira e incentivadora nessa jornada.

✓ Aos **amigos da turma PROFMAT 2014/UFGA**, em especial Rogério Sena e Márcio Pinheiro, **pelas várias contribuições no decorrer do curso.**

✓ Ao meu orientador professor **Renato Fabrício Costa Lobato** pela orientação desse trabalho, pelas aulas ministradas em várias disciplinas do programa, principalmente pela amizade que começou 1998, ainda na graduação. Aqui o agradeço como mestre e amigo.

✓ Aos meus filhos, Ana Sophia Baia Viana e Heitor Cassiano Baia Viana, por serem minha motivação de crescimento.

✓ A minha sogra Rosângela Campos dos Santos, pela ajuda e cuidado com meus filhos.

✓ Enfim, a todos que de forma positiva, tiveram alguma contribuição na conquista do Título de Mestre em Matemática.

RESUMO

Viana, Fabrício José da Silva; Lobato, Renato Fabrício Costa **LIÇÕES ELEMENTARES SOBRE LOGARITMOS**. Belém do Pará, 2016. 39p. Dissertação de Mestrado - Instituto de Ciências Exatas e Naturais, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional, Universidade Federal do Pará.

No ensino da matemática, os Logaritmos são tidos pela grande maioria dos discentes como um dos conteúdos mais difíceis de se aprender, no 1º ano do ensino médio. Neste trabalho mostraremos um pouco do contexto histórico do surgimento dos logaritmos, características da função logarítmica e uma representação geométrica para os logaritmos naturais. Também conta com um complemento sobre logarítmico e cálculo diferencial integral que servirá de apoio e motivação para professores e alunos. Esperamos contribuir, com nosso trabalho, de forma positiva para o interesse e aprimoramento de professores no assunto explanado e, principalmente, para a motivação dos alunos em estudar e compreender melhor a importância dos logaritmos no desenvolvimento das Ciências.

Palavras-chave: logaritmos, caracterização da função logarítmica, área da faixa de hipérbole, montante, meia vida.

ABSTRACT

Viana, Fabrício José da Silva; Lobato, Renato Fabrício Costa **ELEMENTARY LESSONS ABOUT LOGARITHMS**. Belém do Pará, 2016. 39p.

Masters dissertation - Institute of Exact and Natural Sciences, Professional Master's Program in Mathematics in National Network, Federal University of Pará.

In the teaching of mathematics, the logarithms are taken by most students as one of the most difficult content to learn in the 1st year of high school. In this work we'll show a bit of the historical context of the emergence of Logarithms, logarithm's function features and a geometric representation for natural logarithms. It also has a complement about logarithmic and differential integral calculus that will support and motivate teachers and students. We hope to contribute with our work positively to the interest and improvement of teachers in the subject explained, mainly, to the student's motivation to study and better understand the importance of logarithms in the science's development.

keywords: logarithms, featuring the logarithmic function, hyperbolic range area, amount, half life.

Lista de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 4.1 | Ramo positivo da Hipérbole | 22 |
| 4.2 | Faixa da Hipérbole | 23 |
| 4.3 | Intervalo $[a, b]$ | 24 |
| 4.4 | Polígono Inscrito em \mathcal{H}_a^b | 24 |
| 4.5 | Área da Faixa de Hipérbole | 25 |
| 4.6 | Áreas H e H_k | 26 |
| 4.7 | Áreas P e P' | 26 |
| 4.8 | $\text{Área}(\mathcal{H}_a^b) + \text{Área}(\mathcal{H}_b^c) = \text{Área}(\mathcal{H}_a^c)$ | 27 |
| 4.9 | Gráfico de $\ln(x)$ | 28 |
| 4.10 | Número e | 31 |

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 8 |
| 2 | Um Breve Histórico do Surgimento dos Logaritmos | 11 |
| 3 | Caracterização da Função Logarítmica | 14 |
| 3.1 | Definição Convencional | 14 |
| 3.1.1 | Propriedade 1: $\log_b(1) = 0$ | 15 |
| 3.1.2 | Propriedade 2: $\log_b(b) = 1$ | 15 |
| 3.1.3 | Propriedade 3: $\log_b(b^m) = m$ | 15 |
| 3.1.4 | Propriedade 4: $b^{\log_b(m)} = m$ | 15 |
| 3.1.5 | Propriedade 5: $\log_b(a) = \log_b(c) \Rightarrow a = c$ | 15 |
| 3.1.6 | Propriedade 6: $\log_b(a.c) = \log_b(a) + \log_b(c)$ | 16 |
| 3.1.7 | Propriedade 7: $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c)$ | 16 |
| 3.1.8 | Propriedade 8: $\log_b(x^n) = n \log_b(x)$ | 16 |
| 3.1.9 | Propriedade 9: $\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$ | 17 |
| 3.2 | Definição Formal | 17 |
| 3.2.1 | Consequência 1 : $L(x)$ é injetiva. | 17 |
| 3.2.2 | Consequência 2 : $L(1) = 0$ | 18 |
| 3.2.3 | Consequência 3 : $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$ | 18 |
| 3.2.4 | Consequência 4 : $0 < x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow L(x_1) < 0 < L(x_2)$ | 18 |
| 3.2.5 | Consequência 5 : $L(x_1/x_2) = L(x_1) - L(x_2)$ | 18 |
| 3.2.6 | Consequência 6 : $L(x^r) = r.L(x)$ | 19 |
| 3.2.7 | Consequência 7 : L é ilimitada Inferiormente e Superiormente | 20 |
| 4 | Logaritmos e a Área de uma faixa de Hipérbole | 22 |
| 4.1 | Faixa de uma hipérbole | 23 |
| 4.2 | Área da faixa de hipérbole | 24 |
| 4.3 | Propriedades das áreas das faixas de uma hipérbole | 25 |
| 4.4 | Logaritmo Natural ou Neperiano | 28 |
| 5 | Aplicações | 32 |
| | Referências Bibliográficas | 38 |

Capítulo 1

Introdução

PROSTAFÉRESE

A descoberta dos logaritmos deveu-se sobretudo à grande necessidade de simplificar os cálculos excessivamente trabalhosos para a época, principalmente na área da astronomia, entre outras. Através dos logaritmos, pode-se transformar as operações de multiplicação em soma, de divisão em subtração, entre outras transformações possíveis, facilitando sobremaneira os cálculos.

No final do século XVI, segundo Boyer(1906 - 1976), foi um período onde muito estudos, sobre trigonometria estavam sendo realizados em todas as partes da Europa. E já eram conhecidas um grupo de fórmulas que transformavam um produto de funções numa soma ou diferença (regras de prostaférese). As fórmulas são:

$$(i) \cos A \cdot \cos B = \frac{\cos(A+B)}{2} + \frac{\cos(A-B)}{2}$$

$$(ii) \cos A \cdot \sin B = \frac{\sin(A+B)}{2} - \frac{\sin(A-B)}{2}$$

$$(iii) \sin A \cdot \cos B = \frac{\sin(A+B)}{2} + \frac{\sin(A-B)}{2}$$

$$(iv) \sin A \cdot \sin B = \frac{\cos(A-B)}{2} - \frac{\cos(A+B)}{2}$$

Os antecessores de Napier não conhecendo ainda os logaritmos, usavam esse método para o cálculo do produto de dois números. Esse método foi obtido, considerando as transformações trigonométricas.

Vamos mostrar como eles procederam para encontrar uma fórmula que transforma o produto em uma soma. Consideremos as seguintes transformações trigonométricas:

$$(1) \sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x$$

$$(2) \sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x$$

Somando (1) e (2) membro a membro, tem-se

$$\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = 2(\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{cos}y)$$

então,

$$\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{cos}y = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)].$$

Como exemplo vamos efetuar a multiplicação $0,17365 \times 0,99027$, usando a fórmula:

$$\operatorname{sen}x \cdot \operatorname{cos}y = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)].$$

Fazendo uma consulta na tabela trigonométrica, temos que

$$\operatorname{sen}10^\circ = 0,17365$$

$$\operatorname{cos}8^\circ = 0,99027$$

assim,

$$\operatorname{sen}10^\circ \cdot \operatorname{cos}8^\circ = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(18^\circ) + \operatorname{sen}(2^\circ)]$$

pelas tábuas, segue que

$$\operatorname{sen}18^\circ = 0,30902 \text{ e } \operatorname{sen}2^\circ = 0,03490$$

tem-se,

$$\operatorname{sen}10^\circ \cdot \operatorname{cos}8^\circ = \frac{1}{2} \cdot [\operatorname{sen}(18^\circ) + \operatorname{sen}(2^\circ)] = \frac{1}{2} \cdot (0,30902 + 0,03490) = \frac{1}{2} \cdot 0,34392:$$

Portanto, $0,17365 \times 0,99027 = 0,17196$.

Muitas são as desvantagens desse método trigonométrico, algumas delas é a dificuldade em aplicá-lo para produto de mais de três fatores e a impossibilidade para o cálculo de potências e raízes. Por esse motivo John Napier, entre outros, iniciaram o estudo sobre os logaritmos.

Atualmente, os logaritmos são uma ferramenta de aplicação em diversas áreas de conhecimento, por isso, ficamos motivados a escrever sobre o assunto. Também devido a experiência de anos de magistério, ministrando esse conteúdo, criou-se um fascínio pela operacionalização na aplicação de sua definição e propriedades em prol da resolução de vários problemas em diversas Ciências.

Neste trabalho, queremos mostrar uma forma diferente de apresentar os logaritmos no ensino básico. Além disso, motivar professores e alunos a pesquisar sobre esse assunto que é cheio de particularidades e um tanto complexo.

Para o embasamento deste trabalho, foram colhidas informações importantes em conversas com professores de matemática onde os mesmos apontaram suas maiores dificuldades em ministrar esse assunto. Bem como, teve como referência a leitura de vários livros e artigos

que versavam sobre logaritmos.

Este trabalho está dividido em 5 capítulos.

O primeiro capítulo é essa introdução.

O segundo capítulo trás um breve histórico sobre os logaritmos.

O terceiro capítulo trás a caracterização da função logarítmica.

O quarto capítulo trás um interpretação geométrica para os logaritmos, a área da faixa de uma Hipérbole.

O quinto capítulo é o apêndice, constando algumas aplicações dos logaritmos.

Capítulo 2

Um Breve Histórico do Surgimento dos Logaritmos

Os logaritmos, como instrumento de cálculo, surgiram para realizar simplificações, uma vez que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

John Napier (Edimburgo, 1550 - 4 de abril de 1617) - matemático, físico, astrônomo, astrólogo e teólogo escocês - foi um dos que impulsionaram fortemente seu desenvolvimento, perto do início do século XVII. Ele é considerado o inventor dos logaritmos, muito embora outros matemáticos da época também tenham trabalhado com ele.

Já antes dos logaritmos, a simplificação das operações era realizada através das conhecidas relações trigonométricas, que relacionam produtos com somas ou subtrações. Esse processo de simplificação das operações envolvidas passou a ser conhecido como **prostaférese**, sendo largamente utilizado numa época em que as questões relativas à navegação e à astronomia estavam no centro das atenções. De fato, efetuar multiplicações ou divisões entre números muito grandes, ou muito pequenos era um processo bastante dispendioso em termos de tempo. A simplificação, provocada pela **prostaférese**, era relativa e, sendo assim, o problema ainda permanecia.

O método de Napier baseou-se no fato de que associando aos termos de uma progressão geométrica

$$b, b^2, b^3, b^4, b^5, \dots, b^n, \dots$$

os termos da progressão aritmética

$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$$

então ao produto de dois termos da primeira progressão, $b^m \times b^p$, está associada a soma $m + p$ dos termos correspondentes na segunda progressão.

Considerando, por exemplo,

| | | | | | | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-------|
| PA | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| PG | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 | 512 | 1024 | 2048 | 4096 | 8192 | 16394 |

Para efetuar, por exemplo, 256×32 , basta observar que:

- 256 na segunda linha corresponde a 8 na primeira;
- 32 na segunda linha corresponde a 5 na primeira;
- como $8 + 5 = 13$;
- 13 na primeira linha corresponde a 8192 na segunda.

Assim, $256 \times 32 = 8192$ resultado esse que foi encontrado através de uma simples operação de adição.

O que Napier fez foi uma tabela similar a esta, com a ideia de ter facilitado o cálculo do produto de dois números quaisquer. Porém, ele precisaria que a sequência de números da segunda linha fosse formada por números cuja razão se aproximasse de 1, ou seja, ele estava buscando reduzir as lacunas entre os números da segunda linha, o que lhe daria maioria chances de encontrar quaisquer que fosse o produto procurado. Na tabela exemplificada anteriormente a razão é 2, isso gera grandes lacunas entre os números dessa sequência.

A fim de que os números da progressão geométrica estivessem bem próximos, para ser possível usar interpolação e preencher as lacunas entre os termos na correspondência estabelecida, evitando erros muito grosseiros, Napier escolheu para razão o número

$$b = \left(1 - \frac{1}{10^7}\right) = 0,9999999$$

que é bem próximo de 1 e para resolver o problema dessas casas decimais que se repetem, ele resolveu multiplicar as potências obtidas com essa razão por 10^7 . A tabela que ele propôs, como reflexo dessas conclusões, foi formada, na primeira linha, pelos expoentes L e na segunda por números N , ficando na forma seguinte:

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$$

O expoente L foi por ele chamado de logarítmo de N , sendo a palavra logarítmo de origem no latim, onde *logos* = razão e *arítmōs* = número. O Método dos Logaritmos significava para Napier o desejo de expressar a criação de um método de cálculo a partir de razões numéricas ou da proporção de números. Perceba que fazendo $L = 0$ obteremos $N = 10^7$, o que quer dizer que, para Napier, o logarítmo de $10^7 \cdot (1 - \frac{1}{10^7})$ é igual a 1. Em 1614 John Napier publicou o resultado de suas descobertas no livro *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição do maravilhoso método dos logarítmos).

É importante lembrar que Napier principiou a sua obra com explicações que utilizavam termos geométricos. Ele não pensou uma base para o seu sistema, basicamente escrevendo multiplicações repetidas que equivaliam a 0,9999999.

Enquanto Napier trabalhava com uma progressão geométrica onde o primeiro termo era $10^7 \cdot b$ e a razão b , ao que parece, de forma independente, Bürgi também lidava com o problema dos logaritmos.

Bürgi empregou uma razão um pouco maior do que 1, qual seja $1,0001 = 1 + 10^{-4}$. O primeiro termo de sua PG era 10^8 e ele desenvolveu uma tabela com 23.027 termos.

Como Napier, o suíço Joost Bürgi (1552-1632) considerou uma PG cuja razão era muito próxima de 1, a fim de que os termos da seqüência fossem muito próximos e os cálculos pudessem ser realizados com boas aproximações.

Posteriormente, Napier, juntamente com o matemático inglês Henry Briggs (1561-1630), elaboraram tábuas de logaritmos mais úteis de modo que o logarítmo de 1 fosse 0 e o logarítmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos briggsianos ou comuns, ou seja, os logaritmos dos dias de hoje.

Capítulo 3

Caracterização da Função Logarítmica

Este capítulo será voltado para a formação de professores de ensino médio. Tendo em vista que, os conteúdos a cerca de Logaritmos são ensinados de uma forma mecânica, isto é, sem mostrar a sua verdadeira essência, muita das vezes pelo motivo de que o próprio professor que está ministrando esse conteúdo a desconhece.

Desta maneira, trataremos da definição formal bem como de suas propriedades, as quais são utilizadas na operacionalização dos logaritmos.

3.1 Definição Convencional

Na educação básica defini-se, sendo $x \in \mathbb{R}^+$ e $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, o logaritmo de x em uma base b , ao expoente y , tal que $b^y = x$. Ou seja,

$$\log_b(x) = y \Rightarrow b^y = x$$

Essa definição, com certeza, é a mais simples e talvez a mais fácil para que os alunos entendam o que representa o logaritmo de um número real positivo. E por esse motivo a maioria dos professores a apresenta dessa forma. Para, a partir dela, mostrar um conjunto de propriedades satisfatórias aos logaritmos. Onde, b é chamado de base do logaritmo e x logaritmando.

Desta definição são geradas as seguintes propriedades:

3.1.1 Propriedade 1: $\log_b(1) = 0$

Logaritmo de 1 em qualquer base é igual 0.

Prova

De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x^0 = 1$, então, pela definição

$$\log_b(1) = x \Rightarrow b^x = 1 \Rightarrow b^x = b^0 \Rightarrow x = 0.$$

3.1.2 Propriedade 2: $\log_b(b) = 1$

Logaritmo de b na base b é igual 1.

Prova De fato, para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x^1 = x$, então, pela definição

$$\log_b(b) = x \Rightarrow b^x = b \Rightarrow x = 1.$$

3.1.3 Propriedade 3: $\log_b(b^m) = m$

Logaritmo de uma potência, cuja base é igual a base do logaritmo é igual ao expoente.

Prova

De fato, seja $m \in \mathbb{R}$ temos, pela definição

$$\log_b(b^m) = x \Rightarrow b^x = b^m \Rightarrow x = m.$$

3.1.4 Propriedade 4: $b^{\log_b(m)} = m$

Uma potência, cuja base coincide com a base do logaritmo é igual ao logaritmando.

Prova

De fato, seja $c \in \mathbb{R}^+$ temos, pela definição

$$b^{\log_b(c)} = x$$

fazendo, $\log_b(c) = y \Rightarrow b^y = c$ (1)

Assim, $b^{\log_b(b^y)} = x \Rightarrow b^y = x$ (2)

De (1) e (2) tem-se $x = c$.

3.1.5 Propriedade 5: $\log_b(a) = \log_b(c) \Rightarrow a = c$

Logaritmos cujas bases coincidem seus logaritmandos são iguais.

Prova

De fato, seja $a, c \in \mathbb{R}^+$ e $m, n \in \mathbb{R}$ temos, pela definição

$$\log_b(a) = m \Rightarrow a = b^m \text{ e } \log_b(c) = n \Rightarrow c = b^n$$

com efeito, $\log_b(a) = \log_b(c) \Rightarrow b^{\log_b(c)} = a \Rightarrow b^n = b^m \Rightarrow m = n$

Portanto, $a = c$

3.1.6 Propriedade 6: $\log_b(a.c) = \log_b(a) + \log_b(c)$

Logaritmo do produto é igual a soma dos logaritmos.

Prova

De fato, seja $a, c \in \mathbb{R}^+$ e $m, n \in \mathbb{R}$ temos, pela definição

$$\log_b(a) = m \Rightarrow a = b^m \text{ e } \log_b(c) = n \Rightarrow c = b^n$$

com efeito, $\log_b(a.c) = x \Rightarrow b^x = a.c \Rightarrow b^x = b^m.c^n \Rightarrow b^x = b^{m+n}$

então, $x = m + n$ e portanto,

$$\log_b(a.c) = \log_b(c) + \log_b(a).$$

3.1.7 Propriedade 7: $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c)$

Logaritmo do quociente é igual a diferença dos logaritmos.

Prova

De fato, seja $a, c \in \mathbb{R}^+$ e $m, n \in \mathbb{R}$ temos, pela definição

$$\log_b(a) = m \Rightarrow a = b^m \text{ e } \log_b(c) = n \Rightarrow c = b^n$$

com efeito, $\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = x \Rightarrow b^x = \frac{a}{c} \Rightarrow b^x = \frac{b^m}{b^n} \Rightarrow b^x = b^{m-n}$

então, $x = m - n$ e portanto,

$$\log_b\left(\frac{a}{c}\right) = \log_b(a) - \log_b(c).$$

3.1.8 Propriedade 8: $\log_b(x^n) = n \log_b(x)$ **Prova**

De fato, seja $a \in \mathbb{R}^+$ e $c, m, n \in \mathbb{R}$ temos, pela definição

$$\log_b(a^c) = m \text{ e } \log_b(a) = n \Rightarrow a = b^n$$

com efeito, $\log_b(a^c) = m \Rightarrow a^c = b^m \Rightarrow (b^n)^c = b^m$

então, $m = c.n$

$$\log_b(a^c) = c \log_b(a).$$

3.1.9 Propriedade 9: $\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$

Mudança de base.

De fato, seja $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e $m, n, t \in \mathbb{R}$ temos, pela definição

$$\log_b(a) = m \Rightarrow a = b^m, \log_c(a) = n \Rightarrow a = c^n \text{ e } \log_c(b) = t \Rightarrow b = c^t$$

$$\text{com efeito, } \log_b(a) = m \Rightarrow a = b^m \Rightarrow c^n = b^m \Rightarrow c^n = (c^t)^m \Rightarrow c^n = c^{t.m}$$

então, $n = t.m \Rightarrow m = \frac{n}{t}$ e portanto,

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}.$$

Esta maneira é a forma que os logaritmos são apresentados para os alunos na educação básica. A seguir, veremos uma forma de definir os logaritmos que muitos professores desconhecem que é a caracterização da função logarítmica.

3.2 Definição Formal

Definição Seja uma função $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, dizemos que essa função é Logarítmica quando a mesma goza das seguintes propriedades:[6]

Propriedade 1 (P_1) - A função é crescente, ou seja, $x_1 \in \mathbb{R}^+$ e $x_2 \in \mathbb{R}^+$ de forma que $x_1 < x_2 \Rightarrow L(x_1) < L(x_2)$ ou $x_2 < x_1 \Rightarrow L(x_2) < L(x_1)$.

Propriedade 2 (P_2) - $L(x_1.x_2) = L(x_1) + L(x_2)$.

Assim, $L(x)$ é o logaritmo de x por L .

Consequências das Propriedades

A partir das propriedades P_1 e P_2 são observadas outras propriedades, que chamaremos de **Consequências**.

3.2.1 Consequência 1 : $L(x)$ é injetiva.

Uma função $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, ou seja, números positivos diferentes possuem logaritmos diferentes.

Prova

De fato, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ com $x_1 \neq x_2$, então temos que $x_1 < x_2$ ou $x_2 < x_1$. Com efeito pela P_1 (L é crescente) temos:

$$\text{i) } x_1 < x_2 \Rightarrow L(x_1) < L(x_2).$$

$$\text{ii) } x_2 < x_1 \Rightarrow L(x_2) < L(x_1).$$

Logo, para qualquer situação $x_1 \neq x_2 \Rightarrow L(x_1) \neq L(x_2)$.

Assim, L é injetiva.

3.2.2 Consequência 2 : $L(1) = 0$

O logaritmo de 1 é igual a zero.

Prova

De fato, pela P_2 temos,

$$L(1) = L(1.1) = L(1) + L(1) \Rightarrow L(1) = 0.$$

3.2.3 Consequência 3 : $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$

O logaritmo do inverso de x é o oposto do seu logaritmo.

Prova

De $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ temos $L(x \cdot \frac{1}{x}) = L(x) + L(\frac{1}{x}) = L(1) = 0$.

Portanto, $L(\frac{1}{x}) = -L(x)$.

3.2.4 Consequência 4 : $0 < x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow L(x_1) < 0 < L(x_2)$

Sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$, se $x_1 < 1$ e $x_2 > 1$ temos que $L(x_1) < 0$ e $L(x_2) > 0$.

Prova

De fato, como L é crescente temos,

$$0 < x_1 < 1 < x_2 \Rightarrow L(x_1) < L(1) < L(x_2)$$

Logo,

$$L(x_1) < 0 < L(x_2).$$

3.2.5 Consequência 5 : $L(x_1/x_2) = L(x_1) - L(x_2)$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, temos que $L(x_1/x_2) = L(x_1) - L(x_2)$.

Prova

De fato,

$$L(x_1/x_2) = L\left(x_1 \cdot \left(\frac{1}{x_2}\right)\right)$$

Assim, pela P_2

$$L(x_1/x_2) = L(x_1) + L\left(\frac{1}{x_2}\right) \Rightarrow L(x_1/x_2) = L(x_1) - L(x_2).$$

3.2.6 Consequência 6 : $L(x^r) = r.L(x)$

Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e todo racional $r = \frac{p}{q}$ temos que $L(x^r) = r.L(x)$.

Prova

Primeiramente, vamos verificar que a propriedade P_2 vale para um produto de mais de 2 fatores. Vejamos um exemplo com 3 fatores, sejam $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^+$ temos,

$$L(x_1.x_2.x_3) = L((x_1.x_2).x_3) = L(x_1.x_2) + L(x_3) = L(x_1) + L(x_2) + L(x_3)$$

Seguindo o mesmo raciocínio indefinidamente, temos que P_2 vale para

$$L(x_1.x_2...x_n) = L(x_1) + L(x_2) + \dots + L(x_n).$$

Em particular vale para n fatores iguais, $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$L(x^n) = L(x.x...x) = L(x) + L(x) + \dots + L(x) = n.L(x).$$

Logo, a consequência 6 vale para $r = n$, quando $n \in \mathbb{N}$.

Temos também que se $r = 0$ a consequência 6 se verifica.

Com efeito,

$$L(x^0) = L(1) = 0 = 0.L(x).$$

Agora, vejamos para $r = -n$, $n \in \mathbb{N}$, ou seja, r é inteiro negativo. Então, $x^n.x^{-n} = 1$.

Como,

$$L(x^n) + L(x^{-n}) = L(1) = 0,$$

temos,

$$L(x^{-n}) = -L(x^n) = -n.L(x).$$

Portanto, verificamos que se $r = n$, $r = 0$ e $r = -n$ a consequência 6 é válida, ou seja, ela é válida para $r \in \mathbb{Z}$.

Por fim, vejamos para $r = \frac{p}{q}$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{N}$.

Para qualquer $x \in \mathbb{R}^+$ temos,

$$(x^r)^q = (x^{p/q})^q = x^p.$$

Então, $q.L(x^r) = L[(x^r)^q] = L(x^p) = p.L(x)$, por tudo que já mostramos.

Assim, de $q.L(x^r) = p.L(x)$ (como $q \in \mathbb{N}$, dividindo ambos os membros por q temos,

$$L(x^r) = \frac{p}{q}L(x) \Rightarrow L(x^r) = r.L(x).$$

Enfim, concluímos a prova da consequência 6.

3.2.7 Consequência 7 : L é ilimitada Inferiormente e Superiormente

A função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superior e inferiormente.

Prova

Para provar que a função L é ilimitada superiormente, devemos mostrar que dado um número real a , existe um número $x \in \mathbb{R}^+$, tal que, $L(x) > a$. Consideremos um número $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tal que $n > \frac{a}{L(2)}$. Então, $nL(2) > a$, pois $L(2) > 0$, daí $L(2^n) > a$. Basta tomar $x = 2^n$, assim $L(x) > a$, ou seja $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada superiormente .

Agora vamos mostrar que função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada inferiormente, isto é, para todo $b \in \mathbb{R}$, existe um número $x \in \mathbb{R}^+$, tal que $L(x) < b$. Assim, dado um número real b , vimos acima, que podemos achar $y \in \mathbb{R}^+$, de modo que $L(y) > -b$. Como $L(\frac{1}{y}) = -L(y)$ e tomando $x = \frac{1}{y}$, segue que $L(x) = L(\frac{1}{y}) = -L(y) < b$. Portanto $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada inferiormente.

Observações:

- 1) Tudo que foi feito para o caso da função ser crescente, poderia ser feito, análogamente, para o caso da função ser decrescente. Pois, a base da função logarítmica é fixa, o que varia é o logaritmando.
- 2) A função logarítmica não é definida para $x = 0$. Caso fosse definida, teríamos

$$L(0) = L(x.0) = L(x) + L(0) \Rightarrow L(x) = 0.$$

Dessa forma a função seria identicamente nula, o que contradiz o fato de L ser crescente (ou decrescente).

Capítulo 4

Logaritmos e a Área de uma faixa de Hipérbole

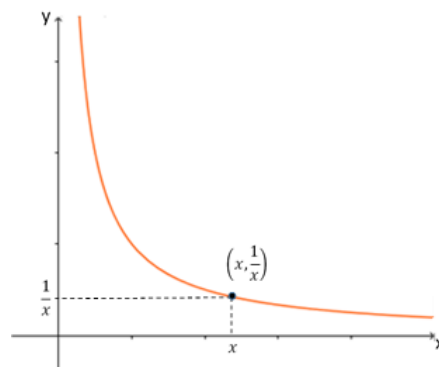
No século XVII alguns estudiosos como o padre jesuíta Gregory Saint Vincent(1584 - 1667), em 1647, e Isaac Newton(1642 - 1726), em 1660, reconheceram uma relação entre a área de uma faixa de hipérbole e os logaritmos. Para percebermos essa relação definiremos a área de uma faixa da hipérbole.

Seja um ponto (x, y) do plano cartesiano. Temos que \mathcal{H} é um ramo positivo da função $y = \frac{1}{x}$, ou seja, \mathcal{H} é um subconjunto onde para cada abscissa x do domínio está associada uma ordenada y , tal que $y = \frac{1}{x}$. Assim o ramo \mathcal{H} é constituído pelos pontos da forma $(x, \frac{1}{x})$ pertencentes ao primeiro quadrante. Simbolicamente,

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y); x > 0, y = \frac{1}{x} \right\}$$

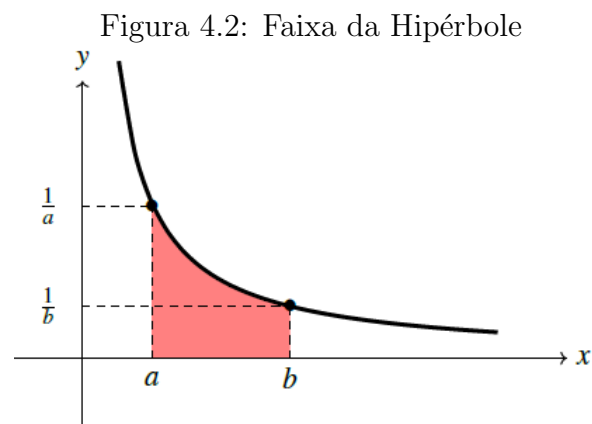
Geometricamente, o ramo \mathcal{H} da hipérbole é conjunto dos pontos (x, y) do plano cartesiano em que $x > 0$ e $xy = 1$.

Figura 4.1: Ramo positivo da Hipérbole



4.1 Faixa de uma hipérbole

Chamaremos \mathcal{H}_a^b a faixa da hipérbole, sendo a, b números reais positivos com $a < b$, a região limitada pelas retas $x = a$, $x = b$, pelo eixo das abscissas e pelo gráfico da hipérbole \mathcal{H} .



Assim, a faixa \mathcal{H}_a^b é formada pelos pares ordenados (x, y) em que são obedecidas as seguintes condições:

- $a \leq x \leq b$;
- $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$.

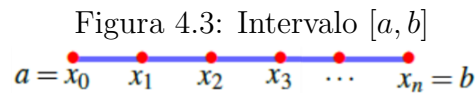
Simbolicamente, temos

$$\mathcal{H}_a^b = \left\{ (x, y); a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$$

4.2 Área da faixa de hipérbole

Vejamos de uma forma intuitiva e construtiva como determinar a área de uma faixa de hipérbole.

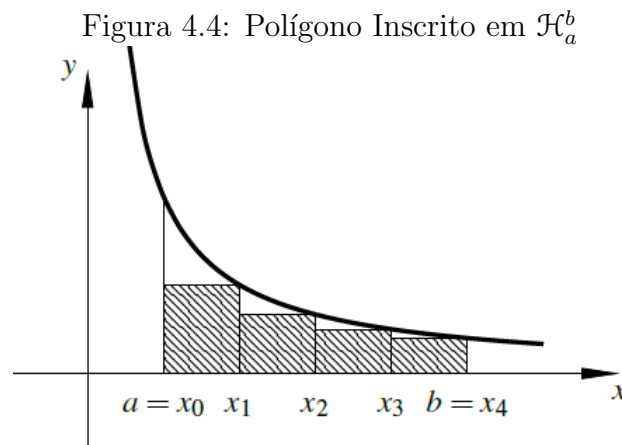
A priori vamos decompor o intervalo $[a, b]$ em um número finito de intervalos justapostos:



então,

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$$

Tomando os intervalos $[x_{i-1}, x_i]$ da decomposição de $[a, b]$, teremos retângulos de alturas $y_i = \frac{1}{x_i}$ e bases Δx_i . Onde, o vértice superior direito, de cada retângulo, toca no ramo positivo, \mathcal{H} , do gráfico da hipérbole $y = \frac{1}{x}$. Assim, dizemos que os retângulos são inscritos na faixa \mathcal{H}_a^b e a reunião de todos esses retângulos inscritos na faixa, chamaremos de um **polígono inscrito na faixa \mathcal{H}_a^b** . Para o caso de $n = 4$, temos a figura a seguir.

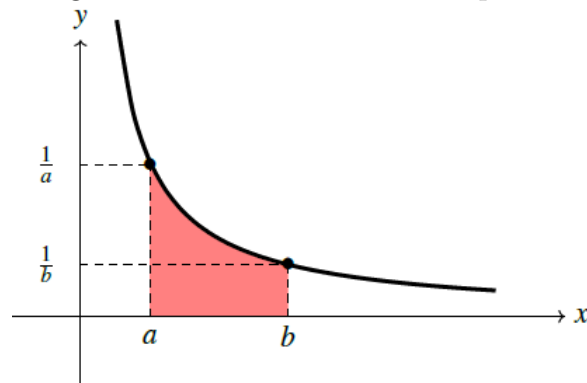


A área do polígono inscrito na faixa \mathcal{H}_a^b tem um valor aproximado, por falta, da área da faixa \mathcal{H}_a^b . Assim, quanto mais retângulos constituírem esse polígono inscrito em \mathcal{H}_a^b , mais próximo da área da faixa \mathcal{H}_a^b . Note que enquanto n cresce Δx diminui, logo chamando de A a área da faixa \mathcal{H}_a^b temos, $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n (y_i) \Delta x_i$.

Definição: A área A da faixa \mathcal{H}_a^b é aproximadamente, por falta, a área P do polígono inscrito na faixa \mathcal{H}_a^b . Onde, $P = \int_a^b \left(\frac{1}{x}\right) dx$.

Portanto,

Figura 4.5: Área da Faixa de Hipérbole



\Leftrightarrow

$$A = \int_a^b \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

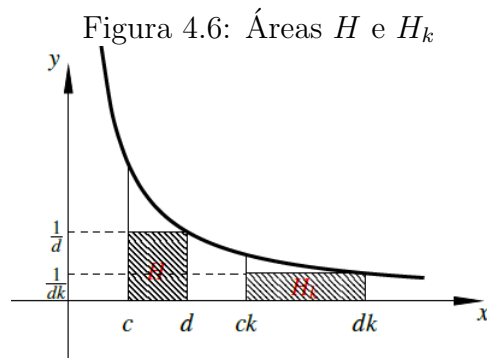
4.3 Propriedades das áreas das faixas de uma hipérbole

Vejamos um teorema a cerca da Área da faixa de hipérbole.

Teorema: Dado um número real $k > 0$, então $\text{Área}(\mathcal{H}_a^b) = \text{Área}(\mathcal{H}_{ka}^{kb})$.

Prova

Primeiramente, considere o retângulo H inscrito na faixa \mathcal{H}_c^d , cuja base é o segmento $[c, d]$ pertencente ao eixo das abscissas e o retângulo H_k inscrito na faixa \mathcal{H}_{kc}^{kd} , cuja base é o segmento $[kc, kd]$. Note que as alturas dos retângulos H e H_k , são iguais respectivamente, a $\frac{1}{d}$ e $\frac{1}{kd}$ como mostra a figura a seguir



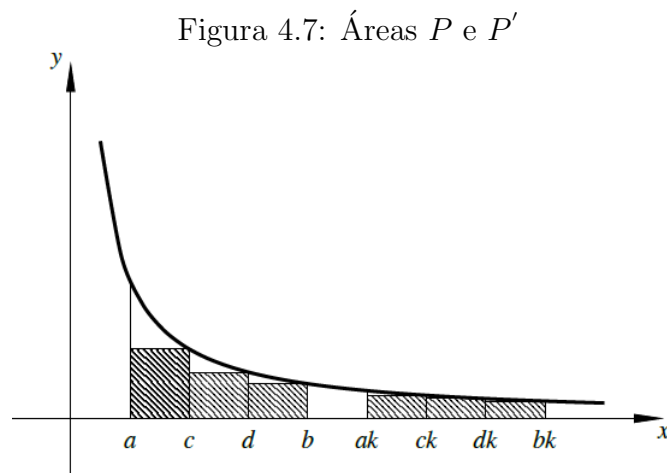
Com efeito,

Área de H : $(d - c) \cdot \frac{1}{d} = 1 - \frac{c}{d}$

Área de H_k : $(kd - kc) \cdot \frac{1}{kd} = 1 - \frac{c}{d}$

Logo, as faixas \mathcal{H}_c^d e \mathcal{H}_{kc}^{kd} possuem a mesma área.

Considere, agora, um polígono P inscrito na faixa \mathcal{H}_a^b . Se multiplicarmos todas as abscissas dos pontos que dividem o intervalo $[a, b]$, determinamos um polígono P' inscrito na faixa \mathcal{H}_{ka}^{kb} , ver no gráfico a seguir



Então, como vimos anteriormente, podemos concluir:

- \mathcal{H}_a^c e \mathcal{H}_{ka}^{kc} possuem a mesma área;
- \mathcal{H}_c^d e \mathcal{H}_{kc}^{kd} possuem a mesma área;
- \mathcal{H}_d^b e \mathcal{H}_{kd}^{kb} possuem a mesma área.

Logo, concluímos que para qualquer número real positivo k as faixas \mathcal{H}_a^b e \mathcal{H}_{ka}^{kb} possuem a mesma área.

Uma consequência desse teorema é que podemos restringir nossas considerações para faixas da forma \mathcal{H}_1^c .

De fato, sendo $k = \frac{1}{a}$ temos,

$$\text{Área}(\mathcal{H}_a^b) = \text{Área}\left(\mathcal{H}_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}}\right) = \text{Área}\left(\mathcal{H}_1^{\frac{b}{a}}\right) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^c), \text{ com } c = \frac{b}{a}.$$

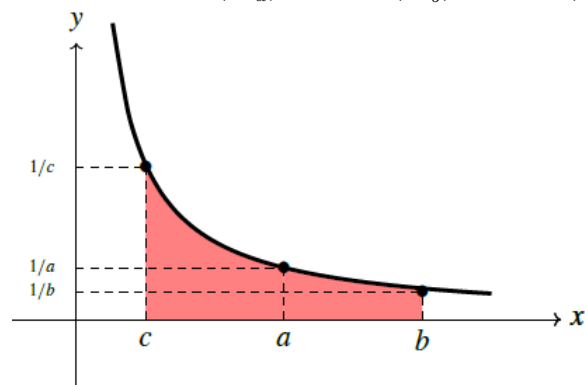
Temos ainda que para quaisquer que sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tem-se

$$\text{Área}(\mathcal{H}_a^b) + \text{Área}(\mathcal{H}_b^c) = \text{Área}(\mathcal{H}_a^c)$$

A igualdade é facilmente verificada para $a < b < c$. A fim de manter essa igualdade vamos convencionar que $\text{Área}(\mathcal{H}_a^a) = 0$ e $\text{Área}(\mathcal{H}_a^b) = -\text{Área}(\mathcal{H}_b^a)$.

Vejamos, para o caso $c < a < b$:

Figura 4.8: $\text{Área}(\mathcal{H}_a^b) + \text{Área}(\mathcal{H}_b^c) = \text{Área}(\mathcal{H}_a^c)$



De fato, $\text{Área}(\mathcal{H}_c^b) = \text{Área}(\mathcal{H}_c^a) + \text{Área}(\mathcal{H}_a^b)$

Daí, $\text{Área}(\mathcal{H}_c^b) - \text{Área}(\mathcal{H}_c^a) = \text{Área}(\mathcal{H}_a^b)$

Então, $\text{Área}(\mathcal{H}_c^b) + \text{Área}(\mathcal{H}_b^c) = \text{Área}(\mathcal{H}_a^c)$

Portanto, para verificar a igualdade em todos os casos, basta usar um raciocínio análogo ao que acabamos de realizar. O que nos mostra que a igualdade é verdadeira independentemente da ordem em que a, b e c se encontram.

4.4 Logaritmo Natural ou Neperiano

Como consequência de todo esse estudo sobre a área da faixa de uma hipérbole surge a definição de **Logaritmo natural**.

Definição: Para todo $x \in \mathbb{R}^+$, temos que $\ln(x) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^x)$. Em que $\ln(x)$ representa o **logaritmo natural de x** .

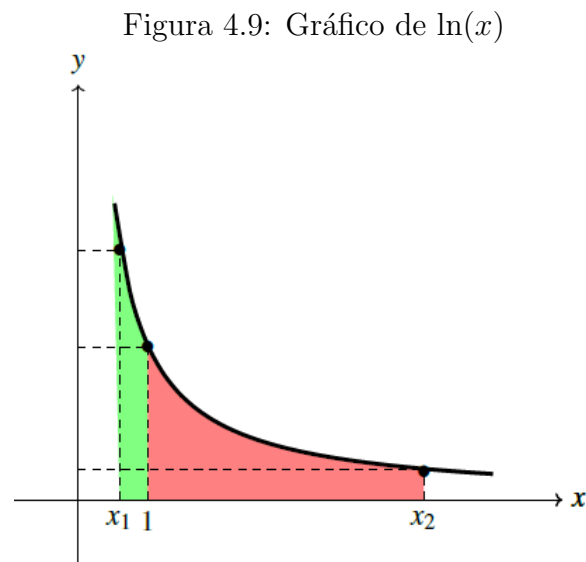
Três propriedades dos logaritmos naturais são verificadas a partir do que foi visto sobre a área da faixa de um hipérbole. Vejamos:

$$\text{I) } \ln(1) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^1) \Rightarrow \ln(1) = 0;$$

$$\text{II) } x > 1 \Rightarrow \ln(x) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^x) > 0 \Rightarrow \ln(x) > 0;$$

$$\text{III) } 0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) = -\text{Área}(\mathcal{H}_1^x) < 0 \Rightarrow \ln(x) < 0.$$

Os resultados a cima são facilmente constatados a partir do gráfico a seguir:



Note que,

$$\text{Se, } x_1 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) = \text{Área}(\mathcal{H}_{x_1}^1) \Rightarrow \ln(x) = -\text{Área}(\mathcal{H}_1^{x_1}) < 0,$$

e

$$\text{Se, } 1 < x < x_2 \Rightarrow \ln(x) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^{x_2}) > 0.$$

Vejamos alguns exemplos para ilustrar como pode-se calcular o logaritmo natural de um número real positivo.

Exemplo 1: Calcularemos um valor aproximado para $\ln 2$. Vamos tomar o intervalo $[1, 2]$

e dividi-lo em dez partes iguais por meio dos pontos:

$$1, 0; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 7; 1, 8; 1, 9; 2, 0.$$

Agora calculando os valores de $\frac{1}{x}$, de cada um dos valores acima, teremos:

$$1, 000; 0, 909; 0, 833; 0, 769; 0, 714; 0, 666; 0, 625; 0, 588; 0, 556; 0, 526; 0, 500.$$

Uma aproximação por falta para $\ln(2)$, é numericamente igual a área do polígono inscrito na faixa \mathcal{H}_1^2 , que é composto por dez retângulos de bases medindo 0,1 e suas alturas os dez últimos valores $\frac{1}{x}$ de descritos acima. Portanto,

$$\ln(2) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^2) = 0, 0909 + 0, 0833 + 0, 0769 + 0, 0714 + 0, 0666 + 0, 0625 + 0, 0588 + 0, 0556 + 0, 0526 + 0, 0500 = 0, 6687. \text{ Então um valor aproximado (por falta) para } \ln(2) \text{ é } 0, 6687.$$

Exemplo 2: Calcularemos agora um valor aproximado para $\ln(3)$. Procedendo de modo análogo tomando o intervalo $[1; 3]$ e dividindo-o em vinte partes iguais por meio dos pontos: 1; 1, 1; 1, 2; 1, 3; 1, 4; 1, 5; 1, 6; 1, 7; 1, 8; 1, 9; 2, 0; 2, 1; 2, 2; 2, 3; 2, 4; 2, 5; 2, 6; 2, 7; 2, 8; 2, 9; 3, 0.

Agora calculando os valores de $\frac{1}{x}$, de cada um dos valores acima, teremos:

$$1, 000; 0, 909; 0, 833; 0, 769; 0, 714; 0, 666; 0, 625; 0, 588; 0, 556; 0, 526; 0, 500; 0, 476; 0, 455; 0, 435; 0, 417; 0, 400; 0, 385; 0, 370; 0, 357; 0, 345; 0, 333.$$

Uma aproximação, por falta, para $\ln(3)$, é numericamente igual a área do polígono inscrito na faixa (\mathcal{H}_1^3) , que é composto por vinte retângulos de bases medindo 0; 1 e suas alturas os vinte últimos valores de $\frac{1}{x}$ descritos acima.

Portanto,

$$\ln(3) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^3) = 0, 0909 + 0, 0833 + 0, 0769 + 0, 0714 + 0, 0666 + 0, 0625 + 0, 0588 + 0, 0556 + 0, 0526 + 0, 0500 + 0, 0476 + 0, 0455 + 0, 0435 + 0, 0417 + 0, 0400 + 0, 0385 + 0, 0370 + 0, 0357 + 0, 0345 + 0, 0333 = 1, 066.$$

Então um valor aproximado (por falta) para $\ln(3)$ é 1,066.

Note que $\ln(x)$, por tudo que foi visto, só existe para $x \in \mathbb{R}^+$. Assim, mostraremos que a função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ goza das propriedades, vistas no capítulo 3, de função logarítmica. Ou seja, devemos provar que:

- $\ln(x)$ é crescente;
- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

Prova

Primeiramente, provaremos que $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$.

Já foi visto que, $\text{Área}(\mathcal{H}_1^{x \cdot y}) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^x) + \text{Área}(\mathcal{H}_x^{x \cdot y})$.

Vimos também, $\text{Área}(\mathcal{H}_x^{x \cdot y}) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^{x \cdot y})$.

Comparando com o que fizemos anteriormente, o x desempenha o papel de k . Assim, segue que $\text{Área}(\mathcal{H}_1^{x_1 \cdot x_2}) = \text{Área}(\mathcal{H}_1^{x_1}) + \text{Área}(\mathcal{H}_1^{x_2})$.

Então, pela definição de logaritmo natural, é verdadeiro que

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2).$$

Agora, vamos provar que a função \ln é crescente.

Para isso, sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$. Dizer que $x_1 < x_2$ significa afirmar que existe um número real $a > 1$ tal que $x_2 = a \cdot x_1$. Assim, segue que:

$$\ln(x_2) = \ln(a \cdot x_1) = \ln(a) + \ln(x_1).$$

Como $a > 1$, temos que $\ln(a) > 0$. Portanto, $\ln(x_2) > \ln(x_1)$.

Portanto, a função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é crescente.

Como vimos no Capítulo 3, valem as seguintes propriedades para os logaritmos naturais, com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln(x_1) + \ln(x_2)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$$

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln(x_1) - \ln(x_2)$$

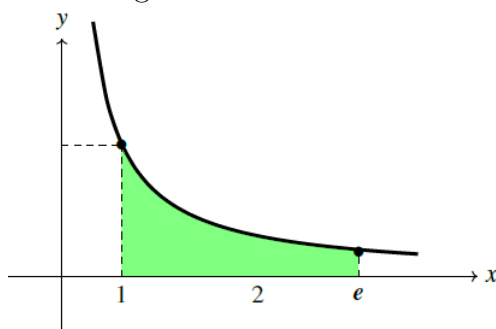
$$\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$$

$$\ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{\ln(x)}{n}$$

Para finalizar nosso estudo sobre logaritmos naturais, vamos localizar o número e .

Como a função \ln goza das propriedades das funções logarítmicas, temos que, em particular, ela é injetiva. Então, existe um único número real positivo, cujo logaritmo natural é igual a 1. Esse número é representado pela letra e , que é a base do sistema de logaritmos naturais. Então,

$$\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$$

Figura 4.10: Número e 

Assim, $\text{Área}(\mathcal{H}_1^e) = 1$. Observe o gráfico

É fácil ver que $e > 1$, pois os número reais positivos menores do que 1 possuem logaritmo negativo. Como a área da faixa \mathcal{H}_1^2 é menor do que 1 e a área da faixa \mathcal{H}_1^3 é maior do que 1, segue que

$$\ln(2) < 1 < \ln(3)$$

Portanto, $2 < e < 3$.

Leonard Euler, em 1737, provou que o número e é irracional. Foi calculado um valor para e com 50 casas decimais. Veja,

$$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995$$

Capítulo 5

Aplicações

COMPARAÇÃO DOS MONTANTES NA MATEMÁTICA FINANCEIRA

Como exemplo da aplicabilidade dos logaritmos, faremos uma aplicação na matemática financeira, com o auxílio da análise real. Não temos a pretensão de mostrar algo novo, até porque supomos que alguém já o tenha feito, porém, digamos que estejamos organizando algumas idéias de uma forma mais didática. Para iniciarmos nossa explanação: [7]

Considere a função $f(x) = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. Desde que f seja contínua em qual quer fechado $I = [a, b] \subset (0, +\infty)$ definimos o logaritmo natural, como sendo:

$$\log x = \int_1^x \frac{1}{h} dh, \text{ com } x > 0 \quad (1)$$

Agora, observe que:

$$\frac{1}{1+nh} \leq \frac{1}{1+h} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Como sabemos, a integral preserva ordem. Dessa feita, podemos escrever:

$$\int_0^x \frac{1}{1+nh} dh \leq \int_0^x \frac{1}{1+h} dh \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (2)$$

No lado esquerdo de (2) façamos:

$$u = 1 + nh \implies du = ndh, \text{ isto é: } dh = \frac{1}{n} du$$

Por outro lado, para $h = 0$, teremos $u = 1$ e para $h = x$, $u = 1 + nx$

Daí, temos:

$$\int_0^x \frac{1}{1+nh} dh = \frac{1}{n} \int_1^{1+nx} \frac{1}{u} du \quad (3)$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (3), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_1^{1+nx} \frac{1}{u} du &= \frac{1}{n} [\log(1+nx) - \log(1)] \\ &= \frac{1}{n} \log(1+nx) \end{aligned} \quad (4)$$

No lado direito de (2) façamos:

$$w = 1 + h \implies dw = dh$$

Por outro lado, para $h = 0$, teremos $w = 1$ e para $h = x$, $w = 1 + x$

Daí, temos:

$$\int_0^x \frac{1}{1+h} dh = \int_1^{1+x} \frac{1}{w} dw \quad (5)$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo em (5), resulta:

$$\begin{aligned} \int_1^{1+x} \frac{1}{w} dw &= [\log(1+x) - \log(1)] \\ &= \log(1+x) \end{aligned} \quad (6)$$

Portanto de (2), (4) e (6), resulta

$$\frac{1}{n} \log(1 + nx) \leq \log(1 + x)$$

$$\iff$$

$$\log(1 + nx) \leq n \log(1 + x) = \log(1 + x)^n$$

Isso significa que:

$$(1 + nx) \leq (1 + x)^n \tag{7}$$

Notemos que esse resultado foi obtido com a utilização das propriedades dos logaritmos, com a ajuda da Análise Real.

O que tudo isso tem haver com a matemática financeira?

Como resposta a este questionamento:

Sabemos que a capitalização simples é aquela em que a taxa de juros incide apenas sobre o capital inicial; não incidindo, pois, sobre os juros acumulados. Neste regime de capitalização a taxa varia linearmente com a variável temporal. Diferentemente da simples, a capitalização composta incorpora os juros ao capital a cada novo período, é o que chamamos de juros sobre juros. No regime de capitalização composta a taxa varia exponencialmente com o tempo.

Vamos considerar um capital $C \neq 0$ capitalizado em um período n a uma taxa i . Os montantes para as capitalizações simples e composta, são dados respectivamente por:

$$M_s = C(1 + ni) \tag{8}$$

$$M_c = C(1 + i)^n \tag{9}$$

Dividindo (8) por (9), obtém-se:

$$\frac{M_s}{M_c} = \frac{(1 + ni)}{(1 + i)^n} \quad (10)$$

Aplicando (7) em (10), com $x = i$, resulta

$$\frac{M_s}{M_c} \leq 1 \implies M_s \leq M_c$$

Este resultado, não é algo novo, pois tratamos de dois tipos de funções clássicas, isto é:

Uma de Crescimento Polinomial:

$$M_s(n) = 1 + ni$$

A outro de Crescimento Exponencial:

$$M_c(n) = (1 + i)^n$$

DECAIMENTO RADIOATIVO

O tempo que os átomos levam para ficarem estáveis varia muito, ele é chamado de meia vida, que é o tempo necessário para metade dos isótopos de uma amostra radioativa se desintegrar. Esse fenômeno ocorre de tal forma que para um instante considerado a quantidade de matéria de uma substância radioativa se desintegre de forma proporcional a quantidade de massa da substância original presente no corpo no instante dado.

Seja Q_0 a massa inicial de uma substância e k a constante de proporcionalidade (determinada em laboratório), ou seja, k é a taxa de desintegração. Temos que após um dia a massa de tório perderá $k \cdot Q_0$. Daí,

$$Q_1 = Q_0 - k \cdot Q_0 = Q_0(1 - k)$$

Decorrido dois dias, teremos

$$Q_2 = Q_1 - k \cdot Q_1 = Q_0(1 - k) - k \cdot Q_0(1 - k) = Q_0(1 - k) \cdot (1 - k)$$

Assim,

$$Q_2 = Q_0(1 - k)^2$$

Portanto, de modo geral, para t dias a massa $Q(t)$ da substância é dada por:

$$Q(t) = Q_0(1 - k)^t.$$

Vamos determinar uma melhor aproximação para esse fenômeno, assim fixado um número natural n e considerando que a desintegração ocorra em cada intervalo de tempo $\frac{1}{n}$ de dias a massa se reduzirá a:

$$Q_0 - \frac{k}{n}Q_0 = Q_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)$$

Passado um dia, ocorreria n desintegrações e fazendo as n reduções, a quantidade de matéria restante será:

$$Q_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n$$

Se dividirmos o intervalo $[0, 1]$, por um número $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, sendo cada uma das partes iguais, então a massa do corpo será:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 \cdot \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = Q_0 e^{-k}$$

Lembremos, do cálculo que

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \left(-\frac{1}{n} \right) \right) = e^{-1}$$

Vamos calcular a quantidade de matéria no fim de t dias, devemos considerar o intervalo $[0, t]$ e dividi-lo em n partes iguais, logo a massa que sobraré é:

$$Q_0 - \frac{k \cdot t}{n} Q_0 = Q_0 \cdot \left(1 - \frac{k \cdot t}{n} \right)$$

Dividindo o intervalo $[0, t]$, por um número natural n , onde as n partes do intervalo são iguais. Após t dias, teríamos n desintegrações e portanto a massa do corpo restante deve ser $Q_0 \cdot \left(1 - \frac{k \cdot t}{n} \right)^n$. Após dividirmos o intervalo $[0, t]$, por n suficientemente grande a massa do corpo será reduzida à:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 \cdot \left(1 - \frac{k \cdot t}{n} \right)^n = Q_0 e^{-k \cdot t}$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 \cdot \left(1 - \frac{k \cdot t}{n} \right)^n = Q(t)$$

então,

$$Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}.$$

Considerando uma substância radioativa, cuja meia-vida é L unidades de tempo. Então, na fórmula $Q(t) = Q_0 e^{-k \cdot t}$, fazendo $Q(t) = \frac{1}{2} \cdot Q_0$, teremos

$$\frac{1}{2} \cdot Q_0 = Q_0 e^{-k \cdot L}.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2} = e^{-k \cdot L}.$$

tomando \ln em ambos os membros da equação, teremos

$$\ln \left(\frac{1}{2} \right) = \ln(e^{-k \cdot L})$$

daí,

$$-\ln(2) = -kL.$$

Então, temos $L = \frac{\ln(2)}{k}$ ou $k = \frac{\ln(2)}{L}$. Assim, determinamos a meia vida L , conhecendo a taxa de desintegração e vice-versa.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl B. História da matemática/Carl B. Boyer, revista por Uta C. Merzbach; tradução Elza F. Gomide-2ª ed.- São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- [2] COSTA, Evanildo Soares. Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula.Natal, 2011, 142 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. [Orientador: Prof. Dr. Iran Abreu Mendes]Disponível em: <http://repositorio.ufrn.br:8080/jspui/handle/1/7477>. Acesso em: 02 jul. 2016.
- [3] DANTE, L. R. Matemática Contexto e Aplicações. São Paulo: Editora Ática, 2013.
- [4] JACOBS,H. R. - Geometry, 3rd edition, W. H. Freeman and Company, 2003.
- [5] LIMA, Elon Lages. LOGARITMOS. Coleção Professor de Matemática - 2ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 1996.
- [6] LIMA, E.L. A matemática do ensino médio-volume 1 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Augusto César Morgado. 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [7] LOBATO, R. F. C. Artigo: A Real Análise de Investimentos. UFPA, 2015.