



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

MILÍNIA STEPHANIE NOGUEIRA BARBOSA FELÍCIO

TEOREMA DE BORSUK NO PLANO

FORTALEZA

2016

MILÍNIA STEPHANIE NOGUEIRA BARBOSA FELÍCIO

TEOREMA DE BORSUK NO PLANO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

F349t Felício, Milínia Stephanie Nogueira Barbosa
Teorema de Borsut no plano / Milínia Stephanie Nogueira Barbosa Felício. – 2016.
88 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva.

1. Teorema de Borsut. 2. Geometria plana. 3. Diâmetro de figuras planas. I. Título.

CDD 516

MILÍNIA STEPHANIE NOGUEIRA BARBOSA FELÍCIO

TEOREMA DE BORSUK NO PLANO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovado em: 24/06/2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jobson de Queiroz Oliveira
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que
contribuíram direta ou indiretamente com a
sua realização.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus por todo dia reforçar minha fé em acreditar e por em prática os projetos de minha vida.

Aos meus pais, Miguel Felício Nogueira e Virgínia Lúcia Leite Barbosa Felício, por seus ensinamentos, amor, apoio e orientações em muitos setores de minha vida.

Aos meus irmãos, Thiago e Miguel, pelo apoio e companheirismo.

A minha sobrinha Clarisse e ao Spark, por tanta felicidade que me proporcionam.

A meu namorado Murilo Junior pelo amor e incentivo durante todo o processo do curso me acompanhando nos momentos tristes e felizes.

À CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Jonatan Floriano da Silva, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Marcelo Ferreira de Melo e Jobson de Queiroz Oliveira pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos professores do PROFMAT/ UFC que sempre nos auxiliaram, com paciência, Marcelo Melo, Marcos Melo, Afonso de Oliveira, Fabrício Siqueira, Esdras Medeiros e Joserlan da Silva.

Ao Núcleo Gestor do Colégio Jenny Gomes, por permitir a realização deste trabalho e aos alunos, que participaram deste estudo e contribuíram com esta pesquisa.

Aos meus amigos de mestrado, em especial: Clésio, Guilherme, Elaine, Lucimara, Isaac, Paulo, Jandean, Rivelino, Alana e Hugo, pelos grupos de estudos e brincadeiras a fim de aliviar o peso dos dias fatigantes de estudo.

A minha amiga Andrea Torres, pela atenção e revisão desse trabalho.

A todos meus amigos, que me incentivaram durante o curso.

"Há um tipo de inteligência criadora. Ela inventa o novo e introduz no mundo algo que não existia. Quem inventa não pode ter medo de errar, pois vai se meter em terras desconhecidas, ainda não mapeadas". Rubens Alves

RESUMO

O trabalho versa sobre o Teorema de Borsuk, com ênfase na dimensão 2. O teorema gira em torno da pergunta: “Qual o menor número de partes que podemos dividir uma região, de modo a garantir que em cada parte, o diâmetro seja menor que o diâmetro da região inicial?”. Borsuk prova que o número de divisões necessárias no plano é menor ou igual a 3, a fim de garantir regiões com diâmetros menores. Neste trabalho apresentamos uma prova para o teorema acima. Ao criar o minicurso “Teorema de Borsuk no Plano” e aplicar com alunos do terceiro ano do ensino médio do Colégio Jenny Gomes, propôs-se revisar conceitos fundamentais de conhecimento prévio do aluno em Geometria Plana, diagnosticar deficiências básicas nesses conceitos, despertar a investigação e empenho na disciplina, além de manipular um conteúdo ainda não visto por eles, apresentando-lhes também o cenário histórico do teorema. Os alunos inscreveram-se voluntariamente. Para coleta de dados foram utilizados, um questionário socioeconômico, testes de caráter motivacional e testes de conhecimentos, antes e após o curso. O Teorema de Borsuk no plano faz uso somente de geometria elementar e pode ser compreendido por alunos do ensino médio. Novos conceitos como diâmetro de uma figura plana qualquer, retas de apoio e Lema de Pall serão apresentados. Verificou-se que a atividade é uma ferramenta eficaz contra o desinteresse e dificuldade dos alunos em Geometria.

Palavras-chave: Teorema de Borsuk. Conhecimentos prévios. Geometria plana. Minicurso Teorema de Borsuk no plano. Diâmetro de figuras planas. Lema de Pall.

ABSTRACT

This paper deals with the Borsuk Theorem, focusing on dimension 2. The theorem revolves around the question: "What is the smallest number of parts that a region can be divided into, to ensure that in each part the diameter is less than the diameter of the initial region?" Borsuk proves that the required number of divisions in the plan is less than or equal to 3, to ensure smaller diameter regions. In this paper we present a proof for the theorem above. When creating the minicourse "Borsuk Theorem in the Plane" and applying it to senior students from Jenny Gomes State School, it was proposed to review fundamental concepts of students' prior knowledge in Plane Geometry, determine core deficiencies in these concepts and make students eager to acquire investigation and commitment around the subject, besides handling a content yet-unseen by them, presenting also the historical scenario of the theorem. Students enrolled willingly in the course. For data collection it was used a socioeconomic questionnaire, motivational basis tests and knowledge tests, before and after the course. The Borsuk theorem in the plan makes use only of elementary geometry and can be understood by high school students. New concepts such as diameter of a flat figure, lines of support and Pál Lemma will be presented. It was found that the activity is an effective tool against the disinterest and difficulty of students regarding Geometry.

Keywords: Borsuk Theorem. Previous knowledge. Plane Geometry. Borsuk Theorem in the Plane minicourse. Diameter of plane figures. Pál Lemma.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Diâmetro de uma figura	19
Figura 2 – Semicircunferência	21
Figura 3 – $\widehat{AC} < \widehat{AB}$ e $\widehat{AC} > \widehat{AB}$	21
Figura 4 – $diam(H_1) = a$ e $diam(H_2) = d$	22
Figura 5 – Diâmetro de figuras.	22
Figura 6 – Polígonos regulares.	23
Figura 7 – Respectivamente: decágono, pentadecágono e icoságono	23
Figura 8 – Círculo dividido em duas regiões H_1 e H_2	25
Figura 9 – Círculo dividido em 3 partes	26
Figura 10 – Divisão que não satisfaz o Teorema de Borsuk.	26
Figura 11 – Karol Borsuk	27
Figura 12 – Círculo e triângulo de mesmo diâmetro.	28
Figura 13 – Hexágono e triângulo de mesmo diâmetro.	29
Figura 14 – Hexágono de lado $\frac{1}{\sqrt{3}}$	29
Figura 15 – Hexágono de lado $\frac{1}{\sqrt{3}}$	30
Figura 16 – Distância entre lados paralelos igual a d	32
Figura 17 – l_1 e l_2 são retas de apoio de F	32
Figura 18 – $ y(A) - y(A') \leq \rho(A, A')$	33
Figura 19 – $\rho(l_1, l_2) \leq \rho(M_1, M_2) \leq d$	34
Figura 20 – l_1, l_2, m_1, m_2, p_1 e p_2 são retas de apoio.	34
Figura 21 – Nenhuma, uma ou infinitas retas de apoio passam por um ponto.	35
Figura 22 – Em c temos $\angle(l_1, l'_1) = 180^\circ$	36
Figura 23 – $\angle(l_1, l'_1) = \alpha_1$	37
Figura 24 – a) Hexágono centrossimétrico não regular b) Hexágono centrossimétrico regular.	37
Figura 25 – $\rho(A, Z) = \rho(B, Z)$, com A, Z, B colineares.	38
Figura 26 – Hexágono antes e depois do giro de 180° em torno de Z	38
Figura 27 – Hexágono centrossimétrico.	39
Figura 28 – Inserção do quadrado em um hexágono.	40
Figura 29 – Construção em um triângulo regular.	40
Figura 30 – Hexágono regular com comprimento de lados paralelos igual a d	41
Figura 31 – $\Delta(PQL)$ e $\Delta(OQL)$	41
Figura 32 – Círculo inscrito num hexágono regular	42
Figura 33 – Alunos em sala vídeo, realizando os questionários iniciais. Primeiro dia de curso.	44
Figura 34 – Alunos em aula. Segundo dia de curso.	45

Figura 35 –Alunos deixando a sala de aula, depois do Teste Final. Terceiro dia de curso.	45
Figura 36 –Lema de Pall animado no Geogebra,1.	51
Figura 37 –Lema de Pall animado no Geogebra,2.	51
Figura 38 –Respostas de alunos, questão 9, Pré-Teste.	53
Figura 39 –Respostas de alunos , questão 10, Pré-Teste	53
Figura 40 –Respostas de alunos , questão 1, Teste Final	55
Figura 41 –Respostas de alunos , questão 11, Teste Final	56
Figura 42 –Alunos assistindo o vídeo "Aprendendo a Aprender".	59
Figura 43 –Cartaz do primeiro dia de aula.	60
Figura 44 –Cartaz do último dia de aula.	60
Figura 45 –Questão 3, Pré-Teste.	69
Figura 46 –Questão 4, Pré-Teste.	69
Figura 47 –Questão 6, Pré-Teste.	70
Figura 48 –Questão 7, Pré-Teste.	70
Figura 49 –Questão 8, Pré-Teste.	71
Figura 50 –Questão 9, Pré-Teste.	71
Figura 51 –Questão 10, Pré-Teste.	71
Figura 52 –Questão 11, Pré-Teste.	72
Figura 53 –Ponto, Reta e Plano.	73
Figura 54 –Reta, segmento de reta, semirreta, respectivamente.	73
Figura 55 –Ângulos reto, agudo, obtuso, respectivamente.	73
Figura 56 –Ângulos opostos pelo vértice.	74
Figura 57 –Polígonos convexos e não convexo.	74
Figura 58 –Triângulo equilátero, isósceles, escaleno, respectivamente.	75
Figura 59 –Triângulo acutângulo, retângulo, obtusângulo, respectivamente.	75
Figura 60 –Casos de congruência de triângulos.	76
Figura 61 –Triângulo retângulo.	76
Figura 62 –Trapézio retângulo, isósceles e escaleno, respectivamente.	77
Figura 63 –Paralelogramo, Retângulo, Losango, Quadrado, respectivamente.	78
Figura 64 –Circunferência e Círculo, respectivamente.	78
Figura 65 –Elementos da Circunferência.	78
Figura 66 –Semicircunferência.	79
Figura 67 –Pontos	79
Figura 68 –Diâmetro	80
Figura 69 –Polígono qualquer.	80
Figura 70 –Karol Borsuk	81
Figura 71 –Hexágono regular.	81
Figura 72 – $\Delta(PQL)$ e $\Delta(OQL)$	82
Figura 73 –Círculo inscrito num hexágono regular	82

Figura 74 –Questão 1, Teste Final	84
Figura 75 –Questão 2, Teste Final	84
Figura 76 –Questão 3, Teste Final	84
Figura 77 –Questão 4, Teste Final	85
Figura 78 –Questão 6, Teste Final	85
Figura 79 –Questão 7, Teste Final	86
Figura 80 –Questão 8, Teste Final	86
Figura 81 –Questão 9, Teste Final	86
Figura 82 –Questão 11, Teste Final	87
Figura 83 –Questão 12, Teste Final	87
Figura 84 –Questão 13, Teste Final	87

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Quantidade de acertos por questão no Pré-Teste.	52
Gráfico 2 – Quantidade de acertos por aluno no Pré-Teste.	54
Gráfico 3 – Quantidade de acertos por questão no Teste Final	55
Gráfico 4 – Quantidade de acertos por aluno no Teste Final	57

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Sexo	46
Tabela 2 – Escolaridade da mãe	46
Tabela 3 – Escolaridade do pai	46
Tabela 4 – Renda familiar	47
Tabela 5 – N° de pessoas que moram na mesma casa.	47
Tabela 6 – Tipo de escola na qual estudou.	47
Tabela 7 – N° de alunos na recuperação e reprovados.	48
Tabela 8 – N° de horas por dia de estudo.	48
Tabela 9 – Auto-Avaliação	48
Tabela 10 – Importância da Matemática	49
Tabela 11 – Grau de motivação	49
Tabela 12 – Conhecimento em Geometria	49
Tabela 13 – Cronograma	50
Tabela 14 – Grau de Atenção durante o curso	58
Tabela 15 – Grau de dificuldade quanto ao curso	58
Tabela 16 – Polígonos convexos	74
Tabela 17 – Ângulos Notáveis	77

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UFC	Universidade Federal do Ceará
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PISA	Programme for International Student Assessment
SPAECE	Sistema Permanente de Avaliação da Educação Básica do Ceará

LISTA DE SÍMBOLOS

Δ	Triângulo.
$\angle$	Ângulo.
$\widehat{AB}$	Arco com extremos nos pontos A e B.
$\rho(A,B)$	Distância euclidiana entre pontos A e B.
$diam(F)$	Diâmetro da região F.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	PRELIMINARES	19
2.1	Conceitos fundamentais.	19
2.2	Diâmetro dos polígonos regulares	22
3	CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA	25
3.1	Investigação.	25
3.2	Dados históricos da conjectura de Borsuk	27
4	TEOREMA DE BORSUK NA DIMENSÃO 2.	32
5	ATIVIDADES PROPOSTA: MINI-CURSO TEOREMA DE BORSUK NA DI- MENSÃO 2.	43
5.1	Justificativa	43
5.2	Objetivos	43
5.2.1	Objetivo Geral	43
5.2.2	Objetivos Específicos	43
5.3	Metodologia de aplicação	43
5.3.1	Contexto	43
5.3.2	Instrumentos e métodos de Coletas de dados	44
5.3.3	Participantes	45
5.3.4	Dados coletados do questionário socioeconômico	45
5.3.5	Dados coletados do Questionário Motivacional I	48
5.4	Procedimentos: Sequência didática	49
5.4.1	Cronograma	50
6	RESULTADOS DO PRÉ TESTE, TESTE FINAL E QUESTIONÁRIO MOTIVA- CIONAL II	51
6.1	Resultados do Pré-Teste	51
6.2	Resultados do Teste Final	54
6.3	Resultado do Questionário Motivacional II	57
6.3.1	Ações Motivacionais	58
6.4	Problemas encontrados.	61
7	CONCLUSÃO	62
	REFERÊNCIAS	63
	APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO	65
	APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO MOTIVACIONAL I	67
	APÊNDICE C- PRÉ-TESTE	69
	APÊNDICE D – REVISÃO	73
	APÊNDICE E –TEOREMA DE BORSUK	79

APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO MOTIVACIONAL II	83
APÊNDICE G – TESTE FINAL	84
APÊNDICE H – TERMO DE CONCESSÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM	88

1 INTRODUÇÃO

A Matemática é vista muitas vezes como uma disciplina difícil, principalmente no que se refere a Geometria. Um dos grandes desafios do professor de matemática são bloqueios e preconceitos que muitos alunos tem, antes mesmo de conhecer sobre o assunto.

A fim de incentivar o interesse geométrico no aluno, a assimilação e o maior domínio de conteúdos, o minicurso Teorema de Borsuk no Plano faz com que o aluno resgate, durante as aulas realizadas, vários conceitos fundamentais de geometria plana, esquecidos muitas vezes, e avance no sentido de investigar sobre um conhecimento nunca antes manipulado. O público alvo são alunos do ensino médio, que passam por uma revisão de assuntos preliminares necessários para uma melhor compreensão de novos conceitos e o próprio Teorema de Borsuk.

Sem estudar Geometria as pessoas não desenvolvem o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguirão resolver as situações de vida que forem geometrizadas; também não poderão se utilizar da Geometria como fator altamente facilitador para a compreensão e resolução de questões de outras áreas de conhecimento humano. Sem conhecer a Geometria a leitura interpretativa do mundo torna-se incompleta, a comunicação das idéias fica reduzida e a visão da Matemática torna-se distorcida. (LORENZATO, 1995, p. 5).

Ao analisar dados estatístico de avaliações em nível estadual, nacional e internacional (SPAECE, ENEM, SAEB, PISA...) juntamente com as matrizes de referência dessas avaliações, percebemos a grande dificuldade que a maioria dos alunos de ensino básico tem em Matemática, principalmente em problemas que envolvem Geometria.

Em matéria do jornal eletrônico BBC em 10 de fevereiro 2016, podemos conferir que segundo o PISA, a última pesquisa em 2013 coloca 67,1% dos alunos brasileiros entre 15 e 16 anos, abaixo do nível 2 em matemática, com baixa performance na disciplina. Apenas 0,8% dos alunos brasileiros atingiram os níveis 5 e 6 na disciplina, que são os maiores níveis e exigem análises complexas.

É objetivo do presente trabalho compreender historicamente dados da Conjectura de Borsuk, entender sua demonstração no plano, apresentar ao aluno do ensino médio de escola pública uma grande quantidade de elementos que estejam relacionados a conteúdos já conhecidos por eles, de forma a conduzir o aluno a uma investigação, exploração e interpretação da Geometria, além de fornecer um material didático autoexplicativo que possa ser utilizado por professores da educação básica, bem como por alunos do ensino médio, visto que o tema faz uso somente de geometria elementar.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, os resultados de desempenho em matemática nas últimas décadas mostram um rendimento geral insatisfatório em questões classificadas como compreensão de conceitos e resolução de problemas. O que chama a atenção é que o pior índice refere-se ao campo da geometria.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

Também a importância de se levar em conta o “conhecimento prévio” dos alunos na construção de significados geralmente é desconsiderada. Na maioria das vezes, subestimam-se os conceitos desenvolvidos no decorrer da atividade prática da criança, de suas interações sociais imediatas, e parte-se para o tratamento escolar, de forma esquemática, privando os alunos da riqueza de conteúdo proveniente da experiência pessoal.

Para o reconhecimento das referidas concepções, como resultado principal dos meus estudos foi realizado um minicurso intitulado por “Teorema de Borsuk no Plano”. Para coleta de dados foi utilizado um questionário socioeconômico, além de um questionário motivacional e um teste , antes e ao fim do curso.

O teste ao início do curso tem objetivo de diagnosticar os conceitos prévios dos alunos sobre geometria plana, além de estimular a investigação sobre o assunto ainda não visto, apresentando algumas perguntas chave do novo conteúdo. De acordo com Piaget, no livro Problemas de Psicologia Genética (coleção Os Pensadores):

Para que um novo instrumento lógico se construa, é preciso sempre instrumentos lógicos preliminares; quer dizer que a construção de uma nova noção suporá sempre substratos, subestruturas anteriores e isso por regressões indefinidas.

O teste ao fim do curso visa analisar os avanços em geometria plana. Os questionários motivacionais antes e ao fim do curso surgiram da preocupação em motivar os alunos, dando espaço para que pudessem se expressar. A principal bibliografia utilizada foi "Division de Figuras en Partes Menores" de V.G. Boltianski e I.Ts. Gojberg. O trabalho foi dividido em 6 capítulos:

No segundo capítulo, intitulado Preliminar, definiremos diâmetros de figuras planas fechadas e outros conceitos sobre as regiões em análise.

O terceiro apresenta a origem do problema e dados históricos sobre a investigação da conjectura de Borsuk, durante anos, por vários matemáticos.

No quarto capítulo apresentaremos o o Lema de Pall utilizado por Borsuk para a prova de seu teorema na dimensão 2 e finalizaremos a demonstração por meio de relações básicas dos triângulos retângulos.

O quinto capítulo versa apresentar os passos do Minicurso, aplicado com 18 alunos, do terceiro ano do ensino médio, no Colégio Jenny Gomes assim como os resultados de Pré-Testes.

O Sexto capítulo ficou destinado em relatar exclusivamente os resultados obtidos, durante a realização das atividades.

Finalmente, nas considerações finais apresentaremos avanços e dificuldades encontradas ao longo do trabalho, assim como uma proposta de possíveis trabalhos futuros.

2 PRELIMINARES

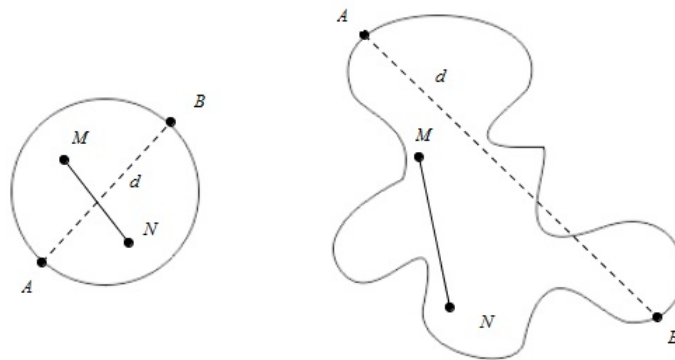
2.1 Conceitos fundamentais.

Definição 2.1. Em um círculo S , temos por diâmetro a corda que passa pelo centro da circunferência.

Definição 2.2. Seja d o diâmetro de uma região plana. Chamaremos de $\rho(M,N)$, a distância euclidiana entre dois pontos M e N no plano. Além disso, dados $M, N \in S$, ao círculo, vale $\rho(M,N) \leq d$.

Veja a Figura 1:

Figura 1 – Diâmetro de uma figura



Fonte: Elaborada pelo autor

No entanto, existem A e B pertencentes a S de modo que $\rho(A,B) = d$. Estes pontos estão localizados na circunferência de S . Veja a Figura 1.

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ diz-se *limitado superiormente* quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq b$ para todo $x \in X$. Neste caso, diz-se que b é uma *cota superior* de X . Analogamente, diz-se que o conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é *limitado inferiormente* quando existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$. O número a chama-se então uma *cota inferior* de X . Se X é limitado superior e inferiormente, diz-se que X é um conjunto limitado. Isto significa que X está contido em algum intervalo limitado $[a,b]$ ou, equivalentemente, que existe $k > 0$ tal que $x \in X \implies |x| \leq k$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Um número $b \in \mathbb{R}$ chama-se o *supremo* do conjunto X quando é a menor das cotas superiores de X . Mais explicitamente, b é p supremo de X quando cumpre as duas condições:

- Para todo $x \in X$, tem-se $x \leq b$;
- Se $c \in \mathbb{R}$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$ então $b \leq c$. Esta última admite a seguinte reformulação:

- Se $c < b$ então existe $x \in X$ com $c < x$.

Daí, diz que nenhum número real menor do que b pode ser cota superior de X . Escrevemos $b = \sup X$ para indicar que b é o supremo do conjunto X .

Analogamente, se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto não-vazio, limitado inferiormente, um número real a chama-se o *nfimo* do conjunto X , e escreve-se $a = \inf X$, quando é a maior das cotas inferiores de X . Isto equivale às duas afirmações:

- Para todo $x \in X$ tem-se $a \leq x$;
- Se $c \leq x$ para todo $x \in X$ então $c \leq a$. Esta última admite a seguinte reformulação:
 - Se $a < c$ então existe $x \in X$ com $x < c$.

Daí, diz que nenhum número real maior do que a pode ser cota inferior de X .

No caso em que não temos especificamente um círculo, em um caso mais geral, uma figura F delimitada, fechada, plana e não vazia, podemos definir que diâmetro é a maior distância entre um par de pontos de F , e será chamado o supremo das distâncias entre dois pontos quaisquer desse conjunto.

$$\text{diam}(F) = \sup \{ \rho(M, N) : M, N \in F \},$$

onde $\rho(M, N)$ representa a distância euclidiana de M e N . Com efeito, Matoušek (1991, p. 59) define:

$$\text{diam}(F) = \sup \{ \|M - N\| : M, N \in F \},$$

onde $\|M - N\| = \rho(M, N)$.

Observação 2.3. *Seja d o diâmetro da figura F plana limitada e fechada, existem $A, B \in F$ tais que $\rho(A, B) = d$.*

Definição 2.4. *Existe um conjunto que não possui elemento algum. A este conjunto dá-se o nome vazio. Pode ser representado desta forma: $\emptyset$.*

Definição 2.5. *Uma figura plana é dita limitada se estiver inteiramente contida em um círculo de raio fixo.*

Qualquer triângulo e paralelogramo são exemplos de figuras limitadas. Na atual definição consideramos figuras planas fechadas.

Definição 2.6. *Quando todos os pontos limites de uma figura F pertencerem a F , chamaremos F de figura plana fechada.*

Definição 2.7. *Os pontos limites da figura são os pontos localizados no bordo da figura.*

Imagine um círculo S , em que $\text{diam}(S) = d$, sem os pontos da circunferência que o limita. Não existem $A, B \in S$ de modo que $\rho(A, B) = d$. Portanto trataremos de figuras fechadas e chamaremos d de extremo superior do conjunto das distâncias.

Definição 2.8. *Um conjunto é acotado quando se tem um limite superior e inferior.*

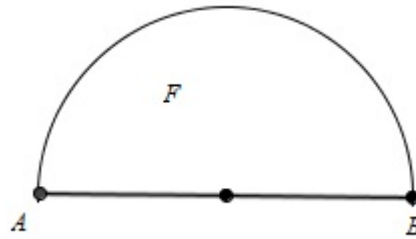
Em uma figura F fechada temos $0 < \rho(M, N) \leq d$, portanto temos um conjunto de distâncias acotadas.

Observação 2.9. *Se $\rho(M, N)$ é uma função contínua, cujos argumentos variam em um con-*

junto fechado e acotado, então alcançará obrigatoriamente seus valores de máximo e mínimo.

É fácil observar que em uma semicircunferência, como na Figura 2, os extremos A e B formam o diâmetro, já que é uma corda que passa pelo centro.

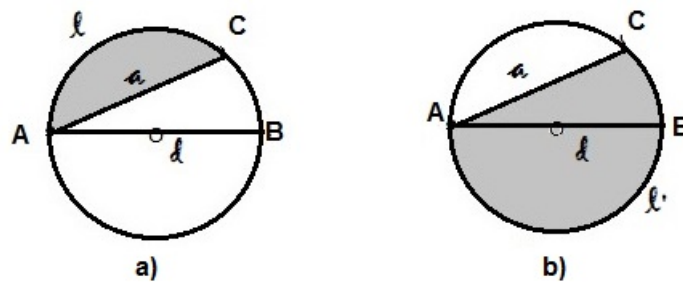
Figura 2 – Semicircunferência



Fonte: Elaborada pelo autor

Considere um círculo S em que $diam(S) = d$ e $F \subset S$ é uma região limitada por um arco l e uma corda de comprimento a . Sejam $A, B, C \in S$, tal que $\rho(A, B) = d$ e $\rho(A, C) = a$.

Figura 3 – $\widehat{AC} < \widehat{AB}$ e $\widehat{AC} > \widehat{AB}$



Fonte: Elaborada pelo autor

Na Figura 3 veremos em a) que $\widehat{AC} < \widehat{AB}$ e que $diam(F) = a$. Já na figura b) $\widehat{AC} > \widehat{AB}$ e neste caso $diam(F) = d$.

Proposição 2.10. Quando o arco l é menor que a semicircunferência, a medida do diâmetro será a medida da corda que passa pelos extremos de l , quando l for maior que a semicircunferência o diâmetro terá medida d , o próprio diâmetro do círculo.

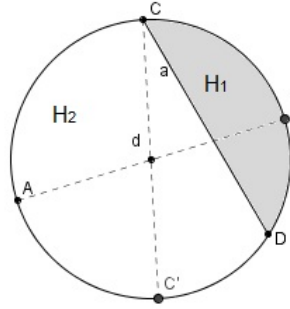
Demonstração. Sejam A, B, C, D pontos de uma circunferência S , onde $diam(S) = d$. Dados A e B , pontos diametralmente opostos, temos $\rho(A, B) = d$. Sejam C e D pontos não diametralmente opostos, logo $\rho(C, D) < d$. Chamaremos $\rho(C, D) = a$. Veja a Figura 4.

A corda $\overline{CD}$, determina o arco l e dividirá S em duas regiões: H_1 e H_2 . Em H_1 , parte cinza da figura, temos que $\widehat{CD} < \widehat{AB}$ e em H_2 temos $\widehat{CD} > \widehat{AB}$.

Imagine um ponto X sobre a circunferência em H_1 formando um triângulo $\Delta(CXD)$. É fácil perceber que $\overline{CD}$ sempre será o maior segmento de H_1 já que sempre será o maior lado de qualquer triângulo formado nessas condições. Logo $diam(H_1) = a$.

Em H_2 é possível encontrar C' e D' diametralmente opostos a C e D , respectivamente, de modo que $\rho(C, C') = \rho(D, D') = d$. □

Figura 4 – $\text{diam}(H_1) = a$ e $\text{diam}(H_2) = d$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 2.11. *Em um polígono, o diâmetro será a maior distância entre seus vértices.*

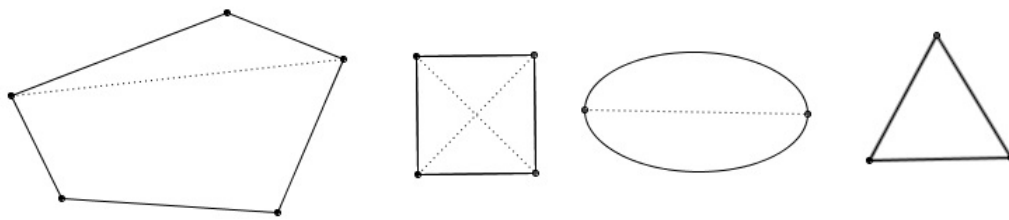
Demonstração. Considere um polígono F onde $\text{diam}(F) = d$. Sejam V e W os vértices de F com maior distância. Por definição $\rho(V,W) \leq d$. Por outro lado, pela Observação 2.3, existem $A, B \in F$ tal que $d = \rho(A,B)$. A e B não pertencem ao interior de F . Se B pertence a fronteira de F , de modo análogo devemos ter que A e B são vértices. Logo:

$$\rho(V,W) \leq d = \rho(A,B) \leq \rho(V,W) \therefore d = \rho(V,W)$$

□

O diâmetro em um triângulo é o comprimento de seu maior lado. Seja d o comprimento do diâmetro de uma figura F . Temos na elipse um par de pontos com essa distância, no quadrado dois pares, no triângulo regular três, e no círculo infinitos.

Figura 5 – Diâmetro de figuras.

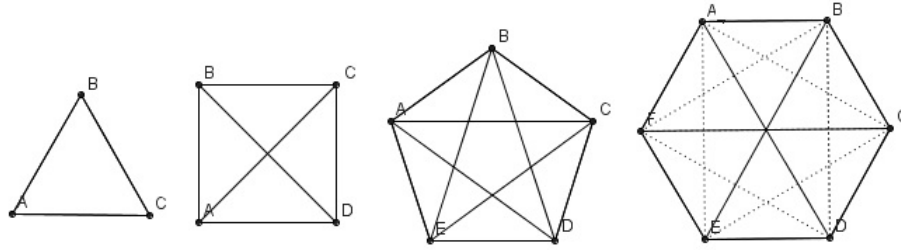


Fonte: Elaborada pelo autor

2.2 Diâmetro dos polígonos regulares

Vamos representar por d o valor do diâmetro de qualquer polígono regular. No triângulo regular existem 3 pares de pontos onde $p(M,N) = d$. São seus próprios lados que formam o diâmetro. No quadrado 2 pares geram essa distância, e estes são os extremos das duas diagonais. Observe na Figura 6, que no pentágono existem 5 pares de pontos que formam o diâmetro. Veja que os triângulos são congruentes

Figura 6 – Polígonos regulares.



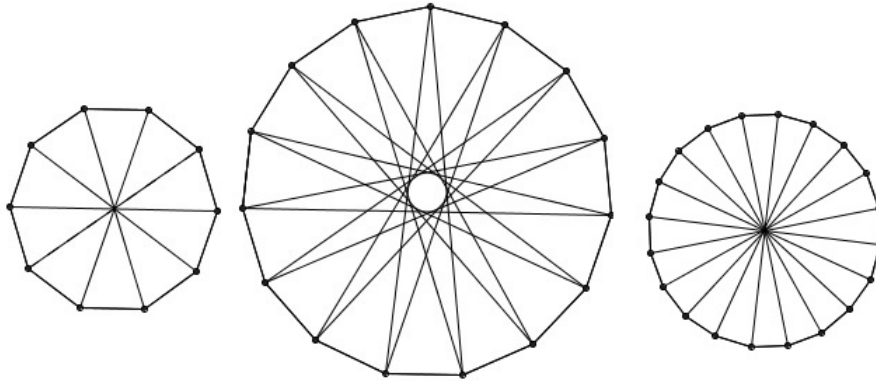
Fonte: Elaborada pelo autor

$\Delta(EAB) \sim \Delta(ABC) \sim \Delta(BCD) \sim \Delta(CDE) \sim \Delta(DEA)$ pelo caso lado, ângulo, lado. De fato, o $\angle(EAB) = 108^\circ$ é o maior ângulo do triângulo $\Delta(EAB)$ e $\overline{BE}$ é seu lado oposto, ou seja, maior lado do triângulo. Seguindo esta análise $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BE} = \overline{BD} = \overline{CE} = d$ são as maiores distâncias realizadas nesse pentágono, portanto são diâmetros do mesmo.

No hexágono, o $\Delta(AFD) \sim \Delta(BAE) \sim \Delta(CBF) \sim \Delta(DCA) \sim \Delta(EDB) \sim \Delta(FEC)$ e por congruência de triângulos $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ e $\overline{CF}$ são as 3 diagonais que realizam o comprimento d . Uma forma mais clara de chegar a este resultado é criar uma circunferência circunscrita a este hexágono, para visualizar que todas essas diagonais são diâmetro da figura.

Seguindo esta análise com os demais polígonos regulares, veja outros polígonos na Figura 7, é evidente uma certa regularidade que apresentamos na proposição:

Figura 7 – Respectivamente: decágono, pentadecágono e icoságono



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 2.12. *Seja n o número de vértices de um polígono regular e d seu diâmetro, com $n \geq 3$ e $n \in \mathbb{Z}$. Para n par existem $\frac{n}{2}$ pares que realizam a distância d e para n ímpar, n pares que realizam esta distância.*

Demonstração. Nos polígonos regulares com um número par de lados, cada vértice formará a distância d com seu vértice oposto. É só imaginar uma circunferência circunscrita a este polígono, para perceber que cada vértice forma um par com o vértice diametralmente oposto. Logo, para n par, $\frac{n}{2}$ pares de vértices realizam a distância d . Já para polígonos regulares com um número ímpar de lados, a cada vértice dois outros vértices realizam a

distância d . Portanto, para n ímpar, n pares de vértices formam a distância d .

3 CONSTRUÇÃO DO PROBLEMA

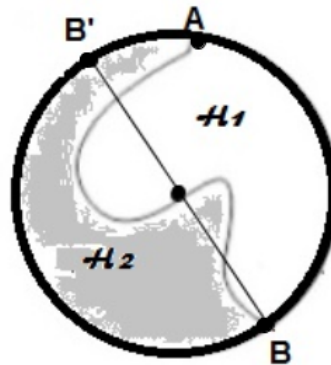
3.1 Investigação.

Ao dividir um círculo S em duas partes H_1 e H_2 por meio de uma linha, pelo menos uma das regiões irá conter no mínimo um par de pontos que formem a distância d , ou seja, o diâmetro d estará representado em uma dessas regiões. Veja Figura 8.

Seja B uma ponto pertencente ao bordo de S . O comprimento d estará representado em H_1 ou H_2 ao traçar B' diametralmente oposto a B , já que B' forma com B os extremos de um diâmetro d .

Proposição 3.1. *Se um círculo S em que $\text{diam}(S) = d$ está representado pela união de dois subconjuntos fechados, pelo menos um destes terá diâmetro d .*

Figura 8 – Círculo dividido em duas regiões H_1 e H_2

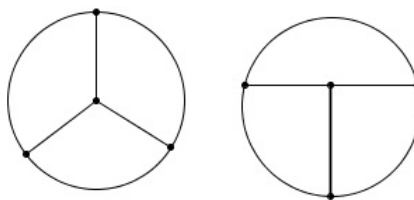


Fonte: Elaborada pelo autor

Demonstração. Sejam H_1 e H_2 conjuntos fechados tais que $H_1 \cup H_2$ formam o círculo. Seja $K_1 \subset H_1$ pontos na circunferência em H_1 e $K_2 \subset H_2$, os pontos da circunferência em H_2 . $K_1 \cup K_2$ formam a circunferência. Caso $K_2 = \emptyset$, K_1 é a própria circunferência e H_1 o próprio círculo. Em vista disto, K_1 e K_2 não estão vazios, e tem obrigatoriamente um ponto em comum B , já que a circunferência é contínua, e portanto existe intersecção entre K_1 e K_2 . Dizer que B' é diametralmente oposto a B e verificando que o mesmo está em K_1 , sem perda de generalidade, temos $B, B' \in K_1$ e H_1 contém pelo menos um par de pontos que realizam a distância d , deste modo H_1 também contém este par de pontos. □

Portanto, um círculo de diâmetro d deve ser dividido em no mínimo três partes, a fim de que cada região contenha um diâmetro menor que d . Veja Figura 9.

Figura 9 – Círculo dividido em 3 partes



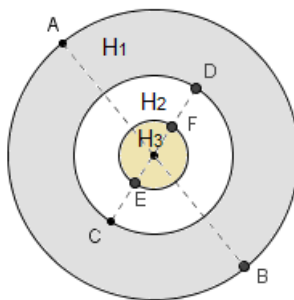
Fonte: Elaborada pelo autor

Num triângulo equilátero de diâmetro d , dividir em duas partes não é suficiente para obter regiões com diâmetros menores que d , já que teremos dois vértices numa mesma região. Num triângulo equilátero a distância entre esses vértices será o próprio diâmetro. É necessário para o mesmo 3 divisões.

O presente trabalho aborda figuras planas fechadas e são consideradas as linhas de divisões abertas e simples. Abertas porque não há coincidência da origem da linha com a sua extremidade e simples pois não há cruzamento entre elas.

Se você interior somente pontos de R (figura à esquerda). Do ponto de vista geométrico, uma região simplesmente conexa é a que não possui buracos. Uma região que não é simplesmente conexa é denominada multiplamente conexa (figura à direita).

Figura 10 – Divisão que não satisfaz o Teorema de Borsuk.



Fonte: Elaborada pelo autor

Observação 3.2. As linhas de divisão se comportam de tal forma que uma das extremidades dessas linhas devem sair de um dos pontos que estão nos limites da figura, chamados bordo da figura, e a outra extremidade chegará ou no bordo novamente ou em outra linha de divisão de modo que exista pelo menos um ponto de intersecção entre todas as linhas de divisões formadas.

Definição 3.3. Chamaremos de $a(F)$ o número mínimo de partes que são necessárias para dividir uma figura em regiões de diâmetro menor. É o chamado número de Borsuk.

Que valores $a(F)$ pode assumir no plano? Na elipse e no paralelogramo $a(F) = 2$, no círculo e no triângulo equilátero $a(F) = 3$. K Borsuk conjecturou e resolveu o problema dos valores que podem ter $a(F)$ em 1933. Ver mais em capítulo 4.

3.2 Dados históricos da conjectura de Borsuk

Figura 11 – Karol Borsuk



Fonte: Aignerw e Ziegler, 2010, p. 95

De acordo com School of Mathematics and Statistics, Borsuk (1905- 1982) nasceu na Polônia e sua carreira foi interrompida no início da Segunda Guerra Mundial. Depois da invasão alemã na Polônia em 1939, a vida lá tornou-se extremamente difícil. Houve uma estratégia pelos alemães para pôr fim à vida intelectual da Polônia e na tentativa de alcançar este objetivo, enviaram muitos acadêmicos para campos de concentração e outros foram assassinados. Os poloneses organizaram uma universidade no subsolo, em Varsóvia.

A importância da educação clandestina consistiu também em manter o espírito de resistência, bem como otimismo e confiança no futuro, que era tão necessária nas condições de ocupação. As condições de vida de um cientista naquela época não eram boas e durante a ocupação nazista, Borsuk tentou manter o funcionamento da Universidade clandestina de Varsóvia, no entanto, ele não foi capaz de fazer isso sem ser descoberto pelos nazistas e foi preso. Borsuk escapou e foi capaz de sobreviver, permanecendo escondido durante todo o resto da guerra.

No final da Segunda Guerra Mundial, todo o sistema educativo tinha sido destruído e por isso precisou ser totalmente reconstruído. Borsuk desempenhou um papel importante nesta reconstrução. Ele influenciou fortemente o desenvolvimento de toda a área da topologia de dimensão infinita.

De fato, para Cipra (1993, p 21), cientistas em todas as disciplinas sabem que tirar conclusões “óbvias”, mesmo a partir de fatos bem fundamentados é um jogo perigoso, a menos que essas conclusões possam ser apoiadas por verificação experimental. Também acontece em matemática e a demonstração toma o lugar de experimentação laboratorial. Explorações matemáticas são guiadas por intuição, mas são apenas confirmadas por provas.

Borsuk generaliza a observação completamente trivial que uma figura unidimensional de diâmetro d , isto é, um segmento de linha de certo comprimento, pode ser cortado

em dois pedaços mais curtos. Considere um corpo F n -dimensional, um corpo F de n dimensões. Borsuk conjecturou:

Conjectura 3.4. *Para qualquer corpo F n -dimensional é verdade que $a(F) \leq n + 1$.*

A conjectura de Borsuk foi provada para a esfera e corpos lisos em geral, mas muitos matemáticos tentaram provar a veracidade ou falsidade dessa conjectura que ficou em aberto por muito tempo. Oded Schramm mostrou que $a(F) \leq (1,23)^n$. 60 anos depois Jeff Kahn e Gil Kalai produziram um contra-exemplo na dimensão 946. Kahn e Kalai não só mostraram que em espaços de elevada dimensão é possível construir um contra-exemplo, como mostraram que $a(F)$ cresce exponencialmente, quando a dimensão tende para o infinito provando que $a(F) \geq (1,2)^{\sqrt{n}}$. “It’s an example of an extremely short proof that was quite difficult to find,” disse Kalai (Cipra, 1993, p. 22). “É um exemplo de uma prova extremamente curta que foi bem difícil de encontrar.” (tradução do autor).

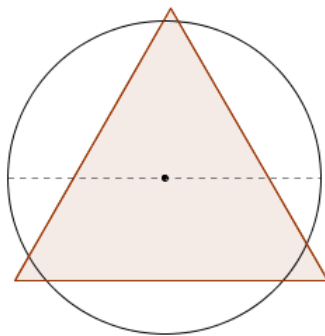
Alguns matemáticos tentaram reduzir a dimensão, foi quando Andrei M. Raigorodskii e Bernulf Weißbach, reduziram a mesma para 561, e logo para $d = 560$. Em 2003, Aicke Hinrichs e Christian Richter reduziram para 298 (Aigner e Ziegler, 2010, p.95).

De fato, alguns resultados em geometria de dimensão superior são difíceis de provar mas para a dimensão 2, Borsuk usou um lema de Julius Pall.

Segundo Gibbs, em 1914 o famoso matemático Henri Lebesgue enviou uma carta a Pall, onde o desafiava a encontrar um conjunto convexo com menor área possível, de modo que cada conjunto de diâmetro 1, se encaixasse dentro. Foi chamada de Cobertura Universal.

De acordo com Journal of Computational Geometry, Vol 6, (2015), um subconjunto do plano tem diâmetro 1 se a distância entre quaisquer dois pontos neste conjunto é no máximo 1 e existe pelo menos dois pontos que realizam a distância 1. Poderíamos pensar em um círculo de diâmetro 1 como uma cobertura universal mas um triângulo equilátero com arestas de comprimento 1, por exemplo, tem diâmetro 1, e o círculo dado não cobre este triângulo. Nota-se que este triângulo não se encaixa dentro de um círculo de diâmetro 1. Veja Figura 12.

Figura 12 – Círculo e triângulo de mesmo diâmetro.



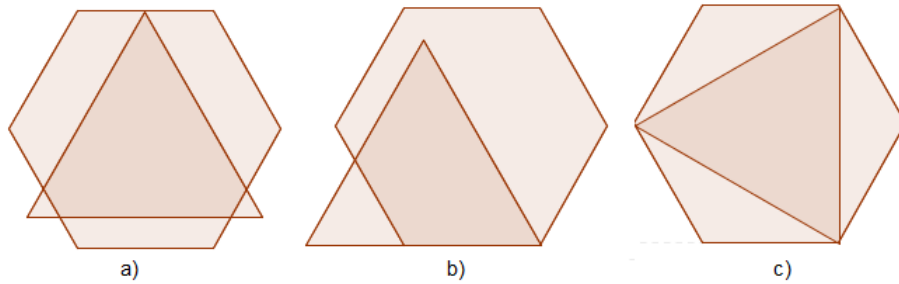
Fonte: Elaborada pelo autor

Mais precisamente, Lebesgue definiu uma cobertura universal um subconjunto

convexo do plano, que pode cobrir uma versão dessa região após as devidas reflexões e / ou giros de cada subconjunto do plano com diâmetro 1. E o desafio era encontrar a cobertura universal com o menor área.

Pall trabalhou neste problema, e 6 anos mais tarde, 1920, publicou um artigo. Ele encontrou uma cobertura universal: um hexágono regular, em que se pode inscrever um círculo de diâmetro 1. Veja na Figura 13 que em c) encontramos um posicionamento para um triângulo regular de mesmo diâmetro do hexágono encontrado por Pall.

Figura 13 – Hexágono e triângulo de mesmo diâmetro.



Fonte: Elaborada pelo autor

Proposição 3.5. *O hexágono regular em que um círculo de diâmetro 1 pode ser inscrito, tem lados de comprimento $\frac{1}{\sqrt{3}}$.*

Demonstração. Podemos perceber na Figura 14, um triângulo destacado em cinza e por lei dos cossenos encontraremos o lado l deste hexágono.

$$1^2 = l^2 + l^2 - 2.l.l.\cos(120^\circ)$$

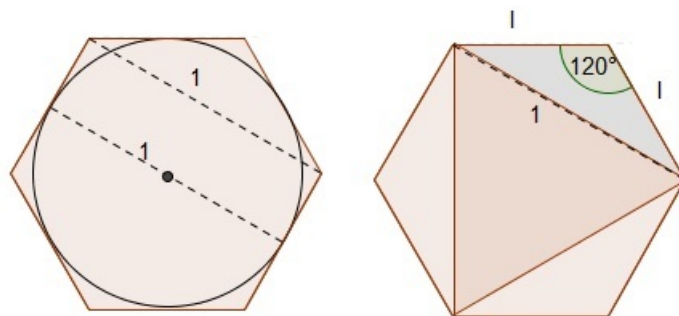
$$1 = 2.l^2 + l^2$$

$$3l^2 = 1$$

$$l = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

□

Figura 14 – Hexágono de lado $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Fonte: Elaborada pelo autor

Com efeito, John , Bagdasaryan e Gibbs (2015, p. 1) afirmam que o desafio de Lebesgue em encontrar uma cobertura universal com a menor área possível, foi abordada por vários matemáticos que trabalharam nele melhorando ligeiramente os resultados, os mais notáveis entre eles são: Pall, Sprague e Hansen que criaram coberturas universais cada vez menores.

No entanto, a última redução de Hansen foi microscópica. No que se segue, com a ajuda de Greg Egan, um novo revestimento menor universal foi encontrado. Todos os revestimentos aperfeiçoados universais até agora têm sido construídos por eliminação de peças do hexágono, encontrados por Pall, sendo então o hexágono a cobertura universal mais simples.

De fato, tornou-se o protótipo de uma grande família de problemas. No que se refere ao presente trabalho, Borsuk utiliza o lema do matemático húngaro Pall, que inicialmente apresenta que o hexágono de lado $\frac{1}{\sqrt{3}}$ cobre uma circunferência de diâmetro 1.

Proposição 3.6. *O hexágono regular de lado $\frac{d}{\sqrt{3}}$ cobre um círculo de diâmetro d.*

Demonstração. Já sabemos que um hexágono de lado $\frac{1}{\sqrt{3}}$ cobre um círculo de diâmetro 1. Seja um círculo de diâmetro d inserido em um hexágono. Imagine um triângulo formado por três vértices consecutivos desse hexágono. Veja Figura 15. O maior lado do triângulo representará o diâmetro d da figura inserida, e x o comprimento do lado do hexágono. Considere o triângulo $\Delta(ABC)$, temos:

$$d^2 = x^2 + x^2 - 2 \cdot x \cdot x \cdot \cos(120^\circ)$$

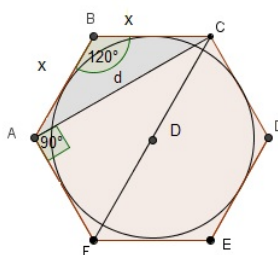
$$d^2 = 2 \cdot x^2 + x^2$$

$$3x^2 = d^2$$

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

E podemos concluir que todo círculo de diâmetro d pode ser inserido em um hexágono regular onde a distância entre seus lados paralelos é d. O lado desse hexágono será de $x = \frac{d}{\sqrt{3}}$ e o diâmetro D do hexágono será $\frac{2d}{\sqrt{3}}$. $\square$

Figura 15 – Hexágono de lado $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Fonte: Elaborada pelo autor

A seguir veremos que uma região plana de diâmetro d pode ser inserida em um

hexágono regular , onde a distância entre seus lados paralelos tem a distância d .

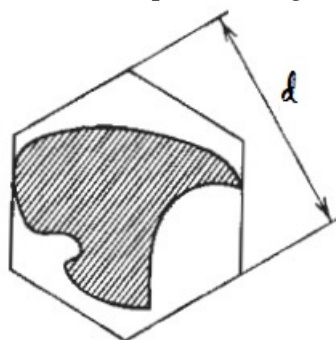
4 TEOREMA DE BORSUK NA DIMENSÃO 2.

Teorema 4.1. *Toda figura plana F onde $\text{diam}(F) = d$ pode ser dividida em três partes de diâmetro menor que d , ou seja $a(F) \leq 3$.*

Começaremos a demonstração desse teorema pelo lema do matemático húngaro Pall. Veja Figura 16.

Lema 4.2. *Toda figura plana de diâmetro d pode ser colocada em um hexágono regular de tal forma que a distância entre seus lados paralelos seja igual a d .*

Figura 16 – Distância entre lados paralelos igual a d



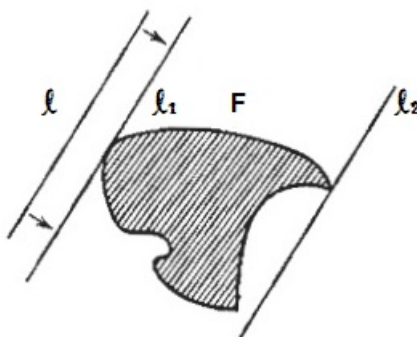
Fonte: Boltianski, V.G e Gojberg, I. Ts.,1973, p. 98

Para qualquer região plana F tem-se um conjunto de retas de apoio.

Definição 4.3. *Uma reta divide um plano em dois semiplanos. Uma reta de apoio de uma figura F se trata de uma reta que tem, pelo menos, um ponto em comum com F e F se dispõe integralmente em um dos seus semiplanos.*

Definição 4.4. *Nomeia-se por l_1 , a primeira reta de apoio traçada em uma região que dependerá da primeira reta l , inicialmente escolhida de modo que $l \cap F = \emptyset$.*

Figura 17 – l_1 e l_2 são retas de apoio de F



Fonte: Boltianski e Gojberg,1973, p.98

Seja F uma figura plana em que $\text{diam}(F) = d$. Deve-se traçar uma reta l que não se intersecte com F , ou seja, $l \cap F = \emptyset$. Aproxima-se gradualmente l de F , mantendo a reta paralela até a eminência do contato com a figura. O primeiro contato com a figura

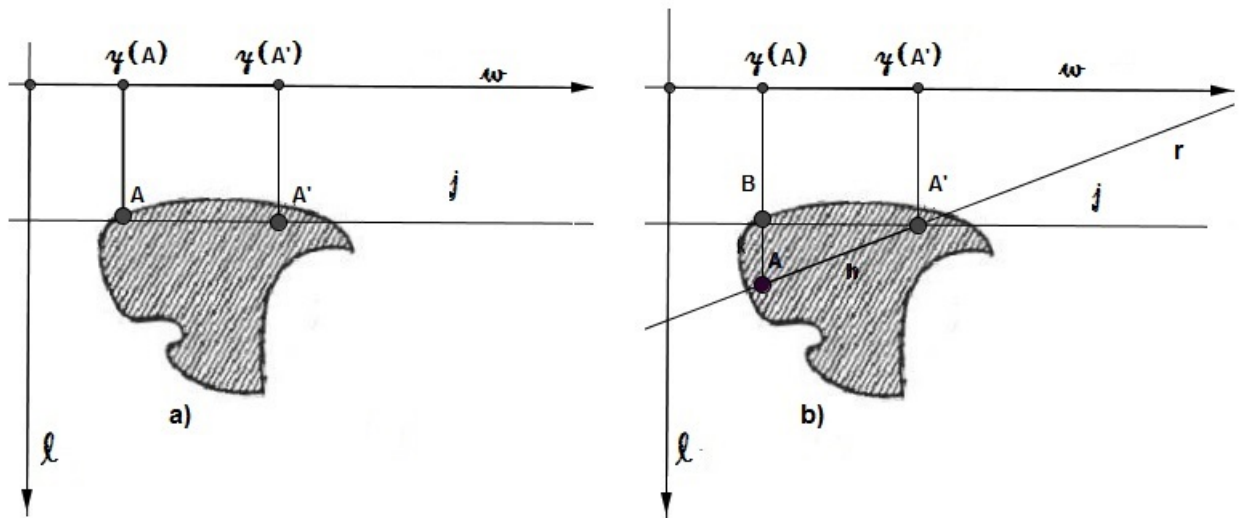
acontecerá em um ou mais pontos. Caso seja apenas um ponto de intersecção, podemos chamar a nova reta formada l_1 de tangente de F .

Ao traçar uma reta w perpendicular a l , pode-se relacionar os pontos da reta l com os da reta w , criando desta forma um plano cartesiano, eixo de coordenadas com l e w .

Proposição 4.5. Denotamos por $y(A)$ a ordenada de qualquer ponto $A \in F$. Temos para $A' \in F$, $|y(A) - y(A')| \leq \rho(A, A')$.

Demonstração. Caso A e $A' \in j$, sendo j uma reta tal que $j \parallel w$, ou seja $\angle(w, j) = 0$ tem-se que $|y(A) - y(A')| = \rho(A, A')$. Pode-se ver na Figura 18 que em a) os segmentos $\overline{AA'}$ e $\overline{y(A)y(A')}$ são congruentes e que em b) quando o segmento que une A e A' localiza-se em uma reta v com $\angle(w, v) = \lambda$ tal que $0^\circ < \lambda < 180^\circ$, temos $|y(A) - y(A')| < \rho(A, A')$. Traça-se uma perpendicular a w passando por A . Neste caso escolhemos A por ser um ponto mais distante de $w \cap r$ que A' . Caso A' estivesse a uma maior distância da intersecção, passaríamos a perpendicular pelo mesmo. De fato em ambos os casos, existe um ponto B na intersecção dessa perpendicular com j . Teremos portanto $\angle(\overline{AB}, \overline{BA'}) = 90^\circ$, e assim será formado um triângulo retângulo com vértices A , A' e B . Daí $\overline{AA'}$ será o maior lado, já que se opõe ao ângulo de 90° . Temos também $\overline{y(A)y(A')}$ congruente ao cateto do triângulo formado, localizado na reta j . Daí $|y(A) - y(A')| < \rho(A, A')$. $\square$

Figura 18 – $|y(A) - y(A')| \leq \rho(A, A')$

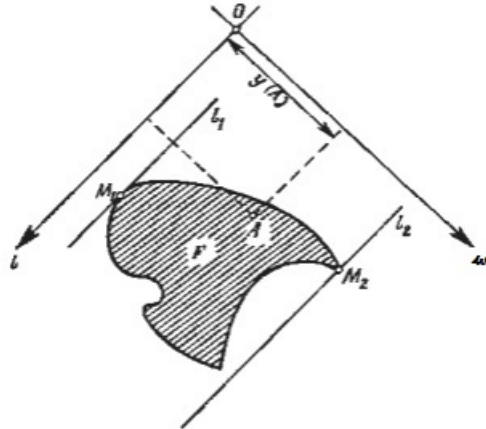


Fonte: Elaborada pelo autor.

Pela Observação 2.9, seja F uma região plana de diâmetro d . Uma função contínua, definida para um conjunto fechado e acotado F , alcança seus valores de máximo e de mínimo.

Pode-se dizer que $\forall A \in F$ e $y(A) \in w$, existem M_1 e M_2 tais que, $y(M_1) \leq y(A) \leq y(M_2)$. Encontraremos M_1 e M_2 através de retas l_1 e l_2 , respectivamente. Veja Figura 19.

Figura 19 – $\rho(l_1, l_2) \leq \rho(M_1, M_2) \leq d$

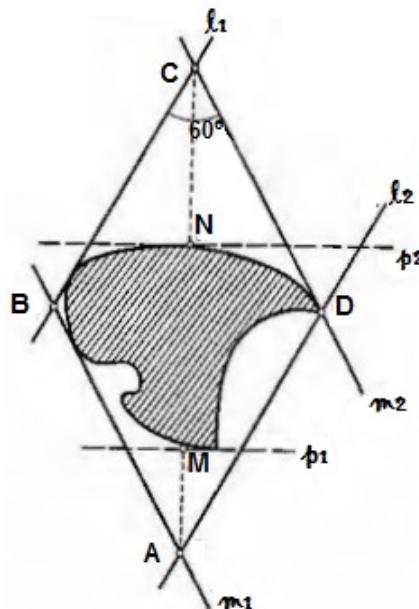


Fonte: Boltianski, V.G e Gojberg, I. Ts., 1973, p. 12

Pode-se imaginar que l_1 e l_2 serão retas paralelas a l de primeiro e último contato com a figura ao deslizar l sobre o plano, paralela a si mesma aproximando-se e passando por F .

No primeiro contato de l com F , teremos l_1 e $M_1 \in l_1 \cap F$. Mantendo a direção de l até o último contato com F marcaremos l_2 e $M_2 \in l_2 \cap F$. Dessa forma garantiremos que F estará por completo entre l_1 e l_2 . Essas retas são chamadas de retas de apoio de F e a distância entre elas não será maior que d , visto que $\text{diam}(F) = d$. Temos então que $\rho(l_1, l_2) \leq \rho(M_1, M_2) \leq d$.

Figura 20 – l_1, l_2, m_1, m_2, p_1 e p_2 são retas de apoio.



Fonte: Boltianski e Gojberg, 1973, p. 13

O próximo passo após a construção de l_1 e l_2 é traçar a reta m com $m \cap F = \emptyset$ e $\angle(l, m) = 60^\circ$. Em seguida, construir m_1 e m_2 , retas de apoio de F , com $m // m_1 // m_2$.

Sabemos que um paralelogramo é um polígono que possui quatro lados paralelos dois a dois e que os segmentos paralelos possuem medidas congruentes, logo as quatro retas

l_1, l_2, m_1, m_2 formarão um paralelogramo P de vértices A, B, C, D e nenhuma parte de F ficará fora do mesmo, ou seja $P \supset F$. Considere o paralelogramo P como sendo um paralelogramo $ABCD$, onde $m_1 \cap l_2 = A, m_1 \cap l_1 = B, m_2 \cap l_1 = C$ e $m_2 \cap l_2 = D$

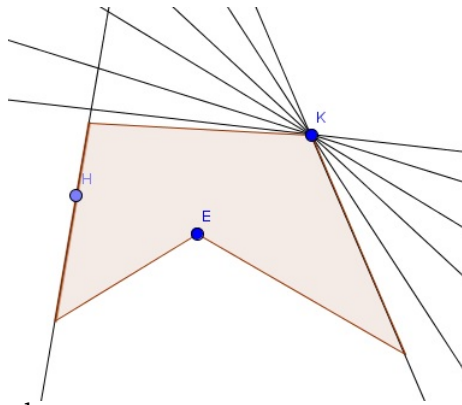
Em seguida formaremos a reta p de modo que $\angle(l, p) = 120^\circ$. Aproximaremos p de F a fim de encontrarmos p_1 e p_2 , retas de apoio, assim como foi feito com l e m .

Chamaremos de M e N , em p_1 e p_2 respectivamente os pontos das retas formados pelos pés da perpendicular da diagonal $\overline{AC}$. Veja Figura 20. Esta figura será constantemente retomada durante o trabalho.

Definição 4.6. Definiremos a magnitude de F como sendo o comprimento $\mathcal{M} = \overline{AM} - \overline{CN}$.

Observação 4.7. Seja R o conjunto de retas de apoio de F em um ponto qualquer do bordo da figura. Neste ponto poderá haver retas de apoio. Caso existam, haverá uma reta de apoio ou infinitas.

Figura 21 – Nenhuma, uma ou infinitas retas de apoio passam por um ponto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe na figura 21, que pelo ponto H passa apenas uma reta de apoio. Note que qualquer outra reta neste ponto cortaria a região em duas regiões. No ponto K infinitas retas de apoio podem ser traçadas, já no ponto E qualquer reta cortaria F em duas regiões, logo não existem retas de apoio que passem por este ponto.

Voltando a Figura 20, observe que a reta l_1 elegida inicialmente, determina a posição das outras retas.

Proposição 4.8. A escolha da reta l_1 pode ser feita de forma que fosse válido $\overline{AM} = \overline{CN}$

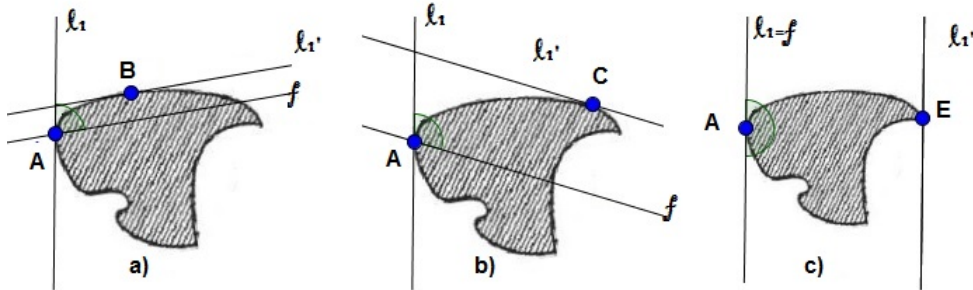
Demonstração. Considere, sem perda de generalidade, que $\overline{AM} \neq \overline{CN}$ de tal forma que $\overline{AM} < \overline{CN}$. Sabendo que a magnitude é $\mathcal{M} = \overline{AM} - \overline{CN}$, podemos perceber que a magnitude é negativa já que $\mathcal{M} = \overline{AM} - \overline{CN}$.

Ao fixar a figura F e variar l_1 em outras direções em torno da figura (l_1 carrega com ela a propriedade de ser reta de apoio de F), observa-se que $\overline{AM} = \overline{CN}$ para alguma posição de l_1 . Vejamos:

Por F passa-se l_1 e marca-se o ponto A de tal forma que $A \in l_1 \cap F$. Em seguida, traça-se l'_1 em um ponto B , percorrendo a figura no sentido horário, e por A passaremos

uma reta f de tal forma que $l'_1 // f$, desse modo é possível ver a variação da direção da reta por toda a figura. Veja a Figura 22.

Figura 22 – Em c temos $\angle(l_1, l'_1) = 180^\circ$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observe na figura 20 que para um $l'_1 = l_2$ veremos $\angle(l_1, f) = \angle(l_1, l'_1) = \angle(l_1, l_2) = 180^\circ$. A figura ainda será o mesmo paralelogramo mas os pontos D, A, M mudarão de lugar com B, C, N , respectivamente, e neste caso $\overline{AM} > \overline{CN}$ o que vale dizer:

$$\overline{AM} - \overline{CN} > 0,$$

o que representa a magnitude. Então:

$$\mathcal{M} = \overline{AM} - \overline{CN} > 0,$$

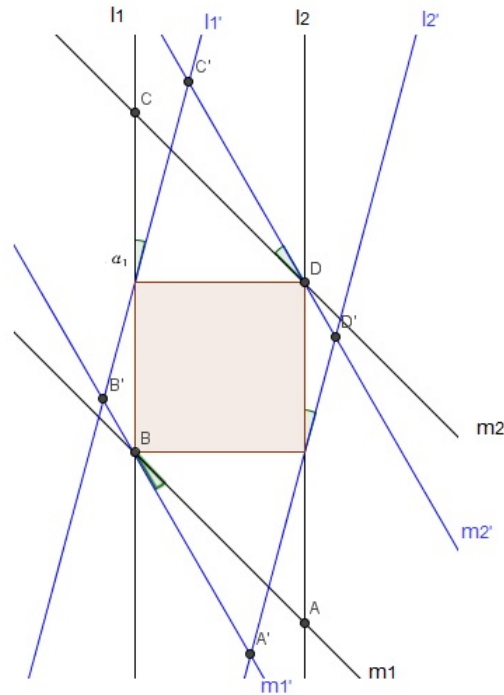
magnitude positiva.

De fato se $\mathcal{M}$ percorreu de um valor negativo até um valor positivo, em algum momento $\mathcal{M} = 0$. Observe que isso se dá através de um processo contínuo e neste caso:

$$\overline{AM} = \overline{CN}$$

□

Suponha l'_1 de modo que $\angle(l_1, l'_1) = \alpha_1$. Veja a Figura 23. Observe que todas as outras retas girarão no sentido horário este mesmo ângulo em relação a l_1 , e os pontos de encontro das retas de apoio também mudarão de lugar. A' pode se aproximar o quanto se desejar de A se α for suficientemente pequeno, provando por exemplo, que o ponto A depende de l_1 .

Figura 23 – $\angle(l_1, l'_1) = \alpha_1$ 

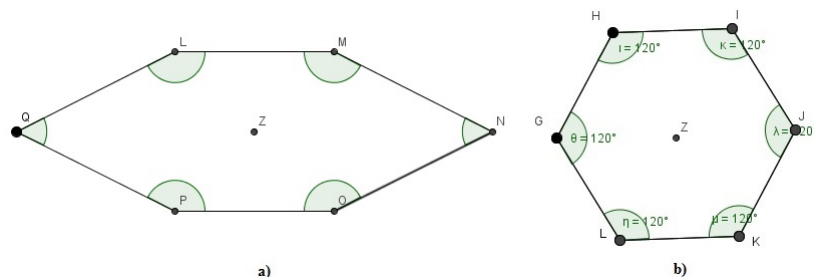
Fonte: Elaborada pelo autor.

Em todo quadrilátero, a soma dos ângulos internos é 360° e ângulos opostos possuem medidas congruentes. Já foi dado que $\angle(l, m) = 60^\circ$, sem perda de generalidade teremos $\angle(l_1, m_2) = \angle(l_2, m_1) = \angle(l, m) = 60^\circ$, daí vem que $\angle(l_1, m_1) = \angle(l_2, m_2) = 120^\circ$.

Dando continuidade ao problema, quando traçamos p tal que $p \cap F = \emptyset$ de modo $\angle(l_1, p) = 120^\circ$ e posteriormente p_1 e p_2 retas de apoio de F e $p // p_1 // p_2$, tivemos a possibilidade de encontrar, portanto, um hexágono.

Quando $AM = CN$ encontraremos um hexágono centrossimétrico e o ponto de simetria central do hexágono será o mesmo do paralelogramo. Veja na Figura 24 exemplos de hexágonos centrossimétricos.

Figura 24 – a) Hexágono centrossimétrico não regular b) Hexágono centrossimétrico regular.



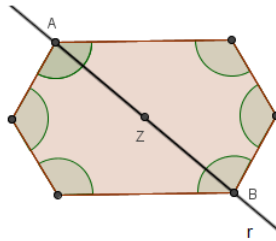
Fonte: Elaborada pelo autor.

Definição 4.9. Um hexágono será centrossimétrico quando existir um ponto central de simetria Z , de modo que ao passar qualquer reta r por esse ponto, esta tocará o bordo do hexágono em

dois pontos, A e B , de modo que a distância entre estes pontos e o centro sejam equidistantes. $\rho(A,Z) = \rho(B,Z)$. Veja Figura 25.

No hexágono centrossimétrico os lados paralelos têm o mesmo comprimento, já que $\forall X$, ponto do bordo de F , teremos Y também no bordo de F com X, Y, Z colineares, de modo que $\rho(X,Z) = \rho(Y,Z)$. Existem 3 retas que passam por Z e tocam os vértices do hexágono criando 6 triângulos congruentes, dois a dois. Cada triângulo é reflexão de outro pelo ponto Z .

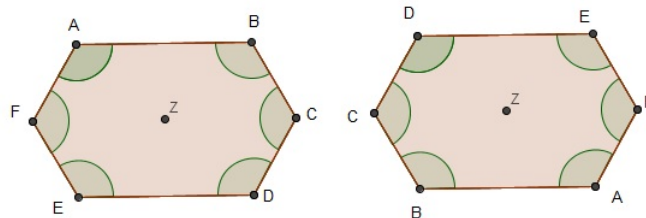
Figura 25 – $\rho(A,Z) = \rho(B,Z)$, com A, Z, B colineares.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Ao girar o hexágono centrossimétrico 180° pelo ponto Z de simetria encontraremos o mesmo hexágono porém mudarão as posições dos seus vértices. O mesmo se aplica ao paralelogramo. A simetria central é equivalente a uma rotação de 180° sobre o centro de simetria. Veja a figura 26:

Figura 26 – Hexágono antes e depois do giro de 180° em torno de Z .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na figura 27, percebemos que pelo próprio modelo de construção, os ângulos internos deste hexágono serão de 120° . Existem várias formas de chegar nesse resultado.

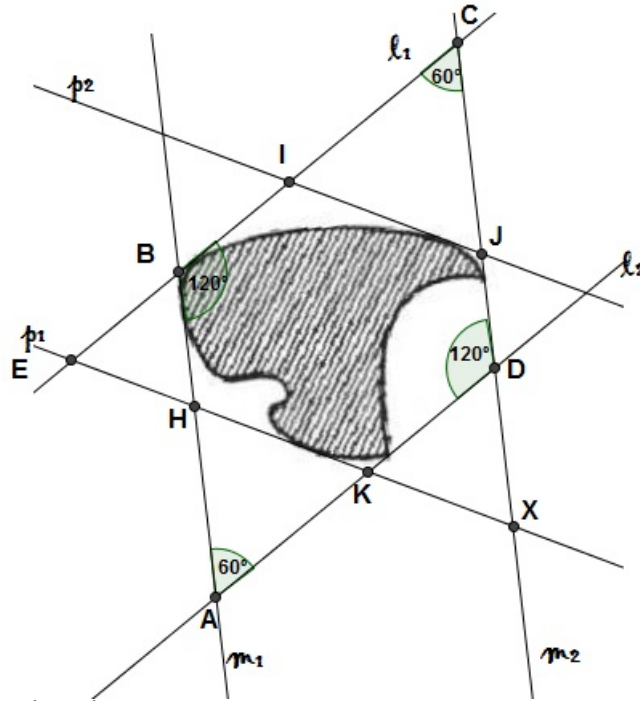
Sabemos de início que $\angle BIJ = 120^\circ$, pois $\angle(l_1, p_2) = 120^\circ$, além disso conhecemos os ângulos internos do paralelogramo formado pelas retas l_1, l_2, m_1 e m_2 e podemos dizer que $\angle IBH = \angle KDJ = 120^\circ$. Daí vem que $\angle CIJ = 60^\circ$ pois $\angle BIJ$ e $\angle CBIJ$ são suplementares. Temos também que $\angle ICJ = \angle HAK = 60^\circ$.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° , o que resta dizer que no $\triangle ICJ$ resulta que $\angle CJI = 60^\circ$, que é suplementar com $\angle IJD$. Logo $\angle IJD = 120^\circ$.

Existe também um paralelogramo formado pelas retas l_1, l_2, p_1 e p_2 . Daí vem que $\angle BIJ = \angle HKD$, pois os ângulos opostos nos paralelogramos são iguais.

Sabe-se que a soma dos ângulos internos de um hexágono é 720° , para concluir basta verificar que $\angle BIJ + \angle IJD + \angle JDK + \angle HKD + \angle HBI = 600^\circ$, o que resta dizer que $\angle BHK = 120^\circ$.

Figura 27 – Hexágono centrossimétrico.

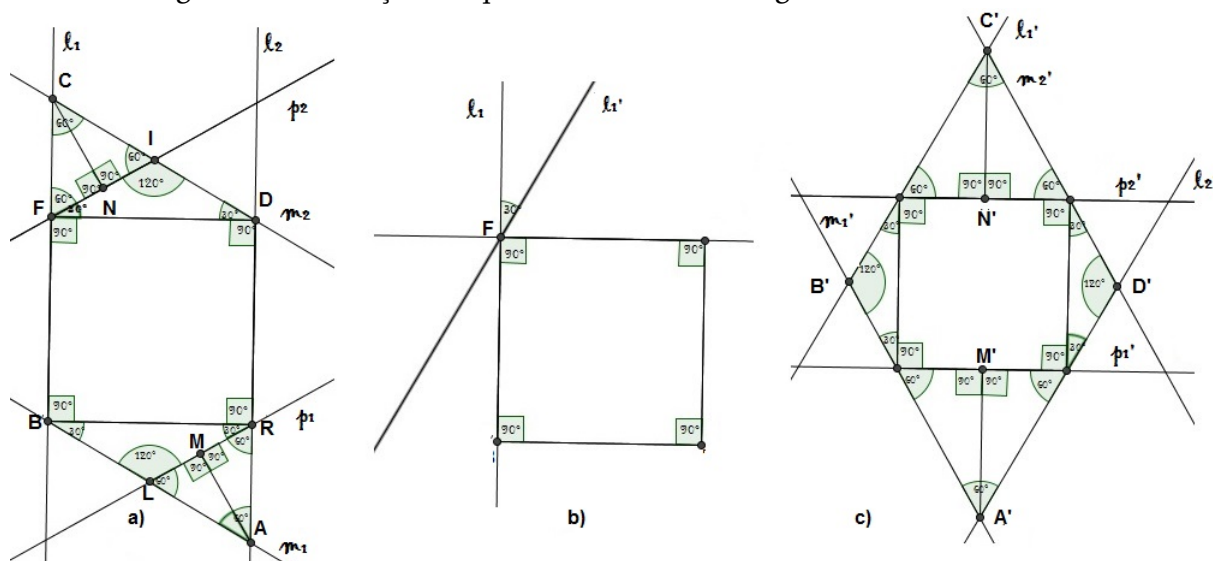


Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos perceber que os lados paralelos deste hexágono estão a uma distância menor ou igual a d , já que $\rho(l_1, l_2) \leq d$, $\rho(m_1, m_2) \leq d$ e $\rho(p_1, p_2) \leq d$ e seus lados estão sobre estas retas. Para tornar este hexágono regular, bastaria então manter a figura fixa e deslocarmos essas retas mantendo suas direções até que a distância seja exatamente d . Teremos, portanto, um hexágono centrossimétrico regular.

Vejamos o caso em que a região F é um quadrado e $diam(F) = d$. Seja em a) $l_1 // \overline{BF}$. Observe que teremos um hexágono centrossimétrico nesse caso, já que $\overline{AM} = \overline{CN}$. Podemos escolher l'_1 de tal forma que $\angle(l_1, l'_1) = 30^\circ$ por exemplo, como em b), e neste caso também teremos um hexágono centrossimétrico. Por congruência podemos verificar que $\overline{AM} = \overline{CN}$, tanto em a) como em c). Veja Figura 28.

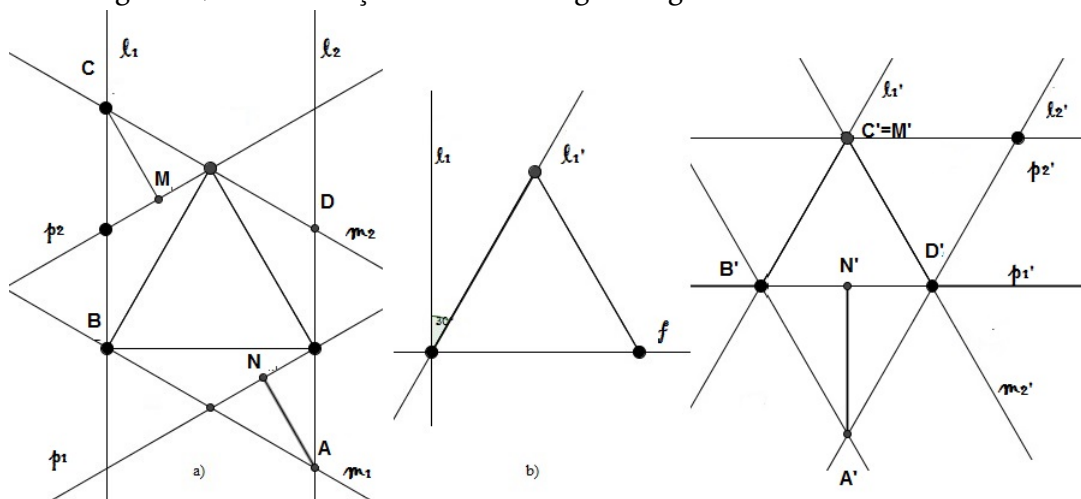
Figura 28 – Inserção do quadrado em um hexágono.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Seja um triângulo regular uma nova região F , com $\text{diam}(F) = d$, que neste caso é a medida do lado do triângulo.

Figura 29 – Construção em um triângulo regular.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 29, em primeiro caso escolhemos l_1 formando um ângulo de 90° com um dos lados do triângulo. Encontraremos em a) um hexágono centrossimétrico regular. Por semelhança podemos verificar que $\overline{AM} = \overline{CN}$.

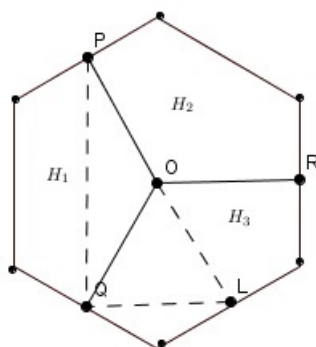
Agora observe o que acontecerá em b), ao criar l'_1 de tal forma que $\angle(l_1, l'_1) = 30^\circ$. Como resultado teremos em c) uma figura de magnitude $\mathcal{M}$ máxima, e neste caso não conseguiremos sequer visualizar um hexágono.

Já sabemos, pelo Lema 4.2, que toda figura plana de diâmetro d pode ser colocada em um hexágono regular de tal forma que a distância entre seus lados paralelos seja igual a d . Podemos portanto demonstrar o teorema 4.1 que diz que toda figura plana F onde $diam(F) = d$ pode ser dividida em três partes de diâmetro menor que d , ou seja $a(F) \leq 3$.

Demonstração. Basta mostrar que o hexágono regular pode ser dividido em três partes e o diâmetro de cada uma dessas regiões não será maior que d .

Sejam P , Q e R pontos médios de três lados não consecutivos do hexágono e seja O o centro do mesmo. Prolongando a reta que passa por O e por um desses três pontos, P por exemplo, marquemos L na intersecção da reta com o lado paralelo oposto ao lado do hexágono que contém P . Traçando os segmentos $\overline{PO}$, $\overline{RO}$ e $\overline{QO}$ dividiremos o hexágono em três regiões: H_1 , H_2 e H_3 . Ou ainda melhor, dividiremos este hexágono em 3 pentágonos iguais. Veja a figura 30:

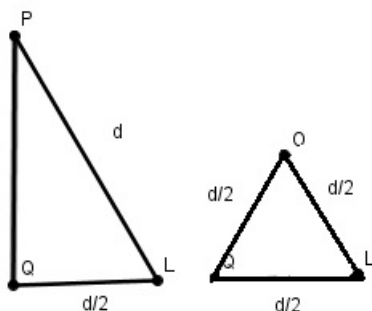
Figura 30 – Hexágono regular com comprimento de lados paralelos igual a d .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como já mostramos anteriormente, a proposição 2.11 diz que em todo polígono regular o diâmetro será a maior distância entre seus vértices. É fácil perceber que $\overline{PQ}$ é o diâmetro de H_1 , já que é a maior diagonal do pentágono. Temos o $\Delta(PQL)$ com $\angle PQL = 90^\circ$ e o $\Delta(OQL)$ equilátero. Veja Figura 31:

Figura 31 – $\Delta(PQL)$ e $\Delta(OQL)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$d^2 = \overline{PQ}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = d^2 - \frac{d^2}{4}$$

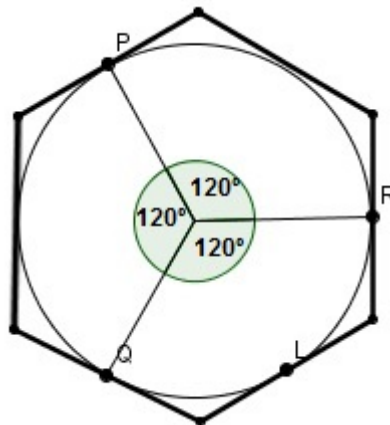
$$\overline{PQ}^2 = \frac{3d^2}{4}$$

$$\overline{PQ} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

Fica claro que toda figura plana de diâmetro d pode ser dividida em três partes, onde o diâmetro de cada região não será maior que $\frac{d\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660d$. $\square$

Observe o círculo S interno ao hexágono onde $diam(S) = d$. Na suposta divisão, o diâmetro de cada região é exatamente $\frac{d\sqrt{3}}{2}$, mas note que não seria possível uma divisão onde cada uma das partes fosse menor que esse valor, pois teríamos que ter $\widehat{PQ} < 120^\circ$, $\widehat{PR} < 120^\circ$ e $\widehat{RQ} < 120^\circ$ e estes não cobririam uma circunferência.

Figura 32 – Círculo inscrito num hexágono regular .



Fonte: Elaborada pelo autor.

5 ATIVIDADES PROPOSTA: MINI-CURSO TEOREMA DE BORSUK NA DIMENSÃO 2.

5.1 Justificativa

A Matemática é vista muitas vezes como sendo uma disciplina difícil, principalmente no que se refere a Geometria, criando muitas vezes no aluno uma aversão à matéria.

A atividade versa não só diagnosticar deficiências básicas iniciais, como resgatar vários conceitos fundamentais de geometria plana, a fim sanar dificuldades, acompanhando a investigação do aluno, até adquirir os novos conceitos interligados ao Teorema de Borsuk.

Conceitos como segmentos de reta, ângulos, classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, congruência de triângulos, relação de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo, estudo dos quadriláteros, diferença entre regiões côncavas e convexas, polígonos, circunferência e seus elementos devem fazer parte do conhecimento prévio de alunos do ensino médio, participantes da pesquisa. Conceitos novos como, diâmetro de figuras planas e lema de Papp serão abordados, a fim do entendimento do Teorema de Borsuk no plano.

Este minicurso é a seção prática do meu trabalho de conclusão de Curso do Mestrado Profissional em Matemática.

5.2 Objetivos

5.2.1 Objetivo Geral

Apresentar os conceitos matemáticos necessários para se apresentar o Teorema de Borsuk.

5.2.2 Objetivos Específicos

1. Avaliar o grau de interesse e motivação dos alunos antes, durante e ao fim do curso.
2. Despertar o interesse e suprir algumas dificuldades em Geometria pelos alunos do Colégio Jenny Gomes.
3. Fazer uma reflexão sobre o método apresentado no presente trabalho.

5.3 Metodologia de aplicação

5.3.1 Contexto

O trabalho foi realizado em uma instituição de ensino estadual de nível fundamental e médio, chamada Colégio Jenny Gomes, localizada no bairro Aeroporto, sem número no município de Fortaleza, estado do Ceará.

A escola funciona atualmente no período diurno, em regime regular, tendo ao todo 1098 alunos, 58 professores e 15 funcionários em geral. Um dado relevante é que 187 alunos compõem 6 salas de terceiro ano do ensino médio.

5.3.2 Instrumentos e métodos de Coletas de dados

A pesquisa é do tipo teórico metodológica. Para o auxílio nos estudos utilizamos como instrumentos de coletas de dados, um pré-teste de caráter motivacional, intitulado Questionário Motivacional I e outro de caráter avaliativo do conhecimento prévio na disciplina, chamado Pré-Teste. Além do mais, um questionário socioeconômico foi realizado, a fim de obter mais informações sobre os participantes. No último dia de aula serão realizados o Questionário Motivacional II e o Teste Final. As anotações dos dados foram feitas de forma manual.

Neste sessão, serão apresentados os gráficos quantitativos do Pré-Teste e do Teste Final e em seguida, serão feitas suas respectivas análises qualitativas.

O Pré-Teste foi aplicado a um grupo composto por 18 alunos do 3º ano do ensino médio. O Pré-Teste consta de doze perguntas, sendo oito objetivas e quatro subjetivas.

Os Questionário Motivacional I e o Pré-Teste foram aplicados antes do início das aulas. As perguntas feitas referem-se aos conhecimentos e vivências dos alunos. Os objetivos desses questionários são de analisar as expectativas dos alunos, quanto às aulas de Geometria, e seus resultados na prova de conhecimentos, a fim de favorecer uma maior simpatia pelas aulas e, conseqüentemente, um maior aprendizado.

Alguma fotos do minicurso a seguir: Figura 33,34 e 35.

Figura 33 – Alunos em sala vídeo, realizando os questionários iniciais. Primeiro dia de curso.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 34 – Alunos em aula. Segundo dia de curso.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Alunos deixando a sala de aula, depois do Teste Final. Terceiro dia de curso.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.3.3 Participantes

Um total inicial de 70 alunos do 3º ano do ensino médio se inscreveram para participar desta pesquisa, com idades de 15 a 19 anos. Os alunos se inscreveram no curso de forma voluntária entre 5 turmas as quais leciono. Dos 70 alunos apenas 18 frequentaram todos os dias do curso, existindo uma rotatividade em média de 24 alunos por aula. Todos os responsáveis assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido. (Apêndice H)

5.3.4 Dados coletados do questionário socioeconômico

De acordo com os dados coletados no questionário socioeconômico dos 18 alunos encontramos os dados a seguir:

A maioria são mulheres entre os alunos pesquisados, conforme a tabela 1. Com

61,1% de mulheres e 38,9% de homens.

Tabela 1: Sexo

Sexo	Frequência	Porcentagem
Feminino	11	61,1%
Masculino	7	38,9%

Fonte: Dados da pesquisa.

Com relação as idades temos alunos com 17 anos em sua maioria.

Quanto ao nível de escolaridade da mãe, ilustrado na Tabela 2, é possível observar que: 7 (39%) cursaram o ensino médio e 6 (33%) cursaram da 6^a à 9^a série do ensino fundamental,

Tabela 2: Escolaridade da mãe

Nível de Escolaridade	Frequência	Porcentagem
Da 1 ^a à 5 ^a série do ensino fundamental	1	6%
Da 6 ^a à 9 ^a série do ensino fundamental	6	33%
Ensino médio incompleto.	2	11%
Ensino médio completo.	7	39%
Ensino superior incompleto.	0	0%
Ensino superior completo.	0	0%
Não sei	2	11%

Fonte: Dados da pesquisa.

No que diz respeito aos pais, como se pode ver na Tabela 3: 5 (28%) completaram o ensino médio, mas 5 (28%) não tem conhecimento sobre o histórico escolar do pai.

Tabela 3: Escolaridade do pai

Nível de Escolaridade	Frequência	Porcentagem
Da 1 ^a à 5 ^a série do ensino fundamental	3	17%
Da 6 ^a à 9 ^a série do ensino fundamental	3	17%
Ensino médio incompleto.	0	0%
Ensino médio completo.	5	28%
Ensino superior incompleto.	2	11%
Ensino superior completo.	0	0%
Não sei	5	28%

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto a renda familiar, apontam na Tabela 4 que 7 (39%) possuem até 1 salário mínimo e que 7 (39%) tem de 1 a 2 salários mínimos.

Tabela 4: Renda familiar

Renda	Frequência	Porcentagem
Até 1 salário mínimo.	7	39%
De 1 a 2 salários mínimos .	7	39%
De 2 a 5 salários mínimos.	3	17%
Mais de 5 salários mínimos.	1	6%
Não sei informar	0	0%

Fonte: Dados da pesquisa.

No que se refere ao número de pessoas que residem na mesma casa ou apartamento, inclusive com o aluno, os resultados seguem de acordo com a Tabela 5: 5 (28%) das residências contêm 4 moradores e em 4 (22%) são residências de 2 moradores.

Tabela 5: N° de pessoas que moram na mesma casa.

N° de moradores	Frequência	Porcentagem
2	4	22%
3	3	17%
4	5	28%
5	3	17%
Mais de 5	2	11%

Fonte: Dados da pesquisa.

A Tabela 6 apresenta que a maioria dos alunos, 8 (44%), estudaram parte em escola pública e parte em escola particular.

Tabela 6: Tipo de escola na qual estudou.

N° de moradores	Frequência	Porcentagem
Somente em escola pública.	5	28%
Parte em escola pública e parte em escola particular.	8	44%
Somente em escola particular.	5	28%

Fonte: Dados da pesquisa.

Na Tabela 7, podemos ver que a pesquisa também se preocupou em saber qual o número de alunos que já ficaram de recuperação e já reprovaram alguma disciplina. No total 12, (67%) alunos já ficaram de recuperação em alguma disciplina e 6 (33%) dos alunos ficaram de recuperação em Matemática, ou seja dos que já ficaram de recuperação, 50% ficaram em Matemática. No que se refere a reprovação em alguma matéria, 4 (22%) dos alunos ficaram reprovados, o que coincide com o número de alunos reprovados em Matemática. Ou seja, 100% dos alunos que reprovaram alguma disciplina, reprovaram em Matemática.

Tabela 7: N° de alunos na recuperação e reprovados.

Recuperação e reprovação	Frequência	Porcentagem
Recuperação em alguma matéria	12	67%
Recuperação em Matemática	6	33%
Reprovado em alguma matéria	4	22%
Reprovado em Matemática	4	22%

Fonte: Dados da pesquisa.

5.3.5 Dados coletados do Questionário Motivacional I

Foi perguntado ao aluno quantas horas ele se dedicava aos estudos. De acordo com a Tabela 9, a maioria dos alunos (44%) estudam entre uma e duas horas por dia.

Tabela 8: N° de horas por dia de estudo.

N° h/d de estudo	Frequência	Porcentagem
Somente no horário da aula	3	17%
Menos de 1 hora	4	22%
Entre 1 e duas horas	8	44%
Entre duas e quatro horas.	2	11%
Mais de quatro horas	1	6%

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação a auto-avaliação, 10 (56%) dos alunos acreditam que são alunos com notas entre 6 e 8. Nenhum aluno se considera abaixo de 6, 7 (39%), se auto avaliaram com 6 e somente 1 (6%) acredita estar entre o 8 e o 10.

Tabela 9: Auto-Avaliação

Nota	Frequência	Porcentagem
Menos de 6	0	0%
6	7	39%
Entre 6 e 8	10	56%
Entre 8 e 10	1	6%

Fonte: Dados da pesquisa.

Foi perguntado aos alunos se eles se achavam diferentes em relação aos colegas quando o assunto é estudo e 7 (39%) acreditam que seus colegas não parecem se importar tanto, 9 (50%) acreditam que todos estão muito preocupados com os estudos e apenas 2 (11%) percebem os colegas mais preocupados. 10 (56%) dos alunos se interessam mais pelo estudo em grupo enquanto 8 (44%) preferem estudar sozinhos.

Com relação a importância da Matemática na vida do aluno a maioria, num total de 11 (61%), deu nota entre 8 e 10.

Tabela 10: Importância da Matemática

Nota	Frequência	Porcentagem
Menos de 6	0	0%
6	1	6%
Entre 6 e 8	11	61%
Entre 8 e 10	6	33%

Fonte: Dados da pesquisa.

Foi perguntado aos alunos sobre o grau de motivação em participar do minicurso. 13 (72%) garantiram estar muito motivados.

Tabela 11: Grau de motivação

Grau de Motivação	Frequência	Porcentagem
Desmotivado	0	0%
Indiferente	0	0%
Motivado	5	28%
Muito motivado	13	72%

Fonte: Dados da pesquisa.

Uma pergunta muito importante foi quanto a questão de conhecer ou não Geometria. Afirmam ter conhecimento em Geometria 15 (83%) dos alunos contra 3 (17%) que não se lembram do que este conceito representa e não conseguem comentar ou fazer alguma referência sobre o assunto.

Tabela 12: Conhecimento em Geometria

	Frequência	Porcentagem
Sim	15	83%
Não	3	17%

Fonte: Dados da pesquisa.

A maioria dos alunos afirmaram gostar de Matemática. Tanto os 11 (61%) que afirmaram gostar de Matemática, assim como os 7 (39%) que relataram não gostar da matéria, acreditam que podem melhorar sua afinidade com a disciplina.

Melhorar nos estudos, aprender mais Geometria, se dedicar e se concentrar nas aulas, além de revisar conhecimentos, diminuir dificuldades e se preparar para o ENEM são alguns dos objetivos e expectativas relatadas pelos alunos do minicurso.

5.4 Procedimentos: Sequência didática

O trabalho foi realizado em 3 dias no turno da manhã em um total de 6 horas de aula. Ao início de todas as aulas foram passados vídeos motivacionais (Veja 6.3.1.).

5.4.1 Cronograma

Tabela 13: Cronograma

9/4	AULA 1	PRÉ-TESTES, QUESTIONÁRIO SOCIECONÔMICO
10/4	AULA 2	REVISÃO DOS CONCEITOS JÁ VISTO EM ANOS ANTERIORES
12/4	AULA3	NOVOS CONCEITOS, TEOREMA DE BORSUK E PÓS-TESTES

Fonte: Dados da pesquisa.

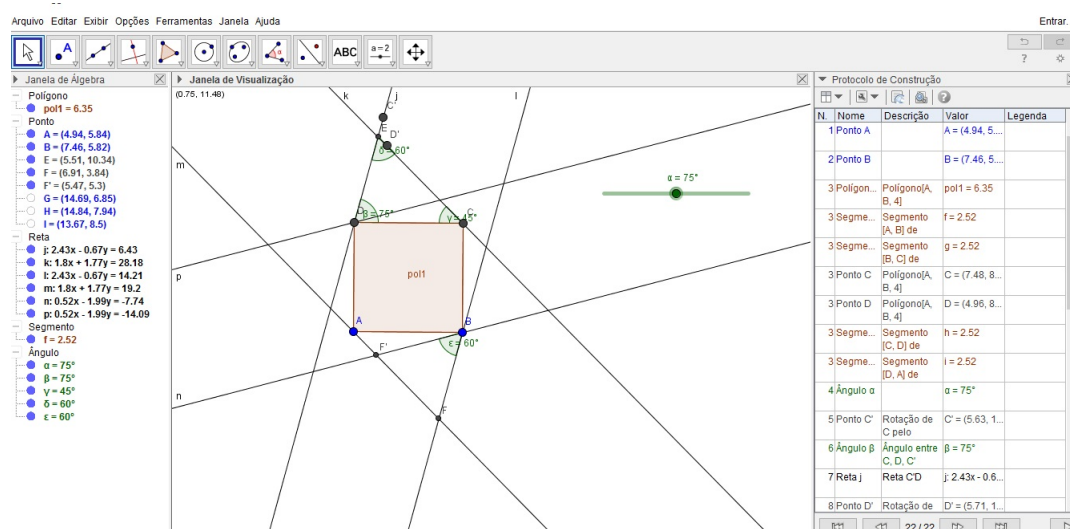
AULA 1: Os participantes foram convidados a responder, anonimamente, um questionário socioeconômico (Apêndice A), de forma individual, com 11 perguntas em um tempo aproximado de vinte minutos, juntamente com o Questionário Motivacional I (Apêndice B), com 11 questões. Avaliamos também por meio de um Pré-Teste (Apêndice C) o conhecimento prévio dos alunos em conceitos fundamentais de Geometria, indispensáveis para a AULA 3 (Noções primitivas de geometria plana, segmentos de reta, ângulos, classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos, congruência de triângulos, relação de Pitágoras e relações trigonométricas no triângulo retângulo, estudo dos quadriláteros, diferença entre regiões côncavas e convexas, polígonos, circunferência e seus elementos...). Esse teste tem 12 questões e foi dado um tempo de 20 minutos para sua resolução. Os alunos foram informados da importância de revisar alguns assuntos antes das aulas a fim de se prepararem para abordagem de um conteúdo novo. Um material de apoio foi entregue (Apêndice D), a fim de dar início, na segunda aula, à revisão dos conceitos básicos já conhecidos por alguns.

AULA 2: Ministramos uma aula teórica com apoio do Apêndice D e fizemos uma revisão sobre o assunto. Com o propósito de superar as dificuldades iniciais encontradas no Pré-Teste corrigimos algumas questões do mesmo. A aula durou 2 horas e os alunos levaram para casa o material de apoio da próxima aula (Apêndice E).

AULA 3: Na terceira e última aula, os alunos finalmente conheceram conceitos novos como diâmetro de uma figura qualquer, reta de apoio, hexágono centrossimétrico e chegaram ao número de Borsuk no plano para figuras fechadas. Por duas horas foram trabalhados estes conceitos. Para o Lema de Pall foi utilizado um software (GEOGEBRA) para que os alunos visualizassem com clareza as retas de apoio em uma figura e entendessem o processo de construção. Veja Figura 36 e 37.

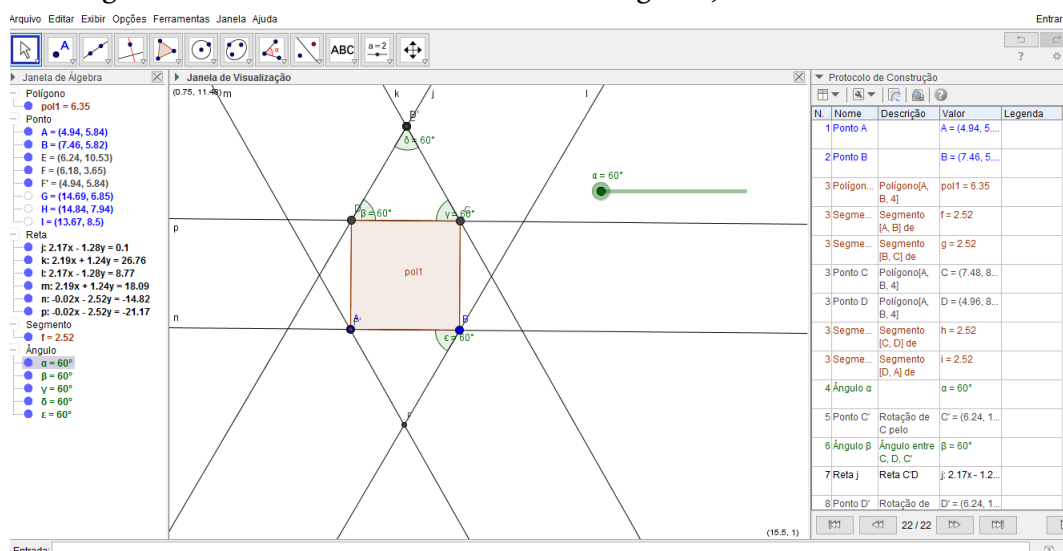
Além disso, observaram o hexágono centrossimétrico e visualizaram que o comprimento entre seus lados paralelos é o próprio diâmetro da figura. Foi dado um intervalo de 20 minutos e no retorno os alunos realizaram o Questionário Motivacional II (Apêndice F) e um Teste Final (Apêndice G) sobre os conhecimentos vistos no curso. Todo o material das aulas foi elaborado pelo autor da pesquisa.

Figura 36 – Lema de Pall animado no Geogebra,1.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Lema de Pall animado no Geogebra,2.



Fonte: Elaborada pelo autor.

6 RESULTADOS DO PRÉ TESTE, TESTE FINAL E QUESTIONÁRIO MOTIVACIONAL II .

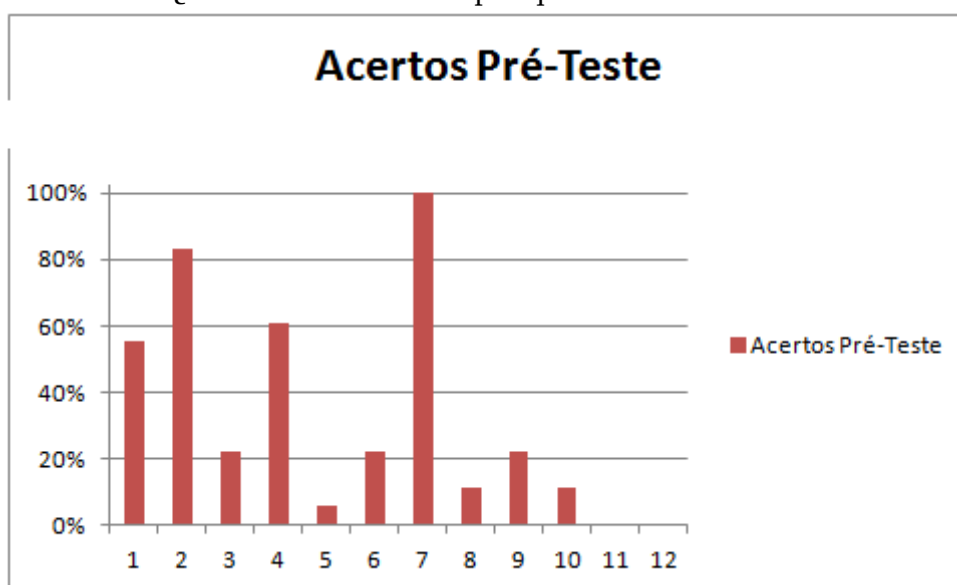
Esta sessão se refere as análises dos testes de conhecimento geométricos no início e fim do curso, além do Questionário Motivacional. Os resultados do Pré-teste e Teste final serão descritos a partir de gráficos quantitativos, seguidos de suas respectivas análises qualitativas.

6.1 Resultados do Pré-Teste

O Pré-Teste (Apêndice C) possui 12 perguntas, sendo 8 objetivas e 4 subjetivas. Este apresentou a seguinte quantidade de acertos nas questões. Veja Gráfico 1.

Primeira questão: Temos que 10 (56%) dos alunos acertaram essa questão. São

Gráfico 1 – Quantidade de acertos por questão no Pré-Teste.



Fonte: Elaborado pelo autor.

conhecimentos básicos sobre reta, ângulos e segmentos.

Segunda questão: A questão fazia referência aos polígonos regulares e exigia somente a nomenclatura dos mesmo. 15 (83%) dos alunos acertaram essa questão.

Terceira questão: Apenas 4 (22%) foram capazes de calcular a soma dos ângulos internos e externos de um heptágono. Muitos desconhecem as fórmulas para os cálculos.

Quarta questão: Apesar de a maioria não conhecer as fórmulas da soma dos ângulos internos, a soma dos ângulos internos de triângulos e quadriláteros já são de conhecimento prévio de 11 (61%) dos alunos.

Quinta questão: Ao trabalhar com conceitos de quadriláteros, círculo e circunferência apenas 1 (6%) aluno foi capaz de julgar todas as alternativas de forma exata. É válido analisar que a alternativa *b* e *c* não foram marcadas por nenhum aluno, concluindo que todos acreditam e tem em mente a noção de diâmetro na circunferência, já que as alternativas *a*, *b*, e *e* julgam que o diâmetro na circunferência é a corda que passa pelo seu centro.

Sexta questão: 4 (22%) compreendem a relação de congruência de triângulos.

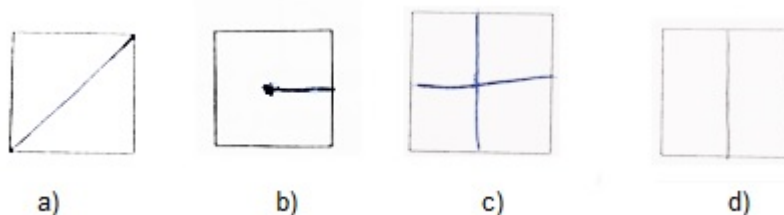
Sétima questão: 18 (100%) dos alunos foram capazes de reconhecer posições relativas de retas: concorrentes, perpendiculares, paralelas e coincidentes.

Oitava questão: 2 (11%) dos nossos participantes acertaram a questão referente

as relações trigonométricas no triângulo retângulo. Ponto muito importante para demonstração posterior de consequências do Teorema de Borsuk.

Nona questão: Procura definir o diâmetro em um quadrado. Alguns dos segmentos traçados pelos alunos, no quadrado, estão representados a seguir: Veja Figura 38.

Figura 38 – Respostas de alunos, questão 9, Pré-Teste.

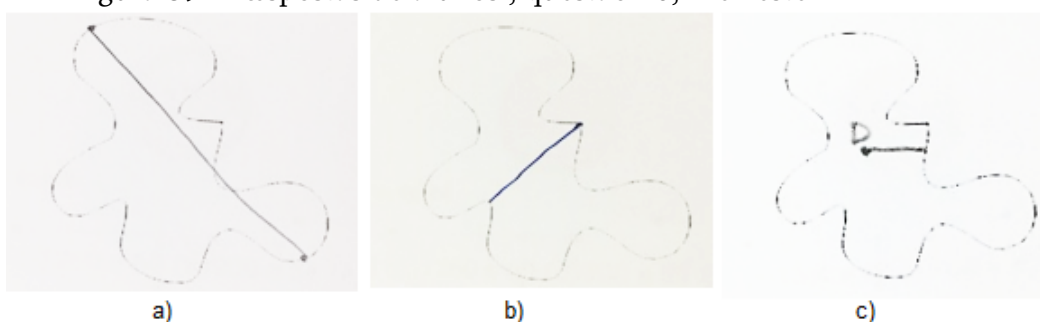


Fonte: Elaborada pelo autor.

A questão 9 procura fazer o aluno investigar um conceito ainda não visto por ele. Em geral os alunos não conseguem definir o conceito de diâmetro para o quadrado, mas 4 (22%) conseguiram relacionar a maior distância num quadrado com sua diagonal. Podemos ver na Figura 38 em a). Em b), c) e d) vemos três tipos de figuras apresentadas por 6 (33%) alunos que se preocupam apenas em passar o diâmetro pelo centro da figura, esquecendo que estes segmentos não são o de maior comprimento. Por fim, 8 (44%) alunos não desenharam nenhum segmento.

Décima questão: Alguns dos segmentos traçados pelos alunos, na questão 10 estão representados a seguir, na Figura 39.

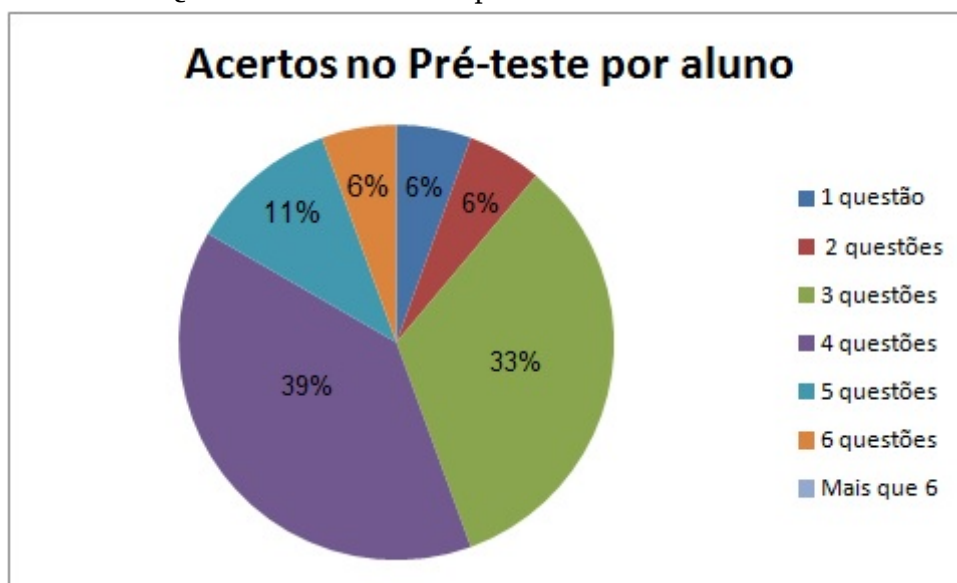
Figura 39 – Respostas de alunos, questão 10, Pré-Teste



Fonte: Elaborada pelo autor.

A questão 10 versa ampliar o conceito de diâmetro de um polígono para uma figura plana fechada qualquer. Apenas 2 (11%) alunos conseguiram compreender e criar intuitivamente um diâmetro para a figura em a). Veja Figura 39. Ainda criando uma ligação entre o “centro” da região com o diâmetro, 5 (28%) criaram segmentos como nas opções b) e c). Desta vez 11 (61%) não desenharam nenhum segmento, haja vista que o nível de dificuldade é maior.

Gráfico 2 – Quantidade de acertos por aluno no Pré-Teste.



Fonte: Elaborado pelo autor.

As questões 11 e 12 trabalharam conceitos que envolvem o $a(F)$. Nenhum dos alunos foi capaz de resolver. Coube a estes esperar até a próxima aula para saber do que se tratava ou pesquisar em casa na internet ou no material que lhes foi fornecido. (Apêndice E)

Em relação a quantidade de acertos por aluno, temos que o aluno que fez mais questões, acertou 4 (39%) e o que fez menos acertou uma (6%), como podemos ver no Gráfico 2. É possível observar que nenhum aluno acertou mais que 6 questões. Ou seja, nenhum aluno fez mais que 50% da prova.

6.2 Resultados do Teste Final

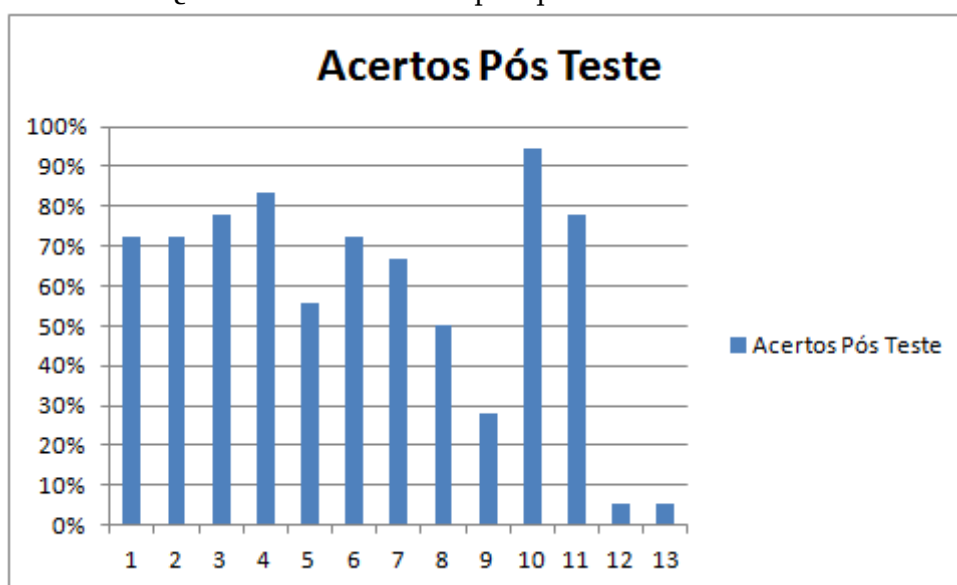
O Teste Final (Apêndice G) possui 13 perguntas, sendo 9 objetivas e 4 subjetivas. Esse apresentou a seguinte quantidade de acertos nas questões: Veja Gráfico 3.

Questão 1: Ao definir o diâmetro de um polígono regular, podemos verificar que 13 (72%) alunos acertaram, passando a corda pela diagonal da figura, entendendo portanto o diâmetro em um polígono regular.

Vale ressaltar também que 5 (28%) alunos conseguiram definir o diâmetro no polígono regular enquanto 8 (44%) mostraram ter alguma noção, mas se equivocaram ao falar de centro. 5 (28%) deixaram a definição do conceito em branco. Algumas das respostas dadas pelos alunos estão representados na Figura 40.

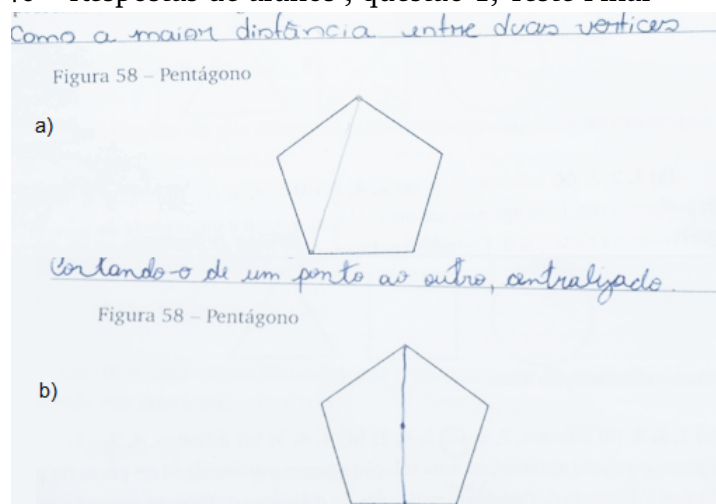
Observe que em a) o aluno definiu e criou o segmento corretamente, já em b) o aluno ainda acredita que o diâmetro tem relação com o centro. Encontramos também alunos que definiram corretamente mas traçaram o diâmetro passando pelo centro. Além do mais,

Gráfico 3 – Quantidade de acertos por questão no Teste Final



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 40 – Respostas de alunos , questão 1, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

alguns alunos não conseguiram definir, mas conseguiram traçar o segmento corretamente.

Questão 2: Procura-se nesta questão sair do diâmetro de polígonos regulares e criar o diâmetro em figuras planas quaisquer. Podemos verificar que 13 (72%) alunos acertaram a alternativa correta.

Questão 3: Nesta questão dividi-se o círculo em duas regiões por meio de uma corda e 14 (78%) dos alunos foram capazes de entender qual corda representaria o diâmetro de cada região.

Questão 4: 15 (83%) dos alunos conseguiram compreender quantos pares de pontos realizam a distância no círculo, no quadrado e no triângulo regular.

Questão 5: Trabalhou o número de pares de pontos que formam o diâmetro em um polígono regular. 10 (56%) acertaram essa questão.

Questão 6: A fim de verificar se o aluno consegue apresentar uma forma de dividir o círculo segundo o Teorema de Borsuk, 13 (72%) representaram a forma correta.

Questão 7: A questão visa analisar o $a(F)$ na elipse, no quadrado e no triângulo regular. 12 (67%) souberam resolver esta questão.

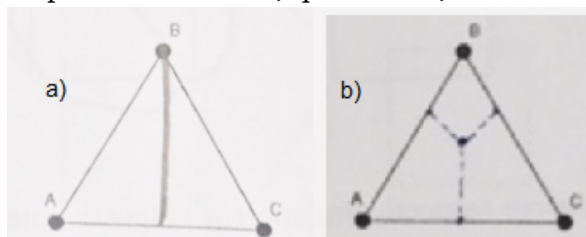
A fim de trabalhar com relações trigonométricas no triângulo retângulo envolvendo diâmetro de figuras, as questões 8 e 9, por exigirem mais cálculo, tiveram 9 (50%) e 5 (28%) de acertos, respectivamente. Um decréscimo de resultados em relação as questões anteriores. Esta dificuldade em trabalhar com as funções trigonométricas no triângulo retângulo já haviam sido constatadas no Pré-Teste onde apenas 2 alunos haviam acertado.

Questão 10: Resgata para o aluno o Lema de Pall, utilizado por Borsuk para mostrar seu teorema na dimensão 2. 17 (94%) dos alunos mostraram conhecer o hexágono de Pall. Podemos concluir que o uso da demonstração do software GEOGEBRA contribuiu para a fixação desse conteúdo, baseado que alguns afirmaram visualizar o lema somente após a verificação do software.

Questão 11: Nas questões 11 e 12 do Pré-Teste pedimos que o aluno dividisse um círculo no menor número de regiões, de forma que o diâmetro de cada região fosse menor que d , porém nenhum aluno acertou. O mesmo foi feito na questão 11 do Teste Final, para um triângulo regular. 14 (78%) dos alunos conseguiram realizar uma divisão seguindo o Teorema de Borsuk.

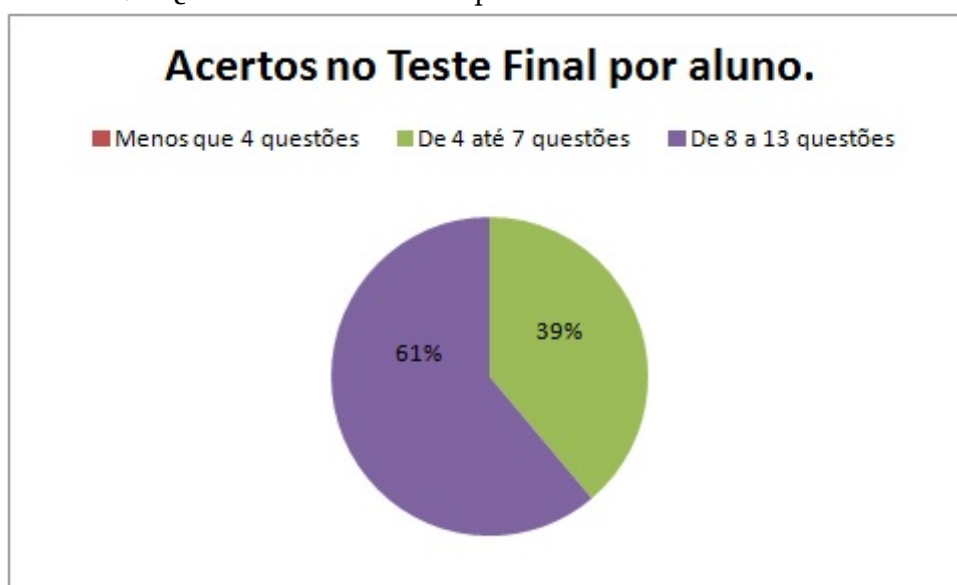
Algumas das respostas dadas pelos alunos estão representados na Figura 42. Observe que em a) o aluno não compreendeu ainda o diâmetro do triângulo equilátero e não conseguiu fazer a divisão. Novamente ele associa ao centro. Já em b) temos um resultado positivo feito pela maioria dos participantes da pesquisa.

Figura 41 – Respostas de alunos , questão 11, Teste Final



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 4 – Quantidade de acertos por aluno no Teste Final



Fonte: Elaborado pelo autor.

Questão 12: Esta questão apresentou-se com um maior nível de dificuldade já que foi pedido ao aluno demonstrar que toda figura plana de diâmetro d pode ser dividida em três partes, onde o diâmetro de cada região não será maior que $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. Apenas 1 (6%) acertou, 13 (72%) tentaram fazer a questão sem sucesso e apenas 4 (22%) não tentaram fazer a questão. É importante salientar que a maioria dos alunos procurou investigar a solução do problema, mesmo sem obter o resultado esperado, foi válido.

Questão 13: Foi pedido que explicassem o porquê de não poder dividir o círculo representado em três partes, de modo que cada parte tenha um diâmetro menor que $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. Apenas 1 (6%) apresentou a resposta correta. O mesmo aluno que respondeu corretamente a questão 12 conseguiu realizar a questão 13.

Em relação a quantidade de acertos por aluno, o aluno que fez mais questões, acertou 12 (6%) e o que fez menos acertou 4 questões (17%). Como podemos ver no Gráfico 4, houve um avanço considerável já 11 (61%) alunos acertaram entre 8 e 12 questões no Teste Final tendo em vista que nenhum aluno realizou mais da metade da prova no Pré-Teste. Veja Gráfico 2.

6.3 Resultado do Questionário Motivacional II

Foi perguntado aos alunos qual o grau de atenção durante as aulas. 12 (67%) afirmaram estar atentos enquanto 6 (33%) confessaram estar parcialmente atentos. Ver Tabela 14.

Foi perguntado ao aluno se ele estudou o conteúdo, durante esse período do minicurso. 6 (33%) afirmaram ter estudado e 12 (67%) confessaram que não estudaram. 12 (67%) deram nota de 8 a 10 para o curso enquanto 6 (33%) atribuíram nota entre 6 e 8.

Tabela 14: Grau de Atenção durante o curso

	Frequência	Porcentagem
Não	12	67%
Sim	6	33%

Fonte: Dados da pesquisa.

Veja na Tabela 15 sobre o grau de dificuldade que afirmaram ter:

Tabela 15: Grau de dificuldade quanto ao curso

	Frequência	Porcentagem
Pouca	13	72%
Não teve dificuldade	0	0%
Muita dificuldade	5	28%

Fonte: Dados da pesquisa.

5 (28%), dos 6 (6%) alunos que afirmaram estudar o conteúdo em casa, relataram que tiveram pouca dificuldade durante o curso.

Vale ressaltar que embora 15 alunos (83%) tenham afirmado acessar a internet com frequência, somente 5 (17%) pesquisaram sobre o assunto.

18 alunos (100%) acreditam que esclareceram alguns conceitos fundamentais de Geometria e relataram que o curso atendeu a suas expectativas.

Uma sugestão dos alunos em geral foi que o curso tivesse mais horas, a fim de detalhar e aprofundar o assunto, além de resolver mais exercícios. Sugeriram também uma aula em Geometria Espacial.

6.3.1 Ações Motivacionais

São vários os motivos que levam um aluno a se distanciar dos estudos. A motivação pode ser trabalhada, para que jovens sintam-se entusiasmados em estudar e participar das aulas. A motivação é de fundamental importância no que se refere ao processo de aprendizagem em sala de aula. Os vídeos apresentados ao início das aulas do minicurso “Teorema de Borsuk” procuraram despertar o interesse dos alunos, motivando-os para as aulas.

Para o primeiro dia de aula foi apresentado o vídeo “Aprender a Aprender”, em torno de 8 minutos. O vídeo mostra a impaciência do aluno mas também sua curiosidade em seguir os ensinamentos do seu mestre. O mestre tem uma aparência rude mas um olhar cativante. Além do mais, existe uma energia (em forma de luz) no vídeo, que reforça a relação entre o mestre e o aluno. Os personagens não falam, apenas demonstram sensações

e praticam ações, o que abre um grande leque de interpretações, promovendo uma boa discussão. Veja Figura 42.

Figura 42 – Alunos assistindo o vídeo "Aprendendo a Aprender".



Fonte: Elaborada pelo autor.

A própria pessoa do professor pode ser uma fonte de motivação importantíssima. O tipo de relação que estabelecemos com os alunos pode gerar uma confiança e um aumento da atenção que são condições indispensáveis para a aprendizagem. (Fita, 2003)

Alguns de nossos alunos adquirem uma aversão aos estudos, pois em certo momento tiraram notas baixas e portanto passam a duvidar de suas capacidades.

O vídeo, do segundo dia de aula, refere-se a um resumo do filme “Mãos Talentosas”, cerca de 7 minutos. Este fala da história de Benjamin Carson, um garoto pobre, que tirava notas baixas na escola e sofria insultos constantes de seus colegas, por este motivo. Sua mãe foi uma grande incentivadora a fim de que ele estudasse e melhorasse suas notas. Benjamin Carson tornou-se um neuro-cirurgião famoso quando realizou a separação de gêmeos siameses, unidos pela cabeça, na década de 80.

Alunos desmotivados estudam muito pouco ou nada e, conseqüentemente, aprendem muito pouco. Em última instância, aí se configura uma situação educacional que impede a formação de indivíduos mais competentes para exercerem a cidadania e realizarem-se como pessoas, além de se capacitarem a aprender pela vida afora. (Bzuneck, 2001)

O vídeo da última aula, trata-se do resumo do filme “Como estrelas na Terra”, cerca de 12 minutos. A história aborda sobre um garoto que sofre de dislexia e tira várias notas baixas. Com a possibilidade de sair da escola, em que estudava, o menino sente-se deprimido e desmotivado a estudar, deixando inclusive de pintar, atividade que gostava de praticar. Um professor, ao decorrer do filme revela apresentar o mesmo problema que o

garoto, identifica o problema do aluno e ajuda-o. Ele volta a pintar e ganha um prêmio da escola.

Acreditamos que os vídeos, assim como as reflexões proporcionadas, foram eficazes como ferramenta de interação entre os membros do minicurso durante as discussões, criando um ambiente em que os alunos sentiram que faziam parte e que poderiam colaborar.

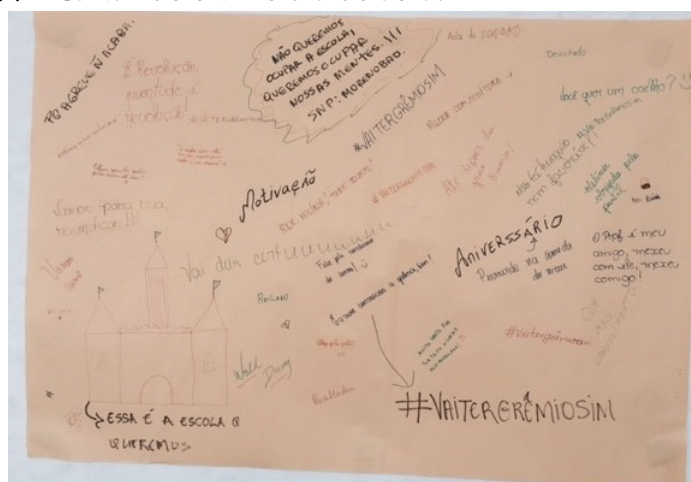
No primeiro e no último dia de curso, um cartaz foi fixado na entrada das salas para que os alunos pudessem de forma voluntária expressar seus sentimentos. As diferenças são bastante notáveis.

Figura 43 – Cartaz do primeiro dia de aula.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 44 – Cartaz do último dia de aula.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 43 observa-se que poucos alunos sentiram-se a vontade para escrever no mesmo. Alguns sentiram-se confiantes mas alguns ainda tinham receio quanto ao curso.

Na Figura 44, último dia de curso, nota-se a maior participação de alunos, motivados, principalmente com as questões da greve dos professores, momento em que foi realizado o minicurso. Ver mais em 6.4.

6.4 Problemas encontrados.

A atividade foi realizada em período de greve dos professores do estado do Ceará e diante disto alguns alunos desistiram do curso.

Inicialmente, o curso teria 2 horas a mais de aula, a fim de resolver mais exercícios, aprofundar o assunto e mostrar detalhadamente o Lema de Pall. Entretanto, não foi possível em virtude de inúmeras ocupações de escolas estaduais, realizadas pelos alunos da rede pública estadual, no período de greve.

O Colégio Jenny Gomes funciona em um espaço cedido pela Base Aérea de Fortaleza, portanto não pertence ao estado e uma possível ocupação traria transtorno para a Base Aérea de Fortaleza, já que esta realiza inúmeros concursos aos fins de semana entre outras atividades no espaço da escola. A fim de evitar possíveis conflitos, reduzimos as aulas para que o curso não fosse um pretexto para alunos entrarem na escola e ocuparem.

7 CONCLUSÃO

Conhecimentos prévios dos alunos devem ser detectados pelos professores durante o processo de ensino. Deve-se planejar questionários ou outros métodos com esse objetivo. Com isso, garantimos que os alunos reflitam o que já sabem e relacionem o conhecimento antigo a um novo conceito, por meio da investigação, a fim de seguir no aprendizado.

"Para que uma aprendizagem significativa possa acontecer, é necessário investir em ações que potencializem a disponibilidade do aluno para a aprendizagem, o que se traduz, por exemplo, no empenho em estabelecer relações entre seus conhecimentos prévios sobre um assunto e o que está aprendendo sobre ele." (PCN, 1998)

Professores de Matemática, frequentemente, deparam-se diante de conteúdos de Geometria interessantes, mas logo desanimam ao perceber que a motivação dos alunos é de longe parecida com a deles, visto que estes carregam consigo muitas dúvidas básicas em geometria, que se tornam entraves para um novo conceito.

Ao início do minicurso Teorema de Borsuk, 72% dos alunos afirmaram estar motivados a participar do curso. Ao fim, 100% dos alunos revelaram satisfação com o mesmo. Embora apenas 28% tenham revelado estudar em casa sobre o conteúdo, 72% afirmaram apresentar pouca dificuldade em entender os conceitos do Teorema de Borsuk.

A greve dos professores do estado ocasionou a grande desistência dos alunos na participação do minicurso e implicou na redução de aula, devido a possíveis ocupações na escola. Caso o curso tivesse se estendido em mais duas horas, seria possível avançar em conceitos como relações métricas no triângulo retângulo, usada na prova de Borsuk, já que apenas dois alunos acertaram no Pré-Teste a questão relativa a este assunto. No Teste-Final, 5 alunos acertaram duas questões relativas ao mesmo assunto. Mostrando uma dificuldade prévia dos alunos em relação a este conceito que persistiu em pelo menos 50% dos alunos. No geral, 0% realizou mais da metade do Pré-Teste, enquanto no Teste Final 61% alunos acertaram entre 8 e 12 questões, mostrando um grande avanço.

O Teorema de Borsuk, assim como seus elementos envolvidos, Lema de Pall e Lebesgue são partes interessantes da Matemática que ainda podem ser muito exploradas.

O minicurso estimulou o conhecimento prévio do aluno antes de abordar novos conceitos, possibilitando-o uma melhor investigação.

O principal referencial teórico deste trabalho foi o livro "Division de Figuras en Partes Menores" de V.G. Boltianski e I.Ts. Gojberg.

Alguns trabalhos futuros podem ser discutidos como: Utilização do Geogebra para o passa-a-passo do lema de Pall, investigar para que valores do plano $a(F)=2$ e $a(F)=3$ e fazer um estudo do Teorema de Borsuk na terceira dimensão, tanto para resgatar elementos principais da Geometria Espacial, como para explorar algo desconhecido pelos alunos do ensino médio, com elaborações de seqüências didáticas significativas para os mesmos.

REFERÊNCIAS

AIGNER, Martin; ZIEGLER, **Gunter M. Proofs from THE BOOK**. 4. ed. Springer.

APRENDENDO A APRENDER. Direção: Josh Burton. Savannah College of Art and Design, 2005. 8 minutos. Disponível em: < <https://www.youtube.com/watch?v=Pz4vQMEmzI> > Acesso em: 15 març. 2016.

BAEZ, BAGDASARYAN e GIBBS. **The Lebesgue Universal Covering Problem**. 6. ed. Journal of Computational Geometry, 2015. Disponível em: <<http://math.ucr.edu/home/baez/covering.pdf>>. Acesso em: 1 abr. 2016.

BOLTIANSKI, V.G.; GOJBERG, I.Ts. **División de figuras en partes menores**. Editorial Mir Moscú, 1973.

BZUNECK, J. A. **Motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2001. p. 9-36

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC /SEF, 1998.

CIPRA, Barry. **Disproving the Obvious in Higher Dimensions**, What's Happening in the Mathematical Sciences, 1993, v.1. 21-29.

COMO ESTRELAS NA TERRA. Direção: Aamir Khan. Índia, 2007. 165 minutos. Trechos disponíveis em: < <https://www.youtube.com/watch?v=XduMcfpePE> > Acesso em: 15 març. 2016. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de Matemática 9 Elementar**. 7.ed. São Paulo: Atual, 1993.

FERNANDES, Elisângela et al. **O que cada um sabe é a ponte para saber mais, Nova Escola**. Edição 248, dezembro 2011. Disponível em: < <http://revistaescola.abril.com.br/formacao/formacao-continuada/conhecimento-previo-esquemas-acao-piaget-621931.shtml?page=all> >. Acesso em: 11 abr. 2016.

LIMA, E.L. **Análise Real, Volume 1**. Rio de Janeiro, 1993. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar Geometria?**, A Educação Matemática em Revista. São Paulo: SBEM, 1995, v.4. p. 3-13 Disponível em:
<http://professoresdematematica.com.br/wafiles/02OPOR20QUE20NAO20ENSINAR20GEOMETRIA.pdf>> Acesso em: 2 de mai. 2016.

MÃOS TALENTOSAS. Direção: Thomas Carter, Roteiro: John Pielmeier, Produção: Bruce Stein, Erin Keating, Margaret Loesch. Sony Pictures, 2009. 86 minutos Trechos disponíveis em: < <https://www.youtube.com/watch?v=Ee0cZRZ4G4Y>> Acesso em: 15 març. 2016.

MATOUSEK, Jiří. **Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra**, American Mathematical Society (AMS), 1991.

O'CONNOR e SANNOMYA, **Karol Borsuk**. Disponível em:
<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Borsuk.html>>. Acesso em: 2 abr. 2016.

PIAGET, Jean. **Problemas de psicologia genética**. In: PIAGET, J. col. Os Pensadores. São Paulo: Victor Civita, 1983, p.209-293.

School of Mathematics and Statistics University of St Andrews, Scotland. **Karol Borsuk**, Disponível em: <<http://www.learn-math.info/portugal/historyDetail.htm?id=Borsuk>> Acesso em: 12 abr. 2016.

STIPEK, D. J. **Motivation to learn: from theory to practice**. New York: Viacon, 1998.

TÁPIA, J.A; FITA, E.C; **A motivação em sala de aula. O que é, como se faz**. Edições Loyola, SP, 2006.

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO SOCIOECONÔMICO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC PROGRAMA DE MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA. DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS

Responda as perguntas abaixo com sinceridade de acordo com suas ideias e vivências.

1. Qual o seu sexo? (A) Feminino. (B) Masculino.
2. Qual a sua idade? (A) 15 anos. (B) 16 anos. (C) 17 anos. (D) 18 anos. (E) 19 anos. (F) Mais de 19 anos.
3. Quantas pessoas moram em sua casa? (Contando com seus pais, irmãos ou outras pessoas que moram em uma mesma casa). (A) Duas pessoas. (B) Três. (C) Quatro. (D) Cinco. (E) Mais de cinco.
4. Até quando seu pai estudou? (A) Da 1^a à 5^a série do ensino fundamental. (B) Da 6^a à 9^a série do ensino fundamental. (C) Ensino médio incompleto. (D) Ensino médio completo. (E) Ensino superior incompleto. (F) Ensino superior completo. (G) Não sei.
5. Até quando sua mãe estudou? (A) Da 1^a à 5^a série do ensino fundamental. (B) Da 6^a à 9^a série do ensino fundamental. (C) Ensino médio incompleto. (D) Ensino médio completo. (E) Ensino superior incompleto. (F) Ensino superior completo. (G) Não sei.
6. Somando a sua renda com a renda das pessoas que moram com você, quanto é, aproximadamente, a renda familiar? (Considere a renda de todos que moram na sua casa.) (A) Até 1 salário mínimo. (B) De 1 a 2 salários mínimos. (C) De 2 a 5 salários mínimos. (D) Mais de 5 salários mínimos. (E) Não sei informar.
7. Em que tipo de escola você cursou o ensino fundamental? (A) Somente em escola pública. (B) Parte em escola pública e parte em escola particular. (C) Somente em escola particular. (D) Outro.

8. Você já ficou de recuperação? (A)Sim (B)Não
9. Você já ficou de recuperação em Matemática? (A)Sim (B)Não
10. Você já reprovou alguma disciplina? (A)Sim (B)Não
11. Você já reprovou a disciplina de Matemática? (A)Sim (B)Não

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO MOTIVACIONAL I

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC PROGRAMA DE MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA. DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS

Responda as perguntas abaixo com sinceridade de acordo com suas ideias e vivências.

1. Quantas horas por dia você se dedica aos estudos além das horas em sala de aula?
(A) Somente no horário da aula. (B) Menos de uma hora. (C) Entre uma e duas horas. (D) Entre duas e quatro horas. (E) Mais de quatro horas.
2. Que nota você se daria como estudante? (A) Menos que 6. (B) Nota 6. (C) Nota entre 6 e 8. (D) Nota entre 8 e 10.
3. Falando sobre estudar, você se acha diferente nisso dos demais colegas?
(A) Sim. Meus colegas parecem não se importar muito com os estudos. (B) Não. Assim como meus colegas não estou muito preocupado com os estudos. (C) Não. Estamos em geral muito preocupados com nossos estudos. (D) Sim. Vejo meus colegas mais preocupados que eu.
4. Você se interessa mais quando estuda sozinho ou em grupo? (A) Sozinho. (B) Em grupo.
5. Você acredita que a Matemática é importante para sua vida? Dê uma nota para o grau de importância.

(A) Menos que 5. (B) Nota 6. (C) Nota entre 6 e 8. (D) Nota entre 8 e 10.
6. Você sabe o que é Geometria? () Sim () Não
7. Indique o grau de motivação em participar deste mini-curso?

(A) Desmotivado. (B) Indiferente. (C) Motivado. (D) Muito motivado.

8. Você gosta de Matemática? Explique:

9. Você acredita que pode mudar seu ponto de vista em relação a esta disciplina?

Explique:

10. O que você entende por Geometria? Faça uma referência de algo que você já aprendeu.

11. Quais são suas expectativas com relação ao curso? O que você espera com essa experiência?

APÊNDICE C- PRÉ-TESTE

1. Marque a alternativa correta:

- (a) Ponto, reta e plano são conceitos primitivos. Eles possuem definição.
- (b) A reta tem origem mas não tem extremidade.
- (c) Ângulos complementares são ângulos cuja soma resulta em 90° .
- (d) Ângulos opostos pelo vértice são suplementares.
- (e) Segmentos congruentes não tem o mesmo tamanho.

2. Alguns polígonos convexos são: hexágono, decágono e o pentadecágono. Esses polígonos apresentam lados respectivamente:

- (a) 6, 12, 5; (b) 5, 12, 5; (c) 6, 10, 15; (d) 12, 10, 15 ; (e) 16, 10, 15.

3. A moeda de 25 centavos é um polígono regular de 7 lados chamado de heptágono. A soma do seus ângulos internos e externos são respectivamente em graus:

Figura 45 – Questão 3, Pré-Teste.

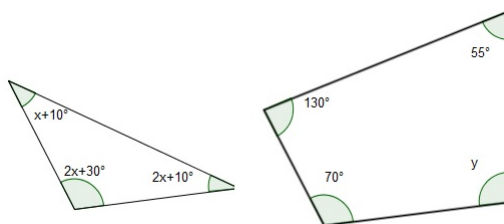


Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) 900 e 60 (b) 1080 e 51 (c) 1260 e 60 (d) 900 e 360 (e) 360 e 51

4. O valor de x e y em graus nas figuras abaixo valem respectivamente:

Figura 46 – Questão 4, Pré-Teste.



Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) 38 e 130; (b) 26 e 105; (d) 70 e 55 (e) 26 e 75.

5. Julgue os itens em V ou F:

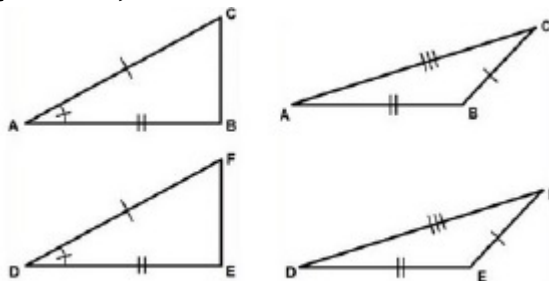
- Paralelogramos são quadriláteros que possuem lados opostos paralelos;
- Todo quadrado é losango e todo quadrado é retângulo;
- É chamado de círculo a região da circunferência juntamente com sua região interna.

- Diâmetro é a corda que passa pelo centro da circunferência.

(a)VVVV; (b)FFFF; (c)VFVV (d)VVFF; (e)FVVV.

6. Os casos de semelhança nos triângulos acima são respectivamente:

Figura 47 – Questão 6, Pré-Teste.

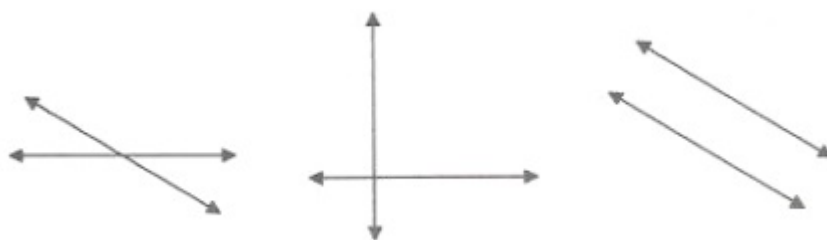


Fonte: Elaborada pelo autor.

(a)LLL e LAD; (b)LAL e LLL; (c)ALA e LLL; (d)LAL e ALA; (e)LAL E LAA_o.

7. As retas a seguir são respectivamente:

Figura 48 – Questão 7, Pré-Teste.

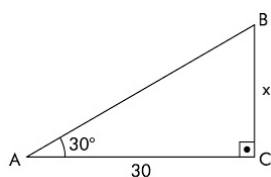


Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) Concorrentes, paralelas, perpendiculares;
- (b) Perpendiculares, paralelas, coincidentes;
- (c) Concorrentes, perpendiculares, coincidentes;
- (d) Concorrentes, perpendiculares, paralelas;
- (e) Perpendiculares, paralelas, coincidentes.

8. O valor de x abaixo é:

Figura 49 – Questão 8, Pré-Teste.



Fonte: Elaborada pelo autor.

(a) 15; (b) 10; (c) $30\sqrt{3}$; (d) $5\sqrt{3}$; (e) $10\sqrt{3}$

9. Conhecendo o diâmetro de uma circunferência S como a maior corda que passa pela circunferência. Como poderíamos definir o diâmetro de um quadrado? Você pode usar a figura para mostrar o segmento que faz o papel de diâmetro.

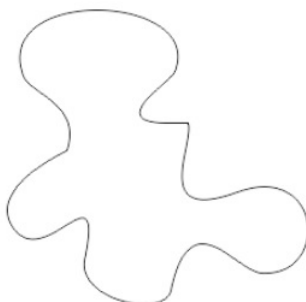
Figura 50 – Questão 9, Pré-Teste.



Fonte: Elaborada pelo autor.

10. Como poderíamos definir o diâmetro de uma figura plana fechada qualquer? Represente na figura:

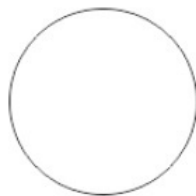
Figura 51 – Questão 10, Pré-Teste.



Fonte: Elaborada pelo autor.

11. Indique uma forma de dividir uma circunferência de modo que cada região apresente um diâmetro menor que o diâmetro da circunferência.

Figura 52 – Questão 11, Pré-Teste.



Fonte: Elaborada pelo autor.

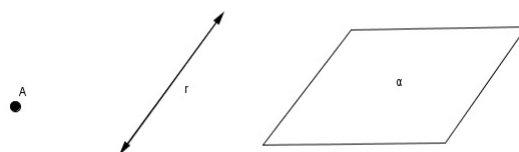
12. Em quantas regiões você dividiu a circunferência na questão 11? Você acredita que poderia ter dividido em menos regiões? Qual o menor número de regiões que você poderia dividir esta circunferência de modo a obter em cada região um diâmetro menor que d ?

APÊNDICE D – REVISÃO

ALGUNS CONCEITOS FUNDAMENTAIS:

1. Conceitos Primitivos: Ponto, Reta e Plano. São aceitos sem definição. Quando as

Figura 53 – Ponto, Reta e Plano.



Fonte: Elaborada pelo autor

retas se cruzam, possuem um ponto em comum. Estas são chamadas de retas concorrentes. Quando não possuem ponto em comum são classificadas como paralelas.

2. Segmento de reta: Tem início e fim. Uma parte de uma reta. Temos por segmentos congruentes, segmentos de mesmo comprimento.
3. Semirreta: Tem origem mas não tem extremidade.

Figura 54 – Reta, segmento de reta, semirreta, respectivamente.

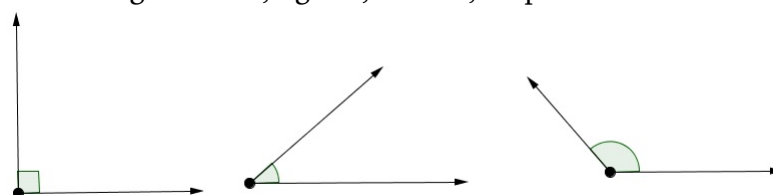


Fonte: Elaborada pelo autor

4. Ângulos são formados pela união de dois segmentos de reta, a partir de um ponto comum, chamado de vértice do ângulo. Normalmente são representados por letras gregas. Classificamos:

- Ângulo reto $\alpha = 90^\circ$
- Ângulo agudo $0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- Ângulo obtuso $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

Figura 55 – Ângulos reto, agudo, obtuso, respectivamente.

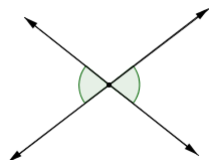


Fonte: Elaborada pelo autor

- Ângulos complementares: São dois ângulos que somados totalizam 90° . Um é complemento do outro.

- Ângulos suplementares: São dois ângulos que somados são totalizam 180° . Um é suplemento do outro.
5. Ângulos opostos pelo vértice: São aqueles cujos lados de um são semirretas opostas dos lados do outro. Possuem a mesma medida.

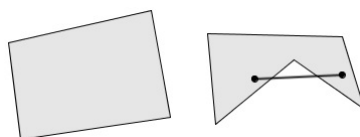
Figura 56 – Ângulos opostos pelo vértice.



Fonte: Elaborada pelo autor

6. Polígono: É uma figura plana formada por três ou mais segmentos chamados lados. Cada lado tem intersecção (vértice) com somente outros dois lados próximos.
7. Polígono convexo: É um polígono construído de modo que os prolongamentos dos lados nunca ficarão no interior da figura original. Ao traçar um segmento por dois pontos no interior de um polígono nenhuma parte do segmento ficará fora do polígono.
8. Polígono não convexo: Um polígono é dito não convexo se por dois pontos do polígono, passarmos um segmento e parte desse segmento ficar fora do polígono.

Figura 57 – Polígonos convexos e não convexo.



Fonte: Elaborada pelo autor

Temos alguns polígonos convexos na tabela abaixo:

Tabela 16: Polígonos convexos

Polígono	Nº de lados	Polígono	Nº de lados
triângulo	3	eneágono	9
quadrilátero	4	decágono	10
pentágono	5	undecágono	11
hexágono	6	dodecágono	12
heptágono	7	pentadecágono	15
octógono	8	icoságono	20

Fonte: Dados da pesquisa.

9. Polígono regular: Todos os seus lados tem o mesmo comprimento. Seus ângulos são iguais, sejam eles internos ou externos. Pode ser inscrito em uma circunferência.
10. Número de diagonais de um polígono: Segmento que une dois vértices não consecutivos são chamados de diagonais e podem ser representados pela fórmula:

$d = \frac{n(n-3)}{2}$, onde d representa o número de diagonais e n o número de lados do polígono.

11. Soma dos ângulos internos (S_i) e Soma dos ângulos externos (S_e) de um polígono:

$$S_i = (n - 2) \cdot 180^\circ \text{ e } S_e = 360^\circ.$$

Considere a_i = valor de um ângulo interno e a_e = valor de um ângulo externo.

Quando o polígono é regular todos os lados e ângulos são congruentes. Temos:

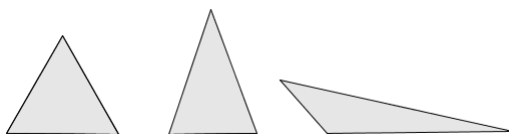
$$a_i = \frac{S_i}{n} \text{ e } a_e = \frac{360^\circ}{n}$$

12. Triângulo: É um polígono que possui três lados, três vértices e três ângulos internos.

Podemos classificar quanto aos lados e quanto aos ângulos. Quanto aos lados:

- Triângulo equilátero: Os três lados possuem a mesma medida.
- Triângulo isósceles: Dois de seus lados tem a mesma medida.
- Triângulo escaleno. Os três lados possuem medidas diferentes.

Figura 58 – Triângulo equilátero, isósceles, escaleno, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor

Quanto aos ângulos internos:

- Triângulo acutângulo: Todos ângulos internos são agudos.
- Triângulo retângulo: Um dos seus ângulos é reto.
- Triângulo obtusângulo: Um de seus ângulos é obtuso e dois são agudos.

Figura 59 – Triângulo acutângulo, retângulo, obtusângulo, respectivamente.



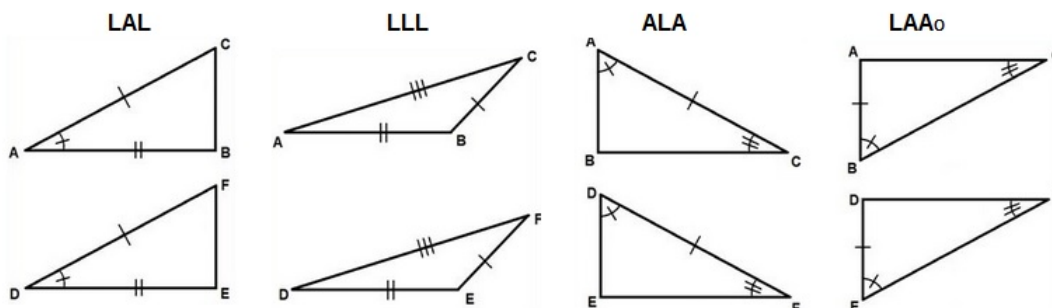
Fonte: Elaborada pelo autor

13. Congruência de triângulos: Dois triângulos são congruentes se coincidem ao serem sobrepostos. Seus lados e seus ângulos são congruentes, dois a dois. Os seguintes casos são:

- LAL: Dois lados congruentes e o ângulo formado por eles congruentes.
- LLL: Três lados congruentes.
- ALA: Dois ângulos congruentes e o lado compreendido entre eles congruentes.

- LAA_o : Um lado congruente, um ângulo adjacente e seu ângulo oposto também congruentes. Ver Figura 60.

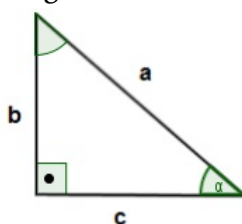
Figura 60 – Casos de congruência de triângulos.



Fonte: Elaborada pelo autor

14. O triângulo retângulo e o Teorema de Pitágoras: O triângulo retângulo é formado por dois catetos e uma hipotenusa. A hipotenusa é o maior segmento do triângulo e é oposto ao ângulo reto. Podemos definir o Teorema de Pitágoras da seguinte forma: *A soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*. O que significa dizer que : $a^2 = b^2 + c^2$.

Figura 61 – Triângulo retângulo.



Fonte: Elaborada pelo autor

15. Razões Trigonômétricas no Triângulo Retângulo: Considere a figura 61.

- a é hipotenusa do triângulo.
 - b é o cateto oposto de α
 - c é cateto adjacente de α
 - Seno(sen) de um ângulo é razão entre o cateto oposto e a hipotenusa.
 - Cosseno(cos) de um ângulo é a razão entre o cateto adjacente e a hipotenusa.
 - Tangente(tg) de um ângulo é a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente.
- Ou seja, $\text{sen} \alpha = \frac{b}{a}$, $\text{cos} \alpha = \frac{c}{a}$ e $\text{tg} \alpha = \frac{b}{c}$. Os ângulos 30° , 45° e 60° são chamados notáveis por frequentemente aparecerem em cálculos, portanto devemos conhecê-los. Veja a Tabela 17:

Vale ressaltar que num triângulo qualquer que seja, ao maior ângulo se opõe o maior lado.

16. Quadriláteros: São polígonos de 4 lados. A soma dos ângulos internos desses

Tabela 17: Ângulos Notáveis

	30°	45°	60°
<i>sen</i>	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
<i>cos</i>	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
<i>tg</i>	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

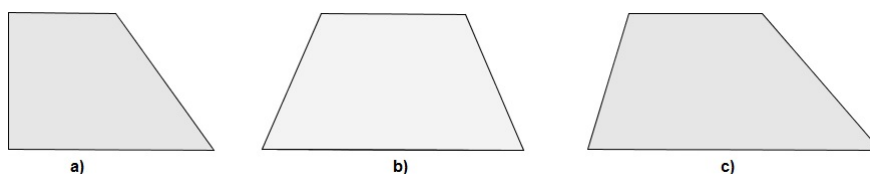
Fonte: Dados da pesquisa.

polígonos é igual a 360°. Os quadriláteros notáveis são: trapézios, paralelogramos, retângulos, losangos e quadrados.

17. Trapézios : Um quadrilátero plano convexo com dois, e somente dois lados paralelos. Classificamos como:

- Trapézio retângulo e este tem um ângulo reto.
- Trapézio isósceles, e estes lados são congruentes.
- Trapézio escaleno, e estes lados não são congruentes.

Figura 62 – Trapézio retângulo, isósceles e escaleno, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor

18. Paralelogramos: Quadriláteros planos convexos que possuem lados opostos paralelos, dois a dois. Nos paralelogramos dois ângulos opostos quaisquer são congruentes.
19. Retângulo: Possui quatro ângulos congruentes.
20. Losango: Possui quatro lados congruentes.
21. Quadrado: Possui quatro lados e quatros ângulos iguais.

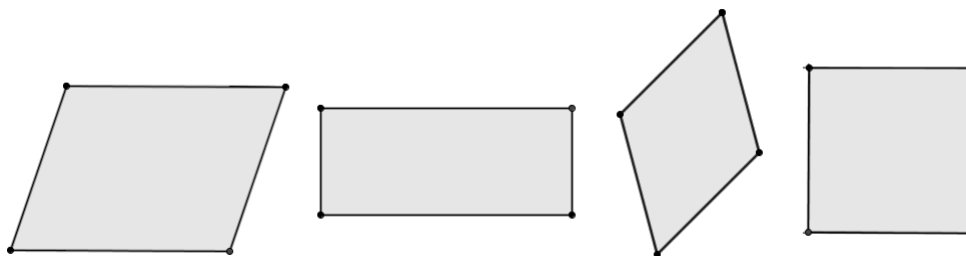
Podemos perceber que retângulos e losangos são paralelogramos e que todo quadrado é retângulo e também é losango.

22. Circunferência: Dados um ponto O de um plano e uma distância r, chamamos de circunferência de centro O e raio r o conjunto dos pontos do plano que distam r de O.
23. Círculo: Círculo é a região da circunferência juntamente com sua região interna.

Os seguintes conceitos a seguir fazem referência às circunferências. Veja a figura 51.

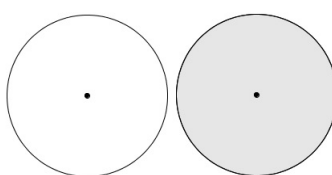
24. Raio: É um segmento de reta com uma extremidade no centro da circunferência e a outra extremidade num ponto qualquer da circunferência.
25. Corda: Corda de uma circunferência é um segmento de reta cujas extremidades pertencem à circunferência.

Figura 63 – Paralelogramo, Retângulo, Losango, Quadrado, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor

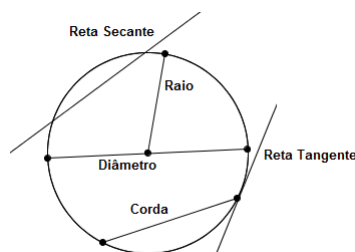
Figura 64 – Circunferência e Círculo, respectivamente.



Fonte: Elaborada pelo autor

26. Diâmetro: É uma corda que passa pelo centro da circunferência. Observamos que o diâmetro é a maior corda da circunferência. Vale ainda dizer que uma reta secante

Figura 65 – Elementos da Circunferência.



Fonte: Elaborada pelo autor

de uma curva é qualquer reta que cruze dois ou mais dos seus pontos e uma reta tangente compartilha de um único ponto com a curva. Ver Figura 65.

27. Arco da Circunferência: Consideramos um a circunferência F de centro O com A e B dois pontos de F que não sejam extremidades de um diâmetro. Nessas condições temos:
- Arco menor $\widehat{AB}$: É a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de F que estão no interior do ângulo AB .
 - Arco maior $\widehat{AB}$: É a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de F que estão no exterior do ângulo AB .
28. Semicircunferência: A semicircunferência $\widehat{AB}$ é a reunião dos conjuntos dos pontos A, B e de todos os pontos de F que estão num mesmo semiplano determinados pela reta r que passa pelos pontos A e B .

APÊNDICE E –TEOREMA DE BORSUK

1. Estudo de Diâmetros $diam(F)$:

Já é claro o que é o diâmetro de uma circunferência! Como definir o diâmetro de qualquer figura plana F fechada?

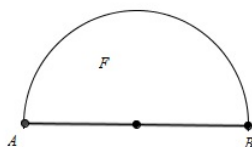
Podemos definir que diâmetro é a maior distância entre o conjunto de todos os pares de pontos de F .

- Figuras planas fechadas são regiões onde todos os pontos limites pertencem a figura.
- Os pontos limites da figura são os pontos localizados no bordo da figura, ou seja, no contorno da mesma. Os pontos limites de um círculo por exemplo são os pontos que pertencem a circunferência.

Qual o diâmetro de um quadrado? Qual o diâmetro de um triângulo equilátero?

É fácil observar que em uma semicircunferência temos que os extremos A e B formam o diâmetro já que é uma corda que passa pelo centro.

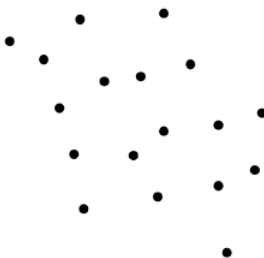
Figura 66 – Semicircunferência.



Fonte: Elaborada pelo autor

Na figura 67 quais pontos realizam a maior distância entre todos os pontos presentes?

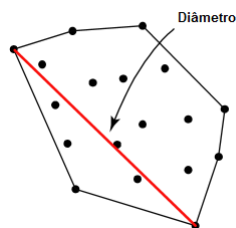
Figura 67 – Pontos



Fonte: Elaborada pelo autor

O diâmetro de um conjunto é o maior distância entre quaisquer dois pontos do conjunto. Ver Figura 68.

Figura 68 – Diâmetro

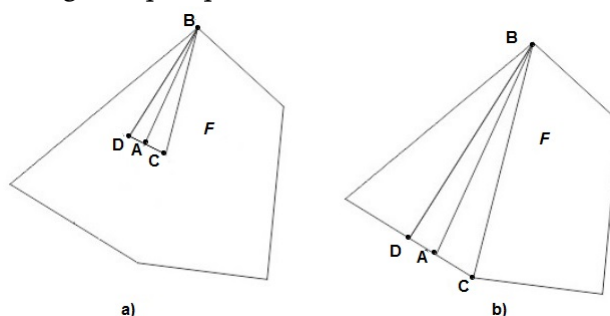


Fonte: Elaborada pelo autor

2. Em um polígono regular o diâmetro é a maior distância entre seus vértices. Vamos provar?

Sejam A, C, D pontos pertencentes a um polígono qualquer F de modo que B seja um de seus vértices e A não seja vértice. Por A passa um segmento $\overline{CD}$. Veja que $\overline{AB}$ não poderá ser diâmetro:

Figura 69 – Polígono qualquer.



Fonte: Elaborada pelo autor

A soma do $\angle BAC$ com $\angle BAD$, forma 180° . Seja $\angle BAC \geq \angle BAD$. Ora, se $\angle BAC = \angle BAD$ então $\angle BAC = 90^\circ$ e no triângulo BAC sabemos que ao maior lado se opõe o maior ângulo, verificamos que $\overline{BC} > \overline{AB}$ e $\overline{AB}$ portanto não pode ser diâmetro. O mesmo acontece para $\angle BAC > \angle BAD$.

Particularmente no triângulo seu diâmetro será a distância de seu maior lado.

Chamando por d o diâmetro temos na elipse um par de pontos com essa distância, no quadrado dois pares realizam a distância, no triângulo regular 3, no círculo infinitos.

3. Divisão de Figuras em partes menores: $a(F)$, Teorema de Borsuk.

Ao dividir uma figura, consideramos que as linhas de divisão se comportam de tal forma que uma das extremidades dessas linhas devem sair de um dos pontos que estão no bordo da figura, e a outra extremidade irá interseccionar o bordo novamente ou outra linha de divisão. Neste último caso deve existir pelo menos um ponto de intersecção entre todas as linhas de divisões formadas.

Chamaremos de $a(F)$ o número mínimo de partes que são necessárias para dividir uma figura em regiões de diâmetro menor. É o chamado número de Borsuk. Na

elipse e no paralelogramo $a(F) = 2$, no círculo e no triângulo equilátero $a(F) = 3$.

Borsuk conjecturou o seguinte: Para qualquer corpo F n -dimensional é verdade que $a(F) \leq n + 1$.

Concluimos que no plano $a(F) \leq 3$.

Figura 70 – Karol Borsuk



Fonte: Aignerw, Martin e Ziegler, Günter M., 2010, p. 95

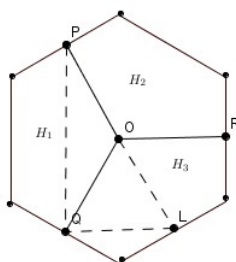
Karol Borsuk (1905 - 1982) nasceu na Polônia e sua carreira foi interrompida no início da Segunda Guerra Mundial. Muitos matemáticos tentaram resolver sua conjectura que foi refutada para algumas dimensões. Na matemática provar que algo está errado é tão importante como mostrar que está certo.

Borsuk utilizou o lema de Pall para a provar a veracidade de sua conjectura na segunda dimensão.

Pall diz que toda figura plana de diâmetro d pode ser inserida em um hexágono regular onde a distância de seus lados paralelos tem comprimento d .

Sabendo desse lema basta então provar que o hexágono regular pode ser dividido em três partes onde o diâmetro de cada uma dessas regiões não seja maior que d .

Figura 71 – Hexágono regular.



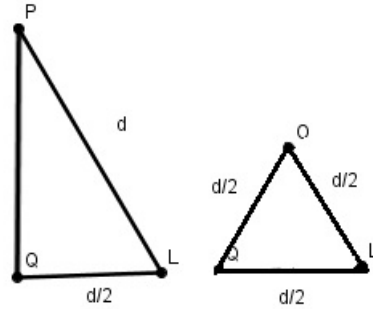
Fonte: Elaborada pelo autor.

Sejam P , Q e R pontos médios de três lados não consecutivos do hexágono e seja O o centro do mesmo. Vamos prolongar a reta que passa por O e por um desses três pontos, P por exemplo. Marquemos L na intersecção da reta com o lado paralelo oposto ao lado do hexágono que contém P .

Traçando os segmentos $\overline{PO}$, $\overline{RO}$ e $\overline{QO}$ dividiremos o hexágono em três regiões: H_1 , H_2 e H_3 , ou ainda melhor, dividiremos este hexágono em 3 pentágonos iguais.

Como já mostramos anteriormente em todo polígono o diâmetro é a maior distância entre seus vértices. É fácil perceber que $\overline{PQ}$ é o diâmetro de H_1 .
Veja no $\Delta(PQL)$ que $\angle PQL = 90^\circ$ e observe o $\Delta(OQL)$ equilátero.

Figura 72 – $\Delta(PQL)$ e $\Delta(OQL)$.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$d^2 = \overline{PQ}^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$\overline{PQ}^2 = d^2 - \frac{d^2}{4}$$

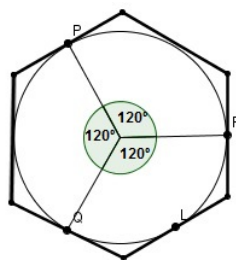
$$\overline{PQ}^2 = \frac{3d^2}{4}$$

$$\overline{PQ} = \frac{d\sqrt{3}}{2}$$

Fica claro que toda figura plana de diâmetro d pode ser dividida em três partes onde o diâmetro de cada região não será maior que $\frac{d\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660d$.

Observe o círculo interno S ao hexágono onde $diam(S) = d$. Na suposta divisão o diâmetro de cada região é exatamente $\frac{d\sqrt{3}}{2}$ mas note que não é possível uma divisão onde cada uma das partes fosse menor que esse valor pois teríamos que ter $\widehat{PQ} < 120^\circ$, $\widehat{PR} < 120^\circ$ e $\widehat{RQ} < 120^\circ$ e estes não cobririam uma circunferência.

Figura 73 – Círculo inscrito num hexágono regular .



Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE F – QUESTIONÁRIO MOTIVACIONAL II

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC PROGRAMA DE MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA. DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS

Responda as perguntas abaixo com sinceridade de acordo com suas ideias e vivências.

1. Você esteve atento durante as aulas? (a)Sim; (b)Parcialmente; (c)Não.
2. Você gostou do conteúdo? Dê uma nota:
(A)Menos que 5. (B) Nota 6. (C)Nota entre 6 e 8. (D)Nota entre 8 e 10.
3. Você estudou em casa o conteúdo visto em sala? (A)Sim (B)Não;
4. Qual o grau de dificuldade que você acredita que teve?
(a)Pouca; (b)Não tive dificuldade; (c)Muita dificuldade.
5. Você pesquisou por esse assunto na internet? (a)Sim (b)Não;
6. Com que frequência você acessa a internet? (a)Sempre; (b)As vezes; (c)Raramente
7. Você acredita que esclareceu alguns conceitos fundamentais de Geometria?

Explique:

8. Você se sentiu motivado a continuar estudando Geometria?

9. O curso atendeu suas expectativas?

10. Você tem alguma sugestão para um próximo curso de Matemática?

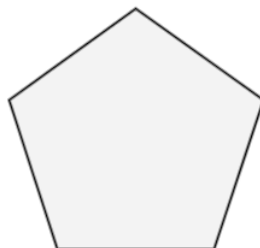
11. O que poderia ser melhor neste curso?

Obrigada pela colaboração!

APÊNDICE G – TESTE FINAL

1. Como poderíamos definir o diâmetro de um polígono regular? Indique um segmento que representa o diâmetro do polígono abaixo :

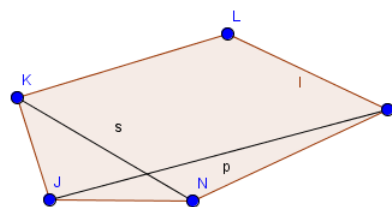
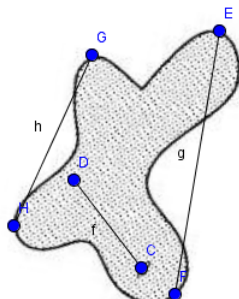
Figura 74 – Questão 1, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

2. Qual segmento melhor representa os diâmetro das figuras a seguir:

Figura 75 – Questão 2, Teste Final

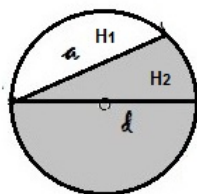


Fonte: Elaborada pelo autor.

(a) h e s; (b) r e l; (c) f e p; (d) g e p; (e) g e s.

3. A seguir o círculo S com $\text{diam}(S) = d$ está dividido em duas regiões H_1 e H_2 por meio de uma corda a . Qual comprimento representa o diâmetro de H_1 e H_2 , respectivamente?

Figura 76 – Questão 3, Teste Final

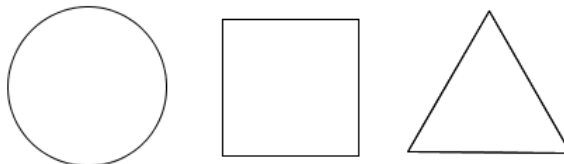


Fonte: Elaborada pelo autor.

(a) $H_1 = a$ e $H_2 = a$; (b) $H_1 = a$ e $H_2 = d$; (c) $H_1 = d$ e $H_2 = d$; (d) $H_1 = d$ e $H_2 = a$; (e) $H_1 = a$ e $H_2 = 0$.

4. Quantos pares de pontos realizam a maior distância no círculo, quadrado e triângulo equilátero, respectivamente?

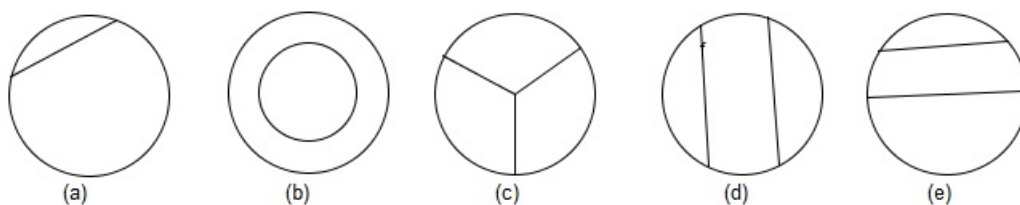
Figura 77 – Questão 4, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) 1, 2, 3; (b) infinitos, 2, 3; (c) 2, 4, 1; (d) 1, 4, 3; (e) infinitos, 4, 3.
5. Os polígonos regulares apresentam uma relação quanto a quantidade de pares de pontos que realizam a distância d . Considere polígonos de diâmetro d . Sabe-se que n é o número de lados do polígono.
- Quando n é par tem-se que $\frac{n}{2}$ pares realizam a distância d e se n for ímpar temos n pares de pontos que realizam a distância d . Sabendo-se disso quantos pares realizam a distância d em um octógono, undecágono e icoságono, respectivamente?
- (a) 2, 11, 5;
 (b) 8, 11, 20;
 (c) 4, 10, 11;
 (d) 4, 11, 10;
 (e) 6, 8, 10.
6. Indique a alternativa que apresenta uma divisão de um círculo S com $\text{diam}(S) = d$ de modo que todas as partes tenham o diâmetro menor que o diâmetro inicial:

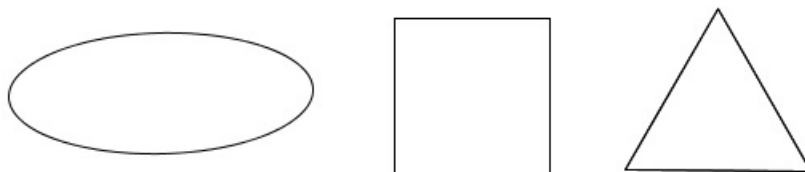
Figura 78 – Questão 6, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

7. Qual o menor número de partes que podemos dividir respectivamente uma elipse, um quadrado e um triângulo equilátero de modo que estas regiões tenham o diâmetro menor que d ? Trata-se de encontrar o $a(F)$.
- (a) 2, 2, 3; (b) 1, 1, 3; (c) 1, 2, 3; (d) 2, 1, 2; (e) 3, 1, 2;

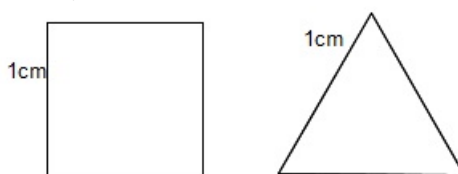
Figura 79 – Questão 7, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

8. Encontre o valor em cm dos diâmetros respectivamente do quadrado e do triângulo sabendo que seus lados valem 1cm.

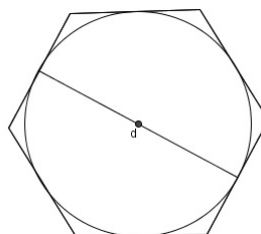
Figura 80 – Questão 8, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) 1 e 1.
 (b) $\sqrt{2}$ e 1.
 (c) $\sqrt{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 (d) 4 e 3.
 (e) 2 e 3.
9. Qual o valor, em relação a d , do lado do hexágono que circunscreve um círculo de diâmetro d ? Veja a figura:

Figura 81 – Questão 9, Teste Final

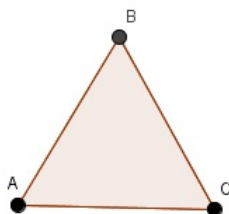


Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) d ; (b) $\frac{d}{2}$; (c) $\frac{d}{3}$; (d) $\frac{d}{\sqrt{3}}$; (e) $\frac{d}{\sqrt{2}}$.
10. Borsuk utilizou o Teorema de Pall que diz que toda figura plana pode ser inserida em um:
 (A)Quadrado; (B)Pentágono regular; (C)Hexágono regular; (D)Octógono regular;
 (E)Círculo.

11. Mostre, com o menor número de regiões possíveis, uma forma de dividir este triângulo equilátero de diâmetro d de modo que em cada região o diâmetro seja menor que d :

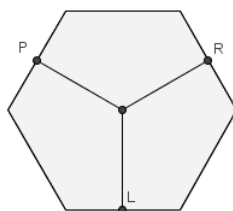
Figura 82 – Questão 11, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

12. Toda figura plana de diâmetro d pode ser dividida em três partes onde o diâmetro de cada região não será maior que $\frac{d\sqrt{3}}{2}$. Seja d a distância entre os lados paralelos desse hexágono, demonstre como chegar nesse resultado.

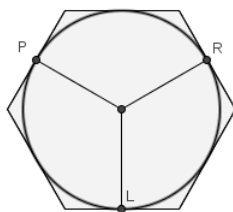
Figura 83 – Questão 12, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

13. Porque não posso dividir um círculo em três partes de modo que cada parte tenha um diâmetro menor que $\frac{d\sqrt{3}}{2}$?

Figura 84 – Questão 13, Teste Final



Fonte: Elaborada pelo autor.

APÊNDICE H – TERMO DE CONCESSÃO PARA UTILIZAÇÃO DE IMAGEM.

MINICURSO TEOREMA DE BORSUK NO PLANO

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC PROGRAMA DE MESTRADO
PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA. DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS.

Eu,

_____,
responsável por

_____,
(nome do aluno)

concedo ao Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional por tempo indeterminado, autorização para utilizar imagens do aluno registradas em atividade durando o minicurso Teorema de Borsuk no Colégio Jenny Gomes. Estas imagens serão utilizadas apenas como dados de pesquisas a serem realizadas nesta instituição.

A pesquisa será realizada pela mestrandia Milínia Stephanie Nogueira Barbosa Felício, aluna da Universidade Federal do Ceará e orientada pelo professor Doutor Jonatan Floriano da Silva.

Estou ciente, portanto, que as imagens não poderão ser utilizadas e veiculadas como material de divulgação.

Nome e informações dados em consentimento prévio pelo colaborador serão guardados e utilizados somente para a pesquisa.

Assinatura do pai ou responsável.

Fortaleza, _____ de _____ de 20____.