

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**TRIÂNGULOS NO PLANO E NA ESFERA:  
APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO E  
LOCALIZAÇÃO NA SUPERFÍCIE  
TERRESTRE**

Amarildo Lima dos Santos

**Orientador:** Prof. Msc. Cristiano H. Oliveira Mascarenhas

Feira de Santana  
19 de agosto de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL

**TRIÂNGULOS NO PLANO E NA ESFERA:  
APLICAÇÕES NO ENSINO BÁSICO E  
LOCALIZAÇÃO NA SUPERFÍCIE  
TERRESTRE**

Amarildo Lima dos Santos

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

**Orientador:** Prof. Msc. Cristiano H. Oliveira Mascarenhas

Feira de Santana  
19 de Agosto de 2016

Ficha catalográfica: Biblioteca Central Julieta Carteado

Santos, Amarildo Lima dos  
S233t Triângulos no plano e na esfera: aplicações no Ensino Básico e  
localização na superfície terrestre. / Amarildo Lima dos Santos. Feira de  
Santana, 2016.  
111f...: il.

Orientador: Cristiano H. Oliveira Mascarenhas  
Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual de  
Feira de Santana. Departamento de Ciências Exatas, 2016.

1. Geometria euclidiana. 2. Paralelas. 3. Cevianas. 4. Triângulos  
planos. 5. Triângulos esféricos. I. Mascarenhas, Cristiano H. Oliveira. II.  
Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU: 514.12



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO DISCENTE AMARILDO LIMA DOS SANTOS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos dezanove dias do mês de agosto de dois mil e dezesseis às 10:00 horas do MT55 - Módulo 5, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título "Triângulos no plano e na esfera: aplicações no ensino básico e localização na superfície terrestre", do discente Amarildo Lima dos Santos, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (Orientador, UEFS), Joilson Oliveira Ribeiro (UFBA) e Joilma Silva Carneiro (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pelo discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 19 de agosto de 2016.

Prof. Me. Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS)  
Orientador

Prof. Dr. Joilson Oliveira Ribeiro (UFBA)

Prof. Ma. Joilma Silva Carneiro (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araújo Ferreira  
Coordenador do PROFMAT UEFS

*Aos meus queridos sobrinhos Yorrana Talles, Ítalo Acácio e Maria Helena, como  
incentivo e exemplo de persistência.*

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pois, sem Ele à frente dos nossos projetos nada seria possível. Mesmo quando pensamos que estamos sozinhos, Ele está a nos amparar.

Agradeço à minha família abençoada: meus pais e irmãos, que me entendem, respeitam e apoiam as minhas decisões. A Malu, obrigado pela paciência e carinho.

Aos meus amigos: vocês são uma prova de que Deus usa as pessoas certas, nos momentos certos, para nos mostrar que está sempre presente. Perdoem se eu esquecer algum nome, mas sintam-se abraçados através de Dilmo, Rodrigo Ribeiro, Lutero, Carol e Rony, Joaquim (o Dr.), Beto Rodrigues, Welberton, Steve, Mivânia e todos os que me apoiaram desde o início. Eles sabem de perto como tenho que “me virar” para conseguir finalizar mais essa etapa.

À família Simas, na pessoa de D. Zilda, obrigado pela acolhida no aconchego do vosso lar e por torcer por mim.

Não poderia esquecer dos colegas da primeira e segunda turma do PROFMAT-UEFS. Sintam-se abraçados. Ariana e Zé Willian (Peu), vocês se tornaram verdadeiros irmãos!

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela auxílio bolsa outorgada.

Aos professores, minha reverência e gratidão. Professor Cristiano, muito obrigado pela serenidade, disponibilidade e por respeitar as minhas ideias. Deus lhe abençoe!

Através do meu coordenador pedagógico, Marcos Barreto, exemplo de profissionalismo e compreensão, estendo agradecimentos aos profissionais das escolas onde leciono.

A todos os alunos, pela tolerância. Em especial, a Luan Arjuna, Selena Shiva, Rafael Ramon, Tarcyla, Edivânia, Lorranda, representantes legítimos dos estudantes desafiadores. Precisamos de alunos assim para continuarmos a caminhada.

# Resumo

Neste trabalho tivemos como objetivos levantar temas importantes de Geometria Euclidiana tais como uma formalização dos conceitos e teoremas principais desta geometria: *Teorema das Paralelas*, *Teoremas sobre as Cevianas*, etc.; assim como teoremas da geometria esférica: *Leis dos Senos e dos Cossenos*, *Teorema de Pitágoras generalizado*, conceitos de triângulos esféricos e como a soma dos seus ângulos internos nos informa sobre o tipo de geometria a que estamos sujeitos. Espero ter contribuído de forma a tornar a geometria plana e esférica um pouco mais influente nas nossas escolas de Ensino Básico.

**Palavras-chave:** Geometria, paralelas, cevianas, triângulos planos, triângulos esféricos.

# Abstract

In this work we had as objective raise up important themes of euclidean geometry such as the formulation of mainly concepts and theorems: parallel's theorem, cevian's theorem, etc.; like too spherical geometry theorems: sine and cosine laws, generalized Pythagorean theorem, concepts of geodesics triangles and how the sum of internal angles determine what kind of geometric space we are. I hope that this work has contributed in dealing of so special's geometries and that it can too influentiate our courses in the elementary and high schools.

**Key words:** Geometry, parallels, cevians, planes triangles, spherical triangles.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Triângulos no plano</b>	<b>3</b>
1.1 Elementos básicos do triângulo no plano . . . . .	3
1.2 Outros elementos importantes do triângulo . . . . .	4
1.2.1 Congruência de triângulos planos . . . . .	7
1.2.2 Condições mínimas para que dois ou mais triângulos sejam congruentes: casos de congruência. . . . .	8
1.2.3 Principais consequências da congruência de triângulos . . . . .	10
1.3 Retas paralelas com uma transversal: Teoremas do paralelismo . . . . .	12
1.4 Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal . . . . .	14
1.4.1 Teorema de Tales . . . . .	18
1.5 Semelhança de triângulos. . . . .	20
1.5.1 Casos de semelhança de triângulos. . . . .	23
1.6 Relações métricas nos triângulos . . . . .	27
1.6.1 Relações métricas nos triângulos retângulos. . . . .	27
1.6.2 Relações métricas em um triângulo qualquer. . . . .	29
1.6.3 Razões trigonométricas básicas no triângulo retângulo. . . . .	31
1.6.4 Razões trigonométricas em um triângulo qualquer. . . . .	32
1.7 Área de um triângulo . . . . .	35
<b>2 Cevianas</b>	<b>40</b>
2.1 Mediana e Baricentro de um triângulo. . . . .	43
2.2 Bissetriz e incentro. . . . .	45
2.3 Altura e ortocentro. . . . .	47
2.4 Mediatriz e circuncentro. . . . .	49
2.5 Circunferência circunscrita. . . . .	50
2.6 Exercícios de aplicação (triângulos planos) . . . . .	54

<b>3</b>	<b>Triângulos Esféricos</b>	<b>59</b>
3.1	A superfície esférica . . . . .	60
3.2	Elementos da esfera . . . . .	61
3.3	Coordenadas esféricas . . . . .	62
3.4	Geodésicas sobre esferas . . . . .	65
3.5	Triângulos esféricos . . . . .	67
3.5.1	Os seis ângulos de um triângulo esférico: um tratamento vetorial	69
3.5.2	Propriedades dos triângulos esféricos . . . . .	72
3.6	Triângulos polares ou suplementares . . . . .	75
3.6.1	Triângulos Esféricos Retângulos . . . . .	80
3.7	Relações métricas nos triângulos esféricos: Fórmulas fundamentais . .	83
3.8	Outra abordagem para triângulos esféricos: tratamento vetorial . . .	86
3.8.1	Área de um triângulo esférico . . . . .	86
3.8.2	Fórmulas fundamentais de um triângulo esférico . . . . .	89
3.8.3	Triângulo esférico polar ou dual . . . . .	92
3.9	Aplicações da trigonometria esférica no cálculo de distâncias no globo terrestre . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>102</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>104</b>

# Introdução

A geometria de Euclides continua influenciando a matemática moderna e seus axiomas fundamentam grande parte das teorias, seja na geometria ou nas áreas afins. Porém, muitas respostas à geometria necessitam de novos resultados que nasceram, ironicamente, do V postulado de Euclides que diz que *se uma reta corta outras duas formando ângulos internos do mesmo lado cuja soma é menor do que  $180^\circ$ , então as duas retas, se estendidas indefinidamente, encontrar-se-ão no lado em que a soma for menor que dois ângulos retos.*

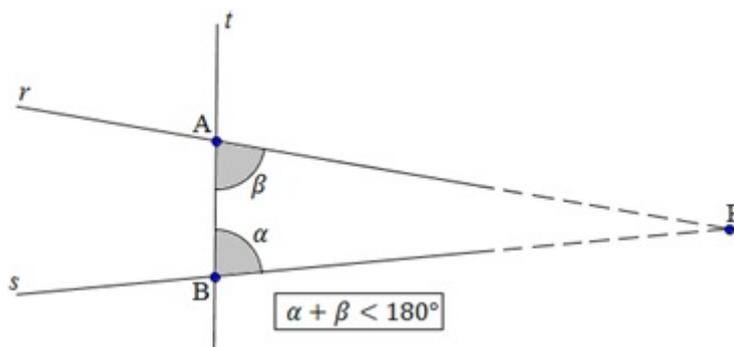


Figura 1: Ilustração do V postulado de Euclides. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Atualmente, conceitos como *reta* e *paralelismo* encontram novas interpretações em espaços mais gerais. Uma reta, em geometria, não está ligada diretamente ao nosso conceito usual de segmento retilíneo.

Ao longo do tempo, vários matemáticos encararam o V postulado como teorema e tentaram demonstrá-lo, sem sucesso. Girolamo Saccheri, professor e erudito italiano (século XVIII), tentou uma abordagem inteligente e nova para o problema das paralelas. Em 1810, Carl Friedrich Gauss explorou a possibilidade de existir um sistema de geometria no qual, por um ponto fora de uma reta, exista mais de uma reta paralela à reta dada. Porém, não publicou os seus resultados. [3]

O matemático russo Nicolai Lobachevsky e o húngaro János Bolyai publicaram quase que simultaneamente trabalhos que fizeram surgir uma nova geometria em uma superfície onde possa existir infinitas retas paralelas a uma reta dada. Logo em seguida, o alemão Bernhard Riemann, publicou em 1854, seu novo sistema de geometria em uma superfície na qual, por um ponto fora de uma reta, não passe reta paralela alguma à reta dada. [3]

Nas geometrias de Euclides (plana), Lobachevski (hiperbólica) e Riemann (esférica) a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a  $180^\circ$ , menor do que  $180^\circ$  e maior do que  $180^\circ$ , respectivamente.[3]

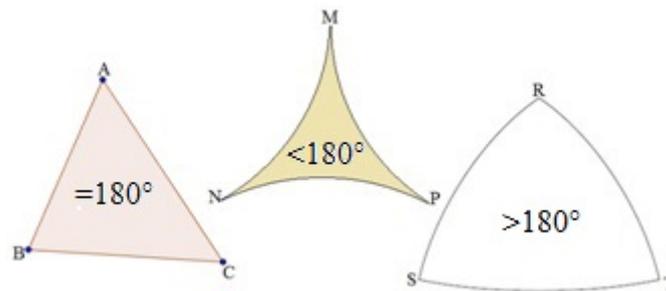


Figura 2: Soma dos ângulos internos dos triângulos planos e não planos. Fonte: [3]

Estamos interessados em mostrar resultados da geometria plana, especificamente dos triângulos, com foco na demonstração de algumas das suas importantes propriedades com a desafiadora finalidade de levarmos esse nível de informação aos nossos alunos e professores do Ensino Básico, especialmente na rede pública.

Os dois primeiros capítulos tratam dos triângulos planos, cuja abordagem no Ensino Básico é de fundamental importância para que os alunos desenvolvam noções básicas de Geometria Euclidiana Plana e percebam as suas aplicações cotidianas ou em outras áreas do conhecimento.

A fim de expandirmos mais o nosso estudo, faremos uma breve abordagem das definições e propriedades dos triângulos esféricos. Entretanto, não pretendemos, nesse momento, realizar um estudo mais detalhado nessa área, apenas queremos fazer algumas comparações entre essas duas geometrias importantes para a compreensão do espaço em que vivemos.

# Capítulo 1

## Triângulos no plano

São inúmeras as aplicações que justificam o estudo dos triângulos planos. Basta olhar à nossa volta para percebermos que, desde as construções simples (como o telhado de um casebre, a inclinação de uma rampa) às mais sofisticadas (como a construção de uma ponte, um prédio ou uma torre de TV), os triângulos estão presentes.

Os povos da antiguidade já calculavam distâncias inacessíveis através da aplicação de propriedades importantes da geometria Plana, como o Teorema de Tales e a semelhança dos triângulos. Graças a esse conhecimento, outras áreas como a engenharia, avançaram significativamente.

Adiante apresentamos definições e propriedades dos triângulos planos. Caso o leitor queira aprofundar-se mais, poderá consultar BARBOSA [2], GARBI [8], GIOVANNI JUNIOR [9], MUNIZ NETO [11], OLIVEIRA [12], PIERRO NETTO [13], [14], fontes pesquisadas e utilizadas ao longo do texto, não necessariamente nessa ordem.

**Definição 1.1.** Um triângulo é a união de três segmentos de reta, consecutivos dois a dois, que tem por extremidades pontos não colineares. Os pontos são chamados de vértices do triângulo e os segmentos de reta são os seus lados.

### 1.1 Elementos básicos do triângulo no plano

Os principais elementos de um triângulo são:

(i) Vértices:  $A$ ,  $B$  e  $C$ ;

- (ii) Lados:  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$ ;
- (iii) Ângulos internos:  $\hat{BAC}$ ,  $\hat{ABC}$  e  $\hat{ACB}$ , ou simplesmente  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ ;
- (iv) Ângulos externos:  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ .

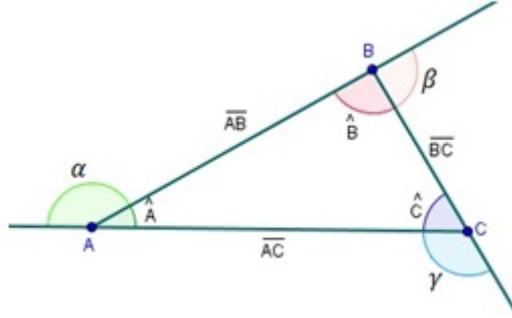


Figura 1.1: Triângulo no plano e seus elementos básicos. Fonte: [13]

## 1.2 Outros elementos importantes do triângulo

O triângulo é o único polígono que não possui diagonais, dado que a diagonal é um segmento de reta que liga dois vértices quaisquer de um polígono passando pelo seu interior. Assim, é impossível traçarmos diagonais em um triângulo.

**Definição 1.2.** Denomina-se *ceviana* de um triângulo qualquer segmento de reta que tenha uma das extremidades em um vértice do triângulo e outra sobre a reta suporte do lado oposto ao vértice considerado, usualmente chamada de *pé da ceviana*.

**Definição 1.3.** Denomina-se *mediana*, a ceviana que liga um vértice de um triângulo ao ponto médio do lado oposto.

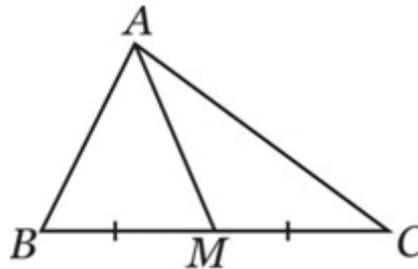


Figura 1.2:  $AM$  é mediana de  $BC \implies BM = MC$ . Fonte: adaptada de [12].

**Definição 1.4.** Denomina-se *altura*, a ceviana que é perpendicular à reta suporte do lado oposto ao vértice-extremidade.

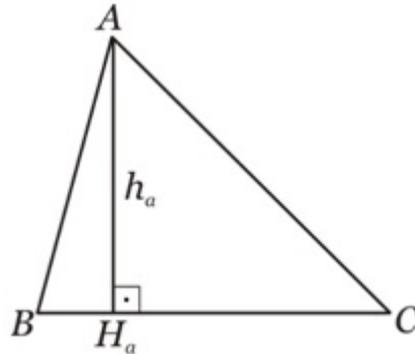


Figura 1.3:  $AH$  é a altura relativa a  $BC \implies AH \perp BC$ . Fonte: adaptada de [12]

$AH \perp BC$ : lê-se  $AH$  é perpendicular a  $BC$ .

**Definição 1.5.** Denomina-se *bissetriz* a toda semirreta que divide um ângulo em dois ângulos de mesma medida.

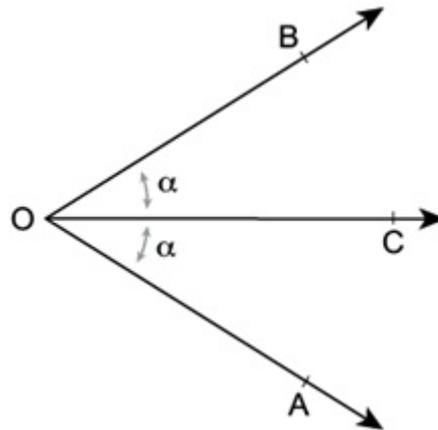


Figura 1.4:  $OC$  é bissetriz de  $\hat{A}OB \iff \hat{B}OC = \hat{A}OC$ . Fonte: *Google imagens*.

**Definição 1.6.** Denomina-se *bissetriz interna* a ceviana que é porção da semirreta bissetriz de um ângulo interno limitada pelo lado oposto. Logo, divide o ângulo em dois ângulos congruentes.

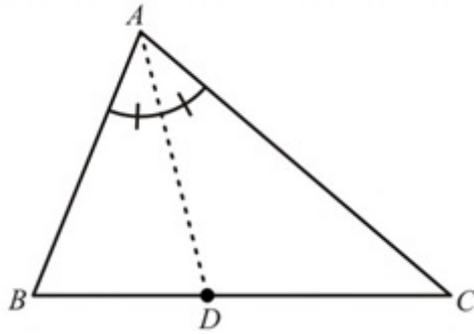


Figura 1.5:  $AQ$  é bissetriz interna  $\iff \widehat{BAD} = \widehat{CAD}$ ,  $D \in BC$ . Fonte: *Google imagens*.

**Definição 1.7.** Denomina-se *bissetriz externa* a ceviana que é parte da bissetriz de um ângulo externo do triângulo limitada pela reta suporte do lado oposto.

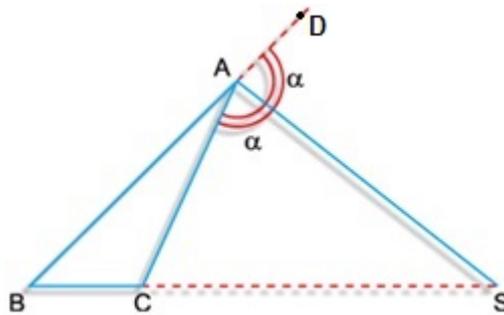


Figura 1.6:  $AS$  é bissetriz externa  $\iff \widehat{CAS} = \widehat{DAS}$ . Fonte: *Google imagens*.

**Teorema 1.8. (*Desigualdade Triangular*)** Em um triângulo qualquer a medida de um lado é sempre menor do que a soma das medidas dos outros dois.

*Demonstração.* De fato, seja  $P$  um ponto sobre o prolongamento de  $AC$  ( $A$  entre  $P$  e  $C$ ) tal que  $AP \equiv AB$  ( $AP$  é congruente a  $AB$ ). Obtém-se, assim, o triângulo isósceles  $ABP$ . Por propriedades do triângulo isósceles (demonstradas mais adiante), segue que  $med(\widehat{APB}) = med(\widehat{ABP}) = \beta$ . Como  $\beta$  está contido no interior de  $\alpha = med(\widehat{PBC})$ ,  $\beta < \alpha$ . Logo, no triângulo  $BCP$  deve-se ter  $a < b + c$ . Analogamente, prova-se que  $b < a + c$  e  $c < a + b$ .

□

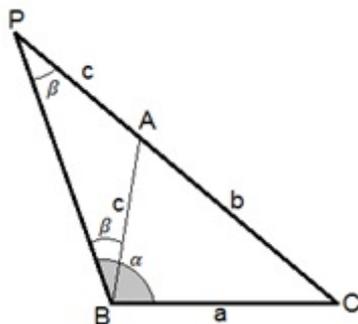


Figura 1.7: Desigualdade triangular. Fonte: adaptada de [12].

### 1.2.1 Congruência de triângulos planos

**Definição 1.9.** Dois triângulos são *côngruos*, ou *congruentes*, quando podem coincidir por superposição, ou seja, quando é possível estabelecer uma correspondência, um a um, entre os vértices de um triângulo e os vértices do outro, de tal forma que surjam três pares de lados congruentes e que, entre os lados congruentes, os ângulos internos também sejam congruentes.

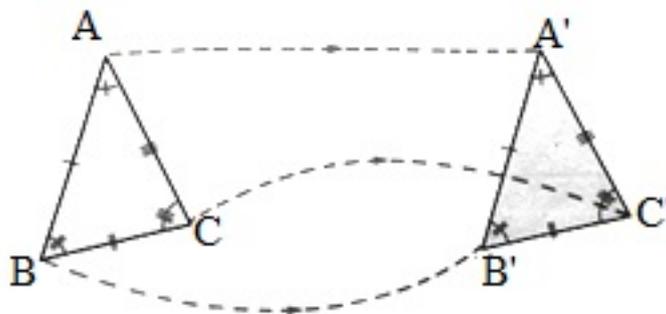


Figura 1.8: Congruência de triângulos. Fonte: adaptada de [13].

Assim, da figura acima, temos:  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \iff \hat{A} \equiv \hat{A}', \hat{B} \equiv \hat{B}', \hat{C} \equiv \hat{C}'$  e  $AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C'$ , supondo válida a correspondência  $A \longleftrightarrow A', B \longleftrightarrow B', C \longleftrightarrow C'$ . Dizemos que os lados  $AB$  e  $A'B'$ , por exemplo, são correspondentes por estarem opostos aos ângulos congruentes  $\hat{C}$  e  $\hat{C}'$ .

A relação de congruência é uma equivalência, portanto, goza das propriedades *reflexiva*, *simétrica* e *transitiva*.

## 1.2.2 Condições mínimas para que dois ou mais triângulos sejam congruentes: casos de congruência.

Considerando que o leitor conheça os casos de congruência de triângulos, apenas os citaremos sem demonstração (consulte [2]). Porém, eles são pré-requisitos para os demais resultados.

- (i) **1º caso: Lado - Ângulo - Lado (LAL) - axiomático:** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , se  $AB \equiv EF$ ,  $AC \equiv EG$  e  $\hat{A} \equiv \hat{E}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$ .*

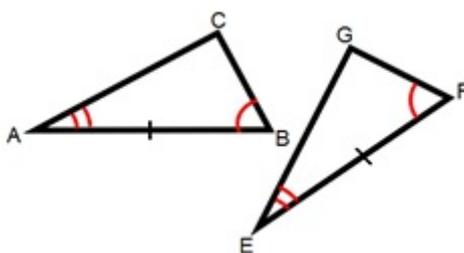


Figura 1.9: Congruência de triângulos: caso LAL. Fonte: *Google imagens*.

$$AC \equiv EG, AB \equiv EF, \hat{A} \equiv \hat{E} \\ \implies \triangle ABC \equiv \triangle EFG \implies BC \equiv FG, \hat{C} \equiv \hat{G} \text{ e } \hat{B} \equiv \hat{F}.$$

- (ii) **2º caso: Ângulo - Lado - Ângulo (ALA):** *Dados dois triângulos  $ABC$  e  $EFG$ , se  $AB \equiv EF$ ,  $\hat{A} \equiv \hat{E}$  e  $\hat{B} \equiv \hat{F}$ , então  $\triangle ABC \equiv \triangle EFG$ .*

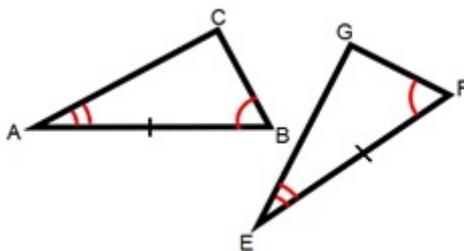


Figura 1.10: Congruência de triângulos: caso ALA. Fonte: *Google imagens*.

$$AB \equiv EF, \hat{A} \equiv \hat{E} \text{ e } \hat{B} \equiv \hat{F} \implies \triangle ABC \equiv \triangle EFG \\ \implies BC \equiv FG, AC \equiv EG, \hat{C} \equiv \hat{G}.$$

- (iii) **3º caso: Lado - Lado - Lado (LLL:)** *Se dois triângulos tem os três lados correspondentes respectivamente congruentes, então eles são congruentes.*
- (iv) **4º caso: Lado - Ângulo - Ângulo oposto (LAA<sub>o</sub>):** *Se dois triângulos têm um lado, um ângulo adjacente ao lado considerado e o ângulo oposto a tal lado respectivamente congruentes, então os triângulos são congruentes.*

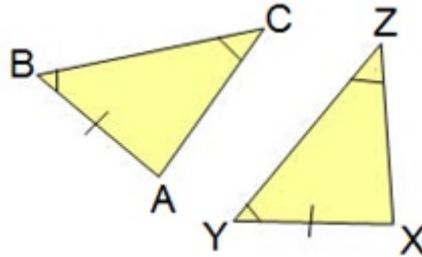


Figura 1.11: Congruência de triângulos: Caso LAA<sub>o</sub>. Fonte: *Google imagens*.

$$AB \equiv XY, \hat{B} \equiv \hat{X}, \hat{C} \equiv \hat{Z} \implies \triangle ABC \equiv \triangle XYZ$$

$$\implies \hat{A} \equiv \hat{Z}, AC \equiv YZ, BC \equiv XZ.$$

- (v) **Caso especial: triângulos retângulos:** *Se dois triângulos retângulos têm hipotenusas congruentes e um par de catetos de mesma medida (um em cada triângulo), então os triângulos são congruentes.*

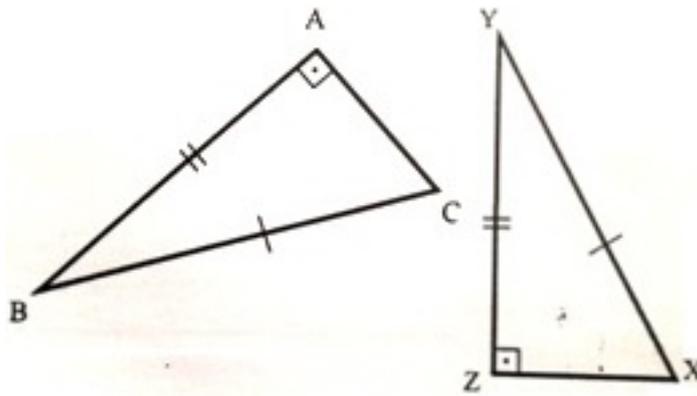


Figura 1.12: Congruência de triângulos retângulos. Fonte: *Google imagens*.

$$BC \equiv XY, AB \equiv YZ, \hat{A} \equiv \hat{Z} = 90^\circ \implies \triangle ABC \equiv \triangle XYZ$$

$$\implies AC \equiv XZ, \hat{C} \equiv \hat{X}, \hat{B} \equiv \hat{Y}.$$

### 1.2.3 Principais consequências da congruência de triângulos

**Teorema 1.10.** *Em um triângulo, qualquer ângulo externo é maior que os ângulos internos não adjacentes a ele.*

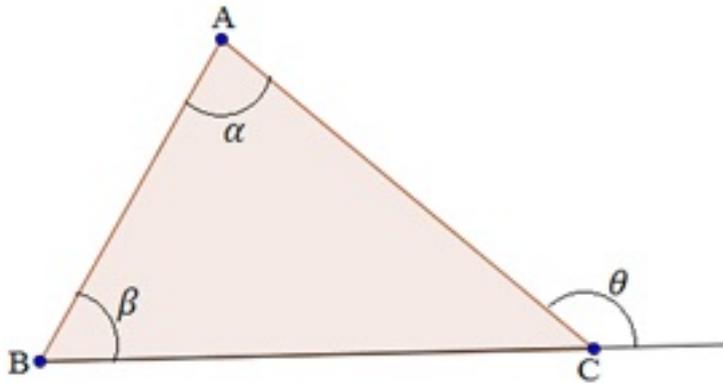


Figura 1.13: Teorema 1.10. ( $\theta > \alpha, \theta > \beta$ ). Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* Seja M o ponto médio de AC. Ligando-se B a M, prolongue-se BM de modo a obter-se P (M entre B e P) tal que  $BM = MP$ .

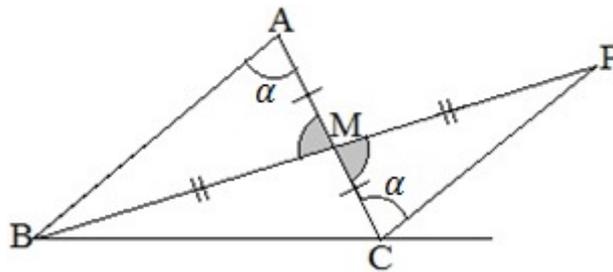


Figura 1.14: Teorema do ângulo externo. Fonte: adaptada de [12].

Como  $\hat{A}MB \equiv \hat{P}MC$  (opostos pelo vértice), os triângulos  $ABM$  e  $PMC$  são congruentes, pelo caso  $LAL$ . Logo,  $\hat{P}CM = \alpha$ , o qual está contido no interior do ângulo externo relativo a  $C$  ( $\theta$ ). Assim,  $\theta > \alpha$ . Analogamente, é possível transportar sobre  $\theta$  e concluir que  $\theta > \beta$ .

Note que  $\theta$  pode ser maior que, menor que ou congruente a  $\hat{C}$  (ângulo interno adjacente a  $\theta$ ), conforme este seja agudo, obtuso ou reto, respectivamente.

□

**Definição 1.11.** Quanto às medidas dos seus ângulos internos, um triângulo pode ser *retângulo* (se possuir um ângulo reto, isto é, igual a  $90^\circ$ ), *acutângulo* (se

possuir todos os ângulos agudos, ou seja, menores do que  $90^\circ$ ) ou **obtusângulo** (se possuir um ângulo obtuso, ou seja, maior do que  $90^\circ$ ).

**Definição 1.12.** Quanto às medidas dos seus lados, um triângulo pode ser **equilátero** (se todos os lados tiverem a mesma medida), **escaleno** (se todos os lados tiverem medidas distintas) ou **isósceles** (se, pelo menos, dois lados tiverem a mesma medida).

**Teorema 1.13.** *Um triângulo é isósceles se, e somente se os ângulos da base são congruentes.*

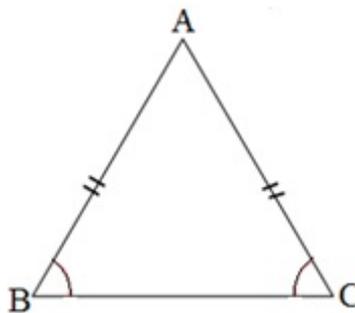


Figura 1.15: Ilustração do Teorema 1.13. Fonte: Geogebra, pelo autor.

$$\triangle ABC, AB \equiv AC \implies \hat{B} \equiv \hat{C}$$

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Basta observar a seguinte correspondência entre os vértices de um triângulo  $ABC$ , em que  $AB = AC$ , e os vértices do mesmo triângulo  $ACB$ :  $A \longleftrightarrow A, B \longleftrightarrow C, C \longleftrightarrow B$ . Visto que  $\hat{A} \equiv \hat{A}, AB = AC$  e  $AC = AB$  pode-se afirmar que os triângulos  $ABC$  e  $ACB$  são congruentes, pelo caso  $LAL$ . A partir dessa congruência, conclui-se que os ângulos dos vértices  $B$  e  $C$  (bem como os dos vértices  $C$  e  $B$ ) são congruentes.

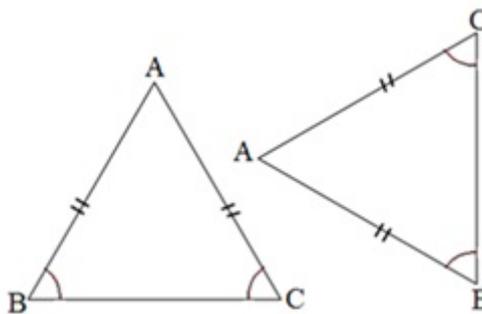


Figura 1.16: Teorema 1.13. Fonte: Geogebra, pelo autor.

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, seja  $ABC$  um triângulo em que  $\hat{B} \equiv \hat{C}$ . Mostremos que  $AB = AC$ . Novamente comparemos o triângulo  $ABC$  com ele próprio, fazendo corresponder vértices como anteriormente:  $A \longleftrightarrow A, B \longleftrightarrow C, C \longleftrightarrow B$ . Como, por hipótese,  $\hat{B} \equiv \hat{C}$ ,  $\hat{C} \equiv \hat{B}$  e  $BC = CB$ , segue-se que essa correspondência define uma congruência. Consequentemente,  $AB = BC$ .

□

**Teorema 1.14. (das cevianas do triângulo isósceles):** *Em um triângulo isósceles a mediana relativa à base é também bissetriz e altura.*

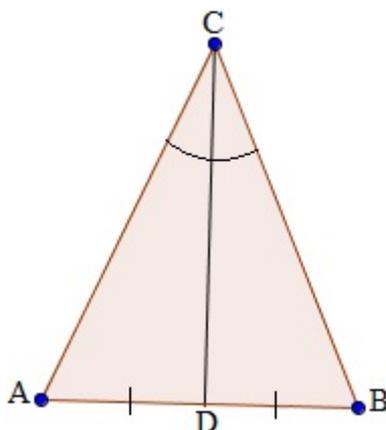


Figura 1.17: Teorema 1.14. Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* Seja  $ABC$  um triângulo isósceles cuja base é  $AB$ . Seja  $CD$  sua mediana relativa à base. Mostremos que  $\hat{ACD} \equiv \hat{BCD}$  e  $\hat{ADC} = 90^\circ$ . Para isso considere os triângulos  $ADC$  e  $BDC$ . Como  $CD$  é mediana, segue que  $AD = BD$ . Por hipótese, temos que;  $AC = BC$  (lados iguais do triângulo isósceles de base  $AB$ ) e  $\hat{A} = \hat{B}$ . Logo, pelo caso  $LAL$ , os triângulos  $ADC$  e  $BDC$  são congruentes. Sendo assim,  $\hat{BCD} = \hat{ACD}$  e, portanto,  $CD$  é bissetriz de  $\hat{ACB}$ . Como  $\hat{ADB}$  é um ângulo raso (mede  $180^\circ$ ) e  $\hat{CDA} + \hat{BDC} = \hat{ADB}$ , então  $\hat{CDA} + \hat{ADC} = 180^\circ$ , mas  $\hat{CDA} = \hat{BDC}$ , logo  $\hat{CDA} = \hat{BDC} = 90^\circ$ . Portanto,  $CD$  é perpendicular a  $AB$ . Assim,  $CD$  é bissetriz e altura, como prevíamos.

□

### 1.3 Retas paralelas com uma transversal: Teoremas do paralelismo

Na Geometria Euclidiana Plana, as figuras geométricas elementares são os pontos e as retas. Um ponto é aquilo que não contém parte alguma. Isso é bem intuitivo mesmo, pois, se relativizarmos, por mais desprezível que seja para nós, uma gota de tinta da caneta que escrevemos pode inundar uma colônia de determinadas bactérias. Do nosso “ponto de vista”, um grão de areia é tão minúsculo que suas dimensões são desprezíveis, contudo, para uma criatura microscópica ele pode ser como uma cordilheira! Analogamente, se observarmos as estrelas a olho nu temos a impressão de que elas são como pontos fixos no céu dada a distância que estamos em relação às mesmas, porém, sabemos que pode se tratar de um corpo celeste muito maior que o nosso planeta.

Intuitivamente, o plano dá ideia de superfície e, segundo Euclides, no Livro I, dos Elementos, uma superfície é aquela que tem comprimento e largura somente. O plano é constituído de pontos e as retas são subconjuntos distinguidos de pontos do plano.

Nesta seção ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal e sua aplicação no estudo das propriedades dos triângulos.

Inicialmente, considere o plano  $\pi$  e as retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ .

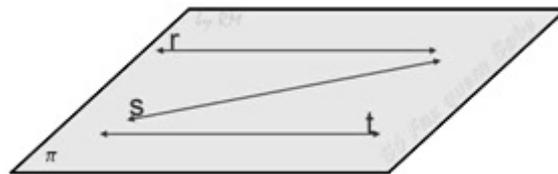


Figura 1.18: Retas coplanares. Fonte: Geogebra, pelo autor.

**Definição 1.15.** Retas coplanares (que estão no mesmo plano) e que não possuem pontos em comum são chamadas de *paralelas*.



Figura 1.19: Retas paralelas. Fonte: Geogebra, pelo autor.

$$r \parallel s \iff r \subset \pi, s \subset \pi, r \cap s = \emptyset$$

**Definição 1.16.** Retas coplanares e concorrentes (que contém um único ponto em comum) que formam ângulos adjacentes congruentes e retos, são chamadas de *perpendiculares* e indicamos  $r \perp s$ .

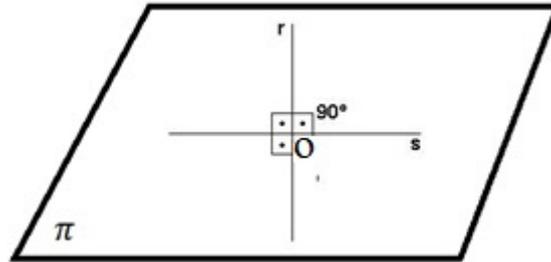


Figura 1.20: Retas perpendiculares:  $r \perp s$ . Fonte: Geogebra, pelo autor.

O ponto  $O$  é chamado pé da perpendicular.

## 1.4 Ângulos formados por duas retas paralelas e uma transversal

Em uma superfície plana, duas retas distintas ( $r$  e  $s$ ), uma terceira reta ( $t$ ) que intercepte essas duas (transversal) formam oito ângulos (não nulos, nem rasos) com características importantes, que podem determinar se  $r$  e  $s$  são paralelas ou não.

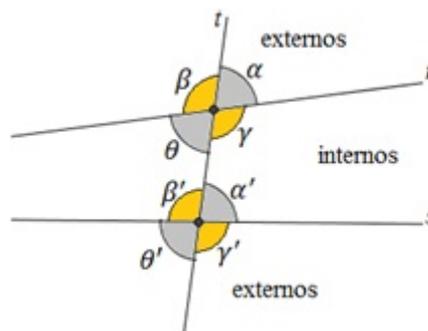


Figura 1.21: Ângulos formados pelas retas  $r$ ,  $s$  e  $t$ . Fonte: *Geogebra, pelo autor.*

$$\alpha \equiv \theta, \beta \equiv \gamma, \alpha' \equiv \theta', \beta' \equiv \gamma' \text{ (Opostos pelo vértice - o.p.v.)}$$

$$\alpha + \beta = \beta + \theta = \dots = \gamma' + \alpha' = 180^\circ \text{ (suplementares adjacentes)}$$

Alguns pares de ângulos que não possuem vértice comum recebem nomes de acordo com a posição que ocupam:

- (i) **Correspondentes**: quando um lado de cada um estiver em  $t$ , no mesmo sentido, e os outros lados estiverem um em  $r$  e outro em  $s$  ( $\alpha$  e  $\alpha'$ ,  $\beta$  e  $\beta'$ ,  $\gamma$  e  $\gamma'$ ,  $\theta$  e  $\theta'$ );
- (ii) **Colaterais internos/externos**: quando estão em um mesmo semi-plano de origem em  $t$ , bem como no interior (ou exterior) da região limitada por  $r$  e  $s$ . Exemplo:  $\alpha'$  e  $\gamma$  (colaterais internos),  $\alpha$  e  $\gamma'$  (colaterais externos);
- (iii) **Alternos internos/externos**: quando estão em semi-planos distintos (alternados) em relação a  $t$ , mas ambos no interior ou no exterior da região determinada por  $r$  e  $s$ . Exemplo:  $\beta'$  e  $\gamma$  (alternos internos),  $\beta$  e  $\gamma'$  (alternos externos).

**Teorema 1.17. (Propriedade Fundamental do Paralelismo):** *Consideremos duas retas coplanares  $r$  e  $s$  cortadas por uma transversal  $t$ . Os ângulos correspondentes são congruentes se, e somente se, essas retas são paralelas.*

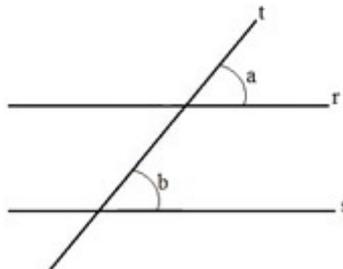


Figura 1.22: Teorema 1.17. Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* ( $\Leftrightarrow$ ) Podem ocorrer apenas duas possibilidades:  $r \parallel s$  ou  $r \not\parallel s$ . Assim, a exclusão de uma delas implica, necessariamente, a outra.

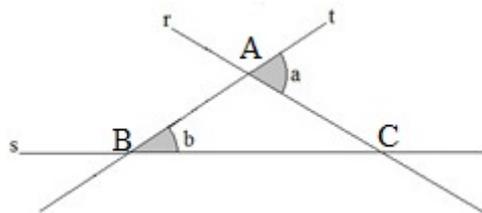


Figura 1.23: Ilustração do Teorema 1.17.

Suponha que  $\hat{a} = \hat{b}$ . Queremos mostrar que  $r \parallel s$ . Se, por absurdo, ocorrer  $r \not\parallel s$ , então  $r \cap s = \{C\}$  e existirá o triângulo  $ABC$ . No entanto, se existir o triângulo  $ABC$ , o ângulo  $\hat{a}$  será maior que  $\hat{b}$ , pois  $\hat{a}$  é um ângulo externo não adjacente a  $\hat{b}$ . Logo,  $\hat{b} < \hat{a}$ . Assim,  $r$  só pode ser paralela a  $s$ .

( $\implies$ ) Novamente por redução ao absurdo, suponha que  $r \parallel s$ , embora  $\alpha \neq \beta$  (figura abaixo).

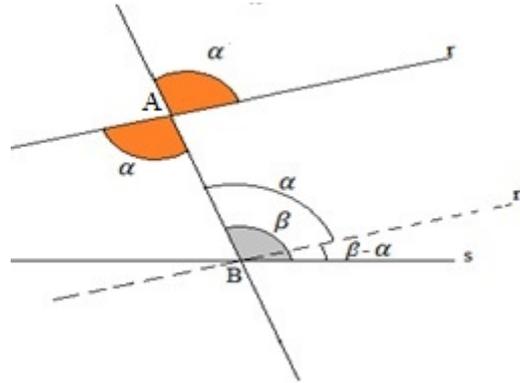


Figura 1.24: Ilustração do Teorema 1.17. Fonte: adaptada de [12].

Neste caso, sem perda de generalidade, seja  $\alpha > \beta$ . Aí, seria possível transportar  $\alpha$  sobre  $\beta$ , de modo que um lado de  $\alpha$  estivesse sobre  $t$  e o outro sobre uma reta  $r'$ , por  $B$ , mas então, os ângulos " $\alpha$ " seriam alternos internos e, assim,  $r' \parallel r$  e  $r \parallel s \implies r' \parallel s$ . Daí, haveriam duas paralelas a  $r$  por  $B$ , o que é um absurdo pelo V postulado de Euclides.

Logo, pode ocorrer  $\beta > \alpha$ . Do mesmo modo é impossível que  $r \parallel s$  e  $\beta > \alpha$ . Assim,  $\beta = \alpha$ .

□

**Corolário 1.18.** *Se duas retas coplanares são cortadas por uma transversal e ocorrer:*

- (i) *ângulos alternos internos congruentes;*
- (ii) *ângulos alternos externos congruentes;*
- (iii) *ângulos colaterais internos suplementares;*
- (iv) *ângulos colaterais externos suplementares.*

*Então as retas são paralelas.*

*Demonstração.* De fato, considerando as retas coplanares  $r$  e  $s$ , a transversal  $t$  e os ângulos destacados em cada caso, temos:

- (i)  $\theta \equiv \alpha'$  (hipótese) e  $\alpha \equiv \theta$  (o.p.v.)  $\implies \alpha \equiv \alpha'$  (correspondentes)  $\implies r \parallel s$ .
- (ii)  $\alpha \equiv \theta'$  (hipótese) e  $\alpha' \equiv \theta'$  (o.p.v.)  $\implies \alpha \equiv \alpha'$  (correspondentes)  $\implies r \parallel s$ .
- (iii)  $\gamma + \alpha' = 180^\circ$  (hipótese) e  $\alpha + \gamma = 180^\circ$  (adjacentes suplementares)  $\implies \alpha' - \alpha = 0 \implies \alpha \equiv \alpha' \implies r \parallel s$ .
- (iv)  $\alpha + \gamma' = 180^\circ$  (hipótese) e  $\alpha' + \gamma' = 180^\circ$  (adjacentes suplementares)  $\implies \alpha - \alpha' = 0 \implies \alpha \equiv \alpha' \implies r \parallel s$ .

□

**Corolário 1.19.** *A soma dos ângulos internos de um triângulo  $ABC$  é igual a  $180^\circ$ .*

*Demonstração.* Pelo vértice  $A$  traçamos a reta  $r$  paralela a  $s$ , que é a reta suporte do lado  $BC$ . Obtemos três ângulos cuja soma é  $180^\circ$ :  $\alpha + \beta + \theta = 180^\circ$ .

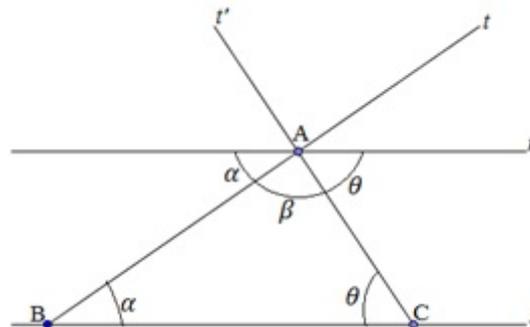


Figura 1.25: Ilustração do Corolário 1.19. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Note que, pelo paralelismo de  $r$  e  $s$ ,  $\theta \equiv \hat{C}$  (alternos internos);  $\alpha \equiv \hat{B}$  (alternos internos) e  $\beta \equiv \hat{A}$  (mesmo ângulo). Logo,

$$\alpha + \beta + \theta = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ.$$

□

**Corolário 1.20.** *Cada ângulo externo de um triângulo é, exatamente, igual à soma dos ângulos internos não adjacentes a ele.*

*Demonstração.* De fato, seja um triângulo  $ABC$  de ângulos internos  $\hat{A} = \beta$ ,  $\hat{B} = \alpha$  e  $\hat{C} = \theta$ . Seja  $\hat{e}_C$  o ângulo externo pelo prolongamento do lado  $BC$ .

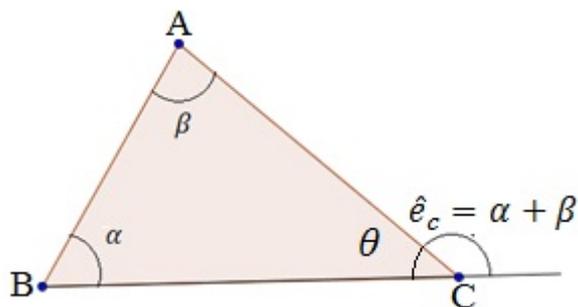


Figura 1.26: Corolário 1.20. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Segue que

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \theta &= 180^\circ \\ \hat{e}_C + \theta &= 180^\circ \implies \theta = 180^\circ - \hat{e}_C \\ \implies \alpha + \beta + \theta &= \alpha + \beta + 180^\circ - \hat{e}_C = 180^\circ \\ \implies \hat{e}_C &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

□

### 1.4.1 Teorema de Tales

Considere o conjunto de retas paralelas  $r, s, u$  e  $v$  e as transversais  $t$  e  $t'$  em um plano  $\alpha$ :

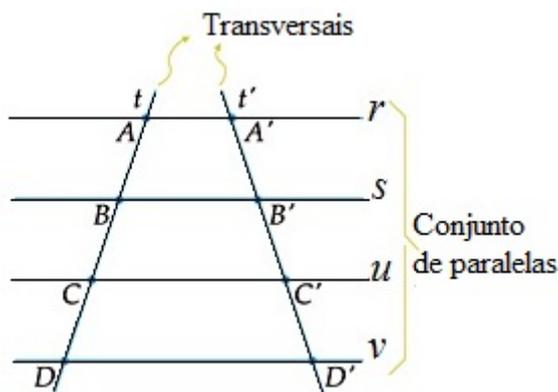


Figura 1.27: Conjunto de paralelas. Fonte: *Google imagens*.

Ao interseccionar duas retas transversais quaisquer ( $t$  e  $t'$ ), determina-se sobre elas segmentos de reta  $AB, BC, CD, AC, BD$  ou  $AD$  em  $t$  e  $A'B', B'C', C'D', A'C', B'D'$  ou  $A'D'$ , sobre  $t'$ .

**Lema 1.21.** *Considere o conjunto de retas paralelas ( $r, s, u$  e  $v$ ) e duas transversais ( $t$  e  $t'$ ) conforme figura 1.27. acima. Se  $AB \cong CD$  (lê-se  $AB$  congruente a  $CD$ ), então  $A'B' \cong C'D'$  (lê-se  $A'B'$  congruente a  $C'D'$ ).*

*Demonstração.* Traçamos por  $A$  o segmento  $AM \parallel A'B'$  e por  $C$ , o segmento  $CN \parallel C'D'$ , obtendo os triângulos  $ABM$  e  $CDN$ :

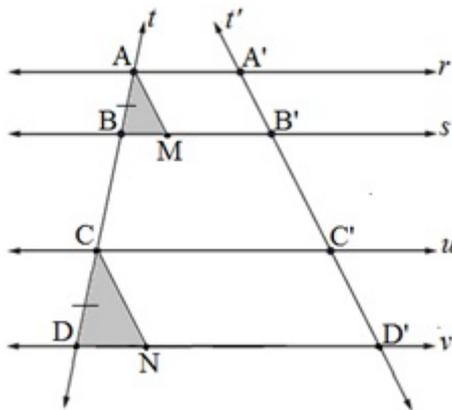


Figura 1.28: Ilustração do Lema 1.21. Fonte: *Google imagens*.

Os triângulos  $ABM$  e  $CDN$  são congruentes pelo caso  $ALA$ :

- (A)  $B\hat{A}M \cong D\hat{C}N$  (ângulos correspondentes);
- (L)  $AB \cong CD$  (hipótese);
- (A)  $A\hat{B}M \cong C\hat{D}N$  (ângulos correspondentes).

Como os triângulos são congruentes, concluímos que  $AM \cong CN$ . Como  $AM \parallel A'B'$ ,  $AA' \parallel BB'$ , então  $AA'B'M$  é um paralelogramo. Da mesma forma  $CC'D'N$  é um paralelogramo, pois  $CN \parallel C'D'$  e  $CC' \parallel DD'$ . Como os lados de um paralelogramo tem a mesma medida e  $AM \cong CN$ , então também ocorrerá  $A'B' \cong C'D'$ .

□

**Teorema 1.22. (Teorema de Tales):** *Se três retas paralelas são interceptadas por duas retas transversais nos pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , respectivamente, então*

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}.$$

*Demonstração.* Sabemos que a área de um triângulo é igual à metade do produto da base pela altura relativa, tomados na mesma unidade de medida. Inicialmente, passemos por  $D$ , uma reta  $t'$  paralela a  $t$ , conforme a figura.

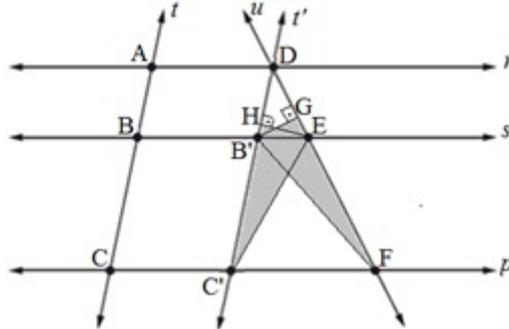


Figura 1.29: Teorema de Tales. Fonte: adaptada de [12].

Sejam  $B'$  e  $C'$  as intersecções de  $t'$  com  $BE$  e  $CF$ , respectivamente. A área do triângulo  $DB'E$  pode ser calculada de duas maneiras:

$$\frac{DB'.EH}{2} \text{ ou } \frac{DE.B'G}{2}.$$

Da igualdade conclui-se que  $DB'.EH = DE.B'G$ . Como  $DB' = AB$  temos que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{B'G}{EH} \quad (1).$$

Os triângulos  $C'B'E$  e  $FEB'$  tem áreas iguais (mesma base  $B'E$  e mesma altura). Logo,  $\frac{B'C'.EH}{2} = \frac{EF.B'G}{2}$ . Como  $B'C' = BC$ , temos

$$\frac{BC}{EF} = \frac{B'G}{EH} \quad (2).$$

Comparando (1) e (2), temos  $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ .

□

## 1.5 Semelhança de triângulos.

**Definição 1.23.** Dois triângulos são ditos *semelhantes* quando seus ângulos forem respectivamente congruentes. Os pares de lados que se opõem aos pares de ângulos congruentes são chamados de *lados homólogos*.

Sejam  $a \leq b \leq c$  os lados do  $\triangle ABC$  e  $a' \leq b' \leq c'$  os lados do  $\triangle A'B'C'$ . Dizemos que  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são semelhantes quando  $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k$ , em que  $k$  é uma constante denominada razão de semelhança.

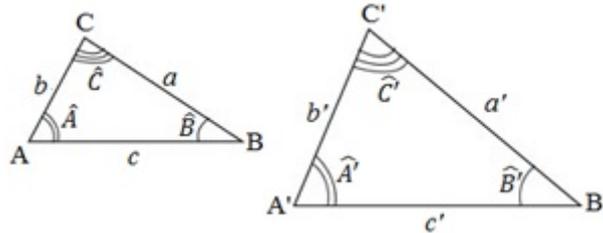


Figura 1.30: Semelhança de triângulos. Fonte: *Google imagens*.

Os pares de lados  $(a, a')$ ,  $(b, b')$ ,  $(c, c')$  são os pares de lados homólogos. Simbolicamente,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  significa que  $\triangle ABC$  é semelhante ao  $\triangle A'B'C'$ .

**Teorema 1.24.** *Sejam  $\hat{A} \leq \hat{B} \leq \hat{C}$  os ângulos do  $\triangle ABC$  e  $\hat{A}' \leq \hat{B}' \leq \hat{C}'$  os ângulos do  $\triangle A'B'C'$ . Se  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{C} = \hat{C}'$ , então  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .*

*Demonstração.* Sendo  $\hat{C} = \hat{C}'$  podemos montar a seguinte figura:

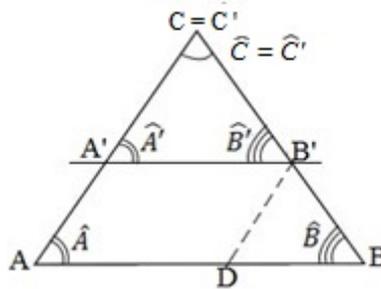


Figura 1.31: Ilustração do Teorema 1.24. Fonte: Adaptada de [12]

Como  $\hat{B} = \hat{B}'$  e  $\hat{A} = \hat{A}'$ , então as retas  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\overleftrightarrow{A'B'}$  são paralelas uma vez que os respectivos ângulos são correspondentes. Pelo Teorema de Tales, segue que

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}.$$

Por  $B'$  tracemos  $\overleftrightarrow{B'D} \parallel \overleftrightarrow{AC}$ . Formamos, assim, o paralelogramo  $AA'B'D$ . Logo,  $A'B' = AD$ . Novamente, pelo Teorema de Tales, vem que

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{A'B'}{AB}.$$

Portanto,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$ , ou seja,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

□

**Corolário 1.25.** *Uma reta que intersecciona dois lados de um triângulo é paralela ao terceiro lado se, e somente se, o triângulo formado por essa intersecção for semelhante ao primeiro.*

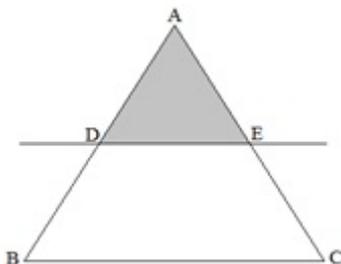


Figura 1.32: Corolário 1.25. Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* ( $\implies$ ): De fato, note que:  $\hat{A} = \hat{A}$  (mesmo ângulo),  $\hat{D} = \hat{B}$  (correspondentes) e  $\hat{E} = \hat{C}$  (correspondentes). Logo, os ângulos internos do  $\triangle ABC$  são iguais aos ângulos internos do  $\triangle ADE$ . Portanto, pelo teorema anterior temos que  $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ .

( $\impliedby$ ) Considere agora a construção abaixo, onde  $\overline{CM} = \overline{CA'}$  e  $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ .

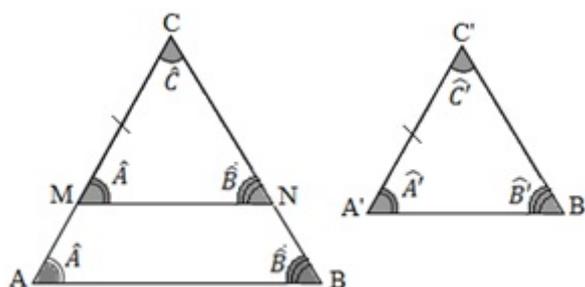


Figura 1.33: Corolário 1.25. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Como  $MN \parallel AB$ , então

$$\triangle ABC \sim \triangle MNC \implies \frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB}$$

Sendo  $CM = CA'$  (por construção), segue que

$$\frac{CA'}{CA} = \frac{CN}{CB} = \frac{MN}{AB} \quad (1).$$

Como  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$  (hipótese), temos que:

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} \quad (2)$$

$$\implies \triangle MNC \equiv \triangle A'B'C'.$$

Assim, de (1) e (2) temos que  $\hat{A} = \hat{A}'$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$ ,  $\hat{C} = \hat{C}'$  e, portanto,  $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ . □

Da mesma maneira que ocorre na congruência, a semelhança de triângulos é uma relação de equivalência.

### 1.5.1 Casos de semelhança de triângulos.

**Teorema 1.26. 1º caso:** *dois triângulos que têm dois ângulos congruentes são semelhantes.*

*Demonstração.* De fato, suponha que os triângulos  $ABC$  e  $A'B'C'$  tenham apenas dois ângulos respectivamente congruentes:

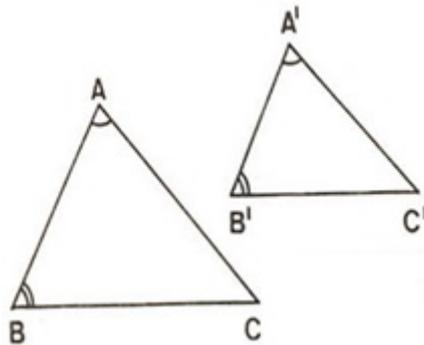


Figura 1.34: Teorema 1.26. Fonte: *Google imagens*.

Traçamos, no triângulo  $ABC$ , a reta  $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  e  $\overleftrightarrow{AM} \parallel \overleftrightarrow{A'B'}$ .

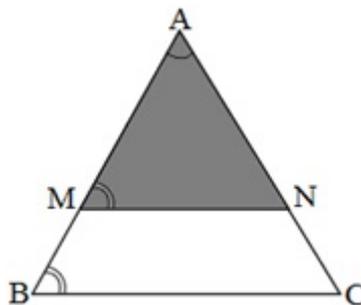


Figura 1.35: Teorema 1.26 (1º caso de semelhança). Fonte: Geogebra, pelo autor.

Daí, pelo Corolário 1.25.,  $\triangle AMN \sim \triangle ABC$ . Mostremos que  $\triangle AMN \cong \triangle A'B'C'$  ( $\triangle AMN$  é congruente  $\triangle A'B'C'$ ).

De fato é! Note que,

(A)  $\hat{A} = \hat{A}'$  (hipótese);

(L)  $AB \cong A'B'$  (por construção);

(A)  $\hat{B}' = \hat{M}$ ,  $\hat{B} = \hat{B}'$  (hipótese) e  $\hat{B} = \hat{M}$  (por construção).

Logo, pelo caso (ALA) os triângulos  $AMN$  e  $A'B'C'$  são congruentes. Portanto,

$$\triangle ABC \sim \triangle AMN \text{ e } \triangle AMN \cong \triangle A'B'C' \implies \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

□

**Teorema 1.27. 2º caso:** *Se dois triângulos tem dois lados respectivamente proporcionais determinando dois ângulos congruentes, então eles são semelhantes.*

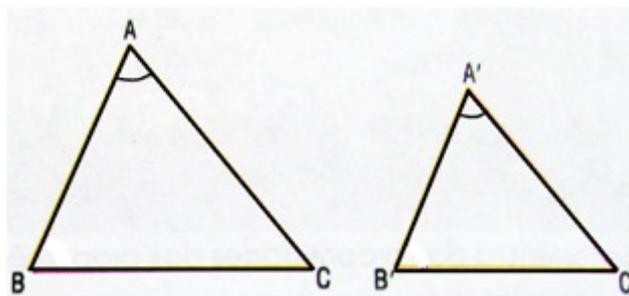


Figura 1.36: Teorema 1.27. (2º caso de semelhança). Fonte: *Google imagens*.

*Demonstração.* No lado  $AB$  do  $\triangle ABC$  traçamos  $MN \parallel BC$  tal que  $AM = A'B'$ .

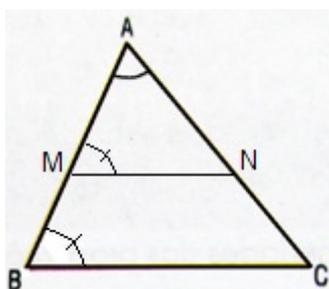


Figura 1.37: 2º caso de semelhança. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Daí, podemos afirmar que

$$\triangle ABC \sim \triangle AMN \text{ (1)}.$$

Mostremos que  $\triangle AMN$  e  $\triangle A'B'C'$  (que já são semelhantes) são também congruentes. Como  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ , vem  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ . Como  $AM = A'B'$ , por construção, temos que  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AN}{AC}$ . Mas, por hipótese,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ . Então,

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AN}{AC} \implies \frac{AN}{AC} = \frac{A'C'}{AC} \implies AN = A'C' \quad (2).$$

Com isso, pelo caso “LAL” de congruência de triângulos, temos:

- (L)  $AM \cong A'B'$  (hipótese);
- (A)  $\hat{A} \cong \hat{A}'$  (hipótese);
- (L)  $AN \cong A'C'$  (demonstrado anteriormente em (2)).

Portanto,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

□

**Teorema 1.28. 3º caso:** *Dois triângulos que possuem os lados ordenadamente proporcionais são semelhantes.*

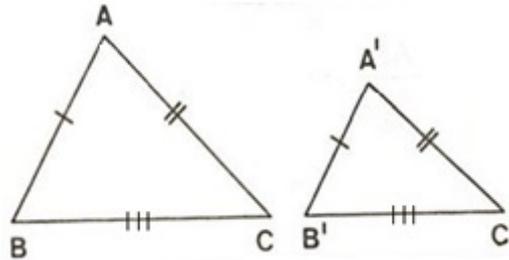


Figura 1.38: Teorema 1.28. (3º caso de semelhança). Fonte: *Google imagens*.

*Demonstração.* Da mesma maneira que demonstramos os outros dois casos, tomemos um ponto M sobre AB e tracemos  $MN \parallel BC$ , com  $N \in AC$  e  $MN = A'B'$ . Obtemos assim

$$\triangle AMN \sim \triangle ABC \quad (1).$$

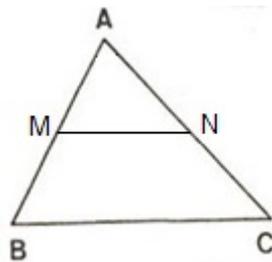


Figura 1.39: Ilustração do 3º caso de semelhança. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Usando a hipótese, mostremos que  $\triangle AMN \cong \triangle A'B'C'$ . Como  $MN \parallel BC$ , segue que  $\triangle ABC \sim \triangle AMN$ . Assim  $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ . Como  $AM = A'B'$ , segue que:

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Como, por hipótese,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$ , segue que

$$\frac{AN}{AC} = \frac{A'C'}{AC} \implies AN = A'C' \quad (2).$$

Do mesmo modo, nos triângulos  $ABC$  e  $AMN$ , podemos fazer:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC}.$$

Como  $AM = A'B' \implies \frac{A'B'}{AB} = \frac{MN}{BC}$ . Mas, por hipótese,  $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ , ou seja,

$$\frac{MN}{BC} = \frac{B'C'}{BC} \implies MN = B'C' \quad (3).$$

Logo, os triângulos  $AMN$  e  $A'B'C'$  são congruentes pelo caso "LLL":

(L):  $AM \cong A'B'$  (construção);

(L):  $AN = A'C'$  (demonstrado em (2));

(L):  $MN = B'C'$  (demonstrado em (3)).

Portanto,  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ . □

**Teorema 1.29.** *A razão entre os comprimentos de duas cevianas homólogas de dois triângulos semelhantes é igual à razão de semelhança dos respectivos triângulos.*

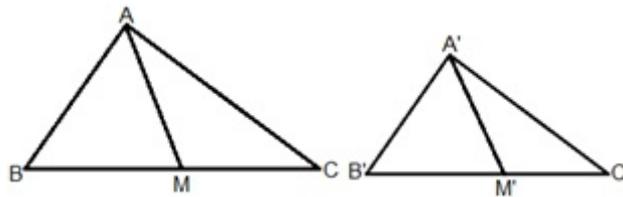


Figura 1.40: Teorema 1.29. Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* Sejam  $ABC$  e  $A'B'C'$  dois triângulos semelhantes com a razão de semelhança igual a  $k$ , com  $\hat{A}'$  correspondente a  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}'$  correspondente a  $\hat{B}$  e  $\hat{C}'$  correspondente a  $\hat{C}$ . Considere os pontos  $M \in BC$  e  $M' \in B'C'$  de forma que  $\frac{BM}{CM} = \frac{B'M'}{C'M'} = m$ . Segue que:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{m}{1} \implies \frac{BM+CM}{CM} = \frac{m+1}{1} \implies \frac{BC}{CM} = m + 1 \quad (1).$$

Analogamente,

$$\frac{B'M'}{C'M'} = \frac{m}{1} \implies \frac{B'M'+C'M'}{C'M'} = \frac{m+1}{1} \implies \frac{B'C'}{C'M'} = m + 1 \quad (2).$$

Comparando (1) e (2), vem:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{B'C'}{C'M'} \implies \frac{CM}{C'M'} = \frac{BC}{B'C'} = k.$$

Logo,

$$\frac{CM}{C'M'} = \frac{AC}{A'C'} = k \text{ e } M\hat{C}A = M'\hat{C}'A'.$$

Então, pelo 2º caso de semelhança,  $\triangle AMC \sim \triangle A'M'C' \implies \frac{AM}{A'M'} = k$ .

□

Isso nos mostra que em dois triângulos semelhantes, a razão entre duas medianas, duas alturas e duas bissetrizes homólogas é igual à razão de semelhança entre esses dois triângulos.

## 1.6 Relações métricas nos triângulos

### 1.6.1 Relações métricas nos triângulos retângulos.

Este é um assunto de muita relevância no Ensino Básico, uma vez que é visto intensivamente no 9º ano do Ensino Fundamental, como também no Ensino Médio. Muitos problemas de cálculos de distâncias inacessíveis, por exemplo, são resolvidos aplicando as relações métricas nos triângulos.

Seja o triângulo  $ABC$  abaixo, reto em  $\hat{A}$ , onde  $P$  é o pé da altura relativa à hipotenusa  $BC$  ( $AP = h$ ) que divide  $BC$  em dois segmentos de modo que  $BP = m$  e  $CP = n$ , sendo  $m$  a projeção do cateto  $c$  sobre a hipotenusa  $a$  e  $n$  é a projeção do cateto  $b$  sobre a hipotenusa  $a$ .

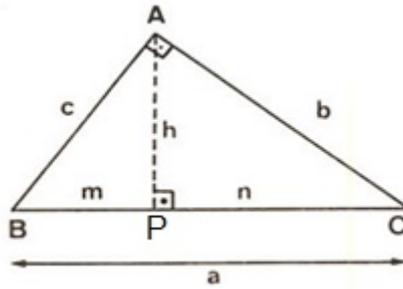


Figura 1.41: Relações métricas no triângulo retângulo. Fonte: *Google imagens*.

Da semelhança dos triângulos formados podemos destacar as seguintes propriedades:

(i)  $\triangle ABC \sim \triangle ABP \implies \frac{BP}{AB} = \frac{AB}{BC} \implies \frac{m}{c} = \frac{c}{a} \implies c^2 = am$

(ii)  $\triangle ABC \sim \triangle ACP \implies \frac{CP}{AC} = \frac{AC}{BC} \implies \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \implies b^2 = an.$

*Em todo triângulo retângulo, o quadrado de um cateto é igual ao produto da hipotenusa pela sua projeção sobre a hipotenusa.*

(iii)  $\triangle ABC \sim \triangle ABP \implies \frac{AC}{AP} = \frac{BC}{AB} \implies \frac{b}{h} = \frac{a}{c} \implies b \cdot c = a \cdot h.$

*Em todo triângulo retângulo, o produto dos catetos é igual ao produto da hipotenusa pela altura relativa à mesma.*

(iv) De (i) e (ii) temos que  $b^2 \cdot c^2 = a^2 \cdot m \cdot n \implies mn = \left(\frac{b \cdot c}{a}\right)^2 = \left(\frac{a \cdot h}{a}\right)^2 \implies h^2 = mn.$

*Em todo triângulo retângulo, o quadrado da altura relativa à hipotenusa é igual ao produto entre os segmentos que ela determina sobre a hipotenusa.*

(v)  $\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{an} + \frac{1}{am} = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right) = \frac{1}{a} \cdot \left(\frac{m+n}{mn}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{a}{h^2} = \frac{1}{h^2} \implies \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$

*A soma dos quadrados dos inversos dos catetos é igual ao quadrado do inverso da altura relativa à hipotenusa.*

(vi) De (i) e (ii) temos:

$$b^2 = an,$$

$$c^2 = am \implies b^2 + c^2 = an + am = a \cdot (m + n) = a \cdot a = a^2 \implies a^2 = b^2 + c^2.$$

*O quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos (demonstração algébrica simples do Teorema de Pitágoras).*

Existem muitas demonstrações do Teorema de Pitágoras, algumas geométricas, outras algébricas. Abaixo segue uma demonstração geométrica bem simples e interessante.

**Teorema 1.30. (Teorema de Pitágoras):** *Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.*

**Outra demonstração:**

*Demonstração.* Em um quadrado de lado  $b + c$  (figura 1.42 abaixo) desenhamos quatro triângulos retângulos, todos congruentes, de catetos  $b$  e  $c$  e hipotenusa  $a$ . Note que no interior do quadrado original temos um quadrado branco de lado  $a$ . Agora “arraste” os triângulos de modo a formar a imagem (II) da figura 1.42. Observe que nesta imagem temos dois quadrados brancos formados, um de lado  $b$  e outro de lado  $c$ .

Uma vez que a área em branco nas duas figuras deve possuir o mesmo valor, então a área do quadrado de lado  $a$  deve ser igual à soma das áreas dos quadrados de lados  $b$  e  $c$ , ou seja,  $a^2 = b^2 + c^2$ .

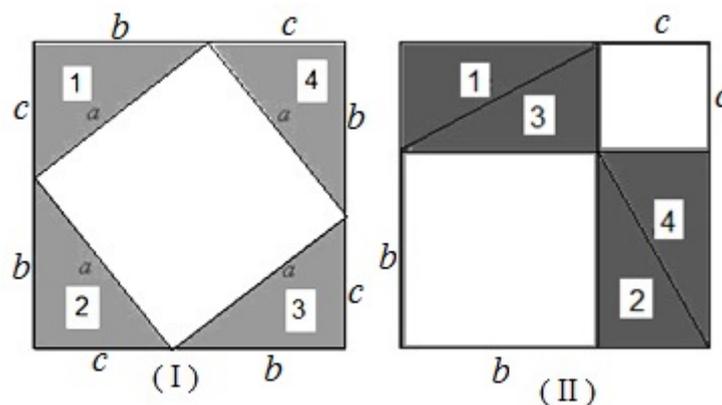


Figura 1.42: Teorema 1.30. Fonte: adaptada de [12].

□

## 1.6.2 Relações métricas em um triângulo qualquer.

Em um triângulo retângulo podemos determinar a medida de um dos lados em função dos outros dois, aplicando, por exemplo, o Teorema de Pitágoras. Podemos

também estabelecer relações entre a medida de seus lados em um triângulo qualquer. Tal relação depende do lado que se quer calcular e do ângulo oposto a esse lado.

Vamos separar por casos:

**(i) O lado é oposto a um ângulo agudo:**

Considere o triângulo acutângulo  $ABC$ :

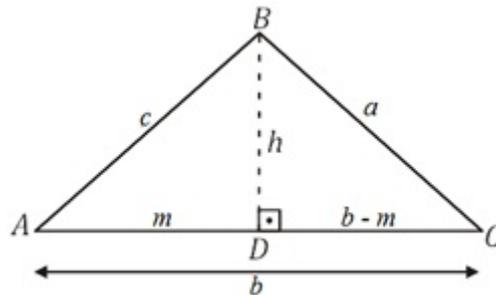


Figura 1.43: Relações métricas 1.6.2, caso (i). Fonte: Geogebra, pelo autor.

Vamos calcular a medida do lado  $a$  oposto ao ângulo agudo  $\hat{A}$ .

Chamando de  $m$  a projeção de  $c$  sobre  $b$  e aplicando a Teorema de Pitágoras no triângulo  $BDC$ , reto em  $\hat{D}$ , temos:

$$a^2 = h^2 + (b - m)^2 = h^2 + b^2 - 2bm + m^2 = b^2 + h^2 + m^2 - 2bm.$$

No triângulo  $BDA$  temos que  $h^2 + m^2 = c^2$ . Logo,

$$a^2 = b^2 + \underbrace{h^2 + m^2}_{c^2} - 2bm \implies a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$$

Podemos, então, enunciar:

*O quadrado do lado oposto a um ângulo agudo de um triângulo qualquer é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados menos o dobro do produto de um dos lados pela projeção do outro lado sobre este.*

**(ii) O lado é oposto a um ângulo obtuso:**

Considere agora o triângulo obtusângulo  $ABC$ , obtuso em  $\hat{A}$ :

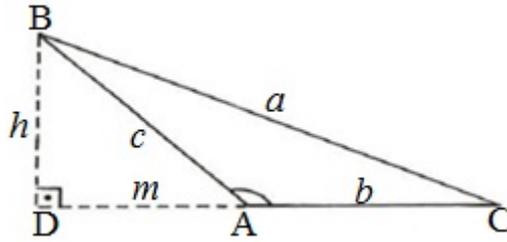


Figura 1.44: Relações métricas 1.6.2, caso (ii). Fonte: Geogebra, pelo autor.

Vamos calcular a medida do lado  $a$  oposto ao ângulo obtuso  $\hat{A}$ .

Seja  $m$  a projeção de  $c$  sobre o prolongamento de  $AC$  ( $b$ ). Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo  $BCD$ , reto em  $D$ , vem:

$$a^2 = (b + m)^2 + h^2 = b^2 + m^2 + 2bm + h^2 = b^2 + h^2 + m^2 + 2bm.$$

Como, no triângulo  $BDA$ ,  $c^2 = h^2 + m^2$ , então,

$$a^2 = b^2 + \underbrace{h^2 + m^2}_{c^2} + 2bm \implies a^2 = b^2 + c^2 + 2bm.$$

Ou seja:

*O quadrado do lado oposto ao ângulo obtuso de um triângulo qualquer é igual à soma dos quadrados dos outros dois lados mais duas vezes o produto de um desses lados pela projeção do outro sobre a reta que o contém.*

### 1.6.3 Razões trigonométricas básicas no triângulo retângulo.

Agora que vimos um pouco sobre semelhança, adentraremos nas noções básicas de trigonometria nos triângulos planos, utilizando os resultados da semelhança para demonstrar teoremas importantes como a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos.

Considere a figura seguinte que ilustra uma rampa na qual destacamos o ângulo  $\theta$ , como *ângulo de subida*. Sobre um dos lados dessa rampa marcamos os pontos  $B$ ,  $N$  e  $Q$ , e por esses pontos traçamos perpendiculares sobre o outro lado.

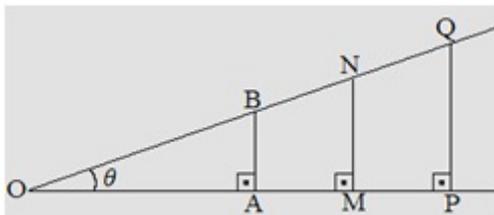


Figura 1.45: Razões trigonométricas básicas. Fonte: adaptada de [9].

Observando os triângulos formados, temos que:

$$\triangle OAB \sim \triangle OMN \sim \triangle OPQ.$$

Podemos, então, estabelecer as seguintes razões:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{OB} &= \frac{MN}{ON} = \frac{PQ}{OQ} = k_1; \\ \frac{OA}{OB} &= \frac{OM}{ON} = \frac{OP}{OQ} = k_2; \\ \frac{AB}{OA} &= \frac{MN}{OM} = \frac{PQ}{OP} = k_3. \end{aligned}$$

**Definição 1.31.** Os números  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  são denominados **seno** do ângulo  $\theta$  ( $\text{sen}\theta$ ), **co-seno** do ângulo  $\theta$  ( $\text{cos}\theta$ ) e **tangente** do ângulo  $\theta$  ( $\text{tg}\theta$ ), respectivamente e são denominados **razões trigonométricas** relativas a este ângulo.

#### 1.6.4 Razões trigonométricas em um triângulo qualquer.

Nesta seção vamos estudar outras relações que poderão ser aplicadas em um triângulo acutângulo ou obtusângulo. Essas relações são muito utilizadas também na Física, principalmente nas questões de Mecânica.

**Teorema 1.32. Lei dos Senos:** Se  $ABC$  é um triângulo qualquer de lados  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$  então,

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}$$

*Demonstração.* Considere o triângulo acutângulo  $ABC$  (o caso do triângulo obtusângulo é análogo) da figura abaixo onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados,  $h_1$  é a medida da altura  $AH_1$  e  $h_2$  é a medida da altura  $CH_2$ .

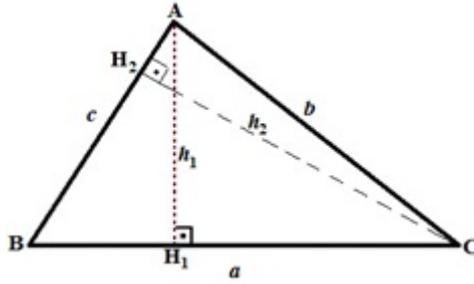


Figura 1.46: Teorema 1.32 (Lei dos senos). Fonte: adaptada de [9].

No triângulo retângulo  $ABH_1$ , temos:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{h_1}{c} \implies h_1 = c \cdot \text{sen}(\hat{B}) \quad (1)$$

No triângulo retângulo  $ACH_1$ , temos:

$$\text{sen}(\hat{C}) = \frac{h_1}{b} \implies h_1 = b \cdot \text{sen}(\hat{C}) \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), podemos escrever:

$$c \cdot \text{sen}(\hat{B}) = b \cdot \text{sen}(\hat{C}) \implies \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} \quad (3)$$

No triângulo retângulo  $BCH_2$ , temos:

$$\text{sen}(\hat{B}) = \frac{h_2}{a} \implies h_2 = a \cdot \text{sen}(\hat{B}) \quad (4)$$

No triângulo retângulo  $ACH_2$ , temos:

$$\text{sen}(\hat{A}) = \frac{h_2}{b} \implies h_2 = b \cdot \text{sen}(\hat{A}) \quad (5)$$

Comparando (4) e (5), podemos escrever:

$$a \cdot \text{sen}(\hat{B}) = b \cdot \text{sen}(\hat{A}) \implies \frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} \quad (6)$$

Finalmente, comparando (3) e (6), podemos escrever a seguinte igualdade de razões:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})}$$

como queríamos demonstrar. □

**Teorema 1.33. Lei dos cossenos** Se  $ABC$  é um triângulo qualquer de lados  $AB = c$ ,  $AC = b$  e  $BC = a$  então,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{A}); \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\hat{B}) \quad \text{ou} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\hat{C}).$$

*Demonstração.* Considere o triângulo acutângulo  $ABC$  da figura abaixo onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são as medidas dos lados,  $h$  é a altura relativa ao lado  $BC$  e  $x$  e  $y$  são as medidas dos segmentos que a altura determina sobre o lado  $BC$ :

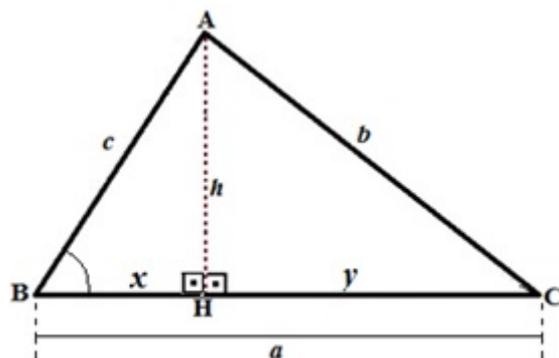


Figura 1.47: Teorema 1.33 (Lei dos cossenos). Fonte: adaptada de [9].

No triângulo retângulo  $ABH$ , aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$c^2 = h^2 + x^2 \implies h^2 = c^2 - x^2 \quad (1)$$

Analogamente, no triângulo retângulo  $ACH$ , temos:

$$b^2 = h^2 + y^2 \implies h^2 = b^2 - y^2 \quad (2)$$

Comparando (1) e (2), temos:

$$c^2 - x^2 = b^2 - y^2 \implies b^2 = c^2 - x^2 + y^2$$

Como  $y = a - x$ , substituindo  $y$ , temos:

$$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - x^2 + (a - x)^2 = c^2 - x^2 + a^2 - 2ax + x^2 \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ax \quad (3) \end{aligned}$$

No triângulo retângulo  $ABH$ , temos:

$$\cos(\hat{B}) = \frac{x}{c} \implies x = c \cdot \cos(\hat{B})$$

Substituindo  $x$  por  $c \cdot \cos(\hat{B})$  na igualdade (3), concluímos que:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos(\hat{B}).$$

Como queríamos demonstrar. □

Os outros dois casos são análogos, isto é, as leis dos senos e dos cossenos, demonstradas para triângulos acutângulos, também são válidas para triângulos obtusângulos e retângulos.

## 1.7 Área de um triângulo

Uma região (figura) triangular é um conjunto de pontos do plano formado por todos os segmentos cujas extremidades estão sobre os lados de um triângulo. O triângulo é chamado de fronteira da região triangular. O conjunto de pontos de uma região triangular que não pertence à sua fronteira é chamado de interior da região triangular.

Uma região poligonal é a união de um número finito de regiões triangulares que duas a duas não tem pontos interiores em comum.

A noção de área de regiões poligonais é introduzida na Geometria Euclidiana através dos seguintes axiomas:

- (i) A toda região poligonal corresponde um número real maior que zero. Esse número é chamado de *área da região*.
- (ii) Se uma região poligonal é a união de duas ou mais regiões poligonais que, duas a duas, não tenham pontos interiores em comum, então, sua área é a soma das áreas daquelas regiões.
- (iii) Regiões triangulares limitadas por triângulos congruentes tem áreas iguais. Assim, dizemos que triângulos congruentes possuem a mesma área.
- (iv) Se  $ABCD$  é um retângulo, então, sua área é dada pelo produto  $b.h$ , onde  $b$  é o comprimento do lado  $AB$  (base) e  $h$  é o comprimento do lado  $BC$  (altura). Indicamos:

$$S_{ABCD} = AB \cdot BC = b \cdot h$$

Onde  $S$ , doravante, representará a área de uma superfície.

A área do triângulo é a metade do produto do comprimento de qualquer de seus lados pela altura relativa a este lado. Como a área de um retângulo é dada pelo produto da sua base pela sua altura, mostremos que todo triângulo é equivalente

a um retângulo que possui mesma base e metade da altura do triângulo. Assim, a área do triângulo é a metade da área de um retângulo, nessas condições.

Para isso, basta observar que sempre podemos decompor um triângulo arbitrário em um trapézio (de altura igual à metade da altura do triângulo) e dois triângulos, que podem ser reagrupados de modo a formar um retângulo.

(i) Triângulo acutângulo:

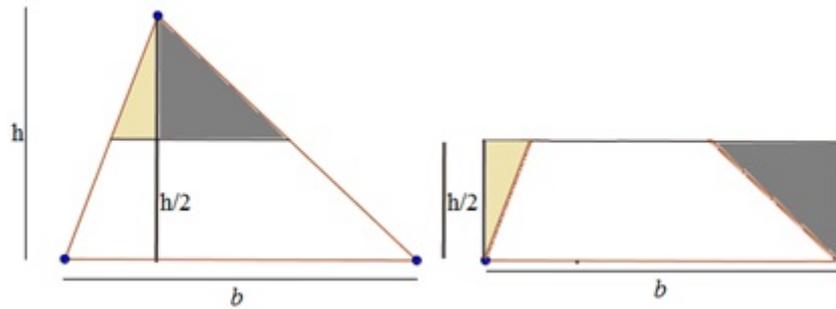


Figura 1.48: Área do triângulo, caso (i). Fonte: adaptada de [12].

(ii) Triângulo obtusângulo:

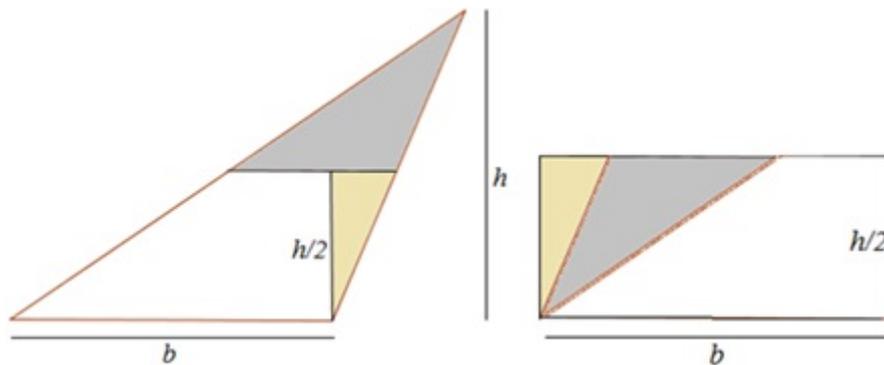


Figura 1.49: Área do triângulo, caso (ii). Fonte: adaptada de [12].

O caso do triângulo retângulo é trivial. Basta duplicar o triângulo fazendo coincidir a hipotenusa com a diagonal do retângulo. Assim, em qualquer dos casos, a área de um triângulo é igual a:

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

Como em cada triângulo existem três pares de lados e alturas relativas, podemos escrever três expressões para o cálculo da área de um triângulo  $ABC$ :

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Onde  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$  são as alturas relativas aos lados  $BC = a$ ,  $CA = b$  e  $AB = c$ , respectivamente.

**Proposição 1.34.** *A razão entre as áreas de dois triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança  $k$ .*

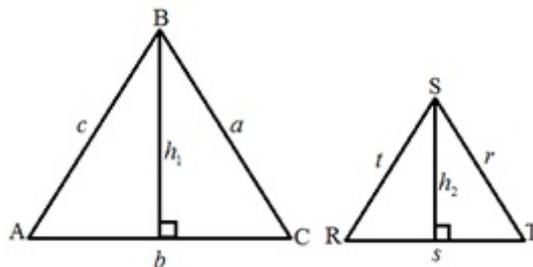


Figura 1.50: Proposição 1.34. Fonte: Geogebra, pelo autor.

$$\frac{S_{ABC}}{S_{RST}} = \frac{b^2}{s^2} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{c^2}{t^2} = k^2.$$

*Demonstração.* Com efeito,  $\triangle ABC \sim \triangle RST$ , então:  $\frac{b}{s} = \frac{a}{r} = \frac{c}{t} = \frac{h_1}{h_2} = k$ .

Portanto,

$$\frac{S_{ABC}}{S_{RST}} = \frac{\frac{b \cdot h_1}{2}}{\frac{s \cdot h_2}{2}} = \frac{b \cdot h_1}{s \cdot h_2} = \frac{b}{s} \cdot \frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{s} \cdot \frac{b}{s} = \frac{b^2}{s^2} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{c^2}{t^2} = k^2.$$

□

Uma maneira interessante de calcular a área de um triângulo plano dadas as medidas dos seus três lados é a famosa *Fórmula de Herão de Alexandria*, um matemático que se destacou na matemática aplicada.

Há muita controvérsia sobre a época exata em que ele viveu, havendo estimativas que variam de 150 a.C. a 250 d.C. Há numerosos trabalhos sobre matemática e física de sua autoria que enfatizam mais as aplicações práticas do que o acabamento teórico. Seus estudos beneficiaram muito a engenharia e a agrimensura da época. [7]

Os trabalhos geométricos de Herão ocupam-se amplamente de problemas de mensuração, sendo *A Métrica*, publicado em três livros, o mais importante e só descoberto em 1896, em Constantinopla, por R. Schöne. O livro I ocupa-se basicamente da área de figuras planas, círculos e seus segmentos, elipses, segmentos parabólicos e

da superfície de cilindros, cones e esferas. É nesse livro que se encontra a brilhante dedução da fórmula da área de um triângulo em função dos seus três lados, a qual veremos agora.[7]

**Proposição 1.35. Fórmula de Herão:** A área de um triângulo  $ABC$ , onde  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  e  $p = \frac{a+b+c}{2}$ , sendo  $p$  o semi-perímetro do triângulo (a metade da soma das medidas de seus lados), é:

$$S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

*Demonstração.* Considere o triângulo  $ABC$  da figura 1.51 abaixo, em que  $BC = a$ ,  $AC = b$ ,  $AB = c$  e  $AD = h_a$  é a altura relativa ao lado  $BC$ .

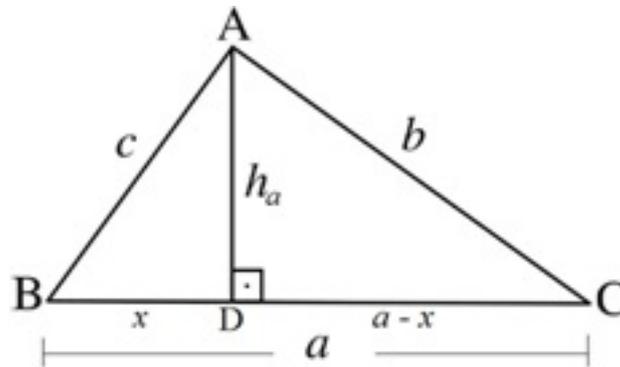


Figura 1.51: Proposição 1.35. Fonte: adaptada de [12].

Pelo Teorema de Pitágoras, no  $\triangle ABD$ , temos

$$x^2 + h_a^2 = c^2 \quad (1)$$

Analogamente, no  $\triangle ACD$ ,

$$(a - x)^2 + h_a^2 = b^2$$

$$a^2 - 2ax + x^2 + h_a^2 = b^2$$

Substituindo  $x^2 + h_a^2$  por  $c^2$ , segue que

$$a^2 - 2ax + x^2 + h_a^2 = a^2 - 2ax + c^2 = b^2$$

$$2ax = a^2 + c^2 - b^2$$

$$x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} \quad (2)$$

Se  $p = \frac{a + b + c}{2}$  o semi-perímetro do triângulo  $ABC$ , segue que,

$$a + b + c = 2p \implies b + c = 2p - a \implies a + b = 2p - c \implies a + c = 2p - b.$$

Aplicando (2) em (1), vem:

$$\begin{aligned}x^2 + h_a^2 = c^2 &\implies \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2 + h_a^2 = c^2 \\ &\implies h_a^2 = c^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h_a^2 &= \left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \cdot \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{b^2 - (a^2 - 2ac + c^2)}{2a}\right) \cdot \left(\frac{-b^2 + (a^2 + 2ac + c^2)}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{b^2 - (a - c)^2}{2a}\right) \cdot \left(\frac{(a + c)^2 - b^2}{2a}\right) \\ &= \left(\frac{[b - (a - c)] \cdot [b + (a - c)]}{2a}\right) \cdot \left(\frac{[(a + c) - b] \cdot [(a + c) + b]}{2a}\right)\end{aligned}\tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}h_a &= \sqrt{\frac{(b + c - a)(b + a - c)(a + c - b)(a + b + c)}{4a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{(2p - a - a)(2p - c - c)(2p - b - b)(2p)}{4a^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(2p - 2a)(2p - 2b)(2p - 2c)(2p)}}{2a} \\ &= \frac{\sqrt{2(p - a) \cdot 2(p - b) \cdot 2(p - c) \cdot 2p}}{2a} \\ &= \frac{4 \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{2a} \\ h_a &= \frac{2\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{a}\end{aligned}\tag{1.2}$$

Como  $S_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2}$ , então:

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}}{a}}{2}$$

Daí, concluímos que  $S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$  conforme anunciado acima.  $\square$

# Capítulo 2

## Cevianas

Neste capítulo destacaremos alguns teoremas e propriedades ligados às cevianas de um triângulo. Lembrando que uma *ceviana* é todo segmento de reta que une um vértice de um triângulo a um ponto qualquer sobre a reta suporte do lado oposto ao vértice considerado.

**Teorema 2.1.** *(de Giovanni Ceva [1648-1734])* Seja  $ABC$  um triângulo qualquer e sejam  $M, N$  e  $P$ , respectivamente, pontos sobre os lados  $AB, BC$  e  $AC$ .  $AN, BP$  e  $CM$  são concorrentes se, e somente se

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1.$$

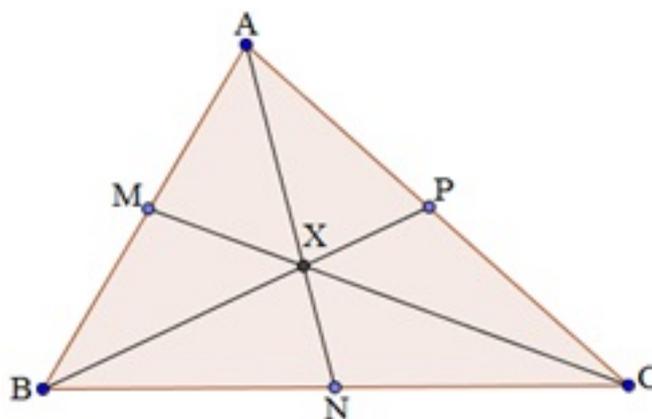


Figura 2.1: Teorema de Ceva. Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Tracemos uma reta  $r$  paralela a  $BC$  passando por  $A$ . Prolonguemos  $CM$  e  $BP$  até interceptar  $r$ , respectivamente em  $C'$  e  $B'$ , conforme ilustra a figura abaixo.

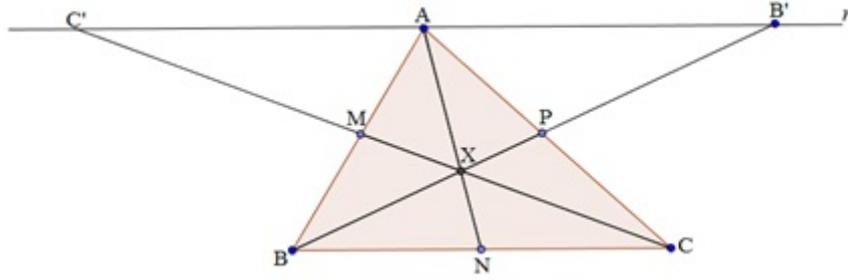


Figura 2.2: Ilustração do Teorema de Ceva. Fonte: adaptada de [12].

Como  $\triangle AMC' \sim \triangle BMC$ , então  $\frac{AM}{MB} = \frac{AC'}{BC}$ ;  $\triangle BPC \sim \triangle B'PA$ , então  $\frac{CP}{PA} = \frac{BC}{AB'}$  e  $\triangle XBC \sim \triangle XB'C'$ , então  $\frac{BN}{NC} = \frac{AB'}{AC'}$ . Portanto,

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{AC'}{BC} \cdot \frac{AB'}{AC'} \cdot \frac{BC}{AB'} = 1.$$

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, se  $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ , então  $AN$ ,  $BP$  e  $CM$  são concorrentes.

De fato, tracemos inicialmente  $AN$  e  $BP$ , que se cortam em  $X$ . Agora tracemos a reta  $\overleftrightarrow{CX}$  que corta  $AB$  em  $M'$ .

Como  $AN$ ,  $BP$  e  $CM'$  são concorrentes, então  $\frac{AM'}{M'B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ . Sendo,  $1 = \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA}$  (hipótese), temos, portanto, que

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} = \frac{AM'}{M'B} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CP}{PA} \implies \frac{AM}{MB} = \frac{AM'}{M'B} \implies M = M'.$$

Assim,  $AN$ ,  $BP$  e  $CM$  são, de fato, concorrentes em  $X$ .

□

**Teorema 2.2. (de Menelaus).** *Uma reta  $r$  corta as três retas que contém os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $AC$  de um triângulo  $ABC$  nos pontos  $D$ ,  $E$  e  $F$ , respectivamente se, e somente se,*

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1.$$

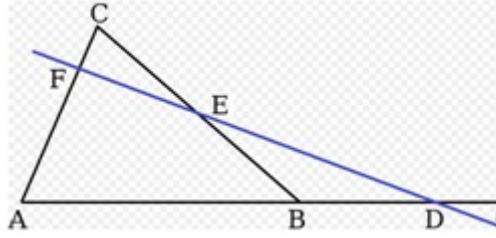


Figura 2.3: Teorema de Menelaus. Fonte: *Google imagens*.

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Tracemos por  $A, B$  e  $C$  as alturas respectivas aos triângulos  $AFD$ ,  $CFE$  e  $BDE$ . Desde que  $AM, BP$  e  $CN$  são perpendiculares ao segmento  $MD$ , então esses três segmentos são paralelos.

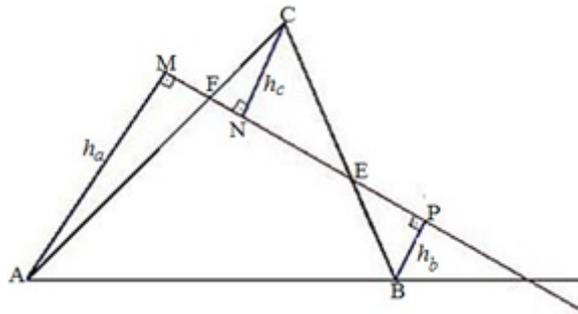


Figura 2.4: Teorema de Menelaus. Fonte: adaptada de [12].

Assim,

$$\begin{aligned} \triangle AMD &\sim \triangle BPD \implies \frac{AD}{BD} = \frac{h_a}{h_b}; \\ \triangle BPE &\sim \triangle CNE \implies \frac{BE}{EC} = \frac{h_b}{h_c}; \\ \triangle AMF &\sim \triangle CNF \implies \frac{CF}{FA} = \frac{h_c}{h_a}. \\ \implies \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} &= \frac{h_a}{h_b} \cdot \frac{h_b}{h_c} \cdot \frac{h_c}{h_a} = 1. \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Suponha que a reta  $ED$  corta o lado  $AC$  em  $F'$ . Assim, temos que

$$\frac{AD}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF'}{F'A} = 1.$$

Mas,

$$\frac{D}{BD} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1,$$

então

$$\frac{F'A}{CF'} = \frac{FA}{CF} \implies F = F'.$$

Concluimos, assim, que os pontos  $D, E$  e  $F$  estão alinhados. □

Os Teoremas de Ceva e Menelaus são muito úteis no estudo de colinearidades. O Teorema de Ceva encontra aplicações em provas de concorrência de retas. Através dele, podemos demonstrar alternativamente que as bissetrizes dos ângulos internos de um triângulo se cruzam em um mesmo ponto, assim como as medianas e as alturas.

## 2.1 Mediana e Baricentro de um triângulo.

**Proposição 2.3.** *As medianas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto denominado **baricentro** ( $G$ ).*

*Demonstração.* Sejam  $M, N$  e  $P$  os pontos médios, respectivamente, dos lados  $AB, BC$  e  $AC$ , ou seja,  $AM = MB, BN = NC$  e  $CP = PA$ . Tracemos as três medianas  $AN, BP$  e  $CM$ . Como  $\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{PA} = 1$ , pelo Teorema de Ceva temos que estas três medianas são concorrentes. □

**Proposição 2.4.** *Se  $G$  é o baricentro do triângulo  $ABC$ , então  $\frac{AG}{GN} = \frac{CG}{GM} = \frac{BG}{GP} = 2$ .*

Em outras palavras, o baricentro de um triângulo  $ABC$  é um ponto que divide qualquer mediana nas razões  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$  dos seus comprimentos:  $BG = 2.GP \implies GP = \frac{1}{3}.BP$  e  $BG = \frac{2}{3}.BP$ .

*Demonstração.* Considere o triângulo  $ACM$  e a transversal  $BP$ :

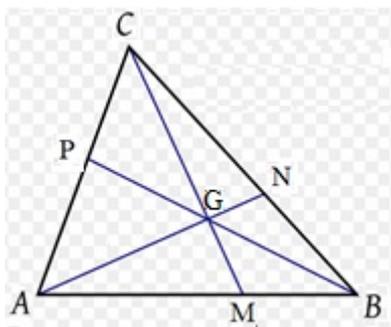


Figura 2.5: Proposição 2.4. Fonte: *Google imagens*.

Pelo Teorema de Menelaus,

$$\frac{AB}{MB} \cdot \frac{MG}{CG} \cdot \frac{CP}{PA}.$$

Como  $P$  é o ponto médio de  $CA$ , então  $CP = PA$ . Como  $AB = 2 \cdot MB$ , vem:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{MB} \cdot \frac{MG}{CG} \cdot \frac{CP}{PA} &= 2 \cdot \frac{MB}{MB} \cdot \frac{MG}{CG} \cdot \frac{PA}{PA} = 1 \\ 2 \cdot \frac{MG}{CG} &= 1 \implies \frac{CG}{MG} = 2. \end{aligned}$$

□

Analogamente se demonstra as outras duas relações.

**Proposição 2.5.** *As três medianas dividem um triângulo em seis triângulos menores e de mesma área.*

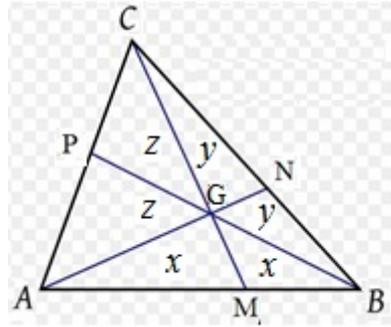


Figura 2.6: Proposição 2.5. Fonte: *Google imagens*.

*Demonstração.* Observe que os triângulos  $AGM$  e  $BGM$  da figura acima possuem a mesma altura relativa ao vértice  $G$  e que suas bases são iguais, já que  $AM = BM$ . Assim, as áreas dos triângulos  $AGM$  e  $BGM$  são iguais. Analogamente concluímos que as áreas dos triângulos  $CGP$  e  $AGP$ , bem como as áreas dos triângulos  $CGN$  e  $BGN$  são iguais.

Da mesma forma, outros pares de triângulos possuem a mesma base e a mesma altura:  $ACM$  e  $BCM$ ;  $ABP$  e  $CBP$ ;  $BAN$  e  $CAN$ . Concluímos, portanto que:

$$\begin{aligned} 2z + x &= 2y + x; \quad 2x + y = 2z + y \quad \text{e} \quad 2y + z = 2x + z \\ &\iff x = y = z. \end{aligned}$$

□

## 2.2 Bissetriz e incentro.

**Teorema 2.6. (bissetriz interna):** Se  $AL$  é a bissetriz interna do ângulo  $\hat{A}$  de um triângulo  $ABC$ , então  $\frac{BL}{CL} = \frac{AB}{AC}$  ou  $\frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}$ .

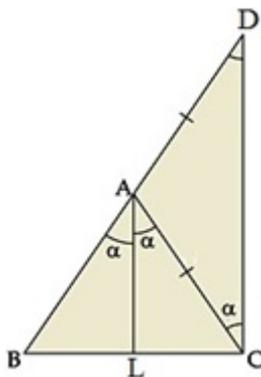


Figura 2.7: Teorema da bissetriz interna. Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* Prolongue, a partir de  $A$ , o segmento  $AB$  até o ponto  $D$  de modo que  $CD \parallel AL$ . Daí, os ângulos  $L\hat{A}C$  e  $A\hat{C}D$  são congruentes. Como  $C\hat{A}D = 180^\circ - 2\alpha$ , então  $A\hat{D}C = 180^\circ - (\alpha + 180^\circ - 2\alpha) = \alpha$ . Logo,  $\triangle ADC$  é isósceles; assim,  $AD = AC$ . Ainda com relação ao paralelismo de  $CD$  e  $AL$ , temos por conseguinte que  $\triangle ABL \sim \triangle BCD$ . Daí, segue que:

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AB}{BL}.$$

Aplicando propriedades dos termos de uma proporção, vem:

$$\frac{BD - AB}{BC - BL} = \frac{AD}{CL} = \frac{AC}{CL} \implies \frac{AB}{BL} = \frac{AC}{CL}.$$

□

**Proposição 2.7.** As bissetrizes internas de um triângulo são concorrentes em um mesmo ponto denominado de **incentro**.

*Demonstração.* Considere o triângulo  $ABC$  da figura abaixo, sendo  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$  as bissetrizes internas relativas aos ângulos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , respectivamente.

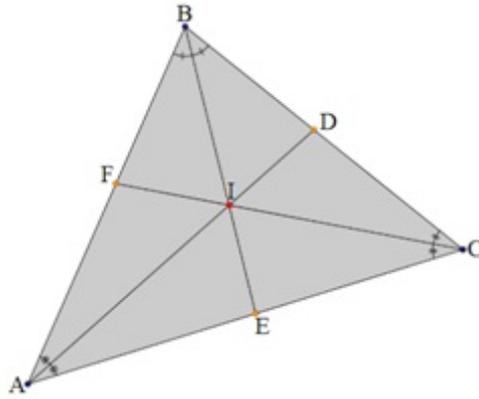


Figura 2.8: Ilustração da Proposição 2.7. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Pelo teorema da bissetriz interna, temos que:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{CB}; \frac{AE}{EC} = \frac{AB}{BC}; \frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB}.$$

Deste modo,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{BC}{AB} = 1.$$

Assim, pelo Teorema de Ceva, concluímos que as três bissetrizes são concorrentes no ponto I.

**Definição 2.8.** Uma circunferência se diz *inscrita* em um triângulo se ela tem um único ponto em comum com cada lado desse triângulo.

□

**Proposição 2.9.** O incentro I de um triângulo é o centro da circunferência inscrita.

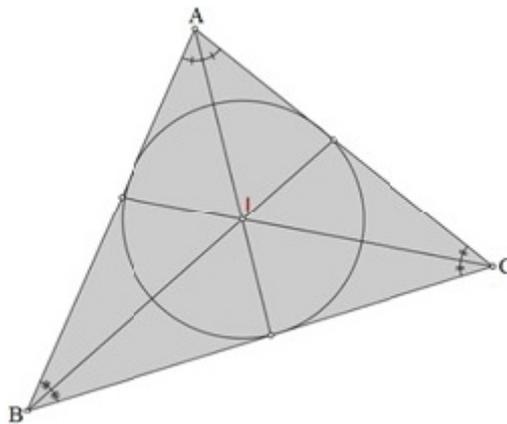


Figura 2.9: Proposição 2.9. Fonte: Geogebra, pelo autor.

*Demonstração.* Como a bissetriz é, por definição, o segmento de reta que divide um ângulo interno em dois ângulos congruentes, temos que  $I$  é o ponto equidistante de  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ . Desta forma, existe uma circunferência com centro em  $I$  tangente aos três lados do triângulo, cujo raio é exatamente a distância de  $I$  aos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ .

□

**Teorema 2.10. (bissetriz externa):** Se  $AD$  é a bissetriz externa de um triângulo  $ABC$  relativa ao ângulo  $\hat{A}$ , então  $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ .

*Demonstração.* Pelo ponto  $C$  traçamos  $CE \parallel AD$ .

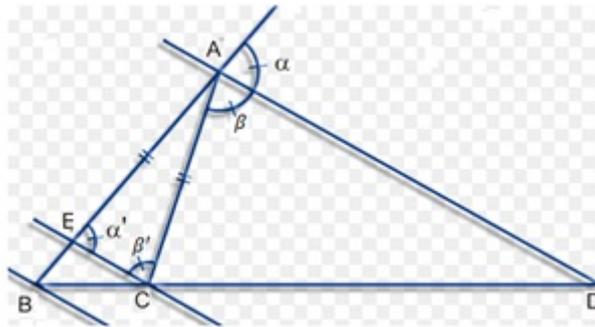


Figura 2.10: Teorema 2.10. Bissetriz externa. Fonte: *Google imagens*.

Do paralelismo de  $CE$  e  $AD$  e a transversal  $AB$  temos  $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}'$ . Do paralelismo de  $AD$  e  $CE$  e a transversal  $AC$ , temos que  $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$ . Como  $\hat{\beta} = \hat{\alpha}$  (pois  $AD$  é bissetriz do ângulo externo  $\hat{A}$ ), concluímos que  $\hat{\alpha}' = \hat{\beta}'$ . Assim, o  $\triangle AEC$  é isósceles de base  $EC$ , isto é,  $AE = AC$ . Pelo Teorema de Tales, temos:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD} \implies \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \implies \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}.$$

□

## 2.3 Altura e ortocentro.

**Proposição 2.11.** As três alturas de um triângulo concorrem em um mesmo ponto denominado de ortocentro ( $H$ ).

*Demonstração.* Vamos separar por casos.

(i) *Triângulo acutângulo.*

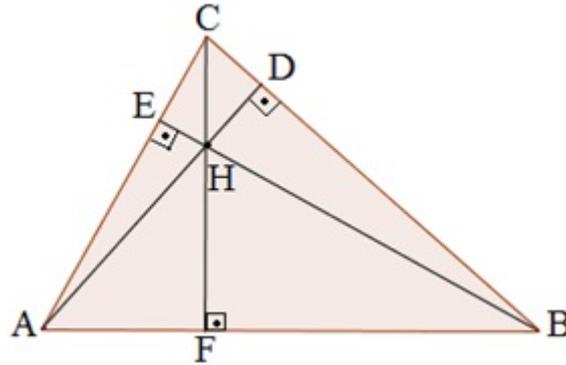


Figura 2.11: Altura e ortocentro (i). Fonte: Geogebra, pelo autor.

No triângulo  $ACF$  temos que:  $AF = AC \cdot \cos(\hat{A})$ . Da mesma forma  $FB = BC \cdot \cos(\hat{B})$ ,  $BD = AB \cdot \cos(\hat{B})$ ,  $DC = AC \cdot \cos(\hat{C})$ ,  $CE = BC \cdot \cos(\hat{C})$ ,  $EA = AB \cdot \cos(\hat{A})$ . Assim,

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{AC \cdot \cos(\hat{A})}{BC \cdot \cos(\hat{B})} \cdot \frac{AB \cdot \cos(\hat{B})}{AC \cdot \cos(\hat{C})} \cdot \frac{BC \cdot \cos(\hat{C})}{AB \cdot \cos(\hat{A})} = 1.$$

Portanto, pelo Teorema de Ceva, as alturas concorrem em  $H$  (ortocentro).

(ii) *Triângulo retângulo.*

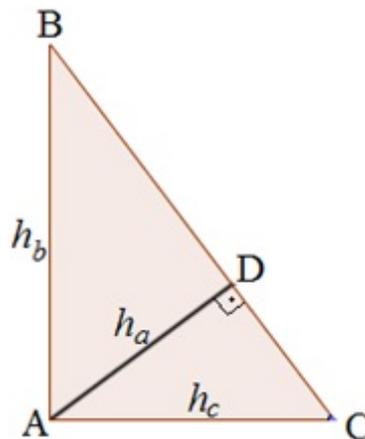


Figura 2.12: Altura e ortocentro (ii). Fonte: Geogebra, pelo autor.

Neste caso, as alturas relativas aos vértices  $B$  e  $C$  coincidem com os catetos  $AB$  e  $AC$ , fazendo com que o ortocentro seja o vértice do ângulo reto.

(iii) *Triângulo obtusângulo.*

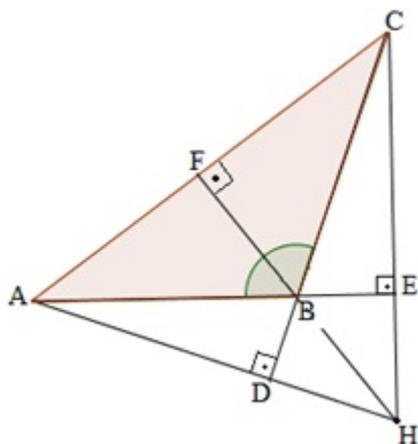


Figura 2.13: Altura e ortocentro (iii). Fonte: Geogebra, pelo autor.

Relativamente ao triângulo  $ABC$ , tracemos as alturas relativas aos vértices  $A$  e  $C$ , que se encontram no ponto  $H$ . Consideremos agora o  $\triangle ACH$ . Como  $CD \perp AH$  e  $AE \perp CH$ , então  $B$  é o encontro de duas alturas do  $\triangle ACH$ . Como o  $\triangle ACH$  é acutângulo, então suas três alturas são concorrentes, ou seja,  $B$  é ortocentro do  $\triangle ACH$ , implicando que  $BH \perp AC$ . Desta forma a altura do  $\triangle ABC$  relativa ao vértice  $B$  também passa por  $H$ .

□

## 2.4 Mediatriz e circuncentro.

**Definição 2.12.** *Mediatriz* é a reta perpendicular a um segmento passando pelo seu ponto médio.

Como consequência, a mediatriz de um segmento  $AB$  é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de  $A$  e  $B$ .

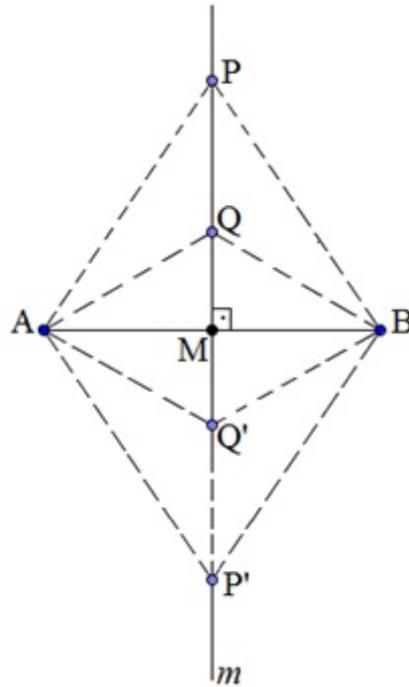


Figura 2.14: Reta mediatriz. Fonte: Geogebra, pelo autor.

$$\begin{aligned}
 AM &= MB \\
 d(A, P) &= d(B, P) \\
 d(A, Q) &= d(B, Q) \\
 d(A, P') &= d(B, P') \\
 d(A, Q') &= d(B, Q') \\
 &(\dots)
 \end{aligned}$$

**Proposição 2.13.** *As mediatrizes dos lados de um triângulo são concorrentes em um ponto denominado de circuncentro  $O$ .*

*Demonstração.* De fato, seja  $m_{AB}$  a mediatriz de  $AB$  e  $m_{BC}$  a mediatriz de  $BC$ . Seja  $O$  a interseção de  $m_{AB}$  e  $m_{BC}$ , ou seja,  $O$  é equidistante de  $A, B$  e  $C$ . Desta forma,  $O$  pertence ao segmento  $m_{AC}$ , fazendo com que  $O$  seja a interseção de  $m_{AB}$ ,  $m_{BC}$  e  $m_{AC}$ .

□

## 2.5 Circunferência circunscrita.

Ainda seguindo o raciocínio da proposição 2.13, sendo  $O$  equidistante de  $A, B$  e  $C$ , logo, existe uma circunferência  $\Gamma$  com centro em  $O$  e que contém os vértices do

triângulo  $ABC$ . A esta circunferência  $\Gamma$  dá-se o nome de *circunferência circunscrita* ao  $\triangle ABC$ . Podemos dizer também que  $\triangle ABC$  está inscrito em  $\Gamma$  ou que  $\Gamma$  é o *circuncírculo* do triângulo  $ABC$ .

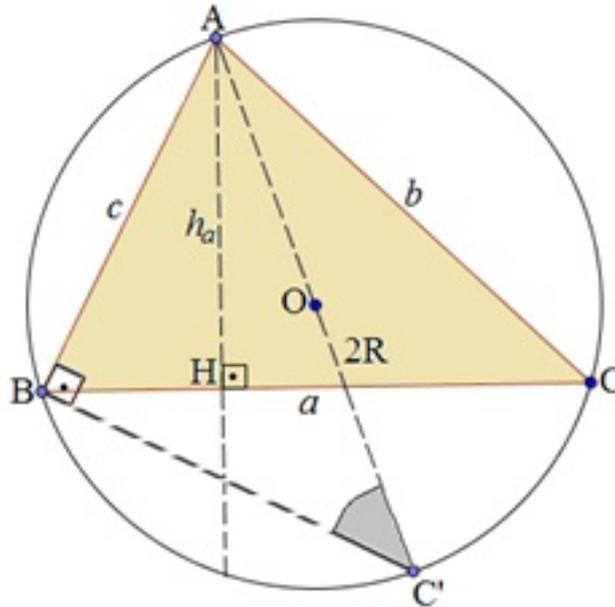


Figura 2.15: Circunferência circunscrita. Fonte: Geogebra, adaptada de [8].

**Teorema 2.14.** *Em todo triângulo, o produto das medidas de dois lados quaisquer é igual ao produto da medida de sua altura em relação ao terceiro lado pela medida do diâmetro da circunferência circunscrita.*

*Demonstração.* Conforme a figura 2.15 acima, considere o triângulo  $ABC$  qualquer, inscrito em uma circunferência de diâmetro de medida  $2R$ , sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  as medidas dos seus três lados. Por um dos vértices do triângulo, por exemplo  $A$ , trace-se a reta que passa pelo centro  $O$  da circunferência e corte-a no ponto  $C'$ . Também por  $A$ , trace-se a perpendicular  $AH$  ao lado  $BC$ . Os triângulos  $AHC$  e  $ABC'$  são semelhantes pelo caso  $ALA$ : ambos são retângulos ( $\widehat{AHC}$  é reto por construção e  $\widehat{ABC'}$  é reto por está inscrito em uma semi-circunferência) e os ângulos de vértices  $C$  e  $C'$  são congruentes (subtendem o mesmo arco  $\widehat{AB}$ ). Logo,

$$\frac{AH}{AB} = \frac{AC}{AC'}$$

Substituindo esses segmentos por suas medidas tem-se

$$\frac{h_a}{c} = \frac{b}{2R},$$

ou seja,  $bc = 2R.h_a$ . Com o mesmo raciocínio, prova-se que  $ab = 2R.h_c$  e  $ac = 2R.h_b$ , onde  $h_b$  e  $h_c$  são as medidas das alturas relativas aos lados  $AC$  e  $AB$ . □

As igualdades demonstradas anteriormente podem ser escritas da seguinte forma:

$$2R = \frac{bc}{h_a} = \frac{ac}{h_b} = \frac{ab}{h_c}$$

que é equivalente a

$$2R = \frac{a}{\frac{h_b}{c}} = \frac{b}{\frac{h_c}{a}} = \frac{c}{\frac{h_a}{b}} \quad (1)$$

É fácil verificar que as relações  $\frac{h_b}{c}$ ,  $\frac{h_c}{a}$  e  $\frac{h_a}{b}$  são, respectivamente, os senos dos ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ . Daí, substituindo em (1) temos que:

$$\frac{a}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2R$$

Essa é a fundamentação geométrica da chamada *Lei dos Senos* da trigonometria, demonstrada anteriormente [8].

**Proposição 2.15.** *A área de um triângulo  $ABC$  inscrito, de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$ , é dada por  $S = \frac{a.b.\text{sen}(\hat{C})}{2}$ ,  $S = \frac{a.c.\text{sen}(\hat{B})}{2}$  ou  $S = \frac{b.c.\text{sen}(\hat{A})}{2}$ .*

*Demonstração.* Considere o triângulo  $ABC$  da figura seguinte cujos lados são  $a$ ,  $b$  e  $c$  e  $AD = h_a$  é a altura relativa ao lado  $BC$ :

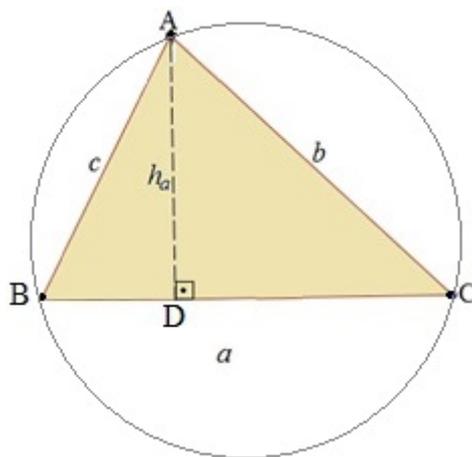


Figura 2.16: Proposição 2.15. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Com relação à base  $BC = a$  temos que

$$S = \frac{a \cdot h_a}{2} \quad (1).$$

Do triângulo retângulo  $ABD$  temos que  $\text{sen}(\hat{B}) = \frac{h_a}{c} \implies h_a = c \cdot \text{sen}(\hat{B})$ . Substituindo  $h_a$  em (1), temos, portanto, que

$$S = \frac{a \cdot c \cdot \text{sen}(\hat{B})}{2}.$$

Analogamente, com relação aos demais lados, prova-se que  $S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\hat{C})}{2}$  e  $S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen}(\hat{A})}{2}$ . □

**Corolário 2.16.** *Em um triângulo  $ABC$  inscrito, com as mesmas características anteriores, temos que:*

$$S_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}.$$

*Demonstração.* Com efeito, aplicando a Lei dos Senos temos que  $\frac{c}{\text{sen}(\hat{C})} = 2R \implies \text{sen}(\hat{C}) = \frac{c}{2R}$ . Assim,

$$S = \frac{a \cdot b \cdot \text{sen}(\hat{C})}{2} = \frac{a \cdot b \cdot \frac{c}{2R}}{2}$$

$$S = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

□

## 2.6 Exercícios de aplicação (triângulos planos)

A seguir, selecionamos alguns problemas de aplicação. Esses exercícios foram retirados de provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e do Exame Vestibular da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS).

Existe um vasto banco de questões no Site da OBMEP e OBM, com livre acesso. Muitas envolvem propriedades dos triângulos planos aqui expostas e motivaram a produção deste trabalho.

**Exemplo 2.17. (OBMEP-2005 2ª fase - Nível 2)** O quadrado  $ABCD$  da figura está dividido em 16 quadradinhos iguais. O quadrado sombreado tem os vértices sobre os pontos médios do quadrado  $EFGH$ .

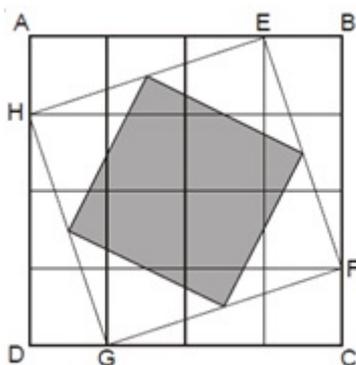


Figura 2.17: Exemplo 2.17.

1. A área do quadrado  $EFGH$  corresponde a que fração da área do quadrado  $ABCD$ ?

**Resolução:**

Se um quadrado tem lado de medida  $l$  (em alguma unidade de comprimento) então sua área é  $l^2$ . Assim, a área do quadrado  $EFGH$ , basta calcular  $(HE)^2$ . Seja  $k$  o lado de um dos quadradinhos. Pelo teorema de Pitágoras, temos que:

$$(HE)^2 = (AH)^2 + (AE)^2 = k^2 + (3k)^2 = 10k^2$$

que é a área do quadrado  $EFGH$ . Como a área do quadrado  $ABCD$  é 16, segue que a fração pedida é

$$\frac{10k^2}{16k^2} = \frac{10}{16} = \frac{5}{8}$$

**Exemplo 2.18. (OBMEP-2012 - 2ª fase - Nível 3)** Na figura abaixo, as retas  $r$  e  $s$  são paralelas. O segmento  $AB$  é perpendicular a essas retas e o ponto  $P$ , nesse segmento, é tal que  $AP = 2$  e  $BP = 1$ . O ponto  $X$  pertence à reta  $r$  e a medida do segmento  $BX$  é indicada por  $x$ . O ponto  $Y$  pertence à reta  $s$  e o triângulo  $XPY$  é retângulo em  $P$ .

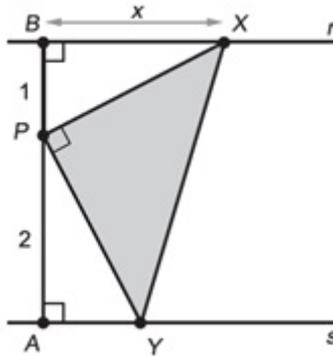


Figura 2.18: Exemplo 2.18.

- (i) Explique por que os triângulos  $PAY$  e  $XBP$  são semelhantes.  
(ii) Calcule a área do triângulo  $XPY$  em função de  $x$ .

**Resolução do item (i):**

Do enunciado temos

$$\widehat{PAY} = \widehat{XBP} = 90^\circ.$$

$$\widehat{BPX} + 90^\circ + \widehat{APY} = 180^\circ \implies \widehat{APY} = 90^\circ - \widehat{BPX}.$$

No triângulo  $XBP$  os ângulos  $\widehat{BPX}$  e  $\widehat{BXP}$  são complementares. Segue que  $\widehat{BXP} = 90^\circ - \widehat{BPX}$ . Assim, obtemos  $\widehat{APY} = \widehat{BXP}$ .

Portanto, os triângulos  $PAY$  e  $XBP$  são semelhantes.

**Resolução do item (ii):**

Seja  $AY = y$ . A semelhança dos triângulos  $PAY$  e  $XBP$  nos dá a relação  $\frac{y}{1} = \frac{2}{x}$ . Segue do Teorema de Pitágoras que

$$PX = \sqrt{1 + x^2}$$

e

$$PY = \sqrt{4 + y^2} = \sqrt{4 + \frac{4}{x^2}} = \frac{2}{x}\sqrt{1 + x^2}.$$

Temos então que

$$\begin{aligned} S_{XPY} &= \frac{PX \cdot PY}{2} \\ &= \frac{\sqrt{1 + x^2} \cdot 2 \cdot \sqrt{1 + x^2}}{2x} \\ &= \frac{1 + x^2}{x} = x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

**Exemplo 2.19. (OBMEP - 2006 - 1ª FASE - NÍVEL 3)** No triângulo  $ABC$ , o comprimento dos lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , nessa ordem, são números inteiros e consecutivos. A altura relativa a  $BC$  divide este lado em dois segmentos de comprimentos  $m$  e  $n$ , como indicado. Quanto vale  $m - n$ ?

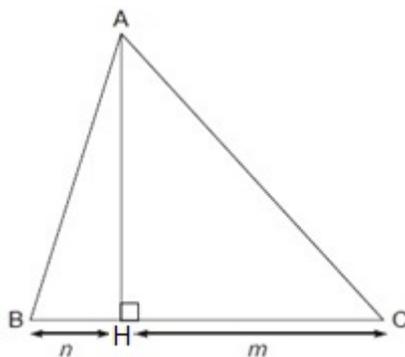


Figura 2.19: Exemplo 2.18.

**Resolução:**

Colocando  $AB = x$  temos  $BC = x + 1$  e  $AC = x + 2$ .

Seja  $AH = h$  a altura relativa ao lado  $BC$ . Aplicando o Teorema de Pitágoras aos  $\triangle ABH$  e  $\triangle AHC$  obtemos:

$$n^2 + h^2 = x^2 \text{ e } (x + 2)^2 = m^2 + h^2.$$

Segue que

$$h^2 = x^2 - n^2 \text{ e } h^2 = (x + 2)^2 - m^2,$$

donde  $(x + 2)^2 - m^2 = x^2 - n^2$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 (x+2)^2 - x^2 &= m^2 - n^2 & (2.1) \\
 &= (m-n)(m+n) \\
 (x+2-x)(x+2+x) &= 2(2x+2) \\
 4(x+1) &= (m-n)(m+n)
 \end{aligned}$$

Como  $m+n = x+1$  e  $x+1 \neq 0$  podemos dividir ambos os membros da última expressão acima por  $x+1$  e obtemos, finalmente, que

$$m - n = 4.$$

**Exemplo 2.20.** (OBM - 2015 - 1ª FASE - Nível 2) Na figura, as retas  $CD$  e  $AB$  são paralelas. Se  $ABC$  é um triângulo equilátero,  $DG = GF = FE$  e  $AB = 12$ , determine o comprimento de  $GC$ .

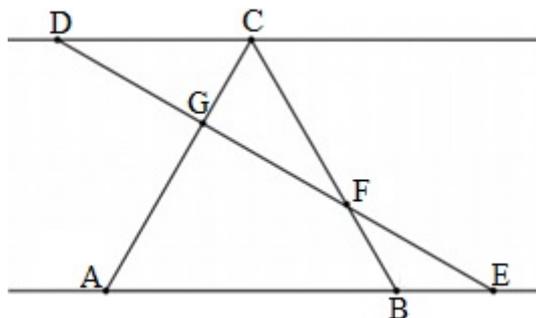


Figura 2.20: Exemplo 2.20.

**Resolução:** Como as retas  $AB$  e  $CD$  são paralelas, temos  $\triangle CDG \sim \triangle GAE$  e, conseqüentemente,

$$\frac{CG}{GA} = \frac{DG}{GE} = \frac{1}{2}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
 \frac{CG}{CG + GA} &= \frac{CG}{12} = \frac{1}{3} \\
 CG &= 4.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 2.21.** (OBMEP - 2015 - 1ª FASE - NÍVEL 3) O retângulo da figura possui área igual a  $640\text{cm}^2$ . Os pontos  $B$  e  $F$  são pontos médios dos lados  $AC$  e  $AE$ , respectivamente. Qual é a área do triângulo  $BDF$ ?

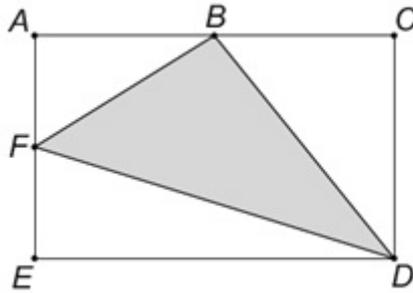


Figura 2.21: Exemplo 2.20.

**Resolução:**

Seja  $x$  a base e  $y$  a altura do retângulo  $ACDE$ , logo, sua área será  $x \cdot y = 640\text{cm}^2$ . Sendo  $B$  e  $F$  os pontos médios dos lados  $AC$  e  $AE$ , respectivamente, temos que  $AB = BC = \frac{x}{2}$  e  $AF = FE = \frac{y}{2}$ .

A área ( $S$ ) do triângulo  $BDF$  pode ser encontrada da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 S_{\triangle BDF} &= S_{ACDE} - (S_{\triangle ABF} + S_{\triangle BCD} + S_{\triangle DEF}) & (2.2) \\
 &= xy - \left( \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{2}}{2} + \frac{\frac{x}{2} \cdot y}{2} + \frac{x \cdot \frac{y}{2}}{2} \right) \\
 &= xy - \frac{xy}{8} - \frac{xy}{4} - \frac{xy}{4} \\
 &= xy - \frac{5xy}{8} \\
 &= \frac{3xy}{8} \\
 &= \frac{3 \cdot 640}{8} \\
 &= 240\text{cm}^2
 \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Triângulos Esféricos

Até então, este trabalho teve foco nos triângulos planos, isto é, todos os conceitos, propriedades e proposições baseiam-se nos axiomas da Geometria desenvolvida em uma superfície plana, conforme os estudos de Euclides.

Existem vários outros tipos de superfícies que devem ser estudadas, como as superfícies cilíndricas e as cônicas. Destacaremos nesta seção a superfície esférica, com ênfase em algumas propriedades dos triângulos esféricos, em contraponto com os triângulos planos.

Euclides considerou que os elementos primitivos da geometria são o *ponto*, a *reta* e o *plano*. Atualmente, os elementos primitivos são o *espaço topológico*, a *estrutura diferenciável* e a *métrica riemanniana*. [6]

Tal métrica afirma que a menor distância entre dois pontos, ao contrário do que está posto na geometria plana, não necessariamente é um segmento de reta. A esta menor distância está associada uma curva chamada ***geodésica*** que substitui o conceito euclidiano. Isso porque na superfície da esfera não existem retas, mas dados dois pontos existe uma única *geodésica* que os liga. [6].

O resultado dos estudos e tentativas para provar o V postulado de Euclides é visto como uma grande contribuição para o conhecimento matemático e para a sistematização de novos conhecimentos científicos em geral. A partir das ideias geométricas de Riemann, outros matemáticos, desenvolveram o Cálculo Tensorial que veio a ser a ferramenta matemática utilizada por Einstein para formular a Teoria da Relatividade Geral, baseada nos estudos da curvatura do universo. [4]

Não entraremos em detalhes acerca da métrica riemanniana, apenas falaremos um pouco sobre os triângulos esféricos e algumas propriedades, com a intenção de fazer um paralelo com os triângulos planos.

As próximas seções foram baseadas em AYRES JR [1], DOLCE [5], JENNINGS [10] e SILVA FILHO [15].

### 3.1 A superfície esférica

**Definição 3.1.** Uma superfície que não é um plano nem formada por partes de planos é dita **superfície curva**.

**Definição 3.2.** Dado um ponto  $O$  e um segmento de reta  $OP = R$ , denomina-se **superfície esférica** o lugar geométrico dos pontos do espaço cujas distâncias ao ponto  $O$  sejam congruentes ao segmento  $R$ .

O ponto  $O$  é denominado *centro* da superfície esférica e o segmento  $OP = R$  é o seu *raio*. Podemos entender a esfera também como sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo que contém o diâmetro.

**Definição 3.3.** Considere um ponto  $O$  e o segmento de medida  $R$ . Chama-se **esfera** de centro  $O$  e raio  $R$  ao conjunto dos pontos  $P$  do espaço, tais que a distância  $OP$  seja menor ou igual a  $R$ .

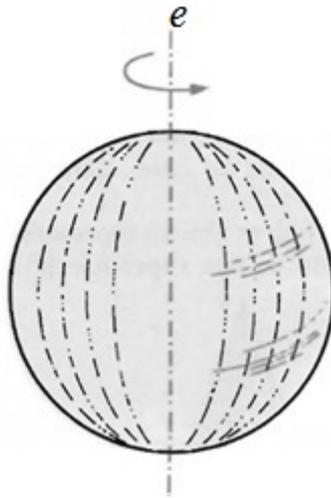


Figura 3.1: Esfera. Fonte: adaptada de [5].

Assim, *esfera* é algo “maciço”, uma vez que se forma pela rotação de um semicírculo e *superfície esférica* é algo “oco”, já que é a revolução de uma semicircunferência com extremidades no eixo que contém o diâmetro.

Toda secção de um plano com uma esfera gera um círculo. Se tal plano passa pelo centro da esfera, temos como secção um *círculo máximo* da esfera.

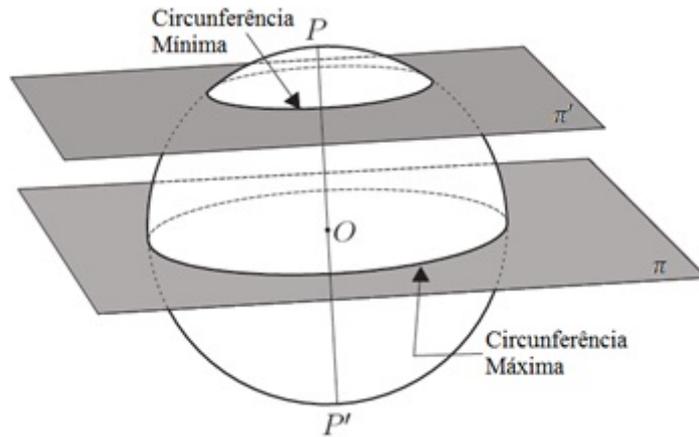


Figura 3.2: Secção de um plano com a esfera. Fonte: adaptada de [15].

### 3.2 Elementos da esfera

- (i) **Pólos:** são os pontos de interseção da superfície com o eixo vertical  $e$ . Chamamos  $P_1$  de polo norte e  $P_2$  de polo sul.
- (ii) **Equador:** é a circunferência do círculo máximo horizontal. Ou seja, é a secção perpendicular ao eixo que passa pelo centro da superfície esférica.
- (iii) **Meridiano:** é a circunferência de secção cujo plano contém o eixo  $e$ .
- (iv) **Paralelos:** são as secções perpendiculares ao eixo  $e$  e paralelas ao equador, chamados de círculos mínimos, ou simplesmente círculos.

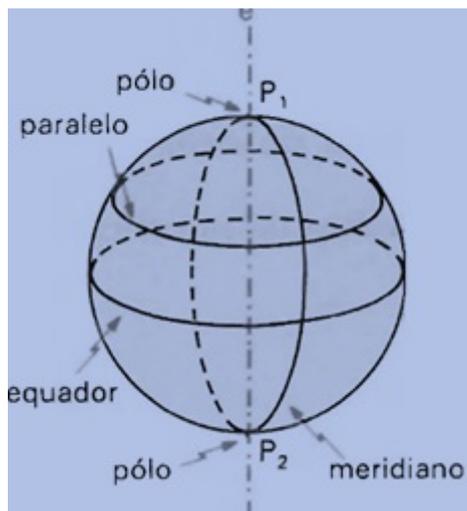


Figura 3.3: Elementos da esfera. Fonte: adaptada de [5].

### 3.3 Coordenadas esféricas

Nesta seção faremos uma abordagem analítica da trigonometria esférica para demonstrarmos alguns resultados sobre triângulos esféricos usando vetores. Desta forma, é importante ressaltarmos o sistema de coordenadas utilizado.

Sabemos que no *Sistema de Coordenadas Cartesianas*, dadas duas retas ( $x$  e  $y$ ) perpendiculares em um ponto  $O$  (origem), as quais determinam um plano  $\pi$ , a um ponto  $P$  qualquer desse plano estão associados dois números reais  $x_P$  e  $y_P$ , de modo que o par  $(x_P, y_P)$  são as suas coordenadas em  $\pi$ .

Analogamente, no espaço tridimensional, para cada ponto  $P$  estão associados três números reais  $x$ ,  $y$  e  $z$ , de sorte que a terna  $(x, y, z)$  dá as suas coordenadas cartesianas retangulares.

O sistema cartesiano de coordenadas nos dá a localização de pontos no plano ou no espaço  $\mathbb{R}$  através de segmentos de reta sem destacar o ângulo entre eles.

Já o *Sistema de Coordenadas Polares* usa o referencial constituído de um segmento de reta  $AB$  de comprimento  $a$  em relação ao qual se localiza um ponto  $P$  do plano tendo como coordenada o ângulo  $\alpha = \angle BAP$ , no sentido anti-horário.

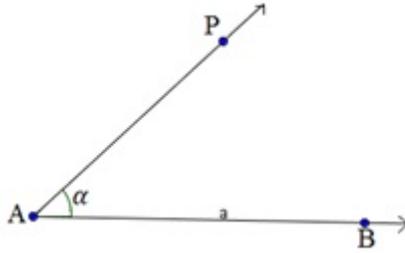


Figura 3.4: Ângulo  $BAP$ . Fonte: Geogebra, pelo autor.

Uma extensão natural ao espaço do sistema de coordenadas polares no plano consiste em fixar uma origem  $O$  e tomar então como coordenadas de um ponto  $P$  o comprimento do raio do vetor  $\overrightarrow{OP}$ , a latitude  $\phi$  e a longitude  $\theta$  de  $P$  em relação à esfera de centro  $O$  e raio  $\overrightarrow{OP}$ . Essas coordenadas se denominam *coordenadas esféricas*.

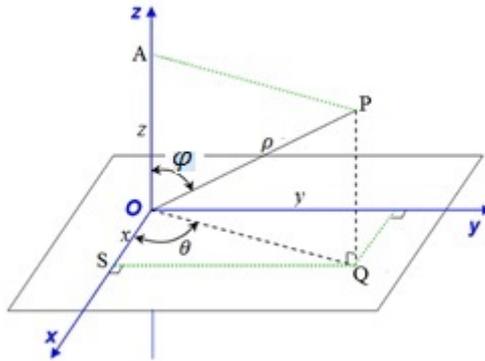


Figura 3.5: Coordenadas Esféricas. Fonte: *Google imagens*.

De acordo com a figura temos:

- $\varphi \rightarrow$  ângulo entre  $\overrightarrow{OP}$  e  $\overrightarrow{OA}$ :  $\varphi = \angle AOP$  (ângulo  $AOP$ , com vértice em  $O$ . Usaremos também essa notação);
- $\theta \rightarrow$  ângulo entre  $\overrightarrow{OS}$  e  $\overrightarrow{OQ}$  (Projeção de  $P$  no plano  $xy$ ):  $\theta = \angle SOQ$ ;
- $\rho \rightarrow$  módulo de  $\overrightarrow{OP}$ :  $\rho = |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;
- No  $\triangle POA$ , temos:  $\angle OAP = 90^\circ$ ,  $OA = z$ ,  $OP = \rho$ ,  $\angle AOP = \varphi = \arccos\left(\frac{z}{\rho}\right)$ ;
- No  $\triangle POQ$ , temos:  $OP = \rho$ ;
- No  $\triangle SOQ$ , temos:  $\angle SOQ = \theta$ ,  $OS = x$ ,  $SQ = y$ ,  $\angle OSQ = 90^\circ$ ,  $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ .

Destacando o  $\triangle SOQ$ , temos:

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{OQ} \implies x = OQ \cdot \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{y}{OQ} \implies y = OQ \cdot \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Destacando o  $\triangle AOP$ , temos:

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{z}{\rho} \implies z = \rho \cdot \cos\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi = \frac{AP}{\rho} \implies AP = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \end{cases}$$

Note que  $AP = AQ$  pois são lados opostos do retângulo  $APQO$ . Logo,

$$x = OQ \cdot \cos\theta = AP \cdot \cos\theta = \rho \operatorname{sen}\varphi \cdot \cos\theta$$

Além disso,

$$y = OQ \cdot \operatorname{sen}\theta = AP \cdot \operatorname{sen}\theta = \rho \cdot \operatorname{sen}\varphi \cdot \operatorname{sen}\theta$$

Em suma, temos as seguintes coordenadas para um ponto genérico  $P$  sobre a esfera:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

Considerando uma esfera unitária, isto é, cujo raio  $\rho = 1$ , vem:

$$\begin{cases} x = \cos\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ y = \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}\varphi \\ z = \cos\varphi \end{cases}$$

**Exemplo 3.4.** Escrever as coordenadas esféricas do ponto  $P = (3, \sqrt{3}, -2)$ .

Resolução:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(3)^2 + (\sqrt{3})^2 + (2)^2} = \sqrt{9 + 3 + 4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos \varphi = \frac{z}{\rho} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2} \implies \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \implies \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \implies \theta = \frac{\pi}{6}$$

Logo,  $P = \left(4, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$  sendo 4 o raio da esfera,  $\frac{\pi}{6}$  o ângulo a partir do eixo  $x$  na direção do equador e  $\frac{2\pi}{3}$  o ângulo que inicia o polo norte, passa pelo equador e vai  $30^\circ$  após, ou seja  $120^\circ$  a partir do polo norte. Portanto,  $P$  está no  $8^\circ$  octante da esfera.

Adiante daremos um tratamento vetorial para as próximas definições e resultados.

### 3.4 Geodésicas sobre esferas

**Definição 3.5.** Um grande círculo ou *círculo máximo* é a interseção de uma esfera com um plano que passa através do centro da esfera. Todos os demais círculos sobre a esfera que não satisfazem essa condição são pequenos círculos, ou *círculos mínimos*.

**Teorema 3.6.** A menor distância entre dois pontos sobre uma esfera é um arco de grande círculo.

*Demonstração.* Seja  $\sigma : [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$  uma curva parametrizada em  $\mathbf{S}$  com  $\sigma(a) = A$  e  $\sigma(b) = B$ . Escrevamos  $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$  em coordenadas retangulares.

Conforme JENNINGS [10], o comprimento da curva  $\sigma$  é dado por:

$$\ell(\sigma) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

Em coordenadas esféricas, temos:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta(t) \cdot \text{sen} \varphi(t) \\ y = \rho \cdot \text{sen} \theta(t) \cdot \text{sen} \varphi(t) \\ z = \rho \cos \varphi(t) \end{cases}$$

Calculando as derivadas  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  e  $z'(t)$ , segue que:

$$\ell(\sigma) = \int_a^b \rho \cdot \sqrt{\varphi'(t)^2 + \operatorname{sen}^2 \varphi(t) \cdot \theta'(t)^2} dt \geq \int_a^b \rho \varphi'(t) dt = \rho \cdot (\varphi(b) - \varphi(a))$$

$$\ell(\sigma) \geq \rho \cdot (\angle BCA) = \operatorname{comp}(\widehat{AB})$$

A igualdade ocorre quando  $\theta'(t)^2 = 0$  ou  $\operatorname{sen}^2 \varphi(t) = 0$ ,  $\forall t$ , isto é, a menos que  $\sigma$  nunca deixe o arco  $AB$ .

□

**Definição 3.7.** Dados dois pontos  $A$  e  $B$  sobre um superfície esférica, a distância  $d(A, B)$  é o comprimento do menor arco  $\widehat{AB}$  da circunferência máxima que passa por  $A$  e  $B$ .

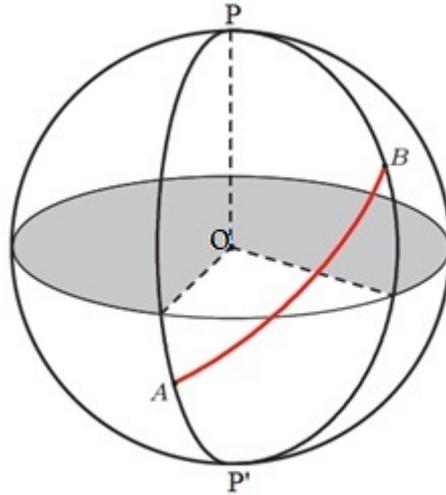


Figura 3.6: Definição de distância na esfera. Fonte: adaptada de [15].

O arco  $\widehat{AB}$  é como se fosse o de segmento de reta da Geometria Plana, enquanto que as circunferências máximas fazem analogia às retas.

O cálculo desse comprimento pode ser feito a partir da medida do ângulo  $\widehat{AOB}$ , proporcionalmente à medida do ângulo central correspondente. Ou seja,

$$d(A, B) = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi R = \alpha \cdot R$$

onde  $A$  e  $B$  são dois pontos da superfície da esfera de centro  $O$  e raio  $R$  e  $\alpha$  é a medida do ângulo  $\widehat{AOB}$  em graus.

Quando  $\alpha = 90^\circ$  essa distância é denominada *distância polar*. Ou seja, todos os pontos de uma circunferência máxima são equidistante do seu polo.

**Definição 3.8.** Em uma dada geometria, as curvas de comprimento mínimo são chamadas de *geodésicas*.

A geometria das *geodésicas* na esfera é diferente da geometria das retas no plano. Por exemplo, uma esfera não tem geodésicas paralelas desde que dois círculos máximos sempre se encontram em dois pontos simetricamente opostos.

### 3.5 Triângulos esféricos

Agora que falamos um pouco da definição de esfera e seus elementos básicos, vamos fazer um breve estudo sobre os triângulos esféricos e comparar alguns resultados com os triângulos da Geometria Euclidiana Plana.

**Definição 3.9.** *Ângulo esférico* é a interseção de arcos de círculos máximos, que são os lados e seu ponto de interseção é o vértice do ângulo esférico.

Um ângulo esférico é medido pelo ângulo diedro formado pelos dois planos que contém os círculos máximos.

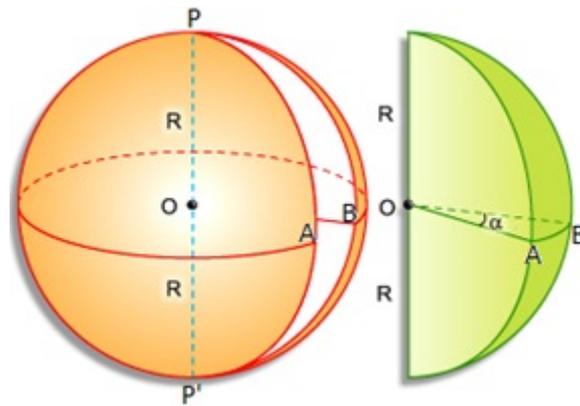


Figura 3.7: Ângulo esférico. Fonte: *Google imagens*.

Da figura acima, como o ângulo diedro  $A - PO - B$  é medido pelo ângulo plano  $\widehat{AOB}$ , o qual, por sua vez, é medido pelo arco  $\widehat{AB}$ , segue-se que um ângulo esférico é medido pelo menor arco do círculo máximo, cujo polo é o vértice do ângulo.

**Definição 3.10.** A porção da superfície de uma esfera, limitada pelos arcos de três círculos máximos, que se interceptam dois a dois, é chamada de ***triângulo esférico***. Os arcos são os lados e os vértices dos três ângulos esféricos também são

os vértices do triângulo esférico. Usualmente, os vértices são designados por  $A, B$  e  $C$  e os lados opostos correspondentes por  $a, b$  e  $c$ , respectivamente.

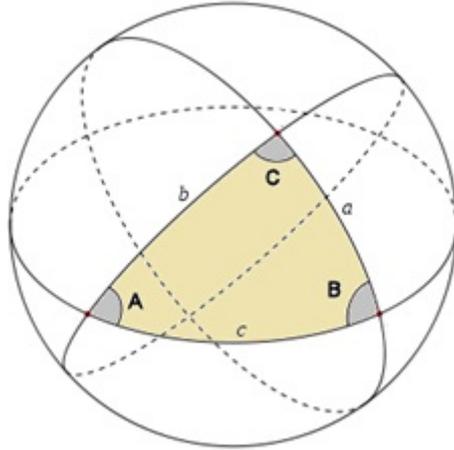


Figura 3.8: Triângulo esférico. Fonte: *Google imagens*.

Ligando-se os vértices  $A, B$  e  $C$  de um triângulo esférico ao centro da esfera, forma-se o triedro  $O - ABC$  (figura abaixo). Os lados do triângulo ( $a, b$  e  $c$ ) tem, assim, a mesma medida das faces  $BOC, COA$  e  $AOB$  daquele triedro.

Os ângulos  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$  do triângulo esférico são medidos pelos ângulos diedros do ângulo triedro. O ângulo  $\hat{A}$ , por exemplo, é medido pelo ângulo diedro  $B - OA - C$ .

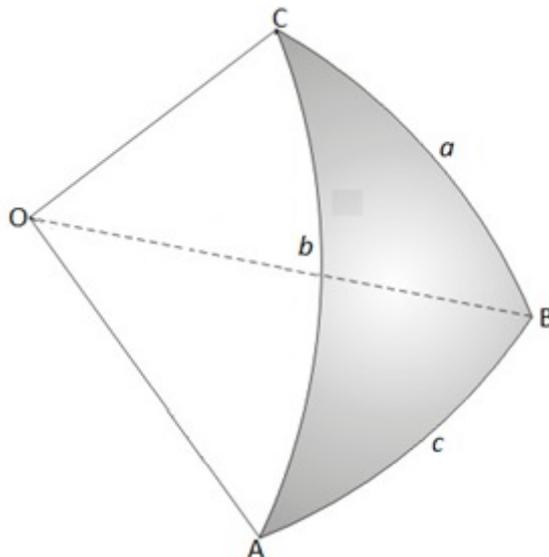


Figura 3.9: Medidas dos lados e dos ângulos do triângulo esférico. Fonte: *Google imagens*.

### 3.5.1 Os seis ângulos de um triângulo esférico: um tratamento vetorial

Seja  $\triangle ABC$  o triângulo esférico com lado  $a = \alpha$  oposto ao vértice  $A$ , lado  $b = \beta$  oposto ao vértice  $B$  e lado  $c = \gamma$  oposto ao vértice  $C$ , sobre uma esfera de centro  $O$ . Esse triângulo possui seis ângulos: três ângulos dos arcos  $a$ ,  $b$  e  $c$  e três ângulos correspondentes aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

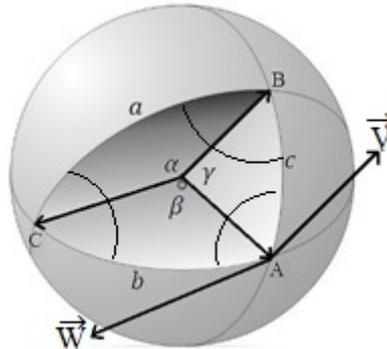


Figura 3.10: Seis ângulos do triângulo esférico. Fonte: adaptada de [10].

Vetorialmente, temos:

$$\begin{cases} \alpha = \angle(\vec{OB}, \vec{OC}) \\ \beta = \angle(\vec{OC}, \vec{OA}) \\ \gamma = \angle(\vec{OA}, \vec{OB}) \end{cases}$$

Os ângulos dos vértices medem, simultaneamente, três coisas. Por exemplo, o ângulo  $\hat{A}$  é igual ao:

- (1) ângulo entre os arcos  $\widehat{AB}$  e  $\widehat{AC}$  em  $A$ ;
- (2) ângulo entre o vetor  $\vec{V}$  que é tangente ao arco  $\widehat{AB}$  em  $A$  e o vetor  $\vec{W}$  que é tangente a  $\widehat{AC}$  em  $A$ ;
- (3) ângulo entre os planos  $\overline{ABO}$  e  $\overline{ACO}$ .

Os itens (1) e (2) são iguais por definição. Os itens (2) e (3) são iguais porque  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  são perpendiculares à reta  $\overleftrightarrow{AO}$  onde os planos  $\overline{ABO}$  e  $\overline{ACO}$  se interceptam. Similarmente definiremos os ângulos dos vértices  $B$  e  $C$ .

Para simplificarmos a notação, usaremos doravante  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$  para representarmos os vetores  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$  e  $\vec{OC}$ , respectivamente.

Observemos que os ângulos  $\angle(\vec{A}, \vec{B})$  e  $\angle(\vec{B}, \vec{A})$  representam o mesmo ângulo, ou seja, nesse propósito, eles não divergem pela orientação.

**Lema 3.11.** *Em um triângulo esférico  $ABC$ , temos:*

(i) *Os ângulos dos arcos são*

$$\begin{cases} \alpha = \angle(\vec{B}, \vec{C}) \\ \beta = \angle(\vec{C}, \vec{A}) \\ \gamma = \angle(\vec{A}, \vec{B}) \end{cases}$$

(ii) *Os ângulos dos vértices são*

$$\begin{cases} \angle A = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}) \\ \angle B = \angle(\vec{B} \times \vec{C}, \vec{B} \times \vec{A}) \\ \angle C = \angle(\vec{C} \times \vec{A}, \vec{C} \times \vec{B}) \end{cases}$$

*Demonstração.* O item (i) fala exatamente as definições de ângulos dos arcos. No item (ii), observe que  $\vec{A} \times \vec{B} \perp \overline{ABO}$  (plano) e  $\vec{A} \times \vec{C} \perp \overline{ACO}$  (plano).  $\vec{A} \times \vec{B} = \lambda \cdot \vec{OC} = \vec{W}$ ;  $\vec{A} \times \vec{C} = \lambda \cdot \vec{OB} = \vec{V}$ .

O ângulo entre os planos é igual ao ângulo entre seus vetores normais. Mas os ângulos formados são suplementares, isto é, seja  $N_1$  e  $N_2$  os vetores normais em questão e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos formados por eles, conforme ilustra a figura abaixo, temos que  $\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$ . Escolhendo  $\theta = \min\{\theta_1, \theta_2\}$ , ou seja,  $\theta$  é agudo.

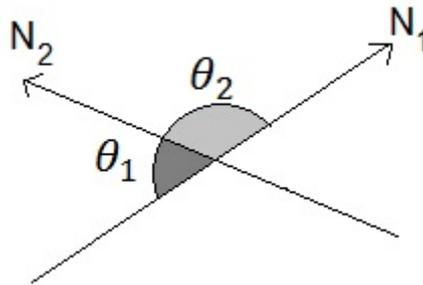


Figura 3.11: Ângulo entre os vetores normais.

Seja  $\vec{V}$  o vetor tangente a  $\widehat{AB}$  e  $\vec{W}$  o vetor tangente a  $\widehat{AC}$  em  $A$ , temos

$$\angle A \equiv \angle(\vec{V}, \vec{W}). \quad (3.1)$$

Note que  $\vec{V}$  e  $\vec{W}$  são perpendiculares e  $\vec{A} \times \vec{V}$  aponta na direção obtida pela rotação de  $90^\circ$  à direita em torno de  $A$ . Similarmente,  $\vec{A} \times \vec{W}$  aponta  $90^\circ$  para a direita de  $\vec{W}$  em torno de  $A$ .

Como rotações preservam os ângulos, vem

$$\angle(\vec{V}, \vec{W}) = \angle(\vec{A} \times \vec{V}, \vec{A} \times \vec{W}). \quad (3.2)$$

Mas,  $(\vec{A} \times \vec{V}) \parallel (\vec{A} \times \vec{B})$  e  $(\vec{A} \times \vec{W}) \parallel (\vec{A} \times \vec{C})$ . Assim,

$$\angle(\vec{A} \times \vec{V}, \vec{A} \times \vec{W}) = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}) \quad (3.3)$$

Nas equações (3.1), (3.2) e (3.3), por transitividade, concluímos que

$$\angle A = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$$

Analogamente, se prova as outras duas afirmações relacionadas aos ângulos dos vértices  $B$  e  $C$ , o que completa a demonstração. □

**Lema 3.12.** *A todo triedro corresponde um triângulo esférico, que está sobre a superfície esférica cujo centro é o vértice desse triedro, tal que os lados medem ângulos das faces do triedro e seus ângulos medem ângulos diedros formados pelas faces.*

*Demonstração.* Imaginemos um triedro cujo vértice seja o centro  $O$  de uma superfície esférica  $S$ . Note que os planos que formam o triedro e passam pelo ponto  $O$  determinam sobre  $S$  arcos de circunferências máximas, os quais se encontram dois a dois e formam um triângulo esférico. Além disso, os ângulos das faces do triedro ficam sendo ângulos centrais dos arcos de circunferência máxima determinados pelo plano da face sobre  $S$  e, portanto, tendo como medida o arco compreendido entre os lados. Mas esses arcos são os lados do triângulo esférico formado, os quais medem as faces do triedro.

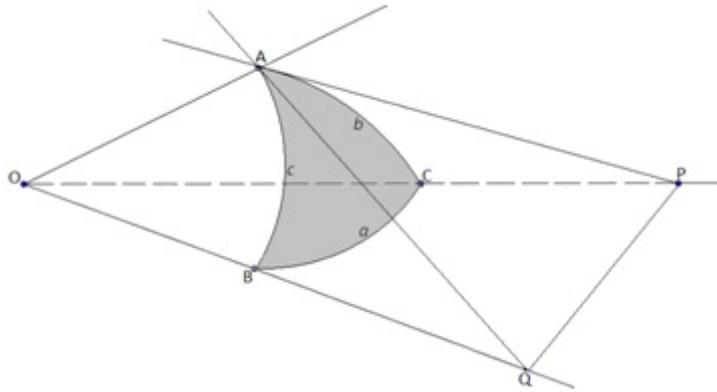


Figura 3.12: Lema 3.12.: triângulo esférico associado a um triedro. Fonte: *Google imagens*.

Por outro lado, se traçarmos, a partir dos pontos que as arestas do triedro cortam S e que são vértices do triângulo esférico, retas tangentes aos arcos de circunferência máxima que formam os lados do triângulo esférico, os ângulos formados por essas tangentes medem os ângulos desse triângulo. Mas essas tangentes são perpendiculares aos raios no ponto de tangência, ou seja, são perpendiculares às arestas do triedro em um mesmo ponto e, portanto, são as medidas dos ângulos dos diedros que formam o triedro.

Assim, concluímos que os ângulos do triângulo esférico medem os ângulos diedros do triedro considerado.

□

### 3.5.2 Propriedades dos triângulos esféricos

**Proposição 3.13.** *A soma de dois lados quaisquer de um triângulo esférico é maior do que o terceiro lado.*

*Demonstração.* Como a todo triângulo esférico está associado um triedro cujos ângulos entre as faces correspondem à medida dos lados desse triângulo, a afirmação é verdadeira se os três ângulos das faces forem iguais.

Consideremos o ângulo triedro  $O - XYZ$  da figura abaixo no qual a face  $\widehat{XOY}$  é maior do que as outras duas,  $\widehat{YOZ}$  e  $\widehat{XOZ}$ . Sobre  $OX$  considere qualquer ponto  $A$ ; sobre  $OY$  tome qualquer ponto  $B$  e sobre  $AB$  tome o ponto  $D$  de sorte que  $\widehat{AOD} = \widehat{XOZ}$ . Sobre  $OZ$ , seja o ponto  $C$  tal que  $OC = OD$ .

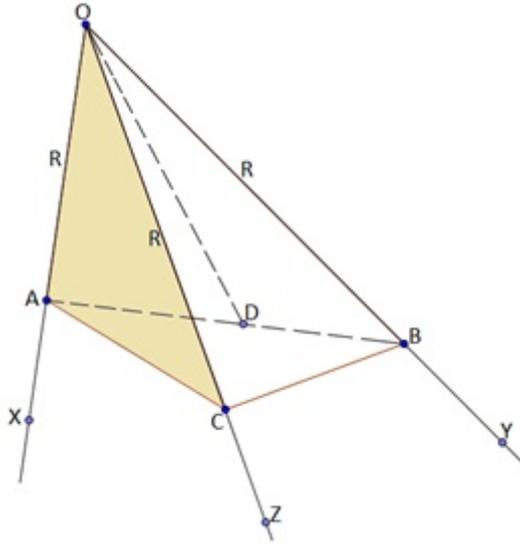


Figura 3.13: Proposição 3.13. Fonte: adaptada de [1].

No triângulo  $ABC$ , temos que,

$$AC + CB > AB, AB = AD + DB \text{ e } AC + CB > AD + DB.$$

Como o  $\triangle AOC$  e  $\triangle AOD$  são congruentes pelo caso  $ALA$ :  $\widehat{AOD} = \widehat{XOZ}$  e  $OC = OD$  (hipótese),  $AO$  é comum, segue que  $AD = AC$ . Daí,

$$AC + CB > AC + DB \text{ e } CB > DB.$$

Assim, visto que os lados  $OD$  e  $OB$  do triângulo  $ODB$  são iguais, respectivamente, aos lados  $OC$  e  $OB$  do triângulo  $OCB$ , segue que  $\widehat{COB} > \widehat{DOB}$ .

Por construção  $AOC = AOD$ , donde,

$$\widehat{AOC} + \widehat{COB} > \widehat{AOD} + \widehat{DOB} = \widehat{AOB}.$$

Como a todo triângulo esférico está associado um tetraedro, isso confirma o que queríamos demonstrar. □

**Proposição 3.14.** *A soma dos três lados de um triângulo esférico é maior que  $0^\circ$  e menor que  $360^\circ$ :  $0 < a + b + c < 360^\circ$ .*

*Demonstração.* Que a soma dos lados é maior que zero é óbvio. Mostremos que a soma dos lados é menor que  $360^\circ$ .

Para isso, conforme anteriormente, considere o mesmo ângulo triedro  $O - XYZ$ , e usando o lema anterior, mostremos que a soma dos ângulos das suas faces é menor do que  $360^\circ$ .

Note que, com relação ao triedro  $O - ABC$  há três triângulos planos ângulos com o vértice  $O$  ( $\triangle AOB, \triangle AOC, \triangle BOC$ ) cuja soma dos ângulos internos é  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$ , isto é,

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} + (\widehat{OAB} + \widehat{OAC}) + (\widehat{OBA} + \widehat{OBC}) + (\widehat{OCA} + \widehat{OCB}) = 540^\circ$$

Pela Proposição (3.13):

$$\begin{aligned} \widehat{OAB} + \widehat{OAC} &> \widehat{BAC}, \\ \widehat{OBA} + \widehat{OBC} &> \widehat{ABC} \text{ e} \\ \widehat{OCA} + \widehat{OCB} &> \widehat{ACB}. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} + \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} &< 540 \text{ ou} \\ \widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} &< 540^\circ - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}). \end{aligned}$$

Como  $(\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB})$  é a soma dos ângulos internos do triângulo  $ABC$ ,

$$\widehat{AOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COA} < 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ$$

□

**Proposição 3.15.** *Dois lados de um triângulo esférico são iguais se, e somente se, os ângulos opostos forem iguais.*

**Proposição 3.16.** *Se dois lados são desiguais, os ângulos opostos são desiguais e o maior ângulo se opõe ao maior lado e reciprocamente.*

Estas duas proposições são imediatas. Por isso não faremos a demonstração.

**Proposição 3.17.** *A soma dos três ângulos é maior que  $180^\circ$  e menor que  $540^\circ$ :  $180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$ .*

Após falarmos sobre as propriedades dos triângulos esféricos polares demonstraremos esta proposição.

**Definição 3.18.** Chama-se de excesso esférico  $E$  de um triângulo à quantidade de que a soma de seus ângulos excede  $180^\circ$ .

Sabemos que a soma dos ângulos internos é maior que  $180^\circ$  e menor que  $540^\circ$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180 &\implies \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ > 0^\circ \\ &\implies E = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ\end{aligned}$$

**Exemplo 3.19.** Para um triângulo esférico cujos ângulos sejam  $\hat{A} = 65^\circ$ ,  $\hat{B} = 75^\circ$  e  $\hat{C} = 112^\circ$ , temos que  $E = (65^\circ + 75^\circ + 112^\circ) - 180^\circ = 72^\circ$ .

### 3.6 Triângulos polares ou suplementares

Sejam  $A, B$  e  $C$  os vértices de um triângulo esférico; construam-se três círculos máximos tendo tais vértices como polos. Designem-se por  $A'$  a interseção dos círculos máximos tendo  $B$  e  $C$  como polos e situado no mesmo hemisfério ou lado de  $BC$ ; por  $B'$  a interseção dos círculos máximos que tem  $C$  e  $A$  como polos e situado no mesmo hemisfério ou lado de  $CA$ ; e por  $C'$  a interseção dos círculos máximos tendo  $A$  e  $B$  como polos e situado no mesmo hemisfério ou lado de  $AB$ .

O triângulo esférico  $A'B'C'$  é chamado de **triângulo polar** ou **triângulo suplementar** de  $ABC$ . Designaremos por  $a', b'$  e  $c'$  os lados do triângulo polar.

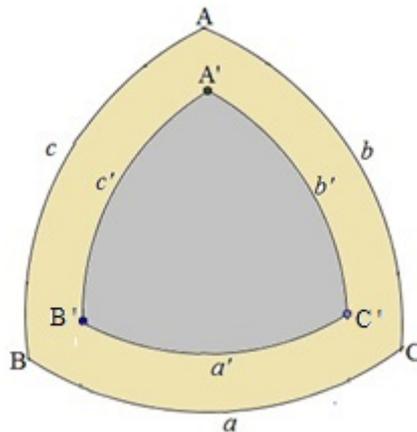


Figura 3.14: Triângulos polares. Fonte: Geogebra, pelo autor.

**Teorema 3.20.** *Em dois triângulos polares, cada ângulo de um dos triângulos é igual ao suplemento do lado correspondente no outro triângulo, ou seja, o ângulo de um dos triângulos e o lado correspondente no outro triângulo somam  $180^\circ$ .*

Assim, de acordo com a figura 3.14 acima, temos que:

$$\begin{aligned}
\hat{A} + a' &= 180^\circ \implies \hat{A} = 180^\circ - a' \\
\hat{B} + b' &= 180^\circ \implies \hat{B} = 180^\circ - b' \\
\hat{C} + c' &= 180^\circ \implies \hat{C} = 180^\circ - c' \\
&\text{ou} \\
\hat{A}' + a &= 180^\circ \implies \hat{A}' = 180^\circ - a \\
\hat{B}' + b &= 180^\circ \implies \hat{B}' = 180^\circ - b \\
\hat{C}' + c &= 180^\circ \implies \hat{C}' = 180^\circ - c
\end{aligned}$$

*Demonstração.* Consideremos os triângulos polares  $ABC$  e  $A'B'C'$  da figura abaixo. Basta provar que  $\hat{A}' = 180^\circ - a$ .

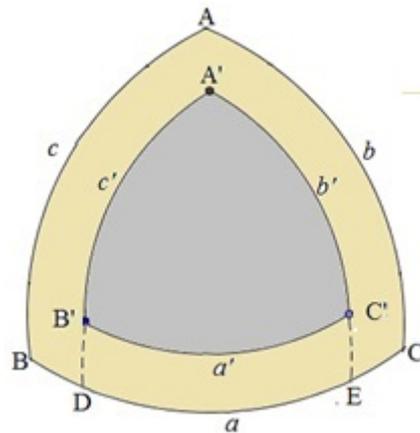


Figura 3.15: Teorema 3.20. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Prolonguemos os arcos  $\widehat{A'B'}$  e  $\widehat{A'C'}$  até encontrar o arco  $\widehat{BC}$  nos pontos  $D$  e  $E$ , respectivamente. Assim, o ângulo  $\hat{A}'$  possui medida igual a  $DE$ . Por outro lado, sendo  $B$  o polo de  $A'E$  e  $C$  o polo de  $A'D$ , então, por definição de distância polar, tem-se  $BE = DC = 90^\circ$ . Portanto,

$$\begin{aligned}
a &= \widehat{BE} + \widehat{DC} - \widehat{DE} = 90^\circ + 90^\circ - \hat{A}' = 180^\circ - \hat{A}' \\
&\implies \hat{A}' = 180^\circ - a
\end{aligned}$$

□

Esse teorema nos ajuda a demonstrar a proposição (3.17):

*Demonstração.* Seja  $ABC$  o triângulo esférico dado e seja  $A'B'C'$  o seu triângulo polar. Já mostramos que

$$\hat{A} + a' = \hat{B} + b' = \hat{C} + c' = 180^\circ$$

Somando membro a membro, temos:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + a' + b' + c' = 540^\circ$$

Como  $a' + b' + c' > 0^\circ$ , segue que  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$ . Sabemos também que a soma dos lados de um triângulo esférico é menor que  $360^\circ$ . Logo,

$$a' + b' + c' < 360^\circ \text{ e, assim, } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ.$$

Portanto,

$$180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$$

□

Essa demonstração nos mostra claramente que a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre maior do que dois ângulos retos e justifica a definição de “excesso esférico” já mencionada anteriormente:

$$E = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ$$

Onde  $E$  é o excesso esférico e  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  os seus ângulos internos.

É oportuno notar também que, a partir da propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo esférico ( $180^\circ < \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} < 540^\circ$ ) constatamos que não existe *isometria* alguma entre uma superfície esférica e uma superfície plana, ou mesmo uma parte da superfície esférica e o plano, uma vez que *isometria* é uma função  $\varphi : X \rightarrow Y$  entre dois espaços métricos que preserva distâncias entre seus pontos, ou seja,

$$d_y(\varphi(x_1), \varphi(x_2)) = d_x(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Assim, se existe, uma isometria  $\psi : S \rightarrow \pi$  entre uma superfície  $S$  e uma superfície plana  $\pi$  teria que preservar as distâncias, ou seja, teria que aplicar circunferências máximas de  $S$  em retas de  $\pi$  e, por consequência, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico teria que coincidir com a soma dos ângulos internos de um triângulo plano correspondente.

**Definição 3.21.** A interseção de duas circunferências máximas determina uma região na superfície esférica chamada *fuso*. O ângulo  $\alpha$ , entre as duas circunferências máximas, é o ângulo do fuso; os dois pontos de interseção dessas circunferências ( $P$  e  $P'$ ), diametralmente opostos, são os vértices e os arcos limitados por esses pontos são os lados do fuso.

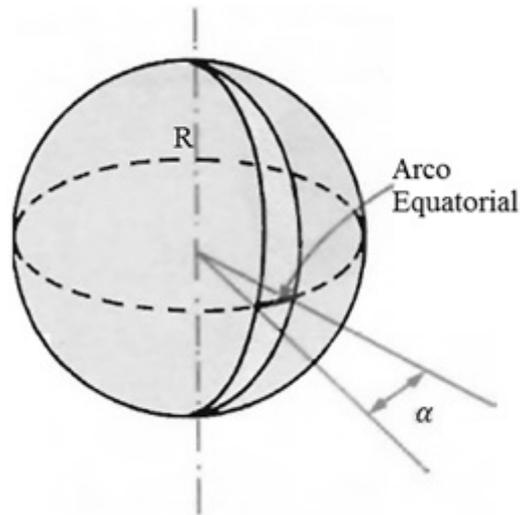


Figura 3.16: Fuso esférico. Fonte: adaptada de [5].

Sendo  $\alpha$ , a medida do diedro que subtende o fuso, concluímos que um fuso é um hemisfério quando  $\alpha = 180^\circ = \pi$ , ou seja, metade da área superfície esférica. Considerando que a área da superfície esférica é dada por  $S = 4.\pi.R^2$ , temos que a área do fuso é dada por:

(i) Com  $\alpha$  em graus:

$$\begin{aligned} 360^\circ &\longrightarrow 4.\pi.R^2 \\ \alpha^\circ &\longrightarrow S_{fuso} \\ \implies S_{fuso} &= \frac{\alpha.\pi.R^2}{90^\circ} \end{aligned}$$

(ii) Com  $\alpha$  em radianos:

$$\begin{aligned} 2\pi &\longrightarrow 4.\pi.R^2 \\ \alpha &\longrightarrow S_{fuso} \\ S_{fuso} &= \frac{\alpha.\pi.R^2}{\frac{\pi}{2}} = 2.\alpha.R^2 \end{aligned}$$

**Definição 3.22.** O ponto  $P'$  da superfície esférica chama-se *antípoda* de  $P$  se o segmento  $PP'$  coincide com o diâmetro da esfera, isto é, contém o centro  $O$ .

Note que, dado um fuso  $\mu$  na superfície esférica, o conjunto de todos os antípodas dos pontos de  $\mu$  é ainda um fuso  $\mu'$ , chamado *fuso antípoda* de  $\mu$ .

Em outras palavras, dois fusos antípodas são simétricos em relação ao eixo que contém os pontos de interseção das circunferências máximas que os determina. Logo, possuem a mesma área.

**Definição 3.23.** Um *fuso completo* é a reunião de dois fusos antípodas.

Sabemos que qualquer secção plana que passa pelo centro da esfera a divide em dois hemisférios. Conseqüentemente, um fuso completo dessa esfera será igualmente dividido em duas regiões por esse plano. Como a área de um fuso é  $2.\alpha.R^2$  e o fuso completo é a reunião de dois fusos antípodas, concluímos que a área de cada uma dessas regiões coincide com a área de um fuso.

**Teorema 3.24.** A área de um triângulo esférico é dada por

$$S = E.R^2$$

onde  $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$  é o excesso esférico do triângulo, com  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  medidos em radianos.

*Demonstração.* Seja um triângulo esférico  $ABC$  contido em um hemisfério  $H$ , de modo que  $med(\hat{A}) = \alpha$ ,  $med(\hat{B}) = \beta$  e  $med(\hat{C}) = \gamma$ . Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo  $\alpha$  até encontrarem o bordo de  $H$ , obteremos a região  $R_\alpha \subset H$ , cuja área é  $2.\alpha.R^2$ .

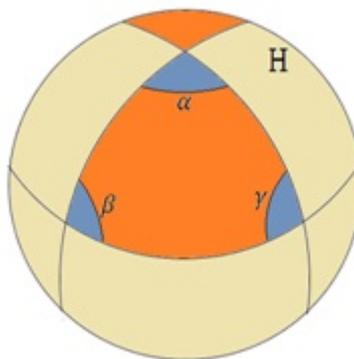


Figura 3.17: Ilustração do Teorema 3.24. Fonte: Geogebra, pelo autor.

Analogamente, partindo dos ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ , obteremos regiões contidas em  $H$ ,  $R_\beta$  e  $R_\gamma$ , de áreas  $2.\beta.R^2$  e  $2.\gamma.R^2$ , respectivamente.

Assim, a área do hemisfério  $H$  é a soma das áreas das regiões  $R_\alpha, R_\beta, R_\gamma$  subtraída do dobro da área  $S$  do triângulo esférico  $ABC$  dado.

Como a área da superfície de um hemisfério é metade da área da superfície esférica, ou seja,

$$S_H = \frac{4.\pi.R^2}{2} = 2.\pi.R^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} S_H &= 2.\alpha.R^2 + 2.\beta.R^2 + 2.\gamma.R^2 - 2.S_{ABC} \\ 2.\pi.R^2 &= 2.\alpha.R^2 + 2.\beta.R^2 + 2.\gamma.R^2 - 2.S_{ABC} \\ 2.S_{ABC} &= 2.\alpha.R^2 + 2.\beta.R^2 + 2.\gamma.R^2 - 2.\pi.R^2 \\ S_{ABC} &= R^2[(\alpha + \beta + \gamma) - \pi] \end{aligned}$$

Sendo  $E = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ , concluímos que

$$S_{ABC} = E.R^2$$

□

### 3.6.1 Triângulos Esféricos Retângulos

**Definição 3.25.** Um triângulo esférico tendo um ângulo reto é chamado *triângulo esférico retângulo*.

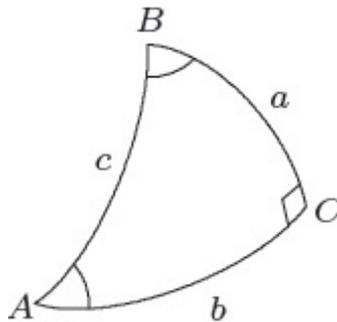


Figura 3.18: Triângulo Esférico Retângulo. Fonte: Geogebra, adaptada de [1].

**Teorema 3.26.** Em um triângulo esférico retângulo  $ABC$ , reto em  $\hat{C}$ , por exemplo, valem as relações:

$$(1) \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} c$$

$$(2) \operatorname{tga} = \operatorname{tg}\hat{A} \cdot \operatorname{sen}b$$

$$(3) \operatorname{tga} = \cos \hat{B} \operatorname{tg}c \text{ (Teorema de Pitágoras Esférico).}$$

$$(4) \cos c = \cos b \cdot \cos a$$

$$(5) \cos \hat{A} = \operatorname{sen}\hat{B} \cdot \operatorname{sen}c$$

$$(6) \operatorname{sen}b = \operatorname{sen}\hat{B} \cdot \operatorname{sen}c$$

$$(7) \operatorname{tgb} = \operatorname{tg}B \cdot \operatorname{sen}a$$

$$(8) \operatorname{tgb} = \cos A \operatorname{tg}c$$

$$(9) \cos c = \operatorname{cotg}\hat{A} \operatorname{cotg}B$$

$$(10) \cos \hat{B} = \operatorname{sen}\hat{A} \cdot \cos b$$

*Demonstração.* Considere o triângulo esférico retângulo  $ABC$  da figura abaixo, com os lados  $a$  e  $b$  menores do que  $90^\circ$ . Os vértices do triângulo estão unidos ao ponto  $O$ , formando o triedro  $O - ABC$ . Por  $B$ , passe-se um plano perpendicular a  $OA$  encontrando  $OC$  em  $D$  e  $OA$  em  $E$ , formando o triângulo plano retângulo  $BDE$ .

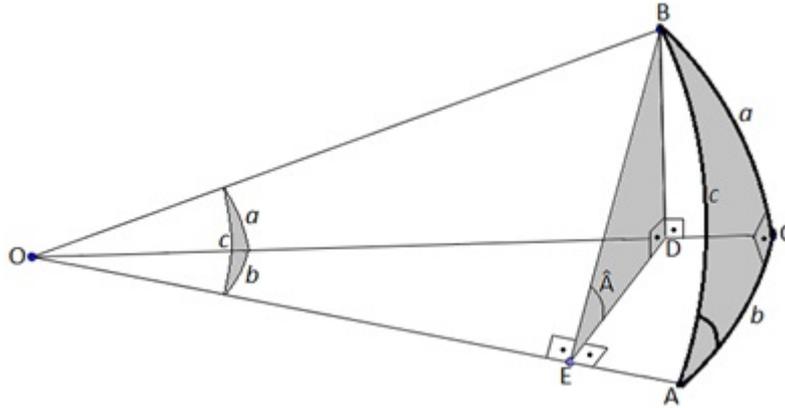


Figura 3.19: Teorema 3.26. Fonte: adaptada de [1].

Uma vez que  $OE$  é perpendicular ao plano  $BDE$ , ele é perpendicular às arestas  $EB$  e  $ED$ . Consequentemente, os triângulos  $BEO$  e  $DEO$  são retângulos em  $\hat{E}$ .  $\widehat{BED}$  é o ângulo plano que mede o diedro  $B - OA - C$ , isto é, mede o ângulo  $\hat{A}$  do triângulo esférico.

Sendo o plano  $BDE$  perpendicular a  $OE$ , é perpendicular ao plano  $AOC$  e sua interseção neste plano é  $OE$ .  $BD$ , a interseção dos planos  $OBC$  e  $BDE$ , ambos perpendiculares ao plano  $OAC$ , é, também, perpendicular a  $OAC$ . Assim, os triângulos  $BDO$  e  $BDE$  são triângulos retângulos, com seus ângulos retos em  $D$

Daí, nos triângulos retângulos  $BDO$ ,  $BDE$  e  $BEO$ :

$$\operatorname{sen}(a) = \frac{DB}{OB} = \frac{DB}{EB} \cdot \frac{EB}{OB} = \operatorname{sen}(\hat{A})\operatorname{sen}(c) \quad (1).$$

Nos triângulos retângulos  $BDO$ ,  $BDE$  e  $DEO$ :

$$\operatorname{tg}(a) = \frac{DB}{OD} = \frac{DB}{ED} \cdot \frac{ED}{OD} = \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{sen}(b) \quad (2).$$

Nos triângulos retângulos  $BEO$ ,  $DEO$  e  $BDO$ :

$$\cos(c) = \frac{OE}{OB} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OD}{OB} = \cos(b) \cos(a) \quad (4).$$

Nos triângulos retângulos  $DEO$ ,  $BDE$  e  $BEO$ , vem:

$$\operatorname{tg}(b) = \frac{ED}{OE} = \frac{ED}{EB} \cdot \frac{EB}{OE} = \cos(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(c) \quad (8).$$

Similarmente ao que fizemos, se trocarmos  $a$  por  $b$  e  $\hat{A}$  por  $\hat{B}$ , respectivamente, obteremos as fórmulas (3), (6) e (7).

Multiplicando (2) por (7), temos

$$\operatorname{tg}(a) \cdot \operatorname{tg}(b) = \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B}) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

Substituindo  $\operatorname{tg}(a)$  por  $\frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)}$  e  $\operatorname{tg}(b)$  por  $\frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)}$ , temos que:

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)} = \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B}) \cdot \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b)$$

Segue, então que:

$$\frac{1}{\cos(a) \cdot \cos(b)} = \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B})$$

Como  $\cos(a) \cdot \cos(b) = \cos(c)$ , vem:

$$\frac{1}{\cos(a) \cdot \cos(b)} = \frac{1}{\cos(c)} = \operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B})$$

Ou seja,

$$\cos(c) = \frac{1}{\operatorname{tg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(\hat{B})} = \operatorname{cotg}(\hat{A}) \cdot \operatorname{cotg}(\hat{B}) \quad (9)$$

Multiplicando (6) por (8), temos:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\hat{A}) \cdot \operatorname{tg}(c) &= \operatorname{tg}(b) \cdot \operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \operatorname{sen}(c) \\
 \cos(\hat{A}) &= \frac{\operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \operatorname{tg}(b) \cdot \operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{tg}(c)} \\
 &= \operatorname{sen}(\hat{B}) \frac{\operatorname{sen}(b)}{\cos(b)} \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}(b)} \cdot \frac{\cos(c)}{\operatorname{sen}(c)} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \cos(c)}{\cos(b)} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}(\hat{B})(\cos a \cdot \cos b)}{\cos(b)}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\cos(\hat{A}) = \operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \cos(a) \quad \mathbf{(5)}.$$

Analogamente, do produto de (1) e (3), consegue-se mostrar que

$$\cos(\hat{B}) = \operatorname{sen}(\hat{A}) \cdot \cos(b) \quad \mathbf{(10)}.$$

Como queríamos demonstrar.

□

### 3.7 Relações métricas nos triângulos esféricos: Fórmulas fundamentais

Sabemos, da Geometria Plana que, em um triângulo qualquer podemos calcular as medidas de seus lados ou de seus ângulos se soubermos algumas dessas medidas.

**Definição 3.27.** Um triângulo esférico é *obliquo ou obliquângulo* quando não possui ângulo reto.

**Teorema 3.28. Lei dos senos:** Em um triângulo esférico  $ABC$ , com os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  opostos aos ângulos internos  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ , respectivamente,  $\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{\operatorname{sen}(c)}{\operatorname{sen}(\hat{C})}$ .

*Demonstração.* Considere o  $\triangle ABC$  esférico e genérico conforme ilustra a figura abaixo:

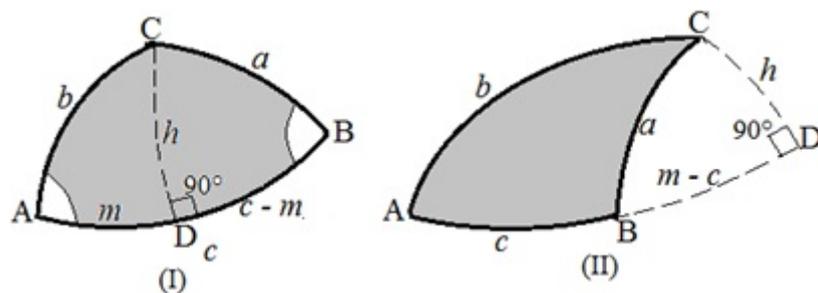


Figura 3.20: Dedução da lei dos senos para triângulos esféricos.

Imaginemos um círculo máximo passando por  $C$  perpendicular a  $\widehat{AB}$  em  $D$ . Seja  $\widehat{CD} = h$ . Aplicando fórmulas fundamentais, temos:

No triângulo retângulo  $ACD$ ,

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\hat{A})$$

No triângulo retângulo  $BCD$ ,

$$\text{sen}(h) = \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\hat{B})$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{sen}(a) \cdot \text{sen}(\hat{B}) &= \text{sen}(b) \cdot \text{sen}(\hat{A}), \text{ ou seja,} \\ \frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} &= \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} \end{aligned}$$

Analogamente, fazendo-se passar um círculo máximo por  $B$ , perpendicular a  $\widehat{AC}$ , achamos

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$$

Assim, concluímos que, de fato,

$$\frac{\text{sen}(a)}{\text{sen}(\hat{A})} = \frac{\text{sen}(b)}{\text{sen}(\hat{B})} = \frac{\text{sen}(c)}{\text{sen}(\hat{C})}$$

□

**Teorema 3.29. Lei dos cossenos para os lados:** Em qualquer triângulo esférico  $ABC$  valem as relações:

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{A}) \\ \cos(b) &= \cos(a) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{B}) \\ \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(a) + \operatorname{sen}(a) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \cos(\hat{C})\end{aligned}$$

*Demonstração.* Na figura (3.20), seja  $\widehat{AD} = m$ . No triângulo retângulo  $ACD$ , temos:

$$\operatorname{sen}(m) = \operatorname{tg}(h) \cdot \operatorname{cotg}(\hat{A}) \quad (3.4)$$

$$\operatorname{sen}(h) = \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(\hat{A}) \quad (3.5)$$

$$\cos(b) = \cos(h) \cdot \cos(m) \quad (3.6)$$

No triângulo retângulo  $BCD$ ,

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(h) \cdot \cos(c - m) \\ &= \cos(h) \cdot (\cos(c) \cdot \cos(m) + \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(m))\end{aligned} \quad (3.7)$$

Substituindo em (3.7)  $\operatorname{sen}(m)$  pela expressão (3.4) e  $\cos(m)$  pela sua expressão (3.6), vem:

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(h) \cdot \left( \cos(c) \cdot \frac{\cos(b)}{\cos(h)} + \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{tg}(h) \cdot \operatorname{cotg}(\hat{A}) \right) \\ &= \cos(h) \cdot \left( \cos(c) \cdot \frac{\cos(b)}{\cos(h)} + \operatorname{sen}(c) \cdot \frac{\operatorname{sen}(h)}{\cos(h)} \cdot \operatorname{cotg}(\hat{A}) \right) \\ &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(h) \cdot \operatorname{cotg}(\hat{A})\end{aligned}$$

Substituindo, agora,  $\operatorname{sen}(h)$  por  $\operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(\hat{A})$  (3.5) e  $\operatorname{cotg}(\hat{A})$  por  $\frac{\cos(\hat{A})}{\operatorname{sen}(\hat{A})}$ , vem:

$$\begin{aligned}\cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(c) \cdot \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(\hat{A}) \cdot \frac{\cos(\hat{A})}{\operatorname{sen}(\hat{A})} \\ &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \operatorname{sen}(b) \cdot \operatorname{sen}(c) \cdot \cos(\hat{A})\end{aligned}$$

□

De maneira similar, apenas permutando as letras, chega-se às demais fórmulas.

**Teorema 3.30. Lei dos cossenos para os ângulos:** *Em qualquer triângulo esférico  $ABC$ , valem as relações:*

$$\begin{aligned}\cos(\hat{A}) &= -\cos(\hat{B}) \cdot \cos(\hat{C}) + \operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) \cdot \cos(a) \\ \cos(\hat{B}) &= -\cos(\hat{A}) \cdot \cos(\hat{C}) + \operatorname{sen}(\hat{A}) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) \cdot \cos(b) \\ \cos(\hat{C}) &= -\cos(\hat{A}) \cdot \cos(\hat{B}) + \operatorname{sen}(\hat{A}) \cdot \operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \cos(c)\end{aligned}$$

Considere o triângulo polar  $A'B'C'$  de  $ABC$ , para o qual  $a' = 180^\circ - \hat{A}$ ;  $\hat{A}' = 180^\circ - a$  e assim por diante.

Aplicando a lei dos cossenos para os lados a este triângulo, temos:

$$\cos(a') = \cos(b') \cdot \cos(c') + \operatorname{sen}(b') \cdot \operatorname{sen}(c') \cdot \cos(\hat{A}')$$

Lembrando que  $\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen}(\theta)$  e que  $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos(\theta)$ , segue que:

$$\begin{aligned}\cos(a') &= \cos(b') \cdot \cos(c') + \operatorname{sen}(b') \cdot \operatorname{sen}(c') \cdot \cos(\hat{A}') \\ \cos(180^\circ - \hat{A}) &= \cos(180^\circ - \hat{B}) \cdot \cos(180^\circ - \hat{C}) + \operatorname{sen}(180^\circ - \hat{B}) \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - \hat{C}) \cdot \cos(a) \\ -\cos(\hat{A}) &= (-\cos \hat{B}) \cdot (-\cos \hat{C}) + \operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) \cdot (-\cos a). \\ \cos(\hat{A}) &= -\cos(\hat{B}) \cdot \cos(\hat{C}) - \operatorname{sen}(\hat{B}) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}) \cdot \cos(a).\end{aligned}$$

As demais fórmulas são adquiridas de modo totalmente análogo.

## 3.8 Outra abordagem para triângulos esféricos: tratamento vetorial

### 3.8.1 Área de um triângulo esférico

**Teorema 3.31.** *Em um triângulo esférico  $ABC$ ,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi + \frac{S_{\Delta ABC}}{R^2}$  em radianos, onde  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = E$  é o excesso esférico, ou seja,  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} > 180^\circ$ .*

*Demonstração.* Dado um ponto  $P$  sobre a esfera, seja  $-P$  o antípoda de  $P$ . Dois círculos máximos encontrando-se em um ângulo  $\theta$  e,  $P$  limitando um setor da esfera com vértices  $P$  e  $-P$ :

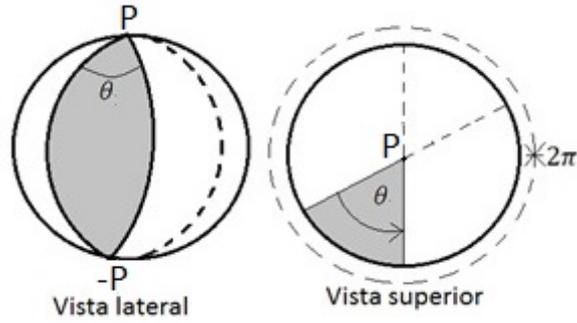


Figura 3.21: Ilustração do Teorema 3.23. Fonte: adaptada de [10].

É fácil notar que a área do setor limitado pelos círculos máximos está para a área da esfera na mesma razão em que o ângulo do setor está para  $2\pi$ , ou seja:

$$\frac{S_{setor}}{S_{esfera}} = \frac{\theta}{2\pi}$$

Supondo que  $S_{esfera} = 4.\pi.R^2 \implies S_{setor} = \frac{4.\pi.R^2.\theta}{2\pi}$ . Logo,

$$S_{setor} = 2.R^2.\theta$$

Cada ângulo do vértice do  $\triangle ABC$  subtende um setor sobre a esfera, digamos, setor  $A$ , setor  $B$  e setor  $C$ . Seja  $H_C$  o hemisfério que contém  $C$  e limitado pelo arco  $\widehat{AB}$ .  $H_C$  contém ambos os setores  $A$  e  $B$ , mas somente uma parte do setor  $C$ :

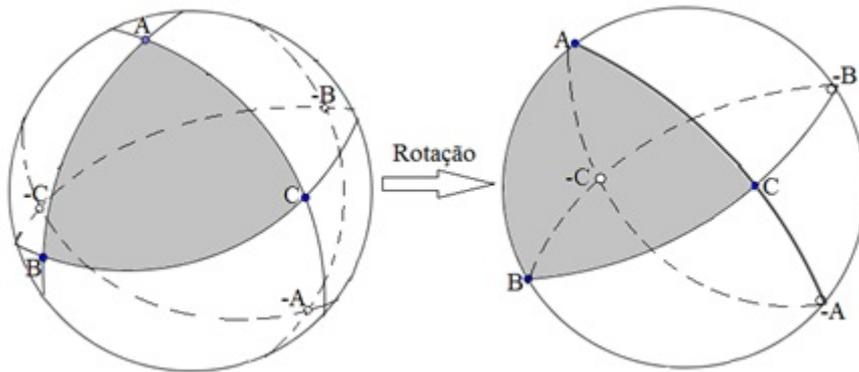


Figura 3.22: Teorema 3.23 Rotação da esfera. Adptada de [10].

Assim, teremos:

$$S(H_C) = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle(-A)BC} + S_{\triangle A(-B)C} + S_{\triangle(-A)(-B)C} \quad (3.8)$$

$$S_{Setor(A)} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta(-A)BC} \quad (3.9)$$

$$S_{Setor(B)} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A(-B)C} \quad (3.10)$$

$$S_{Setor(C)} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta AB(-C)} \quad (3.11)$$

A reflexão em torno da origem é uma isometria  $f$  que toma cada ponto  $P$  e leva ao seu antípoda  $(-P)$ . Assim  $f(\Delta AB(-C)) = f(\Delta(-A)(-B)C)$ . Como é uma isometria,  $f$  preserva áreas também:

$$S_{\Delta AB(-C)} = S_{\Delta(-A)(-B)C}$$

Substituindo em (3.11), vem:

$$S_{Setor(C)} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta(-A)(-B)C} \quad (3.12)$$

Somando as equações (3.9), (3.10) e (3.11) vem:

$$\begin{aligned} S_{Setor(A)} + S_{Setor(B)} + S_{Setor(C)} &= \\ S_{\Delta ABC} + S_{\Delta(-A)BC} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A(-B)C} + S_{\Delta ABC} + S_{\Delta AB(-C)} &= \\ = 2.S_{\Delta ABC} + \underbrace{S_{\Delta(-A)BC} + S_{\Delta A(-B)C} + S_{\Delta AB(-C)}}_{S(H_C)} & \end{aligned}$$

$$S_{Setor(A)} + S_{Setor(B)} + S_{Setor(C)} = 2.S_{\Delta ABC} + S(H_C) \quad (3.13)$$

Como a área do setor é dada por  $2.R^2.\theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo correspondente, segue que:

$$\begin{aligned} S_{Setor(A)} &= 2.R^2.\hat{A}; \\ S_{Setor(B)} &= 2.R^2.\hat{B} \text{ e} \\ S_{Setor(C)} &= 2.R^2.\hat{C}. \end{aligned}$$

Como a área do hemisfério é metade da área da esfera, temos que:

$$S(H_C) = 2.\pi.R^2$$

Voltando à equação (3.13), fazendo as respectivas substituições, segue que:

$$\begin{aligned} 2.R^2.\hat{A} + 2.R^2.\hat{B} + 2.R^2.\hat{C} &= 2.S_{\Delta ABC} + 2.\pi.R^2 \div (2R^2) \\ \implies \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} &= \pi + \frac{S_{\Delta ABC}}{R^2} \end{aligned}$$

Ou seja,

$$S_{\triangle ABC} = \underbrace{[(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C}) - \pi]}_E \cdot R^2$$

$$S_{\triangle ABC} = E \cdot R^2$$

□

**Corolário 3.32.** *É impossível ter uma isometria entre uma região sobre a esfera e uma região sobre o plano, desde que a região na esfera inclui no mínimo um triângulo geodésico juntamente com o seu interior.*

*Demonstração.* Isometrias preservam distâncias de modo que elas aplicam curvas mínimas para curvas mínimas. Portanto, tal isometria aplicaria triângulos geodésicos sobre a esfera para triângulos geodésicos sobre o plano. Mas uma isometria também preserva ângulos. Portanto, a soma dos ângulos de um triângulo esférico teria que ser igual à soma dos ângulos de um triângulo plano, mas isto contradiz o teorema anterior.

□

### 3.8.2 Fórmulas fundamentais de um triângulo esférico

Já vimos anteriormente a *Lei dos Cossenos* e a *Lei dos Senos* em um dado triângulo esférico  $ABC$  com lado  $a$  oposto ao vértice  $A$ , lado  $b$  oposto ao vértice  $B$  e lado  $c$  oposto ao vértice  $C$ .

Vamos usar operações com vetores para apresentarmos uma outra demonstração para as mesmas leis anteriores.

**Proposição 3.33.** *A lei dos cossenos para os lados:*

$$\cos \angle a = \cos \angle b \cos \angle c + \text{sen} \angle b \cdot \text{sen} \angle c \cdot \cos \angle A.$$

*Demonstração.* Pelo Lema 3.11.,  $\angle A = \angle(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C})$ . Assim,

$$\begin{aligned} (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) &= |\vec{A} \times \vec{B}| |\vec{A} \times \vec{C}| \cos(\vec{A} \times \vec{B}, \vec{A} \times \vec{C}) \\ (\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) &= |\vec{A} \times \vec{B}| |\vec{A} \times \vec{C}| \cos \angle A \end{aligned}$$

Temos ainda que,

$$\begin{aligned}
\angle c = \angle(\vec{A}, \vec{B}) &\implies |\vec{A} \times \vec{B}| = |A||B|\text{sen}(\angle c) \\
|\vec{A} \times \vec{B}| &= |A||B|\text{sen}\angle c \\
\angle b = \angle(\vec{A}, \vec{C}) &\implies |\vec{A} \times \vec{C}| = |A||C|\text{sen}(\angle b) \\
|\vec{A} \times \vec{C}| &= |A||C|\text{sen}\angle b \\
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) &= (|A||B|\text{sen}\angle c) \cdot (|A||C|\text{sen}\angle b) \cos \angle A = \\
&= |A|^2 |B||C| \text{sen}\angle c \text{sen}\angle b \cos \angle A
\end{aligned}$$

Como  $|A| = |B| = |C| = R$ , segue que:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = R^4 \text{sen}\angle c \text{sen}\angle b \cos \angle A \quad (3.14)$$

Uma identidade da álgebra vetorial nos fornece:

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = \det \begin{bmatrix} \vec{A} \cdot \vec{A} & \vec{A} \cdot \vec{C} \\ \vec{B} \cdot \vec{A} & \vec{B} \cdot \vec{C} \end{bmatrix}$$

Desenvolvendo o determinante, temos:

$$\begin{aligned}
(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{A}) \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C}) - (\vec{B} \cdot \vec{A}) \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) \\
&= R^2 \cdot R^2 \cdot \cos(\vec{B}, \vec{C}) - R^4 \cdot \cos(\vec{B}, \vec{A}) \cdot \cos(\vec{A}, \vec{C}) \\
&= R^4 \cdot (\cos(\vec{B}, \vec{C}) - \cos(\vec{B}, \vec{A}) \cos(\vec{A}, \vec{C})) \\
&= R^4 \cdot \cos \angle a - R^4 \cdot \cos \angle c \cos \angle b
\end{aligned} \quad (3.15)$$

Mas,  $(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) = R^4 \text{sen}\angle b \text{sen}\angle c \cos \angle A$ . Assim,

$$\begin{aligned}
R^4 \text{sen}\angle b \text{sen}\angle c \cos \angle A &= R^4 \cdot \cos \angle a - R^4 \cdot \cos \angle c \cos \angle b \\
\text{sen}\angle b \text{sen}\angle c \cos \angle A &= \cos \angle a - \cos \angle c \cos \angle b \\
\implies \cos \angle a &= \cos \angle c \cos \angle b + \text{sen}\angle b \text{sen}\angle c \cos \angle A
\end{aligned}$$

□

**Exemplo 3.34.** Resolver o triângulo esférico  $ABC$  se:

(a)  $\angle A = 60^\circ, \angle b = 70^\circ, \angle c = 80^\circ$

(b)  $\angle a = 60^\circ, \angle b = 70^\circ, \angle c = 80^\circ$

Resolução do item (a):

Usando a lei dos cossenos e fazendo as substituições, encontraremos os valores das medidas do lado  $a$  e dos ângulos  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$ :

$$\begin{aligned}\cos \angle a &= \cos \angle c \cos \angle b + \operatorname{sen} \angle b \operatorname{sen} \angle c \cos \angle A \\ &= \cos 80^\circ \cos 70^\circ + \operatorname{sen} 70^\circ \operatorname{sen} 80^\circ \cos 60^\circ \\ &\approx (0,1737) \cdot (0,3420) + (0,9848) \cdot (0,9397) \cdot (0,5) \\ &\approx 0,0594 + 0,4627 = 0,52211 \\ \implies \angle a &\approx 58,526^\circ\end{aligned}$$

Para encontrarmos o ângulo  $\hat{B}$ , usamos:

$$\begin{aligned}\cos \angle b &= \cos \angle a \cos \angle c + \operatorname{sen} \angle a \operatorname{sen} \angle c \cos \angle B \\ 0,3420 &= \cos 59^\circ \cos 80^\circ + \operatorname{sen} 59^\circ \operatorname{sen} 80^\circ \cos \angle B \\ &\approx (0,52211) \cdot (0,1737) + (0,8572) \cdot (0,9848) \cos \angle B \\ &\approx 0,09069 + 0,84417 \cdot \cos \angle B \\ \cos \angle B &\approx \frac{0,3420 - 0,09069}{0,84417} \approx 0,29770 \\ \implies \angle B &\approx 72,680^\circ\end{aligned}$$

Para encontrarmos o ângulo  $\hat{C}$ , usamos:

$$\begin{aligned}\cos \angle c &= \cos \angle a \cos \angle b + \operatorname{sen} \angle a \operatorname{sen} \angle b \cos \angle C \\ \cos 80^\circ &= \cos 59^\circ \cos 70^\circ + \operatorname{sen} 59^\circ \operatorname{sen} 70^\circ \cos \angle C \\ 0,1736 &\approx (0,5150) \cdot (0,3420) + (0,8572) \cdot (0,9397) \cos \angle C \\ &\approx 0,17613 + 0,80551 \cdot \cos \angle C \\ \cos \angle C &\approx \frac{0,1736 - 0,17613}{0,80551} \approx -0,00314 \\ \implies \angle C &\approx 90,18^\circ\end{aligned}$$

O outro item fica como exercício.

**Exemplo 3.35.** Mostrar que o Teorema de Pitágoras esférico ( $\cos a = \cos b \cdot \cos c$ ) tem como limite o Teorema de Pitágoras no plano.

### 3.8.3 Triângulo esférico polar ou dual

A importância do triângulo polar situa-se no fato de que seus vértices correspondem aos lados do triângulo original e seus lados correspondem aos vértices do triângulo original.

Vejamus uma definição vetorial para triângulos polares:

**Definição 3.36.** Seja  $\triangle ABC$  um triângulo esférico. O triângulo dual  ${}^*\triangle ABC$  é triângulo esférico  $\triangle A^*B^*C^*$  onde:

$$\begin{aligned}\vec{A}^* &= \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{R \operatorname{sen} \angle a}; \\ \vec{B}^* &= \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{R \operatorname{sen} \angle b}; \\ \vec{C}^* &= \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{R \operatorname{sen} \angle c}.\end{aligned}$$

Onde  $R$  é o raio da esfera. O propósito dos fatores  $R \operatorname{sen} \angle a$ ,  $R \operatorname{sen} \angle b$  e  $R \operatorname{sen} \angle c$  é ajustar o comprimento dos vetores de modo que  $|\vec{A}^*| = |\vec{B}^*| = |\vec{C}^*| = R$ .

Relembrando que

$$|\vec{V} \times \vec{W}| = |\vec{V}| |\vec{W}| \operatorname{sen} \angle(\vec{V}, \vec{W})$$

e

$$\angle a = \angle(\vec{B}, \vec{C}), \angle b = \angle(\vec{C}, \vec{A}) \text{ e } \angle c = \angle(\vec{A}, \vec{B}).$$

Assim,

$$|\vec{A}^*| = \frac{|\vec{B} \times \vec{C}|}{R \operatorname{sen} \angle a} = \frac{|\vec{B}| |\vec{C}| \operatorname{sen} \angle(\vec{B}, \vec{C})}{R \operatorname{sen} \angle a}$$

Ou seja,

$$|\vec{A}^*| = \frac{R \cdot R \cdot \operatorname{sen} \angle a}{R \operatorname{sen} \angle a} = R$$

**Proposição 3.37.** Sejam  $A^*$ ,  $B^*$  e  $C^*$  os vértices do triângulo dual conforme definição anterior. Seja  $a^*$  o lado oposto ao vértice  $A^*$ ,  $b^*$  o lado oposto ao vértice  $B^*$  e  $c^*$  o lado oposto ao vértice  $C^*$ . Então,

$$\vec{A}^* = s \cdot \frac{\vec{B}^* \times \vec{C}^*}{R \operatorname{sen} \angle a^*}; \vec{B}^* = s \cdot \frac{\vec{C}^* \times \vec{A}^*}{R \operatorname{sen} \angle b^*} \text{ e } \vec{C}^* = s \cdot \frac{\vec{A}^* \times \vec{B}^*}{R \operatorname{sen} \angle c^*}.$$

onde  $s = \pm 1$  é o sinal do determinante  $\det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]$ .

*Demonstração.*  $\vec{B}^* \times \vec{C}^* = \frac{\vec{C} \times \vec{A}}{R \text{sen} \angle b} \times \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{R \text{sen} \angle c} = s. \frac{(\vec{C} \times \vec{A}) \times (\vec{A} \times \vec{B})}{R \text{sen} \angle b R \text{sen} \angle c}$ .

Usando a identidade vetorial

$$\vec{X} \times (\vec{Y} \times \vec{Z}) = (\vec{X} \cdot \vec{Z}) \vec{Y} - (\vec{X} \cdot \vec{Y}) \vec{Z}$$

e chamando  $\vec{C} \times \vec{A} = \vec{X}$ ,  $\vec{Y} = \vec{A}$  e  $\vec{Z} = \vec{B}$  teremos:

$$\begin{aligned} (\vec{C} \times \vec{A}) \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= (\vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{A} - (\vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{A}) \vec{B} \\ &= (\vec{C} \times \vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{A} = \vec{A} \det[\vec{C}, \vec{A}, \vec{B}] \\ &= -\vec{A} \det[\vec{A}, \vec{C}, \vec{B}] \\ &= \vec{A} \det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]. \end{aligned}$$

Portanto,  $\vec{B}^* \times \vec{C}^* = \frac{\vec{A} \det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]}{R^2 \cdot \text{sen} \angle b \text{sen} \angle c}$

$$\vec{A} = (\vec{B}^* \times \vec{C}^*) \left( \frac{R^2 \text{sen} \angle b \text{sen} \angle c}{\det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]} \right)$$

Assim,  $\vec{A}$  aponta na mesma direção de  $s. \left( \frac{\vec{B}^* \times \vec{C}^*}{R \text{sen} \angle a^*} \right)$ .

Além disso,  $R = |\vec{A}|$  e  $R = \frac{|\vec{B}^* \times \vec{C}^*|}{R \cdot \text{sen} \angle a^*}$ , uma vez que  $|\vec{B}^*| = |\vec{C}^*| = R$  e  $\angle(\vec{B}^*, \vec{C}^*) = \angle a^*$ . Portanto,

$$\vec{A} = s. \left( \frac{\vec{B}^* \times \vec{C}^*}{R \text{sen} \angle a^*} \right).$$

As demais equações são demonstradas de modo similar. □

**Corolário 3.38.** *O triângulo polar do  ${}^* \triangle ABC$  é*

$${}^*({}^* \triangle ABC) = \begin{cases} \triangle ABC & \text{se } \det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] \geq 0 \\ \triangle(-A)(-B)(-C) & \text{se } \det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] \leq 0 \end{cases}$$

**Corolário 3.39.**  ${}^*({}^* \triangle ABC) \cong \triangle ABC$

*Demonstração.* Pelo corolário (3.29) ou  ${}^*({}^* \triangle ABC)$  é igual a  $\triangle ABC$  ou é igual a reflexão do  $\triangle ABC$  através do centro da esfera. □

**Corolário 3.40.** *Sejam  $A^*$ ,  $B^*$  e  $C^*$  os vértices do  ${}^*\Delta ABC$  conforme a definição (3.27.). Seja  $a^*$  o lado oposto ao vértice  $A^*$ ,  $b^*$  o lado oposto ao vértice  $B^*$  e  $c^*$  o lado oposto ao vértice  $C^*$ . Então,*

$$\begin{cases} \angle A + \angle a^* = \angle A^* + \angle a = 180^\circ, \\ \angle B + \angle b^* = \angle B^* + \angle b = 180^\circ, \\ \angle C + \angle c^* = \angle C^* + \angle c = 180^\circ \end{cases} \quad (3.16)$$

*Demonstração.* Pela definição (3.27.) e pelo lema (3.11.), temos:

$$\begin{aligned} \angle a^* &= \angle(\vec{B}^*, \vec{C}^*) = \\ &= \angle(\vec{C} \times \vec{A}, \vec{A} \times \vec{B}) = \\ &= \angle(-\vec{A} \times \vec{C}, \vec{A} \times \vec{B}) = \\ &= 180^\circ - \angle(\vec{A} \times \vec{C}, \vec{A} \times \vec{B}) = \\ &= 180^\circ - \angle A \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim,

$$\angle A + \angle a^* = 180^\circ$$

Aplicando este resultado em  $\Delta A^{**}B^{**}C^{**}$  do  $\Delta A^*B^*C^*$ , teremos

$$\angle A^* + \angle a^{**} = 180^\circ, \quad (3.18)$$

Onde  $\angle a^{**}$  é o lado oposto a  $\angle A^{**}$ . Mas  $\angle a^{**} \cong \angle a$ , pelo corolário (3.30), ou seja,  $\Delta A^{**}B^{**}C^{**}$  é congruente ao  $\Delta ABC$ . Portanto, substituindo na equação (3.33.), temos que

$$\angle A^* + \angle a = 180^\circ.$$

Isto prova a primeira das equações (3.31.). As demais são demonstradas analogamente. □

**Proposição 3.41. Lei dos cossenos para ângulos:** *Seja  $\Delta ABC$  um triângulo esférico com os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Então,*

$$\cos \angle A = -\cos \angle B \cos \angle C + \operatorname{sen} \angle B \operatorname{sen} \angle C \cos \angle a.$$

*Demonstração.* Aplicando a lei dos cossenos para lados no triângulo  $\triangle A^*B^*C^* = \triangle ABC$ , temos:

$$\cos \angle a^* = \cos \angle b^* \cos \angle c^* + \operatorname{sen} \angle b^* \operatorname{sen} \angle c^* \cos \angle A^*,$$

onde  $a^*$ ,  $b^*$  e  $c^*$  são os lados opostos aos vértices  $A^*$ ,  $B^*$  e  $C^*$  do  $\triangle A^*B^*C^*$ , respectivamente. Sabemos que, pelo corolário (3.31.),  $\angle a^* = 180^\circ - \angle A$ ,  $\angle b^* = 180^\circ - \angle B^*$  e  $\angle c^* = 180^\circ - \angle C^*$ . Substituindo na equação anterior e usando o fato de que  $\cos(180 - \theta) = -\cos \theta$  e  $\operatorname{sen}(180^\circ - \theta) = \operatorname{sen} \theta$  para todo ângulo  $\theta$  obteremos o resultado proposto. Ou seja:

$$\begin{aligned} \cos \angle a^* &= \cos \angle b^* \cos \angle c^* + \operatorname{sen} \angle b^* \operatorname{sen} \angle c^* \cos \angle A^* \\ \cos \angle(180^\circ - \angle A) &= \\ &= \cos \angle(180^\circ - \angle B) \cos \angle(180^\circ - \angle C) + \\ &+ \operatorname{sen} \angle(180^\circ - \angle B) \operatorname{sen} \angle(180^\circ - \angle C) \cos \angle(180^\circ - \angle a) \\ -\cos \angle A &= (-\cos \angle B)(-\cos \angle C) + \operatorname{sen} \angle B \operatorname{sen} \angle C (-\cos \angle a) \\ -\cos \angle A &= \cos \angle B \cos \angle C - \operatorname{sen} \angle B \operatorname{sen} \angle C \cos \angle \\ \cos \angle A &= -\cos \angle B \cos \angle C + \operatorname{sen} \angle B \operatorname{sen} \angle C \cos \angle \end{aligned}$$

Isso completa a demonstração. □

Assim, dadas as medidas dos seus ângulos de vértice pode-se resolver completamente um triângulo esférico usando a lei dos co-senos. Dois triângulos com os mesmos ângulos de vértices são congruentes. Na geometria plana pode-se dizer apenas que dois triângulos com os mesmos ângulos são semelhantes.

**Exemplo 3.42.** Encontrar os lados  $a$ ,  $b$ ,  $c$  de triângulo esférico, se seus ângulos de vértice são  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 70^\circ$  e  $\angle C = 80^\circ$ .

**Solução:** Pela lei dos cossenos para ângulos,

$$\begin{aligned} \cos \angle a &= \frac{\cos \angle A + \cos \angle B \cos \angle C}{\operatorname{sen} \angle B \operatorname{sen} \angle C} \\ &\approx \frac{0,5 + (0,34202) \cdot (0,17365)}{(0,93969) \cdot (0,98481)} \\ &\approx 0,60447 \\ \implies \angle a &\approx \arccos(0,60447) \approx 52,809^\circ \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned}
 \cos \angle b &= \frac{\cos 70^\circ + \cos \angle 60^\circ \cos 80^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 80^\circ} \\
 &\approx \frac{0,34202 + (0,5) \cdot (0,17365)}{(0,86603) \cdot (0,98481)} \\
 &\approx 0,50283 \\
 \implies \angle b &\approx 59,813^\circ
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \angle c &= \frac{\cos 80^\circ + \cos 60^\circ \cos 70^\circ}{\operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 70^\circ} \\
 &\approx \frac{0,17365 + (0,5) \cdot (0,34202)}{(0,86603) \cdot (0,93969)} \\
 &\approx 0,42352 \\
 \implies \angle c &\approx 64,943^\circ
 \end{aligned}$$

Quando se combinam vários ângulos esféricos tendo o mesmo vértice, eles adicionam -se da mesma forma como o fazem no plano. A razão para isso é que o ângulo entre as duas curvas esféricas é, por definição, igual ao ângulo entre as tangentes das curvas, por isso, se existem vários ângulos no mesmo vértice eles combinam da mesma forma como fazem os ângulos entre vetores num único plano tangente.

**Proposição 3.43. Lei dos senos para triângulos esféricos (tratamento vetorial):** *Seja  $\triangle ABC$  um triângulo esférico com os lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  opostos aos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , respectivamente. Sejam  $A^*$ ,  $B^*$  e  $C^*$  os vértices do triângulo polar correspondente. Então,*

$$\begin{aligned}
 \frac{\operatorname{sen} \angle a}{\operatorname{sen} \angle A} &= \frac{\operatorname{sen} \angle b}{\operatorname{sen} \angle B} = \frac{\operatorname{sen} \angle c}{\operatorname{sen} \angle C} \\
 &= s \cdot \left( \frac{\det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]}{\det[\vec{A}^*, \vec{B}^*, \vec{C}^*]} \right)
 \end{aligned}$$

onde  $s = \pm 1$  é o sinal do  $\det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]$ .

*Demonstração.* Seja  $R$  o raio da esfera. Conforme definição (3.27) e proposição (3.28)

$$\begin{aligned}
\det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}] = \vec{A}^* \cdot (\vec{B}^* \times \vec{C}^*) &= \left( \frac{\vec{B} \times \vec{C}}{R \operatorname{sen} \angle a} \right) \cdot \left( \vec{A} \cdot \frac{R \operatorname{sen} \angle a^*}{s} \right) \\
&= \left( \frac{\operatorname{sen} \angle a^*}{\operatorname{sen} \angle a} \right) \cdot \left( \frac{\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})}{s} \right) \\
&= \left( \frac{\operatorname{sen} \angle a^*}{\operatorname{sen} \angle a} \right) \cdot \left( \frac{\det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]}{s} \right). \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Mas  $\operatorname{sen} \angle a^* = \operatorname{sen} \angle A$  desde que  $\angle A + \angle a^* = 180^\circ$ . Substituindo na equação (3.35), teremos:

$$\left( \frac{\operatorname{sen} \angle a}{\operatorname{sen} \angle A} \right) \cdot \left( \frac{\det[\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}]}{s \det[\vec{A}^*, \vec{B}^*, \vec{C}^*]} \right).$$

Como  $s = \pm 1$ , isso prova a primeira parte da proposição. O restante prova-se de maneira similar. □

### 3.9 Aplicações da trigonometria esférica no cálculo de distâncias no globo terrestre

Sabemos que a forma do planeta Terra se assemelha a uma esfera. Por esta razão, as rotas marítimas ou aéreas são calculadas aplicando-se os resultados da Trigonometria Esférica.

As coordenadas geográficas, utilizadas para localizar um determinado ponto  $P$  na superfície terrestre, são determinadas pela *Latitude* e pela *Longitude* desse ponto.

Chama-se *Latitude* de um ponto  $P$  a medida do arco de meridiano que passa por  $P$  situado entre o paralelo que contém  $P$  e o Equador. Por outro lado, a *Longitude* de  $P$  é a medida do arco de paralelo que passa por  $P$  situado entre o meridiano que o contém e o meridiano de Greenwich. [15]

A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de  $0^\circ$  a  $90^\circ\text{N}$  (norte) ou de  $0^\circ$  a  $90^\circ\text{S}$  (sul), conforme esse ponto pertença ao Hemisfério Norte ou ao Sul.

Da mesma forma, a longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de  $0^\circ$  a  $180^\circ\text{E}$  (leste) ou de  $0^\circ$  a  $180^\circ\text{W}$  (oeste), conforme o ponto esteja a Leste (E) ou a Oeste (W) do meridiano de Greenwich.

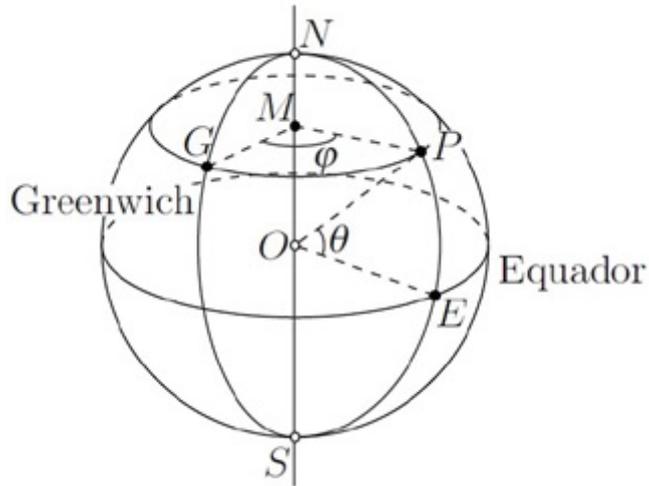


Figura 3.23: Latitude e longitude. adaptado de [15].

As relações dos triângulos esféricos são uma importante ferramenta para calcular a distância entre dois pontos  $A$  e  $B$  na superfície terrestre, uma vez que esses pontos, os meridianos que passam por eles e o menor arco de circunferência máxima que os une, formam dois triângulos esféricos  $ANB$  e  $ASB$ .

Portanto, os rumos aéreos ou marítimos com extremidades nesses pontos, em cada instante, é o ângulo que o arco  $\widehat{AB}$  de circunferência máxima forma com o meridiano do navio ou avião no instante considerado, medido a partir do norte no sentido horário.

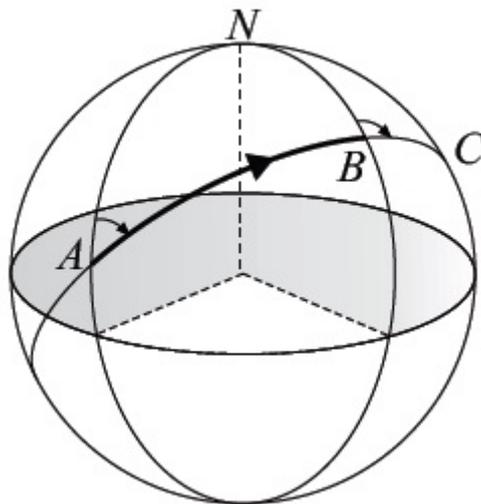


Figura 3.24: Orientação das rotas marítimas ou aéreas na superfície terrestre. Adaptado de [15].

Vejamos alguns exemplos:

**Exemplo 3.44.** Achar a diferença de longitude (em milhas náuticas) entre o Rio de Janeiro ( $43^{\circ}11'W$ ) e Pearl Harbour ( $157^{\circ}58,3'W$ ).

*Resolução:*

Como ambas estão a oeste de Greenwich, a distância pedida será:

$$157^{\circ}58,3' - 43^{\circ}11' = 114^{\circ}47,3' = 6887,3 \text{ milhas náuticas.}$$

(Considerando 1 milha náutica = 1').

**Exemplo 3.45.** Achar a diferença de longitude entre o Rio de Janeiro ( $43^{\circ}11'W$ ) e Moscou( $37^{\circ}34,3'E$ ).

*Resolução:*

Como uma cidade está a leste e outra a oeste de Greenwich, a distância solicitada é:

$$37^{\circ}34,3' + 43^{\circ}11' = 80^{\circ}45,3' = 4845,3 \text{ milhas náuticas.}$$

**Exemplo 3.46.** Achar a diferença de longitude entre Sydney ( $151^{\circ}13'E$ ) e Moscou( $37^{\circ}34,3'E$ ).

*Resolução:*

Como as duas cidades estão a leste de Greenwich, a distância é:

$$151^{\circ}13' - 37^{\circ}34,3' = 113^{\circ}38,7' = 6818,7 \text{ milhas náuticas.}$$

**Exemplo 3.47.** Achar a diferença de longitude entre o Rio de Janeiro ( $43^{\circ}11'W$ ) e Sydney ( $151^{\circ}13'E$ ).

*Resolução:*

Queremos saber a menor distância entre as duas cidades, ambas a oeste de Greenwich. Então, essa distância será:

$$360^{\circ} - (151^{\circ}13' + 43^{\circ}11,3') = 360^{\circ} - 194^{\circ}24,3' = 165^{\circ}35,7' = 9935,7 \text{ milhas náuticas.}$$

**Exemplo 3.48.** Encontre a distância de New Orleans a New York e o Polo Norte, na direção de cada cidade para a outra. Use os seguintes dados:

(NO) NEW ORLEANS - Lat. ( $30^{\circ}N$ ); Long. ( $90^{\circ}W$ ) (NY) NEW YORK - Lat. ( $41^{\circ}N$ ); Long. ( $71^{\circ}W$ )

**Resolução:**

Faremos o triângulo esférico cujos vértices são *NY*, *NO* e o Polo Norte. Como *NY* está localizada a  $41^{\circ}$  de latitude norte, o ângulo entre *NY* e o Polo é  $90^{\circ} - 41^{\circ} =$

49°. O ângulo entre  $NO$  e o Polo Norte é  $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ . O ângulo entre o arco conectando  $NO$  ao polo Norte e o arco conectando  $NY$  ao Polo Norte é a diferença entre as longitudes de  $NY$  e  $NO$ , isto é,  $90^\circ - 74^\circ = 16^\circ$ , conforme figura abaixo.[12]

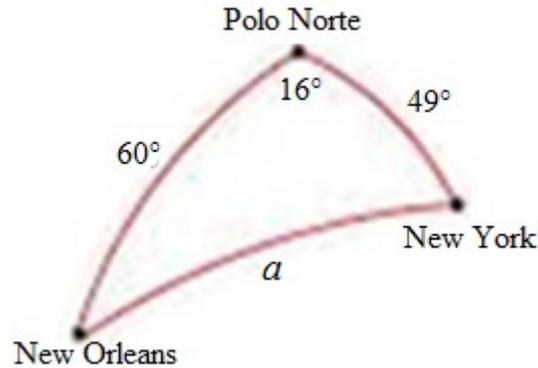


Figura 3.25: Exemplo 3.48. Fonte: [10].

Seja  $a$  o arco conectando  $NO$  a  $NY$ . Pela lei dos cossenos para os lados, temos:

$$\begin{aligned}\cos \angle a &= \cos 49^\circ \cos 60^\circ + \operatorname{sen} 49^\circ \operatorname{sen} 60^\circ \cos 16^\circ \\ &\approx (0,65606)(0,50000) + (0,75471)(0,86603)(0,96126) \\ &\approx 0,95631\end{aligned}$$

Assim,

$$\angle a \approx 16,999^\circ \approx 0,29670 \operatorname{rad}.$$

Multiplique esse valor pelo raio da esfera terrestre para obter a distância entre  $NY$  e  $NO$ . Desta forma, temos:

$$d(NY, NO) \approx (0,29670)(3960 \operatorname{mi}) \approx 1175 \operatorname{mi}.$$

O ângulo do vértice  $\angle NO$  em  $NO$  mede a direção de  $NO$  para  $NY$ . Pela lei dos cossenos para lados, temos:

$$\begin{aligned}\cos \angle NO &= \frac{\cos 49^\circ - \cos 16999^\circ \cos 60^\circ}{\operatorname{sen} 16999^\circ \operatorname{sen} 60^\circ} \\ &\approx 0,70266.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Segue que,

$$\angle NO \approx 45,359^\circ \approx 45^\circ 22'.$$

Como  $NY$  situa-se a leste de  $NO$ , a direção de  $NO$  para  $NY$  é  $N45^\circ 22'E$ , aproximadamente.

De maneira similar mostra-se que o ângulo do vértice  $\angle NY$  em  $NY$  é  $N125^\circ 16'$  aproximadamente. De acordo com a notação de direção aqui utilizada, todos os ângulos seriam medidos entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  do norte ao sul. Assim, este ângulo seria descrito tendo a direção  $180^\circ - (125^\circ 16') = 54^\circ 44'$  oeste para o sul, ou seja, a direção de  $NY$  para  $NO$  é

$$S54^\circ 44'W$$

aproximadamente.

**Exemplo 3.49. (Exercício)** Mostrar que o teorema de Pitágoras para triângulos planos é um caso limite do teorema de Pitágoras para triângulos esféricos. (Dica: use a série de Taylor para expandir a função  $\cos \theta$ ).

# Capítulo 4

## Conclusão

Como todo trabalho acadêmico, muitas ideias surgiram no decorrer da construção desta dissertação. Inicialmente, o foco seria somente as propriedades dos triângulos planos com a finalidade de aborda-las na resolução dos problemas de olimpíadas de matemática.

Apesar dessa preocupação, surgiu a ideia de estudar um pouco as propriedades dos triângulos esféricos, atitude que trouxe um ganho considerável ao trabalho, uma vez que a geometria não euclidiana é ainda desconhecida no Ensino Básico.

A comparação dos resultados da trigonometria plana com a esférica evidenciou a necessidade, mesmo que apenas superficialmente, de abordar essa temática no Ensino Básico, pois no senso comum, por exemplo, a menor distância entre dois pontos é uma reta. Certamente, diante das limitações no ensino de geometria, a palavra *geodésica* é ainda um termo desconhecido.

Obviamente, não se trata de uma campanha pela inserção dessa geometria no Ensino Básico, uma vez que nem mesmo noções da euclidiana estão garantidas. Porém, os avanços das engenharias, arquitetura, astronomia, entre outras novas tecnologias só foram possíveis graças aos resultados publicados por Lobachevsky e Riemann, alicerçados em Euclides.

Assim, fica cada vez mais evidente a importância da matemática para as demais áreas do conhecimento. Mesmo diante da realidade difícil das nossas escolas públicas, esperamos poder contribuir para a melhoria do ensino de geometria e mostrar que esses conhecimentos nos ajudam a compreender o espaço e melhorar as nossas condições de vida.

Nossa abordagem restringe-se a alguns aspectos de geometria plana e esférica. Em estudos posteriores vislumbram-se novos caminhos para tratar geometrias mais

abrangentes usando outros teoremas relacionando os diferentes aspectos da geometria (Teorema de Gauss-Bonnet) e novas aplicações como mapas, localizações dinâmicas com GPS e aplicações mais sofisticadas em relatividade geral.

# Referências Bibliográficas

- [1] AYRES JR., Frank. *Trigonometria plana e esférica/ Frank Ayres Jr.; tradução: Mário Pinto Guedes*. Coleção Shaum, LT Ao Livro Técnico, Rio de Janeiro, RJ, 1962.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria euclidiana plana/ João Lucas Marques Barbosa*. 11.ed., SBM, Coleção do Professor de Matemática, 273 p., Rio de Janeiro, RJ, 2012.
- [3] BERLINGHOFF, William P. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas / William P. Berlinghoff, Fernando Q. Gouvêa; tradução: Elza Gomide, Helena Castro*. 2ª Ed., Blucher, São Paulo, SP, 2010.
- [4] CRUZ, Donizete Gonçalves. *Algumas diferenças entre a Geometria Euclidiana e as Geometrias Não Euclidianas - Hiperbólica e Elíptica a serem abordados nas séries do Ensino Médio..* Artigo PDF. p. 09 e 10 via web.
- [5] DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial, posição e métrica/ Osvaldo Dolce, José Nicolau Pompeo*. 5ª Ed., Atual, São Paulo, SP.
- [6] DORIA, Celso Melchhiades. *Geometria em Dimensão 2*. PDF. p.05 via web.
- [7] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática/ Howard Eves; tradução: Hygino H. Domingues*. Editora da Unicamp, Campinas, SP, 2004.
- [8] GARBI, Gilberto Geraldo. *C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria/ Gilberto Geraldo Garbi*. Editora Livraria da Física, São Paulo, SP, 2010.

- [9] GIOVANNI JUNIOR, José Ruy. *A conquista da matemática, 9º ano/ José Ruy Giovanni Júnior, Benedicto Castrucci*. Edição renovada, Coleção a conquista da matemática, FTD, São Paulo, SP, 2009.
- [10] JENNINGS, George A. *Modern Geometry with applications/ George A. Jennings*. Universitext, California State University, USA, 1997.
- [11] MUNIZ NETO, Antônio Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana/ Antônio Caminha Muniz Neto*. 1.ed., SBM, Coleção Professor de Matemática, 432 p., Rio de Janeiro, RJ, 2012.
- [12] OLIVEIRA, Marcelo Rufino de. *Coleção elementos de matemática, 2: Geometria plana/ Marcelo Rufino de Oliveira, Márcio Rodrigues da Rocha Pinheiro*. 3 ed., Editora Vestseller, 347 p., Fortaleza, 2010.
- [13] PIERRO NETTO, Scipione Di. *Matemática: conceitos e histórias, 7ª série/ Scipione Di Pierro Netto*. Editora Scipione, 4ª Ed., São Paulo, SP, 1996.
- [14] PIERRO NETTO, Scipione Di. *Matemática: conceitos e histórias, 8ª série/ Scipione Di Pierro Netto*. Editora Scipione, São Paulo, SP, 1995.
- [15] SILVA FILHO, Antônio Edson Pereira da. *A trigonometria esférica e o globo terrestre/ Antonio Edson Pereira da Silva Filho*. Dissertação (mestrado), Universidade Federal do Ceará, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, CE, 2014.
- [16] SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. *Provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM)/ Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA)*.