



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional**  
**PROFMAT**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Aplicações da Geometria Fractal: uma proposta  
didática para o Ensino Médio.**

**Fernando Antônio Cavalcante Mendonça**



Maceió, Julho de 2016.





UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

**FERNANDO ANTÔNIO CAVALCANTE MENDONÇA**

**APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA  
O ENSINO MÉDIO.**

MACEIÓ, AL  
2016

FERNANDO ANTÔNIO CAVALCANTE MENDONÇA

**APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA PARA  
O ENSINO MÉDIO.**

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

**MACEIÓ, AL  
2016**

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**

Bibliotecário Responsável: Janaína Xisto de Barros Lima

M539a Mendonça, Fernando Antonio Cavalcante.  
Aplicações da geometria fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio / Fernando Antonio Cavalcante Mendonça. - 2016.  
158 f. : il.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.  
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2016.

Bibliografia: f. 149-152.  
Anexo: f. 153-158.

1. Geometria – Ensino estudo e ensino. 2. Geometria fractal. 3. Educação básica. 5. Fractais na natureza. I. Título.

CDU: 514: 371.315

**Folha de Aprovação**

FERNANDO ANTÔNIO CAVALCANTE DE MENDONÇA

**APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL: UMA PROPOSTA DIDÁTICA  
PARA O ENSINO MÉDIO**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 06 de julho de 2016.

Banca Examinadora:



Prof. Dr Ediel Azevedo Guerra - UFAL (Presidente)



Prof. Dr. Amauri da Silva Barros - UFAL



Prof. Dr Vicente Francisco de Sousa Neto - UNICAP

## AGRADECIMENTOS

*Agradeço a Deus, pela minha vida, e por todos os acontecimentos, que servem de aprendizado para continuarmos fiéis a seus ensinamentos.*

*À minha família, pela paciência e compreensão ao longo dessa jornada.*

*Ao meu orientador no presente trabalho, pelo exemplo profissional, a disponibilidade em dividir seu vasto conhecimento, sempre com muita solicitude, além de seu equilíbrio ao lidar com situações desafiadoras.*

*Aos professores do curso, de quem só levo bons exemplos e boas recordações, pelo estímulo ao longo do curso e pela generosa colaboração nesta reta final. Também, aos meus colegas do curso, pela cumplicidade nestes anos de (árdua) caminhada, pelas diversas vezes em que “quebramos a cabeça” juntos, meu muito obrigado.*

*Agradeço ainda aos professores e colegas de turma do IFAL, no Curso de Licenciatura em Matemática, onde esse percurso se iniciou.*

*“A matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o universo”.*

*(Galileu Galilei)*

## RESUMO

Esta dissertação tem como objetivo geral propor a aplicação de atividades envolvendo a Geometria fractal para estudantes do Ensino Médio. Ela consiste fundamentalmente de oficinas a serem realizadas a partir da divisão das turmas em grupos, de forma a dinamizar as atividades e estimular a criação coletiva. Após conceituar os fractais, apresentando a história deles e os exemplos clássicos e experimentais *consagrados*, foram elaboradas quatro oficinas, totalizando doze atividades, nas quais os alunos, divididos em grupos, poderão utilizar habilidades geométricas (principalmente), algébricas, aritméticas e trigonométricas, para compreensão das propriedades da geometria fractal. Propõe-se ao docente a introdução das ideias de limite e de recorrência, estreitamente ligadas aos fractais e que auxiliarão na resolução dos problemas. A escolha do tema parte da pretensão de dinamizar o ensino de matemática da educação básica, mostrando que essa disciplina está presente no cotidiano, na natureza, e, além disso, que o saber matemático não se trata de um saber finalizado ou acabado, mas sim com amplas subáreas em expansão e a expandir.

**Palavras-chaves:** Geometria Fractal. Ensino de Matemática. Educação Básica. Fractais na natureza.



## ABSTRACT

The general objective of this dissertation is to propose the implementation of activities involving the fractal geometry for high school students. It mainly consists of workshops to be held from the division of classes into groups in order to streamline activities and stimulate collective creation. After conceptualizing fractals, presenting their history and the classics and experimental examples consecrated, were prepared four workshops totaling twelve activities in which the students, divided into groups may use geometric skills (mostly), algebraic, arithmetic and trigonometric for understanding of the properties of fractal geometry. It is proposed to teaching the introduction of the limit of ideas and recurrence, closely linked to fractals and assist in solving the problems. The choice of the theme of the intention to boost basic education mathematics teaching, showing that this discipline is present in everyday life, in nature, and, moreover, that the mathematical knowledge it is not a knowledge completed or finished, but with large subareas expanding and to expand.

**Key-words:** Fractal Geometry. Mathematics Teaching. Basic education. Fractals in nature.

## SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>CAPÍTULO 1 – FRACTAIS: UM POUCO DE HISTÓRIA E ALGUMAS CURIOSIDADES .....</b>	<b>12</b>
<b>1.1 CONCEITUAÇÃO DOS FRACTAIS .....</b>	<b>13</b>
<b>1.2 UMA BREVE HISTÓRIA DAS ORIGENS DOS FRACTAIS .....</b>	<b>16</b>
<b>1.2.1 OS FRACTAIS NA HISTÓRIA ANTIGA .....</b>	<b>18</b>
<b>1.2.2 CARÁTER FRACTAL DO UNIVERSO .....</b>	<b>19</b>
<b>1.3 ALGUMAS CURIOSIDADES SOBRE OS FRACTAIS .....</b>	<b>20</b>
<b>CAPÍTULO 2 – FRACTAIS CLÁSSICOS E EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>31</b>
<b>2.1 FRACTAIS DETERMINADOS POR SISTEMAS DE FUNÇÕES ITERADAS .....</b>	<b>31</b>
<b>2.1.1 CONJUNTO DE CANTOR .....</b>	<b>32</b>
<b>2.1.2 TAPETE DE SIERPINSKI .....</b>	<b>33</b>
<b>2.1.3 TRIÂNGULO DE SIERPINSKI .....</b>	<b>37</b>
<b>2.1.4 CURVA DE PEANO .....</b>	<b>40</b>
<b>2.1.5 CURVA DE HILBERT .....</b>	<b>41</b>
<b>2.1.6 CURVA DE KOCH .....</b>	<b>44</b>
<b>2.1.7 FLOCO DE NEVE DE KOCH .....</b>	<b>45</b>
<b>2.1.8 CURVA DO DRAGÃO HARTER-HEIGHWAY .....</b>	<b>49</b>
<b>2.1.9 ESPONJA DE MENGER .....</b>	<b>51</b>
<b>2.2 FRACTAIS DETERMINADOS POR RECORRÊNCIA .....</b>	<b>55</b>
<b>2.2.1 FRACTAL DE LYAPUNOV .....</b>	<b>55</b>
<b>2.2.2 CONJUNTOS DE JULIA .....</b>	<b>58</b>
<b>2.2.3 CONJUNTO DE MANDELBROT .....</b>	<b>59</b>
<b>2.3 FRACTAIS ALEATÓRIOS .....</b>	<b>62</b>
<b>2.3.1 VOO DE LÉVY .....</b>	<b>63</b>
<b>2.4 FRACTAIS ARTÍSTICOS .....</b>	<b>65</b>
<b>CAPÍTULO 3 – GEOMETRIA FRACTAL: UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA PARA APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO .....</b>	<b>70</b>
<b>3.1 OFICINA SOBRE FRACTAIS BASEADOS NA CURVA DE KOCH .....</b>	<b>71</b>

<b>3.2</b>	<b>OFICINA SOBRE FRACTAIS BASEADOS NA CESTA DE SIERPINSKI.....</b>	<b>88</b>
<b>3.3</b>	<b>OFICINA SOBRE FRACTAIS BASEADOS NO FRACTAL DE DÜRER .....</b>	<b>99</b>
<b>3.4</b>	<b>OFICINA SOBRE FRACTAIS DO TIPO ÁRVORES.....</b>	<b>122</b>
	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>147</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>149</b>
	<b>ANEXO.....</b>	<b>153</b>

## Introdução

O presente trabalho tem por objetivo, naturalmente, a conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Porém, esse fato não se isola de todo um percurso de quatro períodos semestrais do PROFMAT: vários dos conteúdos compreendidos e apreendidos no Programa são utilizados no trabalho que o conclui, isto é, devem-lhe ser inerentes. Ainda assim, resta ao mestrando uma gama de temáticas que, utilizando-se da carga conteudística do Mestrado, possam aplicar-se ao ensino de Matemática da Educação Básica. Tem-se em mente, assim, a dificuldade de escolha do tema da dissertação, embora pesem seletivamente as preferências e as possibilidades de pesquisa e aplicação.

Neste sentido, orientando e orientador acharam interessante enveredar pela Geometria Fractal, que pode abranger desde a matemática de nível fundamental até a matemática (e outras ciências) em nível de doutorado, a depender do enfoque pretendido, isto é, desde operações básicas até sistemas não-lineares complexos dos Sistemas Dinâmicos. Uma motivação imprescindível para estudar a Geometria Fractal é a observação de elementos da natureza: aproximam-se muito mais de fractais do que de figuras da Geometria Euclidiana, e, no entanto, aquela não é sequer citada na Educação Básica, ao contrário desta. Além de tudo isto, no estudo de Geometria Fractal há margem para a criação de inúmeros problemas e para a utilização de *softwares* para a geração dos fractais, enriquecendo as discussões, sobretudo para aplicação em turmas de Ensino Médio, que possuem maior base geométrica para o cálculo de áreas e volumes, e podem possuir maior maturidade para compreender e

explorar conteúdos não abordados na Educação Básica, como noções de limites ou recorrências.

Destarte, a dissertação está estruturada em três capítulos. No primeiro capítulo, são conceituados os fractais e apresentadas suas principais propriedades e ocorrências naturais. Também é contada a história dos fractais, mencionando-se seus principais contribuidores, especialmente o matemático polonês/francês *Benoît B. Mandelbrot*, que cunhou o termo, “compilou” diversas figuras desenvolvidas anteriormente sob a nomenclatura de *fractais*, e desenvolveu tantos outros, inclusive com a ajuda computacional. Mostram-se ainda algumas curiosidades, como uma cidade-fractal, e características fractais em objetos inusitados.

No segundo capítulo, são apresentados os fractais clássicos, desenvolvidos por matemáticos renomados, de séculos anteriores à Mandelbrot, que inclusive na época não eram chamados de fractais, e sim de *monstros matemáticos*. Mostram-se também fractais mais experimentais, com uso de recursos gráficos ou sistemas de equações mais complexas, altamente explorados por Julia, Fatou e Mandelbrot; e por fim, alguns fractais computacionais criados com finalidades artísticas, equivalentes a uma pintura ou fotografia, no que se enveredam para o campo das artes plásticas e da arte *pop* contemporânea.

Finalmente, no terceiro capítulo, tendo como base os conceitos apresentados no primeiro capítulo e exemplos tradicionais presentes no segundo capítulo, são propostas ao professor de matemática da educação básica quatro oficinas que visam aplicar a geometria fractal no Ensino Médio, totalizando doze atividades, com resolução aqui devidamente sugerida.

O texto é concluído com as considerações finais, em que se retoma a discussão de diversificar o conteúdo de matemática do Ensino Médio, no sentido de despertar a curiosidade discente para novos temas da matemática e mostrar-lhes que, ao contrário do que aparenta, trata-se de uma ciência em plenas atividades e descobertas, ao invés do aspecto engessado com que costuma ser tratada perante as turmas da educação básica.

Não menos importante, o anexo nos apresenta diversas imagens naturais em que os fractais podem ser imediatamente identificados, fazendo alusão ao capítulo inicial, por atestar concretamente a ocorrência dos fractais em diversos fenômenos, manifestações, enfim, *criações*, da natureza.

# Capítulo 1

## Fractais: Um pouco de história e algumas curiosidades

*“Alguma razão para a geometria não descrever o formato das nuvens, das montanhas, das árvores ou a sinuosidade dos rios? Nuvens não são esferas, montanhas não são troncos de cones, árvores não são hexágonos e muito menos os rios desenham espirais”.* (MANDELBROT<sup>1</sup>, 1983)

Os fractais são formas geométricas elementares, cujo padrão pode repetir-se indefinidamente, gerando complexas figuras que preservam em cada uma de suas partes a singularíssima propriedade de representar o todo.

O desenvolvimento da matemática e seus desdobramentos, em muitos casos, encontra-se atrelado a aplicações que ampliam e aperfeiçoam o modo de vida das pessoas e explicam diversos fenômenos que ocorrem a sua volta.

Neste sentido, existe um interessante tópico da matemática que consegue apresentar uma modelagem geométrica de diversos elementos encontrados na natureza, servindo como

---

<sup>1</sup> Benoît B. Mandelbrot (1924-2010) foi um matemático francês; ajudou a cunhar o termo *fractal* e desenvolveu sobremaneira a Geometria Fractal, inclusive sendo pioneiro na geração de imagens de fractais via computação gráfica.

suporte para a explicação de fenômenos de diversas áreas, como medicina, engenharia, física, química, biologia, geografia, dentre outras diversas áreas do conhecimento.

Além disto, este mesmo tópico interessante é utilizado para a construção de modelos matemáticos com os quais podem ser explicados diversos fenômenos físicos, como os relacionados à dinâmica de fluidos e à mecânica celeste.

Este tema da matemática tem por nome *Geometria Fractal*, ou *estudo dos fractais*.

## 1.1 Conceituação dos Fractais

A respeito da etimologia da palavra *fractal*, afirma-se por [1] que o emprego do termo fractal pode ser temporalmente localizado no ano de 1975, quando Benoît Mandelbrot pela primeira vez dele fez uso. Quando, na iminência da completude da sua primeira grande obra sobre o assunto, Benoît Mandelbrot sentiu a necessidade de encontrar um nome para descrever a geometria com que buscava representar as reais formas da natureza. Uma consulta a um dicionário de latim resultou no encontro do adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa *quebrar*. Foi assim criada a palavra fractal. A partir deste trabalho de Mandelbrot, questões relativas à similitude entre uma figura e a sua ampliação começaram a aparecer, cada vez com maior frequência, na literatura científica.

Pode-se conceituar a Geometria Fractal como sendo uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza [2], sendo uma área da matemática que compõe a ciência do Caos, juntamente com os Sistemas Dinâmicos. A respeito de seu alcance na natureza, Barnsley afirma (citado por [2]):

*“A geometria fractal fará com que você veja as coisas (de modo) diferente. É perigoso ler mais. Você arrisca perder a visão infantil de nuvens, florestas, flores, galáxias, folhas, penas, rochas, montanhas, torrentes de água, tapetes, tijolos e muito mais. Nunca mais você interpretará estes objetos da mesma forma”.* (MICHEL, 2008.)

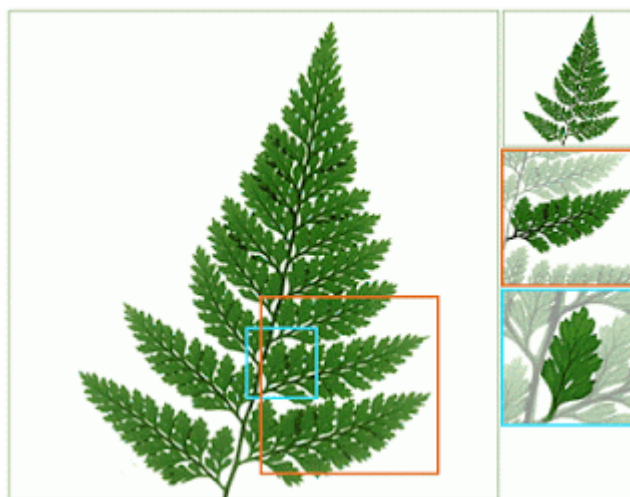
Exemplifica-se ainda como um exemplo de fractal (ou na verdade um pseudo-fractal, como veremos adiante) a couve-flor, dada a sua autossemelhança, independente de qual pedaço ampliarmos; este fenômeno de semelhança ocorre nas estruturas das plantas, das montanhas, do cosmos, do cérebro, etc., ao contrário de poucas formas regulares na natureza, como uma laranja ou uma melancia [2].

Numa área com mais matemática do que geralmente supomos – a Música, [3] relacionou as transformações ocorrentes nas características musicais dos cantos religiosos populares católicos e na própria Igreja com as qualidades dos fractais, principalmente a

propriedade de autossimilaridade das partes em relação ao todo, e o modo aparentemente caótico como as mudanças ocorridas se propagaram, e hoje cada parte da Igreja funciona como um pequeno exemplar do seu funcionamento em escalas maiores, tal como ocorre na Geometria Fractal.

À primeira vista, a propriedade latente dos fractais é a autossimilaridade: a mesma estrutura é repetida infinitamente, isto é, sem rigor matemático; conceituamos, então, que um pedaço de uma curva ou de uma imagem se repete em proporções menores. Percebemos melhor essa propriedade na figura 1, cuja construção obtém-se por recursividade. Percebe-se a autossimilaridade, ou autossimilaridade, quando se observa a repetição da estrutura do galho nos ramos menores que o compõem, e a repetição da mesma estrutura nas folhas que compõem os ramos.

Figura 1 – Exemplo de uma estrutura fractal na samambaia



Fonte: [4].

Fazemos a seguinte ressalva quanto à figura anterior: se a estrutura possui repetições na forma, mas que não sejam infinitamente, seria mais adequado denominá-la como um *pseudo-fractal*. Daí, surge outra propriedade, que diferencia os fractais das figuras geométricas com as quais estamos mais familiarizados: a complexidade infinita. Em decorrência dessa propriedade dos fractais, temos que o fractal possui determinada característica *macro*, e ela se mantém, à medida que vamos percorrendo a figura em escalas menores, iterando esse *zoom* infinitamente. Consideremos tanto os *pseudo-fractais* quanto os *fractais verdadeiros* como fractais.

Na natureza, conforme anexo, diversos elementos apresentam a forma dos fractais, ou podem ser modelados através deles, com excelente correlação.



Um conceito que ajuda muito a entender os fractais é o de *dimensão fractal*, que se diferencia da dimensão euclidiana e da dimensão topológica, que podem ser encontrados em [5], que apresenta a seguinte definição para a dimensão  $D$  de um fractal:

Definição 1:

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}},$$

onde  $N$  é o número de partes iguais obtidas da divisão da figura, e  $r$  é o coeficiente de redução. Adiante, esse conceito será melhor explorado.

Algumas aplicações do conceito de dimensão fractal, por [1], são as seguintes: a) o diagnóstico de doenças na Medicina, em que um dos mais significativos usos é a análise de imagens de tumores na detecção de patologias cancerígenas (a prática médica observa se há, nesses casos, uma diferença na dimensão fractal entre os tecidos sadios e os doentes); b) na medição da densidade dos minerais e da descontinuidade das rochas, na Geologia; c) na análise da rugosidade de fungos e de corais, na Biologia; d) na tecnologia de fabricação de antenas, em que as antenas fractais respondem em várias frequências, apresentando um ganho significativo em comparação às antenas tradicionais, inclusive na recepção de banda larga; e) na análise de falhas avaliadas automaticamente, na produção têxtil; f) no solo; g) na chuva h) na economia; i) na ecologia.

Na geometria clássica, cujas bases foram desenvolvidas por Euclides, as formas são mais simples: enquanto a geometria euclidiana trata “apenas” das três dimensões, a dimensão de um fractal mostra o espaço que ele ocupa, associando-o à sua irregularidade, à sua complexidade infinita e à sua fragmentação. Devido a estes “desdobramentos” infinitos dos fractais, dizemos que eles possuem dimensão fracionária.

Os matemáticos, na seguinte ordem cronológica: Karl Weierstrass, Georg Cantor, Aleksandr Lyapunov, Giuseppe Peano, Helge von Koch, Waclaw Sierpiński, Paul Pierre Lévy, e os cientistas da NASA John Heighway, Bruce Banks e William Harter, desenvolveram curvas formadas por funções iteradas, por recorrência ou por processos aleatórios, e que posteriormente foram chamadas de fractais por Mandelbrot, que, com o uso da informática, forneceu as bases da Geometria Fractal, apresentando formas irregulares, imperfeitas, figuras que não se enquadram na geometria tradicional e que aproxima (ou modela) melhor as formas encontradas na natureza, a exemplo dos ramos das árvores, das nuvens, dentre outros. Daí, os fractais poderem ser chamados de *a Geometria da Natureza*. É imprescindível mencionar as contribuições dos matemáticos Gaston Julia e Pierre Fatou, cujos conjuntos foram generalizados por Mandelbrot.

Com base na natureza de formação dos fractais, podemos classificá-los nos seguintes grupos:

- a) Fractais determinados por recorrência, sendo denominados também como *fractais de fuga do tempo*;
- b) Fractais determinados por Sistemas de funções iteradas, que consiste no estabelecimento de uma lei de formação geométrica para desenvolver o fractal;
- c) Fractais aleatórios, que usa a probabilidade ou a aleatoriedade para ser concebido.

Investigaremos alguns exemplos de fractais enquadrados nesses grupos supracitados no capítulo seguinte.

## 1.2 Uma breve história das origens dos Fractais

De acordo com [6], a intenção de explorar-se a Geometria Fractal surgiu através da observação das formas naturais: as nuvens, as montanhas, os litorais e as cascas das árvores. Ao contrário dessas formas, a Geometria que sempre foi estudada anteriormente, com base Euclidiana, frequentemente era exposta de uma forma menos conexas à natureza, pois não era capaz de descrever as formas naturais supramencionadas.

Quando alguns matemáticos dos séculos XIX e XX, sobretudo os que já citamos, perceberam esses aspectos que fugiam do conteúdo abarcado pela Geometria Euclidiana, debruçaram-se no estudo destas “formas sem formas”, consideradas na época *monstros matemáticos*. Mais precisamente na virada entre os séculos XIX e XX, matemáticos como Cantor, Helge von Koch, Gaston Julia e Pierre Fatou lançaram as bases para o desenvolvimento dos fractais, pois já formularam e avaliaram objetos da matemática que posteriormente foram chamados de fractais, sendo essas experiências o pontapé inicial para desembocar no que chamamos de Geometria Fractal. Esses estudos permaneceram no limbo, de certa forma, dada a rejeição pela comunidade matemática a partir de então, que consideravam tais objetos como “patologicamente diferentes” de qualquer coisa encontrada na natureza, além de monstruosos.

Neste sentido, entre os anos 60 e 70 do século XX, alguns matemáticos, notavelmente o matemático Benoît Mandelbrot, perceberam-se diante de um desafio: representar eficientemente as formas naturais, e assim idealizou e desenvolveu a Geometria Fractal, com a conotação de Geometria da Natureza, utilizando-a em algumas aplicações. Nesta teoria, ele descreveu vários modelos irregulares ou abundantemente reentrantes por meio de uma família de formas, a qual batizou de *fractais*, cuja raiz etimológica lhe confere

um conceito relacionado às características naturais dos objetos, que parecem fragmentados, irregulares, complexos. Assim, revisaram as teorias anteriores e as desenvolveram, utilizando-se também como aliada uma nova e poderosa ferramenta: o computador.

Conforme [7] afirma, profissionais de diversas especialidades se depararam com problemas originados da natureza, e se utilizaram do desenvolvimento da ciência do *Caos* e da Geometria Fractal para estabelecer padrões no que aparentemente era irregular, ou *caótico*. Assim, assuntos como a desordem na atmosfera, a turbulência nos fluidos, a variação populacional de espécies, as oscilações do coração e do cérebro, a estrutura microscópica e altamente ramificada dos vasos sanguíneos ou dos alvéolos pulmonares, as cotações da bolsa, os formatos das nuvens, os relâmpagos, as formas de distribuição estelares, dentre outros, puderam ser estudados através de ferramentas novas e que padronizam esses aspectos irregulares, ou, de outra forma, põem *ordem no caos*, aproximando formas naturais muito mais precisamente do que ao utilizar a Geometria Euclidiana.

Acerca do idealizador/compilador da Geometria Fractal, conforme [7], Mandelbrot nasceu na cidade de Varsóvia, em 1924, sendo sua família de origem judia, e se mudaram para Paris em 1936. Em decorrência do advento do nazismo alemão, tiveram que se refugiar diversas vezes, até que Paris libertou-se do domínio germânico e Mandelbrot pôde ingressar na Escola Politécnica. Nesta, havia um grupo chamado *Bourbaki*, no qual jovens matemáticos buscavam formalizar a matemática no sentido de restringir as influências da geometria, o que conseguiram efetivar através do método axiomático. Apesar desse grupo estar em voga na época, e ainda mais por seu tio participar dele, Mandelbrot não compartilhou destas ideias predominantemente abstratas do grupo, preferindo as linhas de pensamento de Gaston Julia e de Paul Lévy.

Posteriormente, foi estudar Ciências Aeroespaciais em 1948, nos Estados Unidos, e depois foi trabalhar na IBM. Nesta, percebendo a forma aleatória e irregular dos ruídos existentes nas redes telefônicas utilizadas em rede entre os computadores, Mandelbrot traçou uma analogia entre estes ruídos e o Conjunto de Cantor, que será apresentado posteriormente. Este Conjunto é ordenado, isto é, tem um modelo de formação, mas aparenta ser caótico. Outro exemplo de situação caótica percebida por Mandelbrot foi na flutuação de preços do algodão, cuja série ele obteve desde o início do século 20, e conseguiu perceber *ordem* nestes dados, aparentemente caóticos, utilizando o mesmo raciocínio que o levou a lançar as bases da Geometria Fractal, que se caracteriza por uma aparente irregularidade, por reentrâncias, cavidades, rugosidades, que são características mais comuns na natureza do que as “perfeições” da Geometria Euclidiana.

O estudo da Geometria Fractal por alunos da Educação Básica, ou pelo menos um contato inicial com ela, justificar-se-ia mesmo que não houvesse aplicações dos fractais, como ocorre para diversos cientistas de diversas áreas do conhecimento, pois o incrível apelo estético de vários fractais proporciona-nos outras maneiras de encarar a Matemática, como uma ciência intimamente ligada à arte e ao belo no que tange aos sentidos.

Após apresentar alguns dados acerca do surgimento do termo e do raciocínio sobre a geometria fractal, em [8] são mostradas histórias e mitos a respeito da trajetória do homem, seguindo uma analogia interessante dos fractais com a história da humanidade, através da aplicação do conceito de fractais à História, visto que para os autores a humanidade, em diferentes épocas, depara-se com problemas similares e age conforme orientações também similares, encerrando uma autossimilaridade, a exemplo dos fractais. O objetivo da obra em questão, possivelmente, seja traçar uma analogia entre o conceito de fractal (autossimilar em diferentes escalas e repetido indefinidamente) e a História da Humanidade, isto é, afirmar que a História da Humanidade “é um fractal”, por pelo menos dois fatores significativos: (i) a presença da ideia de fractais na História Antiga (o grego Anaxágoras, no séc. V a.C., já intuiu que todas as coisas eram feitas de *homeomerias*), e (ii) a caracterização do universo como sendo um fractal.

### 1.2.1 Os fractais na História Antiga

Conforme se lê em [8], o conceito de fractal já fora intuído pelo grego Anaxágoras, nascido em Clazômena nos primeiros anos do séc. V a.C. Refletindo sobre a formação do Universo e a existência de algum elemento essencial da vida, isto é, um componente formador presente em toda a matéria, Anaxágoras concluiu que existe uma substância em quantidade infinita e que se apresenta das mais variadas formas, e chamou essa matéria-prima de *homeomerias*, cujos radicais gregos, formadores da palavra, significam: *homeo*: iguais, semelhantes; e *méros*: parte, porção. Logo, as homeomerias seriam simples fragmentos que, semelhantes entre si, preservam as propriedades do todo. As homeomerias, segundo o filósofo, estariam todas indiferenciadas no caos, estado anterior à criação, sem que fosse possível distinguir suas cores, suas formas ou quaisquer outras de suas características. Então, o denso e o frio e o úmido e o escuro se juntaram para formar o que hoje é a Terra, conquanto o rarefeito, o quente e o seco e a luz seguiram adiante para compor o Éter [8].

As homeomerias são descritas como partículas infinitesimais da matéria, homogêneas e invisíveis que, a despeito de sua exiguidade, participam da composição de cada

uma das coisas manifestas, de cada traço de natureza percebível, não importando o quão diminuto ele seja. As homeomerias contêm em si todas as possibilidades latentes, todas as múltiplas e contraditórias qualidades encontráveis num universo que sempre se atualiza por sua natural emanção. Em outras palavras, “cada parte reproduz o todo, da mesma forma que todas as formas manifestas trazem em si porções intrínsecas das coisas que ainda jazem latentes e ocultas, e não apenas daquelas que são mais numerosas e evidentes”. Isso significa dizer, por exemplo, que na rocha há algo de todas as coisas, mesmo algo do fogo e da água, ou do denso e do sublime; há em verdade na rocha todo tipo de qualidade, mas ela se nos apresenta assim por conta das homeomerias que nela predominam, fazendo manifestar suas qualidades preponderantemente, acima das homeomerias de qualquer outra espécie.

Seres biológicos e inorgânicos, entes humanos e cristais de quartzo, elementos terrestres e extragalácticos, todos são parentes entre si e manifestam-se através do mesmo fenômeno de atualização de suas “homeomerias fractais”, que guardam a relação do diminuto microscópico com o infinito aberto, entre os átomos e as galáxias, entre os homens e as estrelas, entre o passado e o futuro entre o que está dentro e o que é externo, entre consciente e inconsciente.

Como vemos, Mandelbrot nada disse de novo a esse respeito. Seus estudos sobre os fractais atualizaram, entretanto, o conceito de homeomerias de Anaxágoras; estendendo-lhe o alcance, explorando assim a geometria natural como exemplo da manifestação divina, como o fizera Kepler no séc. XVI.

### *1.2.2 Caráter fractal do universo*

Os recônditos do universo, as galáxias, apresentam imagens que realmente dão a ideia de fractais. Nesse sentido, [8] faz a seguinte asserção sobre o caráter fractal do universo, quase poeticamente:

“A geometria fractal oferece modelo para a compreensão das formas complexas de que a natureza é dotada, pelas quais ela se manifesta aos nossos olhos que, sempre que inspirados pela sensibilidade estética, restam pasmos diante dos intrincados desenhos por ela perpassados. As formas fractais podem ser percebidas em todos os lugares do universo, seja nos recônditos infinitesimais da estrutura do átomo, nos arranjos moleculares das proteínas e dos aminoácidos, nas células do organismo, na organização dos diferentes tecidos, no arranjo íntimo dos cristais inorgânicos, seja nos arroubos espontâneos de tamanho indeterminado, como o são os recortes geográficos das linhas costeiras, as efêmeras imagens abstraídas do movimento das nuvens, o sólido e harmônico contorno das montanhas, o inusitado trajeto percorrido pela fumaça do incenso, as fantásticas formações estalactites e estalagmites encontradas no mundo das cavernas, as mandálicas galáxias que povoam o universo

de formas estelares mirabolantes... Enfim todas as coisas manifestas, todas as formas inanimadas, todas as criaturas viventes, protozoárias ou pluricelulares, microscópicas ou macroscópicas, guardam entre si uma intrínseca propriedade, uma similaridade própria que as mantém intimamente ligada: expressam formas fractais. A natureza inteira é fractal. Talvez a ideia fique mais bem compreendida se pensarmos que todos os tecidos orgânicos, independentemente de espécie que tomemos por exemplo, diferenciam-se a partir de um único código genético e expressam à sua maneira certas qualidades e funções que lhe são específicas, ainda que por trás da infinita variedade biológica esteja guardado o mistério da identidade protéica, base bioquímica da vida. Afinal, vivemos atrelados à realidade tridimensional da arena na qual as cenas da vida se desenvolvem. Nesse palco, o tempo não está separado dos fatos, antes disso, é ele quem delimita nossa efêmera passagem pelo drama existencial. O tempo é o mágico fractal cósmico-holográfico que, repartido em frações e subpartes, confere a aparente sensação de continuidade à humanidade que caminha resoluta, executando seu papel como um todo homogêneo. O caráter fractal da história se compõe por eventos que se replicam e se repetem, que se reproduzem e se reafirmam de modo sempre original por diferentes culturas ao longo de todas as épocas”. (PIMENTEL & URBAN, 2003)

Essas ideias são melhor ilustradas ao analisarmos os fractais gerados por Mandelbrot, por Lyapunov e por Julia, vistos no capítulo seguinte, que traduzem a sensação de grandeza e de complexidade do universo.

### 1.3 Algumas curiosidades sobre os Fractais

Estruturas aparentemente caóticas podem ser melhor compreendidas quando a Geometria Fractal as compreende segundo uma lei de formação. Em outras palavras, os fractais são estruturas que põem ordem no caos. Além disto, onde há ordem também pode ser explicado pelos fractais, que se aproximam muito mais das formas naturais do que as formas geométricas euclidianas com as quais estamos acostumados.

Uma afirmação bastante razoável feita por [2] nos auxilia a entender algumas características de elementos da natureza, que consiste basicamente do seguinte: “se a uma dimensão linear aplicamos um fator de escala  $s > 1$ , a área será igual a  $s^2$  vezes a anterior, e o volume,  $s^3$  vezes”.

Assim, em 1638, Galileu sugeriu que uma árvore alcançaria, no máximo, uma altura de 100 metros, através do seguinte raciocínio: sendo o peso de uma árvore proporcional ao seu volume, se aplicarmos um fator de escala  $s$  na altura da árvore, sua seção transversal aumentaria  $s^2$ , enquanto que seu peso aumentará  $s^3$ , e esse peso pode se tornar muito alto para que a seção transversal da árvore o suporte. Conjecturamos que Galileu tenha estimado a resistência máxima dessa seção transversal, dada em  $kg/m^2$ , ou  $N/m^2$ , como ocorre nos cálculos da engenharia, e esse quociente resulta num múltiplo do próprio fator de escala. Isto é:

$$\text{Resistência} = \frac{\text{Peso}}{\text{Área seção}} = \frac{s^3}{s^2} = s,$$

e o valor de  $s$  pode ser grande quanto quisermos, enquanto que sabemos que a resistência é limitada, o que limita também a altura da árvore.

Sua estimativa é muito coerente, visto que, como afirma [9], a “*General Sherman* é uma sequóia (*Sequoiadendron giganteum*), localizada no Parque Nacional da Sequóia, na Califórnia, EUA, considerada a maior árvore do mundo. Ela possui 112,3 metros de altura e 31 metros de circunferência, totalizando aproximadamente 1.480 metros cúbicos de volume (NATIONAL PARK SERVICE, 1997)”.

O mesmo raciocínio de restrição de altura ocorre para as montanhas, que não costumam ter mais de 15km.

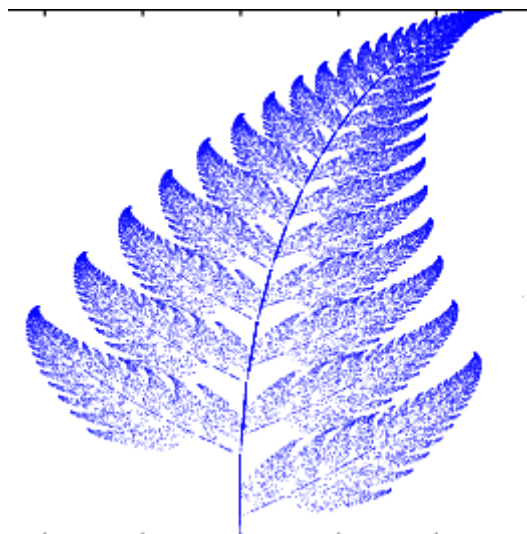
Afirma-se em [2] ser possível criar um fractal natural, isto é, um fractal que represente um objeto da natureza – árvores, montanhas, conchas, etc. – através de um conjunto de passos sequenciados que contêm determinadas *transformações matemáticas*. A vantagem da geração desses objetos via fractal está no armazenamento: ao invés de se armazenar a imagem do objeto no computador, armazena-se o algoritmo, o que reduz significativamente a quantidade de memória a ser disponibilizada para este armazenamento. Em larga escala, e para fins específicos (utilização de design gráfico, por exemplo), este uso pode trazer grande economia. O que garante essa possibilidade de geração de fractal natural é o Teorema da Colagem, de Barnsley, que pode ser assim enunciado:

“Seja uma figura qualquer, não necessariamente um fractal matemático. Usando somente cópias desta figura, e aplicando-lhes transformações matemáticas, podemos reproduzir um objeto natural através da colagem destas cópias transformadas matematicamente”.

As transformações matemáticas referidas, que podem ser chamadas também de transformações afins, são as seguintes: contração, expansão, cisalhamento, rotação, reflexão e translação.

Barnsley inventou um fractal que simula uma folha de samambaia, construindo-o de modo semelhante à construção de outros fractais: através de colagem de figuras autossemelhantes, variantes somente no que diz respeito à escala, o que ficou conhecido como a *Samambaia de Barnsley* (figura 2).

**Figura 2 – Samambaia de Barnsley, com 50000 iterações.**



Fonte: [10].

Se observarmos a figura acima, vemos que existe uma “linha central” da Samambaia, a qual chamamos *caule*, e existem diversas “folhas” que partem desse caule e possuem dimensão menor que a figura completa (a Samambaia), a qual denominamos *ramo*. Esses ramos, que se iniciam do caule, são réplicas reduzidas da própria samambaia; então, podemos encará-los como uma mini-samambaia, sendo os ramos dos ramos também uma réplica reduzida da própria Samambaia, mas em escala ainda menor. Essa autossemelhança, característica dos fractais, ocorre totalmente na Samambaia acima, e ocorre na samambaia natural até certo ponto; daí dizermos ser esta última um pseudo-fractal, assim como o floco de neve natural – em comparação com o Floco de Neve de Koch (apresentado no capítulo seguinte), ocorrendo nesses pseudo-fractais uma autossemelhança aproximada, em relação à variação de escala. A essa autossemelhança aproximada, denomina-se *autossemelhança estatística*, e assim [2] discorre: “nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais as partes são apenas reminiscências do todo”.

Assim, o caule é uma espécie de eixo da samambaia, cujos ramos direitos e esquerdos são ordenados de forma que reduzem de tamanho, na medida em que percorrem, na direção vertical, o sentido “para cima” do caule. Existem também na composição desse fractal, além da colagem de partes reduzidas, algumas transformações matemáticas ou afins, já citadas. Na verdade, munido dessas transformações, Barnsley criou uma função iterada, semelhante a uma recorrência, e assim vai constituindo os pontos da figura. Mais especificamente, essa função é probabilística: através do *software Dynamical Systems*, os pontos são plotados de acordo com as probabilidades de 85%, 7%, 7% e 1%, que devem ser dadas em forma acumulada, isto é, 85%, 92%, 99%, e 100%, que equivale a, respectivamente,



0,85, 0,92, 0,99 e 1. Porém na implementação por [10] da samambaia de Barnsley no *software* supracitado, é usada a quadra 1,7, 1,84, 1,98 e 2, que é múltipla da anterior numa razão igual a 2. Para um pouco mais de detalhes acerca desta geração do fractal samambaia de Barnsley, é relevante consultar [10].

Outro aspecto em que a Geometria Fractal pode ser explorada é na determinação das dimensões de objetos naturais. Para tanto, [2] apresenta o problema de determinar a dimensão do trecho do Rio Amazonas que fica entre Macapá a Manaus. Quando falamos em dimensão aqui, seria a noção de *uma dimensão* para uma reta, *duas dimensões* para planos (ou figuras planas euclidianas como quadrilátero ou círculo), ou *três* para as figuras espaciais euclidianas. No caso de um trecho de um rio, ele é um fractal natural, isto é, possui autossimilaridade estatística (média) em relação ao rio inteiro, mas não como ocorre com os fractais matemáticos, dotados de autossimilaridade exata; sabemos que o trecho do rio é tridimensional, mas visto de uma altura conveniente vê-se uma linha torcida, sinuosa, representando este trecho do rio, o que não é unidimensional, tampouco bidimensional. Considerando-se os pontos final e inicial do trecho do rio, o segmento de reta que os contém é unidimensional, e o trecho não será exatamente superposto a esse segmento: há uma pequena diferença, o que nos leva a estimar que o rio possui dimensão pouco superior a 1 (e muito inferior a 2), e nos leva a estimar também que esta dimensão aumenta de acordo com o aumento da sinuosidade do rio.

Para esta determinação, [2] propõe o método da *contagem de quadrados*, onde o objeto a ser dimensionado é inserido numa malha de quadrados de lado  $s$ , e a partir daí é feita a contagem de quantos quadrados  $N$  são necessários para cobrir totalmente o objeto. Então, os tamanhos dos quadrados vão diminuindo, e logicamente aumentando o número de quadrados respectivos, necessários para cobrir o objeto. Intuitivamente, quanto menor o lado  $s$ , resultar-se-á numa dimensão mais precisa. Lembremos que a dimensão fractal é dada por  $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$ ,

onde  $N$  é o número de partes iguais obtidas da divisão da figura, e  $r$  é o coeficiente de redução. Se traçarmos um gráfico  $\log(N) \times \log(1/s)$ , a inclinação  $d$  do segmento de reta formado pelos dois pontos  $(\log(1/s_1), \log(N_1))$  e  $(\log(1/s_2), \log(N_2))$  será a dimensão do objeto.

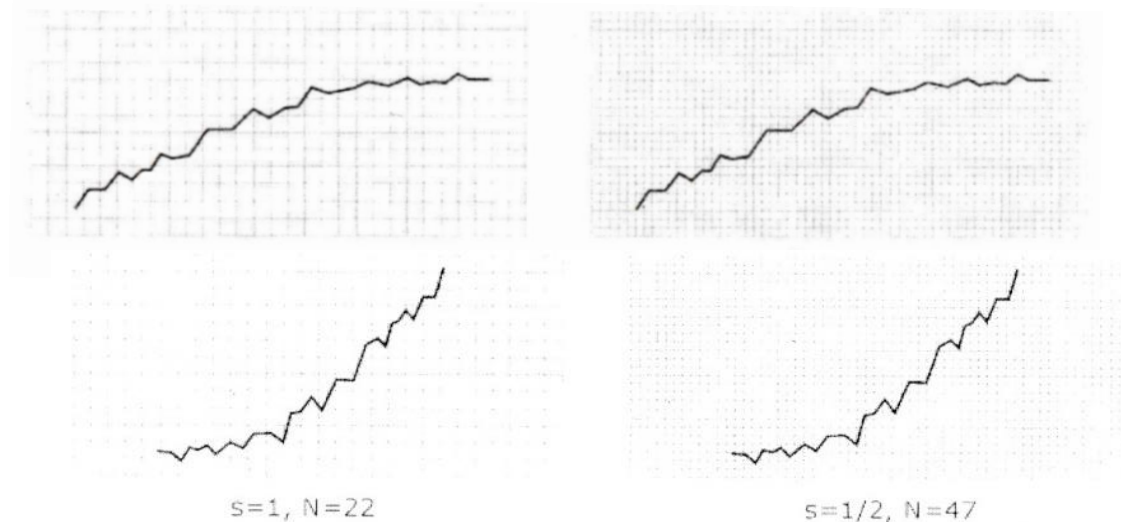
O trecho do Rio Amazonas que fica entre Macapá a Manaus foi dividido em duas partes, *I* e *II*, e a parte *I* corresponde ao subtrecho Manaus-Parintins, enquanto que parte *II* corresponde ao subtrecho Parintins-Macapá; [2] obteve a respeito delas os seguintes dados:

Tabela 1: valores das contagens de  $N$  em função dos lados de medidas  $s$  dos quadrados das malhas quadriculadas.

Parte	$s$	$\log(1/s)$	$N$	$\log(N)$
I	1	0	27	1,431
	1/2	0,301	58	1,763
II	1	0	22	1,342
	1/2	0,301	47	1,672

Fonte: autor.

Figura 3 – Partes I (superior) e II (inferior) do trecho Macapá-Manaus do Rio Amazonas.



Fonte: [2].

Então, as inclinações (que correspondem às dimensões dos trechos) serão dadas por:

$$d_I = \frac{\log N_2 - \log N_1}{\log \frac{1}{s_2} - \log \frac{1}{s_1}} \cong \frac{1,763 - 1,431}{0,301 - 0} = \frac{0,332}{0,301} \cong 1,103;$$

$$d_{II} = \frac{\log N_2 - \log N_1}{\log \frac{1}{s_2} - \log \frac{1}{s_1}} \cong \frac{1,672 - 1,342}{0,301 - 0} = \frac{0,33}{0,301} \cong 1,096.$$

As dimensões das duas partes do trecho considerado são muito próximas, e estima-se que os outros trechos do Rio Amazonas tenham dimensões similares, e que a dimensão (total) do Rio inteiro seja de, aproximadamente, 1,10.

A importância de estimar a dimensão dos rios reside nas possibilidades de inferência temporal que se permite a partir desta estimativa. Conforme se afirma em [2], a dimensão de um rio, assim como a de muitas formas naturais, depende de sua idade. Um rio normalmente nasce como um canal de alta vazão e curso razoavelmente reto. Com o passar do tempo, o rio começa a se dividir, novos afluentes surgem e os acidentes ao longo do curso aumentam. Então, a dimensão do rio cresce com o passar dos anos e séculos. Neste sentido, a dimensão

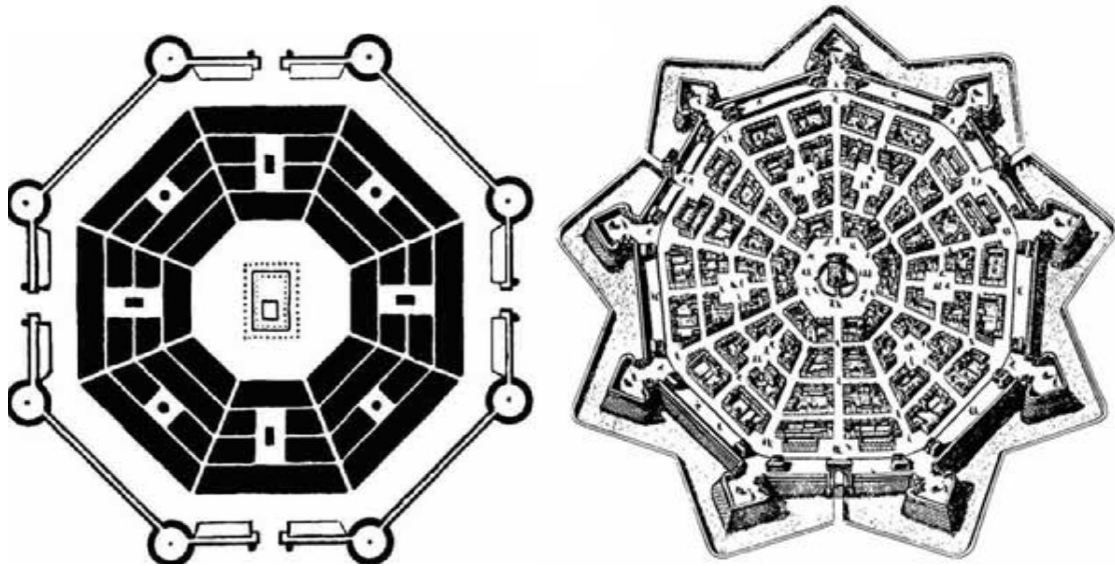
fractal nos dá informações sobre o processo evolucionário do rio, e, de forma similar, das cordilheiras e de muitas outras formas encontradas na geologia terrestre. Assim como a dimensão do Rio Amazonas está situada entre o espaço unidimensional e o espaço bidimensional, podemos construir objetos cuja dimensão está entre os espaços bidimensional e tridimensional; por exemplo, pegue uma folha de papel de  $5 \times 10$  centímetros e amasse-a até formar uma bola de papel. Esta bola de papel tem dimensão entre 2 e 3. A tentativa de construir objetos de 3 dimensões a partir de objetos de 2 dimensões produz estruturas fractais quebradiças com espaços vazios irregulares como a bola de papel. Quanto mais rugosa é uma curva, mais próxima de 2 será sua dimensão, e quanto mais espaços vazios existirem na bola de papel, mais próxima de 2 será sua dimensão.

Se o objetivo fosse medir o comprimento do Rio Amazonas, uma estratégia seria, a partir de um mapa com uma determinada escala, avaliar a quantidade de segmentos que comporão uma linha poligonal aberta, onde as extremidades de cada segmento coincidirão com trechos do mapa do rio; esses segmentos deverão ter comprimentos iguais, e sabemos que quanto mais segmentos utilizarmos, mais precisa será a determinação do comprimento do Rio Amazonas. Neste caso, se considerarmos os comprimentos dos segmentos da linha poligonal aproximante tendendo a zero, resultará-nos em uma soma que melhor representará o comprimento do Rio; mas, [2] afirma ainda que esta soma pode também tender ao infinito, a depender da convergência/divergência dessa soma. Neste caso, então, o melhor é estimar um comprimento do Rio Amazonas de acordo com a precisão desejada, isto é em função da utilidade a ser dada a essa medida.

Outro exemplo de fractal natural, além dos rios, árvores, e flocos de neve, são alguns sistemas do corpo humano, como, por exemplo, nossos pulmões, que não são sacos vazios que se enchem de ar, mas sim ramificações que terminam em alvéolos que compõem uma espetacular estrutura fractal, como podemos ver no Anexo, contendo uma grande área de superfície por volume, de modo a permitir a máxima absorção do oxigênio que passa pelo sangue. Assim também são nossos sistemas circulatórios e digestivos: apresentam estruturas fractais de grande eficiência.

Algumas aplicações muito inusitadas da Geometria Fractal têm permeado as mais diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, em [11], há um estudo minucioso envolvendo as áreas de Geografia, Economia, Física e Matemática, apontando que as estruturas fractais são utilizadas para explicar a forma de ocupação humana nos centros urbanos, como vemos nas figuras seguintes:

Figura 4 – Cidade ideal para o período renascentista (a) e Estrutura da cidade italiana de Palmanova (b) após trabalhos do arquiteto Vincenzo Scamozzi (1548-1616).



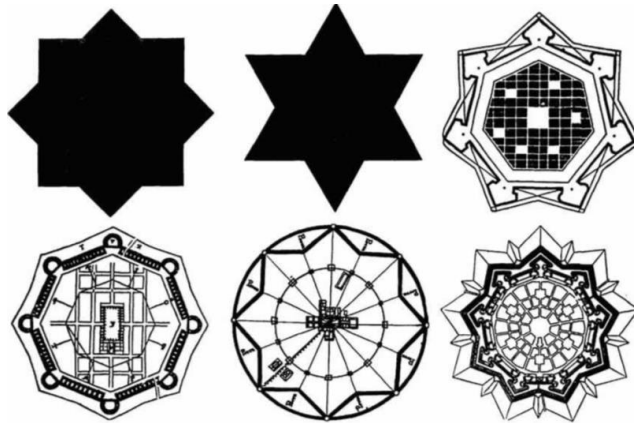
Fonte: [11].

Figura 5 – Cidade italiana de Palmanova atualmente.



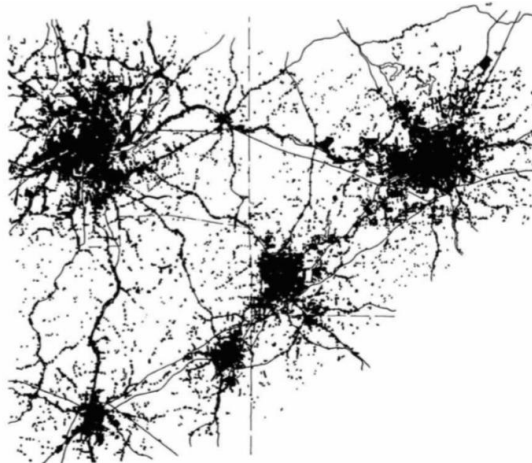
Fonte: [12].

Figura 6 – Idealização, na Renascença, de cidades fortificadas, e suas semelhanças com a Ilha de Koch.



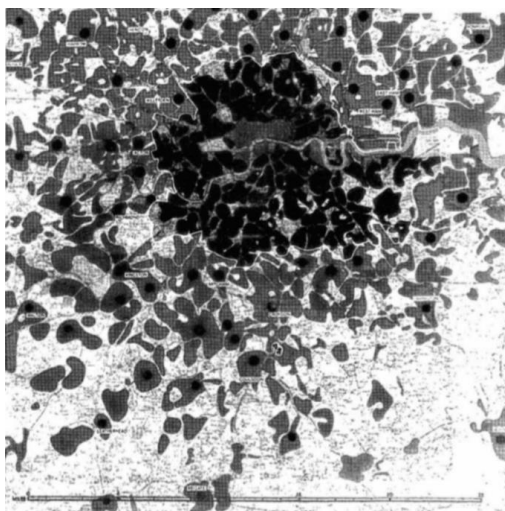
Fonte: [11].

Figura 7 – Padrões de crescimento das cidades urbanas contemporâneas (1962).



Fonte: [11].

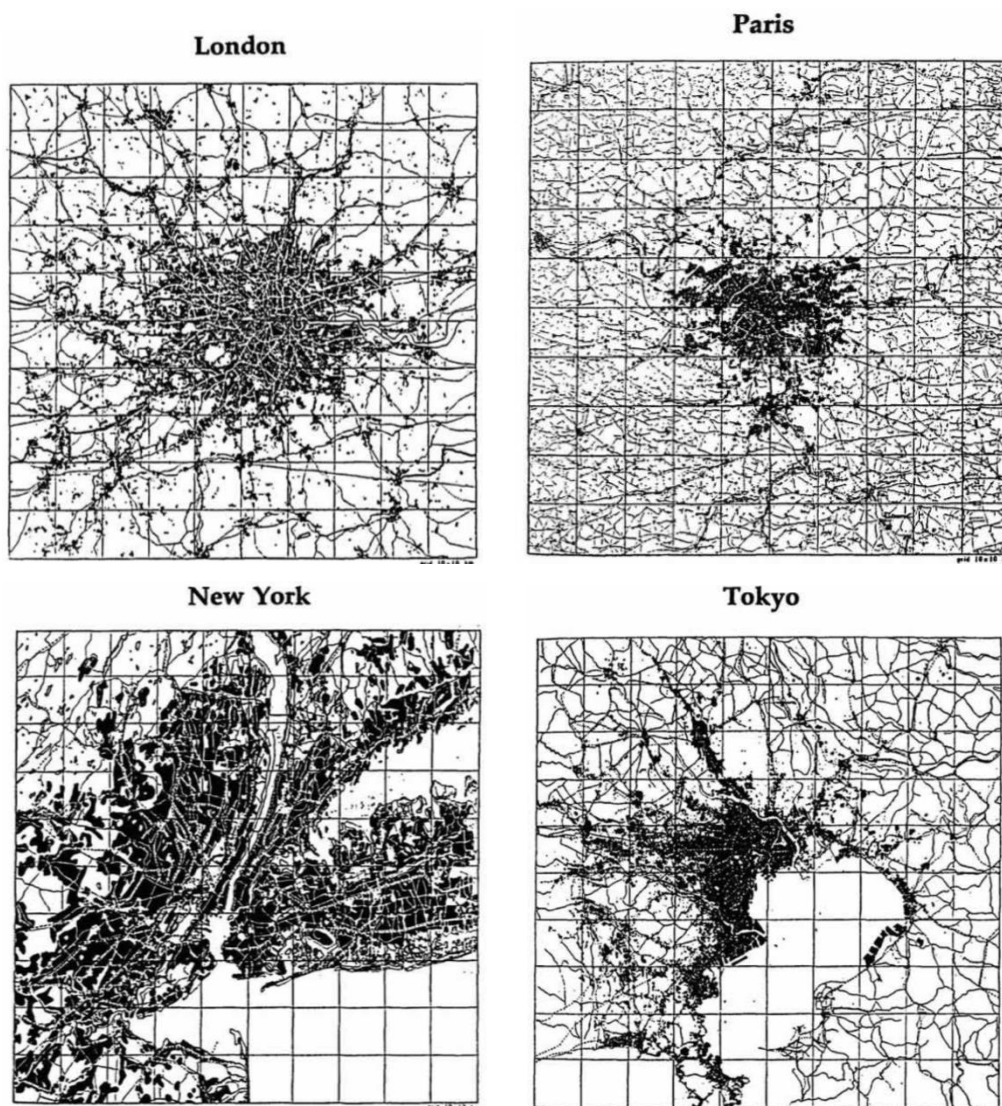
Figura 8 – Distribuição social em Londres (1945), de acordo com as classes sociais, estando os grupos dominantes nas áreas centrais, e o restante, hierarquicamente distribuído, em seu entorno.



Fonte: [11].

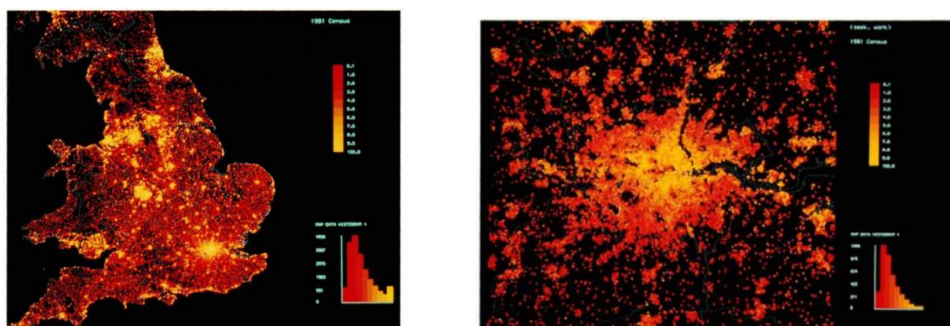


Figura 9 – Padrões fractais de desenvolvimento urbano: Londres, Paris, Nova Iorque e Tóquio (1968).



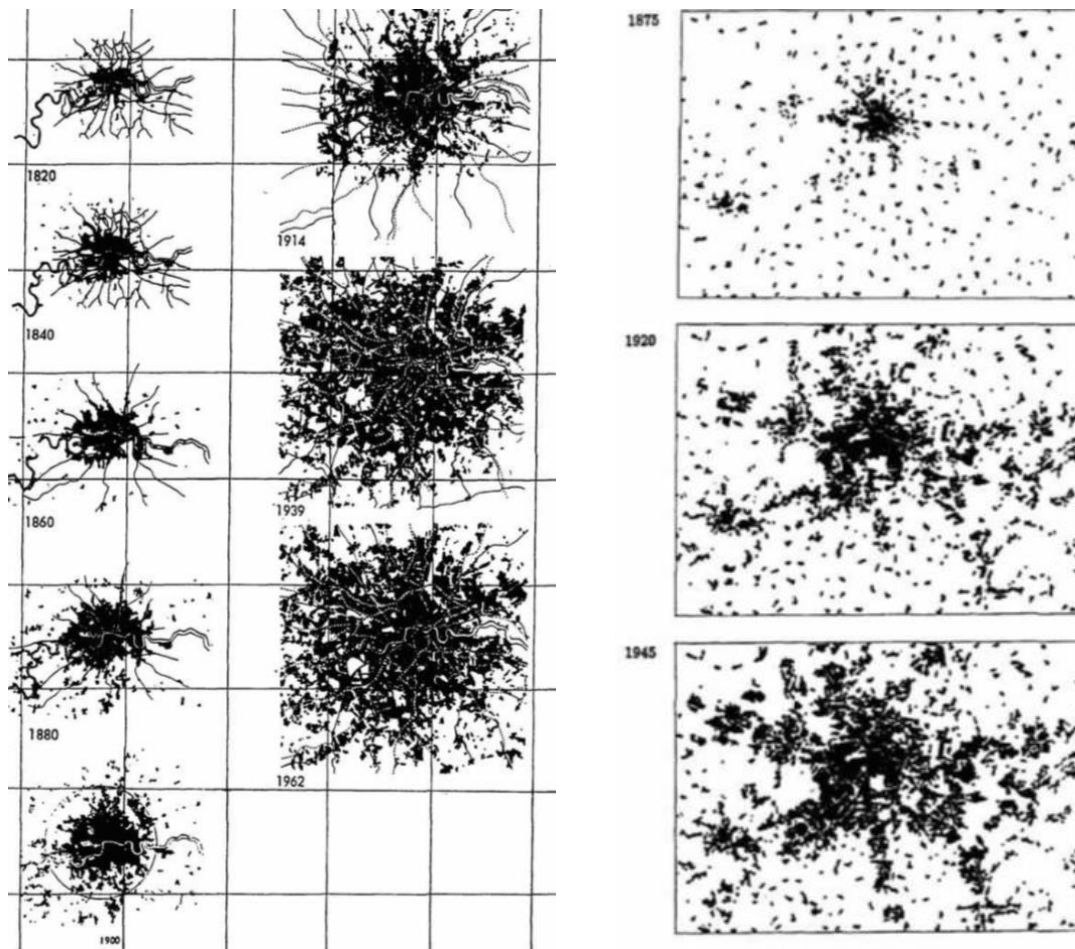
Fonte: [11].

Figura 10 – Densidade de ocupação territorial urbana na Inglaterra e no País de Gales (a) e Densidade de ocupação territorial urbana em Londres (b).



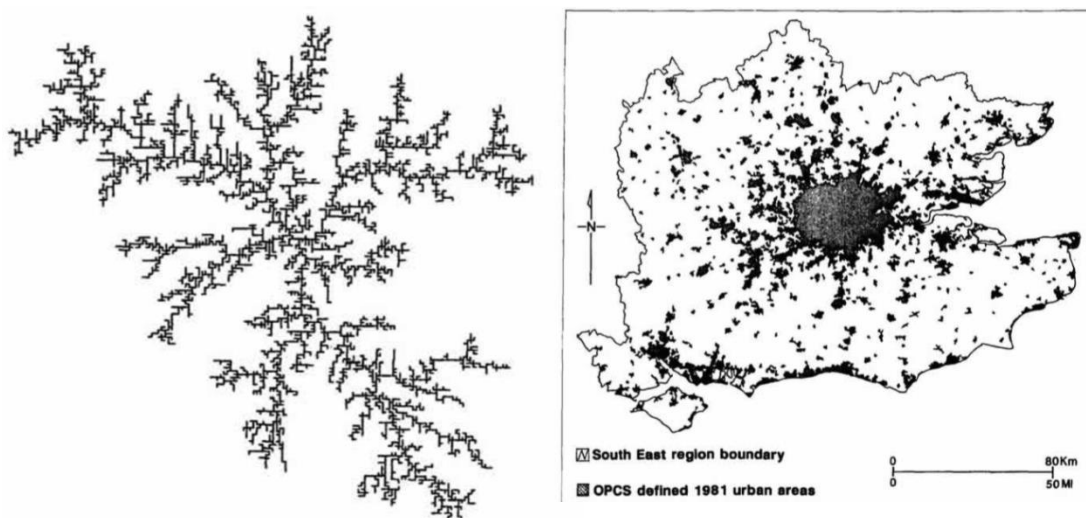
Fonte: [11].

Figura 11 – O crescimento de (a) Londres (1820-1840-1860-1880-1900-1914-1939-1962), e de (b) Berlim (1875-1920-1945).



Fonte: [11].

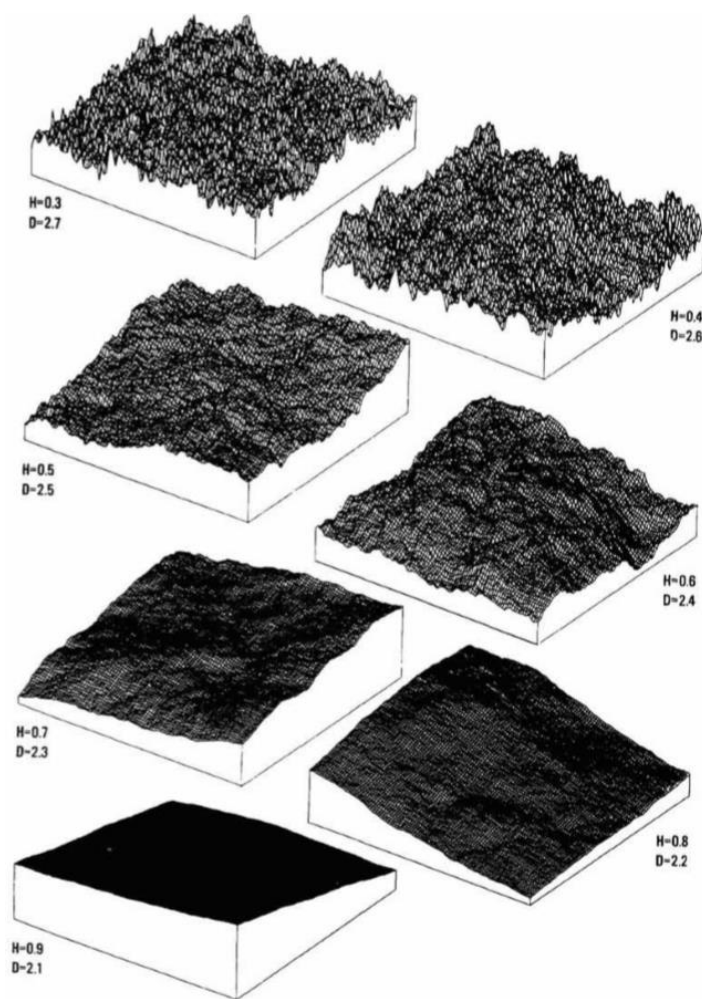
Figura 12 – Crescimento dendrítico fractal como um gráfico simplesmente conexo (a), e Áreas urbanas no sudeste da Inglaterra (b).



Fonte: [11].

A partir da análise das cidades e sua ocupação do ponto de vista geométrico, como se fosse uma fotografia aérea, [11] apresenta historicamente as configurações de ocupação das cidades, considerando as tendências destas distribuições em função do tempo e dos estratos sociais hierarquizados, percebendo uma tendência de *fractalização* das cidades com o passar do tempo, isto é, formada por estruturas (geométricas) cada vez mais complexas e aparentemente caóticas, tais quais os fractais. Observe-se que, se não são fractais verdadeiros, assemelham-se bastante a eles, devido à existência de características comuns.

Figura 13 – Simulação de um terreno utilizando-se diferentes dimensões fractais.



Fonte: [11].



## Capítulo 2

### Fractais Clássicos e Experimentais

Neste capítulo apresentaremos os fractais clássicos pertencentes aos três grupos de fractais anteriormente citados. Para fins didáticos, consideremos *fractais clássicos* aqueles desenvolvidos até a popularização dos fractais por Mandelbrot, em 1975, com seu livro *Les Objets Fractals: Forme, Hasard et Dimension*. Por questão de facilidade, ilustraremos inicialmente os fractais determinados por Sistemas de funções iteradas, que tendem a ser mais simples que os outros dois tipos, e posteriormente apresentaremos os fractais determinados por Sistemas de funções iteradas e os fractais aleatórios. Serão mostrados ainda alguns fractais elaborados computacionalmente, a partir de funções iterativas diversas, com intenções aparentemente artísticas.

#### 2.1 Fractais determinados por Sistemas de funções iteradas

Esse tipo de fractal foi muito comum antes de Mandelbrot batizá-los de fractal, pois os matemáticos iam formando figuras a partir de uma regra, e quando se davam conta a representação geométrica “fugia” de tudo que era conhecido até então, ou seja, criava padrões inexplorados pela geometria conhecida.

2.1.1 Conjunto de Cantor

Cronologicamente, a primeira construção reconhecida como um fractal é o Conjunto de Cantor. Formado por uma quantidade infinita de segmentos de dimensões muito pequenas (tanto mais próximas de zero, quanto mais segmentos tomarmos), o Conjunto de Cantor é formado por partes autossimilantes, e possui cardinalidade igual a dos números complexos ou dos números reais, ou seja, é não-enumerável [2].

A regra para a construção do Conjunto de Cantor é a divisão de cada segmento em três partes iguais, seguida da retirada de seu terço médio. Assim, seja no nível inicial (nível 0) um segmento unitário; no nível seguinte, nível 1, existirão dois segmentos, de tamanho 1/3, já que o segmento do meio, de tamanho 1/3, foi retirado. No nível 2, existirão 4 segmentos, de tamanho 1/9, cumprida a mesma lei de formação, conforme figura seguinte.

**Figura 14 – Conjunto de Cantor, dos níveis 0 a 6.** Percebem-se aqui segmentos cada vez mais numerosos e menores, em apenas seis níveis representados, o que explica atribuir-se ao conjunto o nome de “poeira de Cantor”.



Fonte: autor.

Assim, iniciando-se com um segmento unitário, em cada passo subsequente dobramos o número de segmentos, mas cada qual com tamanho igual a 1/3 do anterior. Assim, de acordo com definição 1, temos que  $N=2$  e  $r=1/3$ , de sorte que a dimensão do fractal “Conjunto de Cantor” será dado por:

$$D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63.$$

Tende-se, portanto, a haver infinitos pontos no conjunto, nos níveis muito elevados; no entanto, não podem ser chamados de pontos, pois estes possuem dimensão nula, e um

segmento do conjunto acima descrito é sempre igual a 1/3 do segmento anterior, isto é, no nível  $j$ , a dimensão de cada segmento será dada por:

$$x_j = \frac{x_{j-1}}{3}, \text{ com } x_0 = 1 \text{ e } j = \{ 1, 2, 3, 4, \dots \} = \mathbb{N}.$$

Analisando a recorrência acima, teremos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{x_0}{3} \\ x_2 &= \frac{x_1}{3} \\ x_3 &= \frac{x_2}{3} \\ &\vdots \\ x_j &= \frac{x_{j-1}}{3} \end{aligned}$$

Multiplicando os membros e eliminando os termos comuns, temos:

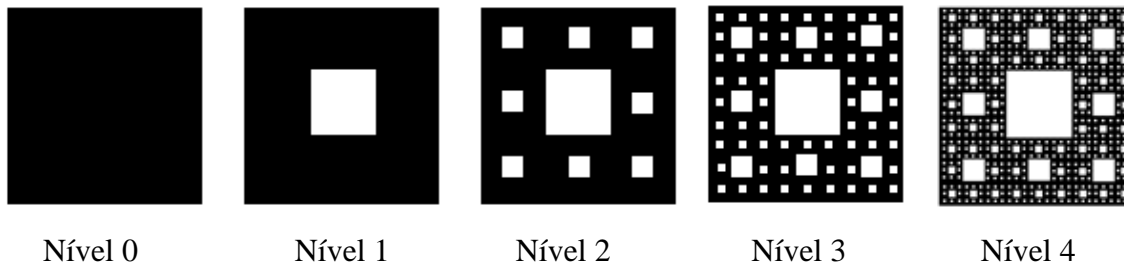
$$\begin{aligned} \Rightarrow x_j \cdot \prod_{i=1}^{j-1} x_i &= \frac{x_0 \cdot \prod_{i=1}^{j-1} x_i}{3^j} \\ \Rightarrow x_j &= \frac{x_0}{3^j} = \frac{1}{3^j} = 3^{-j} \end{aligned}$$

Assim, para todo  $j$  natural, por maior que seja, teremos que a dimensão  $x_j$  dos segmentos corresponde à  $j$ -ésima potência de base 1/3, portanto sempre maior que zero, o que não pode caracterizar-se como um ponto. Se iterássemos infinitas vezes, teríamos, neste caso, infinitos pontos, com comprimento total de aproximadamente 0,63, conforme já citado.

### 2.1.2 Tapete de Sierpinski

Para essa construção, consideremos uma região formada por um quadrado unitário e sua superfície interna, isto é, o contorno formado pelo quadrado unido de seu interior. A lei de formação do fractal corresponde à divisão do quadrado em nove quadrados, e retirada do quadrado central, conforme figura abaixo:

**Figura 15 – Tapete de Sierpinski, dos níveis 0 a 5.** Percebe-se aqui que o quadrado fica cada vez mais “vazado”.



Fonte: autor.

Similarmente à discussão anterior, iniciando-se com um quadrado de área unitária, teremos, para o nível  $n$ , os seguintes dados:

**Tabela 2: áreas e quadrados suprimidos no triângulo de Sierpinski, em função da iteração  $n$ .**

$n$	Número de quadrados retirados ( $a_n$ )	Área retirada ( $A_n$ )
0	0	0
1	$1=0+8^0$	$1 \cdot (1/3)^2$
2	$9=1+8^1$	$1 \cdot (1/3)^2 + 8^1 \cdot (1/3^2)^2$
3	$73=9+8^2$	$1 \cdot (1/3)^2 + 8^1 \cdot (1/3^2)^2 + 8^2 \cdot (1/3^3)^2$
4	$585=73+8^3$	$1 \cdot (1/3)^2 + 8^1 \cdot (1/3^2)^2 + 8^2 \cdot (1/3^3)^2 + 8^3 \cdot (1/3^4)^2$
⋮	⋮	⋮
$N$	$a_n = a_{n-1} + 8^{n-1}$	$A_n = A_{n-1} + 8^{n-1} \cdot (1/3^n)^2$

Fonte: autor.

Analisando a primeira recorrência acima, teremos:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= a_0 + 8^0 \\
 a_2 &= a_1 + 8^1 \\
 a_3 &= a_2 + 8^2 \\
 &\vdots \\
 a_n &= a_{n-1} + 8^{n-1}
 \end{aligned}$$

Somando os membros e eliminando os termos comuns, temos:

$$a_n + \sum_{i=1}^{n-1} a_i = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i + (8^0 + 8^1 + 8^2 + \dots + 8^{n-1}) \Rightarrow a_n = \frac{8^n - 1}{8 - 1} = \frac{8^n - 1}{7}$$

Analisando a segunda recorrência acima, teremos:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_0 + \frac{1}{8} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 \\
 A_2 &= A_1 + \frac{1}{8} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^4 \\
 A_3 &= A_2 + \frac{1}{8} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^6 \\
 &\vdots \\
 A_n &= A_{n-1} + \frac{1}{8} \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{2n}
 \end{aligned}$$

Somando os membros e eliminando os termos comuns, temos:

$$\begin{aligned}
 A_n + \sum_{i=1}^{n-1} A_i &= A_0 + \sum_{i=1}^{n-1} A_i + \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 + \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^4 + \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^6 + \dots + \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{2n} \right] \\
 \Rightarrow A_n &= A_0 + \frac{1}{8} \frac{\left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 \cdot \left[ \left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{2n} - 1 \right]}{\left( \frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^2 - 1} = \frac{1}{8} \frac{8 \cdot \left[ \left( \frac{8}{9} \right)^n - 1 \right]}{8 - 1} = \frac{1}{9} \cdot \left[ \left( \frac{8}{9} \right)^n - 1 \right] \\
 \Rightarrow A_n &= 1 - \left( \frac{8}{9} \right)^n
 \end{aligned}$$

E assim, a área restante  $S_n$ , na  $n$ -ésima iteração, será dada por:

$$S_n = 1 - A_n = \left( \frac{8}{9} \right)^n.$$

Desse modo, para iterações muito grandes da figura autossimilar, a área tenderá a zero.

**Tabela 3: elementos vazados e áreas do tapete de Sierpinski, em função da iteração  $n$ .**

$n$	Elementos vazados	Área
0	–	$A = 1$
1	$8^0$ quadrado de lado $1/3^1$	$A - \frac{A}{9} = \frac{8}{9}A$
2	$8^0$ quadrado de lado $1/3^1$ , $8^1$ quadrados de lado $1/3^2$	$A - \frac{A}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9^2}A = \frac{64}{81}A = \left( \frac{8}{9} \right)^2 A$
3	$8^0$ quadrado de lado $1/3^1$ , $8^1$ quadrados de lado $1/3^2$ , $8^2$ quadrados de lado $1/3^3$	$A - \frac{A}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9^2}A - 8^2 \cdot \frac{1}{9^3}A = \frac{512}{729}A = \left( \frac{8}{9} \right)^3 A$

4	$8^0$ quadrado de lado $1/3^1$ , $8^1$ quadrados de lado $1/3^2$ , $8^2$ quadrados de lado $1/3^3$ , $8^3$ quadrados de lado $1/3^4$	$A\left(1 - \frac{1}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9^2} - 8^2 \frac{1}{9^3} - 8^3 \frac{1}{9^4}\right) = \frac{4096}{6561} A = \left(\frac{8}{9}\right)^4 A$
⋮	⋮	⋮
$n$	$8^0$ quadrado de lado $1/3^1$ , $8^1$ quadrados de lado $1/3^2$ , $8^2$ quadrados de lado $1/3^3$ , $8^3$ quadrados de lado $1/3^4$ , ⋮ $8^{n-1}$ quadrados de lado $1/3^n$	$A\left(1 - \frac{1}{9} - 8 \cdot \frac{1}{9^2} - 8^2 \frac{1}{9^3} - \dots - 8^{n-1} \frac{1}{9^n}\right)$ $= \frac{1}{9} \left(9 - 1 - \frac{8}{9} - \frac{8^2}{9^2} - \dots - \frac{8^{n-1}}{9^{n-1}}\right) A$ $= \frac{1}{9} \left[8 - \left(\frac{8}{9} \cdot \frac{1 - (8/9)^{n-1}}{1 - 8/9}\right)\right] A$ $= \frac{1}{9} [8 \cdot (8/9)^{n-1}] A$ $= \left(\frac{8}{9}\right)^n A$

Fonte: autor.

Conforme [13], a dimensão desse fractal é de aproximadamente 1,8928, que é numericamente equivalente ao quociente  $\log 64/\log 9$ , o que sugere que a cada etapa temos aumento de 64 partes, com coeficiente de redução igual a  $1/9$ , o que faz sentido, pois a área de cada novo quadrado é reduzida nesse fator em relação à área do quadrado da iteração anterior.

De fato, no nível 1 existem 8 quadrados cujos lados possuem comprimento igual a  $1/3$ ; no nível 2, a situação é mais difícil de enxergar: dos 81 quadrados de lado igual a  $1/9$  que o quadrado maior comporta, temos um total de 9 quadrados vazados, sendo 8 deles de lado igual a  $1/9$  e 1 (o central) de lado igual a  $1/3$ , cuja área é, portanto, 9 vezes a área dos quadrados menores. Assim, é como se tivéssemos 17 quadrados vazados, de lado  $1/9$ , o que implica num total de  $81-17=64$  quadrados “cheios”, de lado igual a  $1/9$ , isto é,  $8^2$  quadrados de lado  $(1/3)^2$ . Abrangentemente, temos, na iteração  $k$ , um total de  $8^k$  quadrados de lado  $(1/3)^k$ . Assim, sendo a quantidade de partes na iteração  $k$  igual a  $N=8^k$ , e fator de redução de  $r=(1/3)^k$ , na notação da definição 1, a dimensão do presente fractal é igual a:

$$D = \frac{\log 8^k}{\log \frac{1}{(1/3)^k}} = \frac{k \cdot \log 8}{k \cdot \log 3} = \frac{\log 8}{\log 3} \cong 1,8928.$$

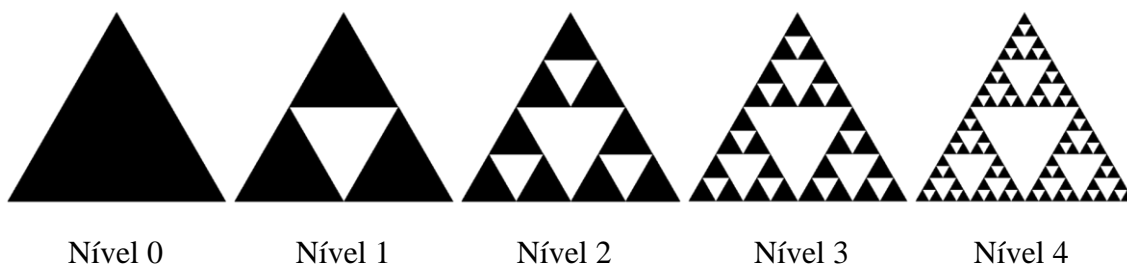
Observemos ainda que:

$$\frac{\log 8}{\log 3} = \frac{2 \cdot \log 8}{2 \cdot \log 3} = \frac{\log 8^2}{\log 3^2} = \frac{\log 64}{\log 9}.$$

### 2.1.3 Triângulo de Sierpinski

Muito mais comum na literatura do que o fractal anterior, o Triângulo de Sierpinski, ou Cesta de Sierpinski, é de construção similar. Para construí-lo, consideremos um triângulo equilátero de lado unitário. Unindo-se os três pontos médios dos lados do triângulo, obtém-se um triângulo central; daí, retiramos a área deste último em relação à área anterior, e efetuamos a primeira iteração. Dos triângulos restantes, fazemos a mesma operação (de retirar o triângulo formado pelos pontos médios de seus lados), conforme figura seguinte:

**Figura 16 – Triângulo de Sierpinski, dos níveis 0 a 4.** Percebe-se aqui que o triângulo fica cada vez mais “vazado”, à medida que são feitas mais iterações.



Fonte: autor.

Percebemos que em cada iteração  $k$ , existem  $3^k$  triângulos (“cheios”) de lados com comprimento igual a  $(1/2)^k$ . Assim, conforme Definição 1, sendo  $N=3^k$  o número de triângulos obtidos na iteração  $k$ , e  $r = (1/2)^k$  o coeficiente de redução na mesma iteração, temos que a dimensão do Triângulo de Sierpinski é dada por:

$$D = \frac{\log 3^k}{\log \frac{1}{(1/2)^k}} = \frac{k \cdot \log 3}{k \cdot \log 2} = \frac{\log 3}{\log 2} \cong 1,585.$$

Calculemos a área da figura formada na iteração  $k$ :

$$A_k = N \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = 3^k \cdot \frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k.$$

Assim, para iterações muito grandes, a área do triângulo fractal tende a zero.

Então, a Cesta de Sierpinski parte de um triângulo equilátero unido com sua região interna, e o procedimento é dividi-lo em quatro triângulos equiláteros, através dos pontos

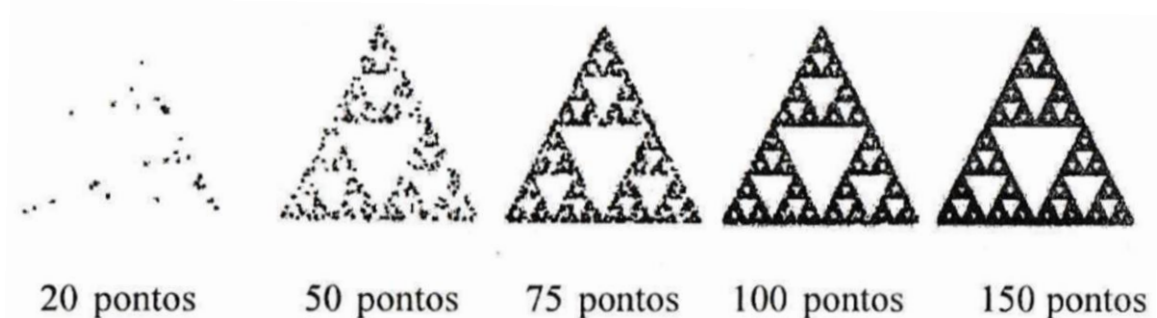
médios dos lados, e excluir o triângulo equilátero central, num processo repetitivo e indefinido; nesse aspecto, [2] apresenta um modo interessante de construção desse fractal: através do “Jogo do Caos”, que depende de resultados do lançamento de um dado, numerado de 1 a 6, gerando, surpreendentemente, a cesta, que consiste numa estrutura altamente ordenada, a partir de um procedimento aleatório. O jogo do caos é uma forma de definir sistemas discretos aleatórios, que produzem fractais.

As regras de construção da Cesta de Sierpinski, via Jogo do Caos, por [2], são as seguintes:

- (i) numa folha de papel construa um triângulo equilátero ABC e marque um ponto inicial  $P_0$ .
- (ii) jogando um dado, convencie: se der 1 ou 2, selecione o ponto A; se der 3 ou 4, selecione o ponto B; e se der 5 ou 6, selecione o ponto C. Jogue o dado e suponha que deu 5, que corresponde a C.
- (iii) ligue  $P_0$  com C e marque  $P_1$  na metade da distância  $P_0C$ .
- (iv) jogue o dado, suponha que deu 3, que equivale a B; ligue  $P_1$  com B e marque  $P_2$ , na metade de  $P_1B$ .
- (v) repita este procedimento diversas vezes, sempre marcando os pontos  $P_i$ .

À medida que o procedimento é repetido, a figura vai se aproximando mais do Triângulo de Sierpinski, conforme a figura abaixo:

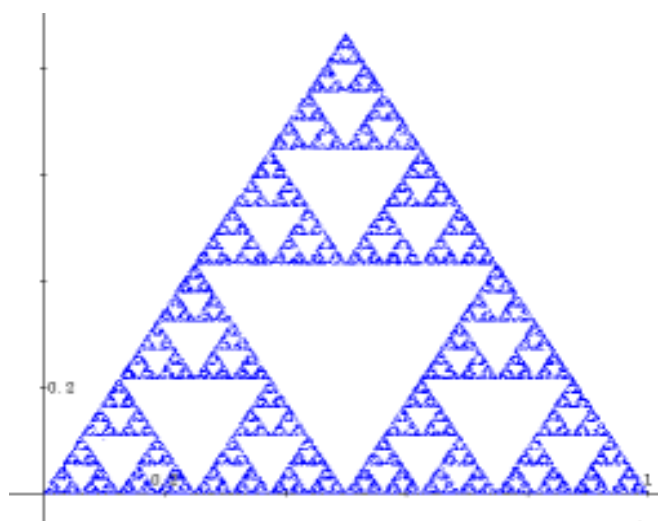
Figura 17a – Triângulo de Sierpinski, com 20, 50, 75, 100 e 150 iterações.



Fonte: [2]



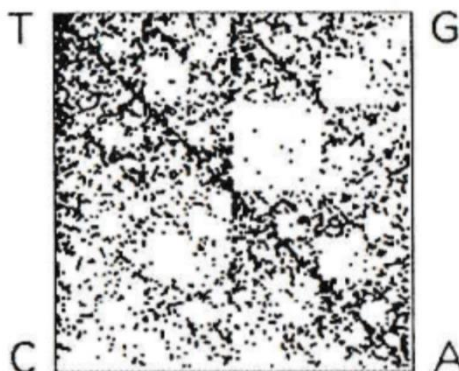
Figura 17b – Triângulo de Sierpinski, com 30000 iterações.



Fonte: [10].

Procedendo da mesma forma, mas partindo de um quadrado e utilizando um dado cujo número de faces seja um múltiplo de 4, são gerados os pontos ordenados conforme mostra a figura abaixo:

Figura 18 – Quadrado formado através do Jogo do Caos.



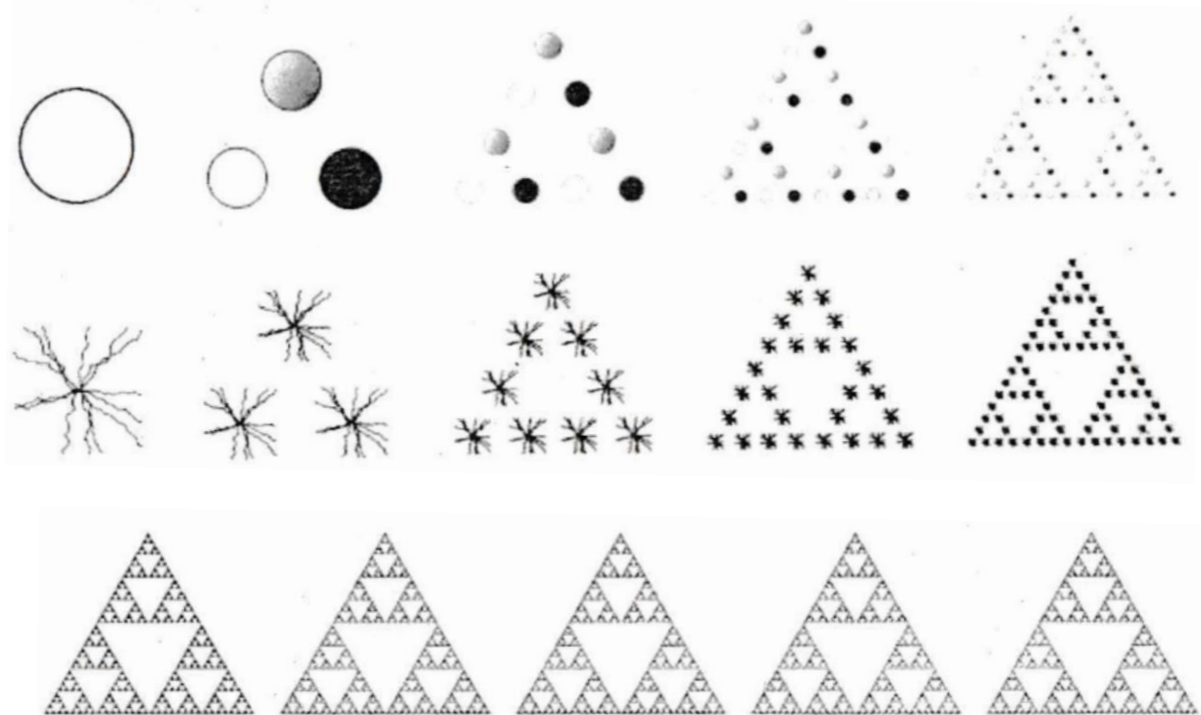
Fonte: [2].

As letras A, C, G, T, que representam os vértices do quadrado acima, não foram escolhidas por acaso: suspeita-se que esse padrão está intimamente relacionado como a forma com que se codificam os aminoácidos Adenina, Citosina, Guanina e Tiamina, presentes na estrutura da molécula de DNA, da qual decorrem as características biológicas específicas de cada ser vivo.

Um fato interessante apresentado por [2] é que, se a figura inicial não fosse um triângulo equilátero, utilizando os mesmos procedimentos, a Cesta de Sierpinski seria obtida da mesma forma. Assim, partindo-se um círculo ou de uma figura fulgural (que se assemelha

aos raios), conforme figura abaixo, obtemos a Cesta de Sierpinski. E se partíssemos de uma Cesta de Sierpinski, obteríamos, em cada iteração dessa função iterativa, ela própria, o que significa dizer que esta imagem para a qual a figura inicial tende é chamada de *atratora*, e corresponde ao próprio fractal.

**Figura 19 – Cesta de Sierpinski tendo como figuras iniciais um círculo (superior), raios concorrentes num ponto (no meio), e o próprio triângulo de Sierpinski (inferior).**

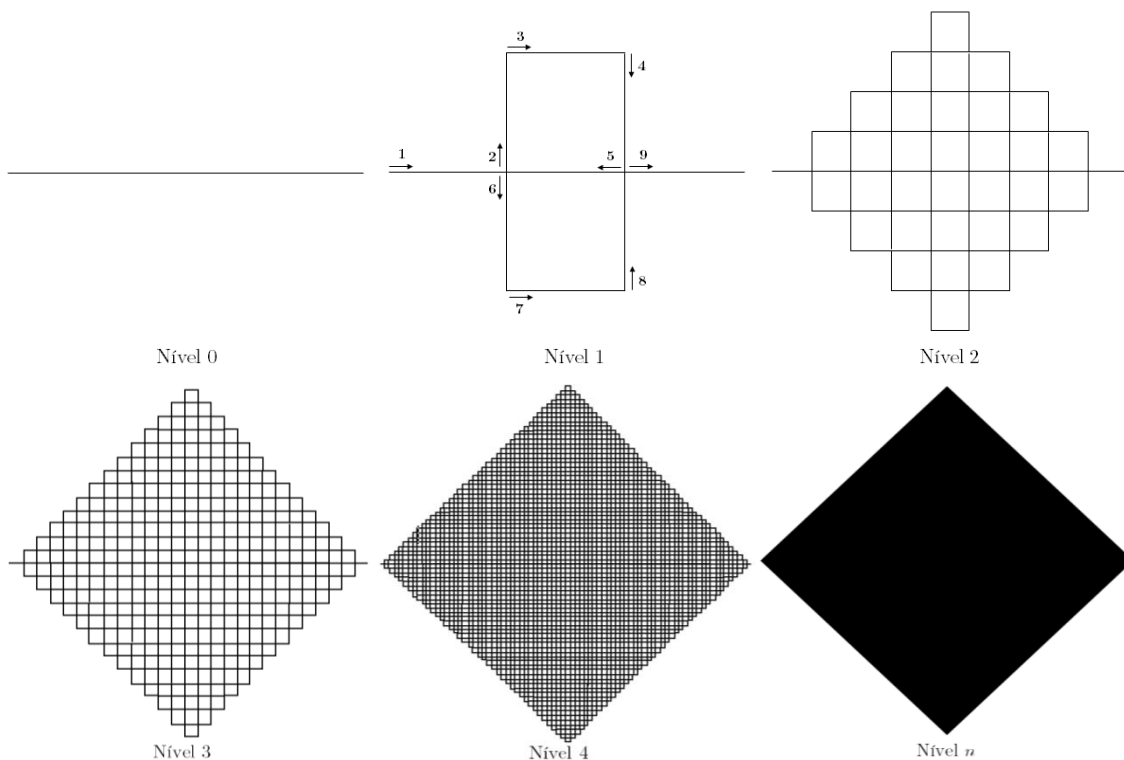


Fonte: [2].

#### 2.1.4 Curva de Peano

A curva de Peano é formada de modo que, para  $k \rightarrow +\infty$ , na  $k$ -ésima iteração, temos o preenchimento de uma figura bidimensional: o quadrado. Iniciando-se com um segmento de reta de comprimento unitário, dividimo-lo em três partes iguais; sobre o terço do meio, traçamos um quadrado acima e outro abaixo, estando esse *terço do meio* contido nos dois quadrados. Assim, temos uma curva geradora que determinará a regra para as outras iterações (curva geradora no *Nível 1*). Na segunda iteração, faremos a etapa anterior em cada segmento anterior, conforme figura seguinte:

Figura 20 – Curva de Peano, dos níveis 0 a 4, e no nível  $n$ , com  $n \rightarrow \infty$ . Percebe-se aqui que o triângulo fica cada vez mais “vazado”, à medida que são feitas mais iterações.



Fonte: autor.

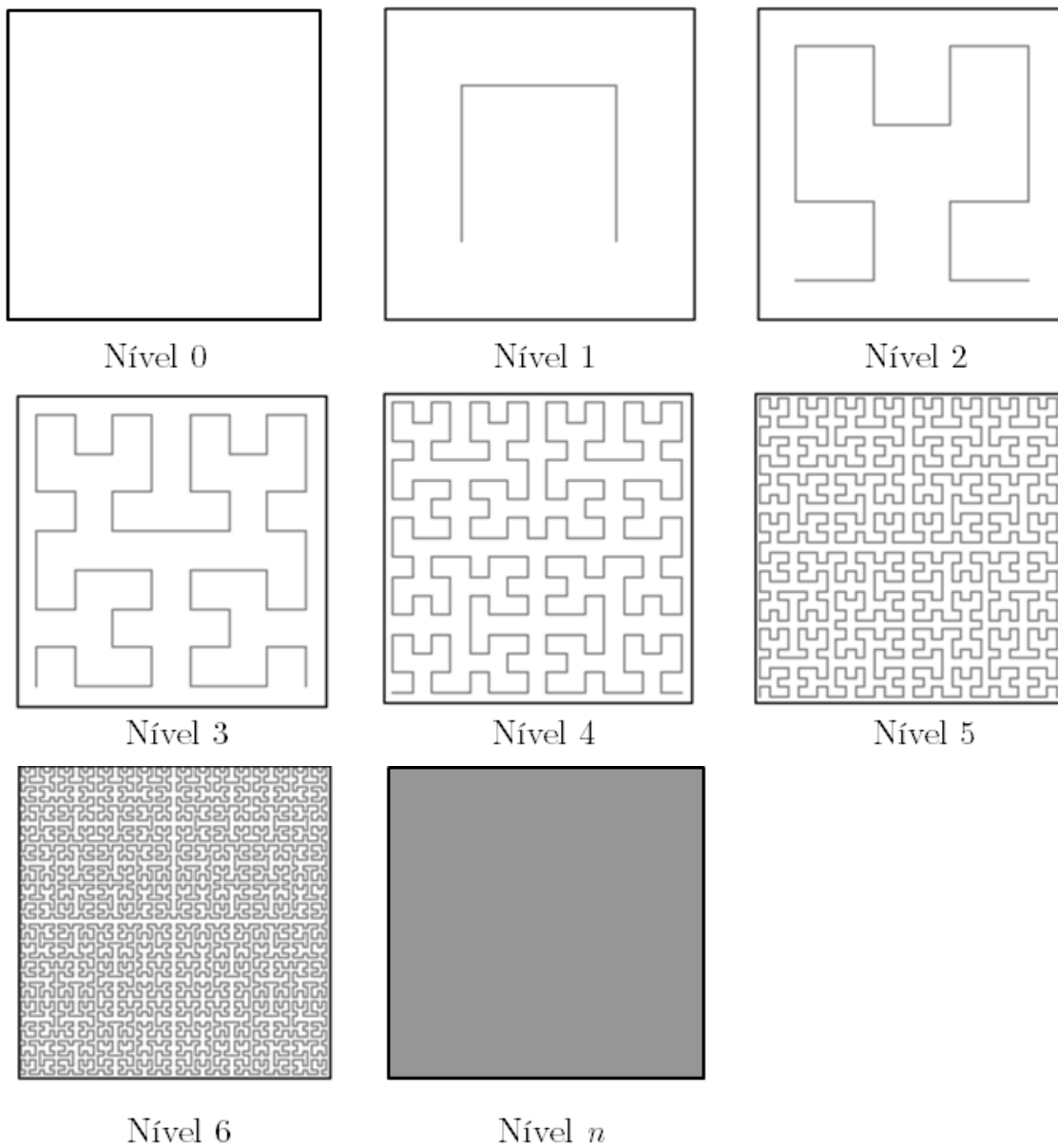
Percebemos que em cada iteração  $k$ , existem  $9^k$  segmentos, tendo cada um deles um comprimento igual a  $(1/3)^k$ . Assim, conforme Definição 1, sendo  $N=9^k$  o número de segmentos obtidos na iteração  $k$ , e  $r = (1/3)^k$  o coeficiente de redução na mesma iteração, temos que a dimensão da Curva de Peano é dada por:

$$D = \frac{\log 9^k}{\log \frac{1}{(1/3)^k}} = \frac{k \cdot \log 9}{k \cdot \log 3} = 2.$$

### 2.1.5 Curva de Hilbert

A curva de Hilbert é formada a partir de um quadrado inicial, unitário. Dividimo-lo em quatro quadrados iguais, e tracemos a poligonal aberta que une seus pontos centrais, tendo a primeira iteração. A partir daí, as outras iterações são formadas de acordo com a mesma regra, conforme figura seguinte:

Figura 21 – Curva de Hilbert, dos níveis 0 a 6, e  $n$ -ésimo nível,  $n \rightarrow \infty$ . Percebe-se aqui que a curva preenche cada vez mais o quadrado unitário inicial, e no limite, temos o quadrado todo “percorrido” pela curva de Hilbert.



Fonte: autor.

Para auxiliar no cálculo da dimensão do fractal, façamos os cálculos da tabela abaixo:

**Tabela 4: quantidades e comprimentos de segmentos e de quadrados, na curva de Hilbert, em função da iteração  $n$ , e comprimento da curva.**

$n$	Número de quadrados	Número de segmentos	Comprimento do lado do quadrado/comprimento dos segmentos da curva ( $A_n$ )	Comprimento da curva
0	$1=4^0$	$4^0-1$	$1/2^0$	$(4^0-1).(1/2^0)=0$
1	4	$4^1-1$	$1/2^1$	$(4^1-1).(1/2^1)=3/2$
2	$4^2$	$4^2-1$	$1/2^2$	$(4^2-1).(1/2^2)=15/4$
3	$4^3$	$4^3-1$	$1/2^3$	$(4^3-1).(1/2^3)=63/8$
4	$4^4$	$4^4-1$	$1/2^4$	$(4^4-1).(1/2^4)=255/16$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$4^n$	$4^n-1$	$1/2^n$	$(4^n-1).(1/2^n)$

Fonte: autor.

Percebemos que em cada iteração  $k$ , existem  $4^k-1$  segmentos, tendo cada um deles um comprimento igual a  $(1/2)^k$ . Assim, conforme Definição 1, sendo  $N=4^k-1$  o número de segmentos obtidos na iteração  $k$ , e  $r = (1/2)^k$  o coeficiente de redução na mesma iteração, temos que a dimensão da Curva de Hilbert é dada por:

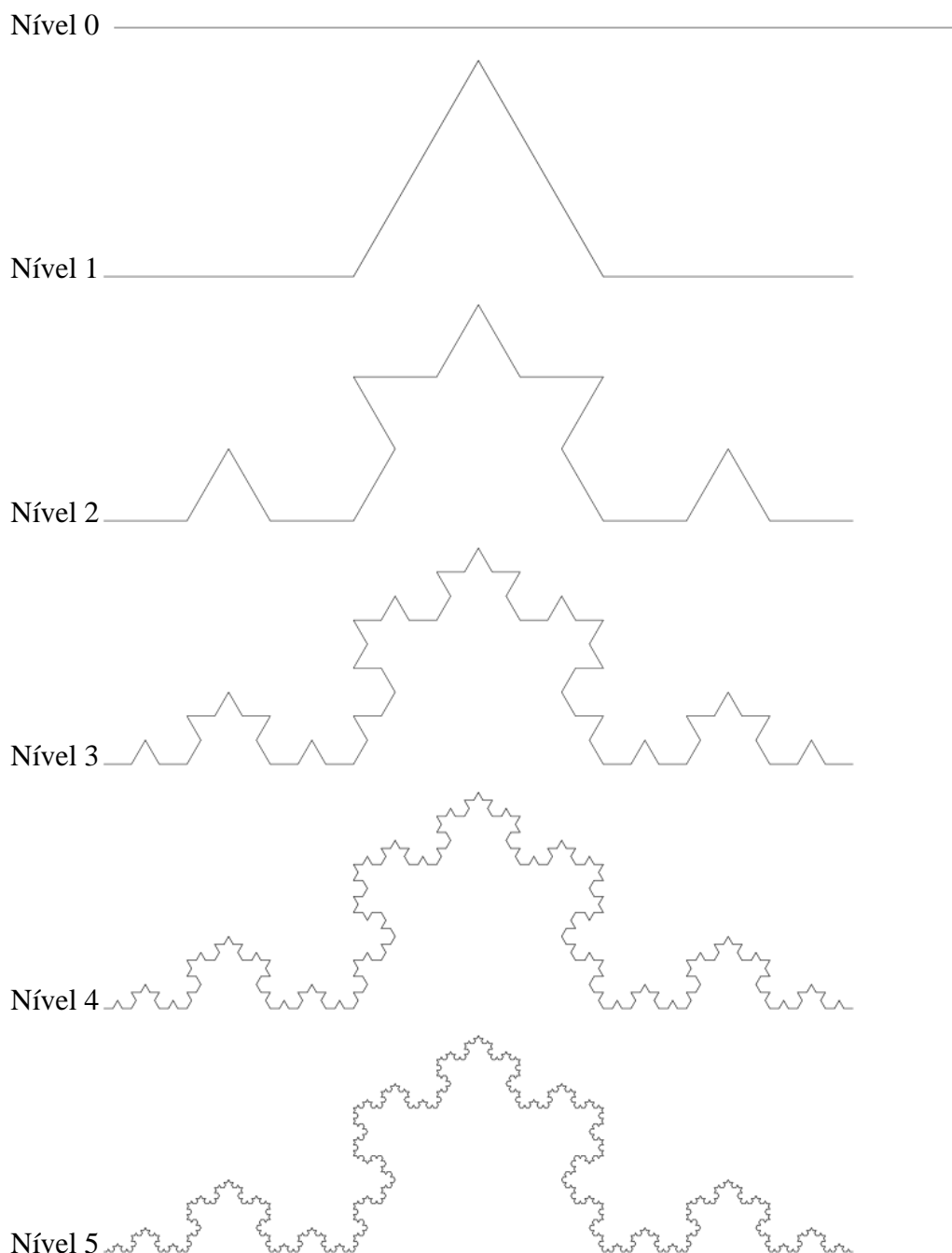
$$\begin{aligned}
 D &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log(4^k - 1)}{\log \frac{1}{(1/2)^k}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \left[ 4^k \left( 1 - \frac{1}{4^k} \right) \right]}{\log 2^k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log 4^k + \log \left( 1 - \frac{1}{4^k} \right)}{\log 2^k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{2k \log 2 + \log \left( 1 - \frac{1}{4^k} \right)}{k \log 2} \\
 &= 2 + \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log \left( 1 - \frac{1}{4^k} \right)}{k \log 2} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

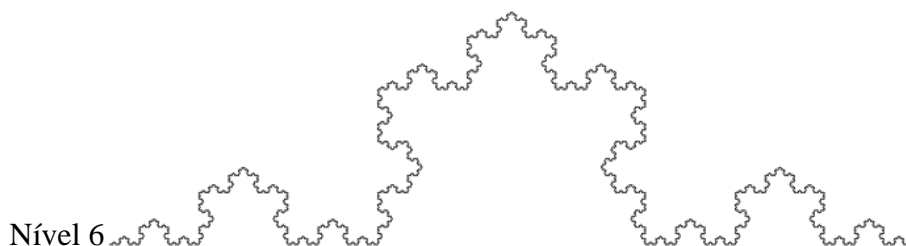
Assim, a dimensão fractal da curva de Hilbert, a exemplo do que também ocorre com a curva de Peano, é igual a 2.

### 2.1.6 Curva de Koch

A curva de Koch é formada a partir de um segmento inicial, unitário. Dividimo-lo em três partes iguais; com o terço central, construímos um triângulo equilátero, e eliminamos o terço central, obtendo a primeira iteração. Continuando com esse processo – de a cada segmento substituir o terço central por dois lados de um triângulo equilátero formado por esse lado suprimido, temos a curva de Koch em seus diversos níveis, conforme figura abaixo:

**Figura 22 – Curva de Koch, dos níveis 0 a 6.**





Fonte: autor.

Percebemos que numa iteração  $k$ , o número de segmentos é igual a 4 vezes o número de segmentos da iteração  $k-1$ ; isso ocorre porque cada segmento é substituído por quatro segmentos nas iterações. Desta forma, na iteração  $k$  existem  $4^k$  segmentos, tendo cada um deles um comprimento igual a  $(1/3)^k$ , pois cada segmento da iteração  $k-1$  será dividido em três partes na iteração  $k$ . Assim, conforme Definição 1, sendo  $N=4^k$  o número de segmentos obtidos na iteração  $k$ , e  $r = (1/3)^k$  o coeficiente de redução na mesma iteração, temos que a dimensão da Curva de Koch é dada por:

$$D = \frac{\log 4^k}{\log \frac{1}{(1/3)^k}} = \frac{k \cdot \log 4}{k \cdot \log 3} \cong 1,26186.$$

### 2.1.7 Floco de Neve de Koch

Também conhecida como “a ilha de Koch”, a presente curva é bem similar à anterior, em relação à lei de formação. A diferença, inicial, implicará numa distinção bem marcante no que se refere à geometria do fractal: aqui, o nível 0 é representado por um triângulo equilátero de lado unitário. Isto atribui ao floco de neve de Koch a característica de ser uma curva poligonal fechada, a qualquer iteração, possuindo comprimento infinito e área finita.

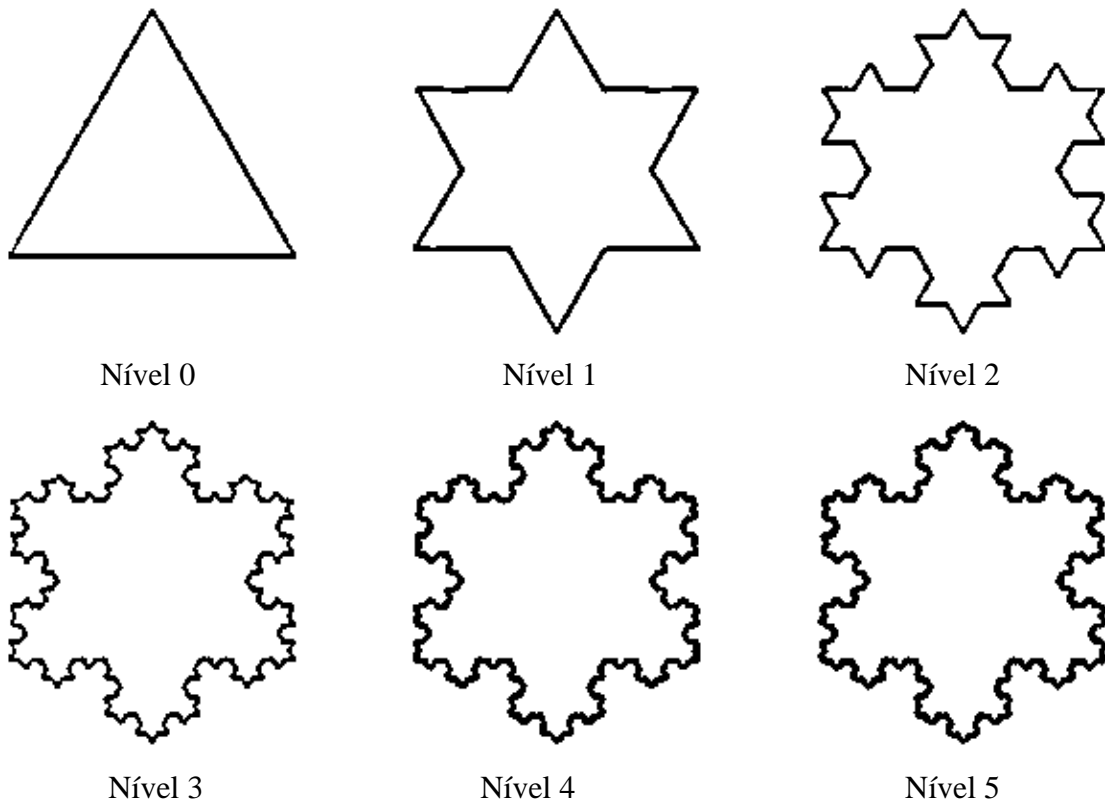
Como o nome já sugere, o Floco de Koch assemelha-se a um floco de neve, tendo como figura “geratriz” um triângulo equilátero, ao invés de um segmento de reta, como ocorre na Curva de Koch, tendo processos de formação similares. Devido à simetria perfeita do Floco de Koch, podemos considerá-lo, após as diversas repetições do procedimento de sua construção, como um floco de neve de formação ideal.

Considera-se que Koch sentiu-se motivado em desenvolver a curva homônima para apresentar uma curva inteiramente não-diferenciável, embora inteiramente contínua.

A partir de um triângulo equilátero inicial dividimos cada segmento (lado) em três partes iguais; com o terço central, construímos um triângulo equilátero, e eliminamos o terço central, obtendo a primeira iteração. Continuando com esse processo – de a cada segmento

substituir o terço central por dois lados de um triângulo equilátero formado por esse lado suprimido, temos o floco de neve de Koch em seus diversos níveis, conforme figura abaixo:

Figura 23 – Floco de Neve de Koch, dos níveis 0 a 5.



Fonte: autor.

Percebemos que numa iteração  $k$ , o número de segmentos é igual a 4 vezes o número de segmentos da iteração  $k-1$ ; isso ocorre porque cada segmento é substituído por quatro segmentos nas iterações. Desta forma, na iteração  $k$  existem  $3 \cdot 4^k$  segmentos, tendo cada um deles um comprimento igual a  $(1/3)^k$ , pois cada segmento da iteração  $k-1$  será dividido em três partes na iteração  $k$ . Assim, conforme Definição 1, sendo  $N=3 \cdot 4^k$  o número de segmentos obtidos na iteração  $k$ , e  $r = (1/3)^k$  o coeficiente de redução na mesma iteração, temos que a dimensão do Floco de neve de Koch é dada por:



$$\begin{aligned}
 D &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log(3 \cdot 4^k)}{\log \frac{1}{(1/3)^k}} \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\log 4^k + \log 3}{\log 3^k} \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\log 4^k}{\log 3^k} + \frac{\log 3}{\log 3^k} \right] \\
 &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{k \cdot \log 4}{k \cdot \log 3} + \frac{\log 3}{k \cdot \log 3} \right] \\
 &= \frac{\log 4}{\log 3} + \lim_{k \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{k} \right] \\
 &= \frac{\log 4}{\log 3} \\
 &\cong 1,26186.
 \end{aligned}$$

Numa iteração  $k$ , temos  $3 \cdot 4^k$  segmentos, de comprimento  $(1/3)^k$ . Assim, o perímetro  $P$  do polígono *Floco de Neve de Koch*, iterado infinitas vezes, é:

$$\begin{aligned}
 P &= \lim_{k \rightarrow +\infty} (3 \cdot 4^k)(1/3)^k \\
 &= 3 \cdot \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{3} \right)^k \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

No entanto, a área desse mesmo polígono é finita. A área de um triângulo equilátero é uma função do quadrado do lado, e vale  $\frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$ . Assim, a área do polígono na iteração  $k$  será igual à área do polígono na iteração  $k-1$  somada às áreas acrescentadas – em cada segmento da iteração  $k-1$ , forma-se um triângulo equilátero na iteração  $k$ , de lado medindo  $(1/3)^k$ . Lembremos que na iteração  $k-1$  há  $3 \cdot 4^{k-1}$  segmentos.

Então, sendo  $A_k$  a área do floco de neve na iteração  $k$ , e área total  $A$  para infinitas iterações, temos que resolver a seguinte recorrência:

$$\begin{aligned}
 A_k &= A_{k-1} + 3 \cdot 4^{k-1} \cdot \left(\frac{1}{3^k}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= A_{k-1} + \frac{3}{4} \cdot 4^k \cdot \frac{1}{9^k} \frac{\sqrt{3}}{4} \\
 &= A_{k-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k
 \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \\
 A_2 &= A_1 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^2 \\
 A_3 &= A_2 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^3 \\
 &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 A_k &= A_{k-1} + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^k
 \end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned}
 A_k &= A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left[ \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^k \right] \\
 &= A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^k}{1 - \frac{4}{9}} \\
 &\Rightarrow A_k = A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[ 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^k \right]
 \end{aligned}$$

Dado que a área  $A_0$  equivale a  $\frac{1^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ , a área  $A$ , após infinitas iterações, é dada

por:

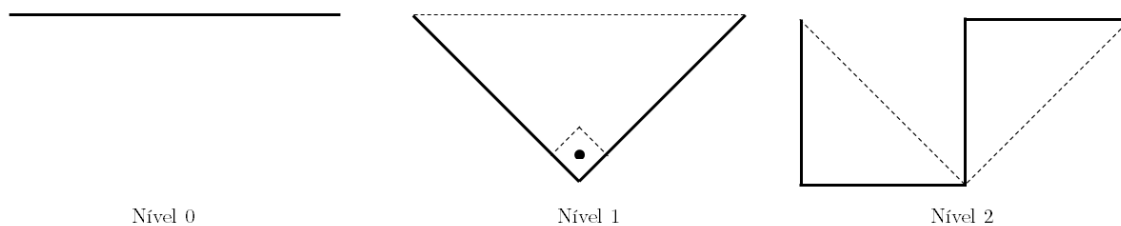
$$\begin{aligned}
 A &= \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \\
 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20} \left[ 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^k \right] \right\} \\
 &= A_0 + \frac{3\sqrt{3}}{20} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( 1 - \left( \frac{4}{9} \right)^k \right) \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \\
 &= \frac{8\sqrt{3}}{20} \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{5} \\
 &\cong 0,6928.
 \end{aligned}$$

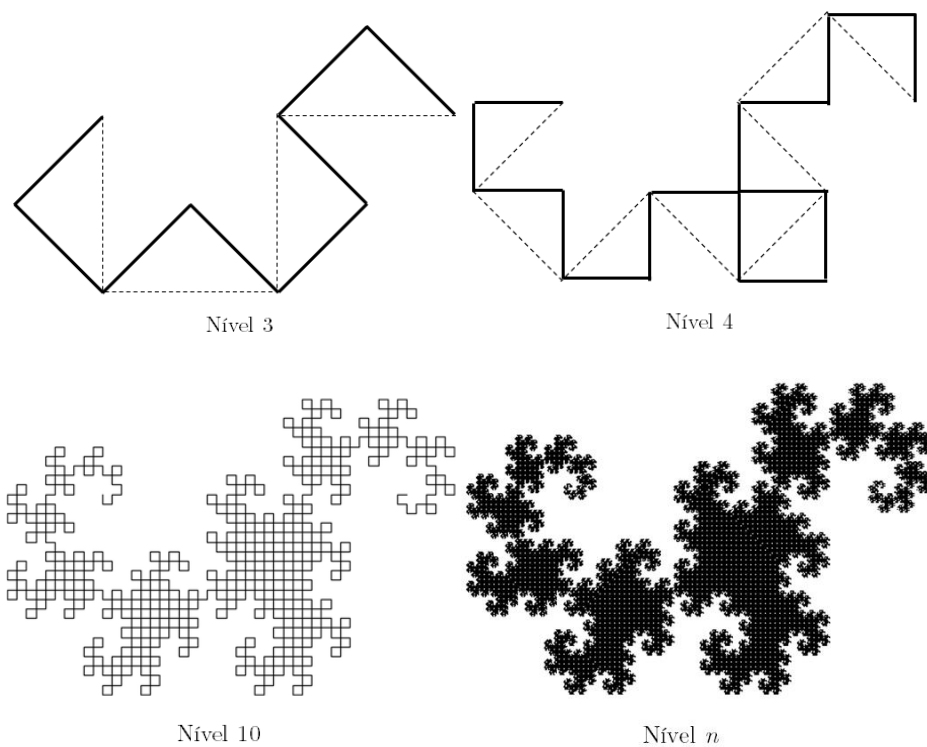
Desta forma, a área é finita.

### 2.1.8 Curva do Dragão Harter-Heighway

A curva é construída a partir de um segmento unitário. A regra de construção é substituir cada segmento por um triângulo retângulo e isósceles, suprimindo-se a base do triângulo, que pertencera à curva na iteração anterior. Há, ainda, a seguinte alternância: os segmentos de posição ímpar (primeiro, terceiro, quinto, ...) são substituídos por um triângulo de vértice *abaixo* do segmento, e os segmentos de posição par (segundo, quarto, sexto, ...) são substituídos por um triângulo de vértice *acima* do segmento. Além disso, a figura é “varrida” no sentido da esquerda para a direita. Assim, temos algumas iterações dispostas na figura abaixo:

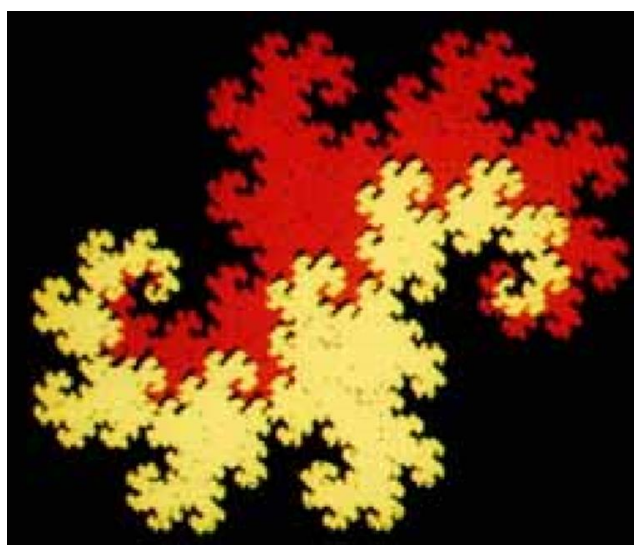
**Figura 24 – Curva do dragão (de) Harter-Heighway, dos níveis 0 a 4, além dos níveis 10 e  $n$ , com  $n \rightarrow \infty$ , onde obtemos o fractal propriamente dito, denominado *fractal dragão*.**





Fonte: autor.

Figura 25 – Curvas do dragão *gêmeas* ou espelhadas.



Fonte: [11].

Percebemos que em cada iteração  $k$ , existem  $2^k$  segmentos, tendo cada um deles um comprimento igual a  $(1/\sqrt{2})^k$ . Assim, conforme Definição 1, sendo  $N=2^k$  o número de segmentos obtidos na iteração  $k$ , e  $r = (1/\sqrt{2})^k$  o coeficiente de redução na mesma iteração, temos que a dimensão da Curva do dragão é dada por:

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{\log 2^k}{\log \frac{1}{(1/\sqrt{2})^k}} \\
 &= \frac{k \log 2}{\log 2^{k/2}} \\
 &= \frac{k \log 2}{\frac{k}{2} \log 2} \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

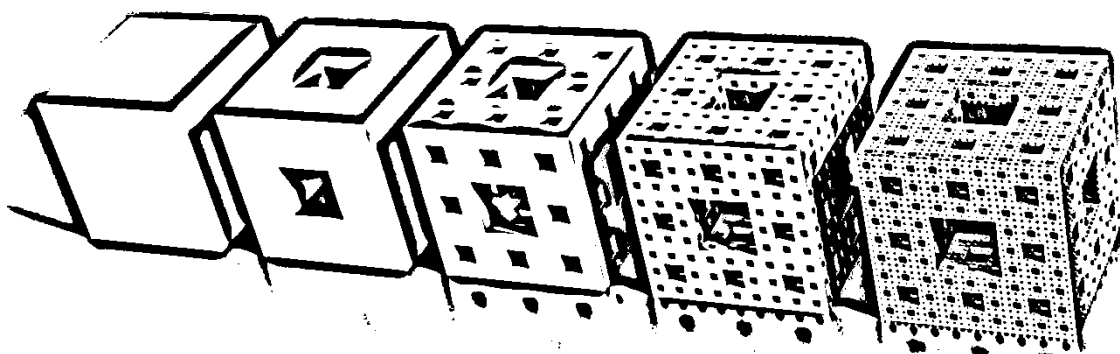
Assim, a dimensão fractal da curva do dragão, a exemplo do que também ocorre com as curvas de Hilbert e de Peano, é igual a 2.

### 2.1.9 Esponja de Menger

A esponja de Menger é uma extensão em três dimensões do tapete de Sierpinski: as operações de dividir a região em quadrados e retirar o quadrado central agora são efetuadas na divisão em cubos, e retiradas dos cubos centrais.

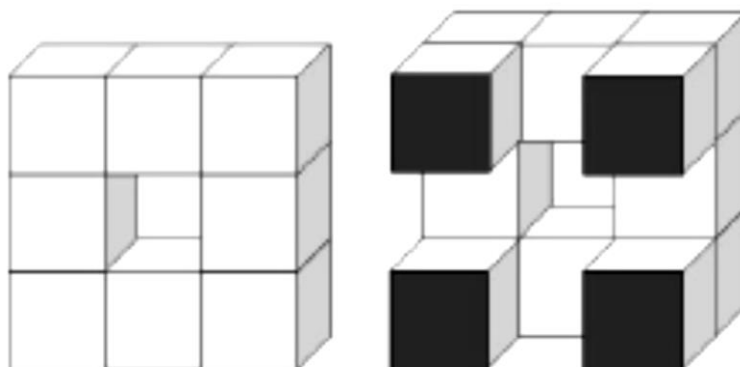
Iniciando-se com um cubo unitário, dividimos cada face em nove quadrados, o que implica na divisão do cubo em 27 cubos menores. Daí, removemos os cubos centrais de cada face (6 cubos) e o cubo central da figura (interno, ocultado pelas faces), restando 20 cubos, que consiste na primeira iteração. Repetindo o processo, temos as figuras abaixo:

Figura 26 – Esponjas de Menger, dos níveis 0 a 4.



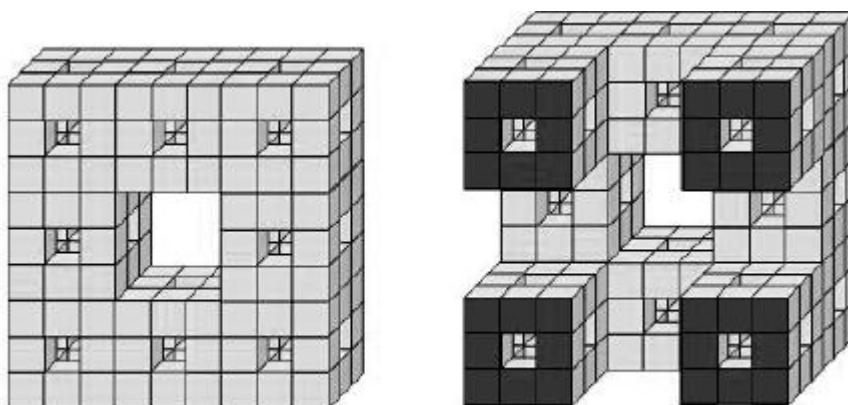
Fonte: autor.

**Figura 27 – Esponja de Menger no nível 1, e corte em qualquer das seis faces internas, onde os quatro quadrados claros, que formam uma cruz, estão “expostos” nas iterações, e os quatro quadrados escuros não pertencem à área externa da esponja.**



Fonte: autor.

**Figura 28 – Esponja de Menger no nível 2, e corte em qualquer das seis faces internas, onde os quatro quadrados claros (vazados), em forma de cruz, estão expostos nas iterações, e os quatro quadrados escuros (vazados) não pertencem à área externa da esponja.**



Fonte: autor.

Percebemos que em cada iteração  $k$ , existem  $20^k$  cubos, pois cada cubo é dividido em 27 cubos, dos quais “perde” 7 cubos. O lado do cubo reduz, de um nível para o outro, por um fator de  $1/3$ . Assim, conforme Definição 1, sendo  $N=20^k$  o número de cubos obtidos na iteração  $k$ , e  $r = (1/3)^k$  o coeficiente de redução na mesma iteração, temos que a dimensão da Esponja de Menger é dada por:

$$D = \frac{\log 20^k}{\log \frac{1}{(1/3)^k}} = \frac{k \log 20}{k \log 3} = \frac{\log 10 + \log 2}{\log 3} = \frac{1 + \log 2}{\log 3} \cong 2,7268.$$

Baseado em [14], vamos determinar a área dos processos iterativos, até determinarmos a área da esponja de Menger. Do tapete de Sierpinski, vimos que, no nível  $k$ , a área é igual a  $(8/9)^k$ . Ocorre aqui valor semelhante para uma face externa, e, para a área externa total, devemos ter o sêxtuplo desse valor, devido às seis faces do cubo.

Quanto às seis faces internas, em observância às figuras 27 e 28, vemos que a diferença de uma face interna para uma face externa é a supressão dos quatro quadrados das extremidades, restando os quatro quadrados que formam uma cruz. Assim, a face interna possui a metade da área de uma face externa. Desse modo, para a iteração  $k$ , temos que uma

face interna terá uma área igual a  $\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^k}{2}$ , e a área das seis faces internas correspondem ao sêxtuplo desse número.

Há ainda os “túneis” dos 20 cubos. Facilitamos essa análise na tabela 4:

**Tabela 5: áreas internas das esponjas de Menger, em função da iteração  $n$ .**

$n$	Vista interna	Área Interna
1	Túneis em 20 cubos de lado $1/3$	$\frac{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^1}{2}$
2	Túneis em 20 cubos de lado $1/3$ Túneis em 20 cubos de lado $1/9$	$\frac{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2}{2} + 20 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$
3	Túneis em 20 cubos de lado $1/3$ Túneis em 20 cubos de lado $1/9$ Túneis em $20^2$ cubos de lado $1/27$	$\frac{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^3}{2} + 20 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 20^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$
4	Túneis em 20 cubos de lado $1/3$ Túneis em 20 cubos de lado $1/9$ Túneis em $20^2$ cubos de lado $1/27$ Túneis em $20^3$ cubos de lado $1/81$	$\frac{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^4}{2} + 20 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 20^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + 20^3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4$
⋮	⋮	⋮
$n$	Túneis em 20 cubos de lado $1/3$ Túneis em 20 cubos de lado $1/9$ Túneis em $20^2$ cubos de lado $1/27$ Túneis em $20^3$ cubos de lado $1/81$ ⋮ Túneis em $20^{n-1}$ cubos de lado $1/3^n$	$\frac{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n}{2} + 20 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 20^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + 20^3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 + \dots$  $\dots + 20^{n-1} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$

Fonte: autor.

Portanto, a área da esponja de Menger, para uma iteração  $k$ , é dada por:

$$\begin{aligned}
 A_k &= 6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^k + \frac{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^k}{2} + 20 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 20^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3 + 20^3 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 + \dots \\
 &+ 20^{k-1} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^k \\
 &= 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^k + \frac{24}{9} \cdot \left[ \frac{20}{9} + \left(\frac{20}{9}\right)^2 + \left(\frac{20}{9}\right)^3 + \dots + \left(\frac{20}{9}\right)^{k-1} \right] \\
 &= 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^k + \frac{24}{9} \cdot \frac{20}{9} \cdot \frac{\left(\frac{20}{9}\right)^{k-1} - 1}{\frac{20}{9} - 1} \\
 &= 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^k + \frac{24}{9} \cdot \frac{20}{11} \cdot \left[ \left(\frac{20}{9}\right)^{k-1} - 1 \right] \\
 &= 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^k + \frac{24}{11} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^k - \frac{160}{33}
 \end{aligned}$$

A área da esponja de Menger, propriamente dita, é obtida no limite, será:

$$\begin{aligned}
 A_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 9 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \frac{24}{11} \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^n - \frac{160}{33} \right] \\
 &= \frac{24}{11} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{9}\right)^n - \frac{160}{33} \\
 &= \infty.
 \end{aligned}$$

Para estimarmos o volume da esponja em cada iteração  $k$ , faremos uma análise conforme apresentado na tabela 5:

**Tabela 6: volumes das esponjas de Menger, em função da iteração  $n$ .**

$n$	Composição da esponja	Volume
0	1 cubo de lado 1	1
1	20 cubos de lado $1/3$	$20 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{20}{27}$
2	$20^2$ cubos de lado $1/3^2$	$20^2 \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^2 = \frac{400}{729}$
3	$20^3$ cubos de lado $1/3^3$	$20^3 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^3 = \frac{8000}{19683}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$20^n$ cubos de lado $1/3^n$	$20^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^3 = \left(\frac{20}{27}\right)^n$

Fonte: autor.



O volume da esponja de Menger propriamente dita, que ocorre para  $n \rightarrow \infty$ , é dado por:

$$\begin{aligned} V_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{20}{27} \right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left( \frac{27}{20} \right)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1,35^n} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, o volume da esponja de Menger é zero, e a área, infinita.

## 2.2 Fractais determinados por recorrência

Estes fractais determinados por uma relação de recorrência são muito presentes nos estudos dos Sistemas Dinâmicos, onde temos relações aparentemente caóticas, variáveis em função do tempo.

Dentre os principais fractais determinados por recorrência, estão o Fractal de Lyapunov, o conjunto de Julia, e o conjunto de Mandelbrot, a seguir descritos:

### 2.2.1 Fractal de Lyapunov

Seja um sistema do tipo  $x_{n+1} = f(x_n)$ , iniciando com um dado número  $x_0$  [15]. Desse modo, temos:

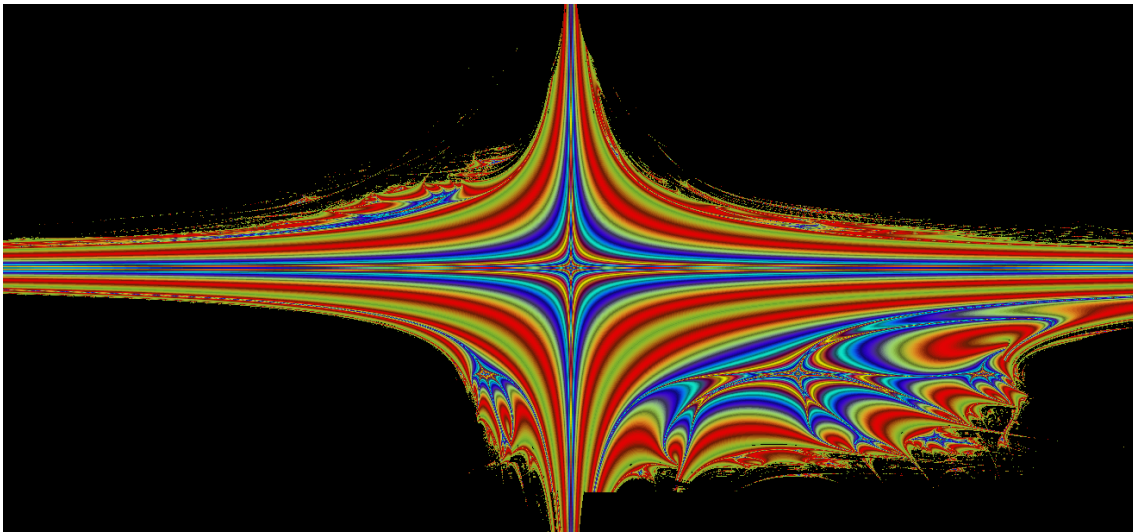
$$\begin{cases} x_1 = f(x_0) \\ x_2 = f(x_1) \\ \vdots \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

Lyapunov atribuiu a  $x_n$  o quantitativo de indivíduos de uma espécie, ou seja, a sua população, com população inicial  $x_0 + \varepsilon$ , e admitindo-a como decrescente (semelhante às funções  $g(x)=1/x$ , ou  $h(x)=e^{-x}$ ), mas se estabiliza em um número. Deste modo, sendo  $f(x_n) = y_n$ , o sistema fica:

$$\begin{cases} y_1 = f(y_0) = f(x_0 + \varepsilon) \\ y_2 = f(y_1) \\ \vdots \\ y_{n+1} = f(y_n) \end{cases}$$

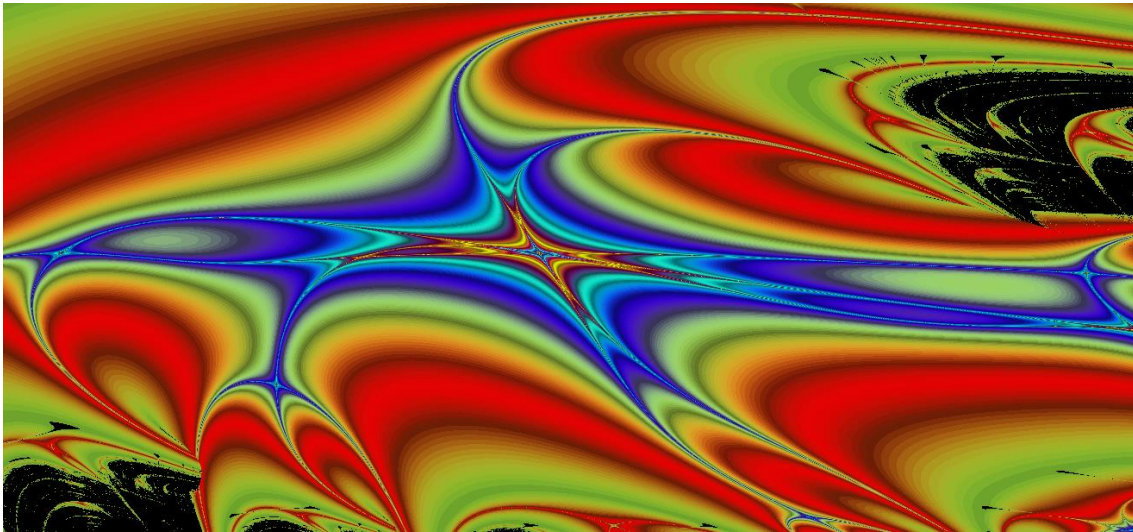
Fazendo  $y_n = x_n + \varepsilon e^{\lambda n}$ , que satisfaz à condição  $y_0 = x_0 + \varepsilon$ , para  $n=0$ . De acordo com o valor de  $\lambda$ , que é chamado de expoente de Lyapunov, temos três situações: (a)  $\lambda > 0$ : neste caso, a função exponencial “cresce” muito, e a função é divergente; (b)  $\lambda = 0$ : neste caso, a distância das sequências  $y_n$  e  $x_n$  é sempre  $\varepsilon$ , pois,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , temos que  $y_n - x_n = \varepsilon$ ; (c)  $\lambda < 0$ : neste caso, a função exponencial “decrece” muito, e a função é convergente para  $x_n$ , pois  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda < 0}} (\varepsilon e^{\lambda n}) = 0$ .

**Figura 29 – Fractal de Lyapunov,  $-5 < a < 5$ ,  $-5 < b < 5$ ,  $x_0 = 0,1$ , com sequência BBABA (sequência *Jelly Fish*), renderizada em 3 minutos e 40 segundos.**



Fonte: autor.

Figura 30 – Fractal de Lyapunov,  $3 < a < 3,5$ ,  $3 < b < 3,5$ ,  $x_0 = 0,1$ , com sequência BBABA (sequência *Jelly Fish*), correspondendo à figura anterior vista numa janela menor.



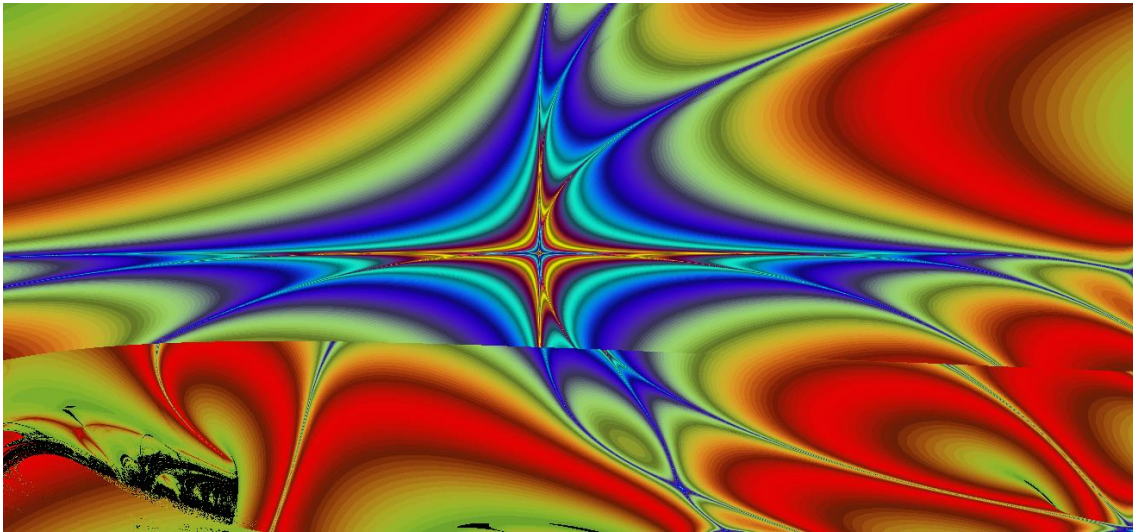
Fonte: autor.

Figura 31 – Fractal de Lyapunov,  $3,4 < a < 4$ ,  $2,5 < b < 3,4$ ,  $x_0 = 0,1$ , com sequência BBBBBAAAAAA (sequência *Zircon Zity*).



Fonte: autor.

Figura 32 – Fractal de Lyapunov,  $3 < a < 3,5$ ,  $3 < b < 3,5$ ,  $x_0 = 0,1$ , com sequência BBBBBBAAAAAA (sequência Zircon Zity), renderizada em 3 minutos e 45 segundos.

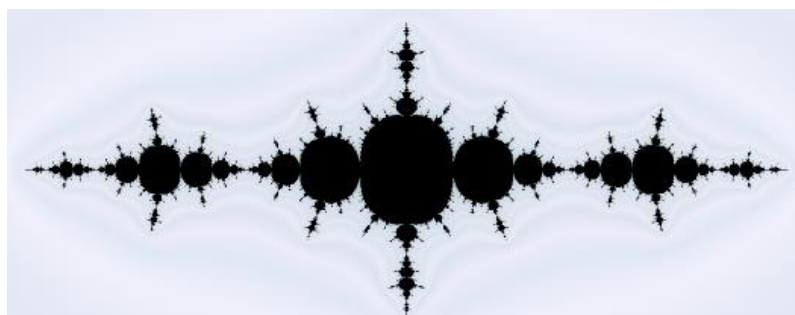


Fonte: autor.

### 2.2.2 Conjuntos de Julia

Conforme [5], os conjuntos de Julia surgiram após vários estudos acerca de processos iterativos envolvendo números complexos. Essa iteração é da forma  $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ , em que  $c$  é um ponto fixo no plano complexo, determinante na forma do conjunto.

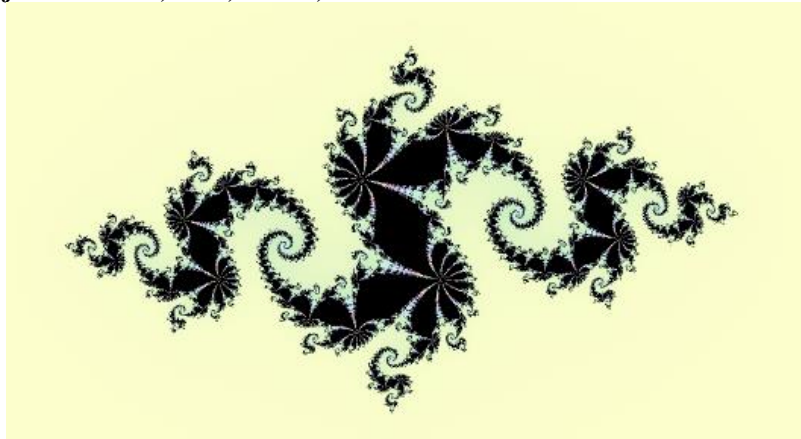
Figura 33a – Conjunto de Julia, para  $c = -1,25+0i$



Fonte: autor.



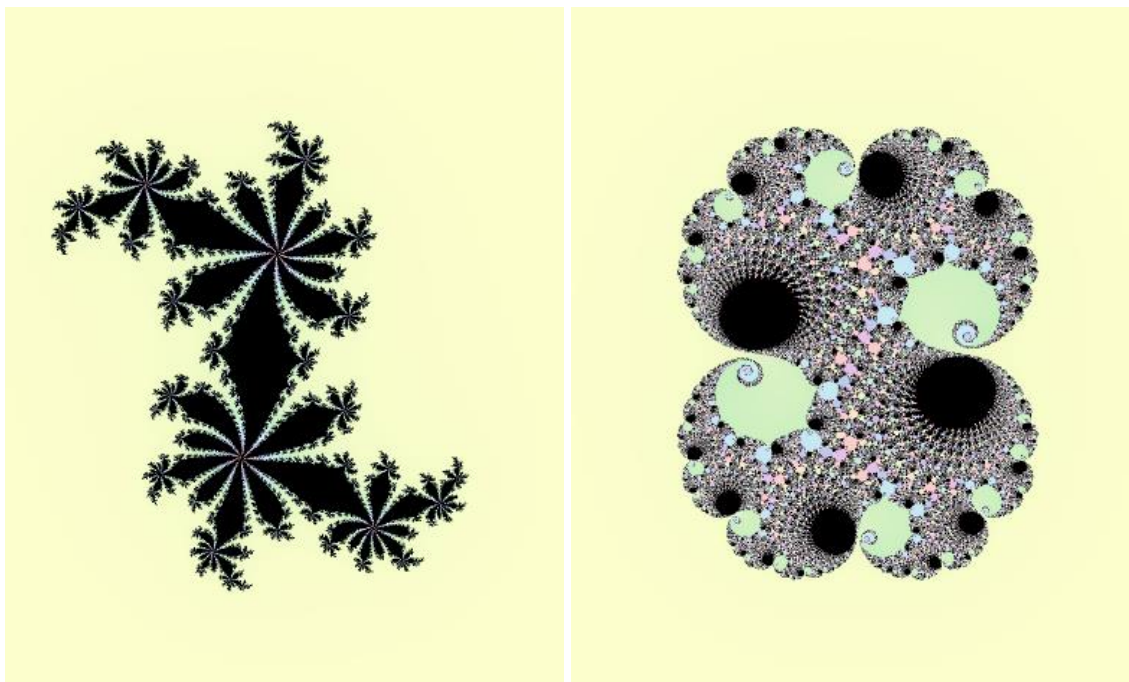
Figura 33b – Conjunto de Julia,  $c = 0,7961+0,1481i$ .



Fonte: autor.

Percebemos das figuras acima que a região do plano complexo determinada por cada Conjunto de Julia denota uma autossimilaridade aproximada, análoga aos pseudo-fractais.

Figura 34 – Conjunto de Julia, para  $c = 0,33-0,41i$  (à esquerda) e para  $c \cong 0,256-0,001i$  (à direita).



Fonte: autor.

### 2.2.3 Conjunto de Mandelbrot

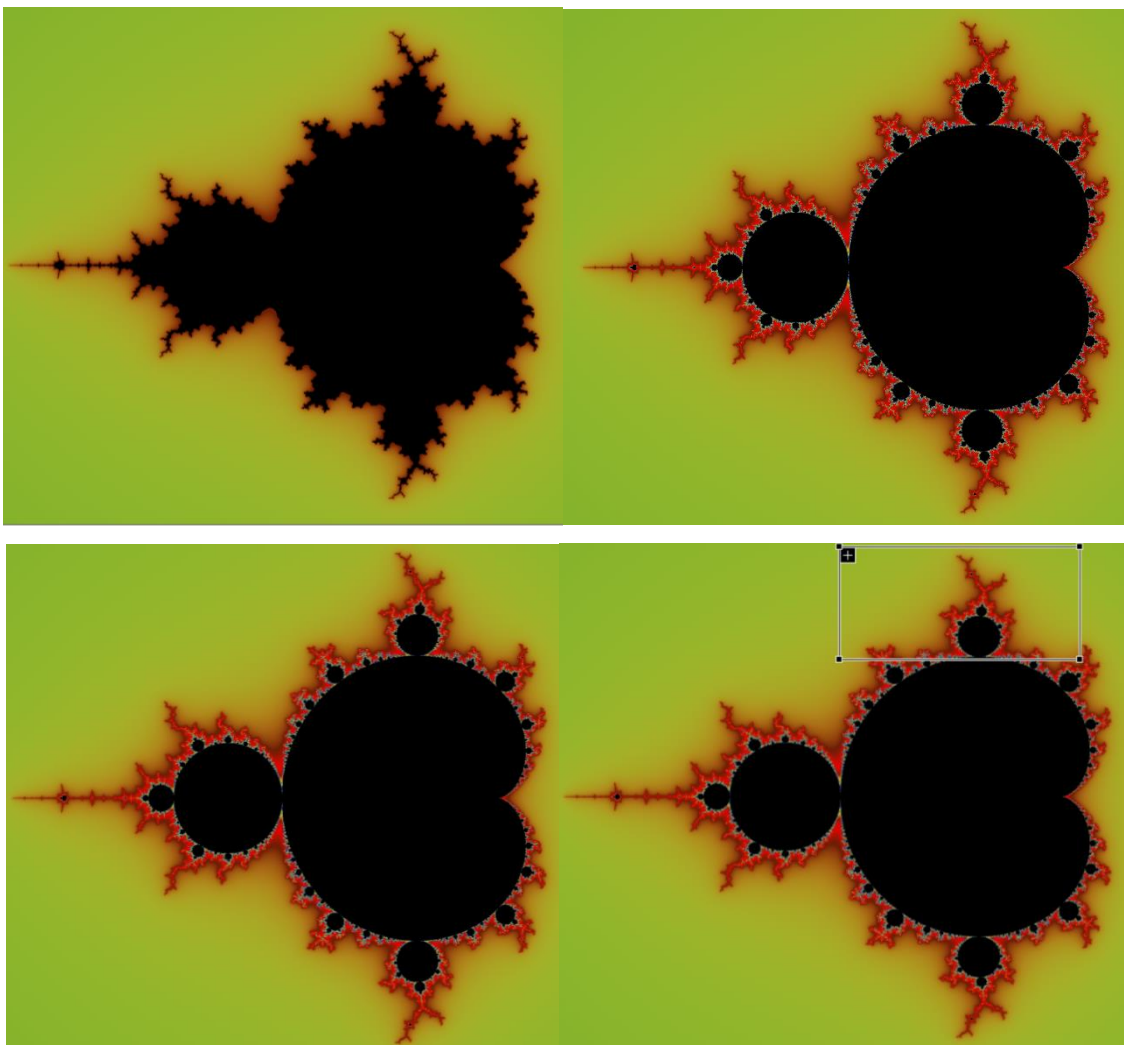
Procurando generalizar os Conjuntos de Julia [5], Mandelbrot percebeu a existência de uma imagem que conseguia representa-los, condensando assim em uma única figura partes constituintes dos Conjuntos de Julia.

Utilizando a mesma iteração  $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$ , desta vez com  $Z_0=0$ . Assim, temos que:

- $Z_1 = Z_0^2 + c = 0^2 + c = c$ ;
- $Z_2 = Z_1^2 + c = c^2 + c$ ;
- $Z_3 = Z_2^2 + c = (c^2 + c)^2 + c = c^4 + 2c^3 + c^2 + c$ ; e assim sucessivamente.

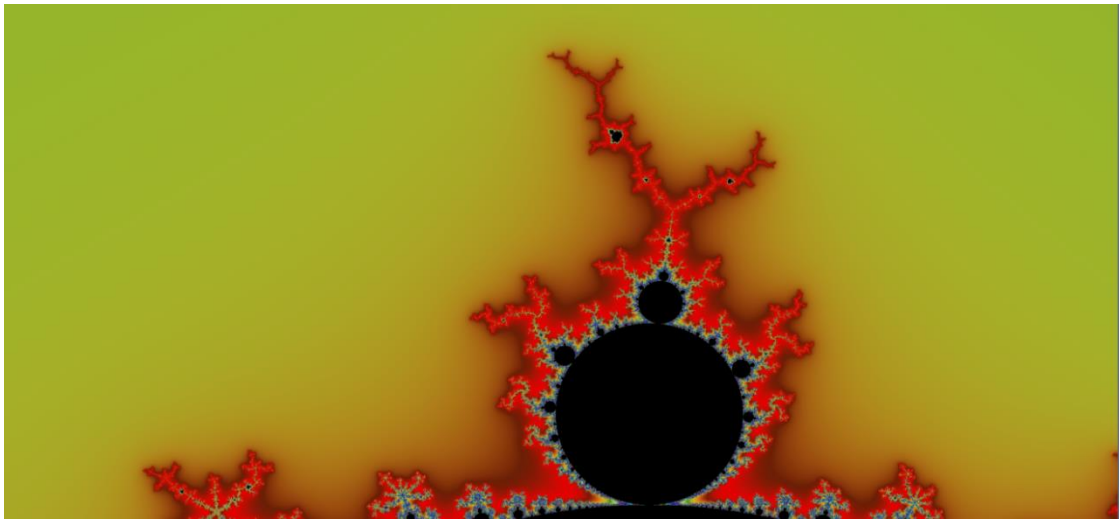
Assim, o conjunto desses valores complexos de  $z$  forma o conjunto de Mandelbrot, que contém os conjuntos de Julia, basta que variemos o valor do ponto  $c$ .

**Figura 35a – Conjunto de Mandelbrot**, para a parte real variando de -5 a 5, a parte imaginária variando de -2 a 2, e com 16 iterações (à esquerda, superior), com 256 iterações (à direita, superior), com 1024 iterações (à esquerda, inferior), e com 4096 iterações (à direita, inferior).



Fonte: autor.

Figura 35b – Conjunto de Mandelbrot, com zoom de 8 vezes em trecho do conjunto com 4096 iterações.



Fonte: autor.

Em [2], apresenta-se uma nova maneira de gerar o fractal de Mandelbrot. Inicia apresentando o sistema de Funções Iterativas que gera o fractal, a saber:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}, \text{ para } a \text{ e } b \text{ reais.}$$

O sistema acima funciona como uma *máquina de transportar pontos*, isto é, pela recursividade do sistema, ainda considerando a sua não-linearidade, cada ponto é obtido do ponto anterior.

O problema é que, como se afirma em [2], parece que os pontos caem em um intervalo, mas, mesmo que seja calculada uma grande quantidade destes pontos, não se consegue perceber qualquer regularidade em suas trajetórias. Então, sendo assim, dizemos que os pontos neste intervalo possuem um comportamento caótico. Conceituar rigorosamente *comportamento caótico*, conforme [2], é tarefa mais complexa e referente ao estudo dos Sistemas Dinâmicos; mas na presente abordagem, relacionamos este termo, intuitivamente, à imprevisibilidade: sistemas que envolvem muitas variáveis se comportam de maneira aleatória, sem que possamos determinar precisamente o que ocorrerá. Essa instabilidade ocorre, no caso do sistema de Funções Iterativas gerador do fractal de Mandelbrot, por causa da sensibilidade que o sistema possui em relação às condições iniciais: os valores dos parâmetros  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $a$  e  $b$  fazem toda a diferença nos pontos posteriores a serem obtidos.

A construção propriamente dita do referido fractal, conforme [2], preconiza as seguintes etapas:

- (i) desenhe um círculo de raio 2, centrado na origem do plano cartesiano;
- (ii) defina os valores dos parâmetros  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $a$  e  $b$ ;

- (iii) defina até que ponto será calculado, isto é, o número  $n$  de iterações a serem feitas, como por exemplo,  $n = 100$ ;
- (iv) calcule os pontos  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{100}, y_{100})$ ;
- (v) considere somente os pontos  $(x_i, y_i)$  não-externos ao círculo;
- (vi) atribua novos valores de  $a$  e de  $b$  ( $2^a$  seleção), e volte para (iii).

Assim, o fractal de Mandelbrot será a figura formada pelos pontos determinados através do procedimento acima, após  $k$  seleções de  $a$  e de  $b$ . Segundo [2], a imagem atratora (isto é, para a qual as iterações tendem) é bastante aproximada após 50 iterações. Frise-se que nessas iterações, muitos pontos escapam para o infinito.

Portanto, obtém-se uma figura complexa e de excepcional beleza, que já foi considerada o objeto matemático mais complexo, aspectos que podemos perceber na figura 35.

Para maior clareza, vamos comparar as funções recursivas  $Z_{n+1} = Z_n^2 + c$  e

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \\ y_{n+1} = 2x_n y_n + b \end{cases}. \text{ Fazendo } Z_j = x_j + y_j i \text{ e } c = a + bi, \text{ temos:}$$

$$\begin{aligned} Z_{j+1} &= Z_j^2 + c \\ \Rightarrow x_{j+1} + y_{j+1}i &= (x_j + y_j i)^2 + a + bi \\ \Rightarrow x_{j+1} + y_{j+1}i &= x_j^2 - y_j^2 + 2x_j y_j i + a + bi \\ \Rightarrow x_{j+1} + y_{j+1}i &= x_j^2 - y_j^2 + a + (2x_j y_j + b)i \\ \Rightarrow \begin{cases} x_{j+1} = x_j^2 - y_j^2 + a \\ y_{j+1} = 2x_j y_j + b \end{cases}, &\text{ para algum } j \text{ natural.} \end{aligned}$$

### 2.3 Fractais aleatórios

Aparentemente desordenados, sendo um típico exemplo do que se estuda em Teoria do Caos, particularmente em Sistemas Dinâmicos, os fractais aleatórios fascinam pela aparência caótica, mas com leis probabilísticas que determinam cada razão de ser desses fractais, cujo exemplo clássico é o Voo de Lévy.



### 2.3.1 Voo de Lévy

Acerca do voo de Levy, um fractal aleatório, [16] afirma que é um tipo de passeio aparentemente aleatório, mas regido por uma lei de probabilidade. Segundo a física Martine Chevrollier (UFPB), simplificada, são movimentos aleatórios que se caracterizam por uma série de passos pequenos entremeados por raros deslocamentos longos, e afirma que esse padrão é obedecido em fenômenos que envolvem espalhamento de luz e acontece, por exemplo, em estrelas, em lâmpadas fluorescentes e em parte dos raios solares que se propagam na atmosfera e no mar [17].

Já o físico Marcos da Luz (UFPR), identifica que o voo de Lévy também descreve com precisão alguns fenômenos ecológicos: dados convincentes indicam que muitos animais – como chacais, abelhas, pinguins e outros – seguem voos de Lévy, e tem usado, juntamente com outros colaboradores, os voos de Lévy para entender como esses animais procuram alimento: quando uma fonte de alimento está distribuída de maneira esparsa e aleatória, a estratégia mais proveitosa para um animal em busca de uma refeição é, nesses casos, fazer pequenos movimentos por um tempo para vasculhar os arredores; se não encontrar nada, é melhor ir para uma zona distante, onde a probabilidade de encontrar alimento talvez seja maior.

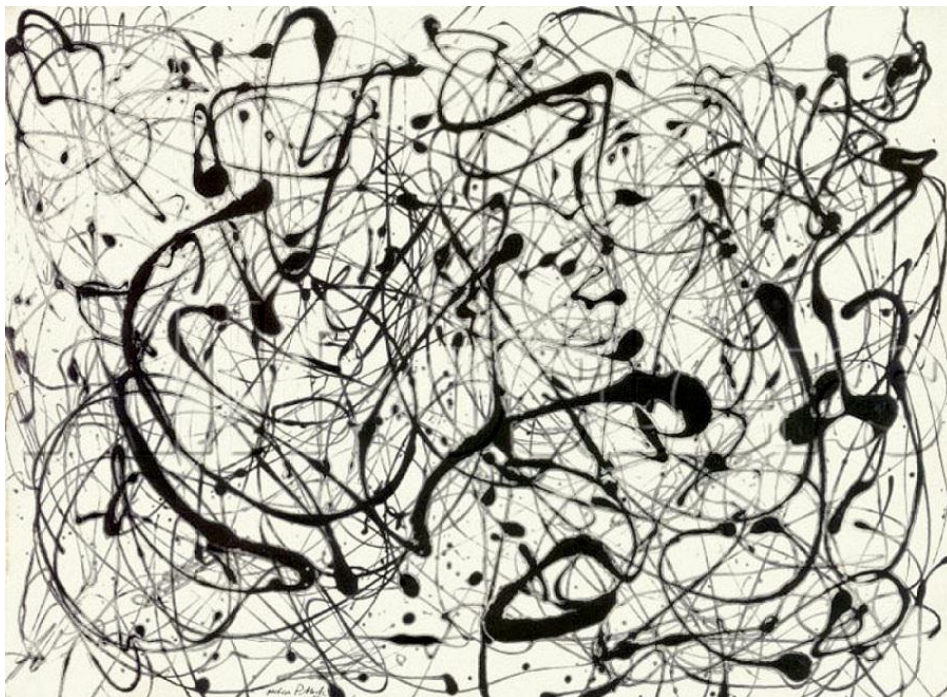
Viswanathan, Raposo e Luz mostraram que uma ampla variedade de animais, de amebas a baleias, parece adotar voos de Lévy em seus deslocamentos, e o próximo procedimento dos pesquisadores é formalizar matematicamente essa teoria, tanto para trajetórias-solo como em bandos [17].

[18] apresenta uma pesquisa envolvendo o rastreamento de tubarões-seda, concluindo que estes animais caçam alimento alternando entre o movimento Browniano e os voos de Lévy, de acordo com a abundância ou a escassez de alimento. [18] traça ainda uma interessante analogia dos voos de Lévy com a pintura: “Voos de Lévy são uma classe especial de movimentos caracterizado por muitos pequenos passos, pontuados por caminhadas mais longas. Como os padrões mostram pouca variância em diferentes escalas, os processos associados a esses movimentos estão intimamente ligados com a geometria fractal. Por exemplo, tem sido sugerido que os rabiscos coloridos que caracterizam o trabalho de Jackson Pollock, um renomado pintor abstrato, foram criados semelhantemente a uma série de voos de Lévy”, disse David Sims, do Laboratório de Associação Biológica Marinha em Plymouth, Reino Unido. Ele disse ainda que “os resultados mostram que, até certo ponto, os movimentos de animais são previsíveis em relação aos seus tipos de habitats. No caso dos peixes,

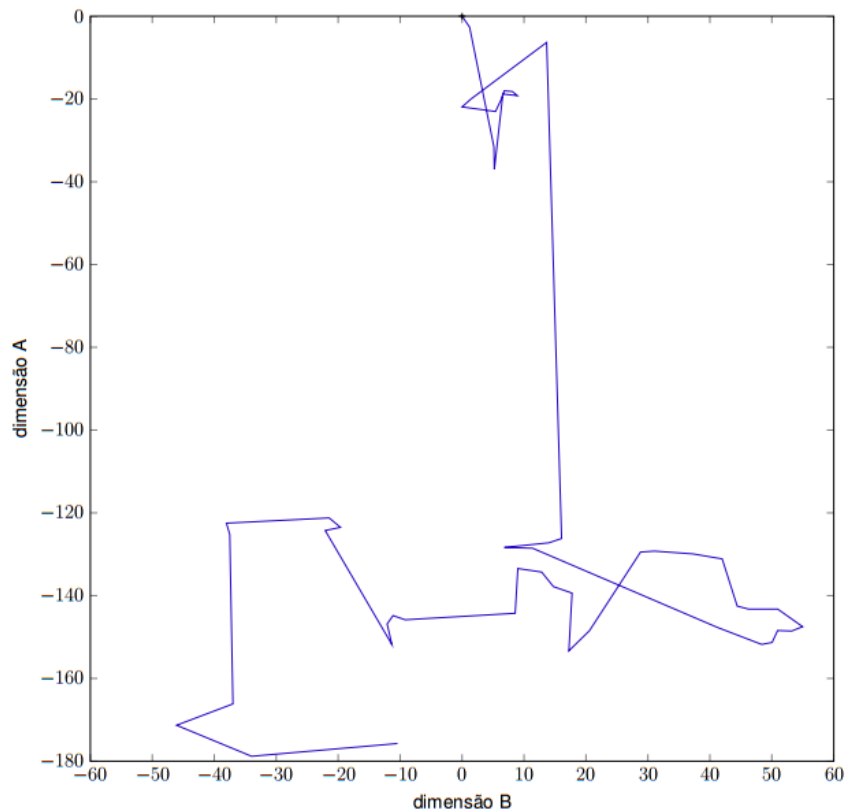
pensamos que isso vai ajudar a parametrizar uma nova onda de modelos populacionais espacialmente estruturados que nos ajudará a administrar estoques de forma mais eficaz em face da sobrepesca e as mudanças climáticas, por exemplo”.

[19] conceitua o voo de Lévy como uma busca espacial eficiente em termos de distância percorrida em que as mudanças de direção são isotrópicas (probabilidade de escolha de determinada direção igual a qualquer outra direção) e aleatórias, sendo os segmentos da trajetória retilíneos e seus comprimentos seguem uma distribuição de Lévy. Essa distribuição probabilística é dada pela lei  $y = x^{-a}$ , onde  $1 < a < 3$ . Além disso, diferencia a alternância do percurso dos tubarões entre o movimento browniano e o voo de Lévy da seguinte forma: quando a caça é abundante em uma determinada região próxima, “utilizam” o movimento browniano, e quando a caça está escassa nessa região, deslocam-se segundo o voo de Lévy.

Figura 36a – Obra *O número 14*, do artista Jackson Pollock (1948).



Fonte: [20].

**Figura 36b – Um Voo de Lévy bidimensional com 50 passos, iniciando-se na origem.**

Fonte: [19]

Mais detalhes sobre o tema podem ser encontrados nas referências citadas no presente tópico, além de [21].

## 2.4 Fractais Artísticos

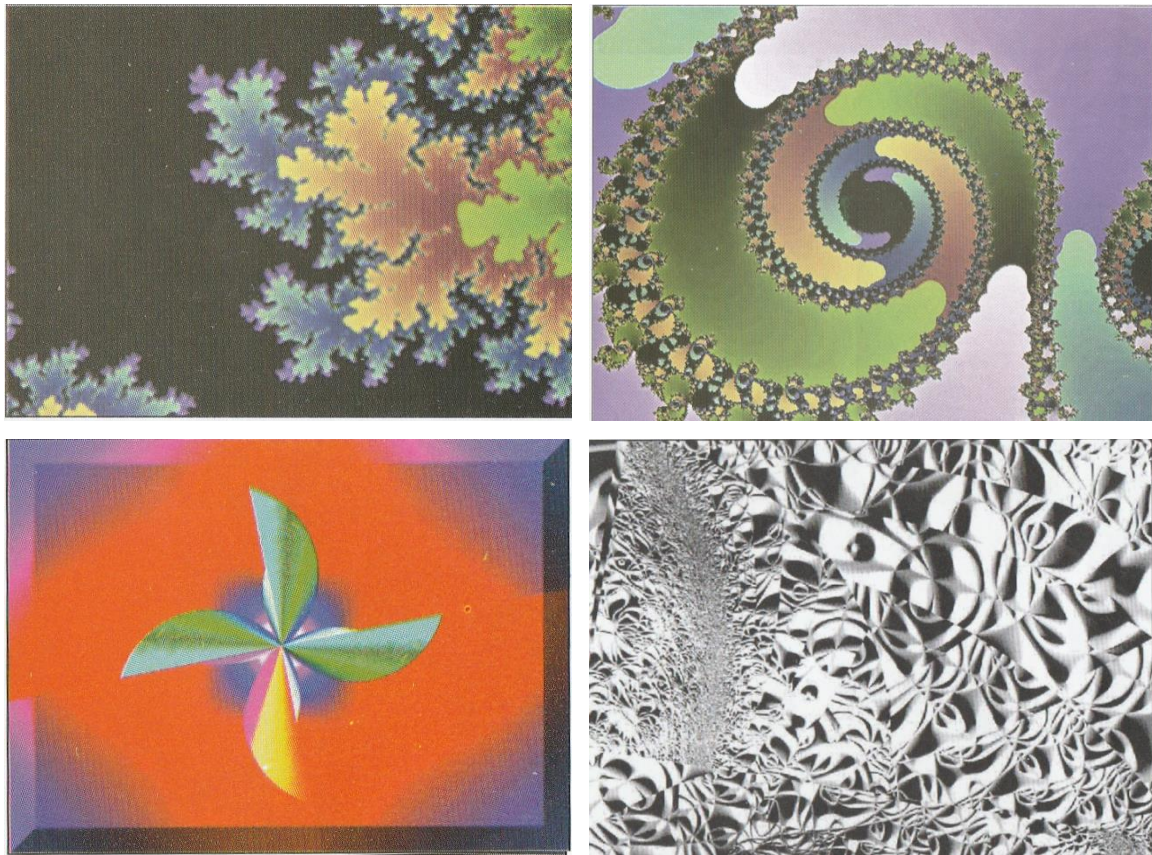
Conforme [2], a geração de fractais a partir de equações (Sistemas de Funções Iteradas), como as apresentadas por Mandelbrot, pode produzir imagens surpreendentes; algumas destas despertam a atenção de profissionais de artes gráficas, por exemplo, apesar de que boa parte das imagens formadas por estas equações podem não implicar em resultados interessantes, ou esses resultados interessantes, para surgirem, necessitaria de uma quantidade muito alta de iterações.

O fato é que, tendo como aliados os *softwares* que produzem imagens fractais a partir de Funções Iteradas, como os programas *Fratint* e *Ultrafractal*, citados por [2], ou os programas aqui utilizados, *Visions Of Chaos* e *Nfract*, podem ser manipulados com facilidade

e, a depender dos dados alimentados pelo usuário, podem produzir essas imagens interessantes.

Neste sentido, algumas destas imagens podem ser interpretadas como artísticas, cujas fronteiras são tênues e estão mais de acordo com uma visão pessoal e individual do que algo que se possa determinar racional ou logicamente. De outro modo, afirmar que tais imagens são artísticas vai do gosto pessoal, da interpretação e das sensações experimentadas individualmente. Alguns exemplos de fractais artísticos, criados por [2] através do *Ultrafractal*, seguem abaixo:

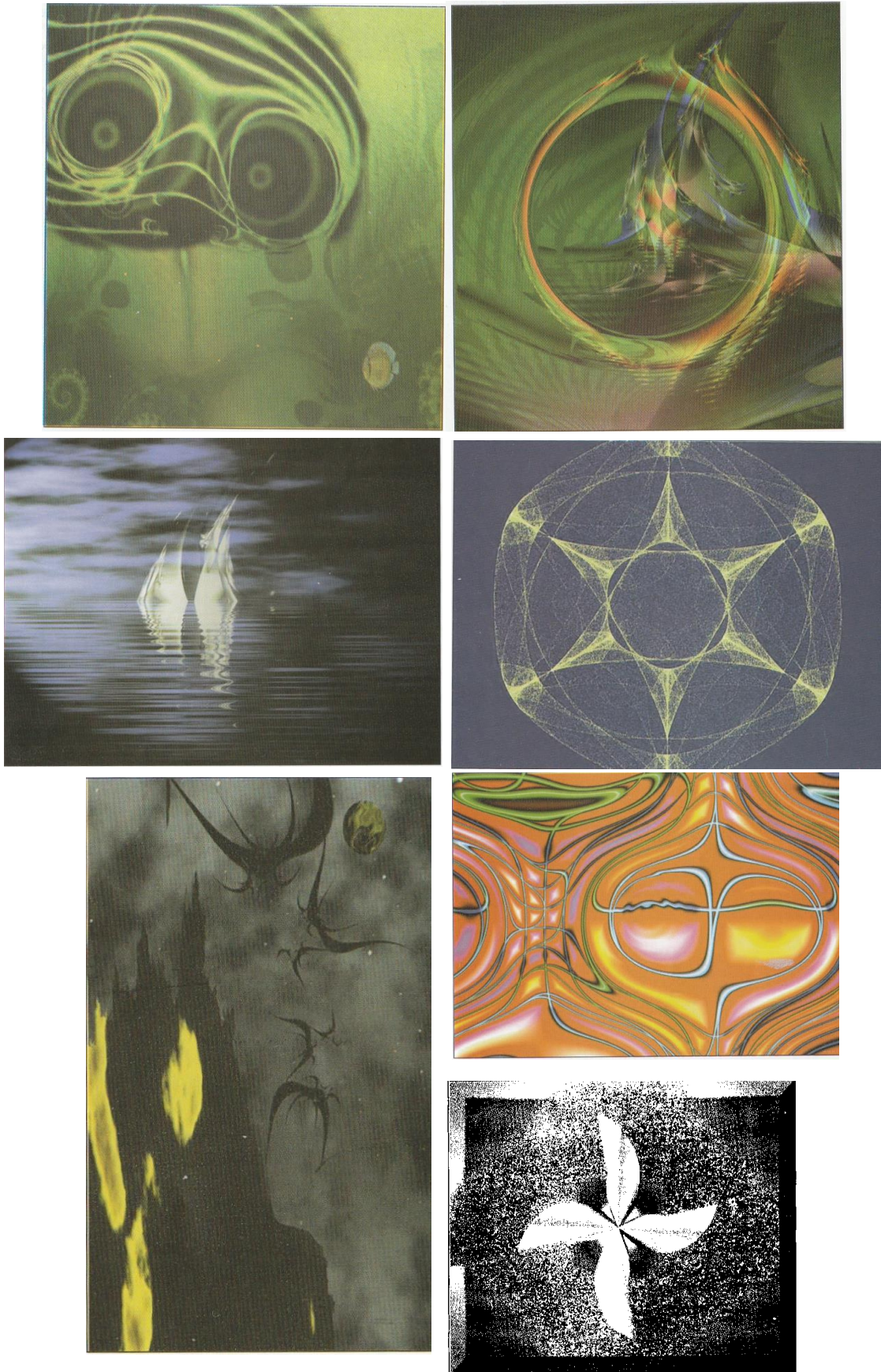
**Figura 37a – Figuras artísticas.**



Fonte: [2].



Figura 37b – Figuras artísticas.



Fonte: [2].

Ao observar as imagens, vê-se que podemos enquadrá-las como artísticas com dois sentidos distintos: algumas se aproximam da pintura de paisagens ou da fotografia, enquanto que outras se assemelham às artes plásticas abstratas, tão em voga a partir da fase Moderna (primeiras décadas do século XX) das artes até os dias atuais. Infelizmente, não são apresentadas as funções geradoras de tais fractais. Desta forma, há uma infinidade de fractais que não se enquadram nos clássicos, e sim nos artísticos, e tentam extrair elementos da natureza e modelá-los, tais como os seguintes:

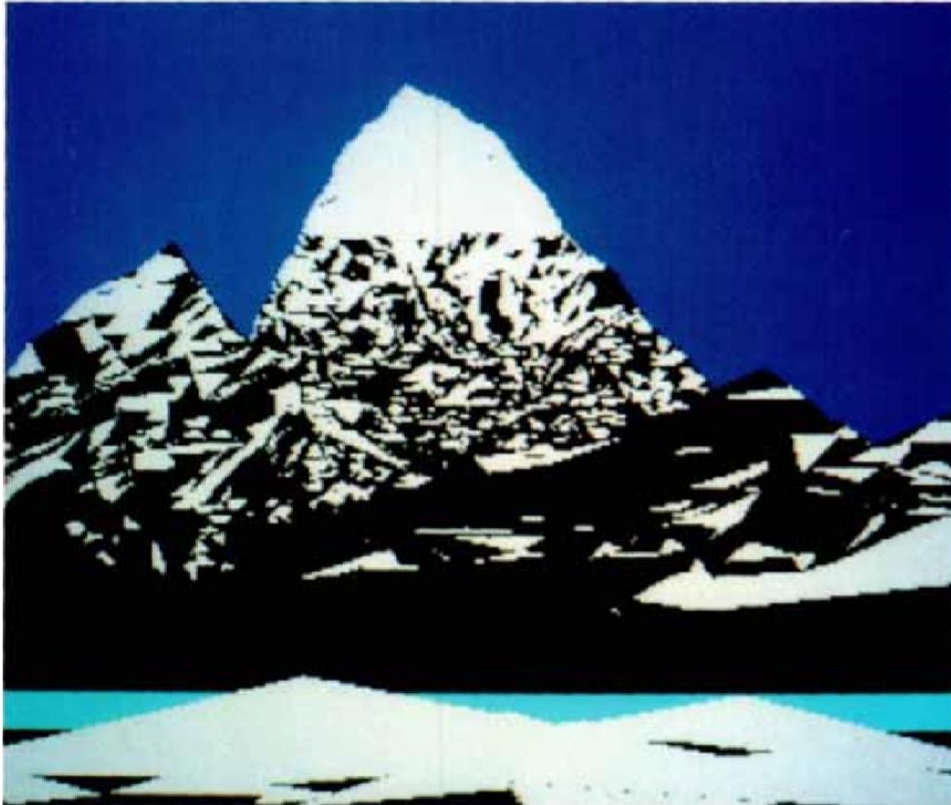
Figura 37c – Figuras artísticas.



Fonte: [11].



Figura 38 – Montanha-fractal construída computacionalmente .



Fonte: [11].

## Capítulo 3

### Geometria Fractal: uma Sequência Didática para aplicação no Ensino Médio

Neste capítulo apresentaremos algumas atividades envolvendo os fractais, a serem aplicadas no Ensino Médio, com a finalidade de apresentar novas possibilidades de expressão de figuras geométricas, para além das figuras da Geometria Euclidiana conhecidas e comumente trabalhadas. Sugere-se a sua aplicação em turmas do 3º ano do Ensino Médio, pela já maturidade e naturalidade com que trata de geometria, embora o tema presente seja flexível a qualquer turma, a depender da abordagem e do enfoque utilizados.

Em [7] são apresentados métodos de criação de novos fractais, baseados fractais clássicos. Ele mostra quatro tipos de fractais a serem construídos, tendo por base a Curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, o fractal pentagonal de Dürer, e a ramificação do tipo *árvore*.

Recomendamos ao professor que, antes da aplicação das atividades que estão propostas a seguir, divida a classe em grupos de 4 estudantes. Após a divisão da turma em grupos, o professor propõe que cada grupo pesquise sobre a geometria fractal na internet. O professor informa aos grupos que o objetivo é que cada grupo organize uma apresentação de no máximo 10 minutos sobre esse tema, expondo o que entenderam e sobre o que não entenderam.

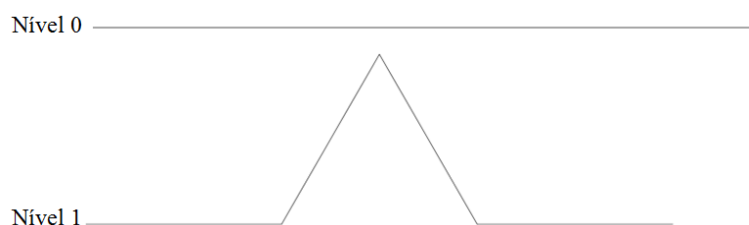


Na aula seguinte, após a apresentação dos grupos, o professor passa a coordenar as atividades seguintes.

### 3.1 Oficina sobre fractais baseados na Curva de Koch

O professor pode iniciar esta oficina apresentando a Curva de Koch, a qual se obtém pela repetição, infinitamente, do mesmo procedimento: divisão de um segmento em três partes iguais, substituição da parte central pelos dois lados de um triângulo equilátero que se completaria com a parte central removida, conforme figura abaixo:

**Figura 39 – Curva de Koch, níveis 0 e 1.**



Fonte: autor.

Vemos que foram obtidos no primeiro nível, quatro segmentos com dimensão  $1/3$ . Vimos, no capítulo 2, que no nível  $n$ , teremos  $4^n$  segmentos com dimensão  $(1/3)^n$ , e daí a dimensão fractal obtida é  $\log 4/\log 3$ .

Então, propomos, baseados em exemplo de [7], as seguintes atividades:

#### Atividade 1 – Construção da “Curva quadrangular de Koch”

a) Trace um segmento de 16 cm num papel de tamanho A4. Este segmento corresponderá ao Nível 0 da atividade, conforme figura 40 (em escala 1:2);

**Figura 40 – Nível 0 da Curva quadrangular de Koch.**

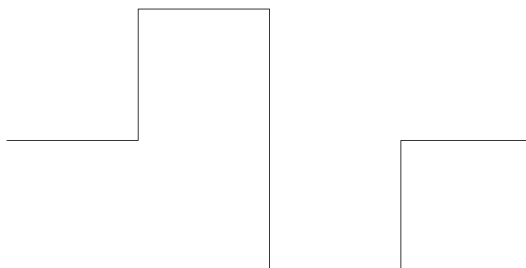


Fonte: autor.

b) Divida o segmento anterior em quatro partes iguais, e substitua os dois segmentos centrais por dois quadrados que se completariam com as partes centrais removidas, sendo o primeiro quadrado orientado para cima do segundo segmento e o segundo quadrado orientado para baixo do terceiro segmento, aparecendo, 8 segmentos e 2 dentes, e cada segmento deste terá

$1/4$  do tamanho do segmento do nível anterior. Esta figura corresponderá ao Nível 1 do fractal, conforme figura seguinte (sem escala):

**Figura 41 – Nível 1 da Curva quadrangular de Koch.**



Fonte: autor.

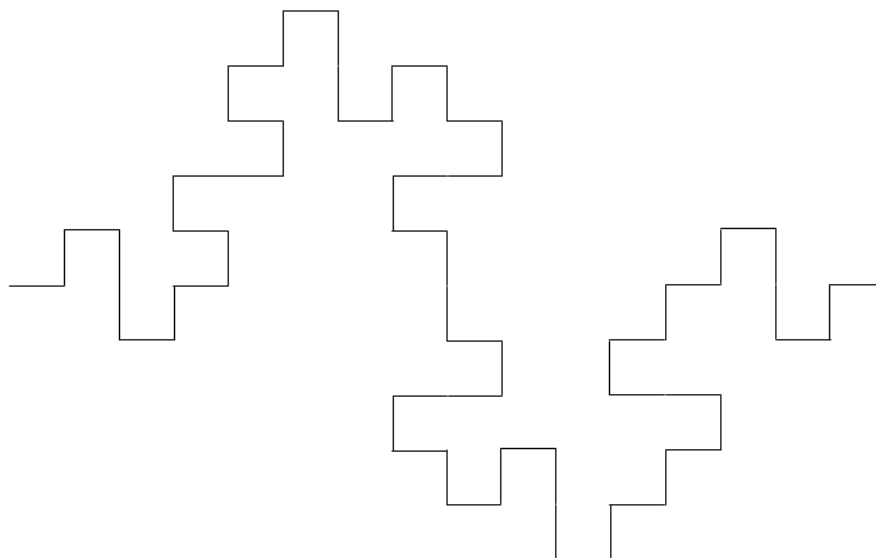
- c) Com cada segmento obtido anteriormente, repita o procedimento b, e obtenha o nível 2;
- d) No nível 2, qual a quantidade de segmentos e seus tamanhos?
- e) Escolham um trabalho da classe, e desenhem, para entrega na próxima aula, o nível 3 (um desenho para toda a turma, dado a complexidade deste nível);
- f) No nível 3, qual a quantidade de segmentos e seus tamanhos?
- g) Conclua que, analogamente ao que ocorre com a Curva de Koch “original”, aqui, no fractal que batizamos de “Curva quadrangular de Koch”, no nível  $n$  teremos  $8^n$  segmentos com tamanho  $(1/4)^n$  do tamanho inicial.
- h) DESAFIO: determine a dimensão do fractal Curva quadrangular de Koch.

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 1, a qual chamamos *soluções*:

### Soluções da atividade 1

Os alunos deverão encontrar o nível 2 próximo a como se apresenta na figura seguinte:

Figura 42 – Nível 2 da Curva quadrangular de Koch.



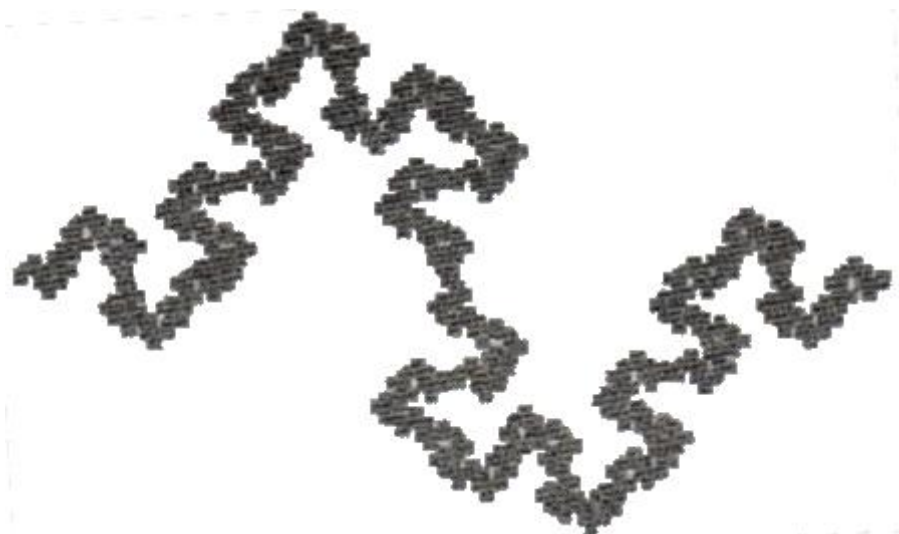
Fonte: autor.

No nível 2, os alunos encontrarão 64 segmentos, pois cada segmento do nível anterior, que eram 8, se dividiu em 8 segmentos. Cada segmento do nível 1 possuía  $\frac{1}{4}$  do comprimento do nível 0, em que adotamos 16 cm. Então, no nível 1 obtém-se 4 cm de comprimento de cada segmento.

Assim, no nível 2, cada segmento do nível 1 reduziu de tamanho numa razão de  $\frac{1}{4}$ ; assim, o que eram 4 cm de comprimento de cada segmento do nível 1, passou a ser 1 cm de comprimento de cada segmento no nível 2.

O nível 3, de feitura mais complexa e reentrante, podemos *apreciar* de [7]:

Figura 43 – Nível 3 da Curva quadrangular de Koch.



Fonte: [7].

No nível 3, cada segmento do nível 2, que eram 64, se dividiu em 8 partes iguais, segundo a mesma lei de formação. Assim, a quantidade de segmentos No nível 3 é 512 segmentos ( $64 \times 8$ ). Cada segmento reduz de tamanho numa razão de  $1/4$  em relação ao tamanho do nível anterior. Assim, o tamanho dos segmentos do nível 3 será de 0,25 cm.

Podemos reunir estes dados obtidos até agora numa tabela, que segue:

Tabela 7: dados da Curva quadrangular de Koch nos níveis 0, 1, 2, 3 e n.

Nível	Quantidade de segmentos	Tamanho dos segmentos	Tamanho dos segmentos, em cm (para $x_0 = 16$ cm)
0	1	$x_0$	16
1	$8^1 = 8$	$(1/4)^1 \cdot x_0 = \frac{1}{4} x_0$	4
2	$8^2 = 64$	$(1/4)^2 \cdot x_0 = \frac{1}{16} x_0$	1
3	$8^3 = 512$	$(1/4)^3 \cdot x_0 = \frac{1}{64} x_0$	$1/4 = 0,25$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$8^n$	$(1/4)^n \cdot x_0 = \frac{1}{4^n} x_0$	$\frac{1}{4^n} \cdot 16 = \frac{1}{4^{n-2}} = 4^{2-n}$

Fonte: autor.

Na tabela acima, para o nível  $n$ , é aceito que o aluno conjecture essas afirmações, sem precisar prová-las, seja por indução ou por recorrência, que são métodos elementares, mas normalmente não pertencentes ao currículo de Matemática da Educação Básica. No entanto, a depender da maturidade da turma em relação à disciplina, cabe ao professor apresentar um ou outro método de justificação das quantidades obtidas no  $n$ -ésimo nível. Justificando as afirmações do nível  $n$  por recorrência, percebamos que a cada mudança de nível, dividimos o segmento em quatro partes iguais, e então fazemos os “dentes” que o fractal possui; então, se  $x_i$  representa o tamanho dos segmentos no nível  $i$ , teremos a seguinte recorrência:

$$x_{i+1} = \frac{1}{4} x_i.$$

Assim, fazendo-se o valor de  $i$  percorrer os números inteiros de 0 a  $n-1$ , temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{4} x_0 \\ x_2 = \frac{1}{4} x_1 \\ x_3 = \frac{1}{4} x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{1}{4} x_{n-2} \\ x_n = \frac{1}{4} x_{n-1} \end{array} \right. .$$

Multiplicando-se os termos dos primeiros membros das equações acima, teremos que este número será igual ao produto dos termos dos segundos membros destas mesmas equações; assim, temos:

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \cdot x_n &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1} \\ \Rightarrow x_n &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot x_0, \end{aligned}$$

pois os termos contendo índice 1 até  $n-1$  estão presentes nos dois membros da equação, e se cancelarão, visto que todos são não nulos.

Raciocinando de maneira análoga, vê-se que a cada mudança de nível, cada segmento se transforma em 8 segmentos iguais, de comprimento igual a  $1/4$  comprimento anterior, conforme já vimos. Então, se  $y_i$  representa a quantidade de segmentos no nível  $i$ , teremos a seguinte recorrência:

$$y_{i+1} = 8y_i.$$

Procedendo do mesmo modo, obteremos a seguinte equação:

$$y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot \dots \cdot y_{n-1} \cdot y_n = 8^n \cdot y_0 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_{n-1},$$

da qual obtemos que a quantidade de segmentos no nível  $n$ , expressa por  $y_n$ , será dada por  $y_n = 8^n \cdot y_0$ , e, sendo  $y_0 = 1$ , pois no nível 0 há apenas um segmento, teremos que a quantidade de segmentos do fractal “Curva quadrangular de Koch”, no nível  $n$ , será dada por  $8^n$ .

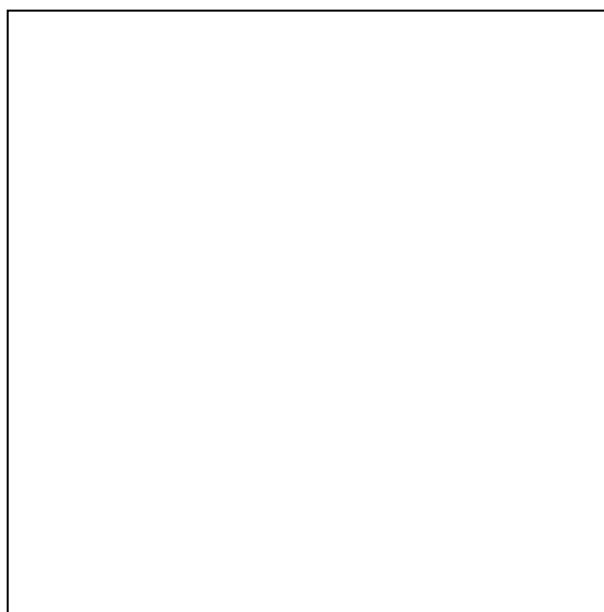
Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la baseando-se nas afirmações do nível  $n$ : no nível  $n$  teremos  $8^n$  segmentos com dimensão  $(1/4)^n$ , ou ainda simplesmente observando que a quantidade de segmentos aumenta num fator 8 e os tamanhos reduzem num fator  $1/4$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  da Curva quadrangular de Koch será:

$$D = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{\log 2^3}{\log 2^2} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} = \frac{3}{2}.$$

Atividade 2 – Construção da “Ilha quadrangular de Koch”

- a) Trace um quadrado de lado igual a 16 cm num papel de tamanho A4. Este quadrado corresponderá ao Nível 0 da atividade, conforme figura abaixo (em escala 1:2);

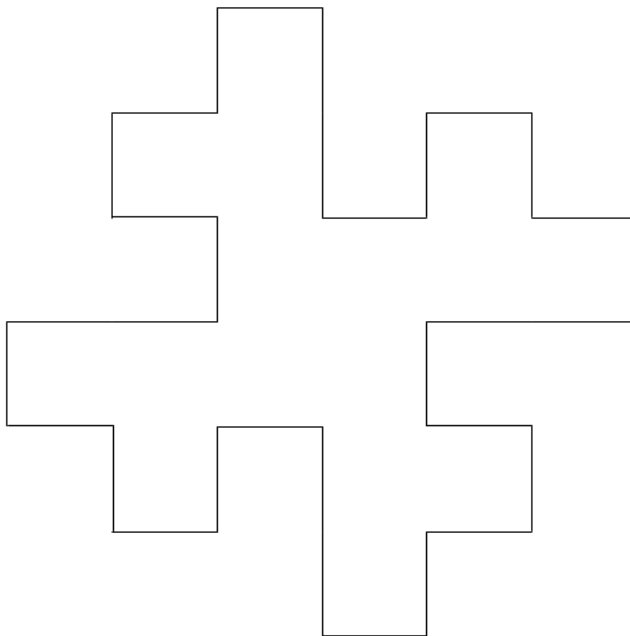
**Figura 44 – Nível 0 da Ilha quadrangular de Koch.**



Fonte: autor.

- b) Divida cada segmento anterior em quatro partes iguais, e substitua os dois segmentos centrais de cada segmento por dois quadrados que se completariam com as partes centrais removidas, sendo o primeiro quadrado orientado para cima do segundo segmento e o segundo quadrado orientado para baixo do terceiro segmento, aparecendo, 8 segmentos e 2 dentes, e cada segmento deste terá 1/4 do tamanho do segmento do nível anterior. Esta figura corresponderá ao Nível 1 do fractal, conforme figura abaixo (sem escala):

Figura 45 – Nível 1 da Ilha quadrangular de Koch.



Fonte: autor.

- c) Com cada segmento obtido anteriormente, repita o procedimento b, e obtenha o nível 2;
- d) No nível 2, qual a quantidade de segmentos e seus tamanhos?
- e) Escolham um trabalho da classe, e desenhem, para entrega na próxima aula, o nível 3 (um desenho para toda a turma, dado a complexidade deste nível);
- f) No nível 3, qual a quantidade de segmentos e seus tamanhos?
- g) Conclua que, analogamente ao que ocorre com a Ilha de Koch “original”, aqui, no fractal que batizamos de “Ilha quadrangular de Koch”, no nível  $n$  teremos  $4.8^n$  segmentos com tamanho  $(1/4)^n$  do tamanho inicial.
- h) DESAFIO: determine a dimensão do fractal Ilha quadrangular de Koch.

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 2, a qual chamamos *soluções*:

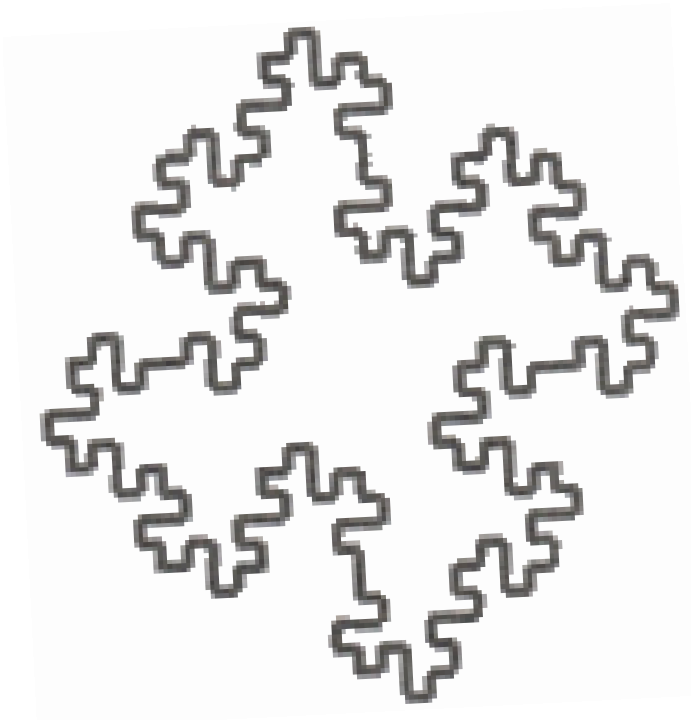
### Soluções da atividade 2

Inicialmente, observemos que o fractal em questão também pode ser chamado de Floco de Neve quadrangular de Koch.

Os alunos deverão encontrar o nível 2 próximo a como se apresenta na figura abaixo.

Fonte: [7]:

Figura 46 – Nível 2 da Ilha quadrangular de Koch.



Fonte: [7].

Semelhantemente aos procedimentos adotados na Atividade 1, teremos, para a Ilha quadrangular de Koch, a seguinte tabela:

Tabela 8: dados da Ilha quadrangular de Koch nos níveis 0, 1, 2, 3 e n.

Nível	Quantidade de segmentos	Tamanho dos segmentos	Tamanho dos segmentos, em cm (para $x_0 = 16$ cm)
0	4	$x_0$	16
1	$4 \cdot 8^1 = 4 \cdot 8 = 32$	$(1/4)^1 \cdot x_0 = \frac{1}{4} x_0$	4
2	$4 \cdot 8^2 = 256$	$(1/4)^2 \cdot x_0 = \frac{1}{16} x_0$	1
3	$4 \cdot 8^3 = 2048$	$(1/4)^3 \cdot x_0 = \frac{1}{64} x_0$	$1/4 = 0,25$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$4 \cdot 8^n$	$x_n = (1/4)^n \cdot x_0 = \frac{1}{4^n} x_0$	$\frac{1}{4^n} \cdot 16 = \frac{1}{4^{n-2}} = 4^{2-n}$

Fonte: autor.



Na presente atividade, as recorrências serão idênticas às da atividade anterior, para provarem-se a quantidade e o tamanho dos segmentos da Ilha quadrangular de Koch no nível  $n$ , alterando-se apenas a quantidade de segmentos inicial  $y_0 = 4$ , visto que agora a figura de partida é um quadrado.

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de segmentos aumenta num fator 8 e os tamanhos reduzem num fator  $1/4$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  da Curva quadrangular de Koch será:

$$D = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{\log 2^3}{\log 2^2} = \frac{3 \log 2}{2 \log 2} = \frac{3}{2}.$$

Lembrando que o fractal propriamente dito ocorrerá após infinitas iterações, numa aplicação um pouco mais avançada, baseando-se nas afirmações do nível  $n$ , no qual tem-se  $4 \cdot 8^n$  segmentos com dimensão  $(1/4)^n$ , a dimensão fractal poderá assim ser calculada:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4 \cdot 8^n)}{\log \frac{1}{(1/4)^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4 + n \log 8}{\log 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\log 4}{n \log 4} + \frac{n \log 8}{n \log 4} \right] = \frac{\log 8}{\log 4} = \frac{3}{2}.$$

Uma questão interessante a se suscitar é a seguinte: e a área  $A_n$  no nível  $n$ ? Ora, percebamos que na passagem do nível 0 (onde a área é  $A_0 = x_0^2$ ) para o nível 1, em cada segmento há uma “perda” de área e ao mesmo tempo um “ganho” de área igual a  $\left(\frac{x_0}{4}\right)^2$ . Assim, a área não se altera. Mais geralmente, seja  $A_n$  a área da Ilha quadrangular de Koch no nível  $n$ , contendo  $4 \cdot 8^n$  de comprimento  $\frac{1}{4^n} x_0$ , onde  $x_0$  é o comprimento do lado do quadrado do nível 0.

Então, na passagem para o nível  $n+1$ , cada segmento se dividirá em quatro partes iguais, ganhará um “dente” de área igual a  $\left(\frac{x_n}{4}\right)^2 = \left(\frac{x_0}{4^{n+1}}\right)^2$  e perderá um “dente” de mesma área. Quando dizemos ganhar um dente significa que o dente surgiu em direção ao lado externo da figura, e perder um dente significa que o dente surgiu em direção ao lado interno da figura, e este processo ocorre sempre com os segmentos centrais na passagem de nível, de modo que as áreas se cancelam. Assim, sendo  $y_n$  a quantidade de segmentos no nível  $n$ , temos:

$$A_{n+1} = A_n + y_n \cdot \left(\frac{x_0}{4^{n+1}}\right)^2 - y_n \cdot \left(\frac{x_0}{4^{n+1}}\right)^2 = A_n$$

Logo, a área da Ilha quadrangular de Koch corresponde à área inicial  $A_0 = x_0^2$ .

### Atividade 3 – Construção da “Curva Quebra-Molas”

Inspirados nos procedimentos de feitura da Curva de Koch, criaremos um fractal a partir de um segmento de 18 cm, ao qual chamaremos de Curva Quebra-Molas. Siga os seguintes passos:

- a) Trace um segmento de 18 cm num papel de tamanho A4. Este segmento corresponderá ao Nível 0 da atividade, conforme figura abaixo (em escala 1:2);

**Figura 47 – Nível 0 da Curva Quebra-Molas.**



Fonte: autor.

- b) Divida o segmento anterior em três partes iguais, e substitua o segmento central por uma semicircunferência superior (acima do segmento) de diâmetro igual a este segmento. Esta figura corresponderá ao Nível 1 do fractal, e será o gerador do fractal, conforme figura seguinte (sem escala):

**Figura 48 – Nível 1 da Curva Quebra-Molas.**



Fonte: autor.

- c) Com cada segmento obtido anteriormente, repita o procedimento b, e obtenha o nível 2;  
d) No nível 2, qual a quantidade de figuras geradoras e seus tamanhos?  
e) Com cada segmento obtido anteriormente, repita o procedimento b, e obtenha o nível 3;  
f) No nível 3, qual a quantidade de figuras geradoras e seus tamanhos?  
g) DESAFIO: Conclua que, no nível  $n$  do fractal que batizamos de Curva Quebra-Molas, para  $n$  natural, teremos  $2^{n-1}$  figuras geradoras com tamanho igual a  $\frac{1}{3^{n-1}}$  do tamanho Inicial.

Determine a dimensão fractal da Curva Quebra-Molas.

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 3, a qual chamamos *soluções*:

Soluções da atividade 3

Os alunos deverão encontrar os níveis 2 e 3 próximos a como se apresentam na figura abaixo:

**Figura 49 – Níveis 2 (à esquerda) e 3 (à direita) da Curva Quebra-Molas.**



Fonte: autor.

Vamos analisar o que ocorreu com a figura inicial.

No nível 0, tínhamos um segmento de reta de comprimento  $x_0$ , e não havia figura geradora; no nível 1, obtivemos 1 figura geradora, e dois segmentos de reta.

No nível 2, obtivemos 2 figuras geradoras, a partir dos dois segmentos de reta da etapa anterior, e o fator de redução foi de  $1/3$ . Então, como há duas figuras geradoras no nível 2, no mesmo há 4 segmentos de reta.

No nível 3, encontrar-se-ão 4 figuras geradoras, a partir dos quatro segmentos de reta da etapa anterior, e o fator de redução também foi de  $1/3$ .

Observemos que a quantidade de figuras geradoras em certo nível corresponderá à quantidade de segmentos de reta do nível anterior.

Podemos reunir estes dados obtidos até agora numa tabela, que segue:

**Tabela 9: dados da Curva Quebra-Molas nos níveis 0, 1, 2, 3 e n.**

Nível	Quantidade de segmentos	Tamanho dos segmentos	Tamanho dos segmentos, em cm (para $x_0 = 18$ cm)	Quantidade de figuras geradoras	Tamanho das figuras geradoras
0	1	$x_0$	18	—	—
1	$2^1 = 2$	$(1/3)^1 \cdot x_0 = \frac{1}{3} x_0$	6	1	$z_1$
2	$2^2 = 4$	$(1/3)^2 \cdot x_0 = \frac{1}{9} x_0$	2	2	$(1/3)^1 z_1$

3	$2^3 = 8$	$(1/3)^3 \cdot x_0 = \frac{1}{27} x_0$	$2/3 \cong 0,67$	4	$(1/3)^2 z_1$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$2^n$	$(1/3)^n \cdot x_0 = \frac{1}{3^n} x_0$	$\frac{1}{3^n} \cdot 18 = \frac{2}{3^{n-2}}$ $= 2 \cdot 3^{2-n}$	$2^{n-1}$	$(1/3)^{n-1} \cdot z_1$ $= \frac{1}{3^{n-1}} z_1$

Fonte: autor.

Na tabela acima, para o nível  $n$ , novamente é aceito que o aluno conjecture essas afirmações, sem precisar prová-las, seja por indução ou por recorrência, e a prova por recorrência é idêntica à prova da atividade 1, e por isso a omitiremos.

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de figuras geradoras dobra a cada passagem de nível, e os tamanhos reduzem num fator  $1/3$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  da Curva Quebra-Molas será:

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63093.$$

Lembrando que o fractal propriamente dito ocorrerá após infinitas iterações, numa aplicação um pouco mais avançada, baseando-se nas afirmações do nível  $n$ , no qual tem-se  $2^{n-1}$  figuras geradoras com tamanho igual a  $(1/3)^{n-1} \cdot z_1$ , onde  $z_1$  é o tamanho inicial da figura geradora, temos que a dimensão fractal poderá assim ser calculada:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^{n-1})}{\log \frac{1}{(1/3)^{n-1} z_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \log 2}{(n-1) \log 3 - \log z_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\log 3 - \frac{\log z_1}{n-1}} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0,63093.$$

#### Atividade 4 – Construção da “Curva Eclesiástica”

Inspirados novamente nos procedimentos de confecção da Curva de Koch, criaremos um fractal a partir de um segmento de 16 cm, ao qual chamaremos de Curva Eclesiástica.

Para isso, o professor pede a cada grupo que:

a) Trace um segmento de  $x_0 = 16$  cm num papel de tamanho A4. Este segmento corresponderá ao Nível 0 da atividade, conforme figura abaixo (em escala 1:2);

**Figura 50 – Nível 0 da Curva Eclesiástica.**

Fonte: autor.

b) Divida o segmento anterior em quatro partes iguais, e no último dos quatro segmentos construa dois segmentos perpendiculares ao segmento inicial, de comprimento igual a  $x_0/4$ , e os una através de dois segmentos de a  $x_0\sqrt{2}/8$  (orientados a  $45^\circ$  e  $135^\circ$  do segmento inicial, e se intersectarão), e acima da interseção coloque uma cruz cujos segmentos possuem comprimentos iguais a  $x_0/16$ . Esta figura corresponderá ao Nível 1 do fractal, e será o gerador do fractal, conforme figura abaixo (sem escala):

**Figura 51 – Nível 1 da Curva Eclesiástica.**



Fonte: autor.

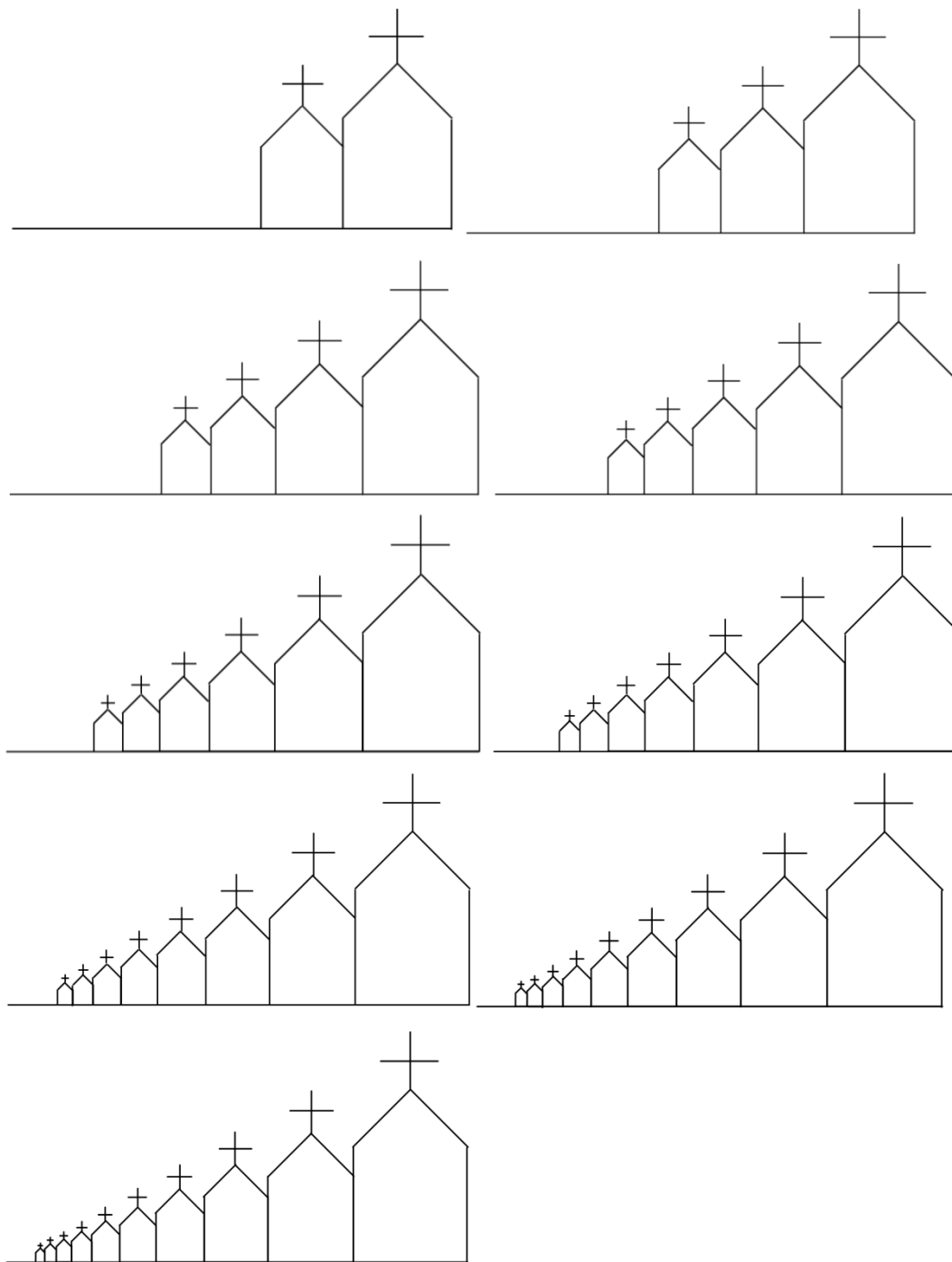
- c) Com o segmento “livre” acima, de comprimento  $3x_0/4$ , repita o procedimento b, e obtenha o nível 2.
- d) No nível 2, qual a quantidade de figuras geradoras e seus tamanhos (chame o tamanho da primeira capela de  $z_1$ )?
- e) Com o segmento “livre” do nível 2, repita o procedimento b, e obtenha o nível 3;
- f) No nível 3, qual a quantidade de figuras geradoras e seus tamanhos?
- g) Encontre o máximo de níveis que puder.
- h) Conclua que, no nível  $n$ , para  $n$  natural, do fractal que batizamos de Curva Eclesiástica, teremos  $n$  figuras geradoras com tamanho igual a  $\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$  do tamanho da figura geradora inicial (capela inicial).

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 4, a qual chamamos *soluções*:

Soluções da atividade 4

Seguem abaixo os níveis 2 a 10 do fractal proposto:

**Figura 52 – Níveis 2 a 10 da Curva Eclesiástica.**



Fonte: autor.

Observemos que a figura geradora, que é a capela, possui 75% do tamanho da capela inicial. Então, se tínhamos um segmento de reta de comprimento  $x_0$ , a figura geradora, correspondente ao nível 1, será proporcional  $x_0/4$ ; o segmento de reta restante, de comprimento  $3x_0/4$ , será dividido em quatro partes iguais, e a capela colocada na última destas partes será proporcional a  $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} x_0 = \frac{3}{16} x_0$ . Observemos que o tamanho dos segmentos de reta varia, mas a quantidade é sempre de 1 segmento, localizado à esquerda das capelas, e que num nível  $n$ , teremos  $n$  figuras geradoras. Colocando esses dados numa tabela, temos:

**Tabela 10: dados da Curva Eclesiástica nos níveis 0, 1, 2, 3 e n.7**

Nível	Tamanho dos segmentos ( $x_n$ )	Tamanho dos segmentos, em cm (para $x_0 = 16$ cm)	Tamanho da base da capela ( $y_{n+1} = x_n/4$ )	Tamanho das figuras geradoras ( $z_n$ )
0	$x_0$	16	—	—
1	$(3/4) \cdot x_0 = \frac{3}{4} x_0$	12	$\frac{1}{4} x_0 = y_1$	$z_1$
2	$\frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} x_0 \right) = \left( \frac{3}{4} \right)^2 x_0$	9	$\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} x_0 = \frac{3}{4} y_1$	$\frac{3}{4} z_1$
3	$\frac{3}{4} \left( \left( \frac{3}{4} \right)^2 x_0 \right) = \left( \frac{3}{4} \right)^3 x_0$	$27/4 = 6,75$	$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^2 x_0 = \left( \frac{3}{4} \right)^2 y_1$	$\left( \frac{3}{4} \right)^2 z_1$
⋮	⋮	⋮		⋮
$n$	$\left( \frac{3}{4} \right)^n x_0$	$\left( \frac{3}{4} \right)^n \cdot 16 = \frac{3}{4^{n-2}} = 3 \cdot 4^{2-n}$	$\frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} \right)^{n-1} x_0 = \left( \frac{3}{4} \right)^{n-1} y_1$	$\left( \frac{3}{4} \right)^{n-1} z_1$

Fonte: autor.

Para a construção da tabela, observemos que o tamanho dos segmentos retos obedece à seguinte recorrência:  $x_{i+1} = \frac{3}{4} x_i$ . Então, resolvendo-a rapidamente temos:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{4}x_0 \\ x_2 = \frac{3}{4}x_1 \\ x_3 = \frac{3}{4}x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{3}{4}x_{n-2} \\ x_n = \frac{3}{4}x_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} x_i = \left(\frac{3}{4}\right)^n x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} x_i$$

$$\Rightarrow x_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n x_0$$

Quanto ao tamanho da base da capela, sabemos que será igual a um quarto do segmento de reta do nível anterior, pois o procedimento de fazer as capelas num nível  $i+1$  parte da divisão por 4 do segmento de reta do nível  $i$ . Então, chamando o tamanho da base da capela no nível  $i$  de  $y_i$ , para  $i$  natural, temos:

$$y_{i+1} = \frac{x_i}{4} = \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^i x_0}{4}$$

Sendo  $y_1 = \frac{x_0}{4}$  o tamanho da base da primeira capela, temos:

$$y_{i+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^i y_1$$

$$\Rightarrow y_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} y_1$$

Por fim, tem-se que cada capela é proporcional ao tamanho de sua base. Denotando por  $z_i$  o tamanho da figura geradora (capela) no nível  $i$ , para  $i$  natural, e seja  $k$  a constante dessa proporcionalidade, temos:



$$\begin{aligned} \frac{z_n}{z_1} &= k = \frac{y_n}{y_1} \\ \Rightarrow \frac{z_n}{z_1} &= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} y_1}{y_1} \\ \Rightarrow z_n &= \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} z_1 \end{aligned}$$

O cálculo da dimensão fractal não cabe neste exemplo, pois não há divisão da figura em  $N$  partes, embora o coeficiente de redução seja válido e igual a  $3/4$ . Como temos autossemelhança e infinitude na curva proposta (visto que cada segmento “pequeno” ainda poderá ser dividido por 4 e continuará de comprimento não nulo), trata-se de objeto cabível no estudo da Geometria Fractal, ou seja, trata-se de um fractal.

Se tentássemos calcular a dimensão fractal pela definição, teríamos o problema de não haver determinação numérica para  $N$ , por não haver progressão geométrica nas passagens de níveis do fractal. Então, se tentássemos calcular pelo limite, teríamos também um problema:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log \frac{1}{3/4}} = \infty;$$

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} z_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{\log \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot \frac{0,75}{z_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n)}{n \log \left(\frac{4}{3}\right) + \log \frac{0,75}{z_1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \ln(10)}{n} = 0;$$

Nenhum dos casos coincide com a dimensão observável da curva fractal. Procedimentos gráficos ou empíricos poderiam ser realizados no cálculo da dimensão deste fractal, mas analiticamente, pela relação utilizada ao longo do presente estudo, esta determinação é impossibilitada.

Analisando de outra maneira, percebendo que a cada passagem de nível, temos que um segmento se transforma em uma capela e um segmento, teremos sempre a relação de 1:1, isto é, cada segmento se transforma em uma capela, a cada nível. Assim, sendo  $N=1$  e  $r=3/4$ ,

$$\text{teremos que } D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}} = \frac{\log 1}{\log \frac{1}{3/4}} = \frac{0}{\log \frac{4}{3}} = 0, \text{ o que ratifica a impossibilidade previamente}$$

detectada.

### 3.2 Oficina sobre fractais baseados na Cesta de Sierpinski

O professor começa esta oficina apresentando a Cesta de Sierpinski. Mostra que essa Cesta é obtida pela repetição infinita do mesmo procedimento: divisão de um triângulo equilátero em quatro triângulos equiláteros (tendo como vértices os pontos médios dos lados dos triângulos) e remoção do triângulo central, sendo esta a figura geradora (nível 1), conforme figura abaixo:

Figura 53 – Níveis 0 e 1 da Cesta de Sierpinski.



Fonte: autor.

Então, o procedimento para a criação de novos fractais deste tipo (ao qual nos referiremos como de tipo 2) é exatamente baseado na remoção de área conforme observado na Cesta de Sierpinski.

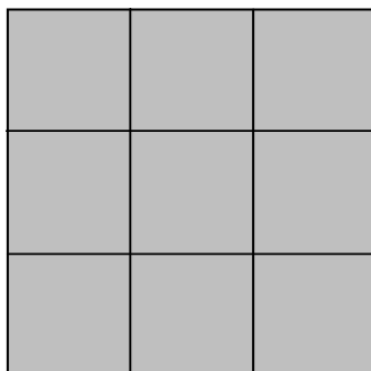
Deste modo, propomos, baseados em exemplos de [7], as seguintes atividades:

#### Atividade 5 – Construção da “Cruz Simétrica Pentaquadrangular”

O professor pede a cada grupo que:

- a1) Trace um quadrado de lado igual a 18 cm num papel de tamanho A4. Esse quadrado tem lado de tamanho  $x_0$ .
- a2) Divida este quadrado, que corresponde ao Nível 0 da atividade, em nove quadrados iguais, conforme figura abaixo (sem escala):

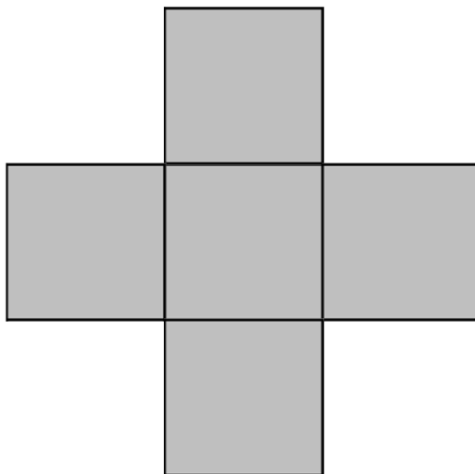
Figura 54 – Nível 0 da Cruz Simétrica Pentaquadrangular.



Fonte: autor.

b) Remova os quatro quadrados dos cantos (quinas), formando o Nível 1 da atividade, que é a figura geradora, conforme segue:

Figura 55 – Nível 1 da Cruz Simétrica Pentaquadrangular.



Fonte: autor.

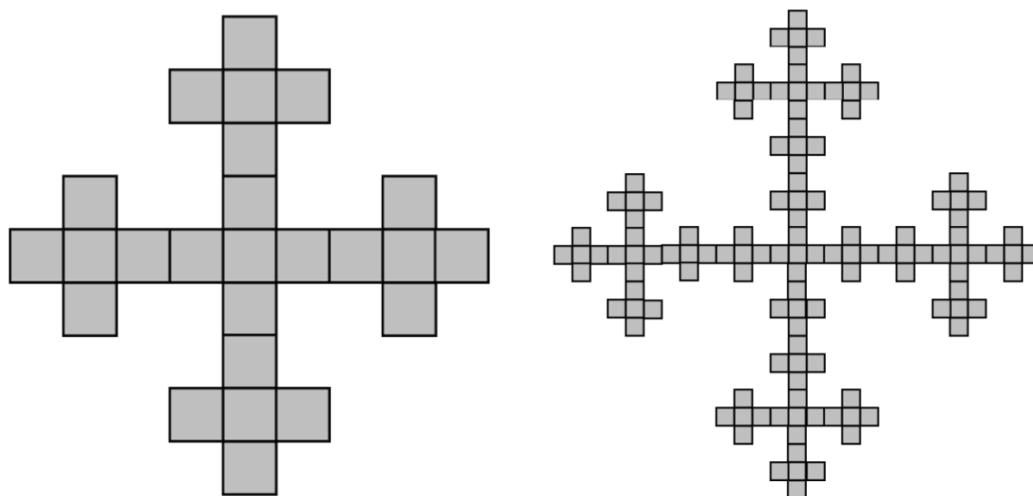
- c) Em cada quadrado, repita os procedimentos a2 e b, formando o nível 2;
- d) Quantos quadrados têm no nível 2, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?
- e) Novamente, em cada quadrado do nível 2, repita os procedimentos a2 e b, formando o nível 3;
- f) Quantos quadrados têm no nível 3, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?
- g) DESAFIO 1: Organize as informações obtidas anteriormente numa tabela e conclua que, no nível  $n$  do presente fractal, para  $n$  natural, teremos  $5^n$  quadrados cujos lados medem  $\frac{1}{3^n}$  do tamanho  $x_0$  do lado do quadrado inicial.
- h) DESAFIO 2: Determine a dimensão fractal da Cruz Simétrica Pentaquadrangular.
- i) DESAFIO3: Determine o valor da área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , em função de  $n$  e de  $x_0$ .

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 5, a qual chamamos *soluções*:

### Soluções da atividade 5

Os alunos deverão encontrar os níveis 2 e 3 próximos a como se apresentam na figura seguinte:

Figura 56 – Níveis 2 e 3 da Cruz Simétrica Pentaquadrangular.



Fonte: autor.

Observemos que, pela construção da figura geradora, temos que cada quadrado se transforma em outros 5 quadrados, com lados diminuídos num fator de  $1/3$ . Esses cinco quadrados não estão posicionados aleatoriamente: localizam-se tais que formam uma cruz, equilátera.

Podemos reunir os dados obtidos dos níveis 0 a 3 e montar a seguinte tabela, podendo o aluno conjecturar os dados relativos ao nível  $n$ :

Tabela 11: dados da Cruz Simétrica Pentaquadrangular nos níveis 0, 1, 2, 3 e  $n$ .

Nível	Quantidade de quadrados	Tamanho dos lados dos quadrados	Tamanho dos lados dos quadrados, em cm (para $x_0 = 18$ cm)
0	1	$x_0$	18
1	$5^1 = 5$	$(1/3)^1 \cdot x_0 = \frac{1}{3} x_0$	6
2	$5^2 = 25$	$(1/3)^2 \cdot x_0 = \frac{1}{9} x_0$	2
3	$5^3 = 125$	$(1/3)^3 \cdot x_0 = \frac{1}{27} x_0$	$2/3 \cong 0,67$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$5^n$	$(1/3)^n \cdot x_0 = \frac{1}{3^n} x_0$	$\frac{1}{3^n} \cdot 18 = \frac{2}{3^{n-2}} = 2 \cdot 3^{2-n}$

Fonte: autor.

Então, chamando de  $y_i$  a quantidade de quadrados no nível  $i$ , temos que  $y_{i+1} = 5y_i$ , pois cada quadrado do nível  $i$  se dividirá em cinco quadrados no nível  $i+1$ . Percebamos que no início tínhamos apenas um quadrado, então  $y_0 = 1$ . Do mesmo modo, o tamanho do lado do

quadrado sempre reduz num fator de  $1/3$ ; assim, chamando de  $x_i$  o tamanho do lado do quadrado no nível  $i$ , temos que  $x_{i+1} = \frac{1}{3}x_i$ , sendo  $x_0$  o tamanho do lado do quadrado inicial.

Em prosseguimento, resolvendo rapidamente estas recorrências, temos:

$$\begin{cases} y_1 = 5y_0 \\ y_2 = 5y_1 \\ \vdots \\ y_n = 5y_{n-1} \end{cases} \Rightarrow y_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} y_i = 5^n y_0 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} y_i \Rightarrow y_n = 5^n y_0 = 5^n;$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}y_0 \\ x_2 = \frac{1}{3}y_1 \\ \vdots \\ x_n = \frac{1}{3}y_{n-1} \end{cases} \Rightarrow x_n \cdot \prod_{i=1}^{n-1} x_i = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0 \cdot \prod_{i=1}^{n-1} x_i \Rightarrow x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0.$$

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de quadrados aumenta num fator 5 a cada passagem de nível, e os tamanhos de seus lados reduzem num fator  $1/3$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  da Cruz Simétrica Pentaquadrangular será:

$$D = \frac{\log 5}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 5}{\log 3} \cong 1,465.$$

Lembrando que o fractal propriamente dito ocorrerá após infinitas iterações, numa aplicação um pouco mais avançada, baseando-se nas afirmações do nível  $n$ , no qual tem-se  $5^n$  quadrados com tamanho igual a  $(1/3)^n \cdot x_0$ , temos que a dimensão fractal poderá assim ser calculada:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(5^n)}{\log \frac{1}{(1/3)^n x_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 5}{n \log 3 - \log x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 5}{\log 3 - \frac{\log x_0}{n}} = \frac{\log 5}{\log 3} \cong 1,465.$$

Para determinarmos a área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , lembremos que nesse nível há  $5^n$  quadrados de lado  $\frac{1}{3^n}x_0$ . Então, temos:

$$A_n = 5^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}x_0\right)^2 = \frac{5^n}{3^{2n}} \cdot x_0^2 = \left(\frac{5}{9}\right)^n \cdot x_0^2$$

A área  $A$  do fractal é obtida no limite seguinte:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{5}{9} \right)^n \cdot x_0^2 \right] = x_0^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5}{9} \right)^n = 0,$$

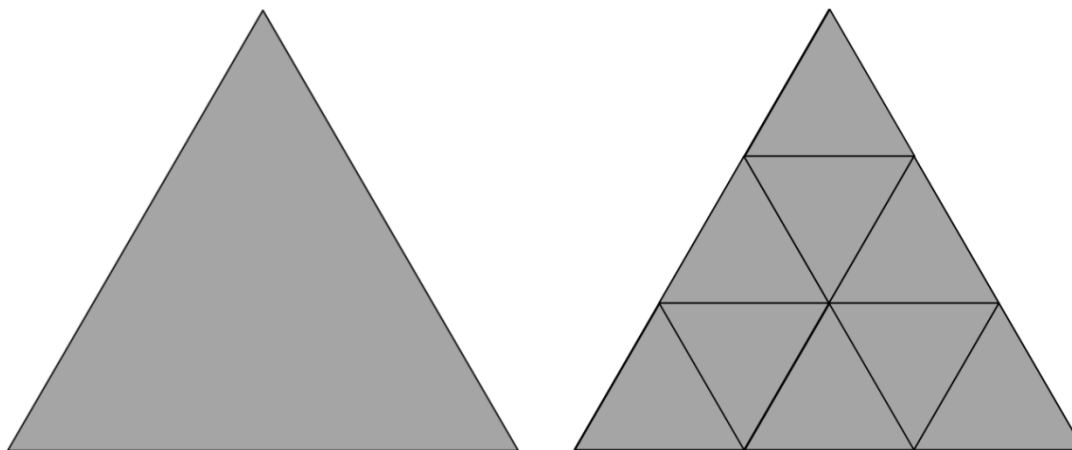
isto é, a soma das áreas dos  $5^n$  quadrados de áreas  $\frac{x_0^2}{9^n}$  resulta num valor desprezível quando estamos em níveis muito elevados na construção do fractal em tela.

### Atividade 6 – Construção da “Trevo Triangular Radioativo”

O professor pede a cada grupo que:

- a1) Trace um triângulo equilátero de lado  $x_0 = 9$  cm num papel de tamanho A4. Este triângulo corresponderá ao Nível 0 da atividade.
- a2) Divida seus lados em três partes iguais, obtendo nove pontos: os três vértices dos triângulos mais seis pontos pertencentes aos seus lados, que os dividem em três partes iguais. Ligando estas partes, obtêm-se nove triângulos equiláteros internos ao triângulo inicial, de lado igual a  $x_0/3 = 3$  cm, ainda correspondendo ao nível 0 da atividade, conforme a figura abaixo:

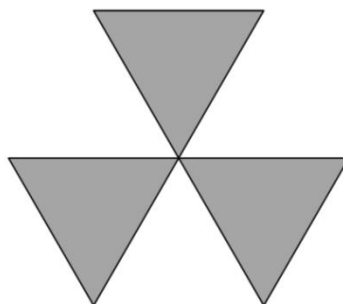
**Figura 57 – Nível 0 do Trevo Triangular Radioativo.**



Fonte: autor.

- b) Remova os seis triângulos orientados com o mesmo sentido do triângulo inicial (que está para cima), resultando no Nível 1 da atividade, que é a figura geradora, conforme segue:

Figura 58 – Nível 1 do Trevo Triangular Radioativo.



Fonte: autor.

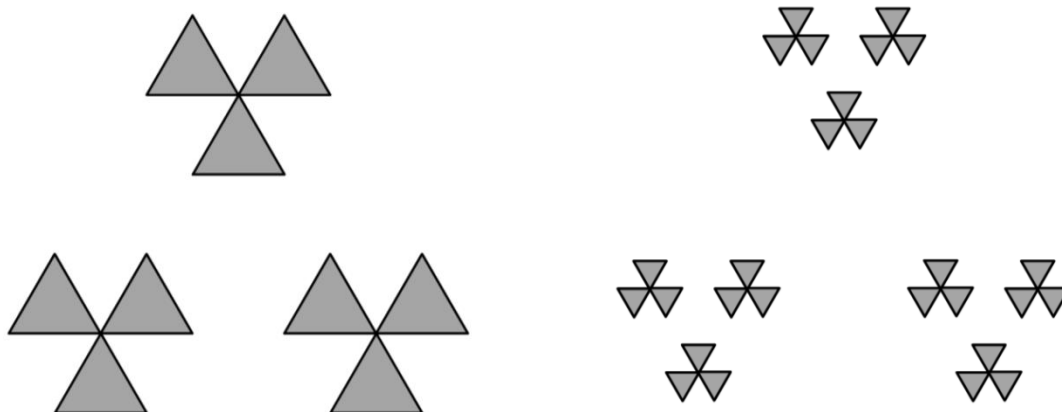
- c) Em cada triângulo, repita os procedimentos a2 e b, formando o nível 2;
- d) Quantos triângulos têm no nível 2, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?
- e) Novamente, em cada triângulo do nível 2, repita os procedimentos a2 e b, formando o nível 3;
- f) Quantos triângulos têm no nível 3, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?
- g) DESAFIO 1: Organize as informações obtidas anteriormente numa tabela e conclua que, no nível  $n$  do presente fractal, para  $n$  natural, teremos  $3^n$  triângulos cujos lados medem  $\frac{1}{3^n}$  do tamanho  $x_0$  do lado do triângulo inicial.
- h) DESAFIO 2: Determine a dimensão fractal do Trevo Triangular Radioativo.
- i) DESAFIO3: Determine o valor da área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , em função de  $n$  e de  $x_0$ .

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 6, a qual chamamos *soluções*:

Soluções da atividade 6

Os alunos deverão encontrar os níveis 2 e 3 próximos a como se apresentam na figura abaixo:

Figura 59 – Níveis 2 e 3 do Trevo Triangular Radioativo.



Fonte: autor.

Observemos que, pela construção da figura geradora, temos que cada triângulo se transforma em outros 3 triângulos, com lados diminuídos num fator de  $1/3$ . Esses três triângulos não estão posicionados aleatoriamente: localizam-se tais que formam um trevo triangular.

Podemos reunir os dados obtidos dos níveis 0 a 3 e montar a seguinte tabela, podendo o aluno conjecturar os dados relativos ao nível  $n$ :

**Tabela 12: dados do Trevo Triangular Radioativo nos níveis 0, 1, 2, 3 e  $n$ .**

Nível	Quantidade de triângulos	Tamanho dos lados dos triângulos	Tamanho dos lados dos triângulos, em cm (para $x_0 = 9$ cm)
0	1	$x_0$	9
1	$3^1 = 3$	$(1/3)^1 \cdot x_0 = \frac{1}{3} x_0$	3
2	$3^2 = 9$	$(1/3)^2 \cdot x_0 = \frac{1}{9} x_0$	1
3	$3^3 = 27$	$(1/3)^3 \cdot x_0 = \frac{1}{27} x_0$	$1/3 \cong 0,33$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$3^n$	$(1/3)^n \cdot x_0 = \frac{1}{3^n} x_0$	$\frac{1}{3^n} \cdot 9 = \frac{1}{3^{n-2}} = 3^{2-n}$

Fonte: autor.

Então, para fins de comprovação dos dados obtidos no nível  $n$ , que constam na tabela acima, chamando de  $y_i$  a quantidade de triângulos no nível  $i$ , temos que  $y_{i+1} = 3y_i$ , pois cada triângulo do nível  $i$  se dividirá em três triângulos no nível  $i+1$ . Percebamos que no início tínhamos apenas um triângulo, então  $y_0 = 1$ . Do mesmo modo, o tamanho do lado do triângulo sempre reduz num fator de  $1/3$ ; assim, chamando de  $x_i$  o tamanho do lado do triângulo no nível  $i$ , temos que  $x_{i+1} = \frac{1}{3} x_i$ , sendo  $x_0$  o tamanho do lado do triângulo inicial. Pela resolução

das recorrências da atividade anterior, que eram  $y_{i+1} = 5y_i$  e também  $x_{i+1} = \frac{1}{3} x_i$ , tínhamos que

$y_n = 5^n$  e  $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0$ . No caso presente, teremos resposta semelhante no primeiro caso, isto

é,  $y_n = 3^n$ , e idêntica no segundo caso, isto é,  $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0$ , pois se trata da mesma

recorrência.



Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de triângulos aumenta num fator 3 a cada passagem de nível, e os tamanhos de seus lados reduzem num fator  $1/3$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  do Trevo Triangular Radioativo será:

$$D = \frac{\log 3}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 3}{\log 3} = 1.$$

Lembrando que o fractal propriamente dito ocorrerá após infinitas iterações, numa aplicação um pouco mais avançada, baseando-se nas afirmações do nível  $n$ , no qual tem-se  $3^n$  triângulos com tamanho igual a  $(1/3)^n \cdot x_0$ , temos que a dimensão fractal poderá assim ser calculada:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3^n)}{\log \frac{1}{(1/3)^n x_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 3}{n \log 3 - \log x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3}{\log 3 - \frac{\log x_0}{n}} = \frac{\log 3}{\log 3} = 1.$$

Para determinarmos a área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , lembremos que nesse nível há  $3^n$  triângulos equiláteros de lado  $\frac{1}{3^n} x_0$ . Lembrando que para um triângulo equilátero de lado  $l$ , sua área  $A$  é assim obtida:

$$A = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{l \times l \sin 60^\circ}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}.$$

Deste modo, a área  $A_n$  do fractal é dada por:

$$A_n = 3^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{3^n} x_0\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 3^n \cdot \frac{x_0^2 \sqrt{3}}{4 \cdot 3^{2n}} = \frac{x_0^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3^n}$$

Chamando de  $A_0$  a área do triângulo inicial (do nível 0), e considerando que este triângulo tem lado igual a  $x_0$ , e, portanto, área  $A_0 = \frac{x_0^2 \sqrt{3}}{4}$ , temos:

$$A_n = A_0 \cdot \frac{1}{3^n}.$$

Então, quanto maior o nível  $n$  considerado, mais nos aproximamos do fractal propriamente dito, que ocorre após infinitas iterações. Assim, a área do fractal é nula:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ A_0 \cdot \frac{1}{3^n} \right] = A_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{3^n} \right) = 0,$$

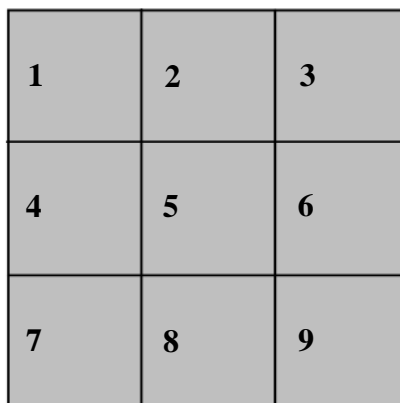
isto é, a soma das áreas dos  $3^n$  quadrados de áreas  $\frac{A_0}{3^{2n}}$  resulta num valor desprezível quando estamos em níveis muito elevados na construção do fractal em tela.

Atividade 7 – Construção do Fractal “Y de quadrados”

O professor pede a cada grupo que:

- a1) Trace um quadrado de lado igual a 9 cm num papel de tamanho A4. Esse quadrado tem lado de tamanho  $x_0$ .
- a2) Divida este quadrado, que corresponde ao Nível 0 da atividade, em nove quadrados iguais, os quais numeramos didaticamente, conforme figura abaixo (sem escala):

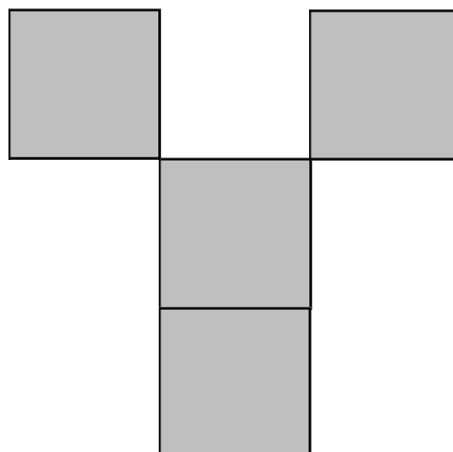
**Figura 60 – Nível 0 do Fractal “Y de quadrados”.**



Fonte: autor.

- b) Remova os quatro quadrados de números 2, 4, 6, 7 e 9, formando um Y composto por quatro quadrados, consistindo no Nível 1 da atividade, que é a figura geradora, conforme segue:

**Figura 61 – Nível 1 do Fractal “Y de quadrados”.**



Fonte: autor.

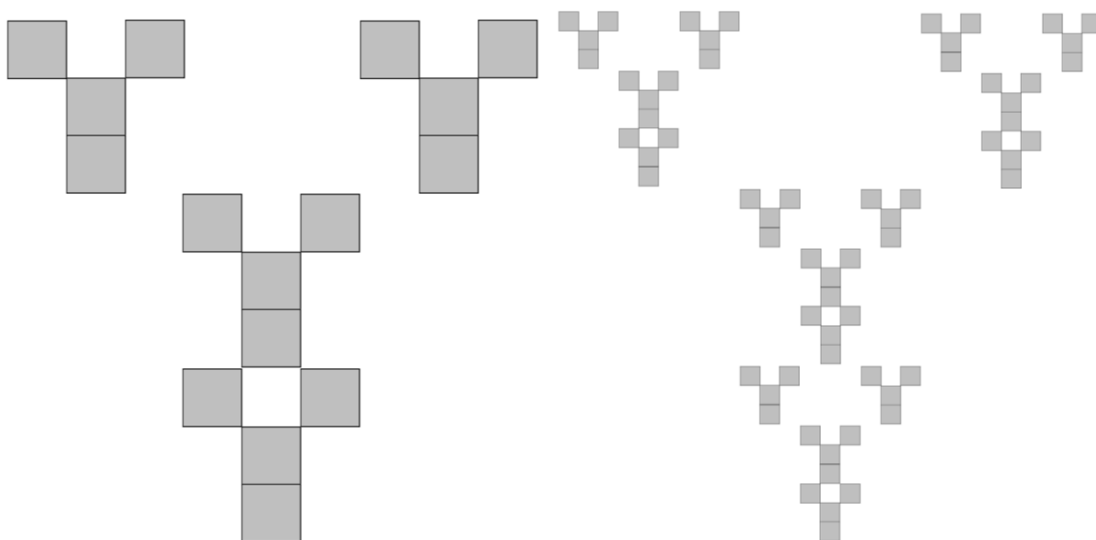
- c) Em cada quadrado, repita os procedimentos a2 e b, formando o nível 2;
- d) Quantos quadrados têm no nível 2, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?
- e) Novamente, em cada quadrado do nível 2, repita os procedimentos a2 e b, formando o nível 3;
- f) Quantos quadrados têm no nível 3, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?
- g) DESAFIO 1: Organize as informações obtidas anteriormente numa tabela e conclua que, no nível  $n$  do presente fractal, para  $n$  natural, teremos  $4^n$  quadrados cujos lados medem  $\frac{1}{3^n}$  do tamanho  $x_0$  do lado do quadrado inicial.
- h) DESAFIO 2: Determine a dimensão fractal do Y de quadrados.
- i) DESAFIO3: Determine o valor da área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , em função de  $n$  e de  $x_0$ .

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 7, a qual chamamos *soluções*:

### Soluções da atividade 7

Os alunos deverão encontrar os níveis 2 e 3 próximos a como se apresentam na figura abaixo:

**Figura 62 – Níveis 2 e 3 do Fractal “Y de quadrados”.**



Fonte: autor.

Observemos que, pela construção da figura geradora, temos que cada quadrado se transforma em outros 4 quadrados, com lados diminuídos num fator de  $1/3$ . Esses quatro

quadrados não estão posicionados aleatoriamente: localizam-se tais que formam um Y com aparência *pixelizada*.

Podemos reunir os dados obtidos dos níveis 0 a 3 e montar a seguinte tabela, podendo o aluno conjecturar os dados relativos ao nível  $n$ :

**Tabela 13: dados do “Y de quadrados” nos níveis 0, 1, 2, 3 e  $n$ .**

Nível	Quantidade de quadrados	Tamanho dos lados dos quadrados	Tamanho dos lados dos quadrados, em cm (para $x_0 = 9$ cm)
0	1	$x_0$	9
1	$4^1 = 4$	$(1/3)^1 \cdot x_0 = \frac{1}{3} x_0$	3
2	$4^2 = 16$	$(1/3)^2 \cdot x_0 = \frac{1}{9} x_0$	1
3	$4^3 = 64$	$(1/3)^3 \cdot x_0 = \frac{1}{27} x_0$	$1/3 \cong 0,33$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$4^n$	$(1/3)^n \cdot x_0 = \frac{1}{3^n} x_0$	$\frac{1}{3^n} \cdot 9 = \frac{1}{3^{n-2}} = 3^{2-n}$

Fonte: autor.

Então, chamando de  $y_i$  a quantidade de quadrados no nível  $i$ , temos que  $y_{i+1} = 4y_i$ , pois cada quadrado do nível  $i$  se dividirá em quatro quadrados no nível  $i+1$ . Percebamos que no início tínhamos apenas um quadrado, então  $y_0 = 1$ . Do mesmo modo, o tamanho do lado do quadrado sempre reduz num fator de  $1/3$ ; assim, chamando de  $x_i$  o tamanho do lado do quadrado no nível  $i$ , temos que  $x_{i+1} = \frac{1}{3} x_i$ , sendo  $x_0$  o tamanho do lado do quadrado inicial.

Em prosseguimento, pelos exemplos das recorrências das outras atividades, temos que  $y_n = 4^n$  e  $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0$ .

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de quadrados aumenta num fator 4 a cada passagem de nível, e os tamanhos de seus lados reduzem num fator  $1/3$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  do Y de quadrados será:

$$D = \frac{\log 4}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,262.$$

Lembrando que o fractal propriamente dito ocorrerá após infinitas iterações, numa aplicação um pouco mais avançada, baseando-se nas afirmações do nível  $n$ , no qual tem-se  $4^n$  quadrados com tamanho igual a  $(1/3)^n \cdot x_0$ , temos que a dimensão fractal poderá assim ser calculada:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(4^n)}{\log \frac{1}{(1/3)^n x_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 4}{n \log 3 - \log x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4}{\log 3 - \frac{\log x_0}{n}} = \frac{\log 4}{\log 3} \cong 1,262.$$

Para determinarmos a área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , lembremos que nesse nível há  $4^n$  quadrados de lado  $\frac{1}{3^n} x_0$ . Então, temos:

$$A_n = 4^n \cdot \left(\frac{1}{3^n} x_0\right)^2 = \frac{4^n}{3^{2n}} \cdot x_0^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot x_0^2$$

A área  $A$  do fractal é obtida no limite seguinte:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{4}{9}\right)^n \cdot x_0^2 \right] = x_0^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0,$$

isto é, a soma das áreas dos  $4^n$  quadrados de áreas  $\frac{x_0^2}{9^n}$  resulta num valor desprezível quando estamos em níveis muito elevados na construção do fractal em tela.

### 3.3 Oficina sobre fractais baseados no Fractal de Dürer

O Fractal de Dürer consiste na substituição, a cada passagem de nível de sua construção, de um pentágono regular (maior) por cinco pentágonos regulares internos. Esta substituição não ocorre de qualquer forma. Inspirados em [7], partindo de um pentágono regular  $ABCDE$ , considera-se inicialmente qualquer de seus lados, digamos,  $AB$ . São colocados dois pentágonos menores nos vértices  $A$  e  $B$ , aos quais chamamos pentágonos  $I$  e  $II$ , de modo que um de seus ângulos coincida com um ângulo do pentágono original, e que tenham um vértice em comum.

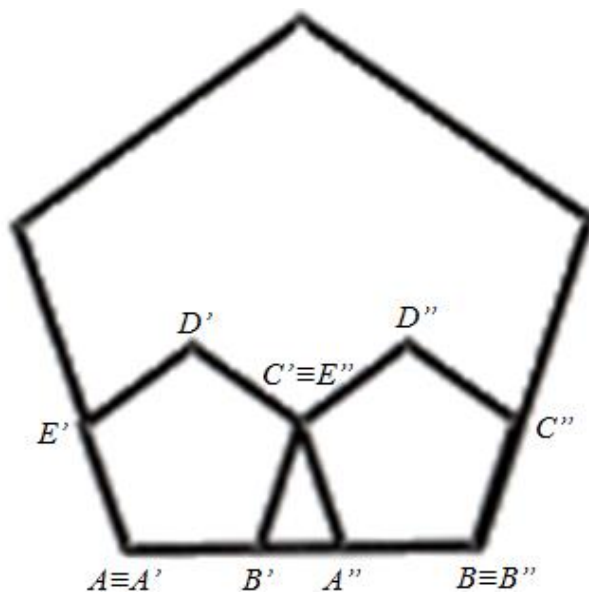
De outra forma, o pentágono  $I$  será de vértices  $A'B'C'D'E'$ , e o pentágono  $II$  será de vértices  $A''B''C''D''E''$ , ocorrendo os seguintes fatos:

- os vértices  $A$  e  $A'$  são coincidentes;
- os vértices  $B$  e  $B''$  são coincidentes;
- os ângulos  $E\hat{A}B$  e  $E'\hat{A}'B'$  são coincidentes;

- d) os ângulos  $\hat{A} \hat{B} C$  e  $\hat{A}'' \hat{B}'' C''$  são coincidentes;
- e)  $A'B', A''B'' \subset AB$ ;
- f)  $A'E' \subset AE$ , e  $B''C'' \subset BC$ ;
- g)  $C', D', D''$  e  $E''$  são pontos internos ao pentágono  $ABCDE$ ;
- h) os vértices  $C'$  e  $E''$  são coincidentes.

Esta situação é melhor ilustrada na figura seguinte:

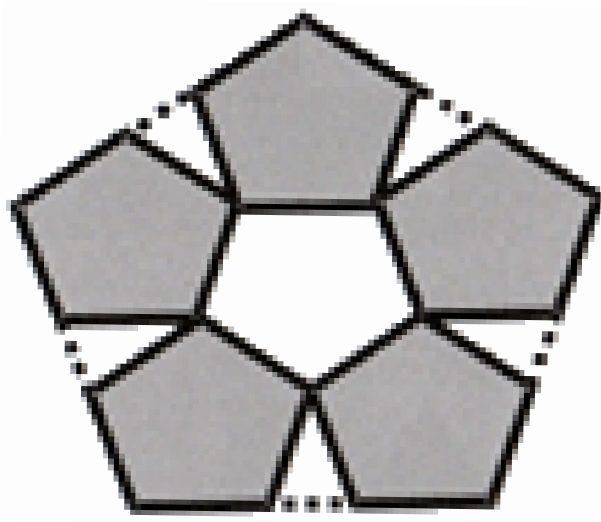
**Figura 63 – Regra de formação do Fractal de Dürer.**



Fonte: [7].

Sob estas mesmas condições, nos outros lados do pentágono  $ABCDE$  surgirão os pentágonos III, IV e V, e, deixando somente os pentágonos de I a V, e removendo as outras partes, temos o primeiro nível do Fractal de Dürer, a seguir apresentado:

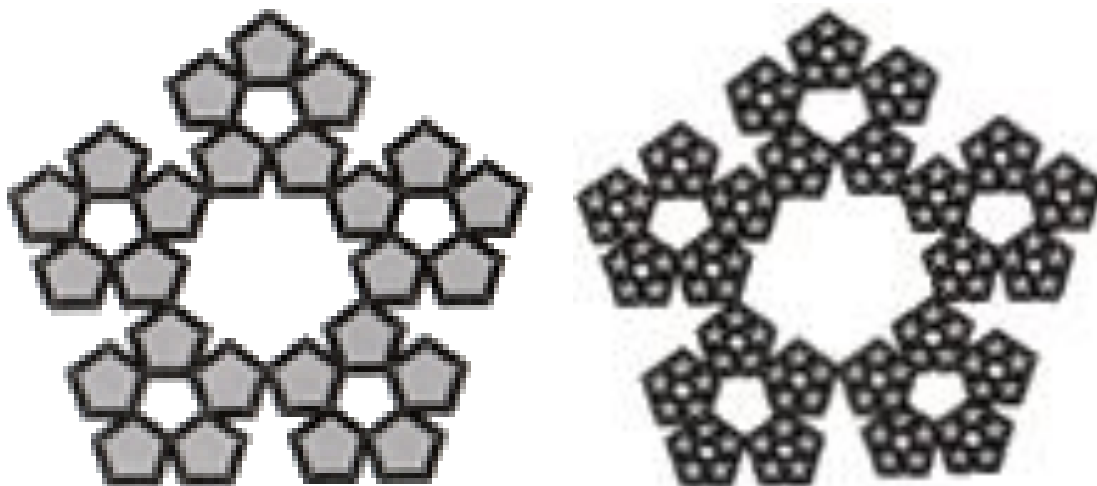
**Figura 64 – Nível 1 do Fractal de Dürer.**



Fonte: [7].

Com o mesmo procedimento, de transformação de um pentágono em cinco pentágonos menores, temos os níveis 2 e 3, extraídos de [7]:

Figura 65 – Níveis 2 e 3 do Fractal de Dürer.



Fonte: [7].

Podemos, então, calcular a dimensão fractal do Fractal de Dürer, cálculo este não apresentado por [7], e que pode ser sugerido como atividade tais quais as atividades anteriores.

Lembrando da relação  $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$ , temos facilmente o valor de  $N$ , que é igual a 5,

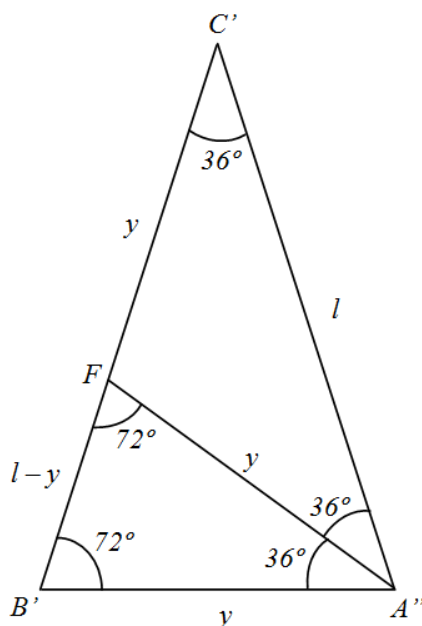
pois cada pentágono se divide em cinco pentágonos menores. O que pode dificultar esse cálculo é o fator de redução  $r$ . Para tanto, devemos saber que os ângulos internos do pentágono regular medem  $108^\circ$ , o que concluimos facilmente quando observamos que cabem três triângulos no pentágono, isto é, a soma de seus ângulos internos é  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ , e então seus ângulos internos valem  $540^\circ/5 = 108^\circ$ .

Assim, sendo  $x_0$  o lado do pentágono inicial, temos que o lado  $l$  do pentágono imediatamente reduzido por um fator de redução  $r$  é dado implicitamente por:

$$x_0 = 2l + B'A''.$$

Chamaremos  $B'A''$  de  $y$ . No triângulo  $B'A''C'$ , traçando a bissetriz do ângulo  $B'A''C'$ , obteremos o ponto  $F$ , conforme vemos na figura a seguir:

Figura 66 – Triângulos  $FB'A''$  e  $B'A''C'$ , ambos com ângulos  $72^\circ$ - $72^\circ$ - $36^\circ$ .



Fonte: autor.

O triângulo  $FB'A''$  é semelhante ao triângulo  $B'A''C'$ , pelo caso Ângulo-Ângulo-Ângulo. Assim, temos:

$$\frac{B'C'}{B'A''} = \frac{B'A''}{B'C' - B'A''} \Rightarrow \frac{l}{y} = \frac{y}{l - y} \Rightarrow y^2 + ly - l^2 = 0.$$

Resolvendo a equação acima na variável  $y$ , temos:

$$y = \frac{-l + \sqrt{l^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-l^2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-l + l\sqrt{5}}{2} = l \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2l + y = 2l + l \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = l \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow l &= \frac{2}{3 + \sqrt{5}} x_0 = \frac{2}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} x_0 = \frac{2(3 - \sqrt{5})}{9 - 5} x_0 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} x_0 \end{aligned}$$

Observemos que o fator de redução é dado pelo quociente entre o novo lado  $l$  e o lado inicial  $x_0$ . Assim:

$$r = \frac{l}{x_0} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}.$$

Finalmente, a dimensão do fractal de Dürer será dada por:



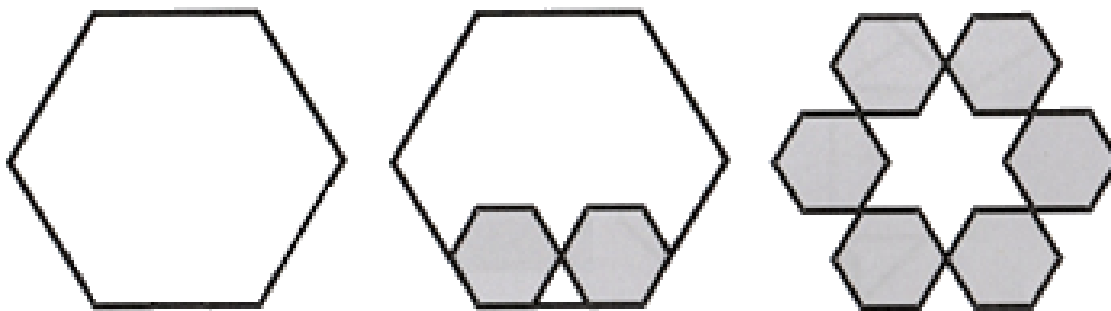
$$D = \frac{\log 5}{\log \left( \frac{1}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \right)} = \frac{\log 5}{\log \left( \frac{2}{3-\sqrt{5}} \right)} \cong 1,6723.$$

### Atividade 8 – Construção do Fractal Hexagonal tipo Dürer

O professor pede a cada grupo que:

- Trace um hexágono regular de lado igual a  $x_0 = 9$  cm num papel de tamanho A4. Este hexágono corresponde ao Nível 0 da atividade;
- Divida este hexágono em seis hexágonos regulares menores, de tal modo que todos tenham um dos ângulos coincidentes com um ângulo do hexágono regular do Nível 0, e tenham, dois a dois, um vértice em comum. Estes seis hexágonos formarão a figura geradora, que é obtida pela transformação de um hexágono em seis, seguindo-se a regra mencionada, obtendo-se a figura seguinte:

**Figura 67 – Nível 0, Regra de formação do fractal (hexágonos menores I e II), e Nível 1.**



Fonte: [7].

- Com cada hexágono obtido anteriormente, realize os procedimentos do item b, resultando no nível 2.
- Quantos hexágonos têm no nível 2, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?
- Novamente, em cada hexágono do nível 2, repita os procedimentos do item b, formando o nível 3;
- Quantos hexágonos têm no nível 3, e quais os tamanhos de seus lados em função de  $x_0$ ?

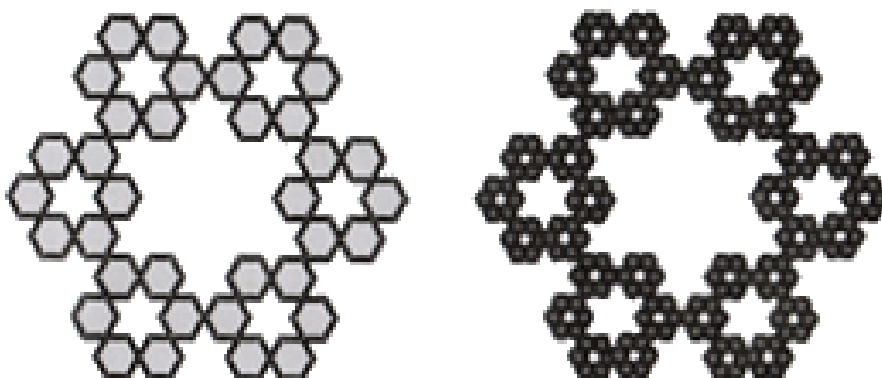
- g) DESAFIO 1: Organize as informações obtidas anteriormente numa tabela e conclua que, no nível  $n$  do presente fractal, para  $n$  natural, teremos  $6^n$  hexágonos cujos lados medem  $\frac{1}{3^n}$  do tamanho  $x_0$  do lado do hexágono inicial.
- h) DESAFIO 2: Determine a dimensão fractal do Fractal Hexagonal tipo Dürer.
- i) DESAFIO3: Determine o valor da área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , em função de  $n$  e de  $x_0$ .

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 8, a qual chamamos *soluções*:

### Soluções da atividade 8

Os alunos deverão encontrar os níveis 2 e 3 próximos a como se apresentam na figura abaixo:

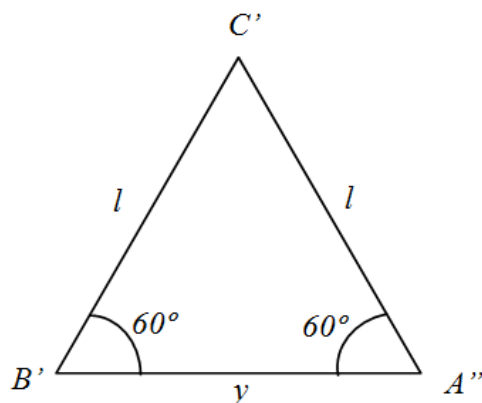
**Figura 68 – Níveis 2 e 3.**



Fonte: [7].

Observemos que, pela construção da figura geradora, temos que cada hexágono se transforma em outros 6 hexágonos, com lados diminuídos num fator  $r$ , cujo valor não é imediato. Para determiná-lo, devemos saber que os ângulos internos do hexágono regular medem  $120^\circ$ , o que concluimos facilmente quando observamos que cabem quatro triângulos no hexágono, isto é, a soma de seus ângulos internos é  $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$ , e então seus ângulos internos valem  $720^\circ/6 = 120^\circ$ .

Figura 69 – Triângulo  $B'A''C'$ .



Fonte: autor.

Assim, observando-se a figura 69, temos que o triângulo  $B'A''C'$ , compreendido entre os hexágonos I e II, possui dois ângulos internos suplementares ao ângulo raso (que mede  $180^\circ$ ). Então, dois de seus ângulos internos medem  $60^\circ$  e, portanto, o terceiro ângulo também mede  $60^\circ$ , sendo  $B'A''C'$  equilátero. Logo, a medida do lado  $B'A''$ , que chamaremos de  $y$ , é igual à medida  $A'B' = l$  do pentágono imediatamente reduzido por um fator de redução  $r$ , ou seja,  $y = l$ . Sendo  $x_0$  o lado do hexágono inicial, temos:

$$x_0 = 2l + y = 2l + l = 3l \Rightarrow l = \frac{x_0}{3} \Rightarrow r = \frac{l}{x_0} = \frac{x_0/3}{x_0} = \frac{1}{3}.$$

Desta forma, a cada passagem de nível temos que a quantidade de hexágonos regulares aumenta num fator 6 e o tamanho de seus lados reduzem num fator igual a  $1/3$ .

Podemos reunir os dados dos níveis 0 a 3 e montar a seguinte tabela, podendo o aluno conjecturar os dados relativos ao nível  $n$ :

Tabela 14: dados do Fractal Hexagonal de Dürer nos níveis 0, 1, 2, 3 e  $n$ .

Nível	Quantidade de hexágonos	Tamanho dos lados dos hexágonos	Tamanho dos lados dos hexágonos, em cm (para $x_0 = 9$ cm)
0	1	$x_0$	9
1	$6^1 = 6$	$(1/3)^1 \cdot x_0 = \frac{1}{3} x_0$	3
2	$6^2 = 36$	$(1/3)^2 \cdot x_0 = \frac{1}{9} x_0$	1
3	$6^3 = 216$	$(1/3)^3 \cdot x_0 = \frac{1}{27} x_0$	$1/3 \cong 0,33$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$6^n$	$(1/3)^n \cdot x_0 = \frac{1}{3^n} x_0$	$\frac{1}{3^n} \cdot 9 = \frac{1}{3^{n-2}} = 3^{2-n}$

Fonte: autor.

Então, chamando de  $y_i$  a quantidade de hexágonos no nível  $i$ , temos que  $y_{i+1} = 6y_i$ , pois cada hexágono do nível  $i$  se dividirá em seis hexágonos no nível  $i+1$ . Percebamos que no início tínhamos apenas um hexágono, então  $y_0 = 1$ . Do mesmo modo, o tamanho do lado do hexágono sempre reduz num fator de  $1/3$ . Pelos exemplos das recorrências das outras atividades, temos que  $y_n = 6^n$  e  $x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n x_0$ .

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de hexágonos aumenta num fator 6 a cada passagem de nível, e os tamanhos de seus lados reduzem num fator  $1/3$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  do Fractal Hexagonal de Dürer será:

$$D = \frac{\log 6}{\log \frac{1}{1/3}} = \frac{\log 6}{\log 3} \cong 1,6309.$$

Equivalentemente, com o uso de limites, para o fractal propriamente dito, que ocorre quando  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(6^n)}{\log \frac{1}{(1/3)^n x_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 6}{n \log 3 - \log x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 6}{\log 3 - \frac{\log x_0}{n}} = \frac{\log 6}{\log 3} \cong 1,6309.$$

Para determinarmos a área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , lembremos que nesse nível há  $6^n$  hexágonos regulares de lado  $\frac{1}{3^n} x_0$ . Seja ABCDEF um hexágono regular de lado  $l$ . Traçando-se segmentos  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$ , vemos que os o hexágono se divide em seis triângulos equiláteros de lado  $l$ , sendo sua área  $A$  dada por:

$$A = 6 \cdot \frac{l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l^2.$$

Portanto:

$$A_n = 6^n \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{1}{3^n} x_0\right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{6^n}{3^{2n}} \cdot x_0^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x_0^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} x_0^2 \sqrt{3}.$$

Também podemos exprimir  $A_n$  de outro modo: sendo  $A_0 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot x_0^2$  a área do hexágono inicial, temos que:

$$A_n = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot x_0^2 = A_0 \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Assim, a área é uma função exponencial decrescente, onde diminui num fator de  $2/3$ . A área  $A$  do fractal é obtida no limite seguinte:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( \frac{2}{3} \right)^{n-1} x_0^2 \sqrt{3} \right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} x_0^2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{3} \right)^n = 0,$$

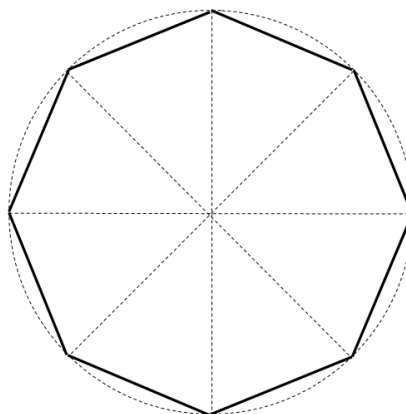
isto é, a soma das áreas dos  $6^n$  hexágonos de áreas  $A_0 \frac{1}{9^n}$  resulta num valor desprezível quando estamos em níveis muito elevados na construção do fractal em tela.

### Atividade 9 – Construção do Fractal Octogonal tipo Dürer

O professor pede a cada grupo que:

- Trace uma circunferência de raio igual a  $R = 10$  cm num papel de tamanho A4. Seja  $O$  o centro da circunferência;
- Trace dois diâmetros perpendiculares da circunferência, paralelos às bordas do papel. Perceba que se formou uma cruz. Nas interseções dos diâmetros com a circunferência, marque os pontos  $A, C, E$  e  $G$ . Faça uma cruz igual à anterior, só que girada em  $45^\circ$  em relação à anterior, ou seja, as bissetrizes dos ângulos  $A\hat{O}C, C\hat{O}E, E\hat{O}G$  e  $G\hat{O}A$ . Esta cruz girada se intersectará com a circunferência nos pontos  $B, D, F$  e  $H$ .
- Una os pontos obtidos anteriormente dois a dois, de modo a formar o octógono regular  $ABCDEFGH$ . Este octógono corresponde ao Nível 0 da atividade, conforme figura abaixo:

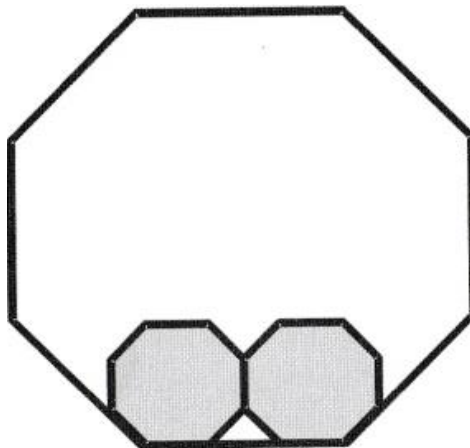
**Figura 70 – Octógono construído segundo as regras acima, correspondente ao Nível 0 do Fractal Octogonal de Dürer.**



Fonte: autor.

- d) Calcule o lado  $x_0$ , os ângulos internos, o ângulo central, e a área do octógono do nível 0;
- e) Divida o(s) octógono(s) do nível anterior em oito octógonos regulares menores iguais, de tal modo que todos tenham um dos ângulos coincidentes com um ângulo do octógono regular do Nível anterior, e tenham, dois a dois, um lado em comum, conforme figura abaixo:

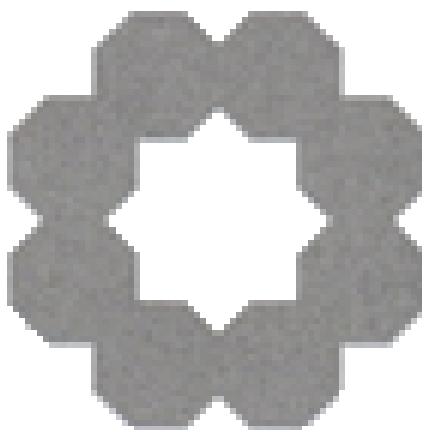
**Figura 71 – Octógonos I e II**, cuja regra de formação deverá repetir-se nos outros lados do nível 0, de modo a formar os oito octógonos pertencentes ao nível 1.



Fonte: [7].

Estes oito octógonos formarão a figura geradora, que é obtida pela transformação de um octógono em oito, seguindo-se a regra mencionada, obtendo-se a figura seguinte:

**Figura 72 – Nível 1**, desenvolvido através de programa na linguagem Java.



Fonte: [7].

- f) Com cada octógono obtido anteriormente, realize os procedimentos do item e, resultando no nível 2.

- g) DESAFIO 1: Calcule a quantidade, o lado e a área dos octógonos dos níveis 1, 2, e 3, em função de  $x_0$ ;
- h) DESAFIO 2: Organize as informações obtidas anteriormente numa tabela e conclua que, no nível  $n$  do presente fractal, para  $n$  natural, teremos  $8^n$  octógonos regulares cujos lados medem  $\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^n$  do tamanho  $x_0$  do lado do octógono inicial (que por sua vez está em função do valor do raio  $R$ ).
- i) DESAFIO 3: Determine a dimensão fractal do Fractal Octogonal tipo Dürer.
- j) DESAFIO 4: Determine o valor da área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , em função de  $n$  e de  $x_0$ .

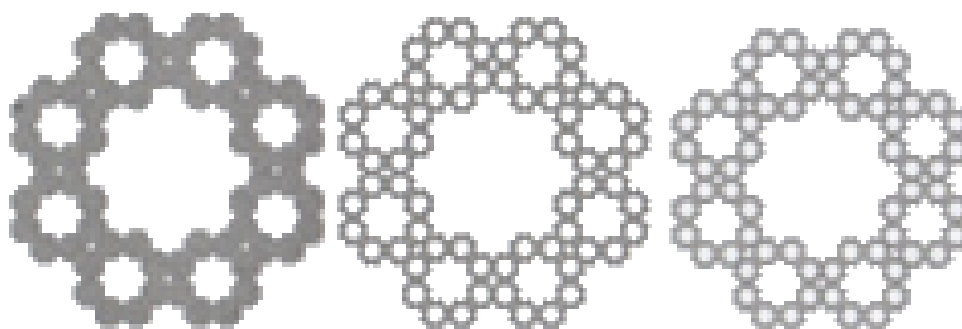
Observe-se ao professor que desenhar esses níveis não é tão simples, sobretudo para o aluno, de modo que aqui nem é pedido o desenho do nível 3, e dos níveis anteriores não se pode cobrar tanta perfeição ao desenhar, ainda que utilizando régua, compasso e transferidor. O essencial é entender a formação do fractal, e imaginar os níveis, ainda que pô-los nos papel seja trabalhoso. Os cálculos, sim, podem ser cobrados.

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 9, a qual chamamos *soluções*:

### Soluções da atividade 9

Os alunos deverão encontrar o nível 2 próximo a como se apresenta na figura abaixo:

**Figura 73 – Níveis 2, 3 e 4, desenvolvidos através de programa na linguagem Java.**



Fonte: [7].

Observemos que, pela construção da figura geradora, temos que cada octógono se transforma em outros 8 octógonos, com lados diminuídos num fator  $r$ , cujo valor não é imediato. Para determiná-lo, devemos saber que os ângulos internos do octógono regular medem  $135^\circ$ , o que concluímos facilmente quando observamos que cabem seis triângulos no

octógono, isto é, a soma de seus ângulos internos é  $6.180^\circ = 1080^\circ$ , e então seus ângulos internos valem  $1080^\circ/8 = 135^\circ$ .

Observemos que o raio da circunferência bissecta os ângulos internos do octógono regular. Assim, considerando o triângulo  $AOB$ , temos que  $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{135^\circ}{2}$ . Então, o ângulo  $A\hat{O}B$ , que é o ângulo central do octógono, medirá:

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = 180^\circ \Rightarrow A\hat{O}B + \frac{135^\circ}{2} + \frac{135^\circ}{2} = 180^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 45^\circ.$$

O cálculo do lado  $x_0$  do octógono do nível 0 recomenda-se ser feito a partir do triângulo  $AOB$ , de lados  $x_0$ ,  $R$  e  $R$ . Sendo o lado  $x_0$  oposto ao ângulo central de  $45^\circ$ , utilizando-se a lei dos cossenos, temos:

$$x_0^2 = R^2 + R^2 - 2.R.R.\cos 45^\circ = 2R^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = R^2(2 - \sqrt{2}) \Rightarrow x_0 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Para  $R = 10$  cm, temos:

$$x_0 = 10\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

No octógono do nível 0, há 8 triângulos idênticos ao triângulo  $AOB$ , do qual já determinamos os lados e os ângulos. Assim, sendo  $x_0$  a base desse triângulo, a sua altura relativa  $h$  mediará o lado  $AB$  no ponto  $H$ , e corresponderá ao cateto oposto ao ângulo  $\frac{135^\circ}{2}$  no triângulo retângulo  $AOH$ , de hipotenusa  $AO = R$ . Denotando por  $A_0$  a área do octógono do nível 0, temos:

$$A_0 = 8 \cdot \frac{x_0 \cdot h}{2} = 4x_0 \cdot R \operatorname{sen}\left(\frac{135^\circ}{2}\right).$$

Achemos uma fórmula para seno do arco metade e para cosseno do arco metade, utilizando a fórmula do cosseno do dobro do ângulo:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = 1 - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{2} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}};$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \left(1 - \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{2} \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}.$$



Assim, como  $\text{sen}\left(\frac{135^\circ}{2}\right) > 0$ , então:

$$A_0 = 4x_0 \cdot R \text{sen}\left(\frac{135^\circ}{2}\right) = 4x_0 \cdot R \sqrt{\frac{1 - \cos 135^\circ}{2}} = 4x_0 \cdot R \sqrt{\frac{1 - (-\cos 45^\circ)}{2}}$$

$$\Rightarrow A_0 = 4x_0 \cdot R \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = 4x_0 \cdot R \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}} = 2x_0 \cdot R \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

Mas  $R = \frac{x_0}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ . Então:

$$A_0 = 2x_0 \cdot R \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2x_0 \cdot \frac{x_0}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}} = 2x_0^2 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}}$$

$$\Rightarrow A_0 = 2x_0^2 \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \cdot \frac{2 + \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} = 2x_0^2 \sqrt{\frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{4 - 2}} = 2x_0^2 \sqrt{\frac{6 + 4\sqrt{2}}{2}} = 2x_0^2 \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Verifiquemos se a expressão  $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$  poderá ser simplificada por uma expressão mais simples, da forma  $a + b\sqrt{2}$ , com  $a$  e  $b$  inteiros, a princípio:

$$a + b\sqrt{2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} \Rightarrow (a + b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3 \\ 2ab = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2b^2 = 3 \\ ab = 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 b^2 + 2b^4 = 3b^2 \Rightarrow 2b^4 - 3b^2 + 1 = 0 \Rightarrow b^2 = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot 1}}{2 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{3 \pm 1}{4} \Rightarrow \text{ou } b^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 2 \text{ ou } b^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = b = 1$$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{2} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

Portanto:

$$A_0 = 2x_0^2(1 + \sqrt{2})$$

Então, se  $L$  é a medida do lado de um octógono, sua área valerá  $2L^2(1 + \sqrt{2})$ . Embora haja beleza algébrica e aritmética nos cálculos acima, seria mais fácil calcular a área de outra forma: no triângulo retângulo  $AOH$ , temos que sua altura  $h = OH$  pode ser assim calculada:

$$\text{cotg}(A\hat{O}H) = \text{cotg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \frac{AH}{OH} = \frac{h}{\frac{x_0}{2}} \Rightarrow h = \frac{x_0}{2} \cdot \text{cotg}\left(\frac{45^\circ}{2}\right) = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{45^\circ}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{45^\circ}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{2}}}{\sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{2}}} = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos 45^\circ}{1 - \cos 45^\circ} \cdot \frac{1 + \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos 45^\circ)^2}{1 - \cos^2 45^\circ}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos 45^\circ)^2}{\text{sen}^2 45^\circ}} = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{1 + \cos 45^\circ}{\text{sen} 45^\circ} = \frac{x_0}{2} \cdot (1 + \sqrt{2})$$

Daí, a área  $A_0$  será dada por:

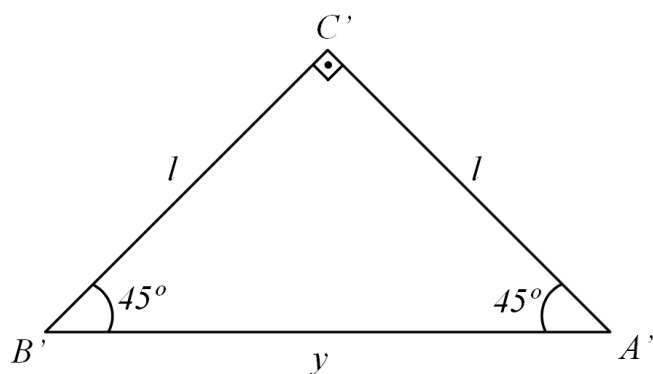
$$A_0 = 8 \cdot \frac{x_0 \cdot h}{2} = 4x_0 \cdot \frac{x_0}{2} (1 + \sqrt{2}) = 2x_0^2 (1 + \sqrt{2}).$$

Para  $R = 10$  cm, temos que  $x_0 = 10\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ , então:

$$A_0 = 2 \left( 10\sqrt{2 - \sqrt{2}} \right)^2 (1 + \sqrt{2}) = 200(2 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = 200\sqrt{2} \text{cm}^2.$$

A quantidade de octógonos aumenta num fator 8 a cada passagem de nível, visto que cada octógono se divide em oito. Então, sendo  $y_i$  a quantidade de octógonos no nível  $i$ , temos que ela obedece à recorrência  $y_{i+1} = 8y_i$ , que já sabemos resultar, pelos exemplos anteriores, numa quantidade  $y_n = 8^n$  para o nível  $n$ .

Figura 74 – Triângulo  $B'A''C'$ .



Fonte: autor.

Para determinar o tamanho dos lados  $l$  no nível 1 do fractal, observemos a figura 74; nela, temos que o triângulo  $B'A''C'$  possui dois ângulos internos suplementares ao ângulo de  $135^\circ$  (que é o ângulo interno do octógono). Então, dois de seus ângulos internos medem  $45^\circ$  e, portanto, o terceiro ângulo, que é o ângulo central, mede  $90^\circ$ , sendo, portanto,  $B'A''C'$  isósceles e retângulo. Logo, a medida do lado  $B'A''$ , que chamaremos de  $y$ , corresponde à medida da hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles de catetos com igual à medida

$A'B' = l$  do octógono imediatamente reduzido por um fator de redução  $r$ . Sendo  $x_0$  o lado do octógono inicial, temos:

$$y^2 = l^2 + l^2 = 2l^2 \Rightarrow y = l\sqrt{2};$$

$$2l + y = x_0 \Rightarrow 2l + l\sqrt{2} = x_0 \Rightarrow l = \frac{x_0}{2 + \sqrt{2}};$$

$$r = \frac{\frac{x_0}{2 + \sqrt{2}}}{x_0} = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}.$$

Desta forma, a cada passagem de nível temos que a quantidade de octógonos regulares aumenta num fator 8 e o tamanho de seus lados reduzem num fator igual a  $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$ .

Podemos reunir os dados dos níveis 0 a 3 e montar a seguinte tabela, podendo o aluno conjecturar os dados relativos ao nível  $n$ :

**Tabela 15: dados do Fractal Octogonal de Dürer nos níveis 0, 1, 2, 3 e  $n$ .**

Nível	Quantidade de octógonos	Tamanho dos lados dos octógonos	Tamanho dos lados dos octógonos, em cm (para $R = 10$ cm)
0	1	$x_0$	$x_0 = 10\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
1	$8^1 = 8$	$\frac{1}{2 + \sqrt{2}} \cdot x_0$	$10 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2 + \sqrt{2}}$
2	$8^2 = 64$	$\left(\frac{1}{2 + \sqrt{2}}\right)^2 \cdot x_0$	$10 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{(2 + \sqrt{2})^2}$
3	$8^3 = 512$	$\left(\frac{1}{2 + \sqrt{2}}\right)^3 \cdot x_0$	$10 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{(2 + \sqrt{2})^3}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$8^n$	$\left(\frac{1}{2 + \sqrt{2}}\right)^n \cdot x_0$	$10 \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{(2 + \sqrt{2})^n}$

Fonte: autor.

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de octógonos aumenta num fator 8 a cada passagem de nível, e os tamanhos de seus lados reduzem num fator  $\frac{1}{2 + \sqrt{2}}$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  do Fractal Octogonal de Dürer será:

$$D = \frac{\log 8}{\log \frac{1}{\frac{1}{2 + \sqrt{2}}}} = \frac{\log 8}{\log(2 + \sqrt{2})} \cong 1,6934.$$

Equivalentemente, com o uso de limites, para o fractal propriamente dito, que ocorre quando  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(8^n)}{\log \left( \left( \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \right)^n \cdot x_0 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 8}{n \log(2 + \sqrt{2}) - \log x_0}$$

$$\Rightarrow D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 8}{\log(2 + \sqrt{2}) - \frac{\log x_0}{n}} = \frac{\log 8}{\log(2 + \sqrt{2})} \cong 1,6934.$$

Para determinarmos a área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , lembremos que nesse nível há  $8^n$  octógonos regulares de lado  $\left( \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \right)^n \cdot x_0$ . Um octógono de lado  $L$  tem área igual a  $2L^2(1 + \sqrt{2})$ . Portanto:

$$A_n = 8^n \cdot 2 \left[ \left( \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \right)^n \cdot x_0 \right]^2 \cdot (1 + \sqrt{2}) = \frac{2 \cdot 8^n \cdot (1 + \sqrt{2})}{(2 + \sqrt{2})^{2n}} \cdot x_0^2$$

$$\Rightarrow A_n = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{8^n}{(6 + 4\sqrt{2})^n} \cdot x_0^2 = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \frac{8^n}{2^n \cdot (3 + 2\sqrt{2})^n} \cdot x_0^2.$$

$$\Rightarrow A_n = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \left( \frac{4}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^n \cdot x_0^2$$

Também podemos exprimir  $A_n$  de outro modo: sendo  $A_0 = 2x_0^2(1 + \sqrt{2})$  a área do octógono inicial, temos que:

$$A_n = 2 \cdot (1 + \sqrt{2}) \cdot \left( \frac{4}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^n \cdot x_0^2 = A_0 \left( \frac{4}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^n.$$

Assim, a área é uma função exponencial decrescente, onde diminui num fator de  $\frac{4}{3 + 2\sqrt{2}} \cdot \frac{3 - 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}} = \frac{12 - 8\sqrt{2}}{9 - 8} = 12 - 8\sqrt{2} \cong 0,6863$ . A área  $A$  do fractal é obtida no limite seguinte:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ A_0 \left( \frac{4}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^n \right] = A_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4}{3 + 2\sqrt{2}} \right)^n = 0,$$

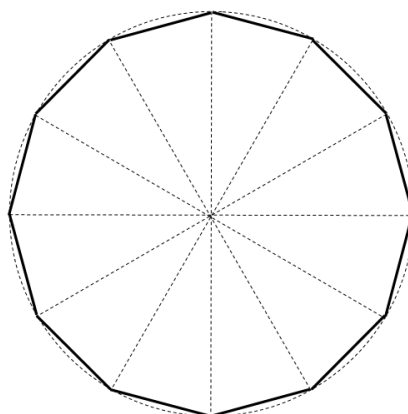
isto é, a soma das áreas dos  $8^n$  octógonos de áreas  $A_0 \frac{1}{(6 + 4\sqrt{2})^n}$  resulta num valor desprezível quando estamos em níveis muito elevados na construção do fractal em tela.

### Atividade 10 – Construção do Fractal Dodecagonal tipo Dürer

O professor pede a cada grupo que:

- Trace uma circunferência de raio igual a  $R = 10$  cm num papel de tamanho A4. Seja  $O$  o centro da circunferência;
- Trace dois diâmetros perpendiculares da circunferência, paralelos às bordas do papel. Perceba que se formou uma cruz. Nas interseções dos diâmetros com a circunferência, marque os pontos  $A, D, G$  e  $J$ . Faça duas cruzes iguais à anterior, só que giradas em  $30^\circ$  e em  $60^\circ$  em relação às anteriores. A cruz girada de  $30^\circ$  se intersectará com a circunferência nos pontos  $B, E, H$  e  $K$ , enquanto que a cruz girada de  $60^\circ$  se intersectará com a circunferência nos pontos  $C, F, I$  e  $L$ .
- Una os pontos obtidos anteriormente dois a dois, de modo a formar o dodecágono regular  $ABCDEFGHIJKL$ . Este dodecágono corresponde ao Nível 0 da atividade, conforme figura abaixo:

**Figura 75 – Dodecágono construído segundo as regras acima, correspondente ao Nível 0 do Fractal Dodecagonal de Dürer.**

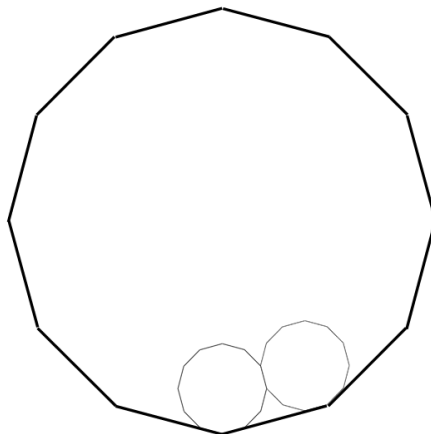


Fonte: autor.

- Calcule o lado  $x_0$ , os ângulos internos, o ângulo central, e a área do dodecágono do nível 0;

e) Divida o(s) dodecágono(s) do nível anterior em doze dodecágonos regulares menores iguais, de tal modo que todos tenham um dos ângulos coincidentes com um ângulo do dodecágono regular do Nível anterior, e tenham, dois a dois, um lado em comum, conforme figura abaixo:

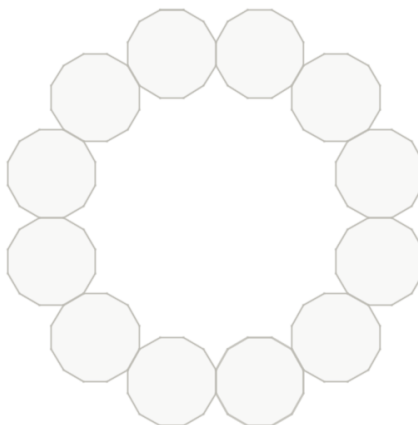
**Figura 76 – Dodecágonos I e II**, cuja regra de formação deverá repetir-se nos outros lados do nível 0, de modo a formar os doze dodecágonos pertencentes ao nível 1.



Fonte: autor.

Estes doze dodecágonos formarão a figura geradora, que é obtida pela transformação de um dodecágono em doze, seguindo-se a regra mencionada, obtendo-se a figura seguinte:

**Figura 77 – Nível 1.**



Fonte: autor.

f) Com cada dodecágono obtido anteriormente, realize os procedimentos do item e, resultando no nível 2.

g) DESAFIO 1: Calcule a quantidade, o lado e a área dos dodecágonos dos níveis 1, 2, e 3, em função de  $x_0$ ;

- h) DESAFIO 2: Organize as informações obtidas anteriormente numa tabela e conclua que, no nível  $n$  do presente fractal, para  $n$  natural, teremos  $12^n$  dodecágonos regulares cujos lados medem  $\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)^n$  do tamanho  $x_0$  do lado do dodecágono inicial (que por sua vez está em função do valor do raio  $R$ ).
- i) DESAFIO 3: Determine a dimensão fractal do Fractal Dodecagonal tipo Dürer.
- j) DESAFIO 4: Determine o valor da área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , em função de  $n$  e de  $x_0$ .

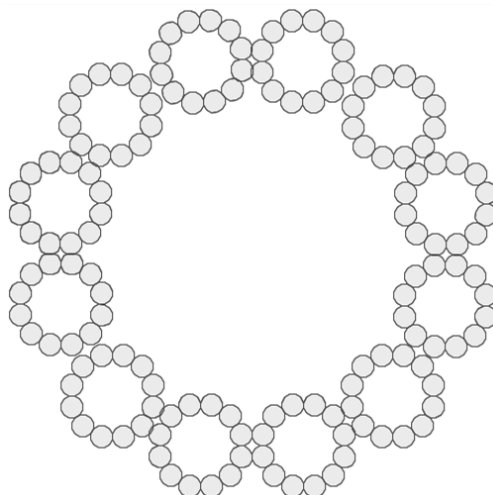
Observe-se ao professor que desenhar qualquer nível agora é complicado, sobretudo para o aluno, de modo que aqui nem é pedido o desenho do nível 3, e dos níveis anteriores não se pode cobrar tanta perfeição ao desenhar, ainda que utilizando régua, compasso e transferidor. O essencial é entender a formação do fractal, e imaginar os níveis, ainda que pô-los nos papel seja trabalhoso. Os cálculos, sim, podem ser cobrados. Talvez esta atividade seja mais propícia ao aluno do curso de licenciatura em Matemática, inclusive com o uso de recursos gráficos como o Geogebra ou outro software, pois à mão livre é bem inviável traçar já o primeiro nível do fractal.

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 10, a qual chamamos *soluções*:

### Soluções da atividade 10

Os alunos deverão encontrar o nível 2 próximo a como se apresenta na figura abaixo, inclusive de excepcional beleza:

**Figura 78 – Nível 2.**



Observemos que, pela construção da figura geradora, temos que cada dodecágono se transforma em outros 12 dodecágonos, com lados diminuídos num fator  $r$ , cujo valor não é imediato. Para determiná-lo, devemos saber que os ângulos internos do octógono regular medem  $150^\circ$ , o que concluímos facilmente quando observamos que cabem dez triângulos no dodecágono, isto é, a soma de seus ângulos internos é  $10 \cdot 180^\circ = 1800^\circ$ , e então seus ângulos internos valem  $1800^\circ/12 = 150^\circ$ .

Observemos que o raio da circunferência bissecta os ângulos internos do dodecágono regular. Assim, considerando o triângulo  $AOB$ , temos que  $O\hat{A}B = O\hat{B}A = \frac{150^\circ}{2} = 75^\circ$ . Então, o ângulo  $A\hat{O}B$ , que é o ângulo central do dodecágono, medirá:

$$A\hat{O}B + O\hat{A}B + O\hat{B}A = 180^\circ \Rightarrow A\hat{O}B + 75^\circ + 75^\circ = 180^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = 30^\circ.$$

O cálculo do lado  $x_0$  do dodecágono do nível 0 recomenda-se ser feito a partir do triângulo  $AOB$ , de lados  $x_0$ ,  $R$  e  $R$ . Sendo o lado  $x_0$  oposto ao ângulo central de  $30^\circ$ , utilizando-se a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} x_0^2 &= R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 30^\circ = 2R^2 \left( 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = R^2 (2 - \sqrt{3}) \\ \Rightarrow x_0 &= R \sqrt{2 - \sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Para  $R = 10$  cm, temos:

$$x_0 = 10 \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

No dodecágono do nível 0, há 12 triângulos idênticos ao triângulo  $AOB$ , do qual já determinamos os lados e os ângulos. Assim, sendo  $x_0$  a base desse triângulo, a sua altura relativa  $h$  mediará o lado  $AB$  no ponto  $H$ , e corresponderá ao cateto adjacente ao ângulo  $\frac{30^\circ}{2}$

no triângulo retângulo  $AOH$ , de cateto oposto  $AH = x_0/2$ . Então:

$$\cotg(A\hat{O}H) = \cotg\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \frac{AH}{OH} = \frac{h}{x_0/2} \Rightarrow h = \frac{x_0}{2} \cdot \cotg\left(\frac{30^\circ}{2}\right) = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{\cos\left(\frac{30^\circ}{2}\right)}{\sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow h = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{2}}}{\sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}} = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos 30^\circ}{1 - \cos 30^\circ} \cdot \frac{1 + \cos 30^\circ}{1 + \cos 30^\circ}} = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos 30^\circ)^2}{1 - \cos^2 30^\circ}}$$

$$\Rightarrow h = \frac{x_0}{2} \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos 30^\circ)^2}{\sin^2 30^\circ}} = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{1 + \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{x_0}{2} \cdot \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1/2} = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{2}\right) x_0.$$



Denotando por  $A_0$  a área do dodecágono do nível 0, temos:

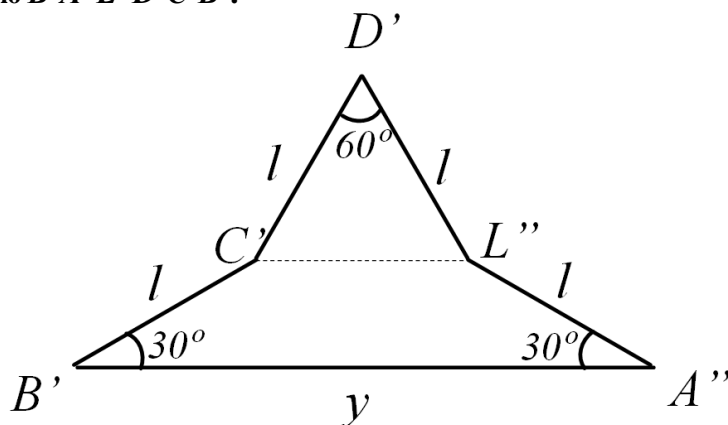
$$A_0 = 12 \cdot \frac{x_0 \cdot h}{2} = 6x_0 \cdot \left( \frac{2 + \sqrt{3}}{2} \right) x_0 = 3(2 + \sqrt{3})x_0^2.$$

Então, se  $L$  é a medida do lado de um dodecágono regular, sua área valerá  $3L^2(2 + \sqrt{3})$ . Para  $R = 10$  cm, temos que  $x_0 = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$ , então:

$$A_0 = 3(2 + \sqrt{3}) \left( 10\sqrt{2 - \sqrt{3}} \right)^2 = 300(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 300\text{cm}^2.$$

A quantidade de dodecágonos aumenta num fator 12 a cada passagem de nível, visto que cada dodecágono se divide em doze. Então, sendo  $y_i$  a quantidade de dodecágonos no nível  $i$ , temos que ela obedece à recorrência  $y_{i+1} = 12y_i$ , que já sabemos resultar, pelos exemplos anteriores, numa quantidade  $y_n = 12^n$  para o nível  $n$ .

Figura 79 – Pentágono  $B'A''L''D'C'B'$ .



Fonte: autor.

Para determinar o tamanho dos lados  $l$  no nível 1 do fractal, observemos a figura 79, que consiste no pentágono  $B'A''L''D'C'B'$ , compreendido entre os dodecágonos; nela, temos que o triângulo  $C'L''D'$  é isósceles, e consequentemente equilátero, pois  $D'\hat{C}'L'' + C'\hat{L}''D' + 60^\circ = 180^\circ$ , e como  $D'\hat{C}'L'' = C'\hat{L}''D'$ , temos que  $D'\hat{C}'L'' = C'\hat{L}''D' = \frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$ .

Assim,  $C'L'' = l$ .

O segmento  $B'A''$  corresponde à soma da medida do segmento  $C'L''$  com as medidas das projeções dos segmentos  $B'C'$  e  $A''L''$  sobre o próprio segmento  $B'A''$ .

Deste modo, temos:

$$B'A'' = B'C' \cos 30^\circ + C'L' + A''L'' \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow y = l \frac{\sqrt{3}}{2} + l + l \frac{\sqrt{3}}{2} = l(\sqrt{3} + 1)$$

Temos ainda que  $AB = A'B' + B'A'' + A''B''$ , onde  $AB = x_0$ ,  $A'B' = A''B'' = l$ , e  $B'A'' = y$ . Então, temos:

$$x_0 = l + y + l = 2l + y = 2l + l(\sqrt{3} + 1) = l(3 + \sqrt{3})$$

Assim, o coeficiente de redução  $r$  do fractal Dodecagonal de Dürer:

$$r = \frac{l}{x_0} = \frac{l}{l(3 + \sqrt{3})} = \frac{1}{3 + \sqrt{3}}$$

Desta forma, a cada passagem de nível temos que a quantidade de dodecágonos regulares aumenta num fator 12 e o tamanho de seus lados reduzem num fator igual a  $\frac{1}{3 + \sqrt{3}}$ .

Podemos reunir os dados dos níveis 0 a 3 e montar a seguinte tabela, podendo o aluno conjecturar os dados relativos ao nível  $n$ :

**Tabela 16: dados do Fractal Dodecagonal de Dürer nos níveis 0, 1, 2, 3 e n.**

Nível	Quantidade de dodecágonos	Tamanho dos lados dos dodecágonos	Tamanho dos lados dos dodecágonos, em cm (para $R = 10$ cm)
0	1	$x_0$	$x_0 = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}$
1	$12^1 = 12$	$\frac{1}{3 + \sqrt{3}} \cdot x_0$	$\frac{10\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{3 + \sqrt{3}}$
2	$12^2 = 144$	$\left(\frac{1}{3 + \sqrt{3}}\right)^2 \cdot x_0$	$\frac{10\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{(3 + \sqrt{3})^2}$
3	$12^3 = 1728$	$\left(\frac{1}{3 + \sqrt{3}}\right)^3 \cdot x_0$	$\frac{10\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{(3 + \sqrt{3})^3}$
⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	$12^n$	$\left(\frac{1}{3 + \sqrt{3}}\right)^n \cdot x_0$	$\frac{10\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{(3 + \sqrt{3})^n}$

Fonte: autor.

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de dodecágonos aumenta num fator 12 a cada passagem de nível, e os tamanhos de seus lados reduzem num fator  $\frac{1}{3 + \sqrt{3}}$ . Segue daí que a dimensão fractal  $D$  do Fractal Dodecagonal de Dürer será:

$$D = \frac{\log 12}{\log \frac{1}{\frac{1}{3+\sqrt{3}}}} = \frac{\log 12}{\log(3+\sqrt{3})} \cong 1,5987.$$

Equivalentemente, com o uso de limites, para o fractal propriamente dito, que ocorre quando  $n \rightarrow \infty$ , temos:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(12^n)}{\log \frac{1}{\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)^n \cdot x_0}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 12}{n \log(3+\sqrt{3}) - \log x_0}$$

$$\Rightarrow D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 12}{\log(3+\sqrt{3}) - \frac{\log x_0}{n}} = \frac{\log 12}{\log(3+\sqrt{3})} \cong 1,5987.$$

Para determinarmos a área  $A_n$  do fractal, no nível  $n$ , lembremos que nesse nível há  $12^n$  dodecágonos regulares de lado  $\left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)^n \cdot x_0$ . Um dodecágono de lado  $L$  tem área igual a  $3(2+\sqrt{3})L^2$ . Portanto:

$$A_n = 12^n \cdot 3(2+\sqrt{3}) \left( \left(\frac{1}{3+\sqrt{3}}\right)^n \cdot x_0 \right)^2 = \frac{12^n}{(3+\sqrt{3})^{2n}} \cdot 3(2+\sqrt{3})x_0^2.$$

Mas  $A_0 = 3(2+\sqrt{3})x_0^2$ . Então:

$$A_n = \frac{12^n}{(3+\sqrt{3})^{2n}} \cdot A_0 = \left(\frac{12}{12+6\sqrt{3}}\right)^n A_0 = \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^n A_0.$$

Assim, a área é uma função exponencial decrescente, onde diminui num fator de  $\frac{2}{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{4-2\sqrt{3}}{4-3} = 4-2\sqrt{3} \cong 0,5359$ . A área  $A$  do fractal é obtida no limite seguinte:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^n A_0 \right] = A_0 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^n = 0,$$

isto é, a soma das áreas dos  $12^n$  dodecágonos de áreas  $\left(\frac{1}{12+6\sqrt{3}}\right)^n A_0$  resulta num valor desprezível quando estamos em níveis muito elevados na construção do fractal em tela.

### 3.4 Oficina sobre fractais do tipo Árvores

O professor inicia observando que quando temos entes geométricos (polígonos ou mesmo segmentos de reta) que vão se ramificando tais quais os ramos de uma árvore, e repetimos esse processo infinitamente através de uma lei de formação bem definida, formamos um fractal que chamamos *Fractal Árvore*. Podemos dividir este grupo de fractais em dois subgrupos, a serem explorados em atividades posteriores: o fractal *Árvore Pitagórica* e o fractal *Árvore Bifurcada*.

O fractal *Árvore Pitagórica* tem esse nome porque parte de um triângulo retângulo (preferencialmente de lados com medidas *inteiras*) e da construção de quadrados cujos lados pertencem a este triângulo, respeitado o disposto no consagrado Teorema de Pitágoras, em que a soma das áreas dos quadrados cujos lados correspondem aos catetos do triângulo supracitado é igual à área do quadrado cujo lado corresponde à hipotenusa do mesmo triângulo. Assim, dado o triângulo, constroem-se os três quadrados a ele relacionados conforme explicado acima, e temos o primeiro nível do fractal; o quadrado da hipotenusa será o tronco da árvore, e permanecerá inalterado, enquanto que os quadrados dos catetos, num dado nível, corresponderão aos quadrados das hipotenusas, no nível seguinte, e, através de uma proporção pré-determinada entre os lados, será repetido o procedimento, criando-se os demais níveis.

Já no fractal *Árvore Bifurcada*, parte-se de um segmento vertical de dimensão conhecida, que corresponderá ao tronco, e através de um ângulo de bifurcação e uma escala de redução bem definidos, se ramificará seguindo essas condições, sempre dobrando sua quantidade de segmentos quando da passagem de níveis de construção do fractal.

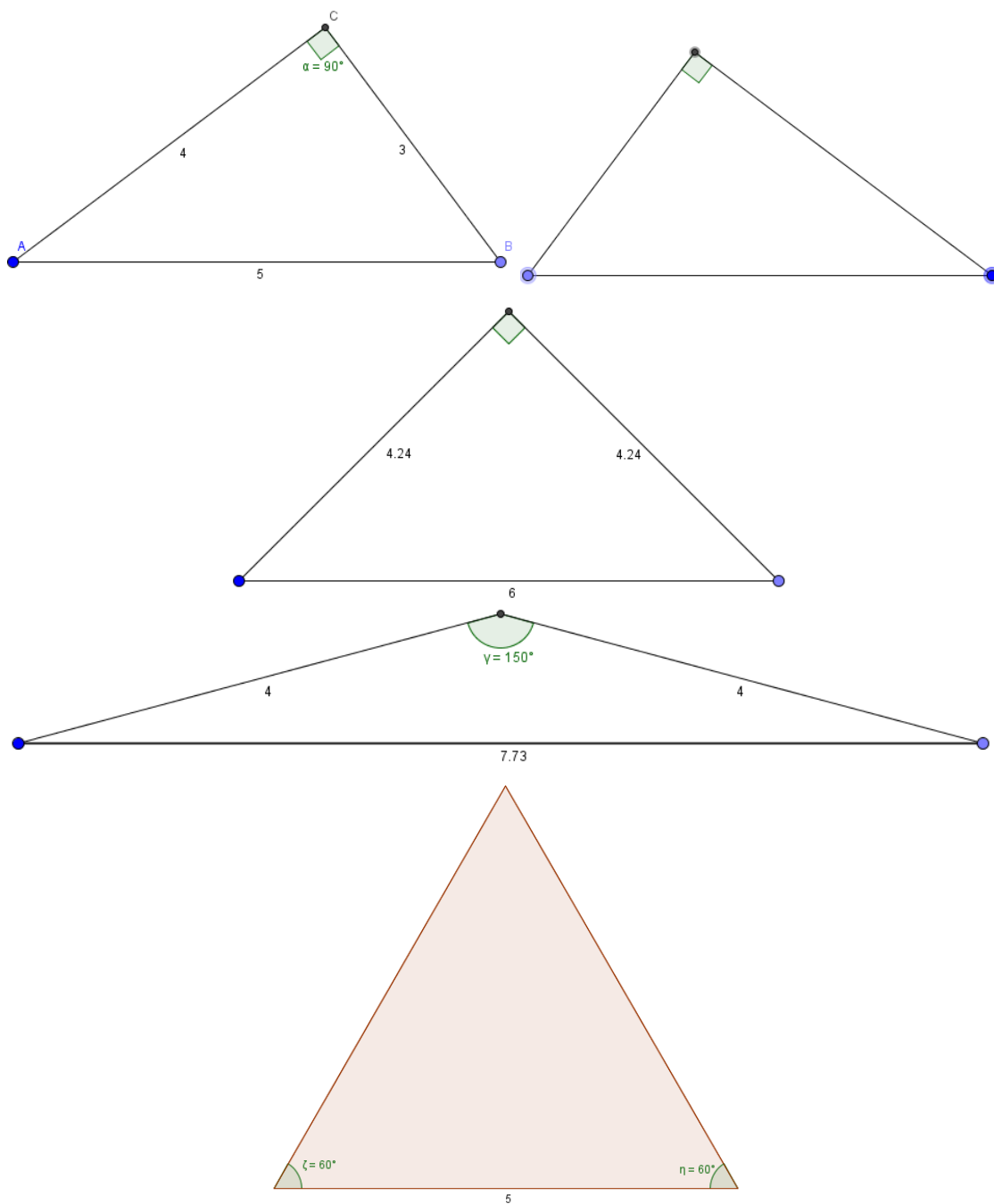
#### Atividade 11 – Construção do Fractal *Árvore Pitagórica*

Nesta atividade, os grupos construirão árvores pitagóricas distintas: Grupos I – aqueles grupos que construirão a árvore pitagórica retangular fundamental (lados 3, 4 e 5); Grupos II, aqueles que construirão a árvore pitagórica isósceles retangular; Grupos III, aqueles que construirão a árvore pitagórica isósceles obtusângula; Grupos IV, aqueles que construirão a árvore pitagórica equilátera.

No que se segue apresentamos a sequência de procedimentos recomendados a cada grupo:

- aI – Grupo I) Trace um triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 cm, com o maior lado na base;  
 aII – Grupo II) Trace um triângulo retângulo de base (hipotenusa) igual a 6 cm e catetos iguais a aproximadamente 4,24 cm (ou igual a exatamente  $3\sqrt{2}$ );  
 aIII – Grupo III) Trace um triângulo isósceles obtusângulo de base medindo aproximadamente 7,73 cm (ou igual a exatamente  $4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ ) e lados iguais a 4 cm;  
 aIV – Grupo IV) Trace um triângulo equilátero de lado igual a 5 cm.

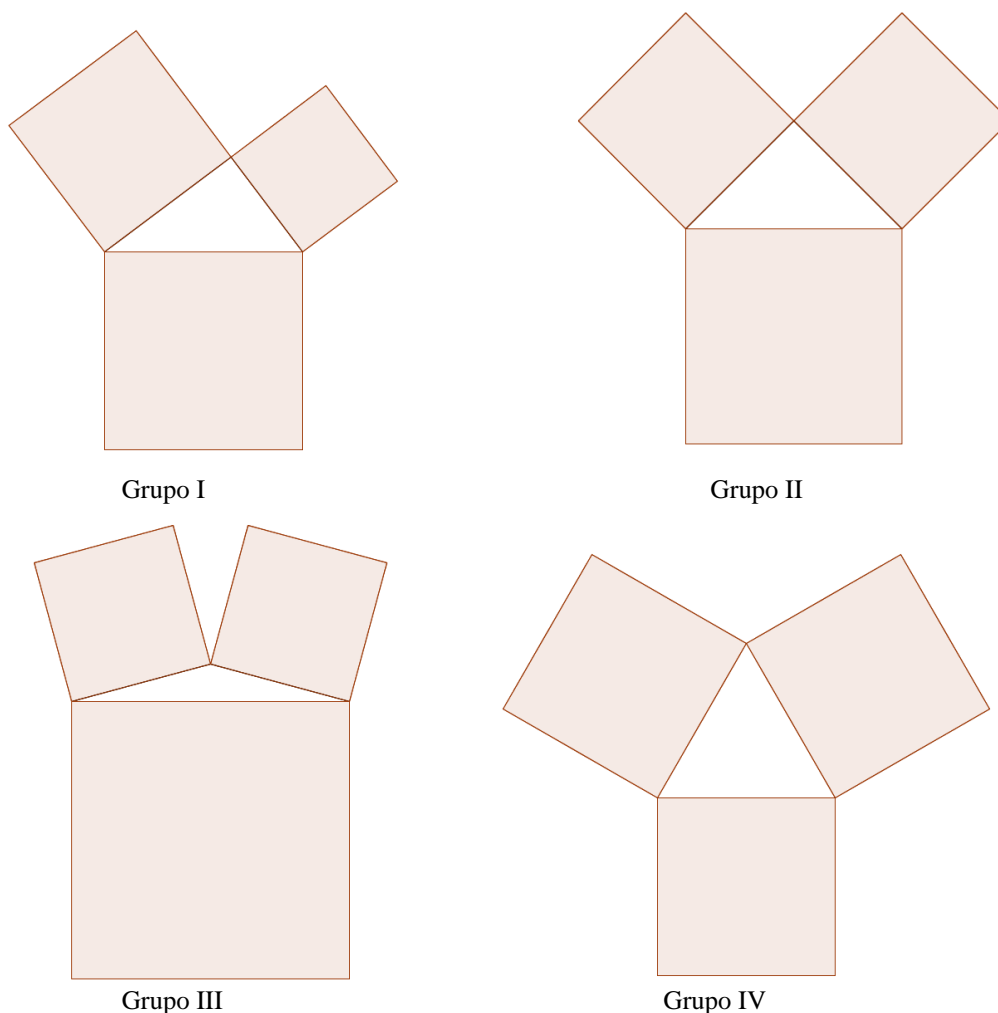
Figura 80 – Triângulos iniciais dos Grupos I, II III e IV, de cima para baixo, correspondentes aos níveis 0.



Fonte: autor.

b) Construa os quadrados respectivos aos lados do triângulo do item anterior, formando os níveis 1, conforme figura abaixo:

Figura 81 – Níveis 1.



Fonte: autor.

c) Considere como nova(s) hipotenusa(s) (novas *bases*) os lados dos quadrados que ficam opostos aos catetos do(s) triângulo(s) do nível anterior, para os Grupos I e II.

Para os Grupos III e IV, chame de *base* do nível 0 o lado do quadrado-tronco, e considere como novas bases (bases do nível 1) os lados dos outros quadrados que ficam opostos aos lados que pertencem ao triângulo do nível anterior.

Para todos os grupos: construa triângulos com as novas bases.

Os novos triângulos deverão seguir à proporção 3:4:5 para o Grupo I,  $3\sqrt{2} : 3\sqrt{2} : 6$  para o grupo II, 4:4:  $4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  para o Grupo III e 1:1:1 (equilátero) para o Grupo IV. Construa quadrados nos dois lados dos novos triângulos, formando o nível 2 (falamos nos dois lados

porque o terceiro lado corresponde à base, que já se liga ao nível anterior através de um quadrado cuja *base* é o lado em comum).

Construa quadrados com os lados dos novos triângulos.

d) Repetindo os procedimentos do item c, construa o nível 3.

e) Calcule a quantidade de triângulos e quadrados e a área total da figura nos níveis 0, 1, 2, e 3;

f) DESAFIO 1: Calcule a quantidade de triângulos e quadrados e a área total da figura no nível  $n$ ;

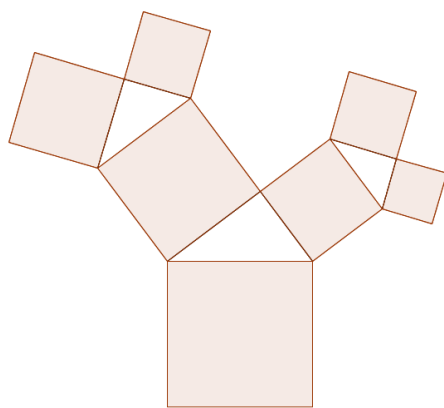
g) DESAFIO 2: Determine a dimensão fractal da sua respectiva árvore pitagórica.

Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 11, a qual chamamos *soluções*:

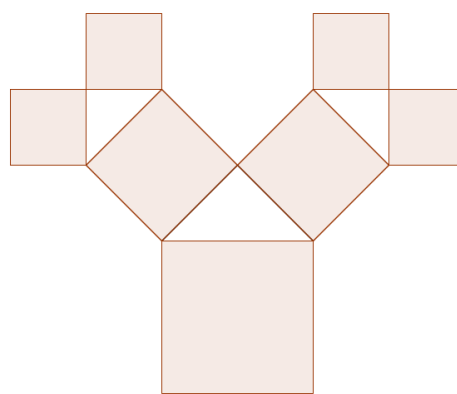
### Soluções da atividade 11

Os alunos deverão encontrar os níveis 2 e 3 próximos a como se apresentam na figura abaixo:

**Figura 82a – Níveis 2.**



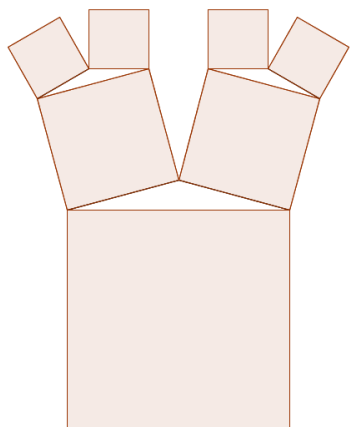
Grupo I



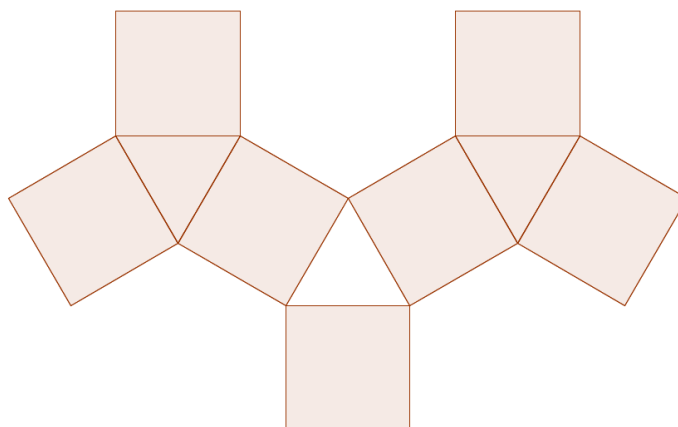
Grupo II

Fonte: autor.

Figura 82b – Níveis 2.



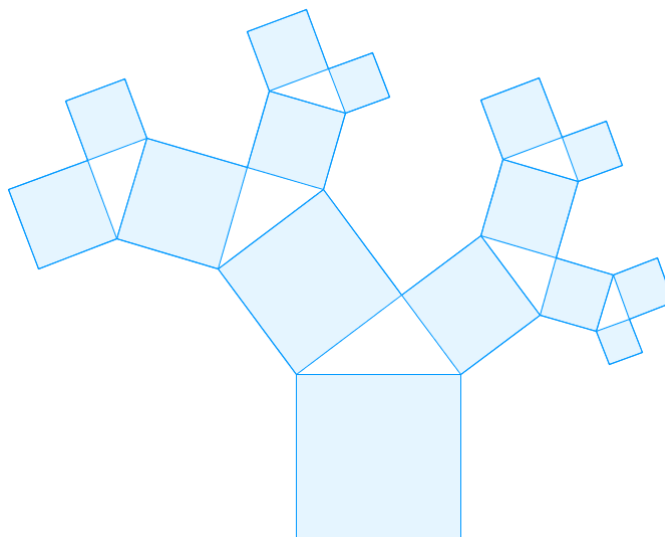
Grupo III



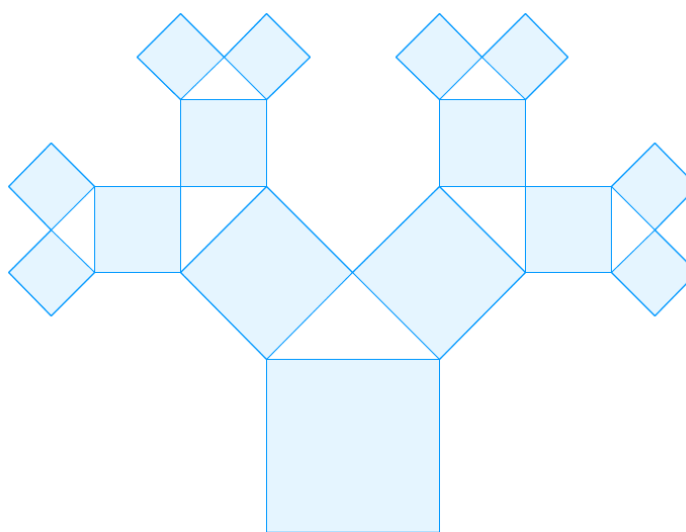
Grupo IV

Fonte: autor.

Figura 83a – Níveis 3.



Grupo I

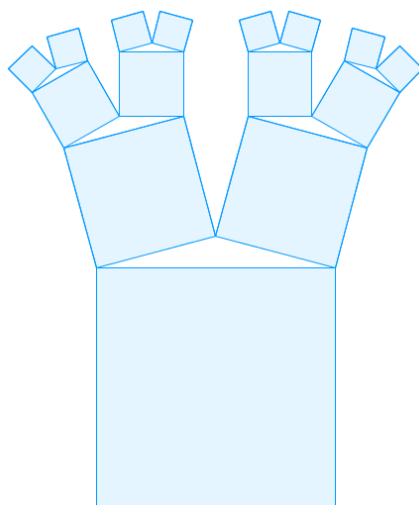


Grupo II

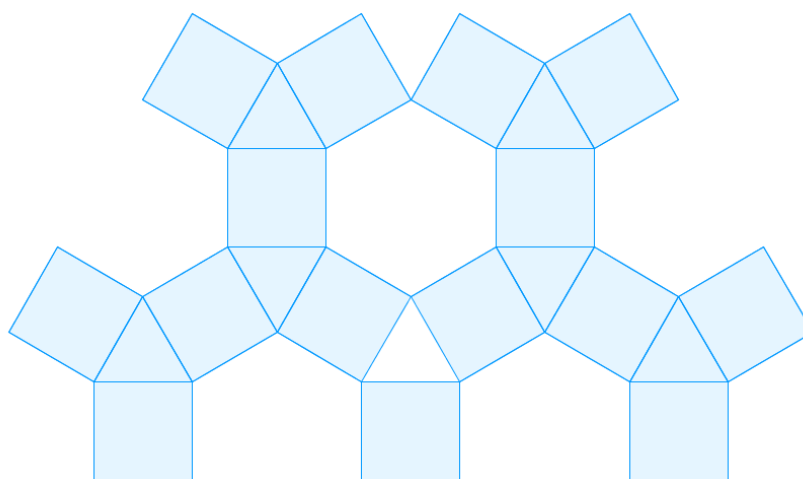
Fonte: autor.



Figura 83b – Nível 3.



Grupo III



Grupo IV

Fonte: autor.

Seguem, na figura 84, as quantidades de triângulos e quadrados presentes nos níveis 1, 2 e 3 dos quatro grupos, para posteriormente avaliarmos quais as quantidades e os tamanhos que ocorrem no  $n$ -ésimo nível do fractal:

Tabela 17: dados dos fractais Árvores Pitagóricas nos níveis 1, 2, 3, e conjecturas para os níveis 4 e n.

Nível	Grupo	Quantidade de novos Triângulos	Tamanho dos lados dos novos Triângulos	Quantidade de novos Quadrados	Tamanho dos lados dos novos Quadrados
1	I	1	A: 3; 4; 5	3	3; 4; 5
	II		$3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 6$		$3\sqrt{2}; 3\sqrt{2}; 6$
	III		$4; 4; 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$		$4; 4; 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$
	IV		5; 5; 5		5; 5; 5
2	I	2	$\frac{3}{5}$ de A e $\frac{4}{5}$ de A	4	$\frac{3}{5}$ de 3, $\frac{4}{5}$ de 3, $\frac{3}{5}$ de 4, e $\frac{4}{5}$ de 4
	II		3; 3; $3\sqrt{2}$		3
	III		$\frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}; \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}; 4$		$\frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$
	IV		5		5
3	I	4	$\left(\frac{3}{5}\right)^2$ de A, $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$ de A, $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$ de A, e $\left(\frac{4}{5}\right)^2$ de A	8	Um de lado $\frac{3^3}{5^2}$ ; três de lado $\frac{3^2 \cdot 4}{5^2}$ ; três de lado $\frac{3 \cdot 4^2}{5^2}$ ; um de lado $\frac{4^3}{5^2}$
	II		$\frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{3}{\sqrt{2}}; 3$		$\frac{3}{\sqrt{2}}$
	III		$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}; \frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}; \frac{4}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$		$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}$
	IV		5		5
4	I	8	Um triângulo $\left(\frac{3}{5}\right)^3$ de A, três triângulos $\frac{3^2 \cdot 4}{5^3}$ de A, três triângulos $\frac{3 \cdot 4^2}{5^3}$ de A, e um triângulo $\left(\frac{4}{5}\right)^3$ de A	16	Um quadrado de lado $\frac{3^4}{5^3}$ ; quatro quadrados de lado $\frac{3^3 \cdot 4}{5^3}$ ; seis quadrados de lado $\frac{3^2 \cdot 4^2}{5^3}$ ; quatro quadrados de lado $\frac{3 \cdot 4^3}{5^3}$ ; um quadrado de lado $\frac{4^4}{5^3}$
	II		$\frac{3}{(\sqrt{2})^2}; \frac{3}{(\sqrt{2})^2}; \frac{3}{\sqrt{2}}$		$\frac{3}{(\sqrt{2})^2}$
	III		$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^3}; \frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^3}; \frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^2}$		$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^3}$
	IV		5		5
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	I	$2^{n-1}$	$\binom{n-1}{i}$ triângulos com tamanho $\frac{3^{n-1-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}$ de A, para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ *	$2^n$	$\binom{n}{i}$ quadrados de lado $\frac{3^{n-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}$ , para $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ **
	II		$\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}; \frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}; \frac{3}{(\sqrt{2})^{n-3}}$		$\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$
	III		$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}; \frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}};$ $\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-2}}$		$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}$
	IV		5		5

Fonte: autor.

\* NOVOS TRIÂNGULOS: Temos, no nível  $n$ , para o fractal do Grupo I:  $\binom{n-1}{0}$  triângulo com catetos medindo  $\frac{3^{n-1}}{5^{n-1}}$  dos catetos de A,  $\binom{n-1}{1}$  triângulos com catetos medindo  $\left(\frac{3}{5}\right)^{n-2} \frac{4}{5}$  dos catetos de A,  $\binom{n-1}{2}$  triângulos com catetos medindo  $\left(\frac{3}{5}\right)^{n-3} \left(\frac{4}{5}\right)^2$  dos catetos de A, ...,  $\binom{n-1}{i}$  triângulos com catetos medindo  $\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1-i} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^i$  dos catetos de A, ...,  $\binom{n-1}{n-1}$  triângulo com catetos medindo  $\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$  dos catetos de A, totalizando  $2^{n-1}$  novos triângulos no nível  $n$ .

\*\* NOVOS QUADRADOS: Temos, no nível  $n$  ( $n \neq 1$ ), para o fractal do Grupo I:  $\binom{n}{0}$  quadrado de lado  $\frac{3^n}{5^{n-1}}$ ,  $\binom{n}{1}$  quadrados de lado  $\frac{3^{n-1} \cdot 4}{5^{n-1}}$ ,  $\binom{n}{2}$  quadrados de lado  $\frac{3^{n-2} \cdot 4^2}{5^{n-1}}$ , ...,  $\binom{n}{i}$  quadrados de lado  $\frac{3^{n-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}$ , ...,  $\binom{n}{n}$  quadrados de lado  $\frac{4^n}{5^{n-1}}$ , totalizando  $2^n$  novos quadrados no nível  $n$ .

A quantidade total de triângulos  $y_n$  no nível  $n$  será dada pela soma das quantidades de novos triângulos do nível 1 até o nível  $n$ , isto é:

$$y_n = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^n - 1.$$

Analogamente, a quantidade total de quadrados  $z_n$  no nível  $n$  será dada pela soma das quantidades de novos quadrados do nível 1 até o nível  $n$ , isto é:

$$z_n = 3 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^n = 3 + 4 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} = 3 + 4 \cdot 2^{n-1} - 4 = 2^{n+1} - 1$$

Frisando-se que a área do triângulo A, de lados 3, 4 e 5, é dada por:  $3 \cdot 4 / 2 = 6$ , as áreas  $S_1$ ,  $S_2$ , e  $S_3$ , dos níveis 1, 2 e 3, para o Grupo 1, são a seguir calculadas:

$$S_1 = \frac{3 \cdot 4}{2} + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 6 + 9 + 16 + 25 = 56;$$

$$S_2 = S_1 + \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \left( \left( \frac{3}{5} \right)^{1-i} \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^i \right)^2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} \left( \frac{3^{2-i} \cdot 4^i}{5} \right)^2$$

$$\Rightarrow S_2 = 56 + \frac{54}{25} \cdot \sum_{i=0}^1 \binom{1}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i + \frac{81}{25} \cdot \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i$$

$$\Rightarrow S_2 = 56 + \frac{54}{25} \cdot \left( 1 + \frac{16}{9} \right) + \frac{81}{25} \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{16}{9} + \frac{16^2}{9^2} \right) = 56 + 6 + \frac{81}{25} + \frac{288}{25} + \frac{256}{25}$$

$$\Rightarrow S_2 = 62 + 25 = 87;$$

$$S_3 = S_2 + \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} \left( \left( \frac{3}{5} \right)^{2-i} \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^i \right)^2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \left( \frac{3^{3-i} \cdot 4^i}{5^2} \right)^2$$

$$\Rightarrow S_3 = 87 + \frac{486}{625} \cdot \sum_{i=0}^2 \binom{2}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i + \frac{729}{625} \cdot \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i$$

$$\Rightarrow S_3 = 87 + \frac{486}{625} \cdot \left( 1 + 2 \cdot \frac{16}{9} + \frac{16^2}{9^2} \right) + \frac{729}{625} \cdot \left( 1 + 3 \cdot \frac{16}{9} + 3 \cdot \frac{16^2}{9^2} + \frac{16^3}{9^3} \right)$$

$$\Rightarrow S_3 = 87 + \frac{486}{625} \cdot \left( \frac{81 + 288 + 256}{81} \right) + \frac{729}{625} \cdot \left( 1 + \frac{16}{3} + \frac{16^2}{27} + \frac{16^3}{729} \right)$$

$$\Rightarrow S_3 = 87 + 6 + \frac{729}{625} \cdot \left( \frac{3^6 + 3^5 \cdot 4^2 + 3^3 \cdot 4^4 + 4^6}{729} \right) = 93 + \frac{3^6 + 4^6 + 3^3 \cdot 4^2 (3^2 + 4^2)}{625}$$

$$\Rightarrow S_3 = 93 + \frac{3^6 + 4^6 + 3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^2}{625} = 93 + \frac{(3^2 + 4^2)(3^4 - 3^2 \cdot 4^2 + 4^4) + 3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^2}{625}$$

$$\Rightarrow S_3 = 93 + \frac{5^2 \cdot (3^4 - 3^2 \cdot 4^2 + 4^4) + 3^3 \cdot 4^2 \cdot 5^2}{625} = 93 + \frac{(3^4 - 3^2 \cdot 4^2 + 4^4) + 3^3 \cdot 4^2}{25}$$

$$\Rightarrow S_3 = 93 + \frac{3^4 + 2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 + 4^4}{25} = S_3 = 93 + \frac{(3^2 + 4^2)^2}{25} = 93 + 25 = 118.$$

De uma maneira geral, para o fractal do Grupo I, temos que a área total no nível  $n$  é dada pela seguinte recorrência:

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left( \left( \frac{3}{5} \right)^{n-1-i} \cdot \left( \frac{4}{5} \right)^i \right)^2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( \frac{3^{n-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}} \right)^2$$

$$\Rightarrow S_n = S_{n-1} + \frac{6 \cdot 3^{2n-2}}{5^{2n-2}} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i + \frac{3^{2n}}{5^{2n-2}} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i$$

$$\Rightarrow S_n = S_{n-1} + \frac{50}{3} \left( \frac{9}{25} \right)^n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i + 25 \cdot \left( \frac{9}{25} \right)^n \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left( \frac{16}{9} \right)^i (***)$$

Vamos tentar simplificar os somatórios:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\frac{16}{9}\right)^i &= \binom{n-1}{0} \left(\frac{16}{9}\right)^0 + \binom{n-1}{1} \left(\frac{16}{9}\right)^1 + \dots + \binom{n-1}{i} \left(\frac{16}{9}\right)^i + \dots + \binom{n-1}{n-1} \left(\frac{16}{9}\right)^{n-1} \\
 &= \binom{n-1}{0} \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^0 + \binom{n-1}{1} \cdot 1^{n-2} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^1 + \dots + \binom{n-1}{i} \cdot 1^{n-1-i} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^i + \dots + \\
 &+ \binom{n-1}{n-1} \cdot 1^0 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^{n-1} \\
 &= \left(1 + \frac{16}{9}\right)^{n-1} \\
 &= \left(\frac{25}{9}\right)^{n-1}; \\
 \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{16}{9}\right)^i &= \binom{n}{0} \left(\frac{16}{9}\right)^0 + \binom{n}{1} \left(\frac{16}{9}\right)^1 + \dots + \binom{n}{i} \left(\frac{16}{9}\right)^i + \dots + \binom{n}{n} \left(\frac{16}{9}\right)^n \\
 &= \binom{n}{0} \cdot 1^n \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^0 + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^1 + \dots + \binom{n}{i} \cdot 1^{n-i} \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^i + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^0 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^n \\
 &= \left(1 + \frac{16}{9}\right)^n \\
 &= \left(\frac{25}{9}\right)^n.
 \end{aligned}$$

Substituindo as expressões simplificadas dos somatórios acima em (\*\*), temos:

$$\begin{aligned}
 S_n &= S_{n-1} + \frac{50}{3} \left(\frac{9}{25}\right)^n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\frac{16}{9}\right)^i + 25 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^n \cdot \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left(\frac{16}{9}\right)^i \\
 \Rightarrow S_n &= S_{n-1} + \frac{50}{3} \left(\frac{9}{25}\right)^n \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^{n-1} + 25 \cdot \left(\frac{9}{25}\right)^n \cdot \left(\frac{25}{9}\right)^n \\
 \Rightarrow S_n &= S_{n-1} + \frac{50}{3} \frac{9}{25} + 25 \\
 \Rightarrow S_n &= S_{n-1} + 6 + 25 \\
 \Rightarrow S_n &= S_{n-1} + 31.
 \end{aligned}$$

Sendo  $S_1 = 56$ , resolvendo a recorrência acima, temos:

$$\begin{cases} S_2 = S_1 + 31 \\ S_3 = S_2 + 31 \\ \vdots \\ S_n = S_{n-1} + 31 \end{cases} +$$

$$\begin{aligned}
 S_n &= S_1 + 31(n-1) \\
 \Rightarrow S_n &= 56 + 31(n-1) \\
 \Rightarrow S_n &= 31n + 25.
 \end{aligned}$$

Natural seria calculássemos as áreas dos fractais níveis 1, 2 e 3, para posteriormente conjecturar para o nível  $n$ ; mas, como temos as quantidades de quadrados e triângulos no nível  $n$ , bem como suas dimensões, podemos calcular a área  $A_n$  dos novos triângulos e quadrados do nível  $n$ , a área total  $S_n$  no nível  $n$ , e descobrir a área para  $n = 1, 2, 3$ :

Grupo II: no nível  $n$ , os  $2^{n-1}$  novos triângulos de lados  $\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$ ,  $\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$  e  $\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-3}}$ , que são semelhantes aos triângulos dos níveis anteriores, notadamente o triângulo do nível 1, retângulo e isósceles, de lados  $3\sqrt{2}$ ,  $3\sqrt{2}$ , 6. Assim, os catetos dos novos triângulos do nível  $n$  são os lados de medidas  $\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$ . Há ainda  $2^n$  novos quadrados de lado  $\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$ , e assim a área  $A_n$  dos novos triângulos e quadrados do nível  $n$  (para  $n \neq 1$ ) será dada por:

$$\begin{aligned} A_n &= 2^{n-1} \cdot \frac{\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}} \cdot \frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}}{2} + 2^n \cdot \left( \frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}} \right)^2 \\ &= \left( \frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}} \right)^2 \cdot (2^{n-2} + 2^n) \\ &= \frac{9}{2^{n-2}} \cdot (2^{n-2} + 4 \cdot 2^{n-2}) \\ &= 45 \end{aligned}$$

Fizemos a restrição  $n \neq 1$  porque nos outros níveis os novos quadrados têm medidas  $\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$ , mas no primeiro nível há os dois quadrados dessa medida, e *um quadrado a mais*, de lado 6. Deste modo, a área total  $S_n$  do fractal no nível  $n$  será dada por:

$$S_n = 6^2 + \sum_{i=1}^n (45) = 36 + 45n$$

Logo:

$$S_1 = 36 + 45 \cdot 1 = 81;$$

$$S_2 = 36 + 45 \cdot 2 = 126;$$

$$S_3 = 36 + 45 \cdot 3 = 171.$$

Grupo III: no nível  $n$ , os  $2^{n-1}$  novos triângulos de lados  $\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}$ ,  $\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}$  e

$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-2}}$  são semelhantes aos triângulos dos níveis anteriores, notadamente o triângulo

do nível 1, de lados 4, 4,  $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ . Encontremos o ângulo obtuso  $\alpha$  do triângulo do nível 1, que também ocorrerá no nível  $n$ , entre os lados iguais:

$$\begin{aligned} \left(4\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 &= 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \alpha \\ \Rightarrow 1 - \cos \alpha &= \frac{16 \cdot (2 + \sqrt{3})}{2 \cdot 4^2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \cos \alpha &= 1 - \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \Rightarrow \alpha &= 150^\circ. \end{aligned}$$

Há ainda  $2^n$  novos quadrados de lado  $\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$ , e assim a área  $A_n$  dos novos triângulos e quadrados do nível  $n$  (para  $n \neq 1$ ) será dada por:

$$\begin{aligned} A_n &= 2^{n-1} \cdot \frac{\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}} \cdot \frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}} \cdot \text{sen}150^\circ}{2} + 2^n \cdot \left(\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}\right)^2 \cdot \left(\frac{2^{n-1}}{4} + 2^n\right) \\ &= \frac{16}{(2+\sqrt{3})^{n-1}} \cdot \left(\frac{2^{n-1}}{4} + 2 \cdot 2^{n-1}\right) \\ &= \frac{16}{(2+\sqrt{3})^{n-1}} \cdot \frac{9}{4} \cdot 2^{n-1} \\ &= 36 \cdot \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1}. \end{aligned}$$

Fizemos a restrição  $n \neq 1$  porque nos outros níveis os novos quadrados têm medidas  $\frac{4}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1}}$ , mas no primeiro nível há os dois quadrados dessa medida, e *um quadrado a mais*, de lado  $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$ . Deste modo, a área total  $S_n$  do fractal no nível  $n$  será dada por:

$$\begin{aligned}
 S_n &= \left(4\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(36 \cdot \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1}\right) = 16(2+\sqrt{3}) + 36 \cdot \frac{\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^n - 1}{\frac{2}{2+\sqrt{3}} - 1} \\
 \Rightarrow S_n &= 32 + 16\sqrt{3} + 36 \cdot \frac{\left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^n - 1}{\frac{2-2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} \\
 \Rightarrow S_n &= 32 + 16\sqrt{3} - 36 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^n + 36 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\
 \Rightarrow S_n &= 32 + 16\sqrt{3} + 36 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3} + 36 - 36 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^n \\
 \Rightarrow S_n &= 68 + 40\sqrt{3} - 36 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2}{2+\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} \\
 \Rightarrow S_n &= 68 + 40\sqrt{3} - 24\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{n-1} \\
 \Rightarrow S_n &= 68 + 40\sqrt{3} - 24\sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot (2-\sqrt{3})\right)^{n-1}
 \end{aligned}$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= 68 + 40\sqrt{3} - 24\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2}{2+\sqrt{3}}\right)^{1-1} = 68 + 16\sqrt{3} \cong 95,71; \\
 S_2 &= 68 + 40\sqrt{3} - 24\sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot (2-\sqrt{3})\right)^{2-1} = 68 + 40\sqrt{3} - 96\sqrt{3} + 144 \\
 \Rightarrow S_2 &= 212 - 56\sqrt{3} \cong 115,01; \\
 S_3 &= 68 + 40\sqrt{3} - 24\sqrt{3} \cdot \left(2 \cdot (2-\sqrt{3})\right)^{3-1} = 68 + 40\sqrt{3} - 96\sqrt{3} \cdot (4 - 4\sqrt{3} + 3) \\
 \Rightarrow S_3 &= 1220 - 632\sqrt{3} \cong 125,34.
 \end{aligned}$$

Grupo IV: todos os triângulos e quadrados são polígonos regulares de lado 5. Então, no nível  $n$ , temos ao todo  $2^n - 1$  triângulos equiláteros e  $2^{n+1} - 1$  quadrados de lado 5, e assim a área total  $S_n$  no nível  $n$  será dada por:



$$\begin{aligned}
 S_n &= (2^n - 1) \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot \text{sen}60^\circ}{2} + (2^{n+1} - 1) \cdot 5^2 \\
 &= (2^n - 1) \cdot \frac{5 \cdot 5 \cdot \text{sen}60^\circ}{2} + (2 \cdot 2^n - 1) \cdot 5^2 \\
 &= 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 2 \right) \cdot 2^n - 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) \\
 &= 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 + 1 \right) \cdot 2^n - 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) \\
 &= 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) (2^n - 1) + 25 \cdot 2^n
 \end{aligned}$$

Logo:

$$S_1 = 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) (2^1 - 1) + 25 \cdot 2^1 = 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) + 50 = 75 + 25 \frac{\sqrt{3}}{4} \cong 85,83;$$

$$S_2 = 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) (2^2 - 1) + 25 \cdot 2^2 = 75 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) + 100 = 175 + 75 \frac{\sqrt{3}}{4} \cong 207,48;$$

$$S_3 = 25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) (2^3 - 1) + 25 \cdot 2^3 = 175 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) + 200 = 375 + 175 \frac{\sqrt{3}}{4} \cong 450,78.$$

Reunimos abaixo as áreas encontradas:

Tabela 18: áreas dos fractais Árvore Pitagórica, nos níveis 0, 1, 2, 3 e n.

Nível	Grupo	Área total ( $S_i$ )
1	I	56
	II	81
	III	$68 + 16\sqrt{3} \cong 95,71$
	IV	$75 + 25\sqrt{3}/4 \cong 85,83$
2	I	87
	II	126
	III	$212 - 56\sqrt{3} \cong 115,01$
	IV	$175 + 75\sqrt{3}/4 \cong 207,48$
3	I	118
	II	171
	III	$1220 - 632\sqrt{3} \cong 125,34$
	IV	$375 + 175\sqrt{3}/4 \cong 450,78$
⋮	⋮	⋮
n	I	$31n + 25$
	II	$36 + 45n$
	III	$68 + 40\sqrt{3} - 24\sqrt{3} \cdot (2 \cdot (2 - \sqrt{3}))^{n-1}$
	IV	$25 \cdot \left( \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \right) (2^n - 1) + 25 \cdot 2^n$

Fonte: autor.

Como as áreas são dadas por funções exponenciais ou afins, seus limites são infinitos no fractal propriamente dito, quando temos uma quantidade  $n$  infinita de níveis.

Para calcularmos as dimensões fractais dos quatro grupos, consolidamos abaixo os dados já obtidos que facilitarão esse cálculo:

**Tabela 19: quantidades e fatores de redução de novos triângulos e quadrados, nos níveis 0, 1, 2, 3 e  $n$  dos fractais Árvore Pitagórica.**

	Grupo	Nível					Tamanho dos novos triângulos no $n$ -ésimo nível
		1	2	3	...	$n$	
Quantidade de novos Triângulos	I, II, III, e IV	1	2	4	...	$2^{n-1}$	
Fator de redução $r$ dos lados dos novos Triângulos e dos novos Quadrados	I	3/5 e 4/5; média: 7/10					$\frac{3^{n-1-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}$
	II	$\frac{1}{\sqrt{2}}$					$\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}$
	III	$\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$					$\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}$
	IV	1					5
Quantidade de novos Quadrados	I, II, III, e IV	3	4	8	...	$2^n, n \neq 1$	

Fonte: autor.

Grosso modo, a quantidade de triângulos e quadrados dobra a cada passagem de nível, e diminui num fator  $r$ , o que nos fornece os valores abaixo para as Dimensões Fractais,

que são dadas por  $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$ :

$$D_I = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{7/10}} = \frac{\log 2}{\log \frac{10}{7}} = \frac{\log 2}{1 - \log 7} \cong 1,943;$$

$$D_{II} = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1/\sqrt{2}}} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2} \log 2} = 2;$$

$$D_{III} = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1/\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2} \log (2+\sqrt{3})} = 2 \cdot \frac{\log 2}{\log (2+\sqrt{3})} \cong 1,053;$$

A dimensão fractal da árvore pitagórica equilátera não poderá ser avaliada pela fórmula acima adotada, dada a impossibilidade de divisão por zero, visto que nela o fator é 1, e o  $\log 1 = 0$ . Temos que acrescentar, ainda, a seguinte informação: no fractal do Grupo I, correspondente à árvore pitagórica retangular fundamental, no  $n$ -ésimo nível há  $2^{n-1}$  novos triângulos, de tamanho  $\frac{3^{n-1-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}$ , com  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ , e  $2^n$  novos quadrados, de tamanho  $\frac{3^{n-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}$ , com  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Então, o tamanho médio  $r_I$  das figuras novas no  $n$ -ésimo nível

será dado por:

$$\begin{aligned}
 r_I &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{3^{n-1-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}} + \sum_{i=0}^n \frac{3^{n-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}}{2^{n-1} + 2^n} = \frac{\frac{3^{n-1}}{5^{n-1}} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{4}{3}\right)^i + \frac{3^n}{5^{n-1}} \cdot \sum_{i=0}^n \left(\frac{4}{3}\right)^i}{2^{n-1} + 2^n} \\
 &= \frac{\frac{3^{n-1}}{5^{n-1}} \cdot 1 \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1}{\frac{4}{3} - 1} + \frac{3^n}{5^{n-1}} \cdot 1 \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{4}{3} - 1}}{2^{n-1} + 2^n} \\
 &\Rightarrow r_I = \frac{\frac{3^{n-1}}{5^{n-1}} \cdot 3 \cdot \left[\left(\frac{4}{3}\right)^n - 1\right] + \frac{3^n}{5^{n-1}} \cdot 3 \cdot \left[\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1\right]}{2^{n-1} + 2^n} = \frac{\frac{4^n}{5^{n-1}} - \frac{3^n}{5^{n-1}} + \frac{4^{n+1}}{5^{n-1}} - \frac{3^{n+1}}{5^{n-1}}}{2^{n-1} + 2^n} \\
 &\Rightarrow r_I = \frac{5 \cdot \frac{4^n}{5^{n-1}} - 4 \cdot \frac{3^n}{5^{n-1}}}{2^{n-1} + 2^n} = \frac{5 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n}{5^{n-1} \cdot (2^{n-1} + 2^n)} = \frac{5 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n}{5^{n-1} \cdot (2^{n-1} + 2 \cdot 2^{n-1})} = \frac{5 \cdot 4^n - 4 \cdot 3^n}{3 \cdot 10^{n-1}} \\
 &\Rightarrow r_I = \frac{20}{3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} - 4 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Observemos ainda que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_I = 0$  e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r_I} = \infty$ .

Calculando as dimensões fractais usando os limites nos fractais propriamente ditos, temos:

$$\begin{aligned}
 D_I &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n + 2^{n-1})}{\log \frac{1}{r_I}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1})}{\log \frac{1}{r_I}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3 \cdot 2^{n-1})}{\log \frac{1}{r_I}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + \log 2^{n-1}}{\log \frac{1}{r_I}} \\
 &\Rightarrow D_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 - \log 2 + n \cdot \log 2}{\log(1/r_I)}.
 \end{aligned}$$

Como numerador e denominador tendem a infinito no limite acima, então aplicando a regra de L'Hôpital, temos:

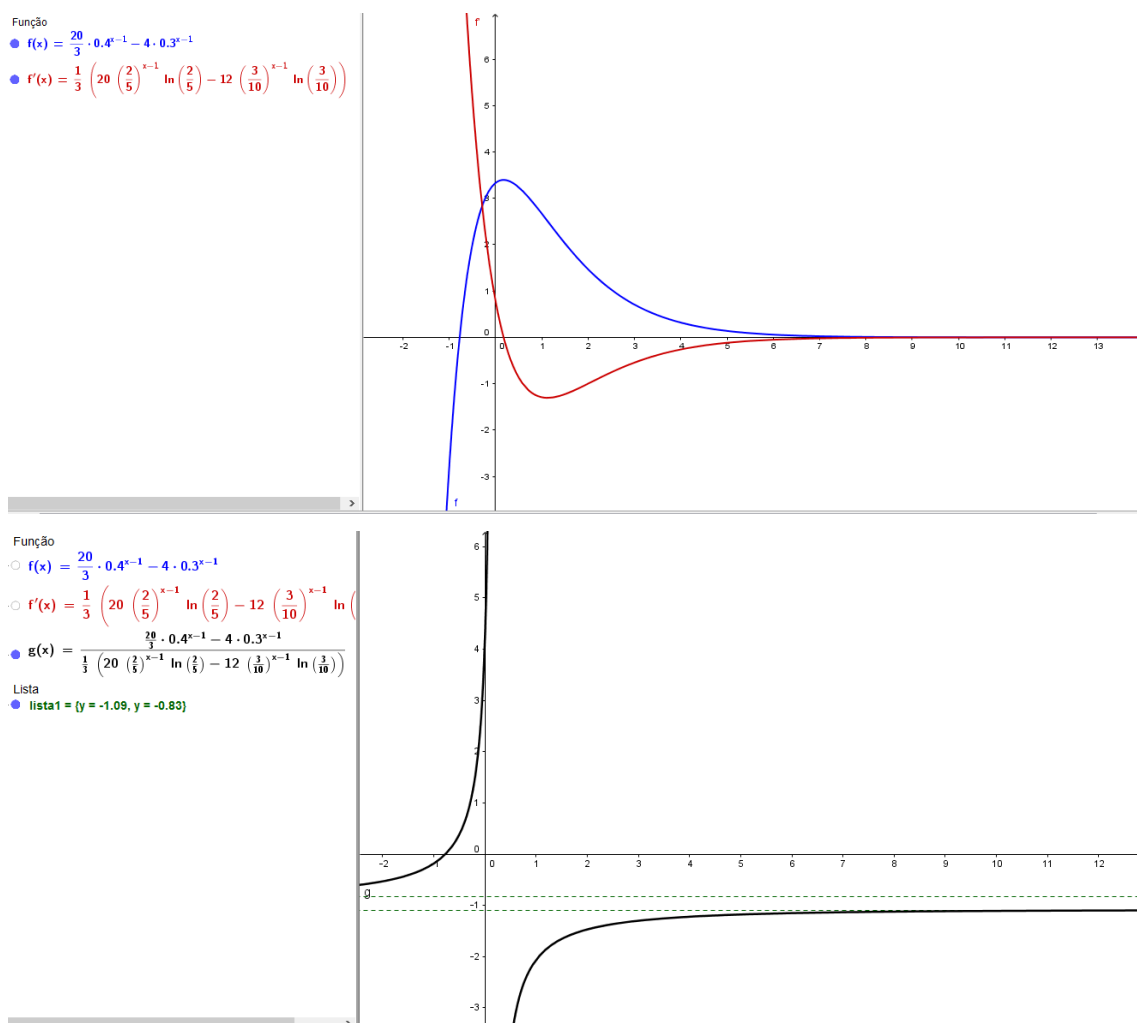
$$D_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 - \log 2 + n \cdot \log 2}{\log(1/r_I)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dn}(\log 3 - \log 2 + n \cdot \log 2)}{\frac{d}{dn}\left(\log \frac{1}{r_I}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\frac{d}{dn}\left(\frac{\ln(1/r_I)}{\ln 10}\right)}$$

$$\Rightarrow D_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{r_I \cdot \frac{-r'_I}{r_I^2} \cdot \frac{1}{\ln 10}} = -\ln 10 \cdot \log 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_I}{r'_I}.$$

Embora o quociente do limite acima também possibilite o uso da regra de L'Hôpital, como se tratam de funções exponenciais de base diferente de  $e$ , o uso dessa regra acaba por aumentar cada vez mais a expressão. Vejamos o comportamento gráfico da função

$$\frac{r_I}{r'_I}:$$

Figura 84 – Gráficos das funções  $r$ ,  $r'$ ,  $r/r'$  e suas assíntotas.



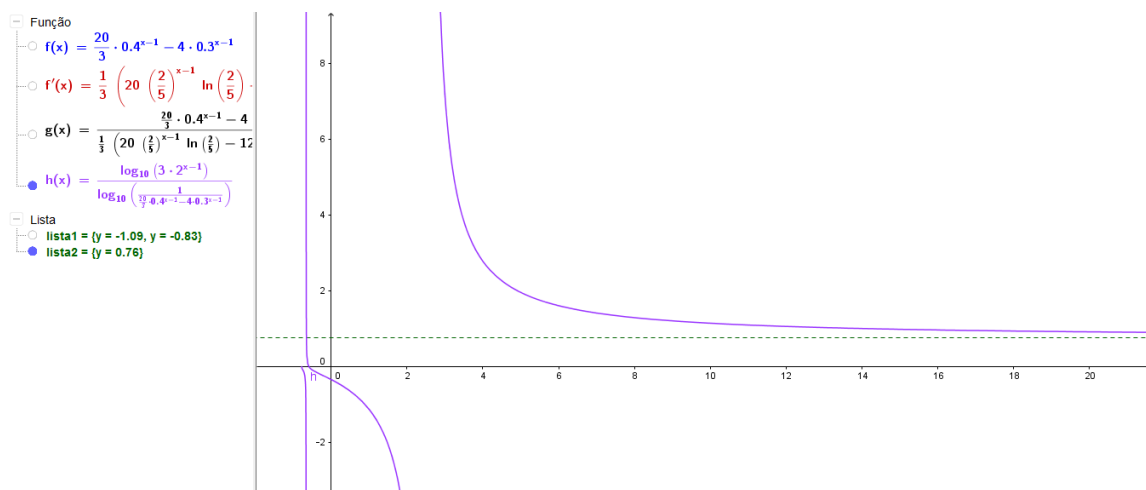
Fonte: autor.

Pelos gráficos, vemos que o gráfico da função  $g(x) = r_1 / r_1'$  possui duas assíntotas, para o  $-\infty$  e para o  $\infty$ , sendo este que nos interessa. Como apresenta o gráfico,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1}{r_1'} \cong -1,09$ , e, desta forma, calculemos finalmente a dimensão fractal da Árvore Pitagórica Fundamental:

$$D_f = -\ln 10 \cdot \log 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_1}{r_1'} \cong -\ln 10 \cdot \log 2 \cdot (-1,09) \cong 0,76.$$

Graficamente, a resposta acima coincide com o limite inicial para o cálculo de  $D_f$ :

Figura 85a – Gráfico da função  $\frac{\log(2^n + 2^{n-1})}{\log \frac{1}{r_1}}$  e sua assíntota  $y = 0,76$ .



Fonte: autor.

Como a cada novo nível as figuras que aparecem nas extremidades são os quadrados, podemos fazer esse cálculo somente para eles: no  $n$ -ésimo nível, há  $2^n$  novos quadrados, de tamanho  $\frac{3^{n-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}$ , com  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Então, o tamanho médio  $t_1$  dos quadrados novos no  $n$ -ésimo nível será dado por:

$$t_1 = \frac{\sum_{i=0}^n \frac{3^{n-i} \cdot 4^i}{5^{n-1}}}{2^n} = \frac{3^n}{5^{n-1}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^n \left(\frac{4}{3}\right)^i}{2^n} = \frac{3^n}{5^{n-1}} \cdot 1 \cdot \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{4}{3} - 1} = \frac{3^n}{5^{n-1}} \cdot 3 \cdot \left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} - 1}{2^n}\right]$$

$$\Rightarrow t_1 = \frac{4^{n+1}}{5^{n-1}} - \frac{3^{n+1}}{5^{n-1}} = \frac{16 \cdot 4^{n-1} - 9 \cdot 3^{n-1}}{2 \cdot 10^{n-1}} = 8 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} - \frac{9}{2} \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^{n-1}.$$

Observemos ainda que  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_I = 0$  e que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{t_I} = \infty$ .

Calculando as dimensões fractais usando os limites nos fractais propriamente ditos, temos:

$$D_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log \frac{1}{t_I}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log(2)}{\log \frac{1}{t_I}}$$

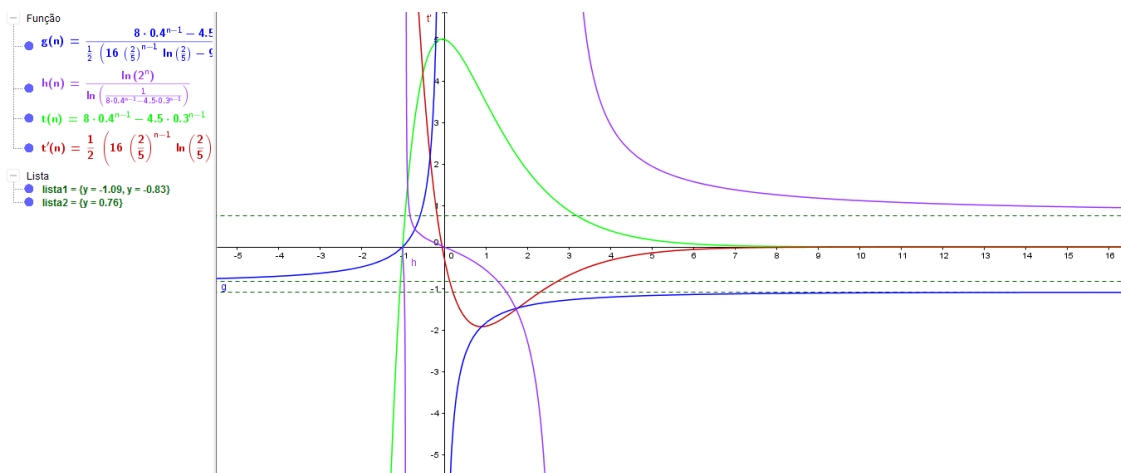
Como numerador e denominador tendem a infinito no limite acima, então aplicando a regra de L'Hôpital, temos:

$$D_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \log 2}{\log(1/t_I)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dn}(n \cdot \log 2)}{\frac{d}{dn}\left(\log \frac{1}{t_I}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\frac{d}{dn}\left(\frac{\ln(1/t_I)}{\ln 10}\right)}$$

$$\Rightarrow D_I = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{t_I \cdot \frac{-t_I'}{t_I^2} \cdot \frac{1}{\ln 10}} = -\ln 10 \cdot \log 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_I}{t_I'}$$

Embora o quociente do limite acima também possibilite o uso da regra de L'Hôpital, como se tratam de funções exponenciais de base diferente de  $e$ , o uso dessa regra acaba por aumentar cada vez mais a expressão. Observando o comportamento gráfico da função  $\frac{t_I}{t_I'}$ , concluiremos que a dimensão fractal será idêntica à calculada anteriormente.

Figura 85b – Gráficos das funções  $t_b$ ,  $t_I'$ ,  $t_I/t_I'$ ,  $\frac{\log(2^n)}{\log \frac{1}{t_I}}$  e suas assíntotas quando  $n \rightarrow \infty$ .



Fonte: autor.

Seguem os cálculos das dimensões fractais dos Grupos II e III, lembrando que no quarto grupo não tem fator de redução com a passagem de níveis de criação do fractal, o que impossibilita o cálculo de sua dimensão fractal pela definição, devido à impossibilidade de divisão por 0.

$$D_{II} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n + 2^{n-1})}{\log \frac{1}{\frac{3}{(\sqrt{2})^{n-2}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1})}{\log \frac{(\sqrt{2})^{n-2}}{3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3 \cdot 2^{n-1})}{\log(\sqrt{2})^{n-2} - \log 3}$$

$$\Rightarrow D_{II} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + (n-1)\log 2}{(n-2)\log \sqrt{2} - \log 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2 + \log 3 - \log 2}{n \log \sqrt{2} - 2 \log \sqrt{2} - \log 3}$$

$$\Rightarrow D_{II} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2 + \frac{\log 3}{n} - \frac{\log 2}{n}}{\log \sqrt{2} - \frac{2 \log \sqrt{2}}{n} - \frac{\log 3}{n}} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2} \log 2} = 2;$$

$$D_{III} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n + 2^{n-1})}{\log \frac{1}{\frac{4}{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2 \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1})}{\log \frac{(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1}}{4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3 \cdot 2^{n-1})}{\log(\sqrt{2+\sqrt{3}})^{n-1} - \log 4}$$

$$\Rightarrow D_{III} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 3 + (n-1)\log 2}{(n-1)\log \sqrt{2+\sqrt{3}} - \log 4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2 + \frac{\log 3}{n-1}}{\log \sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{\log 4}{n-1}} = \frac{\log 2}{\log \sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow D_{III} = \frac{\log 2}{\frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3})} = 2 \cdot \frac{\log 2}{\log(2+\sqrt{3})} \cong 1,053;$$

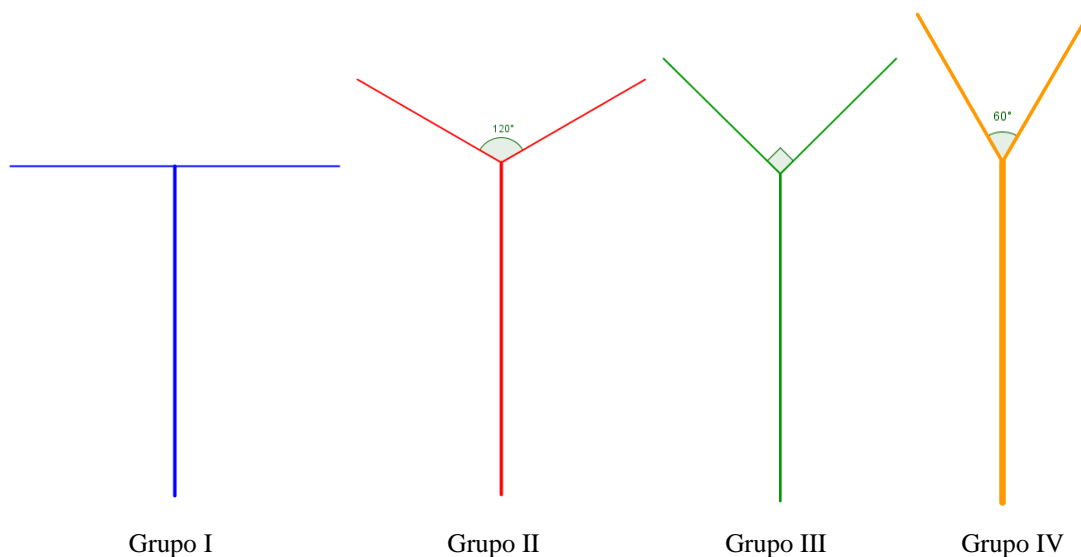
### Atividade 12 – Construção do Fractal *Árvore Bifurcada*

Nesta atividade, recomenda-se dividir a turma de alunos em quatro grupos, que construirão árvores bifurcadas distintas: I – árvore bifurcada de 180°, II – árvore bifurcada de 120°, III – árvore bifurcada de 90°, e IV – árvore bifurcada de 60°. Em todas elas, adotaremos a escala de redução de 1/2. Denotemos por  $\alpha$  esses ângulos acima, sendo um valor para cada grupo.

a) Trace um segmento vertical de comprimento igual a 16 cm de preferência num papel A3 quadriculado;

b) De cada novo segmento sairão dois segmentos de comprimento igual à metade do comprimento do segmento originário, e formarão entre si um ângulo  $\alpha$ . Percebamos que a reta que contém o segmento originário corresponde à bissetriz dos dois novos segmentos, conforme figura abaixo:

Figura 86 – Níveis 1.



Fonte: autor.

Obs.: é interessante também que os novos segmentos sejam menos espessos que os anteriores.

- c) Repita os procedimentos do item anterior, e obtenha o nível 2 do fractal, e posteriormente os níveis 3 e 4.
- d) Determine a quantidade e os comprimentos dos segmentos nos níveis 0, 1, 2, 3 e 4;
- e) Determine os perímetros nos níveis 0, 1, 2, 3 e 4;
- f) DESAFIO 1: Calcule a quantidade total de segmentos, a quantidade de novos segmentos e o perímetro da figura no nível  $n$ ;
- g) DESAFIO 2: Determine a dimensão fractal de sua respectiva árvore bifurcada.

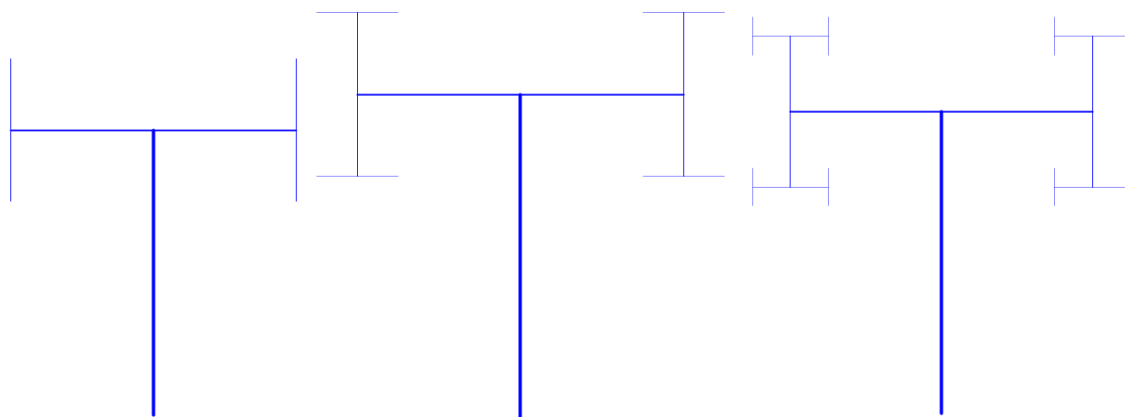
Segue sugestão ao professor para análise da Atividade 12, a qual chamamos *soluções*:

### Soluções da atividade 12

Os alunos deverão encontrar os níveis 2, 3 e 4 próximos a como se apresentam na figura abaixo:

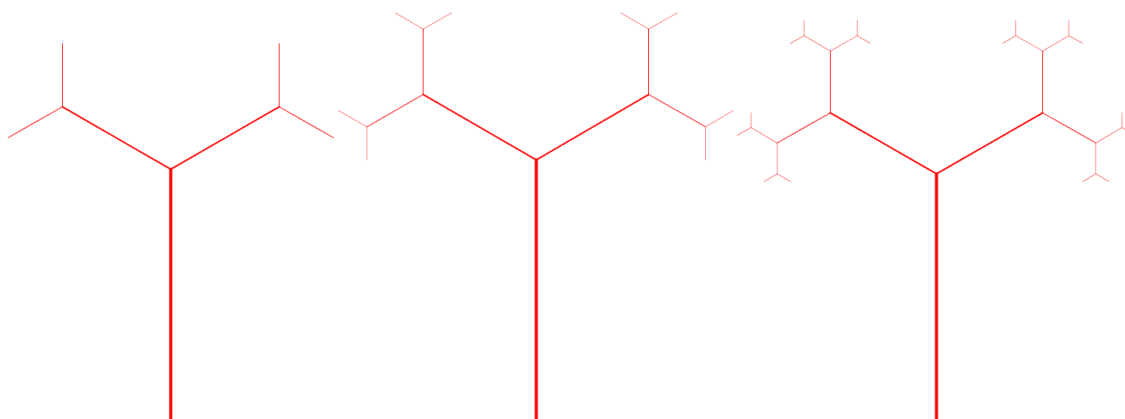


Figura 87a – Níveis 2, 3 e 4, do Grupo I.



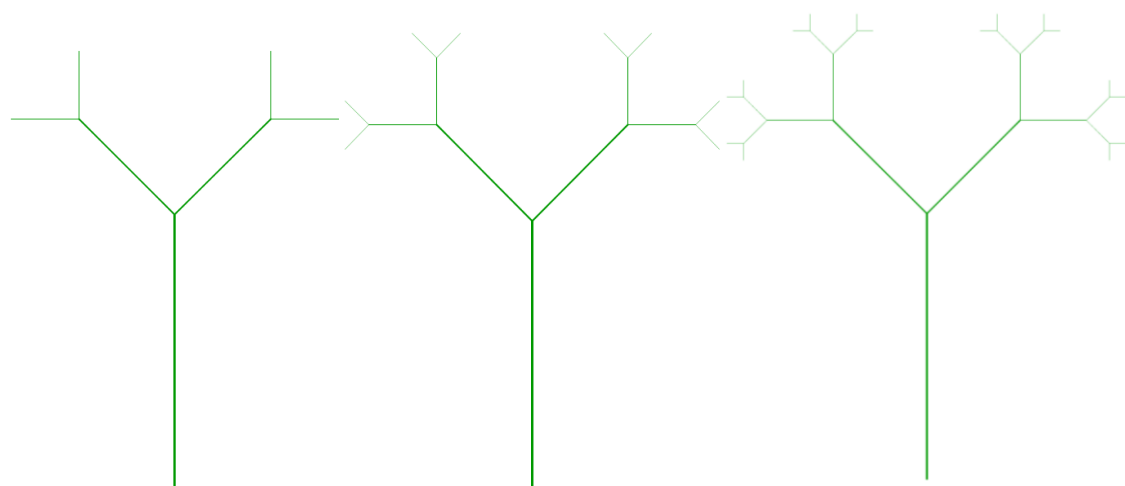
Fonte: autor.

Figura 87b – Níveis 2, 3 e 4, do Grupo II.



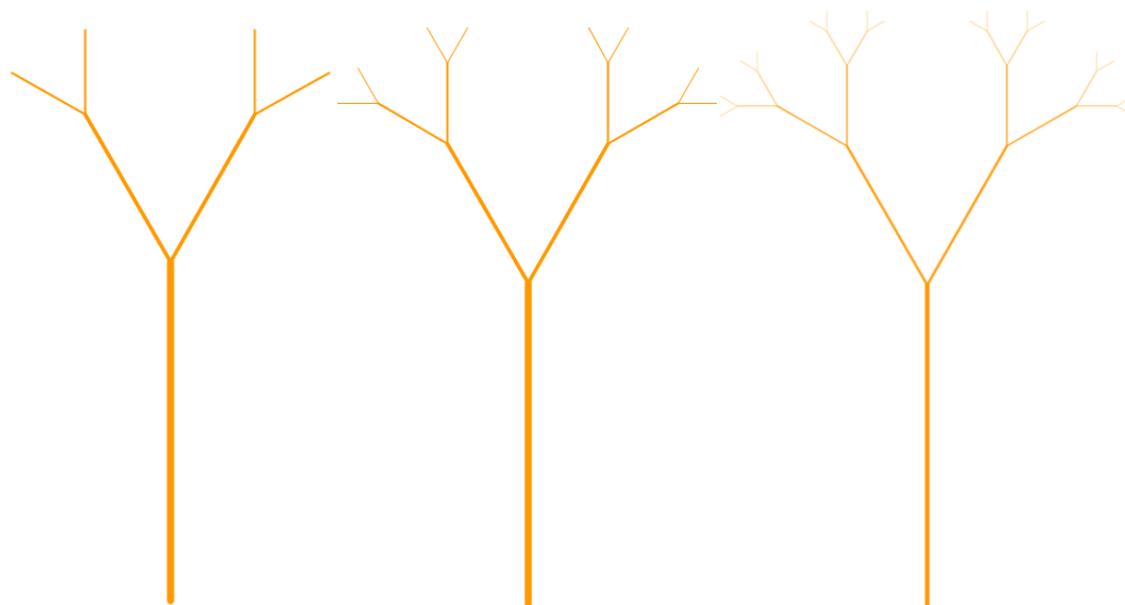
Fonte: autor.

Figura 87c – Níveis 2, 3 e 4, do Grupo III.



Fonte: autor.

Figura 87d – Níveis 2, 3 e 4, do Grupo IV.



Fonte: autor.

Devemos observar que as árvores dos quatro grupos se alteram entre si somente com base no ângulo entre os segmentos, sendo idênticos: a) as quantidades de segmentos num dado nível, e b) o tamanho dos segmentos num dado nível. Assim, seguem abaixo as quantidades e os comprimentos dos segmentos nos níveis 0, 1, 2, 3 e 4 dos quatro grupos, e conjectura para essas informações no  $n$ -ésimo nível do fractal, bem como os respectivos perímetros:

Tabela 20: quantidades, comprimentos e perímetros nos níveis 0, 1, 2, 3, 4 e  $n$  dos fractais *Árvore Bifurcada*.

Nível	Quantidade de novos segmentos ( $y_n$ )	Quantidade total de segmentos	Comprimento dos novos segmentos ( $x_n$ )	Comprimento dos novos segmentos ( $x_0 = 16$ )	Perímetros ( $P_n$ )	Perímetros ( $P_n$ ) ( $x_0 = 16$ )
0	1	1	$x_0$	16	$1. x_0 = x_0$	$1.16 = 16$
1	2	3	$x_0/2$	8	$x_0 + 2. x_0/2 = 2x_0$	$16 + 2.8 = 16 + 16 = 32 = 2.16$
2	4	7	$x_0/4$	4	$2x_0 + 4. x_0/4 = 3x_0$	$32 + 4.4 = 32 + 16 = 48 = 3.16$
3	8	15	$x_0/8$	2	$3x_0 + 8. x_0/8 = 4x_0$	$48 + 8.2 = 48 + 16 = 64 = 4.16$
4	16	31	$x_0/16$	1	$4x_0 + 16. x_0/16 = 5x_0$	$64 + 16.1 = 64 + 16 = 80 = 5.16$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n$	Conjectura: $2^n$	$z_n$	Conjectura: $x_0/2^n$	$\frac{16}{2^n} = 2^{4-n}$	Conjectura: $n.x_0 + 2^n. x_0/2^n = (n+1).x_0$	$P_{n-1} + 2^n \cdot \frac{16}{2^n}$ $= P_{n-1} + 16$

Fonte: autor.

Temos acima pelo menos quatro recorrências a serem resolvidas para comprovar as conjecturas feitas. Vemos que, de cada novo segmento de um nível  $n-1$ , serão originados dois novos segmentos no nível  $n$ , do que resulta a recorrência  $y_n = 2y_{n-1}$ , onde  $y_i$  é a quantidade de novos segmentos no nível  $i$ , e  $y_0 = 1$ . Já sabemos que recorrências do tipo  $y_n = a \cdot y_{n-1}$ , com  $a$  real, tem como solução  $y_n = a^n \cdot y_0$ . Portanto:

$$y_n = 2^n y_0 = 2^n.$$

Já a quantidade total de segmentos no nível  $i$ , denotada por  $z_i$ , é dada pela soma da quantidade de novos segmentos ( $y_i$ ) com a quantidade total de segmentos no nível anterior ( $z_{i-1}$ ), isto é:

$$z_i = y_i + z_{i-1} = z_{i-1} + 2^i.$$

Fazendo  $i$  variar de 1 até  $n$ , e sabendo que  $z_0 = 1$ , temos as seguintes equações, que deverão ser somadas:

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 + 2^1 \\ z_2 &= z_1 + 2^2 \\ z_3 &= z_2 + 2^3 + \\ &\vdots \\ z_n &= z_{n-1} + 2^n \end{aligned}$$

$$z_n + \sum_{i=1}^{n-1} z_i = z_0 + \sum_{i=1}^{n-1} z_i + \sum_{i=1}^n 2^i \Rightarrow z_n = z_0 + 2 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} \Rightarrow z_n = 1 + 2 \cdot (2^n - 1) \Rightarrow z_n = 2^{n+1} - 1$$

Já o comprimento de um novo segmento do nível  $n$ , denotado por  $x_n$ , é igual à metade do comprimento de um novo segmento do nível anterior ( $n-1$ ), denotado pela quantidade  $x_{n-1}$ , pois o fator de redução foi de  $1/2$ , conforme enunciado da atividade. Então, temos:

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2} \Rightarrow x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot x_0 = \frac{x_0}{2^n}.$$

Para  $x_0 = 16$ , teremos que:  $x_n = \frac{16}{2^n} = 2^{4-n}$ .

O perímetro no nível  $n$  da árvore bifurcada, denotado por  $P_n$ , corresponde ao perímetro do nível anterior ( $n-1$ ), denotado pela quantidade  $P_{n-1}$ , adicionado da soma dos comprimentos dos novos segmentos do nível  $n$ , no qual tem-se  $2^n$  novos segmentos de comprimento igual a  $x_0/2^n$ . Considerando ainda que  $P_0$  corresponde a  $x_0$ , medida do único segmento no nível 0, temos:

$$P_n = P_{n-1} + 2^n \cdot \frac{x_0}{2^n} \Rightarrow P_n = P_{n-1} + x_0 \Rightarrow P_n + \sum_{i=1}^{n-1} P_i = P_0 + \sum_{i=1}^{n-1} P_i + n \cdot x_0 \Rightarrow P_n = P_0 + n \cdot x_0$$

$$\Rightarrow P_n = x_0 + n \cdot x_0 \Rightarrow P_n = (n+1) \cdot x_0.$$

Para  $x_0 = 16$ , teremos que:  $P_n = (n+1) \cdot 16 = 16n + 16$ .

Quanto à dimensão fractal, os alunos poderão encontrá-la observando que a quantidade de segmentos aumenta num fator 2 a cada passagem de nível, e os seus comprimentos reduzem num fator 1/2. Segue daí que a dimensão fractal  $D$  do fractal *Árvores Bifurcadas*, para os quatro grupos, será:

$$D = \frac{\log 2}{\log \frac{1}{1/2}} = 1.$$

Lembrando que o fractal propriamente dito ocorrerá após infinitas iterações, numa aplicação um pouco mais avançada, baseando-se nas afirmações do nível  $n$ , no qual tem-se  $2^n$  novos segmentos com tamanho igual a  $x_0/2^n$ , temos que a dimensão fractal poderá assim ser calculada:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(2^n)}{\log \frac{1}{x_0/2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log 2}{n \log 2 - \log x_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{\log 2 - \frac{\log x_0}{n}} = \frac{\log 2}{\log 2} = 1.$$

## Considerações Finais

A geometria fractal configura-se num campo de inúmeras e inéditas possibilidades na Matemática em particular e na Ciência como um todo.

Conteúdo de considerada transversalidade, a Geometria Fractal parte da observação de certas regularidades das formas encontradas na natureza e se apropria de inúmeras ferramentas matemáticas e informacionais para explicar-lhes o funcionamento, como já vimos o estudo de sequências, recorrências, trigonometria, e principalmente geometria, sendo assim muito propício à revisão destes conteúdos pelo discente do PROFMAT, que aprofunda conhecimentos de matemática da educação básica e até mesmo do ensino superior, o que demanda dissertar sobre tema que agregue esses conhecimentos variados, que se realiza satisfatoriamente através do presente tema.

Os detalhes geométricos da Geometria Fractal são, por si só, de relevante contribuição, seja no ramo artístico ou na simplificação de formas naturais obtidas com transformações afins e o uso da informática. No entanto, esta contribuição se intensifica quando se alia à álgebra para desenvolver formas de grande apelo didático no ensino de matemática em qualquer nível, não somente na educação básica, foco do presente estudo, possuindo ainda inúmeras aplicações em outros ramos da ciência, como no estudo de ondas e interferências na física, ou nas estruturas fractais anatômicas dos seres vivos, do corpo humano inclusive.

No Ensino Médio, independente, portanto, da orientação profissional que o discente pretenda seguir, a Geometria Fractal abre-lhes um novo universo repleto de possibilidades,

onde pode colocar em prática procedimentos da matemática para os quais muitas vezes não enxerga utilidade. Daí o movimento importante por que tem passado o ensino de matemática em pelo menos nas últimas duas décadas: promover a contextualização dos conteúdos de matemática lecionados na educação básica, de forma a dotar o aluno de ferramentas efetivas para compreender o mundo em que vivemos, inclusive coincide com o entendimento do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, que apresenta matemática distante do algebrismo que a caracterizava décadas anteriores, mas que ainda precisa encontrar um modelo de prova ideal, que também prime pelos conteúdos em si, e não somente pela interpretação e contextualização, devendo chegar a um *meio-termo* conforme mais edições ocorram.

Segundo explorado no presente estudo e conforme consta também no anexo, o mundo em que vivemos está estreitamente ligado à Geometria Fractal, que podemos aceitar como *a geometria da natureza*, dada a complexidade das formas naturais e a consequente inadequação da geometria euclidiana em representar satisfatoriamente todas as suas reentrâncias e sinuosidades. Além disso, por tratar-se de área relativamente nova de estudo e pesquisa, teorizada e unificada por Mandelbrot há menos de meio século, inesgotam-se suas possibilidades de aplicação e novos exemplos e situações podem ser criados mudando-se apenas um parâmetro ou um pequeno elemento da regra de formação, revelando a multiplicidade do tema.

## Referências

- [1] ASSIS, T. A. de; et al. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. In: Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 2. São Paulo: SBF, 2008. p. 2304-01/10.
- [2] MICHEL, J. Geometria Fractal. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
- [3] DUARTE, F. L. S. Novas relações cordais em cantos religiosos populares católicos e a difusão fractal das mudanças decorrentes do Concílio Vaticano II. In: Anais do IV Simpósio Internacional de Musicologia. Pirenópolis: EMAC/UFG, 2014. p. 208-215. Disponível em: <[http://www.emac.ufg.br/up/269/o/Musicologia\\_2014\\_ANAIS.pdf](http://www.emac.ufg.br/up/269/o/Musicologia_2014_ANAIS.pdf)>. Último acesso em 01/10/2015.
- [4] SERRA, C. P.; et al. Fractais: propriedades e construção. Curitiba: UFPR, 2005. Disponível em: <<https://docs.ufpr.br/~ewkaras/ic/geralic2003.pdf>>. Último acesso em 25/02/2016.

[5] NUNES, R. S. R. Geometria fractal e aplicações. Dissertação de mestrado. Departamento de Matemática Pura. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, 2006.

[6] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar II. Matemática: Atividades de Apoio à Aprendizagem 5 – AAA5: diversidade cultural e meio ambiente: de estratégias de contagem às propriedades geométricas (Versão do Aluno). Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2008.

Disponível em:

<[http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_docman&view=download&alias=490-atividade-de-apoio-a-aprendizagem-5-aluno&Itemid=30192](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=490-atividade-de-apoio-a-aprendizagem-5-aluno&Itemid=30192)>.

Último acesso em 23/12/2015.

[7] BARBOSA, R. M. Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2005. 3ª. Ed.

[8] PIMENTEL, H; URBAN, P. Fractais da História: A humanidade no caleidoscópio. São Paulo: Madras, 2003.

[9] RIGOLON, R. G. O conceito e o uso de analogias como recurso didático por licenciandos de Biologia. Dissertação de mestrado. Maringá: Universidade Estadual de Maringá, 2008.

Disponível em:

<<http://cienciaematematica.vivawebinternet.com.br/media/dissertacoes/b69c927b373e216.pdf>>.

Último acesso em 15/12/2015.

[10] LAPEYRE, J. Dynamics. Barcelona, 2008.

Disponível em:

<[http://www.johnlapeyre.com/qinf/qinf\\_html/maxima\\_html/maxima\\_49.html](http://www.johnlapeyre.com/qinf/qinf_html/maxima_html/maxima_49.html)>.

Último acesso em 18/11/2015.

[11] BATTY, M.; LONGLEY, P. Fractal Cities: A Geometry of Form and Function. San Diego, Londres: Academic Press, 1994.



Disponível em:

<<http://www.fractalcities.org/book/Fractal%20Cities%20High%20Resolution.pdf>>.

Último acesso em 29/12/2015.

[12] GOOGLE EARTH. Vista aérea da cidade de Palmanova. Último acesso em 29/12/2015.

[13] PADILHA, T. A. F.; DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. Construção de fractais com uso do software Geogebra. Relatório de Experimento. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas – PPGECE/UNIVATES, 2012.

Disponível em:

<<https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/Construcao-de-fractais-com-uso-do-software-geogebra.pdf>>.

Último acesso em 22/09/2015.

[14] ARITA, A. C. P.; SILVA, F. S. M. da; GAMBERA, L. R. A geometria da Esponja de Menger. In: C.Q.D - Revista Eletrônica Paulista de Matemática, v. 2, n. 2. Bauru: UNESP, 2008. 8p.

Disponível em: <[http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2n2/v2n2\\_art7.pdf](http://www2.fc.unesp.br/revistacqd/v2n2/v2n2_art7.pdf)>.

Último acesso em 22/09/2015.

[15] OSLER, T. J. A quick look at Lyapunov space. Mathematics and Computer Education. Department of Mathematics: Rowan University of New Jersey, 1994. pp. 183-197.

Disponível em:

<<http://www.rowan.edu/colleges/csm/departments/math/facultystaff/osler/15.%20A%20quick%20look%20at%20Lyapunov%20space.pdf>>.

Último acesso em 22/09/2015.

[16] FRAME, M. Levy flights. Yale University, s/d.

Disponível em:

<[http://users.math.yale.edu/public\\_html/People/frame/Fractals/RandFrac/Levy/Levy.html](http://users.math.yale.edu/public_html/People/frame/Fractals/RandFrac/Levy/Levy.html)>.

Último acesso em 25/02/2016.

[17] GUIMARÃES, M. Trajetos ao acaso. Revista Pesquisa FAPESP. São Paulo: FAPESP, 2009. Disponível em: <<http://revistapesquisa.fapesp.br/wp-content/uploads/2009/07/Trajetos-ao-acaso.pdf>>. Último acesso em 25/02/2016.

[18] DACEY, J. Sharks hunt via Lévy flights. In: physicsworld.com. Bristol, Inglaterra, 2010. Disponível em:  
<<http://physicsworld.com/cws/article/news/2010/jun/11/sharks-hunt-via-levy-flights>>.  
Último acesso em 25/02/2016.

[19] SOUZA, D. K. de. Estimação de parâmetros por Busca de Cuco via Voos de Lévy. Dissertação do Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Curitiba: UFPR, 2014. Disponível em:  
<<http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/bitstream/handle/1884/37084/R%20-%20D%20-%20DANIEL%20KAMINSKI%20DE%20SOUZA.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>.  
Último acesso em 25/02/2016.

[20] POLLOCK, J. Number 14 (Gray), 1948 by Jackson Pollock. s/l, 2011. Disponível em: <<http://www.jackson-pollock.org/number-14-gray.jsp>>.  
Último acesso em 25/02/2016.

[21] CHECHKIN, A. V. et al. Introduction to the Theory of Lévy Flights. Berlim: ResearchGate, 2008. Disponível em:  
<[https://www.researchgate.net/publication/228030356\\_Introduction\\_to\\_the\\_Theory\\_of\\_Levy\\_Flights](https://www.researchgate.net/publication/228030356_Introduction_to_the_Theory_of_Levy_Flights)>.  
Último acesso em 25/02/2016.

[22] PORTELLA, M. Fractais na natureza - parte II. Ponte Nova-MG, 2010. Disponível em:  
<[http://deumtudo2.blogspot.com.br/2009/09/fractais-na-natureza-parte-ii\\_12.html](http://deumtudo2.blogspot.com.br/2009/09/fractais-na-natureza-parte-ii_12.html)>.  
Último acesso em 17/01/2016.

# Anexo

Figura 88a – Imagens de elementos da natureza.



Fonte: [22].

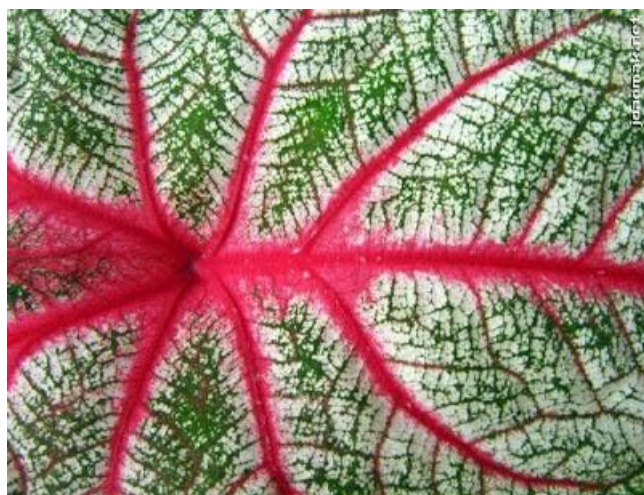
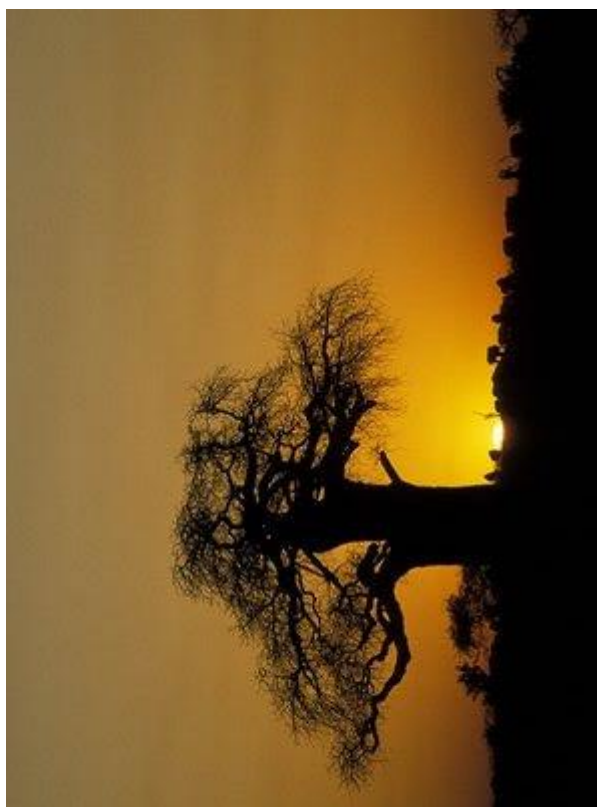
Figura 88b – Imagens de elementos da natureza.



Fonte: [22].

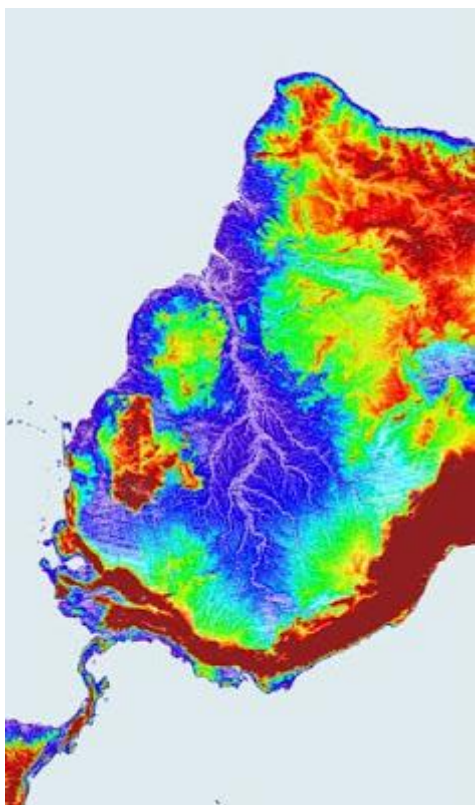


Figura 88c – Imagens de elementos da natureza.



Fonte: [22].

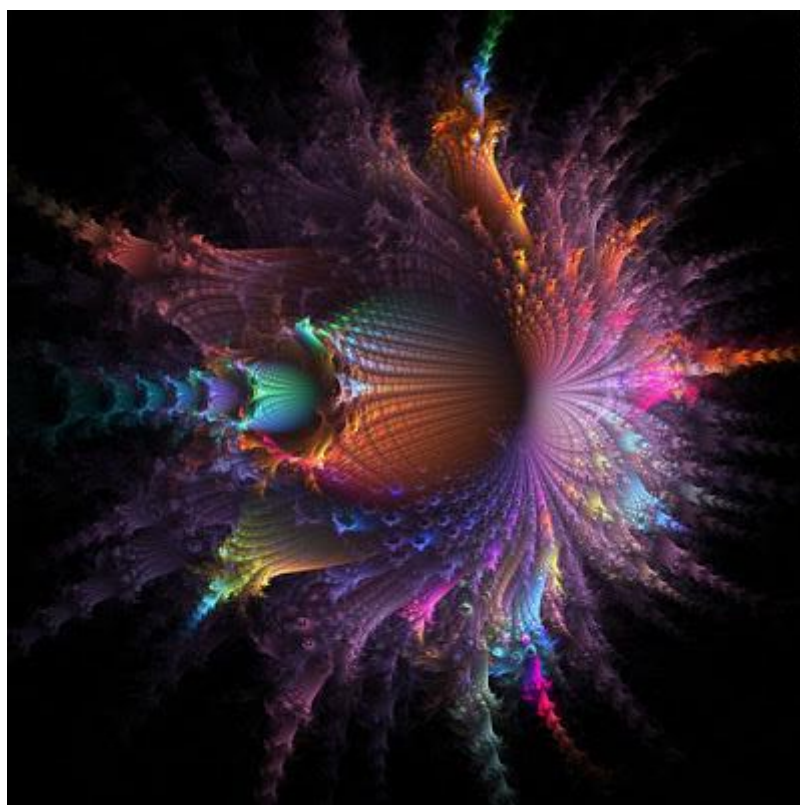
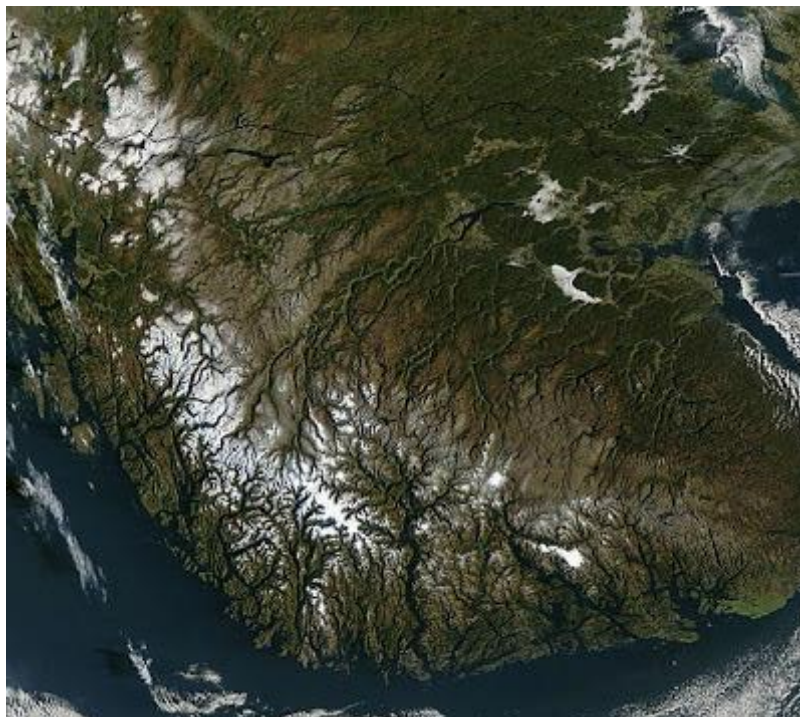
Figura 88d – Imagens de elementos da natureza.



Fonte: [22].

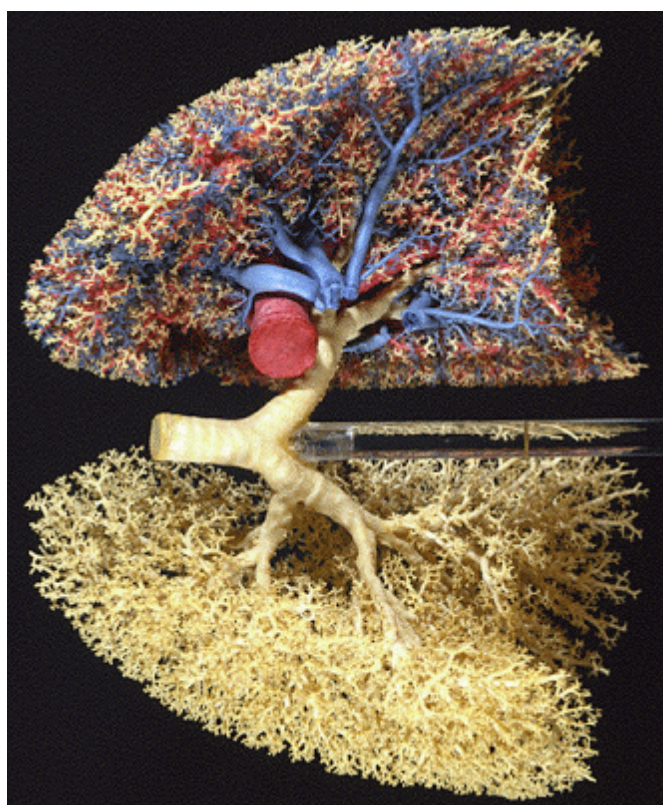
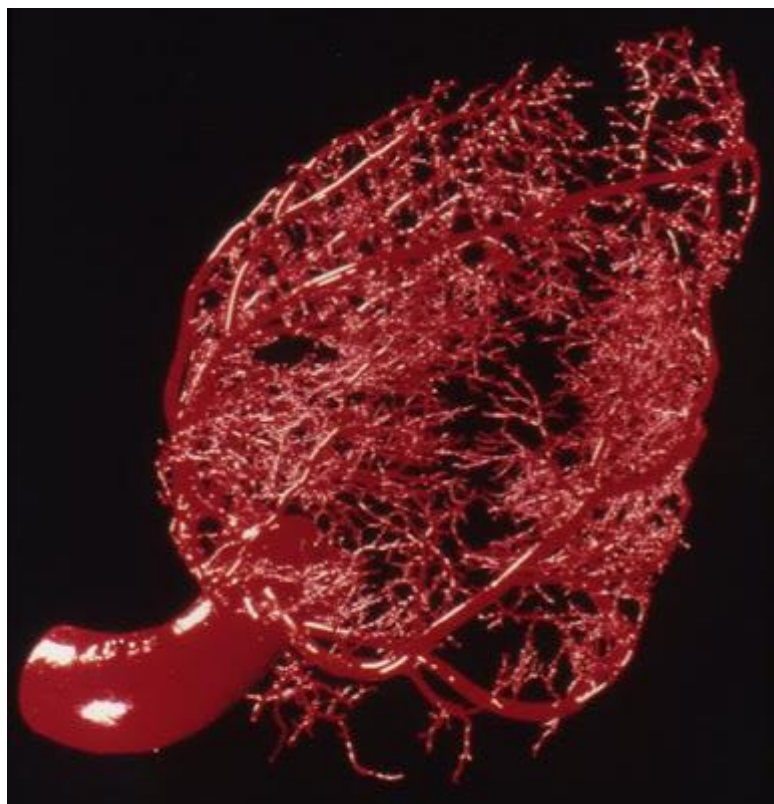


Figura 88e – Imagens de elementos da natureza.



Fonte: [22].

Figura 88f – Imagens de elementos da natureza.



Fonte: [22].