UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

NIM: UMA INTRODUÇÃO A TEORIA DOS JOGOS COMBINATÓRIOS

Joseane Sousa Lima Costa

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana

Julho de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

NIM: UMA INTRODUÇÃO A TEORIA DOS JOGOS COMBINATÓRIOS

Joseane Sousa Lima Costa

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana
28 de Julho de 2016

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado

Costa, Joseane Sousa Lima
C873n Nim: uma introdução a teoria dos jogos combinatórios. / Joseane Sousa Lima Costa. - Feira de Santana,2016.
viii, 57 f : il.

Orientador: Haroldo Gonçalves Benatti.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,2016

1. Jogos combinatórios 2. Jogo de Nim. 3. Teoria dos Jogos. 4. Matemática. I. Benatti, Haroldo Gonçalves, orien. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:519.83

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Joseane Sousa Lima Costa do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos dezenove dias do mês de agosto de dois mil e dezesseis às 14:00 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Nim: uma introdução a teoria dos jogos combinatórios"**, da discente **Joseane Sousa Lima Costa**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Haroldo Gonçalves Benatti (Orientador, UEFS), Abílio Souza Costa Neto (UESB) e Wilson Pereira de Jesus (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.
Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADA.
Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 19 de agosto de 2016.

Haroldo G. Benatti
Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)
Orientador

Abílio Souza Costa Neto
Prof. Me. Abílio Souza Costa Neto (UESB)

Wilson Pereira de Jesus
Prof. Dr. Wilson Pereira de Jesus (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por me abençoar a cada dia.

Ao meu marido, amor e companheiro, Rildo, pela paciência, conselhos, incentivo, coragem e compreensão nesse dois anos e meios de muitos estudos.

A Mamãe, Papai e minha irmã, por todo amor e carinho que me oferecem.

Ao meu filho lindo, Natanael, pela curiosidade e principalmente pelo amor que me dedica a cada dia.

Ao Professor Dr. Haroldo Gonçalves Benatti, por todas as ideias e sabedoria na orientação deste trabalho.

Aos professores do PROFMAT - UEFS, pela compreensão, por todos os ensinamentos que nos proporcionaram chegar até aqui.

A todos os professores que passaram por minha trajetória acadêmica. Mas um agradecimento especial ao professor Carloman Carlos Borges(in memoria), meu orientador da especialização, mas principalmente, por uma frase de incentivo no final desse curso. Me disse para não parar!!

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A UEFS, por sua estrutura e experiência fornecida ao programa PROFMAT.

Aos colegas do PROFMAT - UEFS, aqueles que ficaram até o fim, aos que nos deixaram, mas que fizeram muita falta. Por cada dia de estudo, rizadas e trocas de experiências. Em especial a Daniela, Carolina e Ernesto, sem vocês tudo seria muito mais chato.

Enfim, obrigada a todos.

Resumo

Neste trabalho introduzimos um tema novo e enriquecedor ao ensino aprendizagem de Matemática que é a Teoria dos Jogos Combinatórios através do Jogo de Nim. Um jogo para dois jogadores que se alternam em jogadas, retirando fichas divididas em pilhas, com o objetivo de ser o último a fazer uma jogada legal. Será conhecida uma forma de jogar que permite a um dos jogadores vencer o jogo fazendo movimentos baseados numa teoria matemática. Também apresentamos outros Jogos Combinatórios que possuem uma estratégia para vencer baseada na teoria matemática criada para resolver o Jogo de Nim.

Palavras Chaves: Jogos Combinatórios, Jogo de Nim, Matemática, Estratégia vencedora.

Abstract

In this paper we introduce a new theme and enriching the teaching and learning of mathematics that is the Theory of Combinatorial Games by Nim game. A game for two players who alternate in rolls, removing chips divided into cells, with the objective of being the last to make a legal move. It will be known a way of playing that allows a player win the game making moves based on a mathematical theory. We also present other combinatorial games that have a strategy to win based on the theory mathematics created to solve the Nim game.

key words: Combinatorial Games, Nim Game , Mathematic, Winning strategy.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Sumário

Introdução

Ensinar Matemática é um desafio diário, não só pelo nível de complexidade da disciplina, mas principalmente pelo baixo índice de aprendizagem da maioria dos estudantes das escolas públicas. É fácil perceber a falta de conhecimentos básicos, o não desenvolvimento do raciocínio lógico e do pensamento matemático, o que gera dificuldades com conteúdos mais avançados, resultando uma desmotivação geral com a Matemática.

Pesquisas e documentos oficiais apontam o uso de jogos nas aulas de matemática como uma atividade prazerosa, desafiadora e eficaz para o desenvolvimento do pensamento matemático. Se usado com objetivos bem definidos facilita aprendizagem de conteúdos além de desenvolver a capacidade de analisar situações e tomar decisões, contribuindo assim para o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos.

Um grupo de jogos, em especial, vem sendo estudados há algumas décadas pois apresentam uma matemática interessante. São jogos analisados com objetivo de descobrir uma forma de jogar que permita a um dos jogadores sempre chegar à vitória usando um caminho calculado e baseado numa teoria matemática.

Esses jogos fazem parte de uma área da Matemática Pura/Aplicada denominada *Teoria dos Jogos* que visa modelar fenômenos que podem ser observados quando dois ou mais jogadores (usualmente designados “agentes de decisão”) interagem entre si. É objetivo desta teoria descrever o processo de decisões conscientes numa situação de conflito (jogos).

A *Teoria dos Jogos* tem aplicações em várias áreas, como na Economia, Genética, Política e também na análise e solução de um grupo de jogos conhecidos como Jogos Combinatórios. O estudo desses jogos criou uma área mais específica da Teoria dos Jogos, conhecida como *Teoria dos Jogos Combinatórios*, ainda pouco explorada no Brasil mas que é muito pesquisada em outros países.

A *Teoria dos Jogos Combinatórios* estuda jogos procurando uma solução, isto é, uma maneira de jogar que permita a um dos jogadores tomar decisões que o levem à vitória. Muitas vezes não é possível chegar a uma solução completa para todos os jogos, por exemplo, o jogo de Xadrez ainda não tem uma solução completa. Já em outros jogos são encontradas soluções para alguns casos. Assim, esses jogos podem ser divididos em classes de acordo com algumas característica especiais de suas regras e soluções.

Ao longo deste estudo vamos conhecer um jogo combinatório especial conhecido como

Jogo de Nim. Esse jogo tem uma importância para a Teoria dos jogos Combinatórios pois a partir de sua análise e solução abriu-se caminho para o estudos de outros jogos, encontrará a solução dos mesmos através da comparação e até mesmo do uso da teoria matemática criada para resolver o Jogo de Nim.

No capítulo 1 vamos conhecer um pouco da Teoria dos Jogos Combinatórios, dando prioridade a temas que permitem um embasamento teórico para entender a matemática envolvida na solução do Jogo de Nim.

No Capítulo 2, o jogo de Nim será totalmente descrito: sua origem, suas regras e formas de jogar e principalmente qual a forma que um jogador pode utilizar para vencer esse e outros jogos que são variações do Jogo de Nim.

No Capítulo 3 propomos algumas atividades com objetivo didático de desenvolver o raciocínio lógico dos alunos da Educação Básica, fazendo com que esses descubram e apliquem a solução do Jogo de Nim.

Enfim, queremos que com a leitura desse trabalho, o leitor seja capaz de entender e aplicar a Matemática envolvida na solução do Jogo de Nim tornando-se um vencedor sempre que possível. Multiplicando esse conhecimento para seus alunos e conhecidos.

Capítulo 1

Jogos Combinatórios

Jogar é uma atividade inerente ao ser humano, o jogo tem diferentes definições e concepções que surgem a partir de situações do cotidiano e também das necessidades de diversão e entretenimento da sociedade atual. Costuma-se chamar de jogo atividades lúdicas e/ou esportivas como o Xadrez, o jogo de Gamão, variados jogos de cartas de baralho, tênis, futebol, vôlei e outros tantos.

Podemos observar que essas atividades lúdicas e esportivas possuem algumas características em comum que as classificam como jogos, são elas:

- possuem um conjunto de jogadores;
- possuem um conjunto de posições (arrumação das peças de um jogo antes de um movimento) possíveis;
- possuem um conjunto de regras que determinam as jogadas permitidas, as posições terminais (aquela posição da qual não se pode mais fazer nenhum movimento) e a quantidade de pontos atribuídos ao jogador nas posições terminais.

Assim, um **jogo** *é uma atividade que envolve um conjunto de jogadores, posições e regras.*

Alguns desses jogos são estudados matematicamente e possuem uma teoria muito interessante envolvida em seu planejamento, execução e, principalmente, na forma que um jogador usa para vencer cada um desses jogos.

Esses jogos podem ser divididos em diferentes classes se forem observadas algumas características e regras. Nosso objetivo é conhecer um tipo de jogo que tem as seguintes características:

1. Os jogadores jogam alternadamente, ou seja, não há jogadas simultâneas;
2. Tem informação completa, cada jogador sabe exatamente todos os dados desse jogo: posições, jogadas, peças.

3. Não são permitidos nenhum tipo de dispositivos aleatórios ou de sorte, como dados e sorteios de cartas.

4. Existe uma regra bem definida e previamente conhecida para determinar o término do jogo, ou seja, uma posição da qual não se pode efetuar mais nenhuma jogada.

5. O jogo termina em um número finito de movimentos.

6. Ao final do jogo há um resultado bem definido: uma vitória para um dos jogadores ou um empate.

Os jogos que possuem essas características são denominados de **Jogos Combinatórios** e dos jogos citados inicialmente apenas o Xadrez pode ser considerado um jogo combinatório, jogos como *O Jogo da Velha*, *O Jogo de Damas* e o *O Jogo de Nim* são outros exemplos de jogos combinatórios.

Os outros jogos citados não podem ser considerados jogos combinatórios pois possuem alguma característica ou regra que não está de acordo com a definição de jogo combinatório. Por exemplo: o Gamão é um jogo que envolve um dispositivo aleatório de sorte, os dados.

Os jogos combinatórios são divididos em duas classes se forem observados as opções de movimentos para os jogadores a partir de uma mesma posição:

- se os jogadores tem as mesmas opções de movimento a partir de uma mesma posição, o jogo é dito **imparcial**;

- se a partir de uma mesma posição os jogadores possuem opções de movimentos diferentes o jogo é do tipo **parcial**

Nesse trabalho estamos interessados nos **Jogos Combinatório Imparciais**, que são jogos que possuem um vencedor, onde não há diferenças entre os jogadores, ou seja, os movimentos permitidos são os mesmos para ambos, e além disso, são jogos que terminam depois de um número finitos de movimentos.

1.1 Posições de um Jogo Combinatório

Todo jogo é determinado por um conjunto de posições, incluindo uma *posição inicial* da qual cada jogador em sua vez move de uma posição para outra até uma *posição terminal* aquela na qual não é possível mais nenhum movimento. Algumas jogadas levam a posições especiais que se forem deixadas por um jogador em sua vez de jogar podem levá-lo à vitória, essas posições serão chamadas de **posições P** ou **P-posições**. Para as que dão vitória ao próximo jogador damos o nome de **posições N** ou **N-posições**.

Em um jogo combinatório imparcial pode-se determinar quais são as P-posições e as N-posições, basta analisá-las partindo da posição terminal e usando os critérios listados a seguir classificar cada uma como N-posição ou P-posição:

- Todas as posições terminais são P-posições.
- Cada posição que pode atingir uma P-posição é uma N-posição.
- Cada posição que só se pode atingir uma N-posição é uma P-posição.

Em concordância com esses critérios temos as seguintes propriedades:

- de qualquer N-posição existe pelo menos uma jogada para uma P-posição
- de qualquer P-posição todas as jogadas levam a uma N-posição.

Em jogos combinatórios imparciais os dois jogadores tem os mesmos movimentos disponíveis então o vencedor será determinado pela posição inicial do jogo.

1.2 Teoria dos Jogos Combinatórios

Os jogos combinatórios são para dois jogadores que serão identificados da seguinte forma:

- o jogador que narra o jogo é representado por **L** (do inglês Left que significa esquerdo)
- o outro jogador é representado pela letra **R** (do inglês Right, direita).

O conjunto de posições possíveis que os jogadores L e R tem a partir de uma certa posição serão escritas entre chaves separadas por vírgulas, usando uma barra vertical para separar as posições permitidas para o jogador L e para o jogador R:

$$\{a_1, a_2, a_3..., a_L | b_1, b_2, b_3, ..., b_R\}$$

Onde $a_1, a_2, a_3..., a_L$ é o conjunto de posições para as quais o jogador L pode fazer movimento a partir da posição corrente e será denotada por G^L e $b_1, b_2, b_3, ..., b_R$ é o conjunto de posições para as quais o jogador R pode fazer movimento e será denotada por G^R.

Assim:

Definição 1.1. Um jogo G é um par ordenado da forma $\{G^L | G^R\}$, tal que G^L e G^R são, respectivamente, o conjunto de posições de L e R.

$$G = \{G^L | G^R\}$$

Essa notação será usada mesmo quando nenhum jogador tenha algum movimento válido, ou seja, nem L ou R possam ir para alguma posição do jogo. Nesse caso, escreveremos:

$$G = \{\ \ |\ \ \}$$

Na teoria de jogos combinatórios existem jogos onde o Jogador L sempre ganha, dizemos então que é um jogo **positivo** denotado po $G > 0$ e outros R sempre ganha, chamados de jogo **Negativo** com notação $G < 0$. Há jogos que quem começa perde que são denominados de jogos **Nulos** e usa-se a notação $G = 0$, e outros jogos que quem começa ganha, denominados **Difuso** com notação $G||0$.

Resumindo temos:

$G > 0$ ou G é **positivo** se o jogador L sempre ganha.

$G < 0$ ou G é **negativo** se o jogador sempre ganha.

$G = 0$ ou G é **nulo** se o segundo jogador ganha.

$G||0$ ou G é **difuso** se o primeiro jogador ganha.

1.3 O Jogo de Hackenbush

O jogo combinatório Hackenbush (ou Desmata-mata), que consiste num conjunto de segmentos de reta verticais (chamaremos de arestas) conectados uns aos outros por seus pontos das extremidades e ligados a uma reta que chamaremos de solo. É importante que cada aresta esteja sempre ligada ao solo por alguma sequência de arestas. As arestas terão duas cores distintas, usaremos azul e vermelha. Cada jogador em sua vez deve retirar apenas um aresta de sua cor, que foi determinada previamente, no caso Azul para L e vermelho para R. Quando um jogador retira uma aresta todas as outras arestas que estiverem ligadas a essa aresta e não possuírem nenhuma ligação com outra aresta ligada ao solo também serão retiradas do jogo. O jogador que não puder efetuar mais nenhuma retirada de aresta perde o jogo.

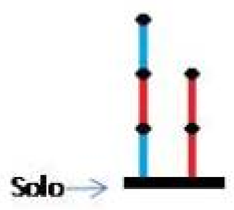


Figura 1.1: Jogo de Hackenbuch com duas linhas

Esse Jogo é um jogo combinatório interessante, pois dependendo de como as arestas são dispostas na posição inicial ele pode ser classificado como um jogo nulo, difuso, positivo ou negativo. Vejamos alguns tipos desses jogos.

Num jogo G onde não há arestas, nem azul e nem vermelha, nem R e nem L poderão fazer uma retirada então nesse jogo aquele que começar irá perder. Como definido anteriormente esse é um jogo **nulo**, e podemos escrever:

$$G = \{\ \ |\ \ \} = 0$$

Já num jogo com apenas uma aresta azul:

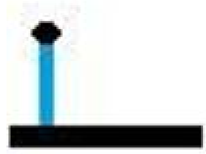


Figura 1.2: Jogo de Hackenbuch com uma aresta azul

Se o jogador L começar o jogo ele irá retirar a aresta, deixando assim 0, quando R for jogar não haverá aresta vermelha não poderá realizar nenhum movimento; dessa forma, L será o vencedor; caso R comece o jogo ele nada poderá fazer pois não existe nenhuma aresta vermelha, L também será o vencedor. Nesse jogo não importa quem começa o jogo, L sempre irá vencer. Portanto esse é um jogo **positivo**, que denotaremos por:

$$G = \{\ 0|\ \ \} = 1$$

Nesse, jogo o número 1 indica a folga de um movimento para L.

Caso tenhamos apenas uma aresta vermelha:

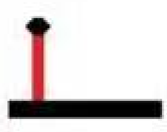


Figura 1.3: Jogo de Hackenbuch com uma aresta vermelha

A análise é semelhante à do jogo anterior sendo que agora a vitória é sempre para R, o que torna esse jogo **negativo**, denotado por:

$$G = \{\ \ |0\ \} = -1$$

Devido a folga de um movimento de R.

Vimos que esses jogos receberam um número para os representar, foram eles:

$$\begin{gathered} \{\ \ |\ \ \} = 0; \\ \{\ 0|\ \ \} = 1; \\ \{\ \ |0\ \} = -1. \end{gathered}$$

e podemos combinar esses jogos iniciais e montar novos jogos com outros números que os represente. Mas esse não é o objetivo desse trabalho, para os que procuram entender mais sobre esse tema sugerimos uma leitura sobre os **Números Surreias** em [21] e [19].

1.4 Soma de Jogos

Considere um jogo de Hackenbush, arrumado da seguinte forma, duas linhas verticais de arestas, a primeira com uma aresta azul ligada ao solo ligada a uma aresta vermelha, a segunda linha possui uma aresta azul ligada ao solo e duas arestas vermelhas ligadas na sequência.

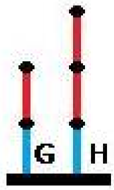


Figura 1.4: Jogo de Hackenbuch

Vamos analisar esta situação como se cada linha representasse um jogo separado.

A primeira linha é um jogo $G = \{0|1\}$ pois no inicio do jogo se L retira a aresta azul não sobra nenhuma aresta no jogo. Já R, retirando sua aresta vermelhas ainda sobra uma aresta (azul) no jogo.

Na segunda, temos o jogo $H = \{0|1, 2\}$. Nesse caso, o movimento de L gera o mesmo resultado que no jogo G, retira sua aresta azul e não sobra nenhuma aresta no jogo. Mas R pode retirar uma ou duas arestas vermelhas, deixando 1 ou 2 arestas no jogo.

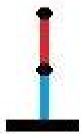


Figura 1.5: R retira uma aresta

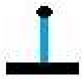


Figura 1.6: R retira duas arestas

Cada jogador em sua vez, escolhe uma linha e faz uma jogada legal naquela linha deixando a outra linha sem alterações. O jogador que fizer o último movimento válido para esses dois jogos ganha o jogo. O que esta ocorrendo nessa situação é a soma de jogos. No exemplo temos:

O jogador L só poderá deixar duas posições no jogo:

Se retirar a aresta azul do jogo G o jogo H não sofrerá alteração. Figura 1.7

Se retirar a aresta azul do jogo H , G não sofrerá alteração. Figura 1.7

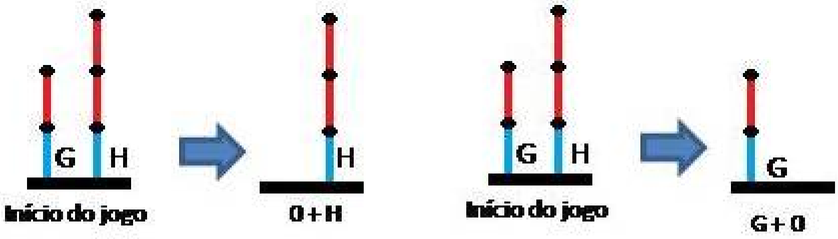


Figura 1.7: 0 + H e G + 0

O jogador R tem mais opções de jogadas:

Jogada 1 - retirar a aresta vermelha de G e H fica inalterado.

Jogada 2 - retirar uma aresta vermelha de H e G fica inalterado.

Jogada 3 - retirar duas arestas vermelha de H e G fica inalterado.

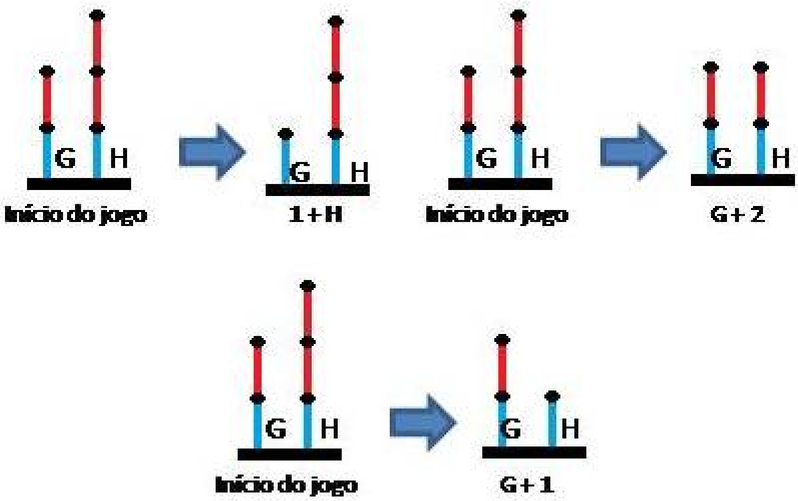


Figura 1.8: 1 + H, G + 2 e G + 1

Então o jogo G + H é igual às posições:

$G + H = \{0|1\} + \{0|1, 2\} = \{0 + H, G + 0|1 + H, G + 1, G + 2\}$

Daí,

Definição 1.2. Sejam $G = \{G^L|G^R\}$ e $H = \{H^L|H^R\}$ dois jogos. A **soma** de G e H é o jogo $G + H$ que é dado por

$$G + H = \{G^L + H, G + H^L|G^R + H, G + H^R\},$$

ou seja, deve-se escolher uma das componentes (lances de G ou de H) e realizar um movimento válido sem alterar o outro jogo.

Podemos verificar que a soma de jogos goza das seguintes propriedades:

- Elemento neutro: $H = \{\quad | \quad\} = 0$

$$G + 0 = \{G^L + 0|G^R + 0\} = \{G^L|G^R\}$$
$$0 + G = \{0 + G^L|0 + G^R\} = \{G^L|G^R\}$$

- Comutativa : $G + H = H + G$

$$\begin{aligned} G + H &= \{G^L + H, G + H^L|G^R + H, G + H^R\} = \\ &= \{H + G^L, H^L + G|H + G^R, H^R + G\} = \\ &= \{H^L + G, H + G^L|H^R + G, H + G^R,\} = H + G \end{aligned}$$

- Associativa $G + (H + M) = (G + H) + M$

G + (H + M) $= \{G^L + (H+M), G + (H+M)^L|G^R + (H+M), G + (H+M)^R\} =$

mas, $H + M = \{H^L + M, H + M^L|H^R + M, H + M^R\}$, daí

$$= \{G^L + (H + M), G + (H^L + M), G + (H + M^L)|G^R + (H + M), G + (H^R + M), G + (H + M^R)\} = \{(G^L + H) + M, (G + H^L) + M, (G + H) + M^L|(G^R + H) + M, (G + H^R) + M, (G + H) + M^R\} = \{(G + H)^L + M, (G + H) + M^L|(G + H)^R + M, (G + H) + M^R\} = \mathbf{(G + H) + M}$$

Muitas vezes será prático dividir um jogo em um conjunto de outros jogos e fazer a soma procurando uma estrategia vencedora para o mesmo.

1.5 Jogos imparciais e Nímeros

O jogo Hackenbush também pode ser jogado com todas as aresta de cores iguais. E L e R podem retirar qualquer aresta da linha. Vejamos um exemplo:

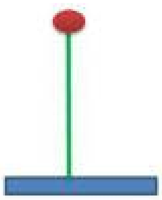


Figura 1.9: Jogo de Hackenbuch

Jogadas:
Tanto L com R podem retirar a aresta, deixando a posição 0
Assim,

$$G = \{0|0\}$$

O qual podemos escrever como $G = *$ ou $G = *1$
Se há duas arestas na linhas temos as seguintes possibilidades de jogadas:

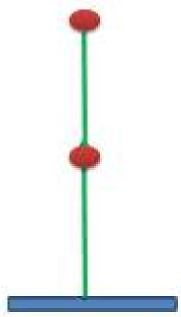


Figura 1.10: Jogo de Hackenbuch

L: retira as duas arestas ou retira apenas uma aresta e deixa um novo jogo com apenas uma aresta o qual já vimos ser igual a $*1$. Isso ocorre, pois R com o objetivo de vencer o jogo irá retirar apenas uma aresta na sua vez.

R: observe que R possui as mesmas possibilidades iniciais de L.

Temos assim o Jogo: $G = \{0, *1|0, *1\} = *2$

Continuando a análise de jogos de Hackenbush com uma linha de quantidade n de arestas de mesma cor, teremos um jogo denotado por:

$$G = \{0, *1, *2, *3, ..., *(n-1)|0, *1, *2, *3, ..., *(n-1)\} = *n$$

Esse é um jogo onde os jogadores L e R tem as mesmas possibilidades de jogadas permitidas, esse é um Jogo imparcial.

Definição 1.3. Um jogo imparcial $G = \{G^L|G^R\}$ é um jogo onde $G^L = G^R$ é um conjunto de jogos imparciais.

Assim,

$$G = *n = \{0, *1, *2, *3, ..., *(n-1)|0, *1, *2, *3, ..., *(n-1)\}$$

Por ser um jogo imparcial podemos escrever apenas um dos lados idênticos, simplificando ainda mais essa notação:

$$*n = \{0, *1, *2, *3, ..., *(n-1)\}$$

O conjunto de todos os $*n$ com $n = 1, 2, 3, ..., (n-1)$, são denominados de **Nímeros**. Esse nome decorre do estudo de um jogo imparcial muito importante para a teoria dos Jogos Combinatórios, que é o objeto principal do estudo desse trabalho, **o Jogo de Nim**.

Nesse capítulo fizemos apenas um recorte sobre a Teoria dos Jogos Combinatórios, buscando um embasamento teórico para garantir a compreensão do estudo que faremos sobre o Jogo de Nim, por essa razão deixamos muito dessa teoria fora do nosso trabalho, mas para um estudo mais aprofundado indicamos as referências [03], [20], e [21].

Capítulo 2

O Jogo de Nim e suas variações

Nim é um jogo matemático de estratégia, muito antigo, tendo como possível origem a China. O nome Nim é provavelmente derivado do inglês arcaico que significava apanhar; ainda pode ter sua origem na palavra alemã **nimm** que significa "tomar" (imperativo). Acredita-se, também, que seja derivado do Chinês, pois o jogo do Nim se assemelha ao jogo Chinês "Tsuan-Shizi", que significa os que "escolhem pedras". Foi um dos primeiros jogos a ser analisado completamente. Apesar de suas primeiras referências serem do início do século XVI, foi em 1901 que o matemático Charles Leonard Bouton, da Universidade de Harvard, publicou um artigo [05] científico na prestigiosa revista "Annals of Mathematics", onde apresentou uma teoria matemática completa para o jogo e, além disso, demonstrou uma forma de jogar que permite a um dos jogadores vencer, caso jogue sem erros.

Esse é um jogo de regras simples, para dois jogadores que jogam alternadamente. Tendo como ganhador aquele que fizer a última jogada. Para ser jogado precisa-se de uma quantidade de fichas (moedas, palitos) que são divididos em pilhas. Cada jogador em sua vez, deve retirar pelo menos uma ficha de uma única pilha, e na sequência o outro jogador procede da mesma maneira, até que não sobre mais nenhuma ficha.

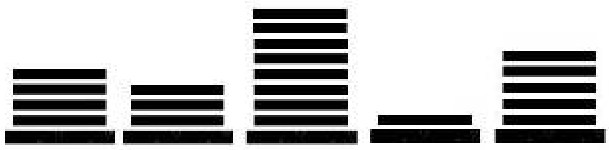


Figura 2.1: Jogo de Nim com 5 pilhas

Em seu artigo, Charles L. Bouton provou que no jogo de Nim existem dois tipos de posições:

1. **P-posição**: posições que deixadas no jogo por um jogador possibilitam a vitória para esse jogador, caso ele continue desempenhando o jogo sem erros.

2. **N-posição**: que não são uma P-posição, que deixada no jogo por um jogador per-

mitem ao próximo jogador fazer uma jogada para uma nova P-posição.

Observe que:

- se no início do jogo tiver uma **P-posição**: o segundo jogador poderá ser o vencedor. Pois ao primeiro jogador só restará jogadas que destroem a P-posição existente e, então o segundo jogador, em sua vez, deve deixar uma nova P-posição.
- se a posição encontrado no início do jogo for **N-posição**, então o primeiro jogador poderá ser o vencedor desse jogo, basta fazer uma jogada que resulte numa P-posição para aquele conjunto de fichas.

Para saber se uma posição é uma P-posição ou uma N-posição devemos, conforme o Teorema de Bouton, que será visto adiante:

1. Transformar o números de fichas em cada pilha para a notação binária, ou seja, escrever o número na base 2;
2. Colocá-los um embaixo do outro, de forma que os algarismos da unidade correspondam;
3. Somar cada coluna em módulo 2.
4. Se a soma encontrado em cada coluna for **zero**, então tem-se uma P-posição.
5. Se a soma for diferente de zero, temos uma N-posição.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.1. O jogo começa com a seguinte arrumação

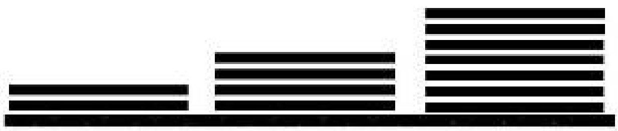


Figura 2.2: Jogo de Nim com pilhas de 2,4,7 fichas.

1ª pilha: 2 fichas

2ª pilha: 4 fichas

3ª pilha: 7 fichas

1ª pilha: Transformando para a base dois, obtemos: $(010)_2$

2ª pilha: Transformando para a base dois, obtemos: $(100)_2$

3ª pilha: Transformando para a base dois, obtemos: $(111)_2$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Somados temos 001, que demonstra que 2 4 7 não é uma P-posição, pois de acordo com Bouton, para ter uma P-posição a soma de cada coluna deve resultar em um número congruente a 0 mod 2. Assim 2 4 7 é uma N-posição.

Com a retirada de uma ficha da 3ª pilha, obtemos:

Figura 2.3: Jogo de Nim após a retirada de 1 ficha da 3ª pilha

1ª pilha: 2 fichas $(010)_2$

2ª pilha: 4 fichas $(100)_2$

3ª pilha: 6 fichas $(110)_2$

Assim, $(010)_2 + (100)_2 + (110)_2 = 000$

Comprovando que 2 4 6 é uma P-posição.

O Jogo de Nim é um jogo que pode ser generalizado para um número qualquer de fichas e também para qualquer quantidade de pilhas.

Vamos definir alguns termos importantes:

Definição 2.2. Adotaremos a expressão **Nim com k-pilhas** para um jogo de Nim com uma quantidade k de pilhas.

Definição 2.3. A notação $(n_1, n_2, n_3, \ldots n_k)$ representará uma **posição** de um jogo de Nim com k-pilhas e $n_1, n_2, n_3, \ldots n_k$ fichas por pilhas, sem considerar a ordem das k pilhas, com $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq \ldots \geq n_k$.

O jogo de Nim é um jogo combinatório de informação completa, pois não existem fichas escondidas e nenhum elemento de sorte (lançamento de moeda ou dado, por exemplo). Os jogadores são capazes de criar e analisar jogadas antes de fazer o movimento decidindo qual é a jogada mais adequada para eventualmente levá-lo à vitória. Esse processo de planejamento das jogados é chamado de **estratégia**.

Definição 2.4. Dizemos que um jogador tem uma **estratégia vencedora** quando existe um conjunto de P-posições que permitem conduzir o jogo de uma posição inicial para uma posição terminal tornando-se o vencedor do jogo, independente dos movimentos realizados por seu adversário.

O jogo de Nim possui uma estratégia vencedora descrita por Bouton.

Vamos conhecer essa estratégia analisando os jogos de Nim com 1, 2 e 3 pilhas e depois a generalização.

O **jogo Nim com 1-pilha** é jogado por dois jogadores que retiram alternadamente fichas de uma única pilha. É um jogo em que o primeiro jogador pode sempre ganhar, pois ele pode retirar o total de n fichas da pilha tornando-se vencedor.

Em **Nim com 2-pilhas**, há a restrição de cada jogador em sua vez retirar fichas de apenas uma das duas pilhas. A estratégia vencedora deste jogo é sempre deixar para seu oponente uma posição (n_1, n_2) tal que $n_1 = n_2$. Se a posição inicial do jogo for (n_1, n_2) tal que $n_1 > n_2$ então o primeiro jogador será o vencedor, retirando da pilha com n_1 fichas, um número de fichas que a torne igual a n_2. Já, se a posição inicial for (n_1, n_2) tal que $n_1 = n_2$ que é uma P-posição, o segundo jogador será o vencedor.

Para descrever a estratégia vencedora de **Nim com 3-pilhas** é necessário introduzir uma operação que é chamada de **Soma Nim** e consiste em representar os números inteiros em base 2 e somá-los em módulo 2. Esta operação é denotada pelo símbolo $\bigoplus$.

No jogo do **Nim com 3-pilhas**, o conjunto de P-posições (n_1, n_2, n_3) ocorre quando:

$$n_1 \oplus n_2 \oplus n_3 = 0$$

Quando a soma Nim da posição inicial for diferente de zero, $n_1 \oplus n_2 \oplus n_3 \neq 0$, ou seja, uma N-posição, o primeiro jogador tem a oportunidade de usar a estratégia vencedora e ser vencedor do jogo. Caso contrário, é o segundo jogador que tem a chance de ser o vencedor.

Exemplo 2.5. Seja o jogo de Nim com 3-pilhas, com posição inicial dada por (2,3,7). Vamos descrever uma estratégia vencedora para esse jogo.

Como

$$2 \oplus 3 \oplus 7 = (10)_2 \oplus (11)_2 \oplus (111)_2 = (110)_2 = 6$$

Então a posição (2,3,7) é uma N-posição. O primeiro jogador terá a oportunidade de vencer. Para isso deve deixar no jogo uma P-posição, nesse caso deve retirar 6 fichas da maior pilha o que resultará na posição (1,2,3) que é uma P-posição pois:

$$1 \oplus 2 \oplus 3 = (01)_2 \oplus (10)_2 \oplus (11)_2 = (00)_2 = 0$$

Depois dessa jogada, qualquer que seja o movimento do jogador 2 resulta em uma N-posição.

Suponha que o jogador 2 retire duas fichas da maior pilha, ficando a N-posição (1,1,2).

Na sua vez o jogador 1, retirando 2 fichas da maior pilha resulta a posição (0,1,1) que é uma P-posição. Deixando apenas uma movimento obrigatório para o jogador 2 que é retirar uma ficha de uma das duas pilhas, dando a chance do jogador 1 fazer a última jogada e vencer o jogo.

O jogo de Nim com k-pilhas, deve também seguir as mesmas regras utilizadas para o Nim com 3-pilhas. Resta-nos verificar se a estratégia proposta também é válida para essa generalização. Segue o teorema:

Teorema 2.6. ***Teorema de Bouton.*** *O conjunto de P-posições para um jogo de Nim com k-pilhas, denotada por $(n_1, n_2, n_3, \ldots n_k)$, ocorre quando $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k = 0$.*

Demonstração. A prova desse teorema consiste em demonstrar que:

1. Todas a posições terminais são P-posições;
2. De qualquer P-posição todas as jogads levam a uma N-posição;
3. De qualquer N-posição existe pelo menos uma jogada para uma P-posição

Primeiramente vale observar que a posição $(0, 0, ..., 0)$ é uma P-posição, pois é uma posição terminal e

$$0 \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 = 0.$$

Suponha que a posição $(n_1, n_2, n_3, \ldots n_k)$ é uma P-posição, ou seja,

$$n_1 \oplus n_2 \oplus ... \oplus n_k = 0.$$

Considere uma pilha $n_i \neq 0$, que sofrerá uma redução para um valor $n_i^{'}$, nesse caso, obrigatoriamente, não poderemos ter:

$$n_1 \oplus \ldots \oplus n_i \oplus \ldots n_k = 0 = n_1 \oplus \ldots \oplus n_i^{'} \oplus \ldots n_k$$

pois, pela Lei do Cancelamento, essa igualdade resulta em $n_i = n_i^{'}$, o que contraria $n_i^{'} < n_i$

Então, $(n_1, n_2, \ldots, n_i^{'}, \ldots n_k)$ é uma N-posição, pois

$$n_1 \oplus \ldots \oplus n_i^{'} \oplus \ldots n_k \neq 0$$

Provando assim que de uma P-posição só pode-se chegar a uma N-posição.

Suponha agora que $(n_1, n_2, \ldots, n_i^{'}, \ldots n_k)$ é uma N-posição, daí

$$n_1 \oplus n_2 \oplus n_i \oplus ... \oplus n_k = S \text{ e } S \neq 0 \ ,$$

Como $S \neq 0$ então na representação binária de S existe pelo menos um algarismo igual a um. Considere o primeiro algarismo 1 que aparece da esquerda para a direita em $(S)_2$

Existe uma pilha com n_i fichas tal que na sua representação binária também aparece um algarismo 1 na mesma coluna que aparece em S. Deve-se trocar esse algarismo 1 em n_i por 0 e para que a soma-nim seja igual a zero é importante verificar se é preciso trocar ou não os algarismos à direita deste 1. Os algarismo à esquerda não precisam ser modificados pois a soma de sua coluna já resulta em 0.

Essa mudança significa uma redução na pilha com n_i fichas para uma pilha com $n_i^{'}$ fichas, pois quando um número é diminuído na escala binária é que algum 1, da esquerda para a direita passou a ser 0. Assim, a pilha com $n_i^{'}$ fichas tem menos fichas que a pilha com n_i fichas.

Logo, existe pelo menos uma quantidade de fichas $n_i^{'} < n_i$, tal que

$$n_1 \oplus ... \oplus n_i^{'} \oplus ...n_k = 0$$

Assim, a posição $(n_1, n_2, \ldots, n_i^{'}, \ldots n_k)$ é uma P-posição. Concluímos que de uma N-posição é possível chegar em uma P-posição.

□

Portanto, o Teorema de Bouton garante que:

- se $(n_1, n_2, n_3, \ldots n_k)$ com $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k = 0$ é a primeira posição do jogo, então o segundo jogador pode sempre ganhar.
- se a primeira posição for $(n_1, n_2, n_3, \ldots n_k)$ com $n_1 \oplus n_2 \oplus \ldots \oplus n_k \neq 0$, então o primeiro jogador pode sempre ganhar, se ao jogar tiver $n_i^{'} < n_i$ de tal modo que $n_1 \oplus ... \oplus n_i^{'} \oplus ...n_k = 0$, assim $(n_1, n_2, \ldots n_i^{'}, \ldots n_k)$ é uma P-posição.

Portanto, qualquer que seja o número de pilhas que tivermos em um Jogo de Nim, o vencedor será determinado pela posição encontrada na primeira jogada, desde que o mesmo faça os movimentos de acordo com a estratégia vencedora.

Exemplo 2.7. Considere o jogo de Nim com 4-pilhas e posição inicial (3,4,8,10). Use o Teorema de Bouton para verificar se a posição inicial é uma P-posição. Caso seja uma N-posição, faça uma jogada que a transforme em uma P-posição.

Temos que

$3 \oplus 4 \oplus 8 \oplus 10 = 0011 \oplus 0100 \oplus 1000 \oplus 1010 = 0101 \neq 0$

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Como $S \neq 0$ então a posição inicial (3,4,8,10) é uma N-posição.

Note que em $S = 0101$ o primeiro 1 ocorre na segunda coluna da esquerda para a direita.

Devemos trocar o algarismo 1 em 0100 que representa a pilha com 4 fichas, pois é neste valor que aparece o algarismo 1 na mesma coluna que aparece em S, mas apenas essa troca não resolve o nosso problema com a soma-nim, pois em S aparece um outro 1 na última coluna. Como não é possível modificar outra pilha, temos que trocar o último algarismo 0 desse mesmo valor por 1. Essas trocas significam que devemos reduzir a pilha com 4 fichas para uma pilha com 1 ficha, encontrando a posição (1,3,8,10) e essa posição nos dá a Soma-Nim:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Logo a posição (1,3,8,10) é uma P-posição.

Encontrada a pilha que deve ser reduzida para que a soma Nim seja 0 precisamos descobrir quantas fichas precisam ser retiradas, o teorema nos fornece esse valor quando fazemos as trocas necessárias. Podemos também fazer a soma-nim dos valores das outras pilhas que não serão modificadas, esse valor indica a quantidade de fichas que deve haver na pilha depois da redução. No exemplo a pilha a ser reduzida contém 4 fichas, somando $3 \oplus 8 \oplus 10 = 1$, então temos que reduzir essa pilha de 4 fichas para 1 ficha. O que resulta na P-posição (3,1,8,10).

Pela Teoria dos Jogos Combinatórios o jogo de Nim é um jogo imparcial, pois a partir de cada posição existem os mesmos movimentos legais para cada jogador.

Em um jogo Nim com 1-pilha e n fichas, existem movimentos para jogadas que geram n posições e esse conjunto de posições será representado pelo símbolo $*n$, e escrevemos:

$$*n = \{0, *1, *2, *3, ..., *(n-1)\}$$

Essa representação indica que uma pilha de n fichas pode se reduzida pelo jogador que começar o jogo em uma pilha com k fichas, onde k pode ser 0,1,2,3,.. ou (n-1) e cada $*k$, denominados de **Nímeros**, representa o número de fichas em cada pilha resultante das possíveis retiradas dos jogadores.

Exemplo 2.8. Em um jogo de Nim com 1-pilha de 2 fichas, os jogadores ao iniciarem o jogo podem fazer as seguintes jogadas:

1. retirar as duas fichas e vencer o jogo; ou

2. retirar uma ficha, deixando uma pilha com apenas uma ficha;

Assim o jogo inicial é representado por:

$$*2 = \{0, *1\}$$

Sendo assim, um jogo de Nim com k-pilhas é na verdade a soma de vários jogos de Nim com 1-pilhas cada uma dessas pilhas é representada por um Nímero.

Podemos dizer que o jogo

$$G = \{*1, *5, *7\}$$

É um jogo de Nim com 3-pilhas com, respectivamente, 1,5 e 7 fichas e que a posição (1,5,7) é uma **posição inicial** desse jogo.

Vimos anteriormente que a solução para um jogo de Nim consiste em encontrar uma quantidade de fichas que retiradas de uma pilha com n_i fichas a reduz para uma pilha com $n_i^{'}$ fichas e essa pilha com $n_i^{'}$ fichas pode ser representada por um **Nímero** que é o resultado da soma-nim dos Nímeros que representam as outras pilhas que não foram modificadas. Dessa forma, podemos representar esse jogo pelo Nímero que simboliza a quantidade de fichas dessa pilha após ser modificada .

Então

$$G = \{*1, *5, *7\} = *4$$

Onde o Nímero $*4$ é o resultado da soma de $*1 \oplus *5$.

Essa descoberta nos revela que é necessário compreender a soma de Nímeros, suas regras e propriedades, pois essa será uma ferramenta bastante usada.

Somar Nímeros significa escrevê-los na base 2 e somá-los dígito a dígito módulo 2. A partir da análise dessas somas, foram criadas algumas regras que permitem realizar essa soma sem transformar cada nímero em um número binário.

De agora em diante, por simplificação da escrita, trocaremos o símbolo $\oplus$ que denota a soma-nim com números escritos na base 2 apenas pelo símbolo da adição $+$.

Vejamos:

A primeira regra para começarmos a somar Nímeros é lembrar que cada Nímero é a representação de um jogo imparcial G de Nim com 1-pilha e por isso $G + G = 0$, que por simetria $G = -G$, então:

Regra 1:

$$*n + *n = 0$$

E qual o valor de $*7 + *5$?

Temos uma outra regra que orienta a soma de nímeros quaisquer. Ela diz que para somarmos nímeros basta escrevermos cada um deles como uma soma de potências de 2 e em seguida cancelar as repetições em pares usando a Regra 1.

Regra 2 : Se $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ são potências de 2 distintas, então

$$*x_1 + *x_2 + ... + *x_n = *(x_1 + x_2 + ...x_n)$$

Agora, podemos somar $*7 + *5$. Vamos escrever os nímeros $*7$ e $*5$ em soma de potências de 2.

$*7 = *1 + *2 + *4$ e $*5 = *1 + *4$,

segue que

$$*7 + *5 = *1 + *2 + *4 + *1 + *4$$

Usando a regra 1 e cancelando os pares de $*1$ e $*4$, obtermos:

$$*7 + *5 = *2$$

2.1 Princípio do Menor Excluido (Mex)

Vamos analisar quais as posições para um jogo de Nim com 3 pilhas com respectivamente 2, 3, 5 fichas por pilha. A estratégia vencedora de Nim diz que devemos reduzir uma pilha para um valor x que torne a posição vencedora . Devemos encontrar o valor que somado a $*2$ e $*3$ resulte em 0, ou seja, $*2 + *3 + *x = 0$.

Figura 2.4: Posição (2,3,5)

Sabemos que $*2 + *3 = *1$

Note que temos a soma de dois jogos de Nim com 1-pilha, o jogo $G = *2 = \{0, *1\}$ e $H = *3 = \{0, *1, *2\}$

Assim, pela definição de soma de jogos temos: $G + H = \{*2 + 0, *2 + *1, *2 + *2, *3 + 0, *3 + *1, \} = \{*2, *3, 0, *3, *2\} = \{0, *2, *3\} = *1$

O nímero $*1$ é o menor nímero que não aparece no conjunto de posições desse jogo.

No jogo de Nim com 3 pilhas com posição inicial igual a (3,4,11), sabemos que $*3 + *4 = *7$ e temos os jogos $A = *3 = \{0, *1, *2\}$ e $B = *4 = \{0, *1, *2, *3\}$, segue que:

$A + B = \{0, *1, *2. * 3, *4, *5, *6\} = *7$

Novamente $*7$ é o menor nímero que não aparece no conjunto de posições desse jogo.

Definição 2.9. Seja S um conjunto de números Naturais. Definiremos o **Mex** de S por

$$\text{Mex(S)} = \text{o menor número Natural } m \geq 0, \text{ tal que } m \notin S.$$

Exemplo: Se S = {0, 1, 2, 4, 5} então Mex(S) = 3.

Vamos considerar o jogo imparcial G que possui o seguinte conjunto de posições.

$$G = \{*a, *b, *c, ...\}$$

Nessas posições existe um número natural **m** que não aparece entre $*a, *b, *c, ...$ e é o menor possível, esse será o Menor Número Excluído **(Mex)** do conjunto de posições de um jogo. Este $*m$ (menor número excluído) deu origem a um princípio utilizado na resolução de vários jogos imparciais. Assim o jogo imparcial G pode ser denotado como um jogo de Nim com 1-pilha e representado por $*m$.

Então $G = *m$

Definição 2.10. Princípio do Menor excluído

Sejam $a, b, c, ... \in \mathbb{N}$. Suponha $G = \{*a, *b, *c, ...\}$, então

$$\{*a, *b, *c, ...\} = *Mex(a, b, c, ...) \text{ ou seja, } G = *m$$

Como $*m$ pode representar uma pilha de m fichas em Nim, o jogo G pode ser comparado a um jogo de Nim com 1-pilha com m fichas.

Exemplo 2.11. Seja G o Jogo de Nim com 3-pilhas de posição inicial (3, 4, 5). Como

$$*4 + *5 = (0 + *4 + *5 + *6 + *7) \text{ então } G = *Mex(0, 4, 5, 6, 7) = *1$$

Esse resultado deu origem a um dos teoremas mais importantes da Teoria dos Jogos Combinatórios que é conhecido como o Teorema de Sprague-Grundy, que recebeu esse nome devido ao fato de Roland Percival Sprague (matemático alemão) e Patrick Michael Grundy (matemático e estatístico inglês) terem descoberto independentemente este resultado. Só iremos enunciar esse teorema pois a demonstração usa conceitos da Teorias dos Jogos Combinatórios que não foram abordados nesse trabalho, podemos encontrar essa demonstração em [20] e em [10].

Teorema 2.12. ***Teorema de Sprague-Grundy*** *Todo jogo imparcial é equivalente a um Nímero.*

Assim, pelo Teorema de Sprague-Grundy, qualquer jogo imparcial pode ser representado por um **Nímero**, ou seja, pelo seu **Mex**, relacionando um jogo imparcial a um jogo de Nim com 1-pilha.

Vejamos um exemplo do uso desse teorema:

O jogo do Cavalo Branco

O jogo do Cavalo Branco deve ser jogado em um tabuleiro, pode ser um tabuleiro de xadrez, com um único cavalo branco que deve ser movimentado no tabuleiro em forma de L, apenas na área à frente da diagonal da posição inicial dessa peça. O objetivo desse jogo é alcançar uma área em destaque no tabuleiro, em geral localizada no campo superior esquerdo, vence o jogador que primeiro levar o cavalo para esta área. Conforme a Figura 2.5

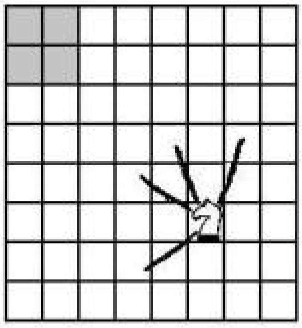


Figura 2.5: Cavalo branco

Esse jogo possui uma estratégia vencedora e usando o Princípio do Menor Excluído podemos construir uma tabela com os valores dos Nímeros que representam cada posição do cavalo no tabuleiro.

O primeiro passo é considerar as casas da área sombreada de valor zero, ou seja, as posições vencedoras, e começar a calcular os valores das casas ao redor dessa área.

De acordo com a tabela 2.1 cada coluna recebe um número 1,2,3, ... e cada linha é representada por uma letra a, b, c,... e cada casa será simbolizada pela combinação desse numero e letra, dessa forma, as casas $a1 = a2 = b1 = b2 = 0$. Essas casas são as posições terminais ou P-posições, que possuem valor 0.

	1	2	3	4
a	0	0		
b	0	0		
c				
d				

Tabela 2.1: Jogo do Cavalo Branco

Em a3 o único movimento permitido para o cavalo é ir para casa b1, logo o valor de $a3 = mex(0) = *1$. Na mesma diagonal temos a posição c1, de c1 o cavalo so poderá ir para casa a2 e novamente temos $c1 = mex(0) = *1$. E podemos continuar esse processo, preenchendo uma diagonal de cada vez temos a seguinte tabela que tem alguns Nímeros para o Jogo Cavalo Branco. Ocultamos o $*$ antes de cada nímero por simplificar a tabela.

Consultando a tabela 2.2 vemos que a posição d5 é igual ao **mex** dos números das posições e3, c3, b4 e b6, ou seja, $d5 = mex(*3, *2, *1, 0) = *4$, o que podemos concluir que esse é um jogo equivalente a um jogo de Nim com 1-pilha com 4 fichas.

	1	2	3	4	5	6	7	8
a	0	0	1	1	0	0	1	1
b	0	0	2	1	0	0	1	1
c	1	2	2	2	3	2	2	2
d	1	1	2	1	4	3	2	3
e	0	0	3	4	0	0	1	1
f	0	0	2	3	0	0	2	1
g	1	1	2	2	1	2	2	2
h	1	1	2	3	1	1	2	1

Tabela 2.2: Posições para Jogo do Cavalo Branco em um tabuleiro de xadrex

Para vencer o jogador deve levar seu cavalo para a casa b6, que é uma P-posição. Observa-se que da casa b6 o cavalo só pode ser movimentado para as casas a4 e c4 que são N-posições.

Outro uso prático do **Mex** é na **Soma Nim**. Temos uma terceira regra:

Definição 2.13. Regra 3

Para todo $a, b > 0$, temos

$$*a + *b = mex(*a' + *b, *a + *b') \text{ , onde } *a' < *a \text{ e } *b' < *b.$$

Temos assim, que $*a + *b$ são todas posições $*a' + *b$ em que $*a'$ denota todos os nímeros menores que $*a(0, 1, 2, 3, 4, ..., a-1)$, e $*a + *b'$ em que $*b'$ é todo número menor que $*b(0, 1, 2, 3, 4, ..., a-1)$.

Essa regra foi usada para calcular o valor de $*3 + *4$ anteriormente, mas esse processo poderia ter sido simplificado escrevendo apenas:

$$*3 + *4 = mex(0, *1, *2, *3, *4, *5, *6) = *7$$

Então, $*3 + *4 = *7$.

O uso das regras da Soma-nim nos permite construir uma tabela que nos dará alguns valores da soma de Nímeros. Nessa tabela teremos todas as possibilidades de somas de $(0, *1, *2, ... *10) + (0, *1, *2, ... *10)$. As primeiras casas de cada linha e coluna receberam cada uma um desses nímeros e o valor de cada casa (encontro de uma linha(**n**) e de uma coluna(**m**) irá corresponder à Soma-Nim dos nímeros encontrados nas bordas dessa tabela e para encontrar esse valor vamos usar a regra 3, ou seja, o valor de uma casa **(n,m)** será o menor nímero não encontrado nas casas à esquerda da linha **n** e acima da coluna **m**.

Antes de usar essa regra para construir essa tabela vamos preencher algumas casas especiais: a diagonal principal que corresponde à soma de nímeros iguais, que pela regra 1 terá como resultado 0. Mais uma vez, por simplificação, omitiremos o uso de $*$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0									
2		0								
3			0							
4				0						
5					0					
6						0				
7							0			
8								0		
9									0	
10										0

Devemos continuar preenchendo a tabela, primeiro usando a Regra dois para valores mais simples e depois a regra 3.

Vale uma observação, a soma-Nim goza da propriedade comutativa, ou seja, $*1 + *2 = *2 + *1$. Assim a tabela é simétrica com relação à diagonal principal, preenchendo um dos lados teremos todos os resultados do outro.

Observe alguns valores:

Assim, usando a Regra 3

$*4 + *2 = mex(0, 1, 2, 3, 4, 5) = *6$ que por simetria, $*2 + *4 = *6$

Calculando cuidadosamente cada valor temos a tabela 2.4 final.

A tabela 2.4 fornece todas as P-posições para um jogo de Nim com 3-pilhas e no máximo 15 fichas por pilha e é utilizada como um dicionário, um guia, uma fonte de consulta para jogar Nim.

Exemplo 2.14. Considere um jogo de Nim com 3-pilhas e posição inicial dada por (3,7,11). Qual deve ser a estratégia que o primeiro jogador deve adotar?

O primeiro passo é consultar a tabela procurando o valor da soma dois a dois dos menores nímeros das posições. Deve-se saber os valores de:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	3	2	5						
2	3	0	1							
3	2	1	0							
4	5			0						
5					0					
6						0				
7							0			
8								0		
9									0	
10										0

Tabela 2.3: Jogo de Nim

$*3 + *7$ que pela tabela é igual a $*4$

$*3 + *11$ que pela tabela é igual a $*8$

$*7 + *11$ que pela tabela é igual a $*12$

Note que as somas $*3 + *11$ e $*7 + *11$ dão resultados que não podem ser traduzidos em jogadas válidas para o jogo de Nim, pois seria necessário um aumento de ficha na pilha a ser modificada, o que é um movimento não permitido em Nim.

Como $*3 + *7 = *4$ é diferente de $*11$, significa que a posição (3,7,11) é uma N-posição. Dessa forma o primeiro jogador terá a oportunidade de deixar a P-posição (3,4,7) no jogo, basta reduzir a pilha com 11 fichas para uma de 4 fichas.

Suponha que o outro jogador retire 5 fichas da maior pilha, deixando a N-posição (2,3,4). O primeiro jogador consulta novamente a tabela e verifica que $*2 + *3 = *1$, ele retira 3 fichas da maior pilha e o jogo segue, com os dois jogadores se alternando com jogadas até que o primeiro jogador faça o último movimento de retirada de fichas e vença o jogo.

Também podemos usar essa tabela para jogar Nim com mais pilhas, aplicando a propriedade associativa descobrimos a quantidade de fichas que devemos retirar de uma das pilhas para obter uma P-posição.

Exemplo 2.15. Qual deve ser o movimento que um jogador pode fazer a partir da N-posição (2,5,7,9,10) em um jogo de Nim com 5-pilhas para ter uma P-posição?

Precisamos descobrir quanto vale:

- $*2 + *5 + *7 + *9 =$, para reduzir a pilha com 10 fichas.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabela 2.4: Posições para Jogo de Nim

- $*2 + *5 + *7 + *10 =$, para reduzir a pilha com 9 fichas.
- $*2 + *5 + *9 + *10 =$, para reduzir a pilha com 7 fichas.
- $*2 + *7 + *9 + *10 =$, para reduzir a pilha com 5 fichas.
- $*5 + *7 + *9 + *10 =$, para reduzir a pilha com 2 fichas.

Aplicando a propriedade associativa, para agrupar as somas de dois a dois nímeros, podemos consultar a tabela e obter os seguintes resultados:

- $(*2 + *5) + (*7 + *9) = *7 + *14 = *9$, devemos reduzir 1 ficha da pilha com 10 fichas.
- $(*2 + *5) + (*7 + *10) = *7 + *13 = *10$, deveríamos aumentar 1 ficha da pilha com 9 fichas.
- $(*2 + *5) + (*9 + *10) = *7 + *3 = *4$, devemos reduzir 3 ficha da pilha com 7 fichas.
- $(*2 + *7) + (*9 + *10) = *5 + *3 = *6$, deveríamos aumentar 1 ficha da pilha com 5 fichas.
- $(*5 + *7) + (*9 + *10) = *2 + *3 = *1$, devemos reduzir 1 ficha da pilha com 2 fichas.

Como o movimento de aumentar de fichas não é permitido em Nim, então um jogador tem três movimentos que transformam a N-posição (2,5,7,9,10) nas P-posições (2,5,7,9,9), (2,4,7,9,10) e (1,5,7,9,10)

2.2 Nim Misère

Um dos sucessos do jogo de Nim para a teoria dos jogos combinatórios é a facilidade de fazer pequenas modificações nas regras do jogo de Nim e isso mudar o conjunto de P-posições e N-posições desse novo jogo.

Quando alteramos a regra que define o vencedor do Jogo de Nim, obtemos uma versão desse jogo que é chamada de **Misère**.

Assumimos anteriormente que quem vence o jogo de Nim é o jogador que fizer a última jogada, se invertermos este resultado, ou seja, o jogador que fizer a última jogada for o perdedor, teremos Jogo de Nim na versão *"Misère"*.

A partir de agora, chamaremos de versão

- **Normal**: o jogo cujo vencedor é aquele que faz o último movimento.

- **Misère**: quem fizer o último movimento perde.

Para jogar a versão Misère deve-se proceder de maneira semelhante à versão normal. Segundo o Teorema de Bouton (ver [20] p. 225) para jogos de Nim na versão Misère as P-posições são dadas quando $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_k = 0$, a menos que tenhamos todos os $a_i = 0$ ou 1, nestes casos a soma nim deve ser $a_1 \oplus a_2 \oplus ... \oplus a_k = 1$. Dessa forma para que $(a_1, a_2, ...a_k)$ seja uma P-posição é necessário que tenhamos um número ímpar de pilhas iguais a $*1$.

Para um Jogo de Nim com 3-pilhas, se pelo menos uma pilha tiver mais que duas fichas as P-posições para a versão Misère serão as mesmas que o jogo de Nim normal, porém quando as pilhas forem formadas apenas por uma ou nenhuma ficha, a P-posições possíveis serão $(1, 1, 1)$ ou $(1, 0, 0)$.

Exemplo 2.16. Considere o Jogo de Nim na versão Misère com posição inicial (1, 2, 3). Vejamos duas estratégias para vencer esse jogo:

A posição (1, 2, 3) é uma P-posição em Nim então também é uma P-posição em Nim Misère, pois pelo menos uma das pilhas tem mais que duas fichas. Assim, quem poderá usar uma estratégia para vencer esse jogo é o segundo jogador(jogador 2).

1ª Estratégia:

O jogador 1, retira a ficha da pilha menor, deixando a posição (0,2,3).

O jogador 2, sabendo que a posição (0,2,2) é uma P-posição, iguala as duas pilhas.

O jogador 1 retira apenas uma ficha de uma das duas pilhas restante, deixando a posição (0,1,2).

O jogador 2 não iguala as pilhas pois sabe que a posição (0,1,1) é uma N-posição. Ele retira todas as fichas da maior pilha, deixando a posição (0,1,0) forçando o jogador 1 a perder o jogo retirando a última ficha.

2ª Estratégia:

O jogador 1 retira 2 fichas da pilha maior, deixando a posição (1,2,1). Daí o jogador 2 iguala as três pilhas, retirando uma ficha da maior pilha, resultando na posição (1,1,1). Alternadamente, o jogador 1 retira uma ficha, depois o jogador 2 retira outra ficha e por fim o jogador 1 retira a última ficha perdendo o jogo.

A tabela para o valores nímericos do Jogo de Nim na versão Misère ficaria da seguinte forma:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	3	2	5	4	7	6	9	8	11
2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8
3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9
4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14
5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15
6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12
7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13
8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2
9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3

Tabela 2.5: Posições para o Jogo de Nim na versão Misère

Esperava-se que a teoria da versão Misère para o jogo do nim pudesse ser usada também para reduzir outras versões Misères de jogos imparciais, mas estudos comprovaram que esta é uma teoria mais difícil e complexa, e tal equiparação com jogos imparciais só pode se realizada com um pequeno grupo de jogos estudados e divulgados por Conway no livro *"On Number and Games"* de 1993 [08].

Vamos conhecer outras versões do Jogo de Nim, algumas delas serão jogadas usando pilhas e fichas, já outros jogos utilizam tabuleiros de xadrez, moedas, são arrumados usando a estrutura de uma escada, de uma tira dividida em pedaços, mas também são jogos que podem ser equivalentes ao jogo de Nim, pois é possível comparar sua estrutura a um conjunto de pilhas e fichas e consequentemente usar a teoria desenvolvida para o jogo de Nim para criar uma estrategia vencedora para esse jogo. O jogo do Cavalo Branco, visto anteriormente, é um exemplo desse tipo de jogo.

2.3 Jogo da Subtração

O jogo da subtração é geralmente jogado com uma pilha de n fichas, onde dois jogadores se alternam retirando cada um em sua vez determinadas quantidades de fichas permitidas. Vence o jogador que fizer o último movimento.

A diferença desse jogo com o jogo de Nim está na quantidade de fichas que pode ser retiradas de uma pilha por um jogador. No jogo de Nim não há restrição ao número de fichas a serem retiradas, mas no jogo da Subtração existe um conjunto S composto por todas as quantidades de fichas que um jogador pode retirar em sua vez de jogar.

Quando num jogo de subtração um jogador pode retirar até 3 fichas por jogada o conjunto S é definido da seguinte forma $S = \{1, 2, 3\}$, isto significa que um jogador pode retirar ou 1 ou 2 ou 3 fichas na sua vez de jogar.

Vale ressaltar que o conjunto S deve ter valores menores que o número total de fichas da pilha inicial.

Quando dizemos que $S = \{1, 3, 5\}$ é o conjunto de retiradas de um jogo de Subtração, é o mesmo que dizer que cada jogador pode retirar apenas 1 ou 3 ou 5 fichas na sua vez de jogar.

Para vencer o jogo de Nim com 1-pilha o jogador deve sempre retirar todas as fichas da pilha, assim a posição (n) é sempre uma N-posição. Para o jogo da Subtração teremos um conjunto de P-posições, que serão definidas de acordo com o conjunto S que foi determinado para aquele jogo. Usando a teoria desenvolvida para o jogo de Nim é possível criar uma estratégia vencedora para esse jogo.

Para resolver esse jogo é interessante verificar quais os resultados possíveis quando são retiradas as quantidades de fichas do conjunto S da pilha. Vamos construir uma sequência de valores para cada quantidade n de fichas reduzidas da pilha.

Considere g(n) um nímero associado a uma quantidade n de fichas de uma pilha. Se $g(n) = 0$ então, (n) é uma uma P-posição, caso contrário, $g(n) \neq 0$, (n) é uma N-posição.

g(n) será o **mex** dos valores g(k) onde k é a quantidade de fichas que sobrou da redução de n pelos valores do conjunto S.

Assim se $S = \{a, b, c, d\}$ então,

$$g(n) = mex(g(n-a), g(n-b), g(n-c), g(n-d))$$

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.17. Seja o jogo de Subtração com uma pilha de 100 fichas e que cada jogador, em sua vez, só poderá retirar no máximo 3 fichas, assim $S = \{1, 2, 3\}$. Qual a estrategia vencedora e qual jogador poderá vencer esse Jogo?

Neste caso, $S = \{1, 2, 3\}$, ou seja, cada jogador poderá retirar 1, 2 ou 3 fichas. Assim

$$g(n) = mex(g(n-1), g(n-2), g(n-3))$$

Nosso objetivo é descobrir se a posição (100) é uma P-posição, mas

$$g(100) = mex(g(99), g(98), g(97))$$

Para calcular $g(100)$ precisamos descobrir os valores anteriores, que por sua vez também dependerão dos seus antecessores, assim é necessário calcular todos os valores $g(\text{n})$, tal que $n = 0, 1, 2...(n-1)$.

logo

$g(0) = 0$, pois o mex do conjunto vazio é 0.

$g(1) = mex(g(0)) = mex(0) = *1$

$g(2) = mex(g(0), g(1)) = mex(0, *1) = *2$

$g(3) = mex(g(0), g(1), g(2)) = mex(0, *1, *2) = *3$

$g(4) = mex(g(1), g(2), g(3)) = mex(*1, *2, *3) = 0$

$g(5) = mex(g(2), g(3), g(4)) = mex(*2, *3, o) = *1$

$g(6) = mex(g(3), g(4), g(5)) = mex(*3, 0, *1) = *2$

$g(7) = mex(g(4), g(5), g(6)) = mex(0, *1, *2) = *3$

$g(8) = mex(g(5), g(6), g(7)) = mex(*1, *2, *3) = 0$

Mas, observe a sequência que aparece na tabela:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...	99	100
$g(\text{n})$	0	1	2	3	0	1	2	3	0	...	3	0

Vemos que existe uma repetição de um conjunto de valores $g(\text{n})$ e tal que essa repetição obedece uma periodicidade. Nesse caso, a sequência que se repete é $0*1*2*3$ com período igual a 4.

Essa é uma característica do jogo da Subtração, as sequência de valores $g(\text{n})$ de um jogo sempre serão divididas em subsequências iguais, que se repetirão indefinidamente na sequência original. Encontrando essa sequência e determinando o período podemos calcular os valores $g(\text{n})$ sem conhecer todas as posições anteriores.

Como as P-posições são os valores de n quando $g(n) = 0$, temos que o conjunto das P-posições é dado por {0,4,8,..., 100}. Assim, a estratégia vencedora para esse jogo é sempre deixar na pilha uma quantidade de fichas que seja um múltiplo de 4.

Quem será o vencedor? O primeiro jogador ou segundo? Note que $n = 100$ fichas é uma P-posição, então o segundo jogador poderá ser o vencedor,pois o primeiro jogador só será capaz de reduzir a pilha para 99,98 ou 97 fichas que são N-posições.

Para vencer o jogador 2, na sua vez de jogar, deve reduzir a pilha para 96 fichas, o que é sempre possível qualquer que tenha sido a retirada do primeiro jogador. Nas jogadas seguintes esse padrão de redução se repete, as posições para o primeiro jogador são sempre N-posições e o jogador 2 terá quantidade de fichas que é uma P-posição que pode ser alcançada com uma das retiradas permitidas pelo conjunto S.

Exemplo 2.18. Seja o jogo de subtração com 100 fichas, no qual cada jogador só poderá retirar 1,3, ou 6 fichas, por cada jogador em sua vez, ou seja, $S = \{1,3,6\}$. Qual jogador terá a chance de vencer esse jogo?

Vamos construir a sequência de valores $g(\text{n})$ para esse jogo, tal que:

$$g(n) = mex(g(n-1), g(n-3), g(n-6))$$

Daí,

$g(0) = 0$

$g(1) = mex(g(0)) = mex(0) = *1$

$g(2) = mex(g(1)) = mex(*1) = 0$

$g(3) = mex(g(2), g(0)) = mex(0,0) = *1$

$g(4) = mex(g(3), g(1)) = mex(*1, *1,) = 0$

$g(5) = mex(g(4), g(2)) = mex(0,0) = *1$

$g(6) = mex(g(5), g(3), g(0)) = mex(*1, *1, 0) = *2$

$g(7) = mex(g(6), g(4), g(1)) = mex(*2, 0, *2) = *3$

$g(8) = mex(g(7), g(5), g(2)) = mex(*3, *1, 0) = *2$

$g(9) = mex(g(8), g(6), g(3)) = mex(*2, *2, *1) = 0$

$g(10) = mex(g(9), g(7), g(4)) = mex(0, *3, 0) = *1$

$g(11) = mex(g(10), g(8), g(5)) = mex(*1, *2, *1) = 0$

$g(12) = mex(g(11), g(9), g(6)) = mex(0, 0, *2) = *1$

$g(13) = mex(g(12), g(10), g(7)) = mex(*2, *1, *3) = 0$

$g(14) = mex(g(13), g(11), g(8)) = mex(0, 0, *2,) = *1$

$g(15) = mex(g(14), g(12), g(9)) = mex(*1, *1, 0) = *2$

$g(16) = mex(g(15), g(13), g(10)) = mex(*2, 0, *1) = *3$

$g(17) = mex(g(16), g(14), g(11)) = mex(*3, *1, 0) = *2$

$g(18) = mex(g(17), g(15), g(12)) = mex(*2, *2, *1) = 0$

$g(19) = mex(g(18), g(16), g(13)) = mex(0, *3, 0) = *1$

Já podemos escrever uma sequência

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	...
$g(\text{n})$	0	1	0	1	0	1	2	3	2	0	1	0	1	0	1	2	3	2	0	1	...

Observando a sequência vemos que as P-posições ocorrem quando $n = (0,2,4) mod 9$, isto é , quando os restos da divisão de n por 9 são 0,2 ou 4.

Como 100 na divisão por 9 deixa resto 1, então, $n = 100$ é uma N-posição, logo o primeiro jogador poderá sempre vencer. Basta que este deixe na sua primeira jogada 99 ou 94 fichas na pilha e continue aplicando essa estratégia até o final do jogo.

Jogo da subtração para várias pilhas

O jogo de subtração para várias pilhas é possível. Para criar uma estratégia vencedora é necessário que cada pilha seja considerada como uma posição e a soma dessas posições definirá se aquela configuração é uma P-posição ou uma N-posição.

Se um jogo é formado por pilhas contendo n_1, n_2, n_3 fichas, respectivamente em cada pilha, teremos uma P-posição se $g(n_1) + g(n_2) + g(n_3) = 0$, caso contrário, teremos uma N-posição.

Vejamos um exemplo:

Exemplo 2.19. Seja um jogo de subtração para S= {2,3,5}, com pilhas de 5,7,9 fichas. Note que apenas são permitidas retiradas de 2, 3 ou 5 fichas por cada jogador em sua vez. Qual a estratégia que deverá ser aplicada por um dos jogadores para vencer esse jogo?

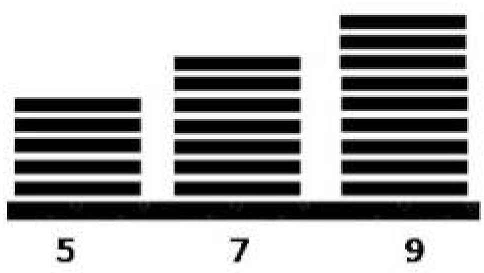


Figura 2.6: Jogo de Nim com 3-pilhas

Temos que calcular

$$g(5) + g(7) + g(9)$$

Calculando a sequência obtemos:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
g(n)	0	0	1	1	2	2	3	0	0	1	1	2

Então:

$$g(5) + g(7) + g(9) = *2 + 0 + *1 = *3$$

O que define (5,7,9) como uma N-posição, assim quem poderá ganhar o jogo é o primeiro jogador caso se na sua primeira jogada ele reduzir a pilha com 5 objetos para 2 ou 3, pois $g(2) = g(3) = *1$ e daí,

$$g(2) + g(7) + g(9) = *1 + 0 + *1 = 0$$

O Jogo da subtração na sua resolução usa conceitos matemáticos como múltiplos, divisores e dessa forma pode ser utilizado nas aulas desses conteúdos, dinamizando e auxiliando no ensino aprendizagem. Um bom exemplo desse uso está em [07] ,[16] e [18].

2.4 O Jogo de Northcott

O Jogo de Northcott é jogado em um tabuleiro de xadrez com uma ficha preta e uma ficha branca em cada linha. Os jogadores podem mover qualquer ficha de sua cor para uma casa vazia na mesma linha sem saltar a ficha de seu oponente. Perde o jogador que tiver todas as suas fichas encurraladas pelas fichas de seu adversário.

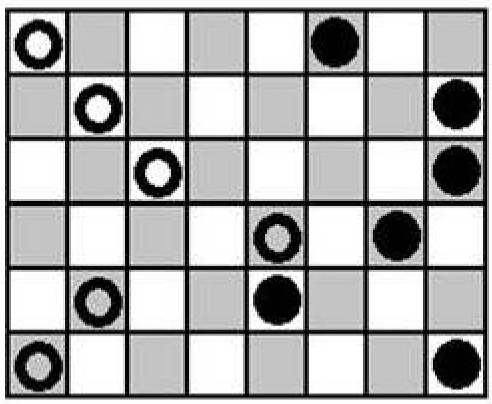


Figura 2.7: Northcott para um tabuleiro 6x8

A quantidade **n** de casas existentes entre uma ficha branca e uma preta em uma linha é equivalente a uma pilha Nim com n fichas.

Apesar de haver fichas de cores diferentes isso não impede de jogar usando a estratégia do jogo de Nim, pois o ponto de comparação com Nim é a quantidade de casas que existe entre as peças em cada linha.

Os movimentos de avançar ou recuar uma ficha sobre a linha corresponde, respectivamente, a reduzir ou aumentar o número de fichas de uma pilha Nim.

Antes de continuar, vamos definir alguns termos para auxiliar na compreensão da estratégia usada para jogar Northcott:

- $l(a) = n$ representará o número de casas existentes entre as fichas brancas e as fichas pretas numa mesma linha, onde a é o número da linha previamente numerado de cima para baixo no tabuleiro.

- Como $l(a) = n$ equivale a uma pilha Nim com n fichas, podemos escrever $l(a) = *n$, podemos representar a quantidade de casas entre duas fichas na mesma linha pelo nímero $*n$

- (l(1), l(2), ... , l(k)) é uma posição em Northcott.

- Uma P-posição em Nim é uma P-posição em Northcott. Assim, se $l(1) + l(2) + ... + l(k) = 0$ então (l(1), l(2), ... , l(k)) é uma P-posição. Caso contrário, se $l(1) + l(2) + ... + l(k) \neq 0$ então (l(1), l(2), ... , l(k)) é uma N-posição.

Quando um jogador recuar uma de suas fichas ele estará fazendo um movimento não permitido no jogo de Nim, assim a posição obtida por esse movimento não pode ser considerada nem como P-posição ou uma N-posição. Em geral esse é um movimento realizado pelo jogador que está em uma posição perdedora e serve apenas para adiar a sua derrota. Além disso o jogador seguinte pode recompor a posição anterior avançando sua ficha o mesmo número de casas que seu adversário recuou naquela mesma linha.

Vamos jogar!

Exemplo 2.20. Seja o jogo de Northcott, jogado em um tabuleiro 4x10, com a seguinte disposição inicial das pedras.

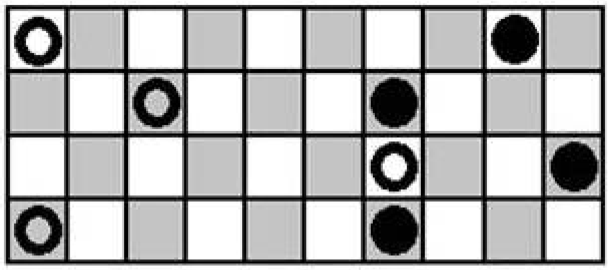


Figura 2.8: Northcott para a posição (7,3,2,5)

Para esse jogo vamos definir:

- O jogador 1 deve movimentar as fichas brancas e ser o primeiro a jogar.
- O jogador 2 movimenta as fichas pretas e é o segundo a jogar.

Esse jogo é equivalente a um jogo de Nim com 4-pilhas:

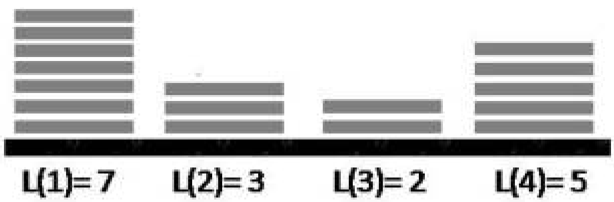


Figura 2.9: Jogo de Nim equivalente ao jogo Northcott para uma posição (7,3,2,5)

Temos $l(1) = *7$, $l(2) = *3$, $l(3) = *2$ e $l(4) = *5$, dessa forma temos a posição inicial (7,3,2,5).

Como $*7 + *3 + *2 + *5 = *1 + *2 = *3$ a posição inicial é uma N-posição e o jogador 1 poderá ser o vencedor desse jogo. Para isso ele tem três opções de jogadas que levam a uma P-posição.

- Jogada I - Avançar sua ficha 3 casas na linha 1.

- Jogada II - Avançar sua ficha 3 casas na linha 2.
- Jogada III - avançar sua ficha 1 casas na linha 3.

Suponha que ele faça a jogada 1, deixando o jogo com a seguinte disposição:

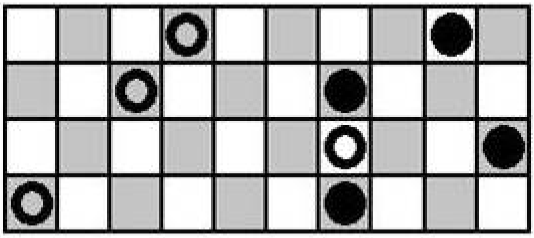


Figura 2.10: Northcott para a posição (4,3,2,5)

O jogador 2, na sua vez de jogar avança sua ficha 5 casas na linha 4 encurralando a ficha do seu adversário naquela linha. Como esperado a posição (4,3,2,0) é uma N-posição, pois $*4 + *3 + *2 + *0 = *5$

O jogador 1 agora só pode movimentar as fichas das linha 1,2 ou 3, o que torna esse jogo de Northcott equivalente a um jogo de Nim com 3-pilhas de posição (4,3,2)

Nesse caso a única P-posição é encontrada avançando a ficha branca três casas na linha 1. Veja o tabuleiro:

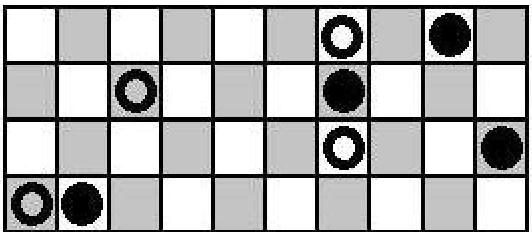


Figura 2.11: Northcott para a posição (1,3,2,0)

Na sequência o jogador 2 avança sua ficha 3 casas na linha 2, deixando ao jogador 1 apenas o movimento de recuar sua peça nessa linha, porém essa não será a estratégia que esse jogador irá usar.

O jogador 1 avança sua ficha 1 casa na linha 3, pois a posição (1,0,1,0) é uma P-posição. Como na Figura 2.12.

Ao jogador 2 resta apenas avançar uma de suas fichas nas linha 1 ou 3 ou recuar qualquer uma de suas fichas. Na tentativa de distrair seu adversário, o jogador 2 recua sua ficha 2 casas na linha 1. Deixando a posição (3,0,1,0).

O Jogador 1 retoma a P-posição anterior, apenas avançando sua peça 2 casas na mesma linha que o Jogador 2 recuou. Conforme Figura 2.13.

Na sequência o Jogador 2, avança sua ficha 1 casa na linha 3 e o Jogador 1 avança sua ficha 1 casa na linha 1, obtendo a posição terminal em Nim (0,0,0,0), assim em Nim

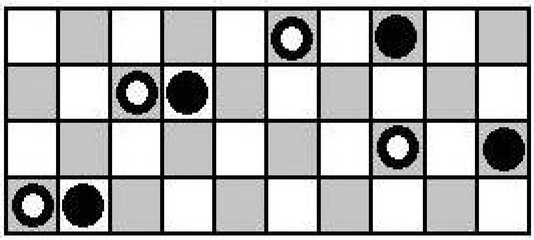


Figura 2.12: Northcott para a posição (1,0,1,0)

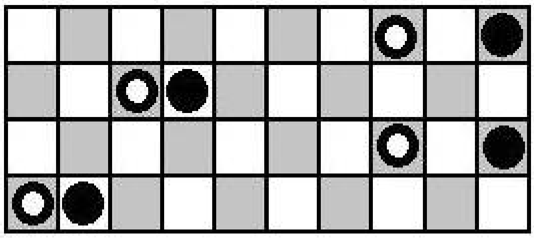


Figura 2.13: Northcott para a posição (1,0,1,0)

o jogador 2 já pode ser considerado o vencedor, porém em Nortcott o jogador 1 so será proclamado vencedor quando todas as fichas pretas estiverem encurralas no seu lado do tabuleiro.

Observe o tabuleiro na Figura 2.14, nesse momento do jogo:

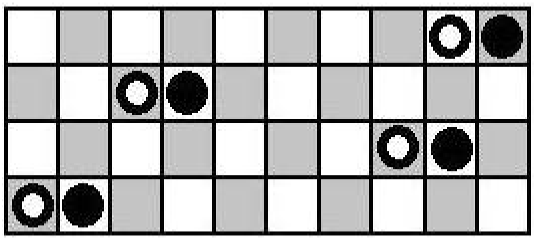


Figura 2.14: Northcott para a posição (0,0,0,0)

Note que os únicos movimentos permitidos para o jogador 2 é recuar as fichas nas linhas 2,3 ou 4, o que ele fara obrigatoriamente em uma dessas linhas.

O jogador 1 para vencer deve avançar suas fichas, na mesma linha, tantas casas tinha sido recuada a ficha de seu oponente na jogada anterior. Repetindo essa estratégia até todas as fichas pretas não possam mais ser movimentadas pelo jogador 2. Como na Figura 2.15.

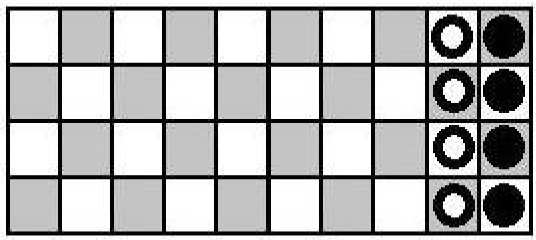


Figura 2.15: Northcott para a posição (0,0,0,0)

2.5 Jogo das Moedas

Em uma tira retangular dividida em 1 x n casas, são distribuídas de forma aleatória uma quantidade finita de moedas.

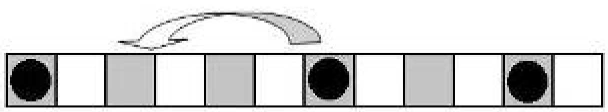


Figura 2.16: Jogo das Moedas

Deve-se colocar apenas uma única moeda em cada casa. A jogada permitida consiste em escolher uma moeda e movimentá-la quantas casas for possível da direita para esquerda, sem saltar sobre outras moedas. Deve ser jogado por dois jogadores que se alternam no movimento das moedas.

O objetivo do jogo é levar todas as moedas ao lado esquerdo da tira. O jogo é vencido pelo jogador que fizer o último movimento.

Para determinar uma estratégia vencedora para este jogo vamos considerar o número de casas, contados da direita para esquerda, existente entre duas moedas ou entre uma moeda e a extrema direita da tira. Para facilitar o entendimento, vamos numerar as moedas seguindo a ordem da direita para a esquerda, ou seja, a moeda 1 (m_1), será aquela que estiver mais à direita na tira, e assim sucessivamente. Considere também $E(m_1) = a$, o número de casas entre as moedas 1 e 2, $E(m_2) = b$ o número de casas entre as moedas 2 e 3, ..., até $E(m_k) = k$, entre as moedas n-1 e n.

$(E(m_1), E(m_2), ..., E(m_k))$ uma posição nesse jogo.

Assim, no jogo abaixo temos:

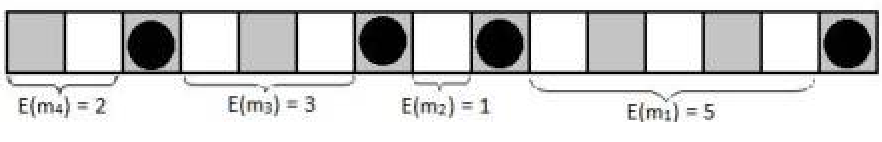


Figura 2.17: Jogo das Moedas posição (5,1,3,2)

Quando associamos cada $E(m_k)$ ao número fichas de uma pilha do jogo de Nim, percebemos que o movimento para a esquerda de uma moeda representa o mesmo movimento de redução de uma pilha. Sendo assim, esse jogo apresenta uma forma diferente de arrumar o Jogo de Nim, os espaços representam o número de fichas e as moedas o número de pilhas. Por consequência podemos usar a mesma estratégia usada para jogar Nim.

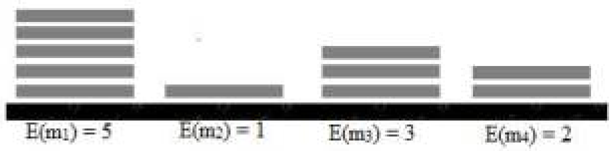


Figura 2.18: Jogo de Nim que representa o Jogo das Moedas na posição (5,1,3,2)

Como cada $E(m_k)$ representa o número de fichas de uma pilha Nim, então podemos associar o número de casas também a um *Nímero*. Assim, temos:

$E(m_1) = *5$, $E(m_2) = *1$, $E(m_3) = *3$ e $E(m_4) = *2$.

De acordo com o Teorema de Bouton, para que a posição $(E(m_1), E(m_2), ..., E(m_k))$ seja uma P-posição é necessário que

$$E(m_1) + E(m_2) + ... + E(m_k) = 0$$

caso, contrário, será uma N-posição.

No jogo acima, a posição (5,1,3,2) é uma N-posição, pois

$$*5 + *1 + *3 + *2 = (*1 + *4) + *1 + (*1 + *2) + *2 = *5.$$

O primeiro jogador poderá sempre vencer, basta que em todas as suas jogadas deixe sobre a tira uma arrumação de moedas que seja uma P-posição.

Apesar da teoria sobre o Jogo de Nim resolver esse jogo a restrição de nenhuma moeda poder saltar sobre outra, limita o movimento em algumas jogadas e pode fornecer falsas P-posições no final do jogo. Resta que o jogador analise suas opções e opte pela melhor solução. Vejamos um exemplo de uma partida desse jogo.

Exemplo 2.21. Considere uma tira retangular 1x12 com três moedas distribuídas aleatoriamente sobre a mesma. Dois jogadores alternadamente movimentam uma dessas moedas da direita para esquerda, quantas casas forem possível sem saltar nenhuma outra moeda. O jogador que levar uma moeda para última casa vazia da extremidade esquerda da tira: vence.

Vamos descrever o passo a passo desse jogo. A situação será analisada pelo olhar do jogador que tenha a possibilidade de ganhar o jogo, a partir da posição inicial proposta.

O jogo tem início com a seguinte disposição das três moedas sobre a tira.

Temos:

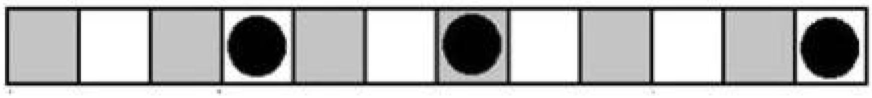


Figura 2.19: Jogo das Moedas na posição (4,2,3)

$$E(m_1) = *4 \ , \ E(m_2) = *2 \text{ e } E(m_3) = *3.$$
e
$$E(m_1) + E(m_2) + ... + E(m_3) = *4 + *2 + *3 = *4 + *2 + *1 + *2 = *5$$

Portanto, (4,3,2) é uma N-posição e o primeiro a jogar terá a oportunidade de deixar sobre a tira uma arrumação que resulte em uma P-posição.

Chamaremos de *Jogador 1*, o jogador que fará a primeira jogada e de *Jogador 2*, o que jogará imediatamente após o primeiro.

Sabendo que o jogo das moedas é um disfarce para o Jogo de Nim, o Jogador 1 usa a posição (1,2,3), que é uma P-posição em Nim. Para isso ele movimenta a m_1(primeira moeda à direita) três casas para a esquerda. Deixando a seguinte disposição na tira:

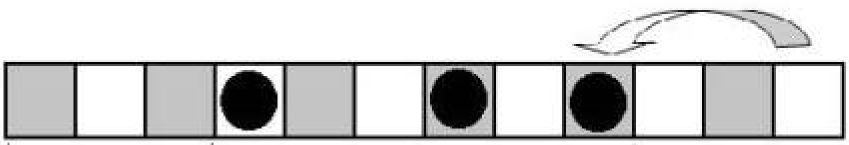


Figura 2.20: Jogo das Moedas na posição (1,2,3)

Como (1,2,3) é uma P-posição qualquer que seja o movimento realizado com as moedas pelo Jogador 2 o resultado é uma N-posição.

Suponha, que o jogador 2 mova a m_2 duas casas para a esquerda. Deixando a posição (3,0,3.). Mas, $E(m_1) + E(m_2) + ... + E(m_3) = *3 + 0 + *3 = 0$. Uma P-posição?

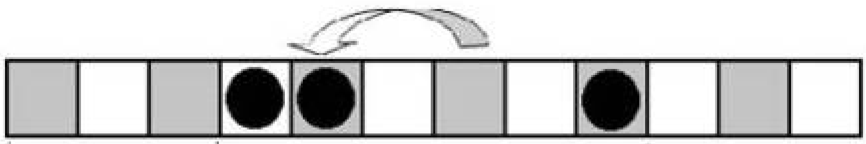


Figura 2.21: Jogo das Moedas na posição (3,0,3)

Pela regra se o jogo está em uma P-posição o próximo movimento só poderá resultar em uma N-posição e além disso, comparando a um jogo de Nim esse movimento é o mesmo que aumentar o número de fichas de uma das pilhas e reduzir outra, o que em Nim é uma jogada inválida, então essa jogada não pode ser considerada como uma P-posição válida em Nim.

Note que as moedas 1 e 2 estão uma ao lado da outra, mas em casas diferentes e além disso cada uma delas só pode ser movida separadamente tornando possível que o jogador 1 restaure uma nova P-posição.

O jogador 1, usando a estratégia de deixar um número de casas iguais entre duas moedas pois posições (0,n,n) são P-posições em Nim, movimenta a m_3 três casas, até a extremidade esquerda da tira. Deixando, agora uma P-posição verdadeira:

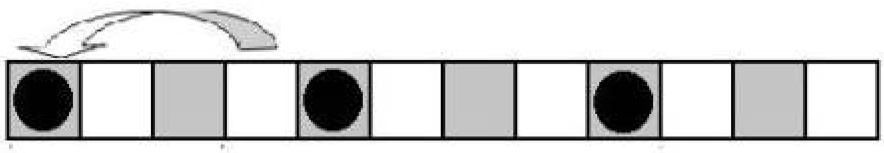


Figura 2.22: Jogo das Moedas na posição (3,3,0)

$$E(m_1) = *3\ ,\ E(m_2) = *3 \text{ e } E(m_3) = 0.$$

O jogador 2 na tentativa de atrapalhar o jogador 1, movimenta a m_2 duas casa para à esquerda.

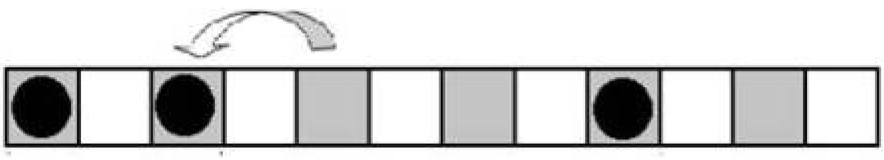


Figura 2.23: Jogo das Moedas na posição (5,1,0)

Nesse momento, o jogador um precisa de uma atenção redobrada e notar que se ele deixar a posição (1,1,0) dará a oportunidade do jogador 2 vencer o jogo. Vejamos como:

Suponha que o jogador 1 movimente a m_1 quatro casas para a esquerda.

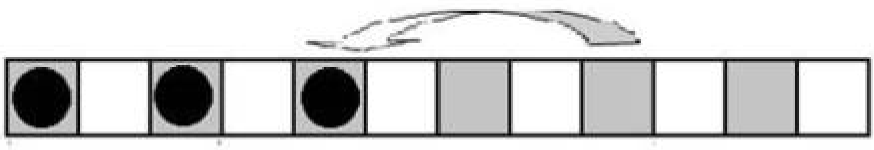


Figura 2.24: Jogo das Moedas na posição (1,1,0)

Em sua vez o jogador 2 pode mover a m_1 uma casa para a esquerda, sobrando apenas um movimento obrigatório para o jogador 1: mover a m_2 criando uma casa entre as moedas m_1 e m_2 e consequentemente o Jogador 2 fará o último movimento do jogo levando a m_1 para a casa vazia.

Então, para vencer o Jogador 1 deverá movimentar a m_1 uma casa para a esquerda.

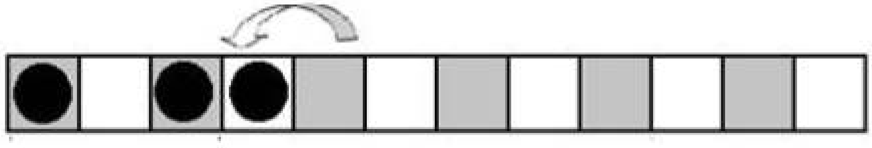


Figura 2.25: Jogo das Moedas na posição (0,1,0)

Daí o jogo segue como descrito anteriormente, mas invertendo as jogadas entre os jogadores 1 e 2. Tornando, como previsto, o jogador 1 como vencedor.

Conhecer as posições que levam à vitoria para um jogo de Nim, é importante nesse jogo, mas, como em qualquer variação, é preciso que os jogadores analisem as possibilidades das próximas jogadas do seu oponente e até mesmos das suas, pois se um jogador começa o jogo em uma P-posição sempre será possível recompor uma nova P-posição.

2.6 Escadaria Nim

Em uma escadaria de n degraus são distribuídas um número finito de fichas em cada degrau. Os jogadores de maneira alternada devem movimentar pelo menos uma ficha de um degrau para o degrau imediatamente abaixo. O jogo termina quando todas as fichas que estavam nos degraus são levadas para o chão (início da escada), o jogador que levar a última ficha para o chão, ou seja, que fizer o último movimento é o vencedor.

Com o objetivo de entender a estratégia que um jogador deve executar para se tornar o vencedor desse jogo, vamos definir alguns critérios de arrumação para a escadaria:

- Cada degrau deve ser numerado de baixo para cima (esquerda para direita): a partir do chão que receberá o número 0 e na sequência os degraus 1,2,3,..., n
- A quantidade (k) de fichas em cada degrau será representado por $d(n) = k$ onde n é o número do degrau.
- Uma posição na Escadaria Nim é dada pelas quantidades de fichas dos degraus de numeração ímpar: (d(1), d(3), d(5), d(7), ..., d(n-1)).
- Uma P-posição em Nim é um uma P-posição em Escadaria Nim.

Exemplo 2.22. Numa escadaria de 5 degraus são distribuídas as seguintes quantidades de fichas em cada degrau, numerados de baixo para cima: d(1) = 7, d(2) = 4, d(3)=8, d(4)= 2 e d(5)= 9 . Dois jogadores devem disputar alternadamente levando uma quantidade de fichas de um degrau para o imediatamente abaixo, sem pular degraus, até que todas as fichas estejam fora da escada. Aquele que levar a última ficha para o fim da escada vence.

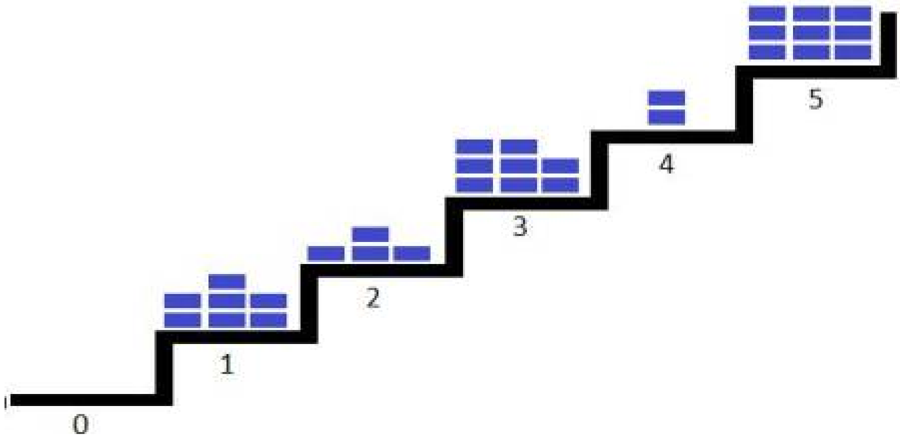


Figura 2.26: Jogo das Escadas posição (7,8,9)

Se você fosse um dos jogadores e pudesse escolher quem seria o primeiro a jogar o que escolheria?

Para responder essa pergunta é importante notar que o movimento de fichas de um degrau ímpar para um par é o mesmo que reduzir o número de fichas de uma pilha Nim. Por essa razão que as posições na Escadaria Nim são definidas apenas com os degraus ímpares.

Os movimentos de um degrau par para um degrau ímpar não interferem na estratégia vencedora de um jogador (claro, se não forem feitas por ele!), pois estes movimentos resultarão apenas em aumentos de fichas nas pilhas de Nim, que podem ser facilmente reduzidos na próxima jogada restaurando a posição da jogada anterior.

Esse jogo começa com a posição (7,8,9) que é uma N-posição em Nim e também será na Escadaria. Pois $*7 + *8 + *9 = *6$.

Então o primeiro jogador tem a oportunidade de deixar sobre a mesa uma P-posição, que para esse número de ficha pode ser a posição (7,8,3), ele deve movimentar 6 fichas do degrau 5 para o degrau 4. E jogando adequadamente até o final do jogo poderá se tornar o vencedor.

Assim, podendo escolher o jogador deve ser o primeiro a jogar.

2.7 Outros Jogos

Existem outros jogos que são variações do jogo de Nim, são arrumados em pilhas de fichas mas que possuem alguma regra que limita o movimento das fichas e os diferenciam do Nim normal. Alguns desses jogos serão descritos e suas soluções anunciadas, mas não nos preocuparemos com exemplos, caso o leitor tenha interesse indicaremos uma referência, como mais informações

São jogos imparciais para dois jogadores que se alternam em jogadas bem definidas.

O jogo termina quando não existem mais movimentos para nenhum dos jogadores. O vencedor é sempre o jogador que fizer o último movimento.

Poker Nim

O jogo de Poker-Nim, que é jogado com as fichas do jogo de poker tradicional, uma quantidade de fichas são separados em pilhas e cada jogador inicia o jogo com uma quantidade de fichas reservadas; comparado ao poker seriam as fichas usadas para fazer as apostas.

A jogadas consistem em reduzir ou aumentar a quantidade de fichas de uma única pilha. Não importa o número de fichas reservadas que um jogador possua, quem pode vencer em Nim, também poderá ganhar em Poker-Nim.

Uma P-posição em Nim é uma P-posição em Poker Nim.

Nesse jogo os aumentos de fichas podem ser revertidos com uma jogada de redução de fichas, ou seja, se o jogo estiver em uma P-posição e o jogador, nesse caso que está perdendo, acrescentar uma quantidade **m** de fichas em uma pilha, basta ao próximo jogador reduzir m fichas da mesma pilha K e voltar à P-posição. Note que jogadas como essa são apenas uma maneira de adiar uma derrota e de fazer com o adversário use suas fichas reservadas.

End Nim

As pilhas devem ser arrumadas uma ao lado da outra formando uma linha, em cada jogada apenas uma das pilhas que estão nas extremidades da linha pode ser reduzida em um número qualquer de fichas. No artigo "The game of End Nim", de Michael H.Albert e Richard J. Nowakowski [01] demonstraram uma solução para esse jogo.

No arquivo "Problem of the Month (November 2000)"[17] os autores Trevor Green e Philippe Fondanaiche trazem algumas P-posições gerais para esse jogo com até 4 pilhas. São elas.

- (a, a)
- (a,b,a) com $a \neq b$.
- (a, b,b, a) com $a \neq b$.
- (a,b,c,a) com$a < b < c$ ou $b < c < a$.
- (a, b,c, a +1) com $b \leq a < c$.

Por exemplo as posições (2,5,2), (3,5,5,3), (4,5,7,4), (7,3,4,7), (5,2,7,6) são P-posições em End-Nim.

Duplo Nim

Nesse jogo pode-se retirar fichas de duas pilhas diferentes. Em "Problem of the Month (November 2000)"[17] encontramos algumas P-posições gerais encontrados pelos autores:

- (a)
- (a,a,a,b) com $b \geq a \geq 1$.
- (1,a, a,a, a) com $a \geq 1$.
- (1,a,a+1, a+1,b) com $b \geq a + 1$.
- (2,a, a,a,a)
- (2,a,a+2, a+12,b) com $a = 0$ ou $1 mod 2$ e $b \geq a + 2$.

Esse jogo com apenas duas pilhas e os jogadores podem retirar a mesma quantidade de fichas da duas pilhas é conhecido como o Jogo de Wythoff, em homenagem ao matemático holandês Willem Abrahan Wythoff que em 1907 no artigo "A modification of the game of Nim"[21] determinou as P-posições para esse jogo que estão diretamente relacionadas à Proporção Áurea.

Greedy Nim

Em Greedy Nim os jogadores só podem retirar fichas da maior pilha. No artigo "Nim restricions"dos autores de Michael H.Albert e Richard J. Nowakowski [02] provaram o teorema:

Teorema 2.23. *As posições para Greedy Nim são precisamente aquelas em que o número das maiores pilhas é par.*

Usando esse teorema pode-se criar uma estratégia para jogar e vencer esse jogo.

Seja x o número de fichas da maior pilha, y o número de fichas da segunda maior pilha. P_x representa o número de pilhas com **x** fichas e P_y o número de pilhas com y fichas.

- Se P_x for ímpar - basta que o jogador reduza uma das pilhas com x fichas.
- Se $P_x = 1$ - o jogador deve observar o valor de P_y e proceder da seguinte maneira:
  - Se P_y for ímpar- o jogador reduz a pilha com x fichas para uma pilha com y fichas, tornado assim P_y par.
  - Se P_y for par - o jogador deve reduzir a pilha com x fichas para um valor menor que y fichas.

Building Nim

Building Nim é jogado em duas fases: Na primeira fase dois jogadores de maneira alternada devem colocar uma certa quantidade de fichas, uma a uma, em pilhas, inicialmente vazias, até que todas as fichas tenham sido posicionadas em uma das pilhas. Na segunda fase os jogadores jogam Nim.

No artigo “Building Nim”[09] os autores analisam o jogo em detalhes e demonstram algumas soluções para casos com até 5 pilhas e conjecturam que o jogo, em geral, pode ser vencido pelo primeiro jogador.

Spite Nim

Nesse jogo o número de fichas que deve ser retirado de uma das pilhas é anunciado pelo jogador que não fará o movimento naquela jogada, esse número deve ser menor ou igual ao número de fichas da maior pilha. O outro jogador pode fazer a retirada dessas fichas em uma única pilha, que tenha pelo menos a quantidade de fichas a ser retirada.

No artigo “A variant of Nim and a function defined by Fibonacci representation”[12] o autor Davi R. Hale analisa o jogo e mostra uma solução parcial que está intimamente ligada à Proporção Áurea.

Fibonacci Nim

Usaremos com base a dissertação de Mestrado de João Miguel R. de Carvalho [07] para descrever esse jogo e expor uma solução.

Fibonnnaci Nim é jogado com apenas uma pilha de n fichas. O primeiro jogador deve remover pelo menos uma ficha da pilha, mas não deve retirar todas as fichas numa mesma jogada. Já a partir da segunda jogada, os jogadores devem sempre retirar até o dobro de fichas que foi retirado na jogada anterior.

Para vencer, o jogador que começa deve sempre deixar na pilha uma quantidade de fichas que seja um dos números da sequência de Fibonacci (1,1,2,3,5,8,13,21,24,...); caso não seja possível ele deve encontrar uma soma de números não consecutivos da sequência de Fibonacci que gera o total de fichas da pilha, pegar a menor parcela dessa soma e retirar essa quantidade de fichas da pilha.

Por exemplo:

Num jogo de Fibonacci Nim com 32 fichas o jogador pode retirar 3 fichas da pilha para encontrar uma P-posição, pois $32 = 3 + 8 + 21$, isso caso ele não possa reduzir essa pilha diretamente para um número da sequência de Fibonacci.

Antonim

Esse é um jogo descrito em "Winning Ways for your Mathematical Plays" no volume 3 [04] e é jogado da mesma forma que Nim, porém os jogadores não devem deixar duas pilhas com a mesma quantidade de fichas.

Os autores apresentam uma solução geral para um jogo com 3-pilhas, que consiste em:

" Se (a, b, c) é uma P-posição em Antonim então $(a+1, b+1, c+1)$ é um a P-posição em Nim."

Esse resultado gera uma tabela que indica as P-posições de Antonim com 3-pilhas com até 14 fichas por pilha.

Para uma quantidade maior de pilhas não se pode determinar uma regra simples para encontrar as P-posições.

Moore's Nim_k

Moore's Nim também é conhecido como Nim_k e foi sugerido pelo matemático americano Eliakim Hastings Moore [15] e as regras que o diferenciam de Nim é que nesse jogo todas as pilhas podem sofrer redução numa mesma jogada. Por exemplo em um jogo de Moore's Nim_3 os jogadores podem retirar quantidades diferentes ou iguais de fichas de 1,2 ou três pilhas.

Um P-posição em Moore's Nim_3 é dada quando os números de fichas de cada pilha são transformados para a base 2 e depois somados na base $k+1$ e esse resultado é igual a 0.

Exemplo 2.24. No jogo de Moore's Nim_2 a posição inicial $(3, 5, 7, 8)$ é uma N-posição pois:

$3 + 5 + 7 + 8 = (0011)_2 \oplus_3 (0101)_2 \oplus_3 (0111)_2 \oplus_3 (1000)_2 = (1220)_3$

Um movimento possível para transformar essa N-posição em P-posição é retirar 2 fichas das pilha com 8, ficando com a soma:

$3 + 5 + 7 + 6 = (0010)_2 \oplus_3 (0101)_2 \oplus_3 (0110)_2 \oplus_3 (110)_2 = (0000)_3$

Grundy Games

Cada jogador em sua vez deve dividir uma única pilha em duas pilhas de tamanhos diferentes. O jogador que dividir a última pilha é o vencedor.

O jogo termina quando todas as pilhas tem 1 ou 2 fichas por pilha, ou seja, uma pilha com 1 ou 2 fichas representa uma P-posição e podem ser representado pelo nímero 0 e o valor que representa uma posição em Grundy Game é chamado de "Valor de Grundy "e denotados por $g(0) = 0$, $g(1) = 0$ e $g(2) = 0$.

Usando o Principio do menor Excluído (Mex) calculamos os Grundy valores de uma pilha com 3 fichas. Note que essa pilha só pode ser dividida em uma pilha com 2 fichas e outra com 1 ficha. Assim:

$$g(3) = mex(g(2), g(1)) = *1$$

Os valores Grundy já foram calculados para um número muito grande de fichas gerando uma sequência com uma forte tendencia a ser periódica não foi possível ainda provar essa periodicidade. Em “Winning Ways for your Mathematical Plays”[03] são apresentados os 101 primeiros valores Grundy .

Ao leitor interessado em conhecer outros jogos que podem ser resolvidos usando a teoria gerada pelo Jogo de Nim os quatro volumes da coleção “Winning Ways for your Mathematical Plays”, contém uma grande diversidade de Jogos Combinatórios.

Capítulo 3

O Jogo de Nim na sala de aula

O uso de jogos como uma metodologia que auxilia os professores nas aulas de matemática já vem sendo estudado há algum tempo. Essas pesquisas apontam que o uso de jogos ajuda no desenvolvimento do raciocínio lógico, estimula o pensamento matemático e a capacidade de resolver problemas.

Grando [11] propõe a inserção dos jogos no ambiente escolar, pois estes podem conferir ao ensino uma aprendizagem lúdica, acreditando que quando se propõe um jogo na sala de aula estamos buscando:

> Um ensino que considere o aluno como sujeito do processo, que seja significativo, que proporcione um ambiente favorável à imaginação, à criação, à reflexão, enfim à construção e que lhe possibilite um prazer em aprender.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [14] reconhecem a importância do uso de jogos na sala de aula pois:

> Os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes , enfrentar desafios, lançar-se à busca por soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório.

Os jogos combinatórios imparciais estudados nesse trabalho são jogos de estratégia, que estimulam o jogador a descobrir jogadas que possam garantir a vitória. Essa busca proporciona o desenvolvimento do raciocínio lógico e consequentemente melhora o pensar matemático.

O uso do jogo de Nim para auxiliar na aprendizagem de conceitos como MDC e MMC estudados em [18], e também para aprimorar o o algoritmo da divisão em [07] são exemplos do sucesso do uso desses jogos no ensino-aprendizagem de matemática.

Queremos propor uma sequência de atividades que estimule o aluno a pensar como os jogos são jogados, atividades que estimulem o raciocínio, sem um conteúdo específico de matemática atrelado a esse jogo.

O objetivo é proporcionar um envolvimento com a estratégia vencedora do Nim, fazendo com que o aluno construa essa estratégia ao longo das atividades e posteriormente aplicá-las em atividade práticas de jogos.

3.1 Atividades

Para as atividades proposta vamos ter como base o Jogo de Nim, um jogo formado por um conjunto de fichas arrumadas em pilhas, onde cada jogador em sua vez, deve retirar pelo menos uma ficha de uma única pilha, e na sequência o outro jogador procede da mesma maneira, até que não sobre mais nenhum ficha. Vence o jogador que fizer a última retirada de fichas. Chamaremos de:

- Jogador 1: o jogador que fizer a primeira jogada.
- Jogador 2: o jogador que fizer a segunda jogada.

Atividade 1

No jogo de Nim com 1-pilha de 10 fichas. Suponha que você é o Jogador 1 que movimento (retirada de fichas) você faria para poder vencer esse jogo, se fosse permitido retirar:

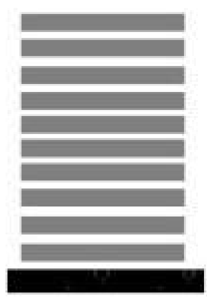
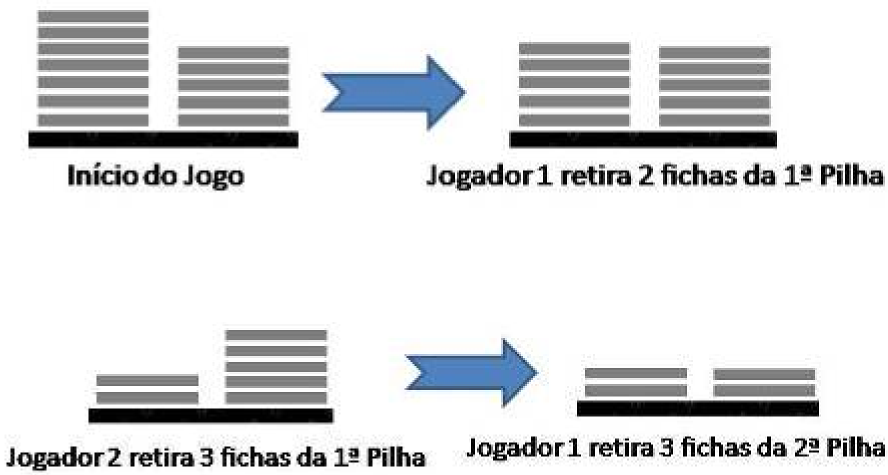


Figura 3.1: Jogo de Nim com 1 pilha

a) até todas as fichas em uma jogada?
b) até 5 fichas em uma jogada?
c) exatamente 2 fichas por jogada?

Atividade 2

Observe os movimento feitos pelo jogador 1, no Jogo de Nim com 2-pilhas a seguir:



Se o Jogador 1 continuar repetindo a mesma forma de jogar ele vencerá esse jogo? Justifique sua resposta.

Atividade 3

Agora você é o jogador 1, no jogo de Nim da figura abaixo. Qual jogada poderá ser feita para usar a mesma estrategia usada na Atividade 2?

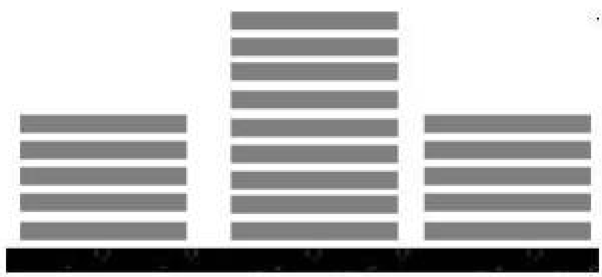
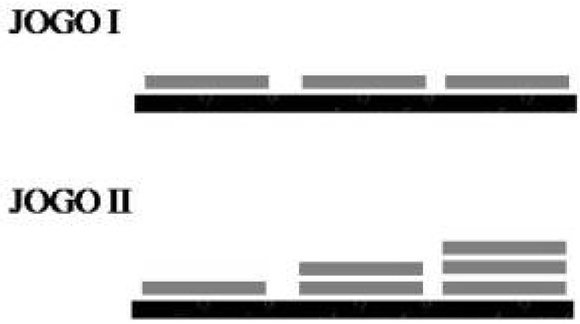


Figura 3.2: Jogo de Nim com 3 pilhas

Atividade 4

Observe o jogo de Nim abaixo:



a) Em qual desses jogos o jogador 1 poderá ser o vencedor? Porquê?

b) Em qual desses jogos o jogador 2 poderá ser o vencedor? Porquê?

Atividade 5

No jogo de Nim vamos chamar de **posição** o conjunto formado pelas pilhas organizadas da pilha com menos fichas até a pilha com mais fichas e escreveremos essa posição da seguinte forma: "*um jogo de Nim com 3 pilhas com, respectivamente, 1,4,5 fichas por pilha será representado pela posição inicial (1,4,5)*".

Seja o Jogo de Nim com 3 pilhas e posição inicial (2,3,5):

Figura 3.3: Jogo de Nim com 3 pilhas com posição inicial (2,3,5)

O Jogador 1 antes de fazer sua jogada consulta a tabela 3.1

E faz a soma na base 2 dos números que formam a posição inicial desse jogo:

$2 + 3 + 5 =$

$$\begin{array}{cccc}
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0
\end{array}$$

Número	Representação na Base 2	Número	Representação na Base 2
1	0001	6	0110
2	0010	7	0111
3	0011	8	1000
4	0100	9	1001
5	0101	10	1010

Tabela 3.1: Números de 1 a 10 na base 2

Na sequência o jogador 1 faz uma jogada retirando uma quantidade de fichas de uma das pilhas e com a nova posição calcula a soma na base 2:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

a) Qual foi a pilha modificada e quantas fichas foram retiradas dessa pilha? Qual a posição obtida após esse movimento?

b) Consulte a tabela 3.1 e some os valores da posição (3,6,8), ou seja calcule $3 + 6 + 8$ na base 2.

c) Suponha que você irá fazer um movimento no jogo de Nim de posição (3,6,8), mas queira que a soma obtida após esse movimento seja igual a 0000. Então qual deve ser a pilha que você deverá reduzir e quantas fichas deverá retirar dessa ficha?

Atividade 6

No jogo de Nim com 3-pilhas e posição inicial (3,4,7). Nesse jogo, os jogadores 1 e dois se alternam em jogadas bem pensadas e calculadas e no final do jogo o **Jogador 2** vence. O mesmo ocorre quando a posição inicial de um Jogo de Nim é dada por (3,5,6), ou seja, o jogador 2 vence.

Já nos jogos de Nim com posições iniciais (2,7,9) e (1,4,6) o vencedor é o **Jogador 1**.

a) Calcule as somas na base dois das posições iniciais dos jogos em que o **Jogador 1** foi o vencedor.

b) Calcule as somas na base dois das posições iniciais dos jogos em que o **Jogador 2** foi o vencedor.

c) Se a posição inicial de um jogo de Nim com 3 pilhas fosse (3,5,9), qual jogador poderia ser o vencedor? Porquê?

Atividade 7

Observe o jogo de Nim descrito a seguir:

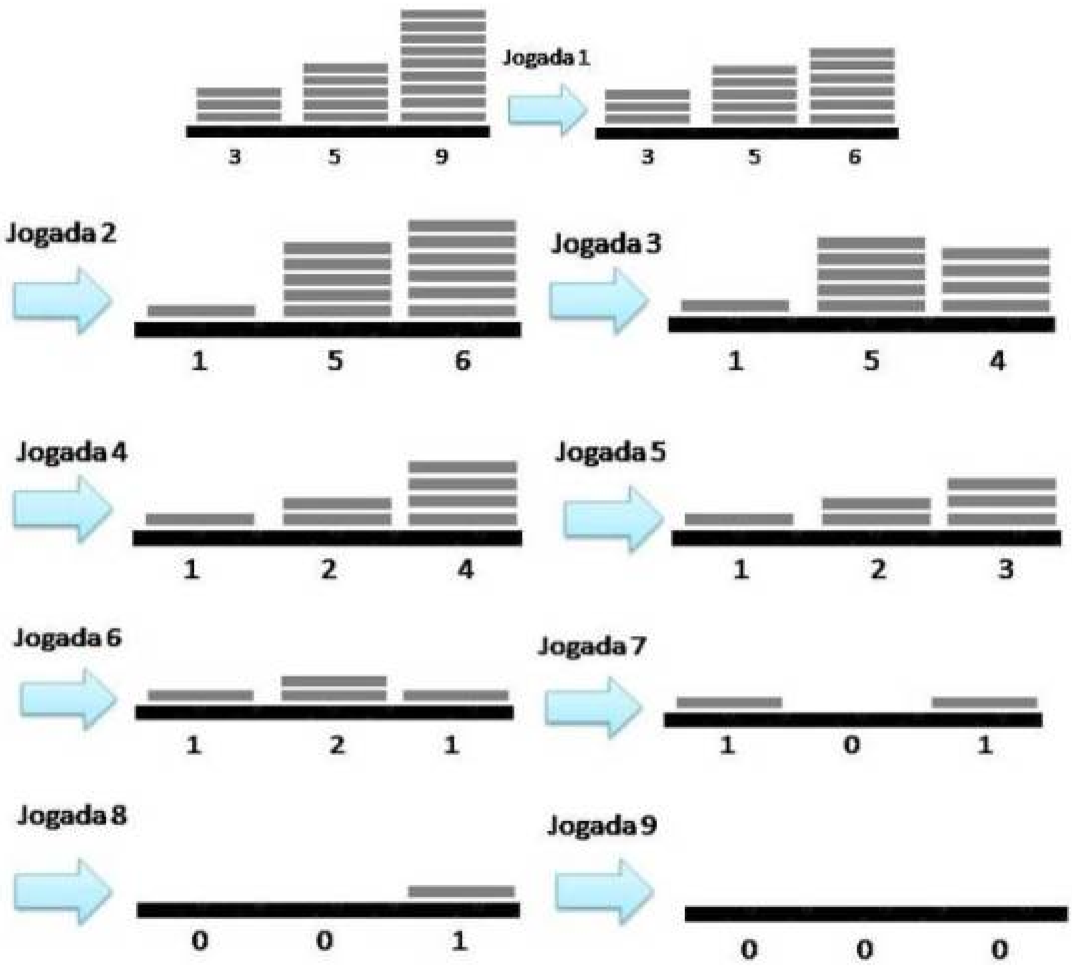


Figura 3.4: Jogadas feitas pelo Jogador 1 são 1,3,5,7 e 9

a) Some na base 2 todas as posições que ficaram após as jogadas do Jogador 1. Qual foi o resultado dessas somas?

b) Baseado nos movimentos do Jogador 1, descreva o que deve ser feito em uma jogada para seja possível a um jogador sempre vencer?

Atividade 8

Você agora é o Jogador 1 e deve jogar o Jogo de Nim com 3-pilhas de posição inicial (7,9,10). Complete a descrição desse jogo com os seus movimentos, tendo como base a estratégia usada na questão anterior.

1ª Jogada: Jogador 1 -

Posição:

2ª Jogada: Jogador 2 - Retira 2 fichas da pilha com 10 fichas;

Posição (3,5,9)

3ª Jogada: Jogador 1 -

Posição:

4ª Jogada: Jogador 2 - Retira 4 fichas da pilha com 6 fichas;

Posição (2,3,5)

5ª Jogada: Jogador 1 -

Posição:

6ª Jogada: Jogador 2 - Retira todas fichas da pilha com 3 fichas;

Posição (0,1,2)

7ª Jogada: Jogador 1 -

Posição:

8ª Jogada: Jogador 2 - Retira 1 ficha de uma das pilhas com 1 ficha;

Posição (0,0,1)

9ª Jogada: Jogador 1 -

Posição:

Quem é o vencedor?

Agora, complete:

a) Para poder vencer o jogo de Nim um jogador deve deixar em sua vez de jogar uma posição que a soma na base 2 dos seus valores seja igual a ....

b) Se a soma dos valores da posição inicial de um jogo de Nim .... , então o Jogador 2 poderá ser o vencedor.

c) Se a soma dos valores da posição inicial de um jogo de Nim .... , então o Jogador 1 poderá ser o vencedor.

Atividade 9

A estratégia usada para vencer o Jogo de Nim, descrita na Atividade 8, foi descoberta pelo matemático Charles Leonard Bouton em 1901 e pode ser generalizada para um jogo com mais pilhas.

Para cada posição inicial dos Jogos de Nim abaixo, determine quem poderá ser o vencedor , Jogador 1 ou Jogador 2?

Se o vencedor for o jogador 1 descreva uma jogada usando a estratégia vencedora do Jogo de Nim.

a) (1,3,5,6)

b) (2,3,7,10)

c) (2,3,6,7)

d) (5,6,8,10)

Considerações Finais

Neste trabalho introduzimos alguns elementos da Teoria dos Jogos Combinatórios visando entender e justificar a teoria matemática usada para solucionar um jogo em especial, que foi minuciosamente descrito e explicado, pois serve como base para resolver uma diversidade de outros jogos: o Jogo de Nim.

O Jogo de Nim apresenta uma forma de jogar interessante e que envolve uma matemática simples e de fácil entendimento, o que permite o uso desse jogo como mais uma forma de enriquecer as aulas de matemática.

Por ser um jogo que exige pensar cada movimento buscando a vitória, o processo de cada jogada auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico, na busca por soluções das jogadas melhora o pensamento matemático, o que resulta em avanços em outros conteúdos desta disciplina.

Dessa forma acreditamos que o uso do Jogo de Nim e de suas variações pode e deve ser mais uma ferramenta de apoio do professor para melhorar o ensino e a aprendizagem de matemática em toda a Educação Básica.

Além disso, o estudo da Teoria dos Jogos Combinatórios é uma área relativamente nova na Matemática e ainda com muitos campos de estudos em aberto, porém, pouco conhecidos no Brasil. Seria interessante que os Cursos de Matemática incluíssem esse conteúdo nas Ementas de suas disciplinas, proporcionando que os futuros professores conheçam e apliquem essa rica área da matemática no cotidiano escolar.

Referências Bibliográficas

[01] ALBERT, Michael H. e NOWAKOWSKI,Richard J. **The Game of End-Nim**. The Eletronic Journal of Combinatorial 8, n^o 2,(2001). Disponível em: $ftp://ftp.math.ethz.ch/hg/EMIS/journals/EJC/Volume_8/PDF/v8i2r1.pdf$

[02] ALBERT, Michael H. e NOWAKOWSKI,Richard J. **Nim Restrictions**. The Eletronic Journal of Combinatorial Number Theory 4,(2004). Disponível em: https://www.emis.de/journals/INTEGERS/papers/eg1/eg1.pdf

[03] BERLEKAMP, Elwyn, CONWAY, John, e GUY, Richard. **Winning Ways for Yuor Mathematical Plays** , 2^a Edição. Ed. A. K. Peters, Massachustts, Vol. 1,(2001).

[04] BERLEKAMP, Elwyn, CONWAY, John, e GUY, Richard. **Winning Ways for Yuor Mathematical Plays** , 2^a Edição. Ed. A. K. Peters, Massachustts, Vol. 3,(2003).

[05] BOUTON, Charles L. **Nim a Game With a Complete Mathematical Theory**.Annals of Mathematics. n^a 3, 33-39 pp.,(1901).

[06] CARVALHO, João M.R. **Jogos de Subtração e Outros Jogos Combinatórios**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro, Portugal, (2013). Disponível em ¡http://ria.ua.pt/handle/10773/12077¿.

[07] CASSIANO, Milton. **O Uso do Jogo de Nim para a Construção/aprimoramento do Algoritmo da Divisão**. Trabalho apresentado ao X Encontro Nacional de Educação Matemática, Salvador, (2010).

[08] CONWAY, John. **On Number and Games**.Ed. A. K. Peters , (2007).

[09] DUCHÊNE, Eric et al. **Building Nim**.(2015). Disponível em $https://arxiv.org/pdf/1502.04068.pdf$

[10] FERGUSON, Thomas S. **Game Theory**. Parte I. Universily of California at Los Angeles,(2005). Disponível em $https://www.math.ucla.edu/\ tom/Game_Theory/comb.pdf$

[11] GRANDO, Regina C. **O Conhecimento Matemático e o uso de Jogos na sala de aula.**. Tese de Doutorado.FE/UNICAMP, Campinas, (2000).

[12] HALE, David. **A variant of Nim and a function defined by Fibonacci representation**. University of Wisconsin-Milwaukee,(1982). Disponível em $http://www.fq.math.ca/Scanned/21-2/hale.pdf$

[13] MELO, Carlos A. **Um jogo e varias versões**. Revista do Professor de Matemática, nº 6.47-52 pp.,(1985).

[14] BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO **Parâmetros Curriculares Nacional**. MEC,Brasília.(1997).

[15] MOORE, E. H. **A generalization of game called Nim**. Annals of Mathematics, vol. 11, 93-94 pp.,(1910). Disponível em: $https://ia801609.us.archive.org/15/items/jstor-1967321/1967321.pdf$

[16] MOREIRA, Leandro O. **O jogo da subtração: uma ferramenta para as aulas de Matemática da Educação Básica**. Dissertação de Mestrado PUC, Rio de Janeiro, (2014).

[17] **Problem of the Month (November 2000)**. Disponível em http://www2.stetson.edu/ efriedma/mathmagic/1100.html

[18] RODRIGUES, Hélio O. e SILVA, José R. **O jogo de Nim e os conceitos de MDC e MMC**. Trabalho apresentado ao VIII Encontro Nacional de Educação Matemática, recife, (2004).

[19] SALDANHA, Nicolau C. **Tópicos em Jogos Combinatórios**. Ed. IMPA, Rio de Janeiro,(1991).

[20] SIELGEL, Aaron N. **Combinatorial Game Theory**. Ed. AMS, (2013).

[21] TEIXEIRA, Ralph C. **Jogos Combinatórios e Números Surreais** . Departamento de Matemática UFF, 2º Coloquio da região Sudeste, Rio de Janeiro (2013).

[21] WYTHOFF, Willen A. **A modification of the game of Nim**. Nieuw Arquief voor Wiskend 7, 199-202 pp.,(1907).