UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO MANOEL DA SILVA ANDRADE

RECORRÊNCIAS LINEARES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES: SIMILARIDADES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

FORTALEZA
2016

ANTONIO MANOEL DA SILVA ANRADE

RECORRÊNCIAS LINEARES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES: SIMILARIDADES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

FORTALEZA

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca Universitária
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A565r Andrade, Antonio Manoel da Silva.
Recorrências lineares e equações diferenciais lineares : similaridades e aplicações no ensino médio / Antonio Manoel da Silva Andrade. – 2016.
87 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2016.
Orientação: Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo.

1. Recorrências Lineares. 2. Equações Diferenciais. 3. Modelos Matemáticos. I. Título.

CDD 510

ANTONIO MANOEL DA SILVA ANDRADE

RECORRÊNCIAS LINEARES E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS LINEARES: SIMILARIDADES E APLICAÇÕES NO ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: ___/___/______.

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Marcos Ferreira de Melo (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)

____

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

A Deus

Aos meus pais Antonio Alves de Andrade

e Antonia Furtado da Silva

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por ter me concedido luz, saúde, ânimo para estudar e muitas benções durante todo o processo, desde a prova de acesso até a apresentação do trabalho de conclusão do curso.

Ao meu pai Antonio Alves de Andrade e em especial, à minha mãe Antonia Furtado da Silva, que desde o início da minha trajetória de estudante se empenhou ao máximo para que eu conseguisse alcançar meus objetivos, mostrando pra mim que sempre acreditou em meu potencial.

Ao meu orientador, o professor Dr. Marcos Ferreira de Melo, que mostrou competência em suas aulas ministradas nas disciplinas de Geometria I e Fundamentos de Cálculo, e teve bastante atenção, mostrando compromisso, paciência e sabedoria durante a condução do desenvolvimento do trabalho.

Aos professores Dr. Jonatan Floriano da Silva, Dr. José Afonso de Oliveira, Dr. Fabrício Siqueira Benevides, Dr. Romildo José da Silva, Dr. Esdras Soares de Medeiros Filho e Dr. Joserlan Perote da Silva que contribuíram com excelentes aulas no decorrer do curso.

A todos os amigos e colegas de pós-graduação.

Aos meus colegas de trabalho e à coordenação da escola EEFM Prof. Arruda, da cidade de Sobral, que tiveram compreensão e ofertaram-me apoio.

À minha amiga e também conselheira Nairley de Sá Firmino, onde a mesma foi responsável por me convencer a fazer uma pós-graduação, acreditando e me dando ânimo durante a jornada do mestrado.

À minha namorada Maria Mirian que teve compreensão, contribuindo para que eu pudesse escrever este trabalho.

A CAPES, pelo incentivo financeiro com o custeio da bolsa de auxílio.

À Universidade Federal do Ceará (UFC) por toda estrutura que esteve ao meu alcance.

Aos professores participantes da banca examinadora.

Enfim, a todas as pessoas que contribuíram de certa forma, direta ou indiretamente, tornando possível essa conquista em minha vida.

“Se eu vi mais longe foi por está de pé

sobre ombros de gigantes” (Isaac Newton)

RESUMO

Este estudo faz uma conexão entre dois temas: o primeiro está introduzido no âmbito do ensino básico – as equações lineares – e o segundo no ensino superior – as equações diferenciais – objetivando mostrar a similaridade entre ambos, bem como atuar como ferramenta para promover a interpretação de certos modelos matemáticos que são difundidos com o uso das equações diferenciais. A presença destes referidos modelos matemáticos ocorre nas ciências da matemática, física, química e biologia. Visto que os livros didáticos não trazem aspectos relevantes acerca destes modelos, os docentes ficam sem subsídios que garantam uma fácil interpretação. Nesta perspectiva, a construção deste estudo vem disponibilizar aos professores nestas áreas educacionais, em especial aos professores de matemática, área esta responsável pelas origens e determinações dos supramencionados modelos objeto deste estudo, métodos que servirão de suporte para que ocorra uma abordagem mais refinada, mostrando assim, justificativas sobre os aspectos das fórmulas que são intensamente usadas no ensino básico. Com o objetivo de conceder suporte ao professor diante destas comprovações, este estudo vem relatar como é possível introduzir o assunto de equações diferenciais no ambiente de ensino básico, refletindo desta forma, no método de abordagem de fórmulas que aparecem de maneira abrupta nos conteúdos pertinentes ao ensino básico. O professor, por sua vez, disporá de argumentos mais completos, desenvolvendo a sua performance na sala de aula, além disso, uma oportunidade para aprofundamento nos temas de valor relevante na matemática. O desenvolvimento deste estudo teve como base a pesquisa bibliográfica em livros de ensino médio e superior, com a qual foi possível desenvolver uma análise minuciosa dos temas aqui abordados, resultando em uma identificação das justificativas de fórmulas que são determinadas com o uso de equações diferenciais, as quais exigem conhecimentos relativamente elementares de derivada e integral. Este material pode ser utilizado em turmas que se preparam para vestibulares, onde é exigido um vasto conhecimento nas áreas de matemática e ciências da natureza, como por exemplo, Instituto Militar de Engenharia - IME e Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA.

Palavras-chave: Recorrências Lineares. Equações Diferenciais. Modelos Matemáticos.

ABSTRACT

This study does a connection between two themes: the first is introduced in the basic education – linear recurrences– and the second in the higher education – differential equations –, purposing to show the singularity between both, as well as act as a tool to promote interpretation of certain mathematical models that are broadcast with the use of differential equations. The presence of these mathematical models occurs in the science of the mathematics, physics, chemistry and biology. Since the didatic books do not bring relevant aspects about these models, the teachers run out of subsidies that ensure an easy interpretation. In this perspective, the construction of this study is available to teachers in these educational areas, especially to math teachers, area this responsible for the origins and determinations of the abovementioned models object of this study, methods that will serve of support to that occur a approach more refined, thus showing, justifications on the aspects of the formulas that are sorely used in basic education. In order to grant support to the teacher against of these evidence, this study is to report like is possible to introduce the subject of differential equations in the basic education environment, reflecting that way, in the method of formulas approach that appear abruptly in the relevant content of the basic education. The teacher, in turn, will have of arguments more completes, developing their performance in the classroom, besides that, an opportunity for deepening the themes of relevant value in the mathematics. The development of this study was based the bibliographic research in books of secondary and higher education , with which it was possible to develop a thorough analysis of the themes here addressed, resulting in an identification of the formula justifications that are determined with the use of differential equations, which require knowledge relatively elementary of derivative and integral. This material can be used in classes that preparing for entrance exams, which is required a vast knowledge in the math areas and natural sciences, for example Instituto Militar de Engenharia - IME and Instituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA.

Keywords: Linear Recurrences. Differential Equations. Mathematical Models.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao longo do tempo, pode-se perceber que os conhecimentos relacionados à matemática e ciências da natureza que se adquirem na escola são fundamentados em modelos matemáticos, conhecidos por muitos como fórmulas. Na abordagem de assuntos presentes no currículo escolar é notória a presença maciça de tais modelos. E nessa vertente, podemos fazer algumas indagações, a saber:

a) quais são os métodos que o professor utiliza durante a explanação de conteúdos que sugerem modelos matemáticos?
b) os alunos se sentem satisfeitos e motivados quando a apresentação dessas fórmulas se dá, muita das vezes, de maneira automática?
c) o professor busca compreender, de maneira meticulosa, o processo que se utiliza para se chegar a tais modelos que o mesmo utiliza frequentemente na execução de resoluções que abrange as referidas fórmulas?
d) quais são os questionamentos plausíveis que o professor pode fazer durante as explanações de assuntos que utilizam, em suas definições, argumentos matemáticos que apontam para modelos pré-definidos?

Essas e outras perguntas podem criar uma nova perspectiva na hora de tratar assuntos desta natureza. Na realidade, o tratamento feito durante a abordagem desses referidos assuntos, em muitos casos, se dá de maneira abrupta, fazendo com que o modelo matemático em questão seja aplicado, automaticamente, em situações de exemplos e atividades, deixando de lado o conhecimento detalhado sobre tal fórmula.

Visando enriquecer a aula com uma abordagem mais completa e significativa, este trabalho tem a intenção de contribuir no desempenho do professor no sentido interpretativo de modelos dessa categoria, visto que tal profissional não encontra, muitas das vezes, suportes em seus próprios livros didáticos, criando assim, um hábito de seguir a linha de raciocínio dessas obras. Vale ressaltar que os modelos que estão sendo levados em consideração são os que possuem ligações diretas comum assunto que contribuiu e ainda contribui muito no desenvolvimento da matemática, estamos falando das equações diferenciais, um tema abordado no ensino superior. Aqui, cabe mais uma indagação: como um assunto de nível superior pode ser abordado no ensino médio? A resposta para esta pergunta será encontrada no decorrer desse trabalho, onde o mesmo se estenderá por quatro capítulos, mostrando que é possível manter uma conexão entre essas duas esferas de ensino, conectividade essa que tem melhorado muito nessas últimas décadas, visto que há muitos projetos voltados para as escolas que vêm das universidades, e vice-versa. E para melhorar essa ligação, tal trabalho mostrará a singularidade entre as recorrências lineares, assunto abordado no ensino médio, com as equações diferenciais. A ponte de ligação desses dois assuntos nos indicará o modo de como podemos intervir em cima dos questionamentos apresentados nessa introdução.

A sistemática deste trabalho foi desenvolvida de modo bibliográfico, sendo baseada em livros de ensino básico e superior. E no que diz respeito ao desenvolvimento, o mesmo está condicionado a um raciocínio lógico-dedutivo, mostrando argumentos de natureza relativamente elementares, acompanhados de demonstrações e aplicações com a intenção de manter uma ideia clara e eficaz, levando assim, a um resultado que pode estar ao alcance de professores e alunos que venham a se interessar pelos temas envolvidos. Em relação a algumas demonstrações e aplicações, o procedimento aqui escolhido foi um tanto minucioso, atestando que será de fácil entendimento para os que desejarem explorar tal trabalho. De fato, se pudermos fazer uma conectividade com as referências mencionadas, será de grande proveito, pois poderá ser comprovada de maneira satisfatória a existência de uma gama imensa de situações que podem ser abordadas com os próprios modelos que contemplam a grade curricular do ensino básico. Também devemos observar que utilizaremos, excessivamente, mas com nível próximo do elementar, os conceitos de grande abrangência do cálculo, que são: o limite, a derivada e a integral. Para o público que não possui muita intimidade com esses conceitos, é interessante uma breve abordagem em livros que contemplem os mesmos. Segue-se nos próximos parágrafos, um breve detalhamento sobre os capítulos que compõem este trabalho.

O segundo capítulo constará de teoremas e definições sobre as recorrências lineares, onde o enfoque se dará de maneira exclusiva às recorrências de primeira e segunda ordem. Contendo problemas relacionados à matemática discreta do ensino básico, cujas resoluções serão apresentadas utilizando-se dos conceitos mencionados sobre recorrências, comprovando assim, a veracidade de tais argumentos.

Já no terceiro capítulo, trataremos sobre os conceitos tangíveis às equações diferenciais ordinárias, comumente chamadas de edo’s, visando uma abordagem minuciosa sobre as equações de primeira e segunda ordem. Neste capítulo, apresentaremos os modelos que se mostram com certo destaque no campo das equações diferenciais. Entretanto, vale ressaltar que estudar edo, de um modo geral, pode ser complexo, pois neste assunto encontramos muitas equações que resistem aos métodos que iremos apresentar neste trabalho, e outras tantas equações que só são possíveis de encontrar a solução com o auxílio de séries de potências, chegando a casos de depender do suporte de programas de computadores para resolver tais situações. E um desses modelos que daremos mais a atenção será o que apresenta os coeficientes constantes na estrutura da equação, isso devido à semelhança que o mesmo carrega das recorrências, no que diz respeito ao processo de resolução.

O quarto capítulo contemplará a associação existente entre os assuntos abordados no segundo e terceiro capítulos, onde serão expostas situações e resoluções de casos que julgamos interessantes para fazer um comparativo. De modo paralelo, iremos expor esses resultados para facilitar a percepção entre os procedimentos usados em cada caso. Com isso, veremos que tais assuntos possuem um elo muito forte em relação ao método de se encontrar a solução.

Finalizando com o quinto capítulo, veremos que as equações diferenciais são úteis e presentes no ensino básico. E esse fato se deve pela facilitação de interpretação de certos fenômenos da natureza, resultando em modelos matemáticos corriqueiros. Selecionando alguns destes modelos e utilizando os conceitos abordados neste trabalho, será mostrado como é feito o processo de modelagem dessas fórmulas, desde o início, com apresentação do fenômeno até o desfecho com a exposição da fórmula, transparecendo de maneira completa a metodologia usada em tal processo. E mais, veremos que os argumentos utilizados nessa parte são relativamente elementares, facilitando assim, a compreensão dos mesmos.

2 RECORRÊNCIAS LINEARES

2.1 Definição

Toda sequência numérica, cuja definição do termo geral x_n está associada ao(s) termo(s) antecessor (es) imediato (s) é dita sequencia definida com recorrência ou meramente recorrência. Os exemplos que se seguem dão uma noção mais acentuada desta definição:

EXEMPLO 01: A sequência dos números naturais pares $0, 2, 4, 6, 8, \ldots$ pode ser apresentada por

$$x_n = x_{n-1} + 2 \quad \text{com} \quad n \geq 2$$

EXEMPLO 02: Toda progressão aritmética com razão r e tomando a como o primeiro termo pode ser expressa por

$$x_n = x_{n-1} + r \quad \text{com} \quad n \geq 2$$

EXEMPLO 03: Qualquer progressão geométrica com razão q e primeiro termo igual a g tem como ser expressa por

$$x_n = q.x_{n-1} \quad \text{com} \quad n \geq 2$$

EXEMPLO 04: A sequência $1,1,2,3,5,8,13,\ldots$ conhecida como sequencia de Fibonacci (F_n) é definida por

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad \text{onde} \quad n \geq 0 \ \text{com} \ F_0 = F_1 = 1$$

EXEMPLO 05: A sequência cuja recorrência é dada por

$$x_n = 5x_{n-1}^2 - 3x_{n-2} \quad \text{com} \quad n \geq 3 \ \text{e} \quad x_1 = 1 \quad \text{e} \quad x_2 = 4$$

Deve-se ter atenção ao fato de que nem toda sequência está devidamente definida simplesmente pela apresentação da recorrência em si. Existe uma necessidade de se ter conhecimento de pelo menos do termo inicial. Haja vista, $x_n = x_{n-1} + 2$,quando não definido o seu termo inicial, representa uma infinidade de progressões aritméticas, todas possuindo razão 2. Abordaremos posteriormente, com mais ênfase a questões relacionadas à existência e unicidade de soluções, bem como o que é uma solução de uma recorrência.

2.2 Classificação das recorrências

De maneira ampla, as recorrências possuem três elementos que determinam sua natureza. São eles: grau, ordem e apresentação do termo independente de x_n (que não se apresenta como termo da sequencia dada). Com naturalidade, segue-se a definição desses três elementos que são responsáveis por caracterizar uma recorrência.

2.2.1 Grau de uma recorrência

Está relacionado com o maior valor do expoente apresentado em algum dos termos de x_n, de maneira geral, temos:

$$x_n = c_1x_{n-1} + c_2x_{n-2} + c_3x_{n-3} + ... + c_kx_{n-k} + f(n)$$

onde $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$ são constantes e $x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_{n-k}$ são os k termos antecessores imediatos em relação a x_n. E tal recorrência é de grau 1, usualmente chamada de linear, pois todos os termos de x_n se apresentam com expoentes de valores unitários. Vale observar que $f(n)$ é chamada de função de n e depois esclareceremos seu papel dentro de uma recorrência. Citemos exemplos de recorrências:

EXEMPLO 01: $x_n = 5x_{n-1} + 3$ é uma recorrência de grau 1(ou de 1º grau), usualmente chamada de linear;

EXEMPLO 02: $x_n = x_{n-1}^2 + 5$ é uma recorrência de grau 2 (ou 2º grau);

EXEMPLO 03: $x_n = x_{n-1} - x_{n-2}^5 + 1$ é uma recorrência de grau 5 (ou 5º grau);

EXEMPLO 04: $x_n = 4x_{n-1}^7 - 1$ é uma recorrência de grau 7 (ou 7° grau);

EXEMPLO 05: $x_n = 3x_{n-1} + n^4 - 1$ é uma recorrência de grau 1 (ou 1° grau).

Nesta última recorrência, devemos atentar pelo fato de haver a presença do expoente de valor 4, entretanto, tal expoente não está associado a nenhum termo da sequencia x_n e portanto não tem relação com o grau de tal recorrência.

2.2.2 Ordem de uma recorrência

A quantidade de termos antecessores imediatos que se apresentam de uma dada recorrência designa a ordem da mesma. Tomando alguns exemplos, temos:

EXEMPLO 01: $x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + c_3 x_{n-3} + ... + c_k x_{n-k} + f(n)$ onde $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$ são constantes e $x_{n-1}, x_{n-2}, x_{n-3}, ..., x_{n-k}$ são os k termos antecessores imediatos em relação a x_n. Logo, tal recorrência é de ordem k.

EXEMPLO 02: $x_n = 5x_{n-1} + 3n$ é uma recorrência de ordem um ou primeira ordem, pois existe somente um termo antecessor ao x_n, no caso estamos falando de x_{n-1}.

EXEMPLO 03: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ a sequência de Fibonacci é de segunda ordem, pois nela apresentam-se dois termos antecessores, F_{n-1} e F_{n-2}.

EXEMPLO 04: $x_n = 3x_{n-1} + 5x_{n-2} - 2x_{n-3} + n$ é uma recorrência de terceira ordem, apresentando-se então três termos antecessores.

2.2.3 A Função f(n)

O aspecto de uma recorrência se dá envolvendo termos antecessores imediatos de x_n. Entretanto, existem algumas recorrências que apresentam mais do que esses termos. A presença de elementos que não são termos de tal sequência é apontada como uma função de n. Para ser mais claro, listaremos alguns exemplos que se seguem:

EXEMPLO 01: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, a sequência de Fibonacci envolve somente termos da própria sequência, F_{n-1} e F_{n-2}. Aqui nota-se que $f(n) \equiv 0$;

EXEMPLO 02: $x_n = x_{n-1} + 5$, a recorrência apresenta, além do termo antecessor x_{n-1}, a parcela 5. Assim, temos que $f(n) = 5$;

EXEMPLO 03: $x_n = 7x_{n-1} - 3x_{n-2} + n - 1$, nesta recorrência, nota-se a presença da parcela $n-1$, que define a função $f(n) = n-1$;

EXEMPLO 04: $x_n = -4x_{n-1} + 2x_{n-2} - n^2 + 5n - 1$, aqui temos $f(n) = -n^2 + 5n - 1$.

Quando ocorrem situações onde $f(n) \equiv 0$, como no primeiro exemplo, a recorrência é dita como homogênea, já para os demais exemplos, dizemos que a recorrência é não homogenia.

2.3 Existência e unicidade de soluções de uma recorrência

Antes de iniciar um estudo minucioso das recorrências lineares de primeira e segunda ordem, abordaremos aqui um tópico de muita relevância dentro do estudo de recorrências lineares. Estamos falando em resolver uma recorrência, que significa determinar uma expressão que denota o termo geral x_n em função da variável n. Mas, como saber se é possível que exista solução? E, se existe, como saber se é única? Para responder a estas perguntas, iremos tratar, de maneira restrita, somente para a equação da recorrência linear de ordem k.

Uma equação de recorrência linear de ordem k com coeficientes constantes se apresenta na forma de

$$x_n = c_1 x_{n-1} + c_2 x_{n-2} + ... + c_k x_{n-k} + f(n)$$

onde $c_1, c_2, c_3, ..., c_k$ são constantes reais, e $f(n)$ é uma função de n. E tal relação é dita linear pelo fato de todos os termos da sequência aparecer em forma linear, pois cada termo é uma combinação linear dos termos anteriores.

Subdividindo em duas partes, abordaremos a determinação da solução primeiramente em equações homogêneas e em seguida, para o caso de equações não homogêneas.

Para que se possa determinar uma solução de uma recorrência linear de ordem k, é necessário que se disponha de k condições inicias para k índices consecutivos. Assim, se uma determinada recorrência de ordem k oferecer uma quantidade de termos menor que k, tal recorrência poderá não oferecer uma solução.

Tomando como primeiro caso a ser averiguado, da equação de recorrência homogênea em que $f(n) \equiv 0$, supondo que a solução da equação da recorrência seja uma função do tipo $x_n = \phi^n$ com ϕ sendo uma incógnita. Efetuando a substituição na equação da recorrência, temos

$$\phi^n = c_1 \phi^{n-1} + c_2 \phi^{n-2} + ... + c_k \phi^{n-k}$$
$$\phi^n - c_1 \phi^{n-1} - c_2 \phi^{n-2} - ... - c_k \phi^{n-k} = 0$$

onde nesta última igualdade todos os termos foram postos antes da igualdade.

E, para essa mesma equação, por conveniência, dividiremos toda a expressão por ϕ^{n-k}, visto que $\phi \neq 0$. Assim, tem-se

$$\phi^k - c_1\phi^{k-1} - c_2\phi^{k-2} - ... - c_k = 0$$

resultando numa expressão definida como equação polinomial de grau k em ϕ, onde a mesma pode ser apresentada mediante o uso do Teorema Fundamental da Álgebra, na forma

$$(\phi - \alpha_1).(\phi - \alpha_2).(\phi - \alpha_3)...(\phi - \alpha_k)\ ,$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_k$ representa as k raízes do polinômio assim apresentado. Tal equação polinomial é chamada de equação característica da equação da recorrência.

Vale ressaltar que tais raízes de um polinômio com coeficientes de constantes reais podem proporcionar três situações particulares:

a) todas raízes são reais e distintas;

b) todas raízes são reais com pelo menos uma raiz com repetição;

c) presença de raízes complexas acompanhadas de seus conjugados.

Com a determinação dessas k raízes e associando às k condições iniciais, teremos dado origem a um sistema com k equações e k incógnitas, isso tudo pelo o fato do princípio da superposição, onde o mesmo afirma que:

Sendo uma equação homogênea que apresenta k funções como soluções para equação da recorrência, então existe k constantes onde a função associada

$$h_\phi = k_1\phi_1{}^n + k_2\phi_2{}^n + ... + k_k\phi_k{}^n$$

será dita como solução da equação de recorrência.

Segundo Santos *et al* (2007), podemos considerar o seguinte roteiro para a busca da solução de uma equação linear homogênea de ordem k onde a mesma dispõe de k condições iniciais e de índices consecutivos:

a) achar as raízes $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ da equação característica (assumindo que as raízes encontradas são distintas);

b) para cada condição inicial $h_t = \beta_t$ montar a equação

$$k_1\phi_1{}^n + k_2\phi_2{}^n + ... + k_k\phi_k{}^n = \beta_t$$

c) resolver o sistema linear formado pelas equações acima, obtendo assim, valores para as constantes $k_1, k_2, ..., k_k$.

Fica claro que, resolvendo o sistema linear encontraremos uma solução e, para esses casos de valores iniciais, espera-se que a solução seja única. Posteriormente, veremos situações que comprovam tal roteiro, precisamente no subitem 2.5, onde será utilizado para solucionar recorrências lineares de segunda ordem.

Assim, fica definido que, uma recorrência linear para que se possa ter solução, é necessário que hajam condições iniciais bem esclarecidas de acordo com sua ordem e que as mesmas sejam consecutivas. E, seguindo o roteiro acima, chegaremos a um sistema linear de equações, comprovando a unicidade da solução, respondendo assim, as indagações feitas anteriormente no início desta subseção.

Incluindo, agora, o caso em que $f(n) \neq 0$, ou seja, quando tal recorrência é dita não homogênea, devemos seguir os seguintes passos:

a) considerar que a recorrência seja homogênea, adquirindo desse modo a equação característica da referida recorrência e procedendo como foi prescrito anteriormente no roteiro, onde teremos a solução homogênea h_n;

b) definir a solução que é chamada de particular, a qual será designada por t_n. Para encontrar a solução particular, usaremos um método um pouco rudimentar: deverá ser feito uma tentativa associada à função $f(n)$. Ou seja:

— se $f(n) = n^2$ iremos pensar em uma função quadrática $t_n = an^2 + bn + c$;

— se $f(n) = 3n + 2^n$, iremos pensar em uma associação de funções, ou seja, uma soma de uma função de primeiro grau com uma função exponencial. Assim, teremos $t_n = an + b + k2^n$.

c) e, por fim, definir a solução geral, que corresponde a soma da solução homogênea com a solução particular

$$x_n = h_n + t_n.$$

Aqui, deve ser destacado que a definição da solução particular ficou um pouco hermética. Entretanto, tal solução será mais bem explanada posteriormente, quando for direcionado o estudo para as equações lineares de primeira e segunda ordem.

Depois desta abordagem, feita de maneira geral em torno das recorrências lineares, o presente estudo dará ênfase a recorrências lineares de 1ª e 2ª ordem.

Mas antes de começarmos a próxima subseção, concluiremos a abordagem sobre a existência e unicidade de soluções para recorrências de primeira e segunda ordem. E para isto, exporemos duas situações de acordo com LIMA *et al* (2007), onde as mesmas servem como teorema, afirmando que a solução encontrada é única para os casos em que a recorrência define o primeiro termo (quando a mesma for de primeira ordem) ou define os dois primeiros termos (referindo-se a recorrências de segunda ordem). Vejamos:

SITUAÇÃO 01: Prove que uma recorrência de primeira ordem, $x_{n+1} = f(x_n)$, com a condição inicial $x_1 = a$, tem sempre solução única.

Prova: Inicialmente, vamos usar indução matemática para construir uma solução $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ da recorrência

$$(*)\begin{cases} x_{n+1} = f(x_n) \\ x_1 = a \end{cases}$$

Seja $X = \{n \in \mathbb{N}; \alpha_n$ e α_{n+1} estão definidos e $\alpha_{n+1} = f(\alpha_n)\}$. Definindo $\alpha_1 = a$ e $\alpha_2 = f(a)$, temos $1 \in X$. Admitindo que $k \in X$ (hipótese de indução), definimos $\alpha_{k+2} = f(\alpha_{k+1})$. Isto nos dá $k+1 \in X$, donde $X = \mathbb{N}$, ou seja, α_n está definido para todo $n \in \mathbb{N}$ e satisfaz $(*)$.

Agora, verificaremos que $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a única solução de $(*)$.

Suponhamos que $\beta: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é uma solução de $(*)$ e considerando o conjunto $Y = \{n \in \mathbb{N}; \alpha_n = \beta_n\}$. Usaremos indução para mostrar que $Y = \mathbb{N}$ e concluir que $\alpha = \beta$. Prosseguindo, vem:

1) $1 \in X$, pois $\alpha_1 = a = \beta_1$;

2) por hipótese, $k \in X$;

3) utilizando a hipótese temos $\alpha_{k+1} = f(\alpha_k) = f(\beta_k) = \beta_{k+1}$

Portanto,

$$k + 1 \in Y \Rightarrow Y = \mathbb{N} \;. \qquad \square$$

Concluindo assim, a prova.

SITUAÇÃO 02: Prove que uma recorrência de segunda ordem $x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n)$, com condições iniciais $x_1 = a$ e $x_2 = b$, tem sempre solução única.

Prova: Inicialmente, vamos usar indução para construir uma solução $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ da recorrência

$$(**)\begin{cases} x_{n+2} = f(x_{n+1}, x_n) \\ x_1 = a \\ x_2 = b \end{cases}$$

Tomando o conjunto X como $X = \{n \in \mathbb{N}; \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ estão definidos e $\alpha_{n+2} = f(\alpha_{n+1}, \alpha_n)\}$. Definido $\alpha_1 = a$, $\alpha_2 = b$ e $\alpha_3 = f(a,b)$, temos $1 \in X$. Admitindo que $k \in X$, definimos $\alpha_{k+3} = f(\alpha_{k+2}, \alpha_{k+1})$. Isto nos dá $k+1 \in X$, donde $X = \mathbb{N}$, ou seja, α_n está definido para todo $n \in \mathbb{N}$ e satisfaz $(**)$.

Agora, verificaremos que $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é a única solução de $(**)$.

Suponhamos que $\beta\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é solução de $(**)$ e consideremos o conjunto. $Y = \{n \in \mathbb{N}; \alpha_n = \beta_n\}$. Vamos usar a 2.ª forma de indução para mostrar que $Y = \mathbb{N}$ e concluir que $\alpha = \beta$.

Ora, $\{1,2\} \subset Y$, pois $\alpha_1 = a = \beta_1$ e $\alpha_2 = b = \beta_2$. Admitindo que $\{1,2,\cdots,k\} \subset Y$, temos $\alpha_{k+1} = f(\alpha_k, \alpha_{k-1}) = f(\beta_k, \beta_{k-1}) = \beta_{k+1}$, donde $k+1 \in Y$. Isto conclui a prova.

$\square$

2.4 Recorrências lineares de primeira ordem

Pelo que foi definido em relação a recorrências, é fácil identificar que uma recorrência linear de primeira ordem tem a forma

$$x_n = c_1 x_{n-1} + f(n)$$

onde c_1 é uma constante e $f(n)$ é uma função de n.

Agora, para que haja uma compreensão desse assunto, esse tópico será destinado a resoluções de recorrências dessa natureza. E resolver uma recorrência significa exibir uma expressão para o x_n em função da variável n.

Vejamos algumas situações onde se nota a presença de tais sequências:

SITUAÇÃO 03: Resolva $x_n = nx_{n-1}$ com $x_1 = 2$ e $n \geq 2$.

Solução:

$$x_2 = 2x_1$$

$$x_3 = 3x_2$$

$$x_4 = 4x_3$$

....

$$x_n = (n-1)x_{n-1}$$

Fazendo o produto de ambos os lados da igualdade, teremos $x_n = (n-1)!x_1$ e como $x_1 = 2$ temos:

$$x_n = (n-1)!.2$$

SITUAÇÃO 04: Quantas são as sequências de n termos, todos pertencentes a {0,1}, que possuem um número ímpar de termos iguais a 0?

Solução: Para início de raciocínio, devemos concluir que existam apenas dois tipos de sequências que apresentem essa característica: a primeira são todas as sequências que começam com 0, digamos que seja num total de x_n e a outra são as que começam por 1, e assim o total de sequências $2^n - x_n$. Portanto, o resultado é a soma dessas duas quantidades:

$$x_{n+1} = x_n + (2^n - x_n)$$

$$x_{n+1} = 2^n$$

Que apresentando em termos de x_n, vem:

$$x_n = 2^{n-1}$$

Aqui, vemos que não há necessidade de se expor o termo x_1(diferente da situação 03), pois é obvio que o mesmo corresponde a um.

SITUAÇÃO 05: Resolva $x_n = 5x_{n-1}$ com $n \geq 2$.

Solução: De início, observa-se que o termo x_1 de tal recorrência não está definido. E isto vai ocasionar o que para a resolução desta sequência? Vejamos:

Tomando as seguintes igualdades

$$x_2 = 5x_1$$
$$x_3 = 5x_2$$
$$x_4 = 5x_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = 5x_{n-1}$$

E em seguida dividindo essas mesmas igualdades, teremos:

$$x_n = 5^{n-1}.x_1$$

Agora vemos a importância de se definir o termo inicial da sequencia, pois quando ele não está definido resta-nos apresentar a chamada solução geral da recorrência, o que significa uma infinidade de soluções. Concluindo, temos:

$$x_n = C.5^{n-1},$$

onde C é uma constante arbitrária.

SITUAÇÃO 06: Resolva $x_{n+1} = x_n + 2^n, x_1 = 1$.

Solução: Aqui temos a presença do termo x_{n+1} em vez de x_n, mas isso não muda a procedência do raciocínio. Também temos a presença da parcela 2^n, logo temos $f(n) = 2^n$, ou seja, a recorrência em questão é dita não homogênea. Assim, temos:

$$x_2 = x_1 + 2$$
$$x_3 = x_2 + 2^2$$
$$x_4 = x_3 + 2^3$$
$$x_5 = x_4 + 2^4$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}$$

Fazendo a soma de tais igualdades, vem:

$$x_n = x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1})$$
$$x_n = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1}$$
$$x_n = 1\frac{2^n - 1}{2 - 1}$$
$$x_n = 2^n - 1$$

SITUAÇÃO 07: Resolva $x_{n+1} = x_n + n$, $x_1 = 0$.

Solução: Seguindo o mesmo raciocínio, vem:

$$x_2 = x_1 + 1$$
$$x_3 = x_2 + 2$$
$$x_4 = x_3 + 3$$
$$x_5 = x_4 + 4$$
....
$$x_n = x_{n-1} + (n-1)$$

Somando as igualdades, temos:

$$x_n = x_1 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1)$$
$$x_n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + ... + (n-1)$$
$$x_n = \frac{n(n-1)}{2}$$

SITUAÇÃO 08: Resolva $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 2$.

Solução: Neste exemplo, temos uma pequena diferença, comparada às duas situações anteriores, que se mostra na estrutura da recorrência. Isso porque existe uma constante (diferente de 1) junto ao termo x_n. Para que haja uma resolução de tal recorrência, precisamos apresentar o resultado de certo teorema, onde o mesmo faz a mudança oportuna, tornando possível a solução desta situação.

Vejamos o próximo teorema, onde o mesmo é de grande valia:

Teorema 01: *Se a_n é uma solução não nula de $x_{n+1} = g_n x_n$, então, a substituição $x_n = a_n y_n$ transforma a recorrência*

$$x_{n+1} = g_n x_n + h_n \quad em \quad y_{n+1} = y_n + h_n[g_n a_n]^{-1}$$

Prova: Tomando $a_n y_n$ e substituindo em x_n, vem:

$$x_{n+1} = g_n x_n + h_n$$
$$a_{n+1} y_{n+1} = g_n a_n y_n + h_n$$

Como a_n é solução de $x_{n+1} = g_n x_n$ então $a_{n+1} = g_n a_n$. Assim, temos:

$$a_{n+1} y_{n+1} = g_n a_n y_n + h_n$$
$$g_n a_n y_{n+1} = g_n a_n y_n + h_n$$
$$y_{n+1} = y_n + h_n [g_n . a_n]^{-1}$$

. □

Concluindo assim, a prova.

Voltando para a solução da situação 08, segue-se que:

Uma solução não nula de $x_{n+1} = 2x_n$ é $x_n = 2^{n-1}$ (análoga à situação 05).

Prosseguindo com a substituição $x_n = 2^{n-1} y_n$ na recorrência da questão, temos:

$$2^n y_{n+1} = 2^n y_n + 1$$
$$y_{n+1} = y_n + 2^{-n}$$

E mais:

$$y_2 = y_1 + 2^{-1}$$
$$y_3 = y_2 + 2^{-2}$$
$$y_4 = y_3 + 2^{-3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = y_{n-1} + 2^{-(n-1)}$$

Somando as igualdades, tem-se:

$$y_n = y_1 + 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + \ldots + 2^{-(n-1)}$$
$$y_n = y_1 + 2^{-1} \frac{(2^{-1})^{n-1} - 1}{2^{-1} - 1}$$
$$y_n = y_1 - 2^{1-n} + 1$$

Lembrando que $x_n = 2^{n-1} y_n$ e $x_1 = 2$, resulta que $y_1 = 2$. Portanto,

$$y_n = 3 - 2^{1-n}$$

Concluindo, então, que:

$$x_n = 2^{n-1} y_n$$
$$x_n = 2^{n-1}(3 - 2^{1-n})$$
$$x_n = 3.2^{n-1} - 1$$

SITUAÇÃO 09: Sheila e Helena disputam uma série de partidas. Cada partida é iniciada por quem venceu a partida anterior. Em cada partida, quem iniciou tem probabilidade 0,6 de ganhá-la e probabilidade 0,4 de perdê-la. Se Helena iniciou a primeira partida, qual a probabilidade de Sheila ganhar a $n-$ ésima partida?

Solução: Temos aqui uma situação que contempla o assunto de probabilidade condicional. Devemos, através dos fatos citados, apresentar a expressão que condiz com tal situação. Assim, temos:

$$x_n = 0,6x_{n-1} + 0,4(1 - x_{n-1}) \text{ com } x_1 = 0,4$$

De fato, para que ela ganhe a $n-$ ésima partida, deve-se ocorrer um ganho na partida anterior (no caso x_{n-1}) condicionando para uma chance de $0,6$ na partida x_n ($n-$ ésima); ou uma perda na partida anterior, significando uma probabilidade de $(1 - x_n)$, evento complementar, condicionando para a próxima partida uma chance de $0,4$. Como Helena inicia a partida, logo Sheila tem 0,4 na primeira partida, ou seja, $x_1 = 0,4$. Resolvendo, vem:

$$x_n = 0,6x_{n-1} + 0,4(1 - x_n)$$
$$x_n = 0,2x_{n-1} + 0,4$$

Por conveniência, evitando uma solução mais trabalhosa, seguiremos com

$$x_{n+1} = 0,2x_n + 0,4.$$

De modo análogo a situação 08, buscaremos a solução não nula para $x_n = 0,2x_{n-1}$. Pelo que já foi mostrado, podemos dizer que $x_n = 0,2^{n-1}$ é a tal solução não nula. Consequentemente, substituindo $x_n = 0,2^{n-1} y_n$, temos:

$$0,2^n.y_{n+1} = 0,2^n.y_n + 0,4$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{0,4}{0,2^n}$$
$$y_{n+1} = y_n + 2(0,2)^{1-n}$$
$$y_{n+1} = y_n + 2(5)^{n-1}$$

Assim, vem:

$$y_2 = y_1 + 2.5^0$$
$$y_3 = y_2 + 2.5^1$$
$$y_4 = y_3 + 2.5^2$$
....
$$y_n = y_{n-1} + 2.5^{n-2}$$

Somando as igualdades, segue-se:

$$y_n = y_1 + 2(1 + 5^1 + 5^2 + ... + 5^{n-2})$$
$$y_n = y_1 + 2\left(1\frac{1-5^{n-1}}{1-5}\right)$$
$$y_n = y_1 + \frac{5^{n-1}-1}{2}$$

Como $x_1 = 0,4$ e $x_n = 0,2^{n-1} y_n$, então $y_1 = 0,4$. Assim, temos:

$$x_n = 0,2^{n-1}\left(0,4 + \frac{5^{n-1}-1}{2}\right)$$
$$x_n = \frac{1-0,2^n}{2}$$

Concluindo, portanto, a situação.

2.5 Recorrências lineares de segunda ordem

De modo geral, as recorrências lineares de segunda ordem se apresentam na forma

$$x_{n+2} = c_1 x_{n+1} + c_2 x_n + f(n).$$

Mas, de início, apresentaremos resultados envolvendo recorrências homogêneas, ou seja, com $f(n) = 0$. Assim, podemos ter $x_{n+2} + c_1 x_{n+1} + c_2 x_n = 0$ com $c_2 \neq 0$ (caso contrário, teríamos uma recorrência de primeira ordem). Associando esse última expressão com uma equação de 2º grau, $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$, teremos a chamada equação característica. Logo, resolver a recorrência de segunda ordem é obter duas raízes, onde podemos ter três possibilidades: duas raízes reais e distintas; duas raízes reais e idênticas ou duas raízes complexas.

Exibiremos, a seguir, quatro teoremas que abordam a estrutura das soluções de recorrências de segunda ordem, quando as mesmas se apresentarem de forma homogênea.

Teorema 02: *Se as raízes de* $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$ *são* r_1 *e* r_2*, então,* $a_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + c_1 x_{n+1} + c_2 x_n = 0$*, quaisquer que sejam os valores das constantes* K_1 *e* K_2*.*

Prova: Substituindo $a_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n$ na recorrência $x_{n+2} + c_1 x_{n+1} + c_2 x_n = 0$ e fazendo os ajustes convenientes, encontramos:

$$K_1 r_1^n (r_1^2 + c_1 r_1 + c_2) + K_2 r_2^n (r_2^2 + c_1 r_2 + c_2) = 0$$
$$K_1 r_1^n 0 + K_2 r_2^n 0 = 0$$

. □

Comprovando, assim, a veracidade do teorema 02.

Teorema 03: *Se as raízes de* $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$ *são* r_1 *e* r_2*, com* $r_1 \neq r_2$*, então, todas as soluções da recorrência* $x_{n+2} + c_1 x_{n+1} + c_2 x_n = 0$ *são da forma*

$$a_n = K_1 r_1^n + K_2 r_2^n,$$

quaisquer que sejam os valores das constantes K_1 *e* K_2*.*

Para este teorema, mostraremos de imediato, duas situações que o contemplam.

SITUAÇÃO 10: Determine o número de Fibonacci F_n. A sequência de Fibonacci é definida por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, com $F_0 = F_1 = 1$.

Solução: Sendo $r^2 = r + 1$ a equação característica, temos que, as raízes da mesma são $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Utilizando do teorema 03, vem:

$$F_n = K_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + K_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Utilizando o fato de que $F_0 = F_1 = 1$, calculam-se os valores de K_1 e K_2. Com a obtenção do sistema, após as devidas substituições em F_n, temos

$$\begin{cases} K_1 + K_2 = 1 \\ K_1 \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + K_2 \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases},$$

onde se verifica que $K_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$ e $K_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$.

Seguindo, vem:

$$F_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

E, simplificando:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$

SITUAÇÃO 11: Resolva a recorrência $x_{n+2} = -x_{n+1} - x_n$.

Solução: Neste caso, só será obtida a solução geral devido à ausência dos termos inicias de tal sequência. Sendo $r^2 + r + 1 = 0$, a equação característica da recorrência, logo suas raízes são:

$$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

Dado que as raízes são complexas, deve ser utilizada a forma trigonométrica das mesmas, evitando assim, cálculos abstrusos. Assim, o módulo e argumento principal de tais raízes são, respectivamente: $\rho = 1$ e $\theta = \pm\frac{\pi}{3}$.

Portanto, a solução será:

$$x_n = \rho^n [K_1 \cos(n\theta) + K_2 sen(n\theta)] = K_1 \cos\frac{n\pi}{3} + K_2 sen\frac{n\pi}{3}$$

Teorema 04: *Se as raízes de* $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$ *são iguais,* $r_1 = r_2 = r$ *, então,* $a_n = K_1 r_1^n + K_2 n r_2^n$ *é solução da recorrência* $x_{n+2} + c_1 x_{n+1} + c_2 x_n = 0$*, quaisquer que sejam os valores das constantes* K_1 *e* K_2*.*

Prova: substituindo $a_n = K_1 r^n + K_2 n r^n$ na recorrência $x_{n+2} + c_1 x_{n+1} + c_2 x_n = 0$ e agrupando, devidamente, obtém-se:

$$K_1 r^n (r^2 + c_1 r + c_2) + K_2 n r^n (r^2 + c_1 r + c_2) + K_2 r^n r(2r + c_1) = 0$$

Usando o fato de que as raízes são iguais, logo:

$$r = -\frac{c_1}{2}$$

Concluindo, então:

$$K_1 r^n 0 + K_2 n r^n 0 + K_2 r^n r 0 = 0. \qquad \square$$

Teorema 05: *Se as raízes de* $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$ *são iguais,* $r_1 = r_2 = r$ *, então, todas as soluções da recorrência* $x_{n+2} + c_1 x_{n+1} + c_2 x_n = 0$ *são da forma*

$$a_n = K_1 r_1^n + K_2 n r_2^n$$

quaisquer que sejam os valores das constantes K_1 *e* K_2*.*

SITUAÇÃO 12: Resolva a recorrência $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$.

Solução: De maneira análoga à situação anterior, calculando as raízes da equação característica, encontramos $r_1 = r_2 = 2$. Utilizando o teorema 05, temos que a solução geral da recorrência é:

$$x_n = K_1 2^n + K_2 n 2^n$$

2.5.1 Recorrências Lineares de Segunda Ordem Não Homogêneas

Nesta seção, explanaremos situações em que as recorrências serão não homogêneas. Para que tenhamos êxito em tais soluções, é indispensável conhecer o próximo teorema. Vejamos:

Teorema 06: *Se* a_n *é uma solução da equação* $x_{n+2}+c_1x_{n+1}+c_2x_n = f(n)$, *então, a substituição*

$$x_n = a_n + y_n$$

transforma a equação em

$$y_{n+2}+c_1y_{n+1}+c_2y_n = 0$$

Prova: Substituindo x_n por $a_n + y_n$ na equação, obtemos

$$(a_{n+2}+c_1a_{n+1}+c_2a_n)+(y_{n+2}+c_1y_{n+1}+c_2y_n) = f(n).$$

Mas $a_{n+2}+c_1a_{n+1}+c_2a_n = f(n)$, pois a_n é solução da equação original. Logo, a equação se transformou em

$$y_{n+2}+c_1y_{n+1}+c_2y_n = 0. \quad \square$$

Encerrando, assim, a prova do teorema 06.

Em concordância com o teorema 06, a solução de uma recorrência não homogênea é constituída de duas parcelas: uma solução qualquer da não homogênea e a solução da homogênea. Pelo que vimos na primeira parte sobre a solução de recorrências homogêneas, é de fácil resposta. Já para a solução da não homogênea, nos resta fazer tentativas até encontrá-las. Vejamos algumas situações familiares.

SITUAÇÃO 13: Resolva a recorrência $x_{n+2} = 6x_{n+1} - 8x_n + n + 3^n$.

Solução: É fácil ver que as raízes da equação homogênea $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 0$ são $r_1 = 2$ e $r_2 = 4$. Assim, a solução geral da homogênea é

$$h_n = K_1 2^n + K_2 4^n.$$

Por tentativa, devemos descobrir uma solução particular, t_n, da recorrência

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n.$$

Observando a estrutura de $f(n)$, que corresponde a $n+3^n$, conclui-se que a mesma é uma associação de uma função linear com uma função exponencial. Logo, uma tentativa sensata será uma expressão do tipo

$$t_n = An + B + C3^n$$

Substituindo em $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$. E, tem-se:

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n$$

$$t_{n+2} - 6t_{n+1} + 8t_n = n + 3^n$$

$$A(n+2) + B + C.3^{n+2} - 6[A(n+1) + B + C.3^{n+1}] + 8(An + B + C.3^n) = n + 3^n$$

$$An + 2A + B + 9C.3^n - 6An - 6A - 6B - 18C.3^n + 8An + 8B + 8C.3^n = n + 3^n$$

$$3An + 3B - 4A - C.3^n = n + 3^n$$

Fazendo a correspondência, temos:

$$3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$3B - 4A = 0 \rightarrow 3B = 4A \rightarrow B = \frac{4}{9}$$

$$-C = 1 \rightarrow C = -1$$

Ou seja:

$$t_n = \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$$

E, tendo assim, a solução geral da recorrência composta por h_n e t_n:

$$x_n = h_n + t_n$$

$$x_n = K_1.2^n + K_2.4^n + \frac{1}{3}n + \frac{4}{9} - 3^n$$

Neste exemplo, a tentativa foi efetuada com êxito, mas nem sempre é fácil assim. Quando ocorrer uma tentativa falha, deve-se observar as composições das funções e tentar corrigir fazendo um “aumento de grau”, ou seja, multiplicando com o fator n, na composição devida. O próximo exemplo contempla tal observação. Vejamos:

SITUAÇÃO 14: Resolva a recorrência $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$.

Solução: Por coincidência, a solução da equação homogênea de tal recorrência é idêntica ao do exemplo anterior. Logo, temos que:

$$h_n = K_1 2^n + K_2 4^n$$

Fazendo a tentativa para a função t_n, onde a mesma deve ser uma composição de função constante e exponencial, visto que $f(n) = 1 + 2^n$. Assim, nossa tentativa será do tipo: $t_n = A + B.2^n$. Substituindo, vem:

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$$
$$t_{n+2} - 6t_{n+1} + 8t_n = 1 + 2^n$$
$$A + B.2^{n+2} - 6(A + B.2^{n+1}) + 8(A + B.2^n) = 1 + 2^n$$
$$A + 4B.2^n - 6A - 12B.2^n + 8A + 8B.2^n = 1 + 2^n$$
$$3A = 1 + 2^n$$

Mas tal igualdade é impossível. Logo, nossa tentativa foi falha na composição da exponencial. E, pelo que foi dito, deve-se aumentar o grau nessa mesma composição. Assim, nossa nova tentativa será com $t_n = A + Bn.2^n$.

Portanto, temos:

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 1 + 2^n$$
$$t_{n+2} - 6t_{n+1} + 8t_n = 1 + 2^n$$
$$A + B.(n+2)2^{n+2} - 6(A + B(n+1).2^{n+1}) + 8(A + Bn.2^n) = 1 + 2^n$$
$$A + 4Bn.2^n + 8B.2^n - 6A - 12Bn.2^n - 12B.2^n + 8A + 8Bn.2^n = 1 + 2^n$$
$$3A - 4B.2^n = 1 + 2^n$$

Agora, com êxito, e fazendo a associação, vem:

$$3A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{3}$$
$$-4B = 1 \rightarrow B = -\frac{1}{4}$$

tendo $t_n = \frac{1}{3} - \frac{n.2^n}{4}$.

Portanto, a solução geral da recorrência será $x_n = h_n + t_n$, ou seja:

$$x_n = K_1 2^n + K_2 4^n + \frac{1}{3} - \frac{n2^n}{4}$$

3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

A fim de se ter uma ideia sobre o real papel que uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) possui no campo das ciências, Edwards e David (1993, p.02) dizem:

> As leis do universo estão em grande parte escritas em linguagem matemática. A álgebra é suficiente para resolver muitos problemas estáticos, mas os fenômenos naturais mais interessantes envolvem mudanças, e são melhor descritos por equações que relacionam quantidades variáveis.
> Como a derivada $dx/dt = f'(t)$ da função f pode ser vista como a taxa na qual a quantidade $x = f(t)$ varia em relação à variável independente t, é natural que equações envolvendo derivadas sejam frequentemente usadas para descrever o universo em mudança. Uma equação que envolve uma função desconhecida e uma ou mais de suas derivadas é chamada uma equação diferencial.

Como podemos ver na citação acima, é de grande valia o estudo relacionado às equações diferenciais ordinárias, e sua presença é indispensável em diversos problemas que englobam variação, como por exemplo: em economia, com a necessidade de estudar as variações que as taxas sofrem no decorrer das ações que o mercado financeiro tende a oferecer em um determinado período; na expansão (ou extinção) de certa população onde se observa a presença da variação de quantidade (dos membros dessa população) considerável em relação a um período de tempo estimado; em circuitos elétricos mais complexos onde existem mudanças no que diz respeito à diferença de potencial elétrico em uma rede que é responsável por alimentar certa região; as alterações de temperatura que em dado corpo, presente em certo ambiente, tende a sofrer com o passar do tempo; em um dado sistema de molas onde ocorrem vibrações mecânicas relacionadas ao uso do mesmo, etc.

3.1 Definição

De um modo geral, uma equação diferencial ordinária de ordem n na variável independente x e função desconhecida ou variável dependente $y = y(x)$ tem a dada apresentação:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

Assim, a ordem de uma equação diferencial está relacionada com a mais alta derivada da função desconhecida. E sua solução se dá quando encontramos uma função (no caso, y) que satisfaz a própria equação. Tal solução pode ser classificada de geral, quando não há valor (es) inicial(ais) apresentado (s) da função desconhecida ou a solução pode ser dita como particular, e isso é possível quando há dados adicionais sobre a função a ser descoberta. E mais, situações que contêm estas informações são designadas como problema de valor inicial, *PVI*. Vejamos alguns exemplos:

EXEMPLO 01: $y''+2y'+4y=\cos(x)$, equação diferencial de segunda ordem e 1º grau (linear);

EXEMPLO 02: $(y''')^5-4y'-8y=\sin(x)$, equação diferencial de terceira ordem e 5º grau;

EXEMPLO03: $x\dfrac{dy}{dx}+3y=2x^5$ ou $xy'+3y=2x^5$, equação diferencial de primeira ordem e 1º grau (linear);

EXEMPLO 04: $y'=2y$ e $y(0)=3$ com solução geral $y(x)=Ce^{2x}$; aqui temos uma situação que se classifica como *PVI*, isto porque a mesma define $y(0)=3$, denominada de valor inicial.

Para este último exemplo, é possível fazer uma rápida verificação da solução oferecida, bastando substituir as duas igualdades a seguir, na equação $y'=2y$.

$$y(x)=Ce^{2x}$$
$$y'(x)=2Ce^{2x}$$

Agora, para apresentar uma solução particular, deve-se usar o valor inicial dado. Assim, segue-se:

$$y(x)=Ce^{2x}$$
$$y(0)=Ce^{2.0}$$
$$3=Ce^{0}$$
$$3=C$$

E isso implica em:

$$y(x)=3e^{2x}$$

Representando na solução particular.

3.2 Existência e unicidade de soluções de uma EDO

Nesta parte do trabalho, iremos expor algumas situações elementares que utilizam a linguagem estrutural das equações diferenciais e, consequentemente, alguns métodos para buscar uma solução, seja ela geral ou particular. Deve-se esclarecer que nem sempre tais procedimentos são suficientes para se chegar a um resultado final, expresso de maneira analítica. E isso já foi sentido desde o início dos estudos relacionados a estas equações, onde em alguns desafios se tornava impossível chegar a encontrar o que se procurava: a função corresponde a equação dada. Mesmo utilizando o cálculo, mais precisamente os conceitos utilizados em séries, muitas equações se apresentam com níveis muitos elevados se tratando de dificuldade. Pode-se afirmar que, hoje, com a ajuda do cálculo numérico e juntamente com a criação de máquinas mais evoluídas, se tornou possível expor soluções de equações diferenciais de nível mais elevado. Contudo, existe outras tantas que mostram resistência a essas ferramentas.

Com estes percalços, vieram algumas indagações:

a) é possível que toda equação diferencial possua solução?

b) e, se existe tal solução, ela é única?

Para que seja possível responder tais perguntas, é necessário fazer uma abordagem relevante a respeito da existência e quantidade de soluções que uma equação diferencial pode apresentar. Logo, é imprescindível citar dois teoremas que ilustram tais indagações citadas. O primeiro garante, em meio a algumas condições, que sempre existe solução; já o segundo, garante a unicidade da solução onde a verificação é plausível utilizando uma ferramenta muito conhecida no cálculo diferencial: o teorema do valor médio. Aqui, podemos perceber que a presença do cálculo, em destaque a derivação e integração, são notórias dentro do estudo das equações diferenciais.

Para discutirmos a existência e unicidade da solução de uma equação diferencial, vejamos primeiro a solução da seguinte equação:

$$y^2 + x^2 y' = 0 \text{ com } y(a) = b$$

Fazendo uma separação de variáveis e aplicando um método que iremos apresentar mais a frente para equações diferenciáveis separáveis, vem:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{x^2}$$
$$-\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

Calculando a integral em ambos os lados e isolando $y = y(x)$ consequentemente, tem-se:

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + C$$
$$y = y(x) = \frac{x}{Cx - 1}$$

Tendo em vista, o valor inicial $y(a) = b$, podemos obter:

a) um número infinito de soluções diferentes se $y(0) = 0$;

b) solução vazia no caso em que $y(0) = b \neq 0$;

c) tomando um $a \neq 0$ e b arbitrário, encontraremos uma única solução para a equação.

Assim, uma situação em que temos um problema de valor inicial, não assegura exatamente uma solução, contradizendo o exemplo 04 da subseção 3.1. Buscando, então, um devido esclarecimento, apresentaremos um teorema que enuncia condições suficientes, garantindo, assim, a existência e unicidade de soluções. Segue-se:

Teorema 07: *Existência e Unicidade de Soluções*

Suponha que a função $f(x, y)$ a valores reais é continua em algum retângulo no plano contendo o ponto (a, b) em seu interior. Então o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \text{com} \quad y(a) = b \tag{1}$$

Tem pelo menos uma solução em algum intervalo aberto J contendo o ponto $x = a$. Se, além disso, a derivada parcial df / fy é contínua neste retângulo, então a solução é única em algum intervalo J_0 (possivelmente menor) que contém o ponto $x = a$.

Com o intuito de esclarecer o teorema apresentado, fortalecendo assim sua definição, usaremos o método de aproximações sucessivas, o qual foi desenvolvido pelo matemático francês Emile Picard (1856-1941) para mostrar a comprovação da existência de soluções.

De acordo com Edwards, Jr. e Penney (1993), esse método é baseado no fato de que a função $y(x)$ satisfaz o problema de valor inicial em (1) no intervalo aberto I contendo $x = a$, se, e somente se, satisfaz a equação integral

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))dt$$

para todo x em I.

Tal procedimento fornecerá uma sequência de funções $\{y_n(x)\}_0^\infty$ onde se espera que haja uma convergência para a solução. De início, fazendo $y_0(x) \equiv b$, tem-se:

$$y_1(x) = b + \int_a^x f(t, y_0(t))dt$$

$$y_2(x) = b + \int_a^x f(t, y_1(t))dt$$

$$y_3(x) = b + \int_a^x f(t, y_2(t))dt$$

....

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, y_n(t))dt$$

Supondo que, para cada função presente nesta sequência esteja definida em algum intervalo aberto, o mesmo para todo n, contendo $x = a$, e que o limite

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

exista em cada ponto deste intervalo, tem-se:

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x)$$

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} \left[b + \int_a^x f(t, y_n(t))dt \right]$$

$$y(x) = b + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f(t, y_n(t))dt$$

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t))dt$$

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))dt$$

A conclusão se torna aceitável desde que a validade das operações feitas com limites esteja garantida. No mais, espera-se que, sob condições favoráveis, a sequência $\{y_n(x)\}$ definida no processo iterativo, venha convergir para uma solução $y(x)$, tendo assim, uma solução do problema de valor inicial em (1). As situações posteriores abordarão o método de aproximações sucessivas. Vejamos:

SITUAÇÃO 15: O problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = y$ com $y(0) = 1$ pode ser interpretado, utilizando o método de aproximações sucessivas, da seguinte maneira:

$$y_0(x) \equiv 1 \text{ e } y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)dt$$

Fazendo as iterações, vem:

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1dt = 1 + x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1+t)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2\right)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3\right)dt = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4$$

Notando que cada função é apresentada por uma sequência de somas parciais, onde as mesmas geram uma série de potências de Taylor e, tendo um conhecimento elementar sobre essas séries, conclui-se que:

$$y_n(x) = 1.\frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!}$$

Pode ser expresso por:

$$y_n(x) = e^x$$

Portanto, a solução para a situação apresentada é $y_n(x) = y(x) = e^x$.

SITUAÇÃO 16: Aplicando método de aproximações sucessivas resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1+y) \text{ onde } y(0) = 0$$

Tomando $y(x) = y_n(x)$ e fazendo $y_0(x) = 0$, tem-se:

$$y_1(x) = \int_0^x 2t(1 + y_0(t))dt = x^2$$
$$y_2(x) = \int_0^x 2t(1 + y_1(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2}$$
$$y_3(x) = \int_0^x 2t(1 + y_2(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$
$$y_4(x) = \int_0^x 2t(1 + y_3(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$
....
$$y_n(x) = \int_0^x 2t(1 + y_{n-1}(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}$$

De modo análogo à situação 15, pode se chegar à conclusão, verificando por indução matemática, do valor de $y_n(x)$ observando que cada função se apresenta como uma sequência de somas parciais, recaindo em uma série de potências de Taylor. Fazendo uma busca por uma expressão que seja conveniente com a soma das parcelas de $y_n(x)$, conclui-se que:

$$y_n(x) = e^{x^2} - 1$$

E mais:

$$y(x) = e^{x^2} - 1$$

Solucionando, assim, o problema dado.

É importante observar que, em ambas as situações mencionadas, a conveniência para uma verificação das expressões apresentadas no fim de cada iteração, onde as mesmas são obtidas por meio de suposições. E tal verificação se dá através de indução matemática, mostrando, portanto, que as expressões que designam $y_n(x)$ são válidas para todo *n* natural.

Para chegar a comprovação da unicidade da solução de uma equação diferencial, enunciaremos a seguinte definição, onde a mesma é fundamentada no Teorema do Valor Médio, abordado no cálculo diferencial:

Teorema 08: *Se R é uma região retangular no espaço (x,t) de dimensão $(m+1)$, então a função $f(x,t)$ é considerada* ***Lipschitz contínua*** *em R, se existe uma constante $k > 0$ tal que*

$$|f(x_1,t) - f(x_2,t)| \leq k|x_1 - x_2|$$

se (x_1,t) *e* (x_2,t) *são pontos de* R*. A título de esclarecimento,* $|x_1-x_2|$ *indica a distância euclidiana entre os pontos* x_1 *e* x_2*.*

Em cima do que foi dito sobre a condição de **Lipschitz,** enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 09: *Unicidade de Soluções*

Suponha que em alguma região R *ao* $(m+1)$*- espaço, a função* f *em* $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$ *com* $x(a)=b$*, é contínua e satisfaz a condição de Lipschitz*

$$|f(x_1,t)-f(x_2,t)|\leqq k|x_1-x_2|$$

Se $x_1(t)$ *e* $x_2(t)$ *são duas soluções do problema de valor inicial de* $\frac{dx}{dt}=f(x,t)$ *com* $x(a)=b$*, em algum intervalo aberto* I *contendo* $t=a$*, tais que as curvas soluções* $(x_1(t),t)$ *e* $(x_2(t),t)$ *ambas estão em* R *para todo* t *em* I*, então* $x_1(t)=x_2(t)$ *para todo* t *em* I*.*

Para a demonstração deste teorema, seremos breve, mostrando somente o caso unidimensional, onde x cumpre o papel de uma variável real. Assim, de acordo com Edwards, Jr. e Penney, temos:

Considerando a função

$$\phi(t)=[x_1(t)-x_2(t)]^2 \tag{2}$$

onde $\phi(a)=0$, visto que $x_1(a)=x_2(a)=b$. Com o intuito de mostrar que $\phi(t)\equiv 0$, de modo que $x_1(t)\equiv x_2(t)$. Tomando apenas o caso $t\geqq a$, uma vez que para o caso $t\leqq a$ o procedimento é análogo.

Diferenciando cada lado em (2), teremos:

$$|\phi'(t)|=\left|2\left[x_1(t)-x_2(t)\right]\left[x_1'(t)-x_2'(t)\right]\right|$$
$$|\phi'(t)|=\left|2\left[x_1(t)-x_2(t)\right]\left[f(x_1(t),t)-f(x_2(t),t)\right]\right|$$
$$|\phi'(t)|\leqq 2k|x_1(t)-x_2(t)|^2=2k\phi(t),$$

Usando a condição de Lipschitz sobre f. Logo,

$$\phi'(t)\leqq 2k\phi(t). \tag{3}$$

Ignorando, temporariamente, o fato de que $\phi(a)=0$ e comparando $\phi(t)$ com a solução da equação diferencial

$$\Phi'(t)=2k\Phi(t) \tag{4}$$

onde $\Phi(a)=\phi(a)$; naturalmente,

$$\Phi(t)=\phi(a)e^{2k(t-a)}$$

Comparando (3) com (4), temos, sem precipitação, que

$$\phi(t)\leqq\Phi(t) \quad \text{para} \quad t\geqq a,$$

E mais:

$$0\leqq\left[x_1(t)-x_2(t)\right]^2\leqq\left[x_1(a)-x_2(a)\right]^2 e^{2k(t-a)}$$

Efetuando as raízes quadradas, obtemos:

$$0\leqq\left|x_1(t)-x_2(t)\right|\leqq\left|x_1(a)-x_2(a)\right|e^{k(t-a)}$$

Usando o fato de que $x_1(a)-x_2(a)=0$, nesta última desigualdade, implica que $x_1(t)\equiv x_2(t)$. Isto conclui a prova do teorema da unicidade. □

Tendo o escopo de melhorar a ideia de argumentação apresentada tanto no teorema da unicidade como em sua prova, apresentaremos um contra exemplo, na situação a seguir:

SITUAÇÃO 17: O problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt}=3x^{2/3},\ x(0)=0$$

apresenta tanto a solução óbvia $x_1(t)\equiv 0$, como a solução $x_2(t)=t^3$ que é encontrada por separação de variáveis. Deste modo, a função $f(x,t)$ contradiz uma condição de Lipschitz próximo de $(0,0)$. De fato, o teorema do valor médio fornece

$$\left|f(x,0)-f(0,0)\right|=\left|f_x(\bar{x},0)\right|.\left|x-0\right|$$

para algum $\bar{x}$ entre 0 e x. Contudo, $f_x(x,0)=2x^{-1/3}$ é ilimitada quando $x\to 0$, de modo que nenhuma condição de Lipschitz pode não ser satisfeita.

3.3 EDO de primeira ordem

Neste tópico, destacaremos as equações diferenciais de primeira ordem, onde as mesmas contemplam várias situações no campo da física e engenharia. De maneira geral, a equação diferencial de primeira ordem se apresenta na forma

$$F(x, y, y') = 0$$

com F sendo uma função exibida de três variáveis; necessitando do complemento da definição do domínio da mesma.

Ou mesmo na forma explícita

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

onde f é uma função de duas variáveis, x que é chamada de variável independente e y dita de variável dependente.

Independente da forma com que se apresenta a equação diferencial de primeira ordem, a intenção sempre é de buscar uma função derivável $y = y(x)$ que satisfaz esta equação para todo x em um dado intervalo. Tal função é dita como solução da equação.

De maneira específica, listaremos três tipos de equações diferenciais de primeira ordem, que se apresentam de maneira muito ampla no que se diz respeito aos fenômenos físicos, biológicos e sociais, (onde tais assuntos fazem parte do cotidiano do aluno que estuda matemática básica), visto que a intenção deste trabalho é: mostrar a singularidade entre recorrências x equações diferenciais; levar a compreensão de situações elementares que são contempladas com ambos os assuntos. Exporemos aqui algumas formas que se apresentam em situações que contemplam uma boa parte do assunto de equação diferencial de primeira ordem.

3.3.1 Equações lineares

A equação que se apresenta na forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

é chamada equação linear, onde a mesma será explorada com mais afinco no próximo tópico deste capítulo, pois é um dos elementos básicos desse trabalho.

3.3.2 Equações separáveis

As equações que levam essa nomenclatura são aquelas que podem ser postas, após manipulações louváveis, na forma

$$f(y)dy = g(x)dx$$

e, fazendo a preparação para aplicar a integração, em relação a variável x, em ambos os lados da igualdade, vem:

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$\int f(y)\frac{dy}{dx}dx = \int g(x)dx$$

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

$$F(y) = G(x) + C$$

$$F\big(y(x)\big) = G(x) + C$$

onde $F(y)$ e $G(x)$ são, respectivamente, as primitivas de $f(y)$ e $g(x)$.

Vale ressaltar aqui a necessidade da aplicação da regra da cadeia, visto que:

$$D_x F(y(x)) = F'(y(x)).y'(x)$$

$$D_x F(y(x)) = f(y).\frac{dy}{dx}$$

$$D_x F(y(x)) = g(x)$$

$$D_x F(y(x)) = D_x G(x)$$

3.3.3 Equações exatas

A característica que condiz com tal nome retrata equações da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

mas tal estrutura não garante que esta equação seja dita exata. Para ser mais correto, exporemos o seguinte teorema que dá o devido aval para equações exatas.

Teorema 10: *Critério para Exatidão*

Suponha que as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são contínuas e têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas num retângulo aberto $R:\ a < x < b,\ c < y < d$. Então a equação diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é exata em R, se, e somente se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{5}$$

em cada ponto de R. Isto é, existe uma função $F(x,y)$ definida em R com $\partial F/\partial x = M$ e $\partial F/\partial y = N$ se, e somente se, a equação (5) vale em R.

3.3.4 Equações de Bernoulli

Uma equação diferencial da forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

é dita uma equação de Bernoulli. Tendo $n = 0$ ou $n = 1$ a equação é linear, do contrário, usa-se uma substituição para transforma-la em linear. Tal substituição é feita com

$$v = y^{n-1},$$

onde a equação, após a substituição, fica linear. Ou seja,

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x)\ .$$

3.3.5 Equações homogêneas

Quando uma equação diferencial de primeira ordem puder ser apresentada na forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

ela é chamada de homogênea. E mais, tal equação pode se tornar uma equação separável mediante as substituições que se seguem:

$$v = \frac{y}{x}, \qquad y = vx, \qquad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

fazendo com que a equação homogênea se mostre como

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v$$

3.4 EDO de segunda ordem

Ampliando o estudo das equações diferenciais, faremos uma breve explanação sobre equações de segunda ordem, abordando com mais ênfase as equações lineares que são o escopo desse trabalho.

A apresentação de uma equação diferencial de segunda ordem se dá, de maneira geral, por

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

onde, de modo similar a edo de primeira ordem, F é uma função composta por quatro variáveis, sendo x a variável independente e y a variável dependente. Vejamos alguns exemplos que explanam melhor a referida definição:

EXEMPLO 01: $y'' + 2y' + 10y = x^2 + 4x + 2$

EXEMPLO 02: $y'' + 20y' = x$

EXEMPLO 03: $\frac{d^2y}{dx^2} = \cos x$

EXEMPLO 04: $y'' + 5y' + 6y = 0$

EXEMPLO 05: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$

EXEMPLO 06: $(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$

Vale destacar que a equação do exemplo 05 é conhecida como equação de Bessel de ordem *n*, de grande importância nos estudos relacionados à acústica, condução de calor e radiação eletromagnética; e a equação do exemplo 06 é chamada de equação de Legendre, que também se apresenta em muitas aplicações presentes no cálculo integral, como na quadratura gaussiana e no campo da física, em situações que envolvem o estudo da temperatura em corpos esféricos. Entretanto, a natureza de tais equações não faz parte do escopo deste trabalho, visto que o método para solucionar esses tipos de equações necessitam de um estudo mais aprofundado de séries de potências. Abordagem esta que pode ser feita de acordo com Oliveira e Tygel (2005).

3.5 EDO's lineares de primeira e segunda ordem

De maneira geral, uma edo é dita linear quando satisfaz as seguintes características:

a) cada coeficiente a_n e o termo de não homogeneidade só dependem da variável independente, no caso, x;

b) a variável dependente, no caso y, e suas derivadas são de primeiro grau.

Nos próximos dois subitens, veremos uma abordagem meticulosa sobre as equações diferenciais que oferecem uma gama de situações, expressas em uma linguagem elementar tanto no que diz respeito à estrutura, como em resoluções de problemas envolvendo essas equações.

3.5.1 EDO linear de primeira ordem

Como já foi exposto no tópico anterior, uma equação diferencial de primeira ordem linear tem a seguinte apresentação:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são funções dadas da variável independente x.

Tendo em vista uma cobertura mais ampla, será exposto um método que se tem vasta utilidade quando o problema é achar uma solução para esse tipo de equação. O método, que é conhecido por Método do Fator de Integração, consiste em encontrar um fator que seja multiplicado em ambos os lados da equação, com a finalidade de aparecer uma expressão, em um dos lados da igualdade, que indica a derivada do produto entre esse mesmo fator com a função que se espera encontrar, ou seja, $y(x)$. A título de esclarecimento, indicaremos por $\rho(x)$ o fator de integração. Como, de início, tem-se que encontrar tal fator, logo, é importante saber de que modo podemos fazer. E o procedimento é feito por:

$$\rho(x) = e^{\int_0^x P(t)dt}.$$

É claro que ocorre uma mudança de variável, para evitar inconveniências, referente a função P. Para que seja mais completa a determinação, abordaremos a seguir, uma situação em que é utilizado este procedimento.

SITUAÇÃO 18: Determinar a solução geral da seguinte equação:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^x$$

Solução: Pelo processo descrito acima, temos $P(x) = 3$, logo o fator de integração é:

$$\rho(x) = e^{\int_0^x 3dt}$$
$$\rho(x) = e^{3x}$$

Seguindo, vem-se:

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^x \quad .(e^{3x})$$
$$e^{3x}y' + 3e^{3x}y = e^{4x}$$
$$\int \frac{d}{dx} ye^{3x}dx = \int e^{4x}$$
$$ye^{3x} = \frac{e^{4x}}{4} + C$$
$$y = \frac{e^x}{4} + Ce^{-3x}$$

Portanto, depois de efetuado as passagens do método, encontramos a solução geral da referida equação.

Pelo que vimos na situação 18, acompanhada de sua solução, o método exige conceitos elementares oriundos do cálculo diferencial e integral.

De maneira breve, uma equação diferencial linear de primeira ordem pode se apresentar sob a forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

onde se nota que f só se apresenta com a variável independente x. De modo direto, basta aplicar a integração em ambos os lados da igualdade e teremos a solução geral, ou seja:

$$\int \frac{dy}{dx} = C + \int f(x)dx$$
$$y(x) = C + G(x)$$,

onde C é uma constante arbitrária e $G(x)$ uma antiderivada (integral indefinida) particular de $f(x)$.

Este método é conhecido como integração direta.

Pelo que se notam, os processos que aqui mostramos para encontrar soluções de equações diferenciais lineares de primeira ordem, sejam elas particulares ou gerais, estão bem acessíveis, bastando que se tenha um conhecimento elementar de cálculo diferencial e integral.

3.5.2 EDO linear de segunda ordem

A partir de agora, iremos abordar as equações que têm grande importância no estudo que envolve as áreas clássicas da física matemática. E, de modo amplo, serão apontados métodos que solucionam as equações diferenciais lineares de segunda ordem, sejam elas homogêneas ou não. A forma estrutural correspondente de tal equação é

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad \text{com} \quad x \in I$$

onde as funções $p(x), q(x)$ e $f(x)$ são contínuas no intervalo I.

3.5.2.1. Operador diferencial linear

Uma notação bastante conveniente no estudo de equações diferenciais é o uso de operador diferencial, designado aqui, pelo símbolo L. Assim, para uma função $\phi(x)$ que é derivável por duas vezes, em um intervalo I, o operador diferencial L será definido pela fórmula

$$L[\phi] = \phi'' + p(x)\phi' + q(x)\phi,$$

onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas no mesmo intervalo I.

De fato, $L[\phi]$ é uma função em I, e para determinar seu valor em certo ponto x, pertencente ao intervalo I, temos que:

$$L[\phi](x) = \phi''(x) + p(x)\phi'(x) + q(x)\phi(x)$$

3.5.2.2. Problemas de valor inicial

Como daremos mais ênfase nas equações lineares e iremos explorar as soluções dessas mesmas equações, exporemos aqui um teorema, análogo ao teorema 07, exposto no início deste capítulo, que expressa condições necessárias para que se tenha exatamente uma solução.

Teorema 11: *Existência e Unicidade de Soluções*

Considerando o problema de valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = t(x), \text{ com } y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y'_0,$$

onde p, q e t são contínuas em um intervalo aberto I. Assim, existe exatamente uma solução $y = y(x)$ desse problema, e a solução existe em todo o intervalo I.

Vale ressaltar que tal teorema contempla também as equações homogêneas.

3.5.2.3 Equações homogêneas

Iniciaremos os processos de soluções com a equação homogênea associada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

e usando a notação do operador diferencial, temos:

$$L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Contudo, antes de mostrarmos os métodos que serão abordados nesta seção, explanaremos alguns enunciados de teoremas que são imprescindíveis no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem.

De imediato, existe uma propriedade particular, bastante favorável em relação a solução de equações desta natureza, onde a mesma afirma que a soma de quaisquer duas soluções será também solução da equação homogênea. A rigor, exporemos em forma de teorema tal propriedade.

Teorema 12: *Princípio de Superposição*

Sejam y_1 *e* y_2 *duas soluções da equação linear homogênea associada no intervalo* I *. Se* c_1 *e* c_2 *são constantes, então a combinação linear*

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

é também solução da referida equação linear homogênea.

A comprovação de tal teorema é de fácil entendimento, bastando apenas aplicar as propriedades de diferenciação. Segue-se tal prova:

Tomando a combinação linear $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ e calculando a derivada primeira e segunda, vem:

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \quad \text{e} \quad y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

e fazendo as devidas substituições na equação homogênea, tem-se:

$$\begin{aligned}
y'' + p(x)y' + q(x)y &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(x)(c_1 y_1{}' + c_2 y_2') + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\
y'' + p(x)y' + q(x)y &= c_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + c_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) \\
y'' + p(x)y' + q(x)y &= c_1(0) + c_2(0) \\
y'' + p(x)y' + q(x)y &= 0
\end{aligned}.$$

Comprovando assim, a veracidade te tal teorema.

3.5.2.4 Conjunto fundamental de soluções

De maneira mais completa, a solução de uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea pode ser representada por um conjunto de soluções. De modo mais específico, as soluções y_1 e y_2 podem ser classificadas de:

a) linearmente dependentes: se uma delas é múltiplo constante de outra;

b) linearmente independente: quando nenhuma delas é múltiplo constante da outra.

E, para que não sejamos falhos quanto à classificação dessas funções, exporemos um método que se usa para atestar a linearidade dessas funções: o Wronskiano. O procedimento é trivial, pois tomando as funções f e g , por exemplo, e suas respectivas derivadas primeiras, vem :

$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g$$

De modo mais técnico, vejamos o teorema que se segue.

Teorema 13: *Wronskianos de Soluções*

Suponha que y_1 *e* y_2 *são duas da equação linear de segunda ordem homogênea*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Num intervalo aberto I *no qual* p *e* q *são contínuas.*

(a) Se y_1 *e* y_2 *são linearmente dependentes, então* $W(y_1, y_2) \equiv 0$ *em* I*.*

(b) Se y_1 *e* y_2 *são linearmente independentes, então* $W(y_1, y_2) \neq 0$ *em cada ponto de* I*.*

Assim, chegamos a um resultado fundamentado nos fatos descritos acima, que está relacionado com as soluções gerais de uma equação homogênea. A afirmação a seguir descreve tal resultado.

Se y_1 e y_2 são duas soluções linearmente independentes da equação homogênea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

onde p e q são funções contínuas no intervalo aberto I. Sendo Y qualquer solução da equação homogênea, então existem números c_1 e c_2 tais que

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

para todo x em I.

3.5.2.5 Equação homogênea com coeficientes constantes

Iremos mostrar os métodos de resoluções das equações diferenciais lineares de segunda ordem, quando as mesmas se apresentam com coeficientes constantes e sob forma homogênea. Logo de início, a equação

$$y'' + ay' + by = 0,$$

onde a e b são constantes reais, sofre uma mudança em sua estrutura. E pelo fato de que

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{rx}) = r^k e^{rx},$$

onde qualquer derivada de e^{rx} é um múltiplo constante de e^{rx}. Assim, substituir y por e^{rx}, garante que cada termo da equação seja múltiplo de e^{rx} e, consequentemente, a equação passa a ter outro alvo: o parâmetro r. Pois encontrando o(s) valor (es) deste parâmetro, a soma de todos os múltiplos de e^{rx} se anulará, concluindo assim, e^{rx} solução da equação homogênea.

Para que haja clareza, observemos o que se segue:

$$y'' + ay' + by = 0$$

$$(e^{rx})'' + a(e^{rx})' + be^{rx} = 0$$

$$r^2e^{rx} + are^{rx} + be^{rx} = 0$$

$$(r^2 + ar + b)e^{rx} = 0$$

Como $e^{rx} \neq 0$, temos que:

$$r^2 + ar + b = 0$$

Tal equação é dita como equação característica da equação homogênea.

De fato, a equação característica é uma equação quadrática. Sabendo do comportamento das raízes de uma equação quadrática e usando a afirmação citada quanto ao conjunto fundamental de soluções, teremos três casos a detalhar sobre a solução de uma equação homogênea. São estes:

a) quando a equação característica apresentar duas raízes reais e distintas, $r_1 \neq r_2$, a solução da homogênea será:

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$$

b) quando a equação característica apresentar duas raízes reais e idênticas, $r_1 = r_2 = r$, a solução da homogênea será:

$$y(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$$

c) quando ocorrer duas raízes complexas e conjugadas $r = a \pm bi$, a solução da homogênea será:

$$y_h(x) = e^{ax}(k_1 \cos bx + k_2 \sin bx)$$

Nesta última expressão, deve-se saber que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$
$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - ...$$
$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ...\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ....\right)$$
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Portanto,

$$e^{a+bi} = e^a e^{bi} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

E assim:

$$y(x) = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x}$$
$$y(x) = c_1 e^{ax}(\cos b + i \sin b) + c_2 e^{ax}(\cos b - i \sin b)$$
$$y(x) = e^{ax}\left[\left(c_1 + c_2\right)\cos b + \left(c_1 - c_2\right) i \sin b\right]$$

E fazendo $c_1 + c_2 = k_1$ e $(c_1 - c_2)i = k_2$, vem:

$$y_h(x) = e^{ax}(k_1 \cos b + k_2 \sin b)$$

3.5.2.6 Equação não homogênea

Agora, teremos a explanação de alguns métodos que são utilizados para resolver as equações não homogêneas, já foi visto que a equação não homogênea se expressa na forma

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = f(x) \quad \text{com} \quad x \in I$$

onde as funções $p(x), q(x)$ e $f(x)$ são contínuas no intervalo.

O esquema usado para a obtenção da solução geral de uma equação não homogênea, segundo Oliveira e Tygel (2005), dita três passos:

a) adquirir a solução geral $y_h(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ da equação homogênea correspondente;

b) obter uma solução particular $y_p(x)$ da equação não homogênea;

c) adquirir a solução geral da equação não homogênea pela soma das funções $y_h(x)$ e $y_p(x)$ dos itens precedentes.

Logo, para apresentarmos a solução geral de uma equação não homogênea, devemos ter:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)$$

Pelo que já foi mostrado no item anterior, sabemos calcular a solução homogênea, restando agora, saber calcular uma solução particular. Os métodos posteriores serão de grande valia para ter êxito na busca de uma solução particular.

3.5.2.6.1 Método dos coeficientes a determinar

Este método consiste em expressar a função $f(x)$, que se apresenta na equação não homogênea, em termos de uma função correspondente, buscando assim, apontar os coeficientes que se encontram indeterminados. Este método é de uma facilidade grandiosa, entretanto, abrange uma classe pequena de funções, a saber: polinômios, exponenciais, senos e cossenos e também combinações lineares destas mesmas funções. Para sermos mais claros, exporemos algumas situações com a aplicação deste método.

SITUAÇÃO 19: Encontre uma solução particular de

$$y'' - 7y' + 6y = 3e^{2x}$$

Solução: De início, vemos que $f(x) = 3e^{2x}$ e isso sugere que uma função correspondente a essa será uma função exponencial juntamente com um fator. Assim, nossa tentativa será com

$y_p(x) = ke^{2x}$ sendo k uma constante real.

Prosseguindo com a substituição na equação não homogênea, temos:

$$y'' - 7y' + 6y = 3e^{2x}$$
$$(4ke^{2x} - 7.2ke^{2x} + 6ke^{2x}) = 3e^{2x}$$
$$(4k - 14k + 6k)e^{2x} = 3e^{2x}$$

E, fazendo a devida comparação, tem-se:

$$4k - 14k + 6k = 3$$
$$-4k = 3$$
$$k = -\frac{3}{4}$$

Portanto, uma equação particular da equação do enunciado, é:

$$y_p(x) = ke^{2x}$$

$$y_p(x) = -\frac{3}{4}e^{2x}$$

SITUAÇÃO 20: Encontre uma solução particular de

$$y'' - 4y' + 3y = 3\sin x$$

Solução: A priori, podemos pensar em uma tentativa do tipo $y_p(x) = ksenx$.

Fazendo as devidas substituições, temos:

$$y'' - 4y' + 3y = 3\sin x$$

$$-k\sin x - 4k\cos x + 3k\sin x = 3\sin x$$

$$2k\sin x - 4k\cos x = 3\sin x$$

$$(2k - 3)\sin x - 4k\cos x = 0$$

Aqui, nota-se um desconforto com a presença da parcela que aparece com o cosseno, e mais: como seno e cosseno são funções independentes, o valor da constante k, nesta última igualdade, tornará o valor de x restrito, contrariando as definições expostas nos enunciados dos teoremas referentes á solução de equações. Assim, a escolha para a função particular não foi adequada. Para uma nova tentativa, colocaremos uma parcela designada para o cosseno. Supondo, agora que nossa tentativa seja do tipo

$$y_p(x) = k_1\sin x + k_2\cos x$$

E refazendo todo o processo, vem:

$$y'' - 4y' + 3y = 3\sin x$$

$$(-k_1\sin x - k_2\cos x) - 4(k_1\cos x - k_2\sin x) + 3(k_1\sin x + k_2\cos x = 3\sin x$$

$$2k_1\sin x + 4k_2\sin x - 4k_1\cos x + k_2\cos x = 3\sin x$$

$$(2k_1 + 4k_2)\sin x + (-4k_1 + k_2)\cos x = 3\sin x$$

Fazendo a devida comparação, teremos um sistema formado por duas equações,

$$\begin{cases} 2k_1 + 4k_2 = 3 \\ -4k_1 + k_2 = 0 \end{cases},$$

onde tal sistema, quando resolvido, nos levar a ter $k_1 = \frac{1}{6}$ e $k_2 = \frac{2}{3}$, resultando em uma equação particular para a situação proposta, onde a mesma corresponde a

$$y_p(x) = k_1 \sin x + k_2 \cos x$$
$$y_p(x) = \frac{1}{6}\sin x + \frac{2}{3}\cos x$$

SITUAÇÃO 21: Encontre uma solução particular de

$$2y'' + 3y' + y = x^2 + 3\sin x$$

Solução: Para esse caso, percebemos que $f(x) = x^2 + 3senx$ é um produto entre uma função quadrática e a função trigonométrica $\cos 2x$. De acordo com a apresentação de $f(x)$ e pegando carona com a situação 20, podemos supor que uma solução particular será do tipo

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c) + (k_1 \sin x + k_2 \cos x)$$

Seguindo o processo, calculando as derivadas, primeira e segunda em

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c) + (k_1 \cos x + k_2 \sin x)$$
$$y_p(x) \;\; y_p'(x) = (2ax + b) + (-k_1 \sin x + k_2 \cos x)$$
$$y_p''(x) = 2a - k_1 \cos x - k_2 \sin x$$

e substituindo na equação do problema, temos:

$$4a - 2k_1 \sin x - 2k_2 \cos x + 6ax + 3b + 3k_1 \cos x - 3k_2 \sin x + ax^2 + bx + c + k_1 \sin x + k_2 \cos x = x^2 + 3\sin x$$
$$ax^2 + (6a+b)x + (4a+3b+c) + (-k_1 - 3k_2)\sin x + (3k_1 - k_2)\cos x = x^2 + 3\sin x$$

Fazendo a associação na última igualdade, temos o sistema a seguir:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 6a + b = 0 \to b = -6 \\ 4a + 3b + c = 0 \to c = 14 \\ -k_1 - 3k_2 = 3 \\ 3k_1 - k_2 = 0 \end{cases}$$

E, para as últimas duas equações, resolvendo a parte, temos $k_1 = -\frac{3}{10}$ e $k_2 = -\frac{9}{10}$. Assim, temos como solução particular a equação

$$y_p(x) = (ax^2 + bx + c) + (k_1 \sin x + k_2 \cos x)$$
$$y_p(x) = x^2 - 6x + 14 - \frac{3}{10}\sin x - \frac{9}{10}\cos x$$

3.5.2.6.2 Método da variação de parâmetros

Este método se deve a Lagrange, e seu processo de encontrar uma solução particular complementa o método dos coeficientes a determinar, pois ele abrange de maneira geral qualquer tipo de função que venha a se apresentar no papel de $f(x)$. A descrição para o uso de tal método é também simplista, podendo encontrar um pouco de desconforto na parte final, onde é necessário determinar a integral de algumas funções, que dificultam tal cálculo.

Expressando em palavras a maneira de como utilizar tal método, seguem-se os passos:

a) obter a solução da equação homogênea, $y_h(x)$, e substituir as constantes por funções definidas em x, a fim de ter uma solução particular, $y_p(x)$.

$$\begin{aligned} y_h(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \\ y_p(x) &= t_1(x) y_1(x) + t_2(x) y_2(x) \end{aligned} \qquad 6)$$

b) determinar as derivadas $y_p'(x)$ e $y_p''(x)$, com a intenção de montar um sistema com duas equações, visando apresentar as funções $t_1(x)$ e $t_2(x)$;

$$\begin{aligned} y_p(x) &= t_1(x) y_1(x) + t_2(x) y_2(x) \\ y_p{}'(x) &= [t_1(x) y_1'(x) + t_2(x) y_2'(x)] + [t_1'(x) y_1(x) + t(x)_2' y_2(x)] \end{aligned}$$

Nessa última expressão deve ser imposta a condição, a fim de facilitar os cálculos. Tal condição impõe que

$$t_1'(x) y_1(x) + t(x)_2' y_2(x) = 0$$

e, consequentemente

$$y_p'(x) = t_1(x) y_1'(x) + t_2(x) y_2'(x) \qquad (7)$$

onde

$$y_p''(x) = [t_1(x) y_1''(x) + t_2(x) y_2''(x)] + [t_1{}'(x) y_1'(x) + t_2'(x) y_2'(x)] \qquad (8)$$

E usando o fato de que $y_1(x)$ e $y_2(x)$ satisfazem a equação homogênea $y'' + p(x) y' + q(x) y = 0$

temos que:

$$y_1''(x) = -p(x)y_1' - q(x)y_1$$
$$y_2''(x) = -p(x)y_2' - q(x)y_2$$

E, multiplicando por $t_1(x)$ e $t_2(x)$, respectivamente, a primeira e segunda equação, vem:

$$t(x)_1 y_1''(x) = -p(x)t(x)_1 y_1'(x) - q(x)t(x)_1 y_1(x)$$
$$t(x)_2 y_2''(x) = -p(x)t_2(x)y_2'(x) - q(x)t(x)_2 y_2(x)$$

E, somando as duas equações, após efetuado os respectivos produtos, obtemos

$$t_1(x)y_1''(x) + t(x)_2 y_2''(x) = -p(x)[t_1(x)y_1'(x) + t(x)_2 y_2'(x)] - q(x)[t_1(x)y_1(x) + t(x)_2 y_2(x)]$$

De (6) e (7), temos que

$$t_1(x)y_1''(x) + t(x)_2 y_2''(x) = -p(x)y_p'(x) - q(x)y_p(x)$$

E substituindo em (8), se chega em

$$y''(x) = -p(x)y_p'(x) - q(x)y_p(x) + [t_1'(x)y_1'(x) + t'(x)_2 y_2'(x)]$$
$$y_p''(x) + p(x)y_p'(x) + q(x)y_p(x) = t'(x)y'(x) + t'(x)y'(x)$$

Como $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$, tem-se então:

$$t_1'(x)y_1'(x) + t_2'(x)y_2'(x) = f(x)$$

Obtendo uma segunda equação e, por conseguinte, montar o sistema com as condições adquiridas. Tal sistema vale

$$\begin{cases} t_1'(x)y_1(x) + t_2'(x)y_2(x) = 0 \\ t_1'(x)y_1'(x) + t_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

c) resolver o sistema em função de $t_1'(x)$ e $t_2'(x)$, finalizando com o cálculo da integral das funções encontradas, de modo que se tenha a equação particular

$$y_p(x) = t_1(x)y_1(x) + t_2(x)y_2(x)$$

Em resumo, e abordado de maneira meticulosa, o processo não se torna prolixo, visto que obtendo o sistema, e resolvendo o mesmo, conclui-se com a integral de cada função conquistada na resolução do sistema. Segue-se uma situação para que possamos absorver a ideia de Lagrange.

SITUAÇÃO 22: Encontrar a solução particular de

$$y'' + y = \cot x$$

Solução: Observa-se que $f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ é uma função não linear e, por esse motivo que o método dos coeficientes a determinar se torna inviável. Sendo assim, o método de Lagrange se apresenta como uma boa opção para encontrar a função desejada, onde temos como solução da homogênea $y'' + y = 0$

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

Logo,

$$y_p(x) = t_1(x)y_1(x) + t_2(x)y_2(x)$$

E, tendo em vista as condições impostas no processo, apresenta-se o sistema

$$\begin{cases} t_1'(x)y_1(x) + t_2'(x)y_2(x) = 0 \\ t_1'(x)y_1'(x) + t_2'(x)y_2'(x) = \cot x \end{cases}$$

Cuja solução é $t_1'(x) = -\cos x$ e $t_2'(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \sin x$.

E, calculando a integral de cada função, segue-se que

$$\int -\cos x = -\sin x$$

$$\int \frac{1}{\sin x} - \sin x = \sin x . \ln\left|\csc x - \cot x\right| + \cos x$$

Portanto, uma solução particular para tal equação corresponde a

$$y_p(x) = t_1(x)y_1(x) + t_2(x)y_2(x)$$
$$y_p(x) = -\sin x(c_1 \cos x) + \sin x \ln\left|\csc x - \cot x\right|(c_2 \sin x)$$
$$y_p(x) = -c_1 \sin x \cos x + \sin x \ln\left|\csc x - \cot x\right| + c_2 \sin x \cos x$$
$$y_p(x) = \sin x . \ln\left|\csc x - \cot x\right|$$

4 SOLUÇÕES DE RECORRÊNCIAS LINEARES x EDO’s LINEARES

Neste capítulo iremos mostrar características singulares entre os assuntos abordados nos capítulos anteriores. Eventualmente, o que será apresentado aqui é a existência da associação entre um assunto de grande margem no ensino básico, onde o mesmo está envolvido em questões de matemática discreta, e outro bem encorpado no campo das ciências de nível superior.

Com a intenção de aproximar essas duas realidades, percebemos que a edo, assunto de cunho acadêmico, está presente nos estudos aplicados no ensino básico, de maneira subentendida. Vale ressaltar que grandes autores de livros de matemática voltados para o ensino básico já trazem consigo conceitos de limite, derivada e integral, de maneira bem elementar, que para uma turma de nível razoável é permitido explanar tais conceitos de maneira natural.

No próximo capítulo, iremos expressar com maior vigor o papel e contribuição da equação diferencial nos estudos que exprimem modelos matemáticos, onde os mesmos se apresentam em grande escala no ensino básico. Tal abordagem dará uma nova perspectiva para a compreensão desses modelos que se expressam por fórmulas, onde sem explorar devidamente o conceito de variação, deixam aspectos relativamente elementares de lado, sem estimular o sentido da dedução, do pensamento hipotético e outros fatores que estão ligados à aprendizagem do ser em formação de opinião.

Nas equações diferenciais de primeira ordem não há muito que se relacionar, exceto em algumas situações que ambas as equações exigem recursos diretos sem precisar de cálculos elaborados.

Já nas recorrências lineares de segunda ordem e nas equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes aparecem evidências de modo satisfatório. E isso se comprova tanto na estrutura das equações e imerge nos métodos de resolução, onde os mesmos se mostram bem sincronizados, mantendo uma linha de raciocínio bem singular, chegando a conclusões bastante alinhadas. De início, não parece ser muita coisa, mas quando se sabe da gama de eventos que este tipo de equação diferencial aborda, essas aparências se tornam mais fortes, principalmente quando recai em temas assistidos por alunos do ensino básico.

Para apurar essas evidências entre esses assuntos, exporemos situações que condizem com os fatos descritos acima, onde essas mesmas situações estarão subdivididas em duas partes: a primeira, mostrando a singularidade entre as recorrências e equações lineares de primeira ordem e, a última, destinada às recorrências e equações lineares de segunda ordem.

4.1 Recorrências de primeira ordem x EDO's de primeira ordem

Tomando como base dos fatos redigidos acima, seguem-se as situações:

SITUAÇÃO 23 (a primeira para recorrência):

Resolva $x_{n+1} = x_n + 2^n,\ x_1 = 1$

Solução: Aqui, temos a presença do termo x_{n+1} em vez de x_n, mas isso não muda a procedência do raciocínio. Também temos a presença da parcela 2^n, logo, temos $f(n) = 2^n$, ou seja, a recorrência em questão é dita não homogênea. Assim, temos:

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + 2 \\
x_3 &= x_2 + 2^2 \\
x_4 &= x_3 + 2^3 \\
x_5 &= x_4 + 2^4 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_n &= x_{n-1} + 2^{n-1}
\end{aligned}$$

Fazendo a soma de tais igualdades, vem:

$$\begin{aligned}
x_n &= x_1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1}) \\
x_n &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \ldots + 2^{n-1} \\
x_n &= 1\frac{2^n - 1}{2 - 1} \\
x_n &= 2^n - 1
\end{aligned}$$

SITUAÇÃO 24 (a primeira para equação diferencial):

Aplicando método de aproximações sucessivas, resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2x(1 + y) \text{ onde } y(0) = 0$$

Solução: Tomando $y(x) = y_n(x)$ e fazendo $y_0(x) = 0$, tem-se:

$$y_1(x) = \int_0^x 2t(1+y_0(t))dt = x^2$$

$$y_2(x) = \int_0^x 2t(1+y_1(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2}$$

$$y_3(x) = \int_0^x 2t(1+y_2(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}$$

$$y_4(x) = \int_0^x 2t(1+y_3(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}$$

....

$$y_n(x) = \int_0^x 2t(1+y_{n-1}(t))dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + ... + \frac{x^{2n}}{n!}$$

Conclui-se que:

$$y_n(x) = e^{x^2} - 1$$

ou seja,

$$y(x) = e^{x^2} - 1$$

Observando as soluções de cada situação acima, percebe-se que existem alguns passos pertinentes:

a) observação do comportamento dos termos da sequência, um a um, até se chegar ao termo geral;

b) conectividade entre os resultados dos elementos pertencentes à sequência, mostrando o vínculo que o termo geral possui com os termos anteriores;

c) escolher recursos para apresentar de maneira concisa a solução.

Pelo que foi mostrado nessas situações, para a recorrência utilizou-se da soma de termos de uma P.A; já para a equação diferencial foi utilizado o conhecimento elementar de séries de potências.

Assim, para situações como estas citadas, é possível associar resoluções de uma recorrência com uma equação diferencial, ambas lineares e de primeira ordem.

SITUAÇÃO 25 (a segunda para recorrência):

Resolvendo a recorrência com o procedimento usado para equações não homogêneas, temos:

$$x_{n+1} - 2x_n = n+1 \quad \text{com} \quad x_1 = 1$$

Solução: Uma solução para a equação homogênea:

$$y-2=0$$
$$y=2$$
$$x_h=C2^n$$

Agora, uma solução particular, associada á função $f(n)=n$. Logo, suporemos que $x_p=an+b$, ou seja, uma função de primeiro grau. Com a substituição, temos

$$a(n+1)+b-2(an+b)=n+1$$
$$an+a+b-2an-2b=n+1$$
$$-an+a-b=n+1$$

Fazendo a ligação conveniente entre os membros da igualdade:

$$-a=1\rightarrow a=-1$$
$$a-b=1\rightarrow b=-2$$

Portanto, $x_p=-n-2$, onde a solução geral vale

$$x_n=x_h+x_p$$
$$x_n=C2^n-n-2$$

Como se trata de um PVI, expressemos a solução determinando a constante C.

$$x_n=C2^n-n-2$$
$$x_1=C2^1-1-2$$
$$1=2C-3$$
$$\therefore C=2$$

Assim, $x_n=2^{n+1}-n-2$.

SITUAÇÃO 26 (a segunda para equação diferencial):

Resolvendo agora, um PVI que tem como enunciado

$$\frac{dy}{dx}-y=e^{2x} \quad \text{com} \quad y(0)=5$$

Solução: Para esta situação, utilizaremos o fator de integração, onde o mesmo se mostra como uma exímia ferramenta quando a equação diferencial está nesta perspectiva. Tal fato foi detalhado no subitem 3.5.1, presente no capítulo 3.

Como $P(t) = -1$, então o fator de integração corresponde a

$$p(x) = e^{\int_0^x P(t)dt}$$
$$p(x) = e^{\int_0^x -1dt}$$
$$p(x) = e^{-x}$$

Multiplicando e integrando ambas aos membros da equação do PVI

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{2x} \times (e^{-x})$$

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = e^{x}$$
$$\int (e^{-x}\, y)dx = \int e^{x}$$
$$y(x) = e^{2x} + C.e^{x}$$

Agora, determinando o valor da constante C, segundo o enunciado:

$$y(x) = e^{2x} + C.e^{x}$$
$$y(0) = e^{2.0} + C.e^{0}$$
$$5 = 1 + C$$
$$\therefore C = 4$$

Finalizando o problema com a solução $y(x) = e^{2x} + 4e^{x}$.

Pelo que podemos ver, com outra perspectiva, nos dois últimos problemas resolvidos, não encontramos muita coisa em comum, embora na última parte tenhamos obtido uma conclusão singular em ambas as partes, devido ao acesso do valor inicial que foi mencionado. Entretanto, deve ser pontuado que há uma série de casos que são solucionadas por esses métodos. E tais métodos se tornam mais interessantes e valorizados neste trabalho, pelo simples fato que situações são traduzidas para o ensino básico, as quais utilizam esses mesmos procedimentos.

4.2 Recorrências de segunda ordem x EDO's de segunda ordem

Assim como foi mostrado no tópico anterior, iremos apontar algumas características ímpares ligadas aos processos usados para resolver situações dessa natureza. De modo restrito, tomaremos apenas equações com coeficientes constantes, mas tal restrição não diminuirá a importância de se apontar essas coincidências, pois no capítulo posterior, veremos que muitas fórmulas trabalhadas de forma abstrata são oriundas de equações diferenciais desse tipo.

Enunciaremos situações que contemplam os três casos relacionados às raízes da equação homogênea, ou seja, da equação característica. Fazendo um paralelo com as soluções em cada caso.

SITUAÇÃO 27 (a primeira para recorrência):

Determine a solução para

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 3 - 4n \quad \text{com} \quad x_0 = 1 \text{ e } x_1 = 3$$

Solução: Tomando a equação característica $r^2 + r - 6 = 0$ encontramos suas raízes $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$. Logo, a solução homogênea vale: $x_h = C_1 2^n + C_2(-3)^n$. Continuando, temos que determinar a solução particular. Visto que $f(n) = 3 - 4n$, nossa tentativa será uma função de primeiro grau. Depois desta análise, faremos a substituição na equação não homogênea, de maneira lícita.

$$[a(n+2)+b] + [a(n+1)+b] - 6(an+b) = 3 - 4n$$
$$-4an + 3a - 4b = 3 - 4n$$

onde, fazendo a devida correspondência, tem-se $a = 1$ e $b = 0$. Assim, a solução é

$$x(n) = x_h(n) + x_p(n)$$
$$x(n) = C_1 2^n + C_2(-3)^n + n$$

Como se trata de um problema com valores iniciais, podemos expressar os valores das constantes C_1 e C_2. Tomando os valores correspondentes tem-se que

a) quando $x_0 = 1$:

$$x_0 = C_1(2)^0 + C_2(-3)^0 + 0$$
$$1 = C_1 + C_2$$

b) quando $x_1 = 3$:

$$x_1 = C_1(2)^1 + C_2(-3)^1 + n$$
$$3 = 2C_1 - 3C_2 + 1$$
$$2 = 2C_1 - 3C_2$$

Formando, assim, um sistema com duas equações, onde se verifica facilmente que, $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$. Tendo como solução da recorrência a expressão

$$x(n) = x_h(n) + x_p(n)$$
$$x(n) = 2^n + n$$

SITUAÇÃO 28 (a segunda para equação diferencial):

Resolva o PVI, sendo o mesmo

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 3 - 4x \text{ com } y(0) = \frac{11}{18} \text{ e } y'(0) = -\frac{4}{3}$$

Solução: De maneira análoga à solução anterior, temos:

Tomando as raízes da equação da característica $r^2 + r - 6 = 0$, temos a solução homogênea

$$y_h = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x}.$$

Utilizando do método dos coeficientes a determinar, encontraremos uma solução particular. Seguindo o mesmo raciocínio proposto na recorrência, buscaremos os coeficientes da função $y_p = ax + b$. Entretanto, para fazer as substituições, devemos determinar as derivadas que se apresentam na edo não homogênea. Logo, temos:

$$y = ax + b$$
$$y' = a$$
$$y'' = 0$$

Que substituindo, vem

$$0 + a - 6ax - 6b = 3 - 4x$$

Correspondendo os membros da igualdade, temos $a = \frac{2}{3}$ e $b = -\frac{7}{18}$.

Portanto,

$$y_p = \frac{2}{3}x - \frac{7}{18}$$

E mais:

$$y_x = y_h + y_p$$
$$y_x = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + \frac{2}{3}x - \frac{7}{18}$$

De maneira análoga à solução da recorrência, determinaremos as constantes C_1 e C_2.

a) quando $y(0)=\frac{11}{18}$:

$$\begin{aligned}
y_x &= C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+\frac{2}{3}x-\frac{7}{18}\\
y_0 &= C_1e^{-3.0}+C_2e^{2.0}+\frac{2}{3}.0-\frac{7}{18}\\
\frac{11}{18} &= C_1+C_2-\frac{7}{18}\\
1 &= C_1+C_2
\end{aligned}$$

b) quando $y'(0)=-\frac{4}{3}$:

$$\begin{aligned}
y_x &= C_1e^{-3x}+C_2e^{2x}+\frac{2}{3}x-\frac{7}{18}\\
y'_x &= -3C_1e^{-3x}+2C_2e^{2x}+\frac{2}{3}\\
-\frac{4}{3} &= -3C_1e^{-3.0}+2C_2e^{2.0}+\frac{2}{3}\\
-2 &= -3C_1+2C_2
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema adquirido pelas equações conquistadas, verificamos que $C_1=\frac{4}{5}$ e $C_2=\frac{1}{5}$. Assim, temos como solução, a expressão

$$\begin{aligned}
y_x &= y_h+y_p\\
y_x &= \frac{4}{5}e^{-3x}+\frac{1}{5}e^{2x}+\frac{2}{3}x-\frac{7}{18}
\end{aligned}$$

SITUAÇÃO 29 (a segunda para recorrência):

Determine a solução para

$$x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=2^n \text{ com } x_0=3 \text{ e } x_1=5$$

Solução: A equação característica da recorrência homogênea corresponde a $y^2-6y+9=0$, onde apresenta como raiz dupla $r_1=r_2=3$, fazendo com que a solução da homogênea tenha a expressão

$$x=C_13^n+C_2n3^n.$$

Para a equação particular teremos $y_p=K2^n$, refletindo a função $f(n)=2^n$ Prosseguindo, temos:

$$K(2^{n+2}) - 6K(2^{n+1}) + 9K2^n = 2^n$$
$$4K.2^n - 12K.2^n + 9K.2^n = 2^n$$
$$K.2^n = 2^n$$
$$\therefore K = 1$$

Concluindo, assim, a expressão que designa a solução da recorrência, que vale

$$x_n = x_h + x_p$$
$$x_n = 2.3^n - n.3^n + 2^n$$

SITUAÇÃO 30 (a segunda para equação diferencial):

Aponte a solução para o PVI

$$y'' - 6y' + 9y = e^x \text{ com } y(0) = -\frac{3}{4} \text{ e } y'(0) = \frac{1}{4}$$

Solução: Tomando as raízes da equação característica, $r_1 = r_2 = 3$, temos que a solução da homogênea está sob a forma

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Dando continuidade, sendo $f(x) = e^x$, tomemos para determinar o coeficiente, a função $y_p = K.e^x$ e suas derivadas para adquirir uma solução particular.

$$y_p = K.e^x$$
$$y'_p = K.e^x$$
$$y''_p = K.e^x$$

E, consequentemente,

$$y'' - 6y' + 9y = e^x$$
$$K.e^x - 6K.e^x + 9K.e^x = e^x$$
$$4K.e^x = e^x$$
$$\therefore K = \frac{1}{4}$$

Chegando então, a expressão

$$y_p = \frac{1}{4}e^x$$

Que indica uma solução particular. Portanto, a solução geral se dá em

$$y_n = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{4} e^x$$

Utilizando dos valores iniciais, segue-se que

a) para $y(0) = -\frac{3}{4}$:

$$y_n = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{4} e^x$$
$$y_0 = C_1.e^{3.0} + C_2.0.e^{3.0} + \frac{1}{4} e^0$$
$$-\frac{3}{4} = C_1 + \frac{1}{4}$$
$$\therefore C_1 = -1$$

b) para $y'(0) = \frac{1}{4}$:

$$y_n = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{4} e^x$$
$$y'_n = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x} + \frac{1}{4} e^x$$
$$y'_0 = 3C_1 e^{3.0} + C_2 e^{3.0} + 3C_2.0.e^{3.0} + \frac{1}{4} e^0$$
$$\frac{1}{4} = 3(-1) + C_2 + \frac{1}{4}$$
$$\therefore C_2 = 3$$

Portanto, a solução corresponde a

$$y = -e^{3x} + 3xe^{3x} + \frac{1}{4} e^x$$

SITUAÇÃO 31 (a terceira para recorrência):

Resolve a recorrência

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n + 2^n \text{ com } x_0 = \frac{3}{2} \text{ e } x_1 = 1.$$

Solução: De início, temos que a equação característica da homogênea corresponde a $y^2 - 2y + 2 = 0$, onde é fácil verificar que as raízes são $r_1 = 1 + i$ e $r_2 = 1 - i$. Como são números complexos, a solução da homogênea associará a valores reais, utilizando da definição de módulo e argumento de números complexos, segue-se:

a) cálculo do módulo:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

b) cálculo do argumento:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{a}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{b}{|z|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} rad$$

Com base na fórmula da homogênea para números complexos, a solução corresponde a

$$x_h = \rho^n (C_1 \cos n\theta + C_2 \sin n\theta)$$
$$x_h = \sqrt{2}^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right)$$

Para concluir a solução, tomaremos uma solução particular de acordo com a função $f(n) = n + 2^n$. De fato, teremos que propor uma tentativa do tipo $x_p = an + b + K.2^n$, associação de uma função linear com uma exponencial de base 2.

Fazendo as devidas substituições, temos:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = n + 2^n$$
$$[a(n+2) + b + K.2^{n+2}] - 2[a(n+1) + b + K.2^{n+1}] + 2[an + b + K.2^n] = n + 2^n$$
$$an + b + 2K.2^n = n + 2^n$$

Fazendo as devidas correspondências, verifica-se que $a = 1$, $b = 0$ e $K = \frac{1}{2}$ tendo como solução particular a expressão

$$x_p = n + \frac{1}{2} 2^n = n + 2^{n-1}.$$

onde a solução geral vale

$$x_n = x_h + x_p$$
$$x_n = \sqrt{2}^n \left(C_1 \cos \frac{n\pi}{4} + C_2 \sin \frac{n\pi}{4} \right) + n + 2^{n-1}$$

Tomando os valores iniciais, chegamos às seguintes situações:

a) quando $x_0 = \frac{3}{2}$:

$$x_n = \sqrt{2}^n \left(C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4} \right) + n + 2^{n-1}$$

$$x_0 = \sqrt{2}^0 \left(C_1 \cos\frac{0.\pi}{4} + C_2 \sin\frac{0.\pi}{4} \right) + 0 + 2^{0-1}$$

$$\frac{3}{2} = C_1 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore C_1 = 1$$

b) quando $x_1 = 1$:

$$x_n = \sqrt{2}^n \left(C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4} \right) + n + 2^{n-1}$$

$$x_1 = \sqrt{2}^1 \left(C_1 \cos\frac{1.\pi}{4} + C_2 \sin\frac{1.\pi}{4} \right) + 1 + 2^{1-1}$$

$$1 = \sqrt{2} \left(1.\frac{\sqrt{2}}{2} + C_2.\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 1 + 1$$

$$1 = 1 + C_2 + 2$$

$$\therefore C_2 = -2$$

Fazendo com que a solução geral se apresente na forma de

$$x_n = \sqrt{2}^n \left(\cos\frac{n\pi}{4} - 2\sin\frac{n\pi}{4} \right) + n + 2^{n-1}$$

SITUAÇÃO 32 (a terceira para equação diferencial):

Determine a solução para o seguinte PVI

$$y'' - 2y' + 5y = 2\cos x \quad \text{com} \quad y(0) = -\frac{3}{5} \quad \text{e} \quad y'(0) = \frac{19}{5}$$

Solução: Seguindo a mesma linha de raciocínio tomada nas situações anteriores, temos a equação característica da homogênea, $r^2 - 2r + 5 = 0$, cujas raízes são $1 \pm 2i$. Logo, a solução da homogênea condiz com

$$y_h = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$$

Buscando, agora, uma solução particular e aderindo as explanações no capítulo 03, temos que, diante de $f(x) = 2\cos x$, devemos ter como tentativa, a função

$$y_p = K_1 \cos x + K_2 \sin x$$

com suas seguintes derivadas:

$$y_p = K_1 \cos x + K_2 \sin x$$
$$y'_p = -K_1 \sin x + K_2 \cos x$$
$$y''_p = -K_1 \cos x - K_2 \sin x$$

Seguindo, agora, com as substituições na equação não homogênea, vem:

$$y'' - 2y' + 5y = 2\cos x$$

$$(-K_1 \cos x - K_2 \sin x) - 2(-K_1 \sin x + K_2 \cos x) + 5(K_1 \cos x + K_2 \sin x) = 2\cos x$$

$$(4K_1 - 2K_2)\cos x + (2K_1 + 4K_2)\sin x = 2\cos x$$

Fazendo a associação permitida, temos o sistema

$$\begin{cases} 4K_1 - 2K_2 = 2 \\ 2K_1 + 4K_2 = 0 \end{cases}$$

onde é fácil ver que $K_1 = \frac{2}{5}$ e $K_2 = -\frac{1}{5}$. Tomando os valores encontrados, temos

$$y_x = y_h + y_p$$
$$y_x = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$

como solução geral da equação diferencial, restando, porém, os valores das constantes C_1 e C_2. E, para concluir, tomemos os valores iniciais do problema:

a) quando $y(0) = -\frac{3}{5}$:

$$y_x = e^x(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$
$$y_0 = e^0(C_1 \cos 2.0 + C_2 \sin 2.0) + \frac{2}{5}\cos 0 - \frac{1}{5}\sin 0$$
$$-\frac{3}{5} = C_1 + \frac{2}{5}$$
$$\therefore C_1 = -1$$

b) quando $y'(0) = \frac{19}{5}$:

$$y_x = e^x (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x$$
$$y'_x = e^x (-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x) - \frac{2}{5}\sin x - \frac{1}{5}\cos x$$
$$y'_0 = e^0 (-2C_1 \sin 2.0 + 2C_2 \cos 2.0) - \frac{2}{5}\sin 0 - \frac{1}{5}\cos 0$$
$$\frac{19}{5} = 2C_2 - \frac{1}{5}$$
$$\therefore C_2 = 2$$

E, finalmente, a solução da equação diferencial não homogênea é

$$y_x = e^x (-\cos 2x + 2\sin 2x) + \frac{2}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x\,.$$

Como foi mostrado nas soluções no decorrer das seis situações abordadas, observamos que há uma grande similaridade entre os procedimentos utilizados para se chegar à resposta da função procurada. Consequentemente, tais similaridades provam que é possível trabalhar com situações desta categoria, por mais que os cálculos ofereçam uma sistematização um pouco prolixa. Entretanto, deve-se lembrar do fato de que as equações diferenciais proporcionam problemas que resistem a esses métodos que foram ressaltados, e isso se deve ao seu nível bastante elevado de tais equações. Contudo, este trabalho exalta situações próximas da realidade do ensino básico, pois esses próprios métodos que foram esclarecidos serão suficientes para que ocorra uma conectividade entre as recorrências e equações diferenciais. E, para que a proposta ganhe mais clareza, trataremos no capítulo posterior os modelos matemáticos que estão em concordância com o ensino básico.

5 APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS NO ENSINO MÉDIO

Com tudo o que foi mostrado neste trabalho, através de teoremas, métodos para resoluções de problemas, abordagens meticulosas em torno dos assuntos de recorrências e equações diferenciais, especificando-se nas classes lineares, exibiremos a confirmação de como é possível se pensar em dá espaço a um assunto de cunho acadêmico, visto que tal tema rege, de maneira oculta, vários modelos de fórmulas que expressam, com muito vigor, situações que contemplam a variação, elemento essencial da natureza, e que se apresenta de maneira abundante nos conteúdos de matemática, física, biologia e química. E, este capítulo tem por meta o apontamento de algumas situações em que a equação diferencial traduz, de maneira elementar, problemas ligados a aspectos do tipo: crescimento exponencial de certa população, aplicações de um capital em juros compostos, em corpos com movimentos acelerados, em sistemas de molas, em alguns tipos de circuitos elétricos, resfriamentos de corpos, etc. Destacaremos algumas destas situações, acompanhadas de comentários breves, mas suficientes para a interpretação das mesmas.

5.1 Modelagem com equações diferenciais

Nesta seção, explanaremos alguns dos modelos matemáticos que se apresentam através do estudo de equações diferenciais. E muitos destes modelos, estão presentes nos currículos de escolas de nível básico. Perceberemos também, que outros destes modelos podem se agregar com os conteúdos abordados, visto que, os mesmos se associam com situações similares.

MODELO 01: Juros Compostos

Supondo que nas aplicações de juros compostos, os juros sejam calculados continuamente, veremos então, que tal crescimento é classificado de exponencial. Mas, para que isso seja comprovado, será feita uma interpretação utilizando equação diferencial.

Tomando dS/dt para representar a taxa de variação de valor do capital S em relação ao tempo t, tal variação será igual ao produto da taxa i com o valor do capital. Assim, a expressão

$$\frac{dS}{dt} = iS$$

que é uma equação diferencial em S, pode ser resolvida aplicando o método de variáveis separáveis, visto no capítulo 03.

$$\frac{dS}{dt} = iS$$

$$\frac{dS}{S} = idt$$

$$\int \frac{dS}{S} = \int idt$$

$$\ln S = it + K$$

$$S = e^{it+K}$$

$$S = e^{K}.e^{it}$$

$$S = S_0.e^{it}$$

Segundo as aplicações elementares de cálculo integral e tomando a constante e^K como o capital inicial S_0, constatamos que tal crescimento é exponencial quando os juros são considerados contínuos. Fazendo uma relação com a fórmula trabalhada no ensino médio, onde os juros são aplicados em:

a) uma vez ao ano: $S(t) = S_0(1+i)^t$

b) duas vezes ao ano: $S(t) = S_0\left(1+\frac{i}{2}\right)^{2t}$

c) n vezes ao ano: $S(t) = S_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt}$

Para essa última expressão, supondo que este investimento seja contínuo, ou seja, fazendo $n \to \infty$ e calculando o seu limite, temos:

$$\lim_{n\to\infty} S_0\left(1+\frac{i}{n}\right)^{nt} = S_0 e^{it}$$

Portanto, mostramos a relação entre os dois resultados: um que já faz parte do cotidiano do aluno de ensino básico e o outro, em relação a equação diferencial, que aponta como uma nova perspectiva de interpretação.

MODELO 02: Crescimento Populacional

Seja $y(t)$ uma função que aponte a população de certa espécie no instante t. Um modelo bastante simples é o que suponha que a taxa de variação de y é proporcional ao valor atual de y. Fazendo a interpretação em termos de equação diferencial, vem a igualdade:

$$\frac{dy}{dt} = ry$$

onde r tem papel de uma constante, sendo $r > 0$ teremos uma situação de crescimento da população e para uma população em decadência, teremos $r < 0$. Tal situação é familiar a de juros compostos, e devido a esse fato, a constante r é conhecida como taxa de crescimento ou declívio, dependendo da situação.

Resolvendo a equação diferencial de modo análogo à situação anterior, e considerando a condição inicial $y(0) = y_0$, temos:

De fato, tal resultado é também conhecido, não por essa perspectiva. E tal aspecto faz com que possamos compreender o modelo matemático para situações dessa categoria.

$$\frac{dy}{dt} = ry$$
$$\frac{dy}{y} = rdt$$
$$\int \frac{dy}{y} = \int rdt$$
$$\ln y = rt + K$$
$$y = e^{rt+K}$$
$$y = e^{K}.e^{rt}$$
$$y(t) = y_0 e^{rt}$$

MODELO 03: Decaimento Radiativo

Em Química e Biologia se destaca a importância de se estudar os níveis de átomo que variam em certo isótopo no decorrer do tempo, e tal importância se dá pelo fato de haver algumas situações do nosso cotidiano que se resolvem por análises feitas sobre tais átomos. De fato, baseado em estudos minuciosos, constatou-se que essa quantidade de átomos diminui e seu comportamento está relacionado com a equação diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

com k sendo uma constante positiva.

Assim, a taxa de átomos em relação ao tempo é proporcional, negativamente, a essa quantia no referido tempo, retratando assim, o decaimento dos átomos considerados no início do processo, tempo inicial. Vale ressaltar que essa situação requer um valor particular para a constante k, pois cada elemento químico se comporta de maneira ímpar no que diz respeito à perda de átomos.

Resolvendo essa equação, temos:

$$\frac{dN}{dt} = -kN$$

$$\frac{dN}{N} = -kdt$$

$$\int \frac{dN}{N} = \int -kdt$$

$$\ln N = -kt + C$$

$$N = e^{-kt+C}$$

$$N = e^{C}.e^{-kt}$$

$$N(t) = N_0 e^{-kt}$$

onde se percebe que $e^C = N_0$, considerando o fato de que $N(0) = N_0$ seja o valor inicial.

MODELO 04: Corrente Sanguínea x Drogas

Em certos casos, há pessoas que apresentam uma quantidade de drogas na corrente sanguínea acima do normal, e tal constatação é feita baseada no nível de tolerância que cada droga possui. Estudos realizados concluíram que o modelo que consegue apresentar a taxa de variação de droga na corrente sanguínea em relação ao tempo, acompanhando a eliminação da referida droga, é

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q,$$

onde Q é a quantia de droga presente no sangue do indivíduo e λ é definida como constante de eliminação, sendo a mesma $\lambda > 0$.

Ao resolver a dada equação

$$\frac{dQ}{dt} = -\lambda Q$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\lambda dt$$

$$\int \frac{dQ}{Q} = \int -\lambda dt$$

$$\ln Q = -\lambda t + C$$

$$Q = e^{-\lambda t + C}$$

$$Q = e^{C}. e^{-\lambda t}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\lambda t}$$

onde, de modo análogo à situação anterior, tendo em vista do valor inicial $N(0) = N_0$, temos que $e^C = N_0$. Encontrando assim, o modelo matemático para tal situação.

MODELO 05: Temperatura de Corpos

O estudo da temperatura ocorre de forma elementar, trabalhando basicamente as transformações de temperatura entre as escalas Fahrenheit, Kelvin e Celsius. Com o intuído de enriquecer tal assunto, podemos complementar o mesmo com a lei de resfriamento de Newton, onde tal lei determina a temperatura de um corpo imerso em certo ambiente, em relação ao tempo decorrido. De maneira formal, a seguinte lei afirma que:

A taxa de variação de temperatura $T(t)$ em relação ao tempo de um certo corpo é proporcional à diferença entre T e a temperatura A do ambiente em volta.

E a expressão para esta afirmação, vem através do modelo matemático

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T),$$

onde k é uma constante positiva.

É interessante ressaltar a interpretação nesta expressão. Temos dois casos a considerar:

a) quando $T > A$: teremos a expressão $A - T < 0$ implicando em $\frac{dT}{dt} < 0$, significando um decaimento de temperatura do corpo, ou seja, um resfriamento;

b) quando $T < A$: teremos a expressão $A - T > 0$ implicando em $\frac{dT}{dt} > 0$, designando assim, um aumento de temperatura do corpo, concluindo um aquecimento.

MODELO 06: Problemas Envolvendo Misturas

Em Química, podemos perceber uma presença notória de problemas que abordam misturas. E, alguns deles se remetem ao ambiente matemática pelo fato de tratar de fluxos, de substâncias formadas por soluto e solvente, contínuos em certos recipientes. Tais situações se apresentam muito em meios relacionados com poluição de lagos, em processos de obtenção de misturas na fabricação de determinados líquidos, etc. Assim, a equação que contempla tais situações é

$$\frac{dQ}{dt} = i_e c_e - i_s c_s \text{ ,}$$

onde, considerando-se um certo recipiente, temos:

a) $Q =$ quantidade, em gramas, de soluto presente no recipiente;

b) $r_e, r_i =$ taxa do fluxo de entrada e taxa do fluxo de saída, respectivamente. Onde

$$r = \frac{litros}{segundo}$$

c) $c_e, c_s =$ concentrações do fluxo de entrada e do fluxo de saída, respectivamente.

Vale ressaltar que estamos considerando que r_e, r_S e c_e são classificadas como constantes e c_s uma variável que se comporta em relação ao tempo t, pois a concentração dentro do recipiente varia e isso se deve ao fato de que a quantidade de soluto presente no recipiente, $Q(t)$, é a nossa variável em questão. Assim,

$$c_s = \frac{Q(t)}{V} \text{ .}$$

d) $V =$ volume, em litros, presente no recipiente.

Neste contexto, estamos considerando que o volume não se altera, e isso só ocorre em situações em que as taxas de fluxo de entrada e saída são idênticas. Se considerarmos o caso em que as taxas de fluxos são distintas, teremos outra variável se apresentando na situação, $V(t)$, passando a ter mais de uma variável e implicando em uma equação diferencial parcial.

Após o detalhamento dos elementos que se apresentam na equação diferencial, podemos reescrever a mesma na forma

$$\frac{dQ}{dt} = r_e c_e - r_s c_s$$
$$\frac{dQ}{dt} = r_e c_e - r_s \frac{Q}{V}$$
$$\frac{dQ}{dt} = r_e c_e - \frac{r_s}{V} Q$$

E, organizando no formato de uma equação diferencial linear, temos:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r_s}{V} Q = r_e c_e$$

Pelo que foi abordado no capítulo 03, a solução se dá usando o método do fator integrante. Logo, temos:

Denominando $\frac{r_s}{V} = K_1$ e $r_e c_e = K_2$, vem

$$\frac{dQ}{dt} + K_1 Q = K_2$$

Calculando o fator de integração

$$p(\varepsilon) = e^{\int_0^t K_1 dx}$$
$$p(\varepsilon) = e^{K_1 t}$$

E multiplicando na equação diferencial

$$\frac{dQ}{dt} e^{K_1} + K_1 e^{K_1} Q = K_2 e^{K_1}$$
$$(e^{K_1} Q)' = K_2 e^{K_1}$$
$$\int (e^{K_1} Q)' = \int K_2 \, e^{K_1}$$
$$e^{K_1} Q = K_2 e^{k_1} t + C$$
$$Q(t) = K_2 t + C e^{-K_1}$$

Tendo assim, uma expressão que indica a quantidade de soluto de um determinado recipiente, de acordo com o tempo.

MODELO 07: Velocidade e Aceleração

Os conceitos de velocidade e aceleração são comumente debatidos em sala de aula, mas os modelos matemáticos são apenas expostos em lousa, tornando um pouco sem graça e consequentemente desvalorizando a explanação de tais temas. Vejamos por outro ângulo tais elementos.

A velocidade se dá pela variação do espaço em relação ao tempo, ou seja

$$v = \frac{dx}{dt}$$

e a aceleração se apresenta com a variação da velocidade em relação o tempo, assim vem

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$a = \frac{\left(d\,\frac{dx}{dt}\right)}{dt}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Tomando por base a segunda lei do movimento de Newton, onde afirma que

$$F = m.a$$

Supondo que se tenha conhecimento de F, isso implica que a aceleração é uma constante, pois

$$m.a = F$$

$$a = \frac{F}{m}$$

E, utilizando das expressões da aceleração e velocidade, acima citadas, temos:

$$\frac{dv}{dt} = a$$

$$\int \frac{dv}{dt}dt = \int a dt$$

$$v = at + K$$

$$v = v_0 + at$$

onde se impõe que $v(0) = v_0$.

Usando o fato de que $v = v_0 + at$, teremos:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int (v_0 + at)\, dt$$

$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 + K$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Visto que $x(0) = x_0$, ou seja, a posição inicial.

Assim, através de uma simples fórmula que retrata a segunda lei de Newton, podemos mostrar a origem das equações do movimento variado, isso com o auxílio das equações diferenciais.

MODELO 08: Circuitos Elétricos

No campo da Física, é imprescindível o estudo voltado à eletricidade. Tendo em vista tornar este tópico mais completo, podemos complementar o assunto fazendo uma abordagem do fluxo de corrente em circuitos elétricos simples, onde a corrente I (em ampères) é uma função do tempo t; a resistência R (em ohms), a capacitância C (em farads) e a indutância L (em henrys) são todas constantes positivas conhecidas, supostamente. Esse fluxo é regido pela segunda lei de Kirchhoff, onde a mesma se define como:

Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.

Amparado pelas definições elementares da eletricidade, sabe-se que:

a) a queda de tensão no resistor é IR;

b) a queda de tensão no capacitor é Q/C;

c) a queda de tensão no indutor é $L\,dI/dt$.

Assim, diante da lei de Kirchhoff em destaque, a equação que retrata o comportamento da corrente e da carga elétrica em um circuito RLC simples é

$$L\frac{dI}{dt} + RQ + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Como existe uma relação entre a corrente I e a carga total Q (em coulombs) presente no capacitor, tal relação se retrata na equação

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Afirmando que a variação da taxa de carga total no capacitor em relação ao tempo condiz com a corrente. Sabendo-se disso e substituindo na equação que retrata a lei de Kirchhoff, vem

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Seguindo a linha de pensamento, trataremos de equações de primeira ordem que são expressas conforme a caracterização do circuito. Assim, podemos ter:

a) quando temos o circuito LR, contendo um condutor com uma indutância de L henries, um resistor com uma resistência de R ohms (Ω) e uma fonte eletromotiva (fem), mas sem capacitor, teremos uma redução na equação que expressa tal situação, retratada em uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t) \rightarrow LI' + RI = E(t)$$

b) quando se tem o circuito RC, contendo um resistor (R oms), um capacitor (C farads), um interruptor, uma fonte de fem, mas sem indutor, implicando em $L = 0$, resultará em uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t) \rightarrow RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

Observando as três equações que contemplam essa sessão destinada aos circuitos elétricos, é notório que a primeira equação se enquadra na classe das equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes. Já as duas últimas são resolvidas aplicando o método do fator de integração, método este que trabalha com equações diferenciais de primeira ordem.

6 CONCLUSÃO

Depois de algumas conversas com o meu orientador, o professor Dr. Marcos Ferreira de Melo, ficou decidido escrever sobre o tema que envolvia recorrências lineares, assunto esse presente na disciplina de Matemática Discreta do PROFMAT, onde foi cursada por mim no período de 2014.1. Os diálogos apontaram para uma relação singular entre recorrências e equações diferenciais, criando uma expectativa muito boa para o desenvolvimento deste trabalho.

Com a intenção de colaborar com uma nova perspectiva relacionada com as fórmulas que fazem parte do currículo do ensino básico, foi possível compreender que existem muitas dessas fórmulas que são expressas a partir de métodos que estão diretamente ligados ao estudo das equações diferenciais. Então, foi percebido que ocorre uma associação formada entre as recorrências, as equações diferenciais e os modelos matemáticos apresentados nas disciplinas de matemática, física, química e biologia. As recorrências possuem um procedimento de resolução que se enquadra em uma determinada classe de equações diferenciais, e tais equações são os alicerces que expressam uma boa quantidade de fórmulas agregadas ao ensino básico.

Assim, os argumentos usados neste trabalho servirão para mostrar aos docentes e alunos do ensino básico a importância de expor os processos usados para se chegar às fórmulas usuais, dando um contexto diferente do que se apresenta nos livros didáticos. Com isso, será possível a valorização da ideia original, onde a mesma é apresentada através de interpretações relacionadas aos fenômenos que cercam tão modelo matemático. E os professores terão em suas mãos um material que poderá ser útil também para o seu aprimoramento a assuntos que contemplam os temas abordados aqui, pois as ferramentas pertencentes às recorrências lineares são essências para muitos problemas relacionados à matemática discreta; já as equações diferenciais disponibilizam uma gama de situações problemas que poderão ser conferidos nas referências bibliográficas. E mais, os problemas presentes nas fontes de pesquisa podem ser trabalhadas com mais afinco por aqueles que tenham interesse em se aprofundar nas equações diferenciais, visto que, muitos deles poderão servir como apoio pedagógico para os docentes das áreas de matemática, física, química e biologia.

Com tudo o que foi apresentado neste trabalho, espera-se que o mesmo sirva para o docente aprimorar as justificativas, interpretações e ideias que se têm dos modelos matemáticos, visando sempre buscar argumentos plausíveis que atraem os olhares e a curiosidade dos alunos. E mais, que seja percebido e constatado que sempre é possível para o docente alimentar novas perspectivas com relação à abordagem de temas que contém relações, mesmo que sejam implícitas, com assuntos de nível superior, pois este trabalho é uma prova viva de que podemos criar um elo entre essas duas esferas do ensino, escola e universidade, com o propósito de aprimorar a qualidade do ensino básico.

REFERÊNCIAS

AYRES Jr., Frank, Mendelson, Elliot. **Teoria e Problemas de Cálculo.** Tradução: Maria Lúcia Tavares de Campos, Marlene Dieguez Fernandes. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007.

BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C.. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.** Tradução: Valéria de Magalhães Iorio. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

EDWARDS Jr., C. H.; PENNEY, David E.. **Equações Diferenciais Elementares** com Problemas de Contorno. Tradução: Celso Wilmer, Lafayette Bezerra de Castro.3.ed. Rio de Janeiro: Editora Prentice-Hall do Brasil Ltda., 1995.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo, vol. 2.** 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HOFFMANN, Laurence D.. **Cálculo: um curso moderno e suas aplicações.** Tradução: Regina Szwarcfiter. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1982

LIMA, Elon Lages. *et al*.. **A Matemática do Ensino Médio, vol. 2.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Temas e Metas, 6**. São Paulo: Atual, 1988.

OLIVEIRA, Edmundo Capelas de; Tygel, Martin. **Métodos Matemáticos para Engenharia.** Rio de Janeiro: LTC, 2005.

SANTOS, José Plínio O., *et al*.. **Introdução à Análise Combinatória.** 4. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

STEWART, James. **Cálculo, volume 1.** 7. ed. Tradução: EZ2 translate. São Paulo: Cengage Learnig, 2014.