Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT

Probabilidade: Aplicação ao Estudo de Genética

João Henrique Fontenele de Araújo

Parnaíba - 2016

João Henrique Fontenele de Araújo

Dissertação de Mestrado:

Probabilidade: Aplicação ao Estudo de Genética

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal do Piauí, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Ms. Cleyton Natanael Lopes Carvalho Cunha

Parnaíba - 2016

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PIAUÍ
CENTRO DE CIÊNCIAS DA NATUREZA
CENTRO DE EDUCAÇÃO ABERTA E À DISTÂNCIA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

SBM

Dissertação de Mestrado submetida à coordenação Acadêmica Institucional, na Universidade Federal do Piauí, do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional para obtenção do grau de **mestre em matemática** intitulada: PROBABILIDADE: APLICAÇÃO AO ESTUDO DE GENÉTICA, defendida por JOÃO HENRIQUE FONTENELE DE ARAÚJO em 05/08/2016 e aprovada pela banca constituída pelos professores:

Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha

Prof. Msc. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha
Presidente da Banca Examinadora

Marcelo de Oliveira Rêgo

Prof. Msc. Marcelo de Oliveira Rêgo - Examinador

Weslay Vieira de Araujo

Prof. Msc. Weslay Vieira de Araújo – Examinador Externo

FICHA CATALOGRÁFICA
Universidade Federal do Piauí
Biblioteca Setorial Prof. Cândido Athayde – Campus Parnaíba
Serviço de Processamento Técnico

A663p Araujo, João Henrique Fontenele de.
Probabilidade: aplicação ao estudo de Genética [manuscrito] / João Henrique Fontenele de Araújo. – 2016.
53 f. : il.

Impresso por computador (printout).
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Piauí, 2016.
Orientação: Prof. Me. Cleyton Natanael Lopes de Carvalho Cunha.

1. Probabilidade. 2. Matemática. 3. Genética. 4. Biologia. I. Titulo.

CDD: 519.2

Dedico este trabalho a minha mãe Maria de Fátima,
a minha namorada Jéssica Mendes

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado saúde e força para superar as dificuldades, assim permitiu que tudo isso acontecesse, ao longo da minha vida, e não somente nestes anos como universitário, mas que em todos os momentos é o maior mestre que alguém pode conhecer.

Agradeço a minha mãe Maria de Fátima, heroína que me deu apoio, incentivo nas horas difíceis, de desânimo e cansaço. As minhas tias em especial Francisca Maria, primos e a minha namorada Jéssica Mendes pela contribuição e apoio dado nesse período.

Agradeço ao professor Cleyton Natanael, pela orientação, paciência, apoio nas suas correções e incetivos deste trabalho.

Agradeço a todos os professores por me proporcionar o conhecimento não apenas racional, mas a manifestação do caráter e afetividade da educação no processo de formação profissional.

Meus agradecimentos aos amigos do mestrado, companheiros de trabalhos e irmãos na amizade que fizeram parte da minha formação e que vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro, a SBM e à Universidade Federal do Piauí - Campus Ministro Reis Velloso pelo PROFMAT pela oportunidade ao meus estudos no mestrado.

“ Tudo posso naquele que me fortalece.”

Felipenses 4:13.

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo sugerir uma proposta de abordagem dos conteúdos de probabilidade e genética promovendo uma maior interação entre a Matemática e Biologia, utilizando uma sequência adequada para o ensino de probabilidade em turmas do segundo e terceiro ano do ensino médio, tendo como base a genética, através da análise de cruzamentos e das características dos descendentes. Os problemas propostos estão sequenciados e divididos de acordo com os seguintes temas: espaço amostral, probabilidade de eventos independentes e probabilidade condicional. Eles foram resolvidos abordando a teoria por meio de conceitos e alguns resultados, e usando as fórmulas de probabilidade, com o objetivo de que os alunos tenham um melhor entendimento do conteúdo, evitando que simplesmente decorem as regras do "e" e a regra do "ou", quando se trata da probabilidade de ocorrer, simultaneamente, dois ou mais eventos independentes. Espera-se que com este trabalho o professor de biologia e matemática possam trabalhar de uma maneira interdisciplinar e mais contextualizada. E que o aluno tenha uma real compreensão dos conteúdos por ter em suas mãos diferentes ferramentas.

Palavras-chave: Probabilidade. Genética. Matemática. Biologia.

Abstract

This paper aims to suggest a proposed approach to probability and genetic content promoting an interaction between mathematics and biology, using an appropriate sequence for teaching probability in the second and third high school years' classes, based genetics, through the analysis of intersections and the characteristics of the offspring. The proposed problems are sequenced and divided according to the following topics: sample space, probability of independent events and conditional probability. They were resolved by addressing the theory by means of concepts and some results, and using probability formulas, in order to give students a better understanding of the content, preventing simply memorize the rules of the "and" and the rule "or" when it is the probability of occurring simultaneously two or more independent events. It is hoped with this work the professors of biology and mathematics can work in an interdisciplinary and more contextualized way. And the student has a real understanding of the contents to have in their hands different tools.

Keywords: Probability. Genetics. Mathematical. Biology.

Sumário

Introdução

A probabilidade é uma ciência que está presente no cotidiano de todas as pessoas. No desenvolver do nosso dia a dia deparamo-nos com ocasiões que nos obrigam a tomar decisões acerca das quais não temos a certeza, apenas temos recomendações que nos permitem decidir com alguma probabilidade de acertarmos. Algumas delas são meros jogos, enquanto outras envolvem opções importantes por exemplos (avaliação de riscos, regulação ambiental e efeito nos preços do petróleo). Nesse trabalho pretendemos abordar os princípios básicos da probabilidade ligados diretamente à genética, parte da biologia que estuda a passagem das características biológicas e físicas de geração para geração.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's) a probabilidade desenvolve no estudante formas particulares de pensamentos e raciocínios, envolvendo fenômenos aleatórios, e certas atitudes que possibilitam o posicionamento crítico, o fazer previsões e tomar decisões. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/1996) diz que o Ensino Médio busca a preparação básica para o trabalho e a cidadania do educando, para continuar aprendendo, de modo a ser capaz de se adaptar com flexibilidade a novas condições de ocupação ou aperfeiçoamento posteriores. É uma fase fundamental para os professores explorarem posturas adequadas na transmissão dos conhecimentos para os estudantes, evitando atitudes preconceituosas em assuntos matemáticos e biológicos.

Em estudos realizados por LOPES (2005) a probabilidade é muito útil na sociedade atual, devido a necessidade que há dos indivíduos compreenderem as informações veiculadas, fazer previsões que influenciam suas vidas pessoais e em comunidade. Devido à grande dificuldade em ensinar probabilidade para o Ensino Médio e ainda por trazer "traumas" do tempo de estudo, por não se entender a utilidade de certos conteúdos, escolheu-se este conteúdo por concordar que o mesmo traz vantagens para os alunos e para a sociedade.

Segundo INOCÊNCIO (2001), com os avanços atuais evidenciados na genética, o sistema educacional brasileiro tem necessidade de adequar-se à realidade, aproximando a escola dos novos conceitos.

Por sua vez estudar genética aperfeiçoa discussões éticas, sociais, morais e econômicas na construção científica, o aluno vivência situações da vida humana, entende como acontece à transmissão dos caracteres dos pais para a sua família, adquire a percepção humana em avaliar os fenômenos e entender como ocorre à hereditariedade, por meio da teoria da probabilidade, que amplia no aluno maneiras de desenvolver os pensamentos e raciocínios, relacionando fenômenos aleatórios e permitem tomar decisões e fazer previsões.

Segundo SILVA (2016) a Genética é outra área que utiliza as teorias da probabilidade, pois os acontecimentos nesse ramo da Biologia envolvem eventos aleatórios, como o encontro dos gametas masculinos e femininos com determinados genes na fecundação.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Médio, por sua vez, no que se refere ao conteúdo de Genética cita o seguinte:

> [...] São necessárias noções de probabilidade, análise combinatória e bioquímica para dar significado às leis da hereditariedade, o que demanda o estabelecimento de relações de conceitos aprendidos em outras disciplinas. De posse desses conhecimentos, é possível ao aluno relacioná-los às tecnologias de clonagem, engenharia genética e outras ligadas à manipulação do DNA, proceder a análise desses fazeres humanos identificando aspectos éticos, morais, políticos e econômicos envolvidos na produção científica e tecnológica, bem como na sua utilização; o aluno se transporta de um cenário meramente científico para um contexto em que estão envolvidos vários aspectos da vida humana. É um momento bastante propício ao trabalho com a superação de posturas que, por omitir a real complexidade das questões, induz a julgamentos simplistas e, não raro, preconceituosos (BRASIL, 1999, p. 42).

Assim, o objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta de sequência didática para ser adotada por professores de matemática no intuito de promover a compreensão por parte dos alunos da relação entre probabilidade e genética, que seja mais dinâmica e atraente para a fixação do conteúdo para facilitar assim o conhecimento sobre Probabilidade e Genética (Primeira Lei de Mendel) capaz de melhorar a construção de aprendizagem e ensino dos alunos do terceiro ano do Ensino Médio.

A escolha do tema justifica-se pelo fato de que existe certa dificuldade dos alunos sobre o processo ensino-aprendizagem da probabilidade e da genética. Estes alunos não conseguem compreender a relação entre elas, talvez pelo fato da maioria dos livros didáticos tratarem os conceitos de probabilidade através dos jogos de azar (baralho, moedas e dados). Fato este que pode estar relacionado com a origem dos estudo das probabilidades tendo em vista que estes jogos foram tomados como base conforme aponta (BAYER et al, 2005) a seguir:

> O estudo das probabilidades começou, com a observação de fenômenos diários e como explicação para situações que ocorriam no dia a dia. Foi por volta de 1400 que surgiram as primeiras ideias sobre a estabilidade das razões estatísticas e sobre a Teoria das Probabilidades, utilizando como base os jogos de azar

Ressaltamos ainda, que segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) a Matemática do Ensino Médio deve priorizar conceitos e procedimentos que possibilitem o estabelecimento de conexões tanto entre diversas ideias matemáticas, como com outras áreas do conhecimento, atentando para suas aplicações sociais. Tendo como objetivos gerais da área de Matemática do Ensino Médio:

- Aplicar conhecimentos matemáticos em situações diversas, na compreensão das demais ciências, de modo a consolidar uma formação científica geral.
- Expressar-se oral, escrita e graficamente, valorizando a precisão da linguagem, na comunicação de ideias e na argumentação matemática.
- Compreender a Matemática como ciência, com sua linguagem própria e estrutura lógico-dedutiva
- Estabelecer relações entre conceitos matemáticos de um mesmo campo e entre os diferentes eixos (Geometria, Grandezas e Medidas, Estatística e Probabilidade, Números e Operações, Álgebra e Funções), bem como entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.
- Desenvolver a autoestima e a perseverança na busca de soluções, trabalhando coletivamente, respeitando o modo de pensar dos/as colegas e aprendendo com eles/as.
- Analisar criticamente os usos da Matemática em diferentes práticas sociais e fenômenos naturais, para atuar e intervir na sociedade.
- Recorrer às tecnologias digitais para descrever e representar matematicamente situações e fenômenos da realidade, em especial aqueles relacionados ao mundo do trabalho.

Ainda sobre o estudo de genética, é interessante ressaltar a Primeira Lei de Mendel que desempenha um papel importantíssimo na conexão desse estudo com a probabilidade. G. J. Mendel (1822 - 1884), diz que cada característica é determinada por dois fatores que se separam na formação dos gametas, onde ocorrem em dose simples, isto é, para cada gameta masculino ou feminino encaminha-se apenas um fator. Mendel foi o que introduziu a Estatística no estudo da Genética, utilizando métodos estatísticos para interpretar os resultados obtidos de eventos que podem ocorrer durante o cruzamento de uma determinada espécie.

O estudo dessas duas ciências requer um maior cuidado por parte dos professores para facilitar a compreensão dos alunos e manter eles motivados no entendimento do assunto que pode futuramente influenciar em um planejamento familiar de melhor qualidade. Além de ser capaz de exercer mais a sua cidadania e sem preconceitos, compreender melhor as estatísticas oficiais e por ser um assunto bastante cobrado nos principais vestibulares do país.

O estimulo ao ensino da probabilidade e da genética no Ensino Médio é fundamental para atender o currículo exigido pela LDB/1996, uma vez que é necessário adotar metodologias de ensino e de avaliação que estimulem a iniciativa dos estudantes, domínio dos princípios científicos e tecnológicos que presidem a produção moderna.

Com isso em mente este trabalho, ele foi estruturado da seguinte forma, no capítulo 1, apresenta-se algumas definições e exemplos dos conteúdos de probabilidade contextualizados, visando tornar o trabalho autossuficiente,no capítulo 2, mostra como Mendel realizou seus estudos e são dados os conceitos fundamentais de Genética, no capitulo 3, são feitas considerações sobre livros didáticos que abordam o conteúdo de probabilidade e também os de genética, a nível de ensino médio, segundo e terceiro anos, no capitulo 4, apresenta-se a proposta de abordagem dos conteúdos de maneira que ele esteja mais ligado com o cotidiano do aluno, porém sem desconsiderar a importância teórica do assunto. Pretende-se acrescentar ideias e sugerir uma sequência de conteúdo para que as disciplinas de Matemática e Biologia possam se complementar, e em especial o professor de Matemática possa ensinar probabilidade com aplicação em genética e não mudar totalmente a forma como vem sendo trabalhado este conteúdo.

Capítulo 1

Apresentação da Probabilidade

Neste tópico a teoria dos conjuntos é essencial para compreensão da teoria de probabilidades. Considera-se necessário que autores e professores avaliem a necessidade de inserir tópicos sobre esta teoria junto da apresentação deste nova conceito. Após a observação rápida de alguns livros de nível médio que tratam sobre o assunto em questão, a saber, as referências: O livro Matemática: Ciência e Aplicações Volume 2 de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida ; O livro Matemática: Volume 2 de Manoel Paiva ; O livro Matemática: Contexto & Aplicações Volume 2 de Luiz Roberto Dante. Constatou-se que a maioria desses livros iniciam o estudo de probabilidade sem domínio da teoria de conjuntos, reforça-se a necessidade de incluir este tópico no início do capítulo de teoria da probabilidade do ensino médio.

1.1 Teoria Elementar dos Conjuntos

1.1.1 Conceitos Primitivos

Neste capítulo introduziremos algumas nocões básicas da teoria de conjuntos. Não apresentaremos uma exposicão axiomática e rigorosa da teoria, mas sim uma exposicão intuitiva e simples, incluindo apenas o material e a terminologia que usaremos mais adiante.

Assim como a noção de ponto na Geometria Euclidiana, aqui admitiremos como termos primitivos, isto é, sem uma explicação formal do seu significado: Conjuntos, Elemento e Relação de Pertinência. Procuremos, no entanto, explicar em termos intuitivos o significado destas noções.

A noção de conjunto é, intuitivamente, a do senso comum, isto é, a idéia dada pela palavra **Coleção**. Assim, conjunto significa coleção de objetos. Objetos estes que denominam-se elementos do conjunto.

Indicaremos os conjuntos por letras maiúsculas do alfabeto latino: A, B, C, etc. Quanto aos seus elementos, serão indicados por letras minúsculas do alfabeto latino; a, b, c, etc. Chamamos a atenção do leitor para o fato de um elemento de um conjunto poder ser qualquer coisa, por exemplo: uma cadeira, uma fruta, uma matriz 2×2, uma pessoa, e etc. É importante saber que mesmo um conjunto pode ser também um elemento de um outro conjunto.

Exemplo 1. $A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$.

Exemplo 2. $B = \{$*estudantes do curso de licenciatura em matematica da UFPI/CMRV*$\}$.

Exemplo 3. *Alguns conjuntos numéricos:*

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots\},$$

$$\mathbb{Z} = \{\cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}.$$

Exemplo 4. $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}_{2\times 2} ; a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4 \text{ em } \mathbb{Z} \right\}$.

Embora o conceito intuitivo de conjunto nos remeta à ideia de pluralidade (coleção de objetos), devemos considerar a existência de conjuntos com apenas um elemento, chamados de conjuntos unitários, e o conjunto sem qualquer elemento, chamado de conjunto vazio $\emptyset$.

Exemplo 5. *Conjunto dos meses do ano que possuem menos de 30 dias:* $\{$*fevereiro*$\}$.

Em geral um conjunto fica determinado pela enumeração de seus elementos ou por uma propriedade P comum de seus elementos.

Exemplo 6. $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

Exemplo 7. $B = \{x\ x$ *é um número inteiro e* $x > 2\}$.

O conjunto vazio pode ser obtido descrevendo um conjunto onde a propriedade P é logicamente falsa.

Exemplo 8. $\{x \in \mathbb{Z}; x > 0 \text{ e } x < 0\} = \emptyset$.

Obs 1. *Quando representamos um conjunto mediante uma lista, as repetições e a ordem na qual aparecem os elementos na lista são irrelevantes. Por exemplo, o conjunto* $A = \{a,\ b,\ c\}$ *é também representado como* $A = \{b,\ c,\ a\}$ *ou* $A = \{a,\ c,\ b\}$.

Dado um conjunto A, se x é um elemento de A diremos que x pertence a A e escreveremos:

$$x \in A.$$

Se x não for um elemento de A diremos que x não pertence a A e escreveremos

$$x \notin A.$$

Em (HALMOS, 2001) o autor comenta a simbologia adotada acima para relação de pertinência, o mesmo diz que a versão da letra grega epsilon ($\in$) é tantas vezes usada para denotar pertinência que seu emprego é proibido para indicar qualquer outra coisa em Matemática. A maioria dos autores deixa $\in$ para sempre na teoria dos conjuntos e usa ε quando necessita da quinta letra do alfabeto grego.

Uma outra relação entre conjuntos, mais elementar do que a de pertinência, é a de igualdade.

Definição 1. *Dados dois conjuntos* A *e* B*, diz-se que* A *é igual à* B*, e denota-se por* $A = B$*, se eles tem os mesmos elementos.*

Assim,

$$A = B \Longleftrightarrow (\forall\ x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

O fato de A e B não serem iguais é expresso escrevendo $A \neq B$. Note que para ter $A \neq B$ é suficiente garantir a existencia de um $x \in A$ tal que $x \notin B$, ou vice-versa.

1.1.2 Conjunto Universo

Em Teoria dos Conjuntos, para evitar ambiguidades, é preciso que se defina um conjunto que contenha todos os elementos envolvidos em um determinado assunto ou estudo. Por exemplo, o conjunto $A = \{x\ -2 \leqslant x \leqslant 2\}$ das soluções da inequação $|x| \leqslant 2$ é tal que se $x \in \mathbb{R}$ é um conjunto infinito ao passo que se $x \in \mathbb{Z}$ então $A = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$, o qual é finito. Portanto, é essencial, que ao descrever um conjunto através de uma propriedade

P, fixemos o "ambiente" em que estamos trabalhando. Tal "ambiente" é usualmente denominado Conjunto Universo e denotado por U, ficando claro que o termo universo é empregado no sentido de universo de discurso.

Exemplo 9. *Se estudamos Geometria Plana, o conjunto universo é o conjunto dos pontos de um plano:*

$$U = \{(x, y); x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2.$$

Exemplo 10. *Se estudamos máximo divisor comum (m.d.c.), o conjunto universo é, em geral,* $U = \mathbb{Z}$.

1.1.3 Subconjuntos

Sejam A e B conjuntos de um mesmo conjunto universo U.

Definição 2. *Diz-se que* A *é um subconjunto de* B*, e indica-se por* $A \subset B$*, se para todo* $x \in A$ *tem-se* $x \in B$.

Ou seja,

$$A \subset B \iff (\forall\, x)(x \in A \Rightarrow x \in B).$$

O símbolo "$\subset$" é dito sinal de inclusão e significa "contido em".

Exemplo 11. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Exemplo 12. $\emptyset \subset A$, *para todo conjunto* A*. De fato, se ocorrer o contrário deve existir algum elemento de* $\emptyset$ *que não pertence a* A*. Desde que* $\emptyset$ *não possui elementos, tem-se um absurdo. Portanto* $\emptyset \subset A$ *para todo conjunto* A.

Exemplo 13. $A,\ B \subset U$ *e* $A \subset A$.

A negação de $A \subset B$ será indicada por $A \not\subset B$ e significa que existe $x \in A$ tal que $x \notin B$:

$$A \not\subset B \iff (\exists\, x)(x \in A \text{ e } x \notin B).$$

Proposição 1. *Dados os conjuntos* $A,\ B$ e $C \subset U$, *temos:*

(i) $A = B \iff A \subset B$ *e* $B \subset A$*; (Anti-Simetria)*

(ii) $A = A$*; (Reflexividade)*

(iii) $A \subset B$ *e* $B \subset C \Rightarrow A \subset C$. *(Transitividade)*

Demonstração. (i) Ora, $A = B \Leftrightarrow A$ e B possuem os mesmos elementos $\Leftrightarrow$ todo elemento de A é elemento de B e todo elemento de B é elemento de $A \Leftrightarrow A \subset B$ e $B \subset A$.

(ii) Consequência imediata de (i).

(iii) Dado $x \in A$ temos $x \in B$. Daí, como $B \subset C$, segue que $x \in C$. Sendo $x \in A$ arbitrário temos $A \subset C$.

□

Em virtude da proposição acima, item (i), temos que quase toda demonstração de igualdade entre dois conjuntos A e B se dividem em duas partes, deve-se primeiro mostrar que $A \subset B$ e depois mostrar que $B \subset A$.

Por outro lado, vale a seguinte equivalência

$$A \neq B \Longleftrightarrow (A \not\subset B \text{ ou } B \not\subset A).$$

Obs 2. *Observe que a pertinência ($\in$) e a inclusão ($\subset$) são na verdade coisas conceitualmente diferentes. A pertinência relaciona elemento e conjunto enquanto a inclusão relaciona dois conjuntos. Mais ainda, a inclusão é reflexiva e transitiva e a pertinência não.*

Definição 3. *Se* $A \subset B$ *e* $A \neq B$, *diz-se que* A *é um subconjunto próprio de* B *e indica-se por* $A \subsetneq B$.

Exemplo 14. $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z}$, *pois* $-1 \in \mathbb{Z}$ *e* $-1 \notin \mathbb{N}$.

Exemplo 15. $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, *pois* $\pi \in \mathbb{R}$ *e* $\pi \notin \mathbb{Q}$.

1.1.4 Conjunto das Partes

Para todo conjunto E admitimos a existência de um outro conjunto $\mathcal{P}(E)$ cujos elementos são os subconjuntos de E. Tal conjunto é denominado conjunto das partes de E. Assim,

$$\mathcal{P}(E) = \{X \ \ X \subset E\}.$$

Note que $\mathcal{P}(E)$ é caracterizado pelo fato de

$$X \subset E \Longleftrightarrow X \in \mathcal{P}(E).$$

Exemplo 16. $E = \{a,\ b\}$*;* $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,\ b\}\}$.

Exemplo 17. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ *e* $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Prova-se que se E possui k elementos então $\mathcal{P}(E)$ possui 2^k elementos. Devido a esse fato alguns autores chamam o conjunto das partes de E de conjunto potência de E denotando o mesmo por 2^E. Nestas notas utilizaremos a notação usual $\mathcal{P}(E)$.

Obs 3. *O número de elementos de um conjunto* E *será denotado por* $n(E)$*. Assim, temos* $n(\emptyset) = 0$ *e, se* $n(E) = k$*,* $n(\mathcal{P}[E]) = 2^k$.

1.1.5 Operações com Conjuntos

Nesta parte vamos introduzir as leis básicas de formação e operação com conjuntos. Aqui consideraremos os conjuntos em questão contidos num mesmo conjunto universo.

Definição 4 (União)**.** *Dados dois conjuntos* A *e* B*, definimos a união* $A \cup B$ *de* A *e* B *como sendo o conjunto*

$$A \cup B = \{x \ \ x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

Em outros termos, a união de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a um ou ambos os conjuntos A e B.

Definição 5 (Interseção)**.** *Dados dois conjuntos* A *e* B*, definimos a interseção* $A \cap B$ *de* A *e* B *como sendo o conjunto*

$$A \cap B = \{x \ \ x \in A \text{ e } x \in B\}.$$

Ou seja, a interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B.

Obs 4. *Se* $A \cap B = \emptyset$ *diz-se que os conjuntos* A *e* B *são* **Disjuntos***.*

As propriedades formais das operações de união ($\cup$) e interseção ($\cap$) são colocadas no seguinte resultado:

Teorema 1. *Dados os conjuntos* $A,\ B,\ C$*, temos:*

(i) $A \cup A = A = A \cap A$*; (Reflexiva)*

(ii) $A \cup B = B \cup A$ *e* $A \cap B = B \cap A$*; (Comutativa)*

(iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *e* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$*; (Associativa)*

(iv) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ *e* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$*; (Distributiva)*

Demonstração. Demonstremos então o item $(iv)_1$. Dado $x \in A \cup (B \cap C)$ temos que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Se $x \in A$ então $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$, donde $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Se $x \in B \cap C$, então $x \in B$ e $x \in C$, donde $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$ e, portanto, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Assim, em qualquer caso, $x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Logo, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Reciprocamente, dado $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ temos $x \in A \cup B$ e $x \in A \cup C$. Ou seja, $(x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ e } (x \in A \text{ ou } x \in C)$. Daí segue que $x \in A$ ou $x \in B \cap C$ (recorde a regra de substituição: distributiva!). Assim, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Portanto, vale $(iv)_1$. □

Embora as operacões $\cap$ e $\cup$ sejam definidas para dois conjuntos, podemos generalizar e reescrever a definicão para mais de dois conjuntos, mesmo para famílias de conjuntos.

Definição 6. *Sejam* Λ *um conjunto não vazio e* X *um conjunto. Se a cada elemento* $\lambda \in \Lambda$ *corresponde um único conjunto* $A_\lambda \subset X$*, dizemos que a coleção* $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *é uma família de elementos de* X *indexada pelo conjunto* Λ*. O conjunto* Λ *é denominado conjunto de índices da família.*

Note que uma família $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de X é um subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. Os índices $\lambda \in \Lambda$ servem como indicativo para os subconjuntos de X que estamos considerando bem como a quantidade dos mesmos. Assim, a grosso modo, uma família de elementos de um conjunto X é uma coleção de subconjuntos de X.

Observamos que qualquer conjunto não vazio pode servir como conjunto de índices de uma família de conjuntos.

Exemplo 18. *Seja* X *um conjunto não vazio. Para cada* $x \in X$ *defina o conjunto* $A_x = \{x\}$ *e a família* $\mathcal{F} = \{A_x\}_{x \in X}$*. Neste caso tem-se* $\Lambda = X$*.*

Exemplo 19. *Sejam* $\Lambda = I_n = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ *um conjunto de índices e* X *um conjunto. Uma família de elementos de* X *indexada por* I_n *é o conjunto* $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in I_n} = \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n\}$*. No caso geral,* $\Lambda = \mathbb{N}$ *e* $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{N}} = \{A_1,\ A_2,\ \cdots,\ A_n,\ \cdots\}$*.*

Definição 7. *Seja* $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *uma família de conjuntos com índices em* Λ*. Define-se a união e a interseção da família* $\mathcal{F}$ *do seguinte modo*

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x; x \in A_\lambda \ \textit{para algum índice}\ \lambda \in \Lambda\}$$

e

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \{x; x \in A_\lambda \ \forall \ \lambda \in \Lambda\}.$$

Exemplo 20. *Considerando a família do exemplo 18, temos* $\bigcup_{x\in X} A_x = X$ *e* $\bigcap_{x\in X} A_x = \emptyset$.

Exemplo 21. *Nas famílias do exemplo 19, temos*

$$\bigcup_{\lambda\in I_n} A_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^{n} A_\lambda = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$

e

$$\bigcap_{\lambda\in I_n} A_\lambda = \bigcap_{\lambda=1}^{n} A_\lambda = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n.$$

No caso de $\Lambda = \mathbb{N}$, *temos*

$$\bigcup_{\lambda\in \mathbb{N}} A_\lambda = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$

e

$$\bigcap_{\lambda\in \mathbb{N}} A_\lambda = \bigcap_{\lambda=1}^{\infty} A_\lambda = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots .$$

Exemplo 22. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *consideremos o conjunto*

$$A_n = \{-n, -n+1, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, n-1, n\}.$$

Então

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{Z} \text{ e } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{-1, 0, 1\}.$$

Pode-se provar com um pouco de esforço, que a união de famílias distribui sobre a interseção e que a interseção de famílias distribui sobre a união.

Definimos a seguir uma outra operação entre conjuntos.

Definição 8 (Diferença)**.** *Sejam* A *e* B *conjuntos. Definimos o conjunto diferença* $A\backslash B$ *como sendo*

$$A\backslash B = \{x \ \ x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

É importante observar que, se A e B são conjuntos, $A\backslash B$ e $B\backslash A$ são, em geral, conjuntos diferentes. Também é claro que $A\backslash B \subset A$.

Exemplo 23. *Sejam* $A = \{x \in \mathbb{Z}\ \ x \geqslant -3\}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{Z}\ \ x \leqslant 2\}$. *Então* $A \backslash B = \{x \in \mathbb{Z}\ \ x \geqslant 3\}$ *e* $B \backslash A = \{x \in Z\ \ x \leqslant -4\}$.

Note que não se exige que B seja um subconjunto de A para formar a diferença $A \backslash B$. Quando A e B são disjuntos tem-se $A \backslash B = A$.

Quando se tem $B \subset A$, a diferença $A \backslash B$ chama-se o complementar de B em relação a A e esceve-se $C_A B = A \backslash B$. Assim,

Definição 9 (Complementar)**.** *Sejam* A *e* B *conjuntos com* $B \subset A$. *O complementar de* B *em relação a* A *é o conjunto* $C_A B$ *definido por*

$$C_A B = A \backslash B.$$

No caso do complementar de X em relação ao conjunto universo U, diz-se apenas o complementar de X e usa-se a seguinte notação

$$C_U X = \overline{X}.$$

Observe ainda que, neste caso, temos

$$x \in \overline{X} \Longleftrightarrow x \notin X.$$

Exemplo 24. *No exemplo 23, considerando* $U = \mathbb{Z}$ *temos* $\overline{A} = \{x \in \mathbb{Z}\ \ x < -3\}$ *e* $\overline{B} = \{x \in \mathbb{Z}\ \ x > 2\}$.

Exemplo 25. *Considerando* $U = \mathbb{N}$ *e* $A = \{n \in \mathbb{N}\ \ n$ *é par*$\}$ *temos* $\overline{A} = \{n \in \mathbb{N}\ \ n$ *é ímpar*$\}$.

Teorema 2. *Sejam* A *e* B *conjuntos contidos num mesmo conjunto universo* U. *Então,*

(i) *Se* $A \subset B$, *então* $\overline{B} \subset \overline{A}$;

(ii) $\overline{(\overline{A})} = A$;

(iii) $\overline{\emptyset} = U$ *e* $\overline{U} = \emptyset$;

(iv) $A|B = A \cap \overline{B}$;

(v) *[Leis de De Morgan]*
$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$ *e* $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Demonstração. Deixamos a cargo do leitor as demonstrações dos itens (i)-(iv). Provemos as Leis de De Morgan.

(v) (1) $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Com efeito, $x \in \overline{(A \cup B)} \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Portanto, $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

(2) $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Com efeito, $x \in \overline{(A \cap B)} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A$ ou $x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.

Logo, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

□

As leis de De Morgan podem ser generalizadas, sem dificuldade, a uniões e interseções de famílias de conjuntos da seguinte maneira: Se $\mathcal{F} = \{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família de elementos de um conjunto X, então

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$$

e

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c.$$

1.2 Experimento Determinístico e Experimento Aleatório

Podemos conceituar que experimento determinístico é aquele que quando realizado sob determinadas condições é possível prever o resultado particular que irá ocorrer. E experimento aleatório por sua vez, é aquele que quando realizado sob condições idênticas, não é possível prever, a priori, o resultado particular que irá ocorrer, e sim, o conjunto dos possíveis resultados. Seguem-se alguns exemplos de experimentos aleatórios, pois acreditamos que a diversificação dos exemplos pode auxiliar o aluno quanto à compreensão do conteúdo em estudo.

Exemplo 26. *A velocidade com que uma moeda atinge o solo e o intervalo de tempo são sempre iguais a 20 m/s e 2 segundos, respectivamente.*

Exemplo 27. *O lançamento de um dado e leitura da fase voltada para cima, o lançamento de uma moeda e leitura do lado voltado para cima, o nascimento de uma criança, a previsão do tempo, o teste de qualidade de uma empresa, escolher uma pessoa ao acaso de um grupo de dez pessoas, jogo de futebol, dentre outros.*

Exemplo 28. *No jogo da roleta, muito comum em cassinos americanos, é sorteado um número entre 1 e 36 (o zero também é possível, mas vamos desconsiderá-lo neste momento). Nesse jogo é utilizada uma mesa alongada na qual em uma das pontas fica a roleta, uma marca na mesa indica a posição da pessoa que organiza o jogo e o restante da mesa está ocupado por áreas demarcadas pelos números de 1 a 36, dispostos em 3 colunas e 36 fileiras. Cada jogador pode apostar em várias situações, por exemplo: se o número que vai sair é par ou ímpar; se ele é da 1^a dúzia (1 a 12), da 2^a dúzia (13 a 24) ou da 3^a dúzia (25 a 36); ou mesmo apostar em um número específico. O jogador pode apostar em quantos números quiser em cada rodada. Se um jogador apostar 1 dólar em um número específico e acertar, ele receberá 36 dólares; se apostar 1 dólar em uma das 3 dúzias e acertar, receberá 3 dólares; e se ele apostar 1 dólar em um número par (ou ímpar) e acertar, receberá 2 dólares. Ele também pode apostar 1 dólar em um grupo de 4 números e, se acertar (ou seja, se for sorteado um dos 4 números escolhidos), receberá 9 dólares.*

1.3 Espaço Amostral, Evento, Definição de Probabilidade e Equiprobabilidade

A teoria das probabilidades é um segmento da Matemática que estuda e desenvolve modelos visando analisar experimentos ou fenômenos aleatórios. Todos esses modelos apresentam variações segundo sua complexidade, mas possuem aspectos básicos em comuns. Antes de introduzir a fórmula para se calcular probabilidade, será dada ênfase em alguns conceitos fundamentais, como: espaço amostral, evento:

Definição 10. *Espaço Amostral (Ω) é o conjunto formado por todas as possibilidades de um experimento aleatório.*

Exemplo 29. *Um casal planeja ter exatamente 2 crianças as possibilidade possíveis: {(masculino,masculino), (masculino, feminino), (feminino, masculino), (feminino, feminino)}*

Exemplo 30. *Um homem heterozigoto para determinada caracteristica (Aa) forma dois tipos de espermatozoides, A ou a. Se uma mulher também for heterozigota, poderá formar óvulos A e a. Eles casam-se e tem um filho, logo as possibilidades para o genes dessa criança: { AA, Aa, aA, aa}.*

Definição 11. *Evento do Espaço Amostral (A) é qualquer subconjunto do espaço amostral . O evento será representado por uma letra maiúscula do alfabeto, como podemos observar a seguir:*

Exemplo 31. *No lançamento de um dado comum : {1, 2, 3, 4, 5, 6}, um subconjunto dele é {1 ,3 , 5}, que pode ser identificado por "ocorrer um número ímpar no lançamento de um dado", no o evento será, A = {1, 3, 5}.*

Exemplo 32. *Considere um triângulo equilátero. Determine os pontos médios de cada um de seus lados. Construa um novo triângulo equilátero unindo esses pontos. Esse novo triângulo, interno ao triângulo original é chamado de buraco. Escolhendo-se ao acaso um ponto no triângulo equilátero original qual a chance desse ponto "cair" no buraco?*

Definição 12. *Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número p(A) de forma que:*

1. *Para todo evento A,* $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
2. $p(\Omega) = 1$
3. *Se A e B são eventos mutuamente excludentes, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente* $(A \cap B = \emptyset)$ *então* $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

Se um experimento tem como espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, com um número finito de elementos, dizemos que os eventos elementares $\{a_i\}$ são equiprováveis, se todos tem a mesma probabilidade de ocorrer, isto é:

$$p(\{a_1\}) = \frac{1}{n}.$$

Desta forma, podemos definir a probabilidade de um evento $A \subset \Omega$,como sendo a quantidade de elementos de A. Daí, para um evento A temos:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}.$$

O teorema a seguir contém as propriedades das probabilidades.

Teorema 3. *Se A e B são eventos, então:*

1. *p($\overline{A}$) = 1 - p(A).*

2. *p(∅) = 0.*

3. *p(A - B) = p(A) - p(A∩B).*

4. *p($A \cup B$) = p(A) + p(B) - p(A ∩ B), onde A e B são dois eventos distintos.*

Prova:

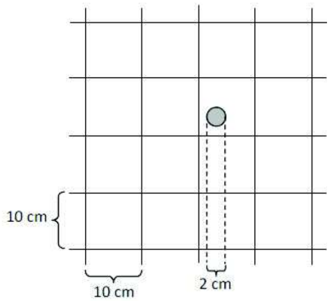
1. 1 = p(Ω) = p(A∪$\overline{A}$) = p(A) + p($\overline{A}$). Daí p($\overline{A}$) = 1 - p(A).

2. p(Ω) = p(Ω ∪ ∅) = p(Ω) + p(∅) , pois Ω e ∅ são mutuamente excludentes. Daí, p(∅) = 0.

3. p(A) = p[(A - B) ∪ (A ∩ B)] = p(A - B) + p(A ∩ B) pois A - B e A ∩ B são mtuamente excludentes. Daí, p(A - B) = p(A) - p(A ∩ B).

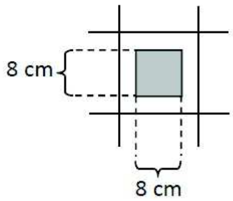
4. p(A ∪ B) = p[(A - B) ∪ B] = p(A - B) + p(B) pois A - B e B são mutuamente excludentes. Como p(A - B) = p(A) - p(A∩ B), resulta p(A∪ B) = p(A) + p(B) - p(A ∩ B).

Exemplo 33. *(PAPMEM - 2015) O chão de uma sala é ladrilhado com cerâmicas quadradas de 10 cm de lado. Uma moeda de 2 cm de diâmetro é jogada nesse chão. Qual é a probabilidade de que essa moeda, ao parar, não fique sobre as juntas dos ladrilhos, ou seja, sobre as arestas dos quadrados?*



Solução:

O centro da moeda deve parar em um quadrado interno à cerâmica e com 8 cm de lado, cerâmica e quadrado concêntricos e com os lados respectivamente paralelos.



A probabilidade procurada é:

P = (área de um quadrado de lado 8 cm) / (área de um quadrado de lado 10 cm) = $\frac{64}{100}$= 0,64 = 64%

Exemplo 34. *Em uma população humana 35 indivíviduos têm o grupo sanguíneo A, 47 têm B, 21 têm AB, e 4 têm O. Qual é a probabilidade de que um indivíduo selecionado ao acaso tenha o grupo sanguíneo AB?*

Solução: Espaço Amostra(Ω): 107

Evento (A): 21

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$p(A) = \frac{21}{107}$$

$$p(A) = 19,62\%$$

Exemplo 35. *Em um grupo de 4 pessoas, qual é a probabilidades de haver alguma coincidência de signos zodiacais?*

Solução: Supondo que todos têm signos diferentes.

Espaço amostral: 12x12x12x12= 20736

Evento: 12x11x10x9 = 11880

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} =$$
$$p(A) = \frac{11880}{20736} =$$
$$p(A) = \frac{55}{96}.$$

Pela Probabilidade Complementar $p(\overline{A})$ temos:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$
$$p(\overline{A}) = 1 - \frac{55}{96}.$$
$$p(\overline{A}) = \frac{41}{96}.$$

É a probabilidade de haver uma coincidência entre os quatro. Pode ser que haja dois com o mesmo signo, pode ser que haja três como o mesmo signo ou o mais difícil que seria os quatro com o mesmo signo.

Exemplo 36. *Num cruzamento Aa X Aa, sabemos que as combinações AA,Aa,aA e aa são igualmentem prováveis, cada uma com probabilidade $\frac{1}{4}$. Sabemos também que Aa e aA não podem ser distinguidas biologicamente. Qual a probabilidade de ocorrer Aa ou aA?*

Solução:

p(Aa) = $\frac{1}{4}$ e p(aA) = $\frac{1}{4}$

Aa e aA são mutuamente exclusivos, então p(Aa $\bigcap$ aA) = 0 .Logo:

$$p(Aa \cup aA) = p(Aa) + p(aA) - p(Aa \cap aA)$$

$$p(Aa \cup aA) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0$$
$$p(Aa \cup aA) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 37. *Ao retirar uma carta de um baralho de 52 cartas, qual é a probabilidade de que essa carta seja vermelha ou um ás?*

Solução:

Evento B: a carta é vermelha;

Evento A: a carta é ás;

Evento (B $\cap$ A): a carta é vermelha ou ás

p(A$\cup$ B) = p(A) + p(B) - p(A $\cap$ B)

Em um baralho de 52 cartas, há 26 cartas vermelhas e 26 cartas pretas. Há também 4 ases, dos quais 2 são vermelhos.

Logo:

$$p(A) = \tfrac{26}{52}$$
$$p(B) = \tfrac{4}{52}$$
$$p(A \cap B) = \tfrac{2}{52}$$

Assim:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$
$$p(A \cup B) = \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52}$$

A probabilidade de a carta retirada ser vermelha ou ás é $\frac{28}{52}$.

Exemplo 38. *Um estudo sobre a longevidade de uma espécie de animais revelou que, escolhido um animal dessa espécie ao acaso, a probabilidade de que ele viva 30 anos ou menos é 0,6, e a probabilidade de que ele viva 30 anos ou mais é 0,5. Calcule a probabilidade de esse animal viver exatamente 30 anos?*

Solução: E o espaço amostral formado por todos os animais dessa espécie;

A o evento formado pelos animais dessa espécie que vivem 30 anos ou menos;

B o evento formado pelos animais dessa espécie que vivem 30 anos ou mais;

A $\bigcap$ B o evento formado pelos animais dessa espécie que vivem 30 anos.

Temos:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$1 = 0,6 + 0,5 - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = 0,1$$

Logo, a probabilidade de que o animal escolhido viva exatamente 30 anos é 0,1.

1.4 Probabilidade Condicional

Considerando a experiência que consiste em jogar um dado não-viciado e observar a face de cima. Temos que $\Omega = \{1\ ,2\ ,...\ ,6\}$. Sejam os eventos A = {2, 3, 4, 5, 6} e B = {2, 4, 6}. Temos que p(A) $= \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{5}{6}$ e p(B) $= \dfrac{n(B)}{n(\Omega)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$. Esta é a probabilidade de B inicialmente, ou seja, antes que o experimento se realize. Suponha que, uma vez realizado o experimento, alguém informe que o resultado do mesmo não é foi número 1, isto é, que A ocorreu. Assim pode-se dizer que a ocorrência de B se modifica com esta informação, já que, haverá apenas 5 casos possíveis, dos quais três são favoráveis à ocorrência de B. Isto é quantificado com a introdução de uma probabilidade posterior, ou probabilidade de B na certeza que A ocorreu, denotada por:

$$p(A|B) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = \frac{3}{5} = 0,6$$

Note que os casos possíveis não são mais todos os elementos do espaçõ amostral(Ω) e sim os elementos de A e que os casos favoráveis à ocorrência de B não são mais os elementos de B e sim os elemento de $A \cap$ B pois só os elementos que pertencem a A podem ocorrer.

Definição 13. *Dados dois eventos A e B, com p(B) $\neq$0 , a probabilidade condicional de A na certeza de B é o número p(A|B) =* $\dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$*, onde A|B indica a probabilidade de ocorrer o evento A sabendo que o evento B já ocorreu.*

Exemplo 39. *Dois dados perfeitos são lançados. Qual é a probabilidade de sair soma 8 se ocorreu o 3 no primeiro dado?*

Solução:

$\Omega = \{(1,1),(1,2)....,(6,5),(6,6)\} \rightarrow n(\Omega) = 36$

Evento A: sair soma 8 $\rightarrow$ A = $\{(2, 6), (3, 5), (4, 4),(5, 3), (6, 2)\}$

Evento B: sair 3 no primeiro dado $\rightarrow$ B =$\{(3, 1),(3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6)\}$

$A \cap B = (3,5)$

$p(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$

$p(B) = \dfrac{6}{36}$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} =$$

$$p(A|B) = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{6}{36}} =$$

$$p(A|B) = \frac{1}{6}$$

Exemplo 40. *As pesquisas de opinião apontam 20 % da população é constituída de mulheres que votam no partido X. Sabendo que 56 % da população são mulheres, qual a probabilidade de que uma mulher selecionada ao acaso da população toda vote no partido X?*

Solução:

B: pessoa escolhida mulher

A: a pessoa vota no partido X

$A \cap B$: mulher que vota no partido X

$p(B) = 0{,}56$, que é equivalente a dizer que 56 % da população são mulheres.

$p(A \cap B) = 0{,}2$, que é equivalente a dizer que 20 % da população são mulheres que votam no partido X.

Portanto,

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$
$$p(A|B) = \frac{0,2}{0,56}$$
$$p(A|B) \simeq 0,35$$

É equivalente a dizer que é aproximadamente 35% das mulheres votam no partido X.

Exemplo 41. *Considere um casal heterozigoto que tenha tido uma criança com a característica dominante.*
Calcule a probabilidade de que o mesmo seja heterozigoto.

Solução:

Vamos denominar os alelos dominante e recessivo por A e a, respectivamente. Sendo o casal heterozigoto, cada um tem o genótipo Aa.
Vamos observar os diferentes genótipos obtidos da união desse casal, através do diagrama abaixo:

Logo Ω = {AA, Aa, aA, aa}

A: evento de uma criança ser heterozigoto: {Aa, aA}.

B: evento de uma criança ter a característica dominante:{AA, Aa, aA}.

A∩B: evento de uma criança ter a característica dominante e ser heterozigota: {Aa, aA}.

$p(A \cap B) = \frac{2}{4}$

$p(B) = \frac{3}{4}$

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} =$$

$$p(A|B) = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} =$$

$$p(A|B) = \frac{2}{3}$$

1.5 Eventos Indenpendentes

Definição 14. *Dois eventos **A** e **B** de um espaço amostral (com p(A) $\neq$ 0 e p(B) $\neq$ 0) são independentes se e somente se p(A|B) = p(A), ou, de modo equivalente:*

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

Com isso, podemos afirmar que dois eventos **A** e **B** são dependentes quando $p(A \cap B) \neq p(A).p(B)$.

Exemplo 42. *Trinta por cento (30%) de uma população tem deficiência de uma certa vitamina devido a uma alimentação não equilibrada. Dez por cento (10%) das pessoas com essa deficiência de vitamina têm uma certa doença. Qual é a probabilidade de que uma pessoa selecionada ao acaso tenha a doença e a deficiência de vitamina?*

Solução:

Evento A : ter deficiência de certa vitamina

Evento B : pessoa do grupo A que têm certa doença

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

$$p(A \cap B) = 30\%.10\%$$

$$p(A \cap B) = 3\%$$

Exemplo 43. *Se, em um armário, eu tenho uma camisa vermelha, uma preta e uma azul, e também uma calça vermelha, preta e azul qual é a probabilidade de retirar uma camisa vermelha e uma calça vermelha?*

Solução:

Podemos verificar que os eventos pedidos são indepenentes.

Evento A : camisa vermelha

Evento B: calça vermelha

p(A) $= \frac{1}{3}$

p(B) $= \frac{1}{3}$

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{9}$$

Capítulo 2

A Primeira Lei de Mendel

Desde muito tempo o ser humano observou que existem semelhanças entre pais e filhos. A genética veio para se dedicar ao estudo da hereditariedade, analisar e entender como as informações dos genes são transmitidas de pais para os filhos através das gerações, além das modificações que ocorrem nesse processo, fator que influência na evolução das espécies. A genética tornou-se mais acessível às pessoas, depois do desenvolvimento tecnológico, que facilitou a compreensão dos códigos genéticos que a anos são passados de geração a geração (AMABIS, 2013).

A Genética Moderna teve a sua origem com estudos no final do Século XIX, pelo monge Gregor Mendel, que realizou experimentos com ervilhas, mesmo antes de se conhecer a estrutura da molécula de DNA. Mendel optou por trabalhar com ervilhas da espécie *Pisum sativum* por ser uma planta de simples cultivo e crescimento rápido, produz várias sementes a cada geração, as características da planta da ervilha são fáceis de ser visualizado, como a cor da semente, o formato da semente, cor do envoltório da semente, cor da vagem, cor da flor, posição da flor, altura e entre outras características, por isso, permite uma avaliação rápida dos descendentes; a reprodução pode ser por autofecundação ou reprodução cruzada.

Em 1865, ele divulgou os resultados dos seus experimentos, onde formulou os princípios fundamentais da hereditariedade, comprovando que a transmissão de características de geração a geração se faz de forma relativamente simples e com regras definidas, seguindo as leis estatísticas. Na época, os outros cientistas não tiveram interesse nesse estudo, só tendo seu reconhecimento anos após a sua morte. Somente em 1900, seu trabalho foi retomado.

De acordo com Mendel, as características hereditárias são condicionadas por pares de fatores hereditários. Hoje em dia, tais fatores são conhecidos como genes. As plantas puras são portadoras de apenas um tipo de fator (VV ou vv). As plantas híbridas são portadoras de um fator dominante e de um recessivo (Vv).

Para uma melhor compreensão do trabalho apresenta-se a seguir alguns termos utilizados em Genética.

Genes são pedaços ou segmentos de DNA que possuem a informação para a produção de uma proteína ou um polipeptídio. O DNA está situado nos cromossomos. No cromossomo, cada gene ocupa uma posição específica que é chamada de Lócus. os genes que se unem para formar uma determinada característica e se encontram no mesmo lócus nos cromossomos homólogos são chamados de alelos. Os alelos estarão sempre aos pares nos cromossomos, pois um dos alelos é proveniente de um gameta masculino e o outro de um gameta feminino. O conjunto de todos os genes é o genótipo. Geralmente é representado através de letras para simbolizar os genes, e essas letras são utilizadas quando realizamos cruzamentos. a interação do genótipo com o ambiente é o fenótipo. O fenótipo são as características visíveis de um organismo.

Um indivíduo é chamado de homozigoto, ou puro, quando os alelos que codificam uma determinada característica são iguais. Ou seja, os alelos são iguais e ele vai produzir apenas um tipo de gameta. Por exemplo, em ervilhas, a característica sementes verdes é recessiva, portanto, homozigota, pois possui o genótipo vv, e produzirá apenas gametas v. O mesmo ocorre para sementes amarelas homozigotas, VV, que produzirão gametas V. O indivíduo que possui os dois alelos diferentes para determinar uma característica é chamado de heterozigoto. São também chamados de híbridos. Todos os indivíduos da geração F1 de Mendel eram heterozigotos Vv, que codificava a característica de semente amarela.

O gene dominante é aquele que determina uma característica, mesmo quando em dose simples nos genótipos, como é o caso dos heterozigotos. O gene recessivo é aquele que só se expressa quando em dose dupla, pois na presença de um dominante, ele se torna inativo, como é o caso dos heterozigotos.

A primeira lei ou princípio formulado por Mendel, com base em seus experimentos, diz que os genes são distribuídos independentemente, sem mistura. Os dois alelos de cada gene presentem em um indivíduo separam-se na formação dos gametas. Os alelos são formas distintas do gene.Então todas as características de um indivíduo são determinadas por genes que se segregam, separam-se, durante a formação dos gametas, sendo que, assim, pai e mãe transmitem apenas um gene para seus descendentes

Segundo BORGES (2007) e DURBANO et al. (2008), boa parcela dos alunos brasileiros conclui o ensino médio entendendo, por exemplo, que as leis de Mendel são apenas "letras" que se combinam em um cruzamento, não conseguindo fazer a associação de que essas "letras"como AA ou Aa, que são apenas símbolos, são sequências nucleotídicas, que representam os genes, e estão localizadas nos cromossomos, se segregando durante a meiose para a formação dos gametas. Mais do que isso as leis de Mendel são a base para a compreensão das características hereditárias passadas de geração a geração como o aparecimento em uma geração da prole de uma determinada doença, ou então para produzir uma prole de animais de interesse econômico.

Isto pode ser verificado em um trabalho realizado por FABRÍCIO et al. (2006), com 136 alunos, do 3^{o} ano do Ensino Médio, de escolas públicas estaduais da região metropolitana da cidade de Recife, Pernambuco, onde avaliou-se o conhecimento deste público sobre as leis de Mendel. A partir dos resultados estes autores verificaram que a maioria dos alunos entrevistados não soube definir gene, não soube associar o gene as leis e a grande maioria associou as leis apenas com as letras que simbólica e didaticamente representam os genes durante a segregação na meiose. Ou seja, os alunos não conseguiram entender a importância e a aplicabilidade da genética, e muito menos, associá-la a probabilidade.

Capítulo 3

Análise dos Livros Didáticos

Neste trabalho, a Biologia e a Matemática foram vistos como objetos de ação do professor e ferramentas na elaboração de conhecimento do estudante no Ensino Médio. Respeitadas as particularidades de cada campo em questão, foram procuradas evidências de vínculos entre a Biologia e a Matemática e, a partir deste ponto de vista, selecionados temas capazes de desenvolver competências científicas, habilidades de pesquisa e análise, além de favorecer a elaboração de instrumentos de pensamento. Segue uma análise mais detalhada de alguns livros.

3.1 Análise dos Livros de Matemática

O livro Matemática: Ciência e Aplicações Volume 2 de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze de Almeida apresenta a Teoria da Probabilidade dizendo que:

> [...] ela permite que se façam previsões sobre as chances de um acontecimento ocorrer, em certo experimento aleatório, a partir da análise dos resultados obtidos, quando esse experimento é repetido nas mesmas condições, um grande número de vezes.

O livro traz todo o conteúdo em sua ordem (Define Espaço Amostral e Evento, Espaço Equiprovável e a Fórmula de calcular a probabilidade, Probabilidade da União de dois eventos, Probabilidade Condicional, Probabilidade da Interseção de dois eventos, Eventos Independentes e Lei Binomial da probabilidade). E a maioria dos exemplos é voltado apenas para jogos de azar e urnas.

O livro Matemática: Volume 2 de Manoel Paiva inicia o capítulo com situações onde podemos encontrar a probabilidade. Nosso dia a dia é permeado de incertezas: a do meteorologista ao prever o clima de um período; a dos pais ao especular sobre o sexo do futuro bebê; a do candidato ao ponderar as possibilidades de sua eleição, etc. O livro traz todo o conteúdo em sua ordem (Conceito de Probabilidade, Definição de Probabilidade, Adição de Probabilidade, Probabilidade Condicional, Multiplicação de Probabilidade). O Livro não traz nenhuma nota sobre a aplicação desse conteúdo.

O livro Matemática: Contexto e Aplicações Volume 2 de Luiz Roberto Dante inicia o capitulo explicando o que é fenômeno aleatório e trazendo exemplos: Lançamento de dado, número de peças defeituosa fabricadas, resultado de um jogo de roleta, número de pessoas que ganharão na loteria. Neste livro o último capitulo é uma aplicação de probabilidade à Genética onde ele traz um exemplo que diz:

> [...]Exemplo de evento aleatório é o encontro de dois tipos de gametas com determinados genes. Um indivíduo heterozigoto para determinada característica (Aa) forma dois tipos de espermatozoides, A e a. Se uma mulher também for heterozigota, poderá formar óvulos A e a. Depende apenas do acaso o fato de ser o espermatozoide A ou a o responsável pela fecundação, assim como também depende apenas do acaso o fato de ser a célula feminina A ou a a fecundada.

Nota-se que, em geral, as abordagens dos livros didáticos são similares. Os livros trazem alguns exemplos que são sobre Jogos de azar e urnas, logo a maioria dos exercícios mantem o foco nesse tipo, com exceção deles o único livro que trouxe questões interdisciplinares foi Matemática: Contexto e Aplicações Volume 2 de Luiz Roberto Dante, onde dedicou um capitulo para tratar da aplicação da probabilidade na genética. Com base nisso, a seguir, sugere-se outro tipo de abordagem do conteúdo de Probabilidade, bem como alguns exemplos e questões que explorem genética e os conceitos e estimulam o raciocínio dos alunos com a importância em aplicá-lo em outra disciplina.

3.2 Análise dos Livros de Biologia

No livro Biologia Hoje Volume 3, LINHARES E GEWANDSZNAJDER (2013), ao iniciar o estudo de Genética, abordam uma breve introdução de probabilidade com um texto tratando das duas regras simples desse conteúdo que facilitam os cálculos de Genética. O texto segue propondo como exemplo: Quando lançamos uma moeda, a probabilidade de sair cara é $\frac{1}{2}$; no lançamento seguinte, a probabilidade também é $\frac{1}{2}$; logo, para as duas juntas (cara e cara), temos $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$."Chegando a conclusão que a probabilidade de dois ou mais eventos independentes ocorrerem juntos é o produto de suas probabilidades de forma isolada, isso para a regra da multiplicação ou regra do "e", como titula os autores.

Em seguida os autores fazem o seguinte questionamento: "Qual a probabilidade de sair o número 1 ou o número 6 no lançamento de um mesmo dado?". Ele aproveita este exemplo para falar sobre, como intitulado no livro, a regra da adição ou regra do "ou", explicada da seguinte forma:

> A regra da adição pode ser formulada assim: a probabilidade de ocorrerem dois acontecimento que se excluem mutuamente é igual à soma das probabilidade de cada um ocorrer isoladamente. Nesse caso, os dois acontecimentos não podem ocorrer juntos (são mutuamente excludentes): se sair o número 1, não sai o 6 e, se sair este, não sai aquele. Observe que estamos calculando a probabilidade de ocorrer um evento ou outro, daí o nome "regra do ou". (LINHARES, SERGIO. Pag. 23, 2013)

Após falar sobre estes tópicos ele define de forma vaga o que é a teoria da probabilidade. Os autores poderiam ter, ao explicar cada conteúdo, dado mais exemplos do mesmo conteúdo, porém de maneira diferente, para que o aluno não tenha um choque ao tentar resolver os exercícios. Nota-se que em poucos momentos os autores tentam instigar o aluno à pesquisa, à experiência, ao estudo reflexivo e crítico do que está aprendendo.

César, Sezar e Caldini (2013) dedicaram um capítulo (capítulo 5) do livro: Biologia 3 - 10ª ed., para abordar a relação entre Genética e Probabilidade, iniciando o capítulo com o texto, Certeza e acaso, o qual informa de maneira superficial a motivação inicial do estudo da probabilidade, e algumas de suas aplicações em outras áreas do conhecimento , onde ele propõe o seguinte exemplo:

> Podemos considerar que muitos eventos, em nosso dia a dia, com certeza ocorrerão. O Sol nasce e se põe todos os dias; ocorrem os movimentos de marés, que dependem das fases da Lua; Uma caneta que soltamos cai no chão; nos rios, a água sempre flui da nascente para a foz. Nem tudo em nossa vida, no entanto, está tão determinado como os eventos que descrevemos. Pode-se dizer que a incerteza está muito mais presente no dia a dia do que as certezas absolutas

Em seguida apresentam um breve exercício para explorar as ideias do texto, questionando o aluno sobre o que são eventos aleatórios e propõem o aluno o calculo da probabilidade de se obter uma face ímpar em uma jogada no lançamento de um dado.

Os conteúdos foram todos abordados, uma vez que fala um pouco mais sobre eventos aleatórios, o que é a certeza absoluta, apresentação de regras, o que é a probabilidade condicional e apresenta uma bateria de exercícios. O livro apresenta as principais regras de modo claro, porém sem mencionar claramente suas principais propriedades. Os exercícios iniciais são voltados para os jogos de azar, e para alguns questionamentos de genética.

Neste livro os autores falaram da importância da noção de probabilidade para o estudo das leis de Mendel, pois como sabemos, foi a partir deles que surgiram as leis. Antes de terminar o capítulo apresenta-se um texto que trata das investigações genéticas sobre Mendel e seus resultados, pois faz referências à história geral.

O livro: Bio: volume 2 de Sônia Lopes e Sergio Rosso (2013), faz uma apresentação do conteúdo, falando sobre o sucesso do trabalho de Mendel ao utilizar de métodos estatísticos para tratar e interpretar os dados obtidos em seu experimento, falam ainda sobre o que seria um espaço amostral e eventos possíveis. Toma como exemplo o lançamento de um dado não viciado, e calcula a probabilidade de uma das faces dele ficar com o 6 voltada para cima. Não se limita apenas em dizer quais são as regras mais usadas para o estudo de genética e sim em explicá-las e exemplifica tanto com jogo de azar como com a relação entre probabilidade e a primeira lei de Mendel.

A apresentação do conteúdo se dá de forma bem simples, praticamente igual a todos os outros livros, porém com a diversificação na exposição de exemplos para fixar o conteúdo. Ao apresentar espaço amostral ele propõe o seguinte exemplo:

> "Tomando como exemplo o lançamento de um dado não viciado, em que todas as faces têm a mesma chance de ocorrer, podemos calcular a probabilidade de uma das faces ficar voltada para cima, por exemplo, a face 6. A = evento desejado $\rightarrow$ face 6; s = (faces 1,2,3,4,5,6) $\rightarrow$ eventos possíveis ou espaço amostral". (LOPES, Sônia. pág. 173, 2013)

A maioria dos livros do Ensino Médio que abordam a probabilidade, focam mais as questões voltadas para os jogos de azar, no entanto só alguns fazem um elo entre esses jogos e a teoria da probabilidade; poucos falam do valor histórico deste estudo, uma vez que esta teoria surgiu a partir destes jogos.

Foram buscados temas da Biologia cujos problemas são resolvidos por modelos matemáticos abordados pela Matemática do Ensino Médio. Estes temas favorecem vencer a fragmentação do ensino dessas duas Ciências e, ao mesmo tempo, apresentam significados para conceitos matemáticos fora do seu campo de abrangência.

Os dados da pesquisa foram obtidos a partir da leitura e da análise de livros didáticos de Biologia, na busca de temas com potencial articulador. A seleção de temas recaiu sobre aqueles que originalmente pertenceriam à Biologia e cujas metodologias de descrição dos fenômenos ou cujos problemas a resolver recebem tratamento matemático.

Capítulo 4

Proposta de Ensino

Conforme os PCN's, espera-se que o estudante nesta fase de escolaridade supere a leitura de informações e raciocine mais criticamente sobre seu significado. A ideia que em geral se tem é que para estudar matemática não se precisa escrever e muito menos ler. Porém se estudarmos um pouco a história da matemática, observaremos que muitos dos bons matemáticos eram também filósofos e, portanto, íntimos da leitura e da escrita. Assim, propomos a inclusão de questões discursivas, ou seja, questões que permitam que o aluno de matemática tenha mais intimidade com a escrita, e por resultado com a leitura.

O ensino de conteúdos que envolvem fenômenos aleatórios, por meio de testes, observações, fatos, coletas e análise de dados de modo interdisciplinar, pode possibilitar aos estudantes o melhor desenvolvimento do seu senso crítico.

Conforme observado no capítulo anterior uma grande parte dos livros pesquisados, não apresenta o conteúdo da forma mais adequada, que deveria ser da seguinte maneira:

- Revisão das noções básicas de conjuntos;
- Conceituar experimento aleatório e determinístico;
- Conceituar espaço amostral, evento;
- Definição de probabilidade e suas propriedades;
- Explicação da probabilidade condicional e eventos independentes.

Durante a conceituação de probabilidade deve-se apresentar aos alunos outros exemplos além de jogos de azar e dados, conforme exemplos anteriormente já apresentados, para uma melhor compreensão. Para depois, em conjunto com o professor de Biologia trabalhar os conceitos específicos de Genética.

Como citado no livro Contexto e Aplicações, Volume 2 por DANTE (2013):

> A Genética é, talvez, o ramo da Biologia que mais utiliza os conceitos matemáticos envolvidos na teoria das probabilidades. Isso porque, em probabilidade, trabalhamos com os eventos chamados aleatórios, e um bom exemplo de evento aleatório é o encontro de dois tipos de gametas com determinados genes.

Após isso deverão ser trabalhadas situações problema. Na seção seguinte segue uma lista de problemas propostos que poderão ser trabalhados com os alunos dos segundos e terceiros anos do ensino médio.

4.1 Atividades Iniciais.

Nesta subseção serão apresentados problemas que mostram a interdisciplinaridade entre a probabilidade aplicada na genética.

Sugere-se que o professor faça uso da Sequência Fedathi que é uma metodologia de ensino que direciona-se para a melhoria da prática pedagógica visando à postura adequada do professor em sala de aula e tem como essência contribuir para que o aluno supere os obstáculos epistemológicos e didáticos que ocorrem na abordagem dos conceitos matemáticos em sala de aula.

A Sequência Fedathi foi desenvolvida por professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará, estes constituem o Grupo Fedathi, formado no início dos anos 1990 para tratar de questões relativas à didática da matemática.

Entre 1997 e 1998, BORGES NETO, coordenador do Grupo Fedathi, desenvolveu uma seqüência didática com base em sua experiência como matemático, de modo que fosse possível aos professores criarem condições e possibilidades para que os estudantes de matemática pudessem ter uma experiência significativa de aprendizagem matemática em sua vida escolar.

Consiste, basicamente, em colocar o estudante na posição de um matemático, por meio do processo de investigação e resolução de problemas. Entre 1999 e 2002, várias experiências com a Sequência Fedathi foram realizadas em pesquisas sobre didática da matemática assistida por computador. Atualmente, muitos questionamentos estão sendo propostos sobre essa sequência e existe o desenvolvimento de articulações desta com conceitos desenvolvidos pela escola francesa de didática da matemática.

A Sequência Fedathi visa que o professor proporcione ao estudante a reprodução das etapas do trabalho de um matemático quando este está diante de uma situação problema. É constituída por quatro fases:

- Tomada de posição - consiste na apresentação de uma situação desafiadora que pode ser na forma escrita, verbal, por meio de jogos, ou de outro modo, podendo ser realizado em grupo ou individualmente;

- Maturação - representa o momento em que o estudante busca identificar e compreender as variáveis envolvidas na situação problema. Nessa ocasião, o professor pode intervir pedagogicamente levantando algumas questões que ajudarão o aprendiz no levantamento das hipóteses e entendimento do problema: o que é pedido na questão? Quais os dados fornecidos? O que o problema solicita?;

- Solução - sinaliza a fase em que o aprendiz representa e organiza esquemas para encontrar a solução. Diante das soluções apresentadas, o professor deve apresentar contraexemplos promovendo desequilíbrios cognitivos no estudante com o intuito de promover conhecimentos e esclarecimentos das hipóteses;

- Prova - delineia a etapa em que o estudante faz a verificação da solução encontrada confrontando o resultado com os dados apresentados. Na ocasião, o professor deve fazer uma analogia com os modelos científicos preexistentes, formaliza o conhecimento construído e formaliza matematicamente o modelo apresentado.

Dessa maneira, acredita-se que o aluno absorva ideias, desenvolva métodos e não apenas decore fórmulas prontas. Nesse sentido segue uma lista de problemas com soluções onde aplica-se a probabilidade ao estudo de genética.

Problema 1. *(PAPMEM - 2015)Em uma escola, verificou-se que 45% dos alunos têm sangue tipo O; 70% dos alunos não têm sangue tipo A; 50% dos alunos têm sangue tipo A ou sangue tipo B.*
Escolhido, aleatoriamente, um aluno dessa escola, qual é a probabilidade desse aluno ter sangue tipo B?

Solução:

A 1ª etapa é a Tomada de Posição na qual o professor apresenta um problema contextualizado acerca do assunto estudado.
A 2ª etapa é a Maturação onde o professor deve levantar questionamentos sobre as informações fornecidas.
Primeiramente, observemos que os conjuntos formados pelos alunos que possuem cada tipo de sangue (A, B, O ou AB) são disjuntos. Portanto, identificando esses conjuntos através de A, B, O e AB, respectivamente, para quaisquer X, Y $\in$ A,B,O,AB, $P(X \cap Y) = 0$ e $P(X \cup Y)= P(X) + P(Y)$.Além disso, como os percentuais apresentados correspondem à razão entre cada grupo considerado e o total de alunos da escola, os percentuais são a probabilidade de escolha de um aluno do grupo.
A 3ª etapa é a Solução onde o aluno representa os dados matematicamente, ou seja:

Se 70% dos alunos não têm sangue tipo A, a probabilidade de um aluno ter sangue tipo A é P(A) = 1 - 70% = 30%.
Se a probabilidade de o aluno escolhido ter sangue tipo A é de 30% e a de ter sangue tipo A ou B é de 50%, temos:

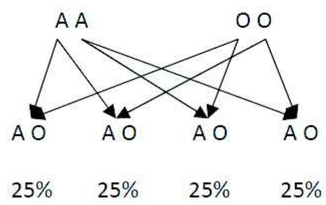
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

$$50\% = 30\% + p(B)$$

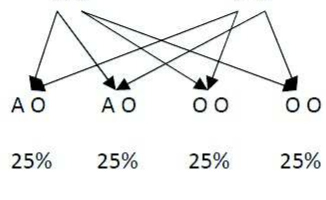
$$p(B) = 20\%$$

A 4ª etapa é a Prova onde o aluno verifica se a solução condiz com os dados apresentados.

Problema 2. *(PAPMEM - 2015) Uma pessoa que tem sangue tipo A pode ser homozigoto, possuindo dois genes dominantes, AA, ou ser heterozigoto, possuindo um gene dominante e outro recessivo, AO. Por sua vez, uma pessoa com sangue tipo O é sempre homozigoto, com dois genes recessivos, OO. Se um homozigoto tipo A casa com uma pessoa tipo O, só pode ter filhos heterozigotos tipo A.*



Um heterozigoto tipo A casado com uma pessoa tipo O pode ter filhos com sangue tipo A ou com sangue tipo O.



Suponha que, em certa população, escolhida ao acaso uma pessoa de sangue tipo A, essa pessoa tenha 50% de probabilidade de ser homozigoto. Senhor Clóvis e Dona Clotilde *são casados e fazem parte dessa população. Senhor Clóvis tem sangue tipo A e Dona Clotilde tem sangue tipo O. Eles tiveram cinco filhos, todos com sangue tipo A. Qual é a probabilidade de o Senhor Clóvis ser homozigoto?*

Solução:

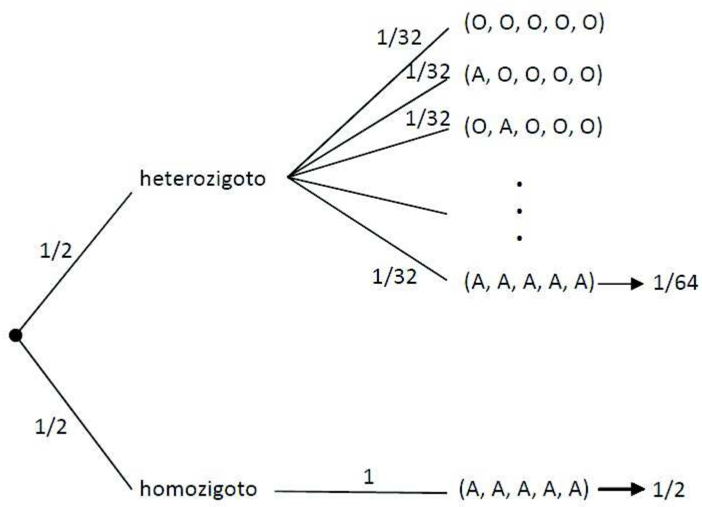
Na 1ª etapa, Tomada de Posição, o professor apresenta um problema contextualizado acerca do assunto estudado.

Na 2ª etapa, Maturação onde o professor deve levantar questionamentos sobre as informações fornecidas.

Por ter sangue tipo O, Dona Clotilde sempre contribuiu com um gene O na formação dos cinco filhos. Se Senhor Clóvis for homozigoto, terá sempre contribuído com um gene A. Mas se ele for heterozigoto, poderia ter contribuído com um gene A ou com um gene O. Nesse caso, consideremos cinco-uplas para identificar as possíveis contribuições do Senhor Clóvis a cada um dos filhos, $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, onde $x_i = O$ ou $x_i = A$, e i é o i-ésimo filho. Assim, pelo princípio multiplicativo, existem $2^5 = 32$ cinco-uplas possíveis, e apenas uma delas, (A, A, A, A, A), corresponde aos cinco filhos com sangue tipo A.

Na 3ª etapa, Solução onde o aluno representa os dados matematicamente, ou seja:

Criemos uma árvore de probabilidades:



P(homozigoto | (A, A, A, A, A)) =

= P(homozigoto e (A, A, A, A, A)) / P((A, A, A, A, A)) =

= (1/2) / (1/2 + 1/64) = (1/2) / (33/64) = 32/33.

A 4ª etapa é Prova onde o aluno verifica se a solução condiz com os dados apresentados.

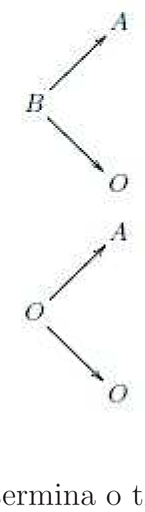
Seguem outros problemas cujas soluções não apresentam explicitamente as etapas da Sequência Fedathi.

Problema 3. *(PUC - RS)Antônio, que pertence ao grupo sanguíneo B, casa-se com Renata, que é do grupo A. O primeiro filho desse casal apresenta o grupo sanguíneo O. Qual é a probabilidade de que o próximo filho desse casal seja do grupo sanguíneo A? Observação: Os tipos sanguíneos são determinados do seguinte modo: AA ou AO - tipo A; BB ou BO - tipo B; AB - tipo AB; OO - tipo O.*

Solução:

Primeiro deve identificar o genótipo de Antônio e de Renata. Como eles tiveram um filho do grupo sanguíneo O, ele recebeu um alelo O do pai e um alelo O da mãe. Logo, Antônio tem o genótipo BO e Renata o genótipo AO. Para um melhor entendimento usa - se um diagrama, sendo a sua raiz o alelo doado pelo pai e as extremidades o alelo doado pela mãe.

Então os possíveis genótipos dos filhos de Antônio e Renata são: BA, BO, AO e OO.



Somente o genótipo AO determina o tipo sanguíneo A. Portanto, a probabilidade de que o próximo filho do casal seja do grupo sanguíneo A é de $\frac{1}{4}$.

Problema 4. *Do cruzamento de dois heterozigotos (dois alelos diferentes do mesmo gene) qual a probabilidade de ocorrer albinismo?*

Solução:

Espaço amostral: $\Omega = \{(AA),(Aa),(Aa),(aa)\} \rightarrow n(\Omega) = 4$

Evento A: ocorrência de albinismos $\rightarrow A = \{(aa)\} \rightarrow n(A) = 1$

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{1}{4}$$

Problema 5. *Em uma gaiola estão vinte coelhos. Seis deles possuem uma mutação sanguínea letal e três outros uma mutação óssea. Se um coelho foe selecionado ao acaso, qual é a probabilidade de que não seja mutante?*

Solução:

Espaço Amostral = 20 coelhos.

Evento (A): Seja um coelho mutante = 6 + 3 = 9.

Assim:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{9}{20}$$

Pela Probabilidade Complementar $p(\overline{A})$, onde é a probabilidade que escolhido um coelho não seja mutante, temos:

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A).$$
$$p(\overline{A}) = 1 - \frac{9}{20}.$$
$$p(\overline{A}) = \frac{11}{20}.$$

Problema 6. *Em um certo locus podem ocorrer dois alelos: C e D. Admitamos que os possíveis genótipos têm as seguintes probabilidades:*

$$p(CC) = 0,46; p(CD) = 0,31; p(DD) = 0,23.$$

Qual é a probabilidade de que um genótipo contenha o alelo C?

Solução:

Seja A o evento de um genótipo conter pelo menos um alelo C. Temos que somar as probabilidades que a contenham:

p(CC) = 0,46 e p(CD) = 0,31.

Logo a probabilidade procurada é:

$$p(A) = p(CC) + p(CD)$$

$$p(A) = 0,46 + 031$$

$$p(A) = 0,77.$$

Problema 7. *Um grupo de pesquisadores construiram uma tabela sobre a probabilidade de morte nas diferentes idades para os Estados Unidos.*

Idade (anos)	Probabilidade de morte (%)
0–10	3,23
10–20	0,65
20–30	1,21
30–40	1,84
40–50	4,31
50–60	9,69
60–70	18,21
70–80	27,28
80 em diante	33,58
Total	100,00

Qual é a probabilidade de uma pessoa que tem agora 20 anos, morrer antes de alcançar o trigésimo aniversário?

Solução:

Para respondermos esta pergunta não podemos simplemente considerar a taxa de morte para a terceira década (1,21%). Ao invés, temos que encontrar a probabilidade condicional. Sabemos que a pessoa já sobreviveu as duas primeiras décadas.

Evento A: Morte antes da quarta década,

Evento B: Morte depois da segunda década.

A ∩ B: Morte antes da quarta década depois da segunda década.

p(B) = 1,21 + 1,84 + ... + 33,58 = 96,12.

p(A ∩ B) = 1,21

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$p(A|B) = \frac{1,21}{96,12}$$

$$p(A|B) = 0,0126.$$

Problema 8. *João e sua esposa Maria tem pigmentação normal. João é filho de um homem normal e mulher albina; Maria é filha de uma mulher normal e um pai albino. Qual a probabilidade de João e Maria terem uma criança albina do sexo masculino?*

Solução:

		gametas de Maria	
		A	**a**
gametas de João	**A**	AA normal	Aa normal
	a	aA normal	aa albino

Logo:

Evento A : criança albina

Evento B : criança do sexo masculino

p(A) $=\frac{1}{4}$

p(B) $=\frac{1}{2}$

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$
$$p(A \cap B) = \frac{1}{4}.\frac{1}{2}$$
$$p(A \cap B) = \frac{1}{8} ou 12,5\%$$

Problema 9. *Em um locus de um certo par de cromossomos, podem ocorrer alelos A e a. Os genótipos AA, Aa, aa tem probabilidades P(AA) = 0, 11, P(Aa) = 0, 37 e P(aa) = 0, 52. Em um locus de outro par de cromossomos podem ocorrer os alelos B e b. Os genótipos BB, Bb, bb tem probabilidades P(BB) = 0, 35, P(Bb) = 0, 25 e P(bb) = 0, 40. Encontrar a probabilidade da combinação genética AA junto com BB, isto é AA e BB.*

Solução:

Evento A: combinação genética AA $\rightarrow$ p(A) = 0,11.

Evento B: combinação genética BB $\rightarrow$ p(B) = 0,35.

Logo a probabilidade da combinação genética AA junto com BB é:

$$p(A \cap B) = p(A).p(B)$$

$$p(A \cap B) = 0,11.0,35$$

$$p(A \cap B) = 0,0385.$$

Problema 10. *A queratose (anomalia na pele) é devida a um gene dominante A. Uma mulher com queratose cujo pai era normal casa-se com um homem com queratose cuja mãe era normal. Se esse casal tiver 2 filhos, qual é a probabilidade de os dois apresentarem queratose?*

Solução:

Espaço amostral: $\{$(AA), (Aa), (aA),(aa)$\}$ $\rightarrow$ n(Ω)=4

Evento A: ocorrência de quaratose $\rightarrow$ A = $\{$(AA), (Aa), (aA)$\}$ $\rightarrow$ n(A) = 3

Assim, p(A cada criança ter queratose) = $\frac{3}{4}$

Como o evento "primeira criança ter queratose" é independente do evento "segunda criança ter queratose", temos:

p(A cada criança ter queratose)= $\frac{3}{4}.\frac{3}{4} = \frac{9}{16}$ ou aproximadamente 56%

Problema 11. *Uma família planejou ter 3 crianças. Qual é a probabilidade de que a família tenha 3 homens, já que a primeira criança que nasceu é homem?*

Solução:

Se a primeira criança já é um homem, então o espaço amostral para os próximos 2 filhos é HH, HM, MH, MM. Nesse espaço amostral, o evento desejado é HH. Assim, a probabilidade de nascerem 3 filhos homens, sabendo que o primeiro que nasceu é homem, é de:

Evento A : Para a familia ter 3 filhos homens $\rightarrow$ n(A) = 1

Evento B: O primeiro filho ser homem $\rightarrow$ n(B) = 4

$A \cap B$: A familia ter 3 filhos homens e o primeiro filho ser homem $\rightarrow$ n $(A \cap B) = 1$

$$p(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$
$$p(A|B) = \frac{1}{4}$$

Problema 12. *Suponhamos que o carater cor dos olhos seja condicionado por um par de genes. Seja C dominante para olho escuro e c recessivo para olho claro. um individuo de olhos escuros, cuja mãe tem olhos claros, casa com uma mulher de olhos claros cujo pai tinha olhos escuros. qual é a probabilidade de seu primeiro filho ser do sexo masculino e ter olhos escuros?*

Solução:

O indivíduo de olhos escuros é Cc e a mulher de olhos claros é cc.
Este casal pode ter filhos Cc e cc com $\frac{1}{2}$ de chances cada.
A probabilidade de terem um filho do sexo masculino é $\frac{1}{2}$

$$p(A \cap B) = p(A) \ \ . \ \ p(B)$$
$$p(A \cap B) = \frac{1}{2} . \frac{1}{2}$$
$$p(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

Capítulo 5

Considerações Finais

Os livros estudados, em geral, possuem uma gama de exercícios úteis para o aprendizado do conteúdo em estudo. Porém, como apresentamos neste trabalho, notamos que falta uma ligação mais direta com a realidade do aluno. A apresentação do conteúdo, por sua vez, poderia ser reavaliada, uma vez que quase todos os professores de matemática explicam essa matéria se limitando a falar sobre os jogos de azar. No entanto, apresentam uma bateria de exercícios bem elaborados que envolvem muitos tópicos que eles nem sequer comentam. Por exemplo, alguns dos livros não comentam sobre aplicação da probabilidade na genética, porém apresentam uma bateria de exercícios. Os alunos até resolvem as questões, porém muitas vezes o fazem decorando a fórmula e a aplicando.

Em síntese, propõe-se um capítulo de probabilidade que inicie com um texto que contenha alguma aplicação, curiosidade, ou até fatos históricos que incentivem o aluno a aprender esta teoria. Para apresentar os conteúdos sugeri-se que ao conceituar cada tópico apresente-se exemplos diversos, e não somente aqueles que envolvem jogos de azar. Preferencialmente é interessante que estes exemplos conjuguem a teoria com a aplicação no cotidiano, tais como Biologia, Estatística, Economia, dentre outros. Quanto aos exercícios, vemos que é importante trabalhar não somente exercícios que exijam respostas exatas, mas também exercícios que permitam ao aluno dar uma resposta discursiva, ou seja, exercícios que ajudem a desenvolver não só senso lógico-matemático, mas também o senso-crítico do aluno em relação ao que se está estudando.

E mais, propõe-se o estudo da probabilidade anteriormente ao estudo da Genética,assim o professor de matemática pode contextualizar o conteúdo apresentado com a genética e também a inclusão de tópicos sobre a teoria da probabilidade nos livros de Biologia. Considera-se muito importante a presença de notas reflexivas, no decorrer do capítulo, curiosidades probabilísticas e desafios.

Acreditamos que as propostas apresentadas neste trabalho podem nos ajudar a alcançar nossos objetivos, que é o de tirar o maior proveito desse conteúdo que é tão rico em aplicações.

Bibliografia

[1] __________. **1ª Lei de Mendel: Lei da Segregação dos Fatores.** Disponível em: < http://www.sobiologia.com.br/conteudos/Genetica/leismendel3.php > Acessado em 07 mai 2016.

[2] __________. **A probabilidade e a Estatística no currículo de matemática do ensino fundamental brasileiro.** Disponível em: < www.inf.ufsc.br/cee/pasta5/art1p5.html >. Acessado em 07 jun 2016.

[3] __________. **A probabilidade no Ensino Médio: A importância dos jogos como Ferramenta Didática.** Disponível em: http: < //www.cinea.org.ar / congreso _ articulo13 > Acessado em 07 jun 2016.

[4] __________. **Probalidades - Experimento Aleatório e Determinístico e Espaço Amostral.** Disponível em: <http://blocododudu.blogspot.com.br/2013/11/probalidades-experimento-aleatorio-e.html>Acessado em 08 jun 2016

[5] __________. **Base Nacional Comum Curricular.** Disponível em: < http://basenacionalcomum.mec.gov.br/#/site/conhecaDisciplina?disciplina=AC_MAT & tipoEnsino=TE_EM > Acesso em:20 jun 2016 .

[6] **Termos usados em Genética** Disponível em: < http://www.infoescola.com/biologia/termos-usados-em-genetica/> Acesso em:12 Ago 2016.

[7] __________. **Probabilidade e Genética; Brasil Escola.** Disponível em: < http://brasilescola.uol.com.br/matematica/probabilidade-genetica.htm >. Acesso em 18 jun 2016.

[8] _________. **Teoria dos Conjuntos .** Disponível em: <http://www.infoescola.com/matematica/teoria-dos-conjuntos/ > Acesso em: 02 jul 2016 .

[9] BATSCHELET, Edward. ; **Introdução à matemática para biocientistas**, tradução de Vera Maria Abud Pacífico da Silva e JUnia Maria Penteado de Araújo Quitete; revisão técnica de Guilherme M. de La Penha. - Rio de Janeiro: Interciência; São Paulo: Ed. Da Universidade de São Paulo, 1978.

[10] CLARKE, A. Bruce;DISNEY, Ralph L. ; **Probabilidade e processos Estocásticos**.Tradução de Gildasio Amado Filho.Rio de Janeiro: Livros técnicos e científicos editora, 1979.

[11] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicação Volume 1.** 1ª ed. São Paulo: Ática, 2010.

[12] DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto & Aplicação Volume 2.** 2ª ed. São Paulo: Ática, 2013.

[13] DAVID, R. Anderson; DENNIS, J. Sweeney; THOMAS, A. Williams., **Estatística aplicada à administração eEconomia(tradução da 2ª edição norte-americana).** São Paulo: Afiliada,2002.

[14] FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier., **Matemática 2ª serie: aula por aula, PNLEM, aprovado pelo MEC.** São Paulo: FTD, 1ª edição, 2003.

[15] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto., **Matemática 1 : conjunto,funções e progressões.** São Paulo: FTD, 1992.

[16] GIOVANNI, José Ruy; BONJORNO, José Roberto., **Matemática 2 : Uma nova abordagem - versão trigonometria** São Paulo: FTD, 2000.

[17] HALMOS, Paul R., **Teoria Ingênua dos Conjuntos** Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2001.

[18] IEZZI, Gelson; DOLCE,O.; DEGENSZAJAN, David; PÉRIGO, Roberto e ALMEIDA, Nilze De . et al. **Matemática: Ciência e Aplicações Volume 1.** 7a ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[19] LIMA, Elon Lages et al. **A Matemática do Ensino Médio Volume 2.** 6a ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[20] LINHARES,Sérgio; GEWANDSZNAJDER, Fernando. **Biologia hoje Volume 3** 2ª ed. São Paulo : Ática, 2013.

[21] LOPES, Sônia; ROSSO, Sergio. **Biologia volume 3** 2ª ed. São Paulo: Saraiva, 2013.

[22] MEYER, Paul., **Probabilidade, Aplicação à Estatística.** 2ª edição - Tradução de Ruy de C. B. Lourenço Filho. Rio de Janeiro, 1983.

[23] MORGADO, Agusto César de Oliveira; CARVALHO, Paulo Cazar Pinto., **Análise Combinatória e Probabilidade** 9ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[24] PAIVA, Manoel. **Matemática: Volume 2.** 2ª ed. São Paulo: Mordena, 2013.

[25] SILVA JÚNIOR, César da;SASSON, Sezar.; CALDINI JÚNIOR, Nelson. **Biologia Volume 3** 10. ed. São Paulo: Saraiva, 2013.