



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE  
PRÓ-REITORIA DE PÓS- GRADUAÇÃO E PESQUISA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA  
REDE NACIONAL - PROFMAT

**Marcus Vinicio de Jesus Santos**

**Transformação de Möbius**

São Cristóvão - SE  
2016



**Marcus Vinicio de Jesus Santos**

## **Transformação de Möbius**

*Dissertação apresentada ao Programa de Pós -  
Graduação em Matemática da Universidade Fe-  
deral de Sergipe, como parte dos requisitos para  
obtenção do título de Mestre em Matemática.*

**Orientador: Prof. Dr. Naldisson dos Santos**

São Cristóvão - SE  
2016

---

## Agradecimentos

---

Agradeço a Deus, Senhor de tudo e de todos. A minha esposa Elisdete pelo incentivo e por estar ao meu lado sempre. Aos componentes convidados da banca pelos direcionamentos e correções necessárias para finalizar esse TCC. Ao meu orientador, professor Dr Naldisson, pela escolha do tema, bem como, o empenho em me orientar na pesquisa e produção do TCC. A todos os meus amigos da turma, os que continuaram e também os que, de uma forma ou de outra, não puderam ficar até o final, pelo incentivo ao aprendizado e dedicação. A minha família pela preocupação de que eu fizesse o melhor possível. A todos os meus amigos, que são tantos, por contribuírem com a minha pesquisa e também pelo incentivo. Não poderia esquecer de agradecer a Deus por todos os grandes Matemáticos por suas grandes descobertas contribuindo para o crescimento e evolução da humanidade e, em especial, August Ferdinand Möbius, razão do minha dissertação.

---

## Resumo

---

O objetivo deste trabalho é estudar transformações de Möbius arbitrárias por meio de transformações complexas mais simples, a saber: a Translação, a Rotação, a Homotetia (Contração e Dilatação) e a Inversão. Os resultados obtidos foram aplicados em círculos e retas. No final, damos a alternativa de estudar transformações de Möbius via matrizes.

**Palavras-chave:** Matrizes; Números Complexos; Transformação Complexa; Transformação de Möbius.

---

## Abstract

---

The aim of this work is the study of arbitrary mobius transformations by means of simple complex transformations, namely: the Translation, the Rotation, the Homotetia (Contraction and Dilatation) and Inversion. The results obtained were applied in circles and straight line. At the end, we give the the alternative of studying mobius transformations via matrices

**Keywords:** Matrices; Complex Numbers; Complex Processing; Möbius Transformation.

---

## Lista de Figuras

---

2.1	Tartágua. Fonte: Desciclopédia . . . . .	16
2.2	Cardano. Fonte: Wikipédia . . . . .	16
2.3	Bombelli. Fonte: www.pinterest.com . . . . .	16
2.4	Euler. Fonte: Wikipédia . . . . .	16
2.5	Gauss. Fonte: Wikipédia . . . . .	16
2.6	Representação Geométrica de $z = x + yi$ . . . . .	17
2.7	Representação Geométrica de $\bar{z} = x - yi$ . . . . .	18
2.8	Representação Geométrica de $ z $ . . . . .	18
2.9	Paralelogramo: $OA_1A_3A_2$ . . . . .	19
2.10	Regra do Paralelogramo. . . . .	20
2.11	Adição de Números Complexos. . . . .	20
2.12	$r' \cdot z$ e $r \cdot z$ com $r' < 0$ e $r > 0$ . . . . .	21
2.13	Forma Polar de $z \neq 0$ . . . . .	21
2.14	$z_1 \cdot z_2,  z_2  = 1$ . . . . .	23
3.1	Translação Horizontal . . . . .	26
3.2	Translação Vertical . . . . .	26
3.3	Translação Inclinada . . . . .	27
3.4	Exemplo de Translação . . . . .	27
3.5	Rotação ( $z \cdot w, w = e^{i\phi}$ ) . . . . .	28
3.6	Desigualdade Rotacionada . . . . .	30

3.7	Rotação de Triângulo . . . . .	30
3.8	Homotetia: Dilatação . . . . .	31
3.9	Homotetia: Contração . . . . .	32
4.1	August Ferdinand Möbius Fonte: <a href="http://www.brittanica.com">www.brittanica.com</a> . . . . .	33
4.2	Faixa de Möbius Fonte: Wikipédia . . . . .	34

---

## Sumário

---

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Matrizes</b>	<b>10</b>
1.0.1 Operações com Matrizes . . . . .	11
<b>2 Números Complexos</b>	<b>14</b>
2.1 Fatos Históricos . . . . .	14
2.2 Forma Algébrica . . . . .	16
2.3 Geometria das operações em $\mathbb{C}$ . . . . .	19
2.3.1 Adição . . . . .	19
2.3.2 Multiplicação de Número Real por Número Complexo . . . . .	21
2.3.3 Multiplicação . . . . .	21
2.4 Forma Exponencial de $z$ . . . . .	23
<b>3 Transformação Complexa</b>	<b>25</b>
3.1 Translação . . . . .	25
3.2 Rotação . . . . .	28
3.3 Homotetia: Dilatação e Contração . . . . .	31
<b>4 Transformação de Möbius</b>	<b>33</b>
4.1 August Ferdinand Möbius . . . . .	33
4.2 Definição e Propriedades . . . . .	34

4.2.1	Inversão de Möbius . . . . .	37
4.3	Transformação de Círculos e Retas . . . . .	41
4.4	Transformação de Möbius e Matrizes . . . . .	42
	Referências . . . . .	45

---

## Introdução

---

O estudo das transformações complexas desempenha um papel muito importante em várias áreas da matemática, bem como, da ciência como um todo. Uma grande importância das transformações reside no fato de elas tornarem possível transformar problemas aparentemente complicados em problemas análogos com soluções mais simples. August Ferdinand Möbius, matemático alemão que nasceu em 1790 e morreu em 1868, introduziu o que hoje conhecemos por Transformação de Möbius como sendo uma transformação complexa de variável complexa, definida por uma composição de convenientes transformações mais simples e que facilitam nas análises e soluções desses problemas.

O objetivo deste trabalho é estudar transformações de Möbius arbitrárias por meio de transformações complexas mais simples, a saber: a Translação, a Rotação, a Homotetia (Contração e Dilatação) e a Inversão.

Este TCC está organizado da seguinte maneira: No capítulo 1 fornecemos algumas definições e propriedades básicas do conjunto das matrizes. No capítulo 2 estudamos o conjunto dos números complexos, onde demos ênfase à geometria das operações em  $\mathbb{C}$ : Adição, Multiplicação de Número Real por Número Complexo e a Multiplicação de Números Complexos. No capítulo 3, estudamos as transformações complexas derivadas das operações dos números complexos, a saber: a Translação, a Rotação e a Homotetia (Contração e Dilatação). Por fim, no último capítulo, fizemos um estudo das transformações de Möbius baseados no fato de que, toda transformação de Möbius se escreve como a composição das transformações complexas estudadas no capítulo 3 juntamente com a inversão. Além disso, aplicamos os resultados a círculos e retas. Na última seção deste capítulo, damos uma alternativa de estudar transformações

de Möbius por meio de matrizes.

# CAPÍTULO 1

---

## Matrizes

---

Uma matriz  $A$ ,  $m \times n$ , ( $m$  por  $n$ ), é uma tabela de  $m \cdot n$  números dispostos em  $m$  linhas e  $n$  colunas

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

A  $i$ -ésima linha de  $A$  é

$$A = \left[ a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in} \right],$$

e a  $j$ -ésima coluna é

$$A = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}.$$

Usamos também a notação  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ . Dizemos que  $a_{ij}$  ou  $[A]_{ij}$  é o elemento ou a entrada de posição  $i, j$  da matriz  $A$ . Se  $m = n$ , dizemos que  $A$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$  e os elementos  $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$  formam a chamada diagonal principal de  $A$ . O conjunto de todas matrizes de ordem  $m \times n$  com entrada real será denotado por  $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ .

**Exemplo 1.0.1.**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{3}{5} & \sqrt{7} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 8 & \frac{-3}{10} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Temos que  $A \in M_2(\mathbb{R})$ ,  $B \in M_{1 \times 4}(\mathbb{R})$  e  $C \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ . Exemplos de elementos de algumas das matrizes dadas acima são  $a_{11} = 1$ ,  $b_{12} = 0$  e  $c_{22} = 4$ .

Duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  são ditas iguais se  $a_{ij} = b_{ij}$  para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

**1.0.1 Operações com Matrizes**

A **soma** de duas matrizes de mesmo tamanho  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$  é definida como sendo a matriz  $A + B = C = (c_{ij})_{m \times n}$  obtida somando-se os elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ , ou seja,

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

A **multiplicação** de uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  por um escalar  $\alpha$  é definida pela matriz

$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij})_{m \times n}.$$

O **produto de duas matrizes**,  $A = (a_{ij})_{m \times p}$  e  $B = (b_{ij})_{p \times n}$  é definido pela matriz

$$A \cdot B = C = (c_{ij})_{m \times n},$$

obtida da seguinte forma

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ip} \cdot b_{pj} \\ &= \sum_{k=1}^p a_{ik} \cdot b_{kj} \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

A **transposta** de uma matriz  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  é definida pela matriz

$$A^t = B = (b_{ij})_{n \times m}$$

obtida trocando-se as linhas com as colunas, ou seja,

$$b_{ij} = a_{ji},$$

para  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$ .

**Teorema 1.0.1.** *Para matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$ , de ordens apropriadas, e escalares  $\alpha$  e  $\beta$  são válidas as seguintes propriedades;*

1. (comutatividade)  $A + B = B + A$ ;
2. (associatividade)  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;
3. (elemento neutro) Existe uma única matriz  $O$ , tal que  $A + O = A$  para toda matriz  $A$ . A matriz  $O$  é chamada de matriz nula;
4. (elemento simétrico) Para cada matriz  $A$ , existe uma única matriz  $B$ , tal que  $A + B = O$ . Representamos  $B$  por  $-A$ ;
5. (associatividade)  $(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)$ ;
6. (distributividade)  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$ ;
7. (distributividade)  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$ ;
8. (associatividade do produto)  $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ ;
9. (distributividade)  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$  e  $(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A$ ;
10.  $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$ ;
11.  $(A^t)^t = A$ ;
12.  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ;
13.  $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$ ;
14.  $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$ ;
15. Para a matriz identidade  $I_n$  temos que

$$A \cdot I_n = A, \quad \forall A \in M_n(\mathbb{R})$$

$$I_n \cdot B = B, \quad \forall B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Onde

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

A **diferença** entre duas matrizes de mesmo tamanho  $A$  e  $B$  é definida por

$$A - B := A + (-B),$$

ou seja, é a soma da matriz  $A$  com a simétrica da matriz  $B$ .

**Definição 1.0.1.** Dizemos que uma matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$  é invertível se existir uma matriz  $B \in M_n(\mathbb{R})$  tal que

$$A \cdot B = I_n, \quad B \cdot A = I_n.$$

Mostra-se que a inversa de uma matriz  $A$  é única, dessa forma, denotamos a sua inversa por  $A^{-1}$ .

Para este TCC trabalharemos apenas com as matrizes de ordem 2, assim, fixaremos o seguinte resultado de grande utilidade no último capítulo.

**Proposição 1.0.1.** Se  $ad - bc \neq 0$ , então a matriz  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  é invertível e sua inversa é dada por:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & \frac{-b}{ad - bc} \\ \frac{-c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

#### 2.1 Fatos Históricos

O surgimento dos números complexos não ocorreu de uma hora para outra, nem de um dia para outro, anos e anos se passaram, e grandes matemáticos contribuíram para a sua descoberta. Antes do século XVI, os matemáticos não conseguiam solucionar equações do tipo  $x^2 + 5 = 0$ , pois não existia, nessa época, a raiz quadrada de um número negativo. Anos mais tarde, matemáticos verificaram que em equações do 3º grau acontecia o mesmo problema com raízes de números negativos. Matemáticos europeus começaram a pesquisar e desenvolver teorias para a resolução de equações de 2º e 3º graus, tais como:

- **Scipione Del Ferro:** Teoria para solucionar equações da forma  $x^3 + px + q = 0$  porém, não publicou;
- **Antônio Maria Fior:** De Scipione, ampliou para equações da forma  $x^3 + px^2 + q = 0$ ;
- **Niccolò Fontana:** Conhecido como Tartaglia, foi desafiado por Antônio Maria Fior para resolver 30 equações do 3º grau e ele conseguiu;
- **Girolamo Cardano:** Implorou a Tartaglia que revelasse a fórmula de resolução de equação do 3º grau mas, Tartaglia não revelou. E, de tanto insistir, Tartaglia revelou sobre um acordo de que Cardano não divulgasse o resultado, entretanto, Cardano não cumpriu

o acordo e, em 1545 publicou no livro "Ars Magna", o seguinte problema: "Determinar dois números cuja soma seja 10 e o produto seja 40". Sobre Tartaglia, Cardano fez somente uma menção. Essa fórmula ficou conhecida como "Fórmula de Cardano" até hoje;

- **Rafael Bombelli:** Da solução de Cardano, Bombelli chamou  $\sqrt{-1}$  de número "imaginário" e fez regras que utilizassem esse número;
- **René Descartes:** Escreveu: "Nem sempre as raízes verdadeiras (positivas) ou falsas (negativas) de uma equação são reais. Às vezes elas são imaginárias", frase do livro "Géométrie". Esta citação definiu que  $\sqrt{-1}$  fosse chamado de imaginário e, de acordo com as regras da álgebra, esse imaginário pudesse ser manipulado;
- **Abraham de Moivre:** O Teorema de Moivre:  $(\cos \theta + i \cdot \sin \theta)^n = \cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)$ . Esta fórmula relaciona trigonometria com números complexos;
- **Leonhard Euler:** Utilizou o símbolo  $i$  pela primeira vez para representar  $\sqrt{-1}$ . Mostrou também, que nos complexos, quaisquer aplicações de operação transcendente resulta sempre em um complexo e, portanto, é um corpo fechado;
- **Carl Friedrich Gauss:** Introduziu a expressão número complexo, em 1832. Desenvolveu um estudo de representação geométrica dos números complexos;
- **William Rowan Hamilton:** Em 1837, visualizou os complexos como par ordenado de números reais e das definições geométricas de Gauss as reescreveu na forma algébrica.

Foi o matemático Leonhard Euler que tratou os Complexos na forma  $z = a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i^2 = -1$ .

A seguir listamos alguns matemáticos importantes no processo do surgimento dos números complexos.



Figura 2.1: Tartaglia. Fonte: Desciclopédia



Figura 2.2: Cardano. Fonte: Wikipédia

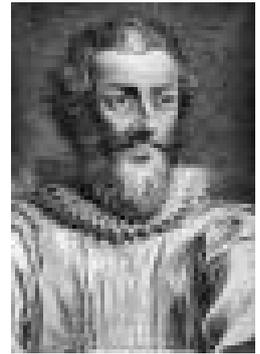


Figura 2.3: Bombelli. Fonte: [www.pinterest.com](http://www.pinterest.com)



Figura 2.4: Euler. Fonte: Wikipédia



Figura 2.5: Gauss. Fonte: Wikipédia

## 2.2 Forma Algébrica

Um número complexo é um número que pode ser escrito na forma  $z = x + yi$  onde  $x$  e  $y$  são números reais e  $i$  é a unidade imaginária. O número real  $x$  é a parte real do número complexo  $z$  e o número real  $y$  é a parte imaginária do número complexo  $z$ , denotadas por:  $x = \text{Re}(z)$  e  $y = \text{Im}(z)$ . O conjunto dos números complexos é denotado pela letra  $\mathbb{C}$ .

Dado os números complexos  $z = x_1 + y_1i$  e  $w = x_2 + y_2i$ , definimos a igualdade, a adição e o produto entre eles por:

$$z = w \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ e } y_1 = y_2,$$

$$z + w = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$z.w = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i.$$

O conjunto dos números complexos munido das operações de adição e multiplicação é um corpo, onde o elemento neutro da adição é o número complexo  $0+0i$ , o oposto de  $z = x+yi$  é  $-z := -x-yi$  e o inverso multiplicativo  $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$ . Para um melhor detalhamento sobre a estrutura de corpos veja a referência [8].

Um complexo da forma  $z = x + yi$ , pode ser representado no plano cartesiano, como um ponto (par ordenado). Então, a abscissa  $x$ , desse ponto, é a parte real do número complexo  $z$  no eixo  $OX$  e a ordenada  $y$ , a parte imaginária do número complexo  $z$  no eixo  $OY$ , sendo que o número complexo  $0 = 0 + 0i$  é representado pela própria origem  $(0, 0)$  do sistema.

O gráfico abaixo nos mostra a representação do número Complexo  $z = x + yi$ .

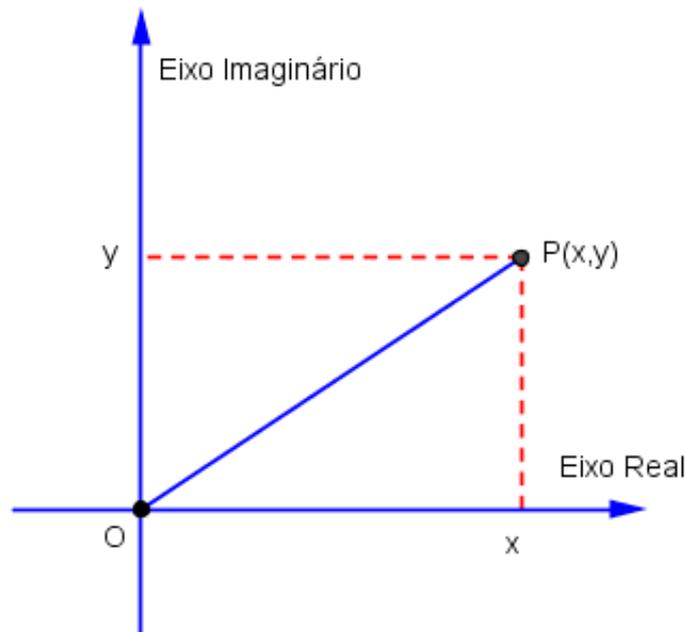


Figura 2.6: Representação Geométrica de  $z = x + yi$

O conjugado de um número complexo  $z = x + yi$  será representado por  $\bar{z} = x - yi$  e o seu posicionamento em relação ao complexo  $z$  é de simetria em relação ao eixo real.

Vejam os gráficos abaixo a representação do complexo  $\bar{z} = x - yi$  a partir do complexo  $z = x + yi$ .

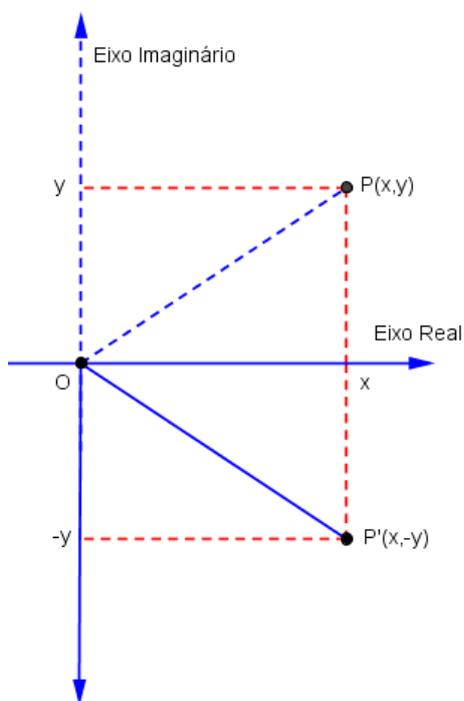


Figura 2.7: Representação Geométrica de  $\bar{z} = x - yi$

Analisando a figura 2.6, a norma do vetor  $\vec{OP}$  é dado por  $\|\vec{OP}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Definimos então,  $|z| = \|\vec{OP}\|$ , dado o número complexo  $z = x + yi$ , como módulo de  $z$ . Uma outra notação é  $\rho = |z|$ , onde  $\rho$  é um real não negativo.

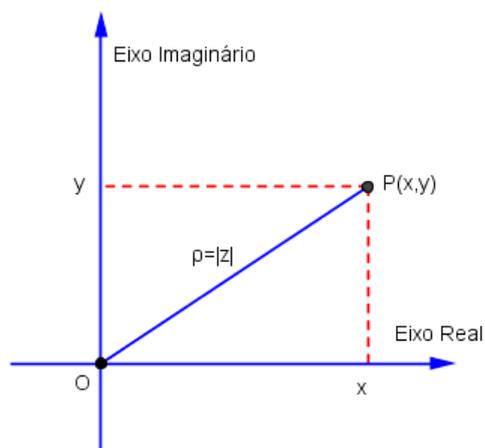


Figura 2.8: Representação Geométrica de  $|z|$

## 2.3 Geometria das operações em $\mathbb{C}$

### 2.3.1 Adição

Dados os números complexos  $z_1 = x_1 + y_1i$  e  $z_2 = x_2 + y_2i$ , com  $z_1, z_2$  não nulos e  $z_1 \neq z_2$ . Sejam os pontos  $A_1(x_1, y_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3)$  e  $O(0, 0)$  no plano dos complexos, as respectivas representações de  $z_1, z_2, z_3$  e da origem, então os pontos  $A_1, A_2, A_3$  e  $O$  são os vértices de um paralelogramo. Tomando por base a figura 2.9, é fácil ver que esse fato decorre das congruências dos pares de triângulos retângulos

$$OPA_1, A_1A_2A_3 \text{ e } OQA_2, A_1KA_3$$

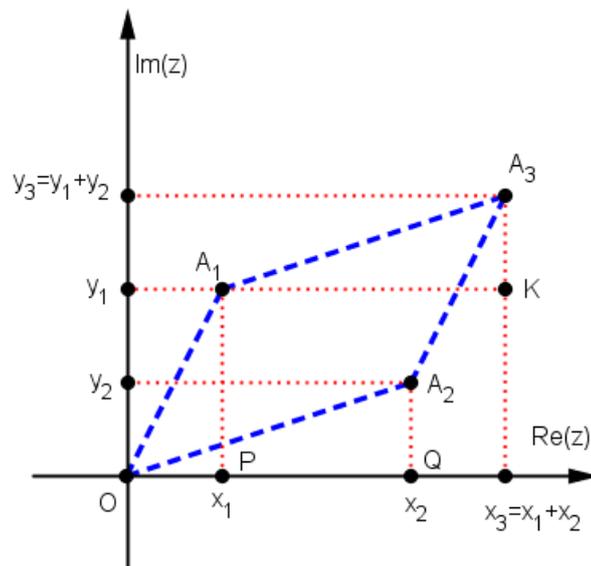


Figura 2.9: Paralelogramo:  $OA_1A_3A_2$

Note que  $z_1 + z_2$  é o vetor  $\overrightarrow{OA_3}$  que coincide com a diagonal  $OA_3$  do paralelogramo, cujos lados, são definidos pelos vetores  $\overrightarrow{OA_1}$  e  $\overrightarrow{OA_2}$ . Essa interpretação, mostrada na figura 2.10, é conhecida como Regra do Paralelogramo.

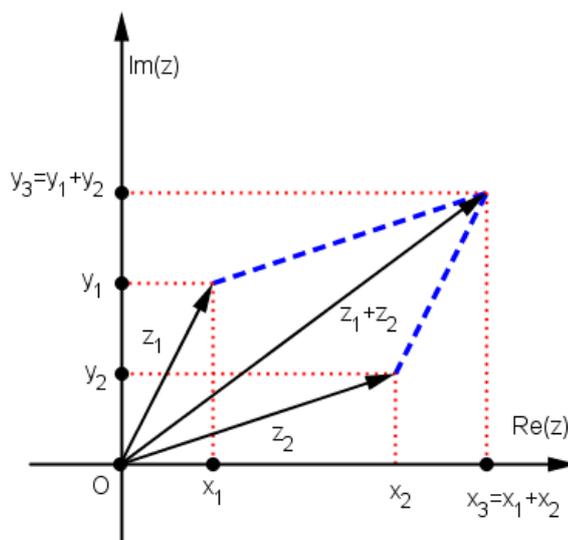


Figura 2.10: Regra do Paralelogramo.

É fácil ver que a regra do paralelogramo não é válida quando  $z_1$  e  $z_2$  são vetores de mesma direção ou pelo menos um dos dois é 0.

É fundamental para os objetivos desse TCC observarmos que o vetor  $z_1 + z_2$  é o resultado do deslocamento do vetor  $z_1$  segundo o vetor  $z_2$  ou do vetor  $z_2$  segundo o vetor  $z_1$ , em módulo, direção e sentido. A figura 2.11 ilustra essa observação.

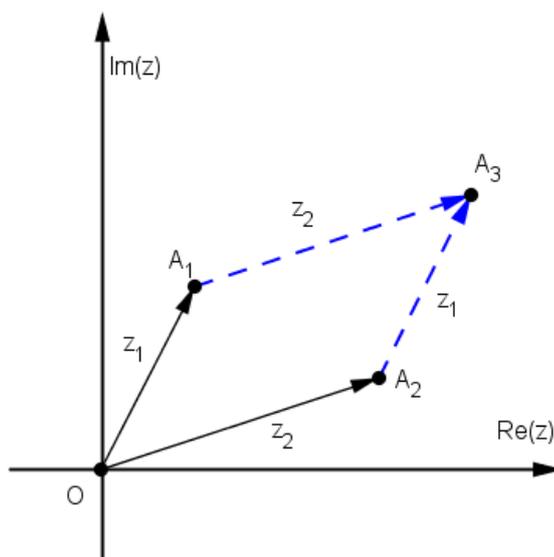


Figura 2.11: Adição de Números Complexos.

### 2.3.2 Multiplicação de Número Real por Número Complexo

Dado um número real  $r \neq 0$  e um número complexo  $z = x + yi \neq 0$ , é fácil provar que o vetor  $r \cdot z = r \cdot x + r \cdot yi$  tem a mesma direção do vetor  $z$ , tem módulo igual ao produto do módulo de  $r$  pelo módulo do vetor  $z$  e, se  $r < 0$  ( $0 < r$ ) seu sentido é contrário (mesmo sentido) ao do vetor  $z$ .

Vale observarmos que se  $r = 0$  ou  $z = 0$ , tem-se que  $r \cdot z$  é o ponto 0.

A figura 2.12 ilustra a geometria do produto  $r \cdot z$ .

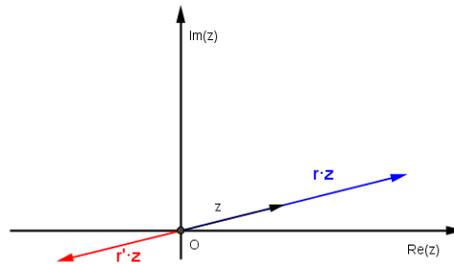


Figura 2.12:  $r' \cdot z$  e  $r \cdot z$  com  $r' < 0$  e  $r > 0$ .

### 2.3.3 Multiplicação

#### Forma Polar de um Número Complexo

O argumento principal do número complexo  $z$ ,  $\arg(z)$ , é o ângulo  $\theta$ , com  $0 \leq \theta < 2\pi$ , compreendido entre o eixo real  $OX$  e o segmento  $OP$  (figura 2.8). Se  $z$  é um complexo não nulo cujo argumento principal é  $\theta_0$ , então todos os ângulos congruentes a  $\theta_0$  serão argumentos de  $z$ , ou seja,

$$\theta = \arg(z) \Rightarrow \theta = \theta_0 + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

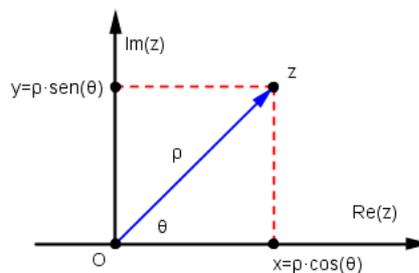


Figura 2.13: Forma Polar de  $z \neq 0$ .

Para  $z = x + yi$ , as seguintes condições são verificadas:

$$x = |z| \cdot \cos \theta, \quad y = |z| \cdot \sin \theta.$$

Dessa forma, obtemos o que chamamos a forma polar ou a forma trigonométrica do número complexo  $z$ , representada por

$$z = |z| \cdot (\cos \theta + i \cdot \sin \theta).$$

### Multiplicação na Forma Polar

Dados os complexos  $z_1 = |z_1| \cdot (\cos \theta_1 + i \cdot \sin \theta_1)$  e  $z_2 = |z_2| \cdot (\cos \theta_2 + i \cdot \sin \theta_2)$  temos

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i \cdot (\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)] \\ &= |z_1| \cdot |z_2| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Generalizando para  $n$  complexos, obtemos

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)].$$

Consequentemente,

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(\theta + \cdots + \theta) + i \cdot \sin(\theta + \cdots + \theta)],$$

donde

$$z^n = |z|^n \cdot [\cos(n \cdot \theta) + i \cdot \sin(n \cdot \theta)],$$

a qual é denominada **Primeira Fórmula de Moivre**.

Particularmente, segue de (2.3.1), que se  $z_2$  é unitário, o ponto

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

resulta da rotação do ponto  $z_1$  de um ângulo  $\theta_2$  em torno da origem  $O$ . Veja a figura 2.14 abaixo.

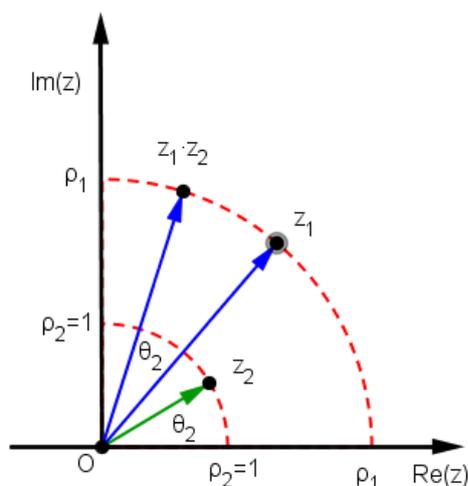


Figura 2.14:  $z_1 \cdot z_2, |z_2| = 1$ .

## 2.4 Forma Exponencial de z

É conhecido, dos cursos de Cálculo, que a expansão em série de Maclaurin para a função exponencial  $e^t$  é dada por

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Admitindo que podemos substituir  $t$  por  $iy$ , obtemos

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right). \end{aligned}$$

Estas duas séries são as expansões na série de Maclaurin para  $\cos y$  e  $\sin y$ , conseqüentemente, obtemos

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Dessa forma, para  $z = x + iy$ , definimos

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x \cdot (\cos y + i\sin y).$$

A relação  $e^{iy} = \cos y + i \sin y$  é chamada de **fórmula de Euler**. Desta maneira podemos escrever o complexo  $z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$  na forma  $z = \rho e^{i\theta}$ , onde  $\rho = |z|$ .

---

## Transformação Complexa

---

Uma **transformação complexa** é uma função  $T : D(T) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , onde  $D(T)$  denota o domínio de  $T$ . Quando nada é especificado, assumimos que o domínio da função  $T$  é o maior subconjunto de  $\mathbb{C}$  no qual  $T$  está bem definida.

Para  $z = x + iy \in D(T)$ , podemos escrever

$$T(x + iy) = u(x + iy) + iv(x + iy).$$

A função  $u$  é chamada de **parte real de  $T$** , enquanto a função  $v$  é chamada de **parte imaginária de  $T$** .

A seguir estudaremos algumas transformações complexas (Translação, Rotação e Homotetia: Contração e Dilatação) as quais são exemplos de transformações de Möbius, estudadas no próximo capítulo.

### 3.1 Translação

**Definição 3.1.1.** A *Translação* é uma transformação  $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $T(z) = z + w$ , onde  $w$  é um número complexo fixo.

Vale observar que, de acordo com a interpretação geométrica da adição, tem-se que, o ponto  $T(z)$  resulta do deslocamento do ponto  $z$  segundo o módulo, a direção e o sentido do

vetror  $w$ .

A translação de uma figura no campo dos complexos se dá adicionando algebricamente um número complexo, não nulo, a cada número complexo da figura associada. E, neste caso, há três formas de representação dessa translação:

- O número complexo é real e não nulo,  $z = x$ . A figura se desloca de forma horizontal.

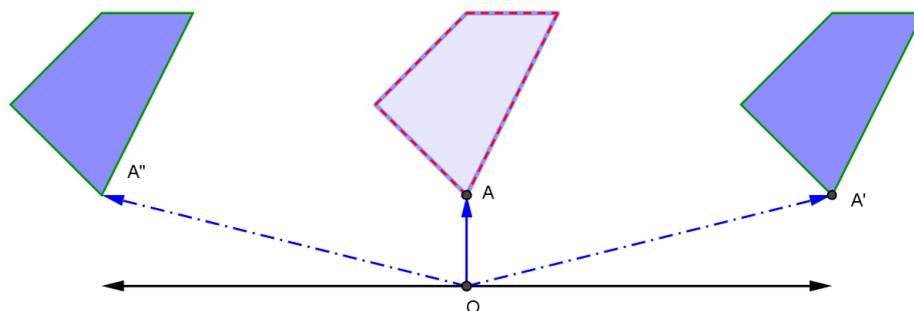


Figura 3.1: Translação Horizontal

- O número complexo é imaginário puro,  $z = iy$ . A figura se desloca de forma vertical.

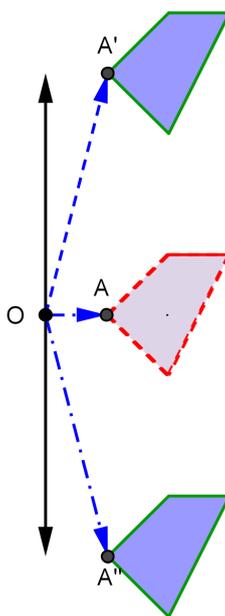


Figura 3.2: Translação Vertical

- O número é complexo com  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$ , então  $z = x + iy$ . A figura se desloca conforme o vetor correspondente ao número complexo, isto é, deslocamento horizontal seguido do deslocamento vertical se dá de acordo com direção, sentido e módulo do vetor. O sentido de deslocamento depende do sinal do coeficiente do vetor correspondente.

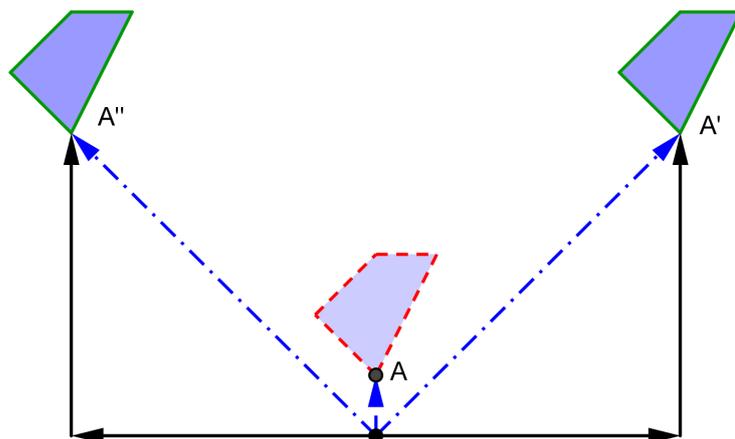


Figura 3.3: Translação Inclinada

**Exemplo 3.1.1.** Sejam  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$  e  $z_3 = 3 + 2i$ , três números complexos, formando os vértices de um triângulo e  $b = 4 + 3i$ . Consideremos a translação  $T(z) = z + b$ . Então

$$T(z_1) = 5 + 5i, \quad T(z_2) = 6 + 6i, \quad T(z_3) = 7 + 5i.$$

Cada vértice do triângulo sofreu um deslocamento igual a 5 que corresponde  $|b|$ .

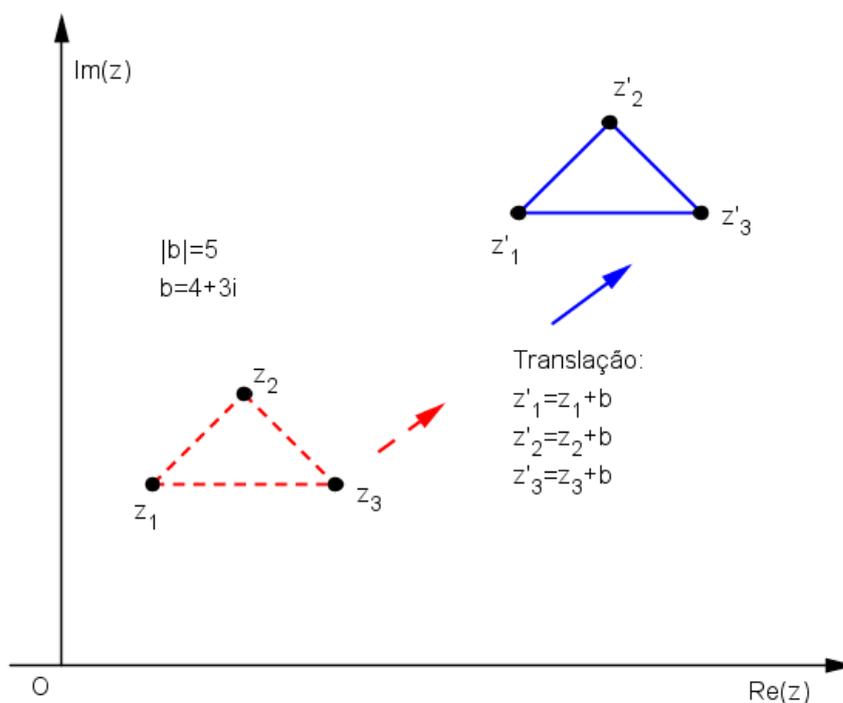


Figura 3.4: Exemplo de Translação

## 3.2 Rotação

**Definição 3.2.1.** A rotação é uma transformação  $R : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $R(z) = w \cdot z$ , onde  $w$  é um número complexo fixo com  $|w| = 1$ .

**Observação 3.2.1.** Seja  $\theta$  um ângulo tal que  $w = \cos(\theta) + i \cdot \text{sen}(\theta) = e^{i\theta}$ , então podemos escrever

$$R(z) = z \cdot e^{i\theta}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Se  $z = \rho \cdot [\cos(\phi) + i \cdot \text{sen}(\phi)]$ , então o produto de  $z$  por  $w$  é

$$z \cdot w = \rho \cdot [\cos(\phi + \theta) + i \cdot \text{sen}(\phi + \theta)].$$

Dessa forma,  $w \cdot z$  é o resultado da rotação de  $z$  de ângulo  $\theta$  em torno da origem  $O$ .

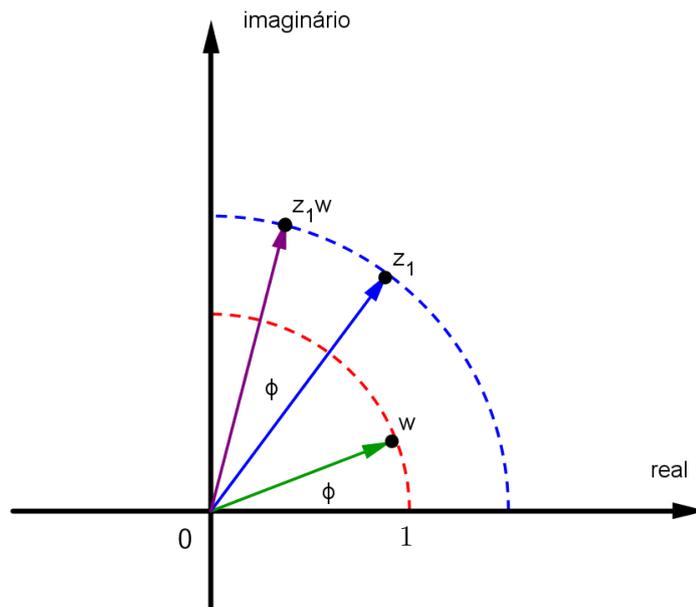


Figura 3.5: Rotação ( $z \cdot w$ ,  $w = e^{i\phi}$ )

Analisemos a rotação de uma desigualdade  $ax + by + c \geq 0$  com o ângulo de rotação  $\theta$  e o eixo real.

Sejam  $z = x + yi$  e  $k = e^{i\theta}$ , Então

$$z \cdot k = (x + yi) \cdot (\cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta) = (x\cos\theta - y\text{sen}\theta) + (x\text{sen}\theta + y\cos\theta) \cdot i.$$

Aplicando  $z \cdot k$  na desigualdade  $ax + by + c \geq 0$ , temos

$$a(x\cos\theta - y\sin\theta) + b(x\sin\theta + y\cos\theta) + c \geq 0$$

$$(a\cos\theta + b\sin\theta)x + (b\cos\theta - a\sin\theta)y + c \geq 0.$$

Fazendo

$$\alpha = a\cos\theta + b\sin\theta,$$

$$\beta = b\cos\theta - a\sin\theta,$$

$$\omega = c,$$

obtemos

$$\alpha x + \beta y + \omega \geq 0.$$

Assim, basta que tenhamos o ângulo de rotação e a desigualdade (neste caso) para determinar a rotação.

**Exemplo 3.2.1.** Sejam a desigualdade  $2x + 3y - 2 \geq 0$  e o ângulo de rotação  $\theta = 30^\circ$ .

Fazendo as substituições em

$$\alpha = a\cos\theta + b\sin\theta,$$

$$\beta = b\cos\theta - a\sin\theta,$$

$$\omega = c.$$

Temos

$$\alpha = \sqrt{3} + \frac{3}{2}, \beta = \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1, \omega = -2.$$

E substituindo em

$$\alpha x + \beta y + \omega \geq 0.$$

Temos a desigualdade

$$\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)x + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 1\right)y - 2 \geq 0.$$

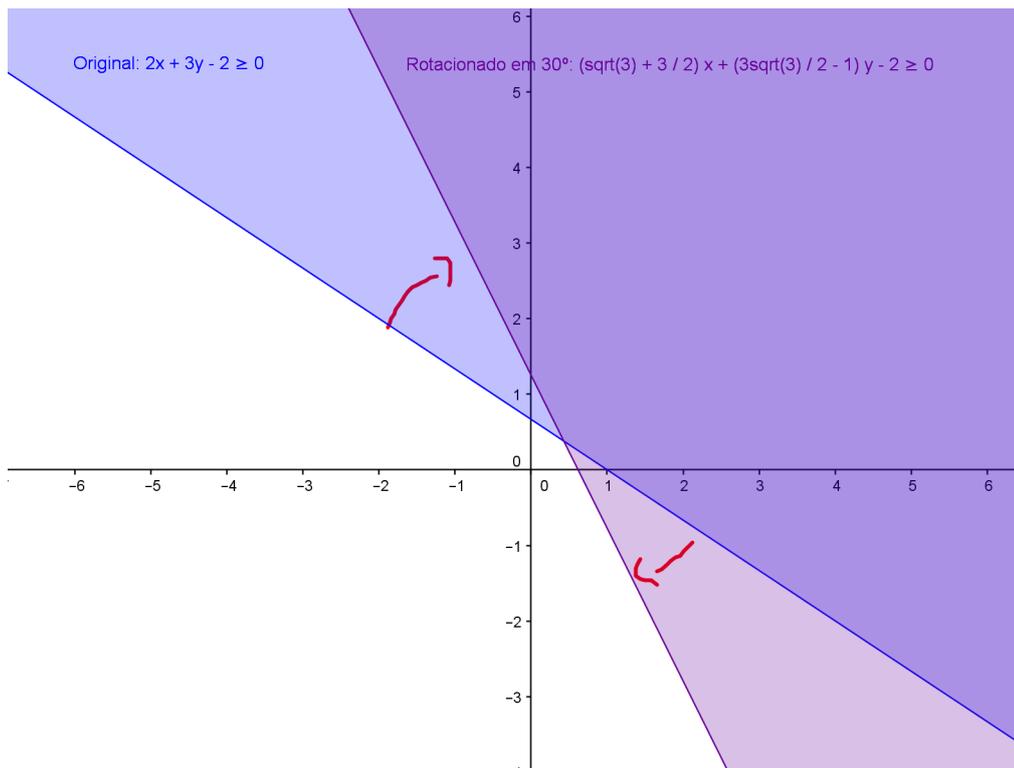


Figura 3.6: Desigualdade Rotacionada

**Exemplo 3.2.2.** Sejam  $ABC$  e  $\alpha = 150^\circ$  um triângulo e o ângulo de rotação, respectivamente, onde  $A = 10 + 2i$ ,  $B = 4 - 2i$  e  $C = 15 + 3i$  são os vértices desse triângulo no plano. Para determinar a rotação do triângulo  $ABC$ , basta multiplicar os complexos  $A$ ,  $B$  e  $C$  por  $\cos(150^\circ) + i\sin(150^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ . Assim:  $D = (-5\sqrt{3} - 1) + (5 - \sqrt{3})i$ ,  $E = (1 - 2\sqrt{3}) + (2 + \sqrt{3})i$ , e  $F = (\frac{-15\sqrt{3} - 3}{2}) + (\frac{15 - 3\sqrt{3}}{2})i$  são os complexos e vértices do triângulo  $DEF$  rotacionado do triângulo  $ABC$ .

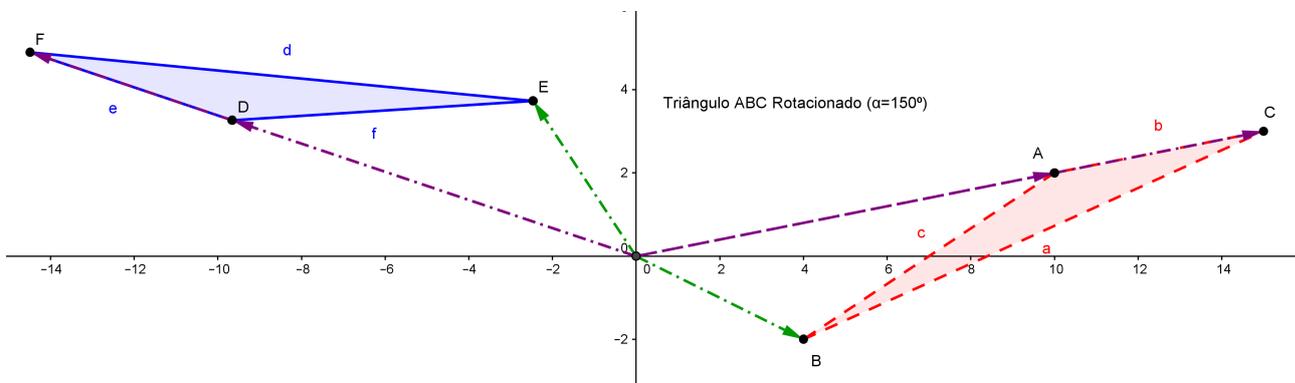


Figura 3.7: Rotação de Triângulo

### 3.3 Homotetia: Dilatação e Contração

**Definição 3.3.1.** A **homotetia** é uma transformação  $H : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $H(z) = a \cdot z$ , onde  $a$  é um número real com  $|a| \neq 1$ .

Homotetias são transformações que, a partir de um ponto fixo "O" e de uma razão "k" (neste caso, "a") produzem figuras ou imagens semelhantes mas, com medidas distintas. A propriedade das homotetias é usada para dilatar ( $|a| > 1$ ) ou contrair ( $0 < |a| < 1$ ) o tamanho de figuras diversas.

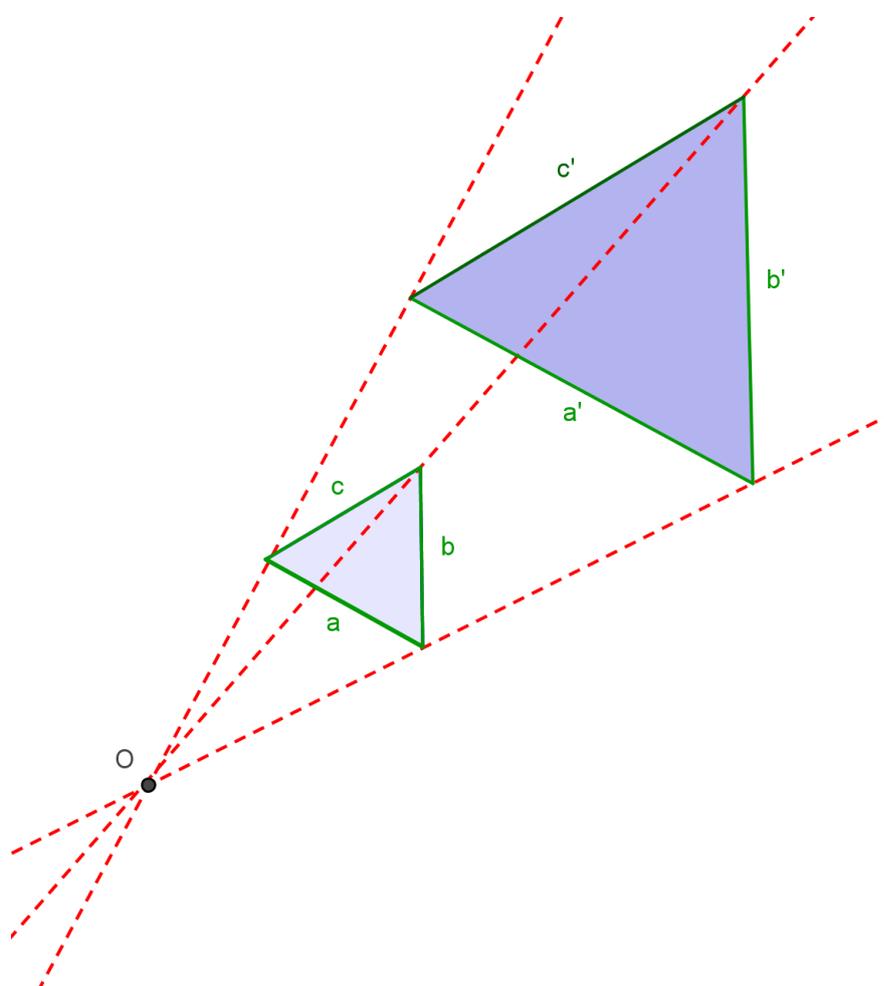


Figura 3.8: Homotetia: Dilatação

Temos na figura 3.8, um triângulo que foi dilatado, ou seja, ampliado proporcionalmente seus lados homólogos ( lados correspondentes dos dois triângulos) a partir do ponto (origem), e portanto,  $|a| > 1$ .

E, sendo,  $|a| < 1$  temos uma contração, conforme a figura 3.9.

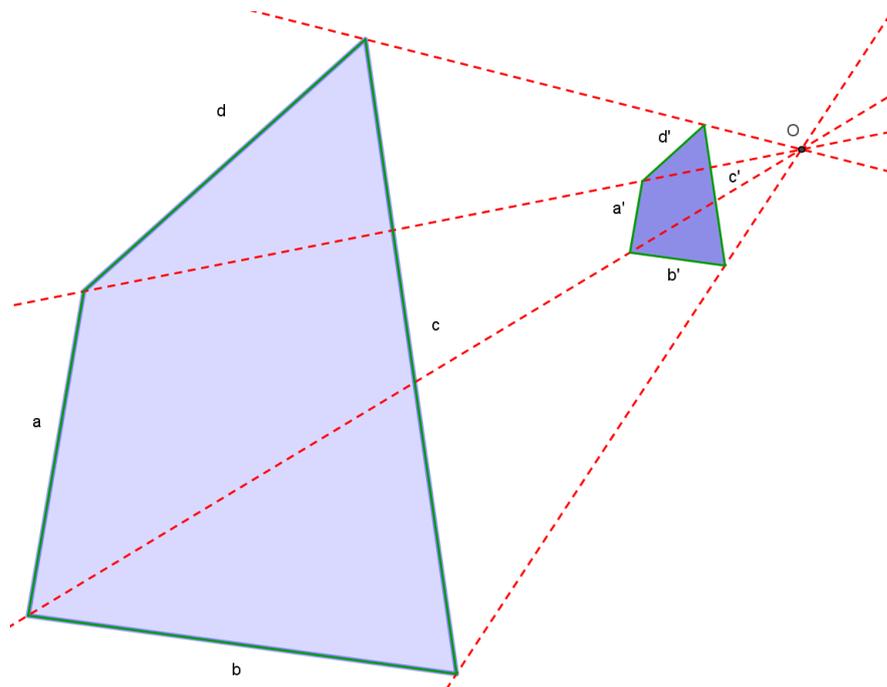


Figura 3.9: Homotetia: Contração

---

### Transformação de Möbius

---

#### 4.1 August Ferdinand Möbius

Um breve histórico sobre o matemático August Ferdinand Möbius (1790 - 1868).



Figura 4.1: August Ferdinand Möbius Fonte: [www.brittanica.com](http://www.brittanica.com)

Filho de um professor de dança e descendente de Martin Luther (Fundador do Protestantismo) por parte de mãe. Estudou em sua própria casa até os treze anos de idade e entrou na faculdade em 1803, formando-se em 1809. Apesar de sua família querer que ele se formasse em Direito, ele preferiu estudar Matemática, Astronomia e Física.

Em Leipzig, durante sua estada, teve influência do professor, astrônomo e matemático, Karl Mollweide, conhecido por uma série de descobertas, principalmente, no campo da trigonometria. Em 1813, Möbius viajou para Göttingen, e lá, estudou astronomia sob orientação de Gauss, considerado, o maior matemático daquele tempo. Escreveu sua tese de doutorado, "A

Ocultação de Estrelas Fixas", escrito em Latim com título original: "De Occultationibus Fixarum por Planetas" em 1815. Seu pós-doutorado foi sobre Equações Trigonômicas. Ocupou a cadeira de Astronomia e Mecânica Superiores em 1816 na Universidade de Leipzig.

As principais obras foram: "Die Lineare Ausdehnungslehre, Ein Neuer Zweig der Mathematik (A Teoria da Expansão Linear, Um Novo Ramo da Matemática) (1844); Die Astronomie der Hauptsätze (Os Princípios Fundamentais da Astronomia) (1836) e Die Elemente der Mechanik des Himmels (Os Elementos de Mecânica Celeste) (1843). Outras grandes obras e artigos, como: Der Barycentrische Calcul (O Cálculo Baricentro) (1827); Über Eine Besondere Art Von der Umkehrung Reihen (Em Uma Forma Especial de Série Inversa) (1831); Lehrbuch der Statik (Texto Estático) (1837); entre tantos outros.

A faixa de Möbius é uma superfície não orientada e, com certeza, um dos seus trabalhos mais conhecidos e que aparece frequentemente na cultura popular. Consiste em colar as suas extremidades dando uma volta em uma delas.



Figura 4.2: Faixa de Möbius Fonte: Wikipédia

Teríamos mais a mostrar sobre a história de Möbius, mas já foi suficiente essas explicações.

## 4.2 Definição e Propriedades

**Definição 4.2.1.** *Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números complexos com  $ad - bc \neq 0$  e  $z = x + yi$  com  $x, y \in \mathbb{R}$ , então a função complexa definida por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.2.1)$$

é chamada uma **transformação de Möbius**.

A condição  $ad - bc \neq 0$  garante que:

- i)  $f(z)$  existe, pois  $c, d \neq 0$ ;
- ii)  $f(z)$  não é constante.

**Teorema 4.2.1.** *Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números complexos com  $ad - bc \neq 0$  e considere a transformação de Möbius  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Então  $f$  é uma composição de um número finito de translações, homotetias (dilatações e contrações) e inversões.*

**Demonstração:** Temos dois casos a considerar:

- i) se  $c = 0$ ,  $T(z) = f_2 \circ f_1(z)$ , onde  $f_1(z) = \frac{a}{d}z$  é uma homotetia (dilatação ou contração) e  $f_2(z) = z + \frac{b}{d}$  uma translação;
- ii) se  $c \neq 0$ ,  $T(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$ , onde  $f_1(z) = z + \frac{d}{c}$ ,  $f_2(z) = \frac{1}{z}$ ,  $f_3(z) = \frac{bc-ad}{c^2}z$  e  $f_4(z) = z + \frac{a}{c}$ .

■

**Observação 4.2.1.** Note que a translação, a rotação e a homotetia (dilatação ou contração) são casos particulares de transformação afim,  $T_A(z) = az + b$ . Observe também que

$$T(z) = \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} + \frac{a}{c}.$$

Dessa forma, definindo  $S_A(z) = \alpha z + \beta$  e  $R_A(z) = cz + d$ , onde  $\alpha = \frac{bc-ad}{c}$  e  $\beta = \frac{a}{c}$ , verificamos que  $T = S_A \circ f \circ R_A$ , com  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

Se  $c \neq 0$  escrevamos  $T$  como

$$T(z) = g(z) \cdot \frac{1}{z + \frac{d}{c}},$$

onde  $g(z) = \frac{1}{c} \cdot (az + b)$ . Como  $ad - bc \neq 0$ , vemos que  $g(-\frac{d}{c}) \neq 0$  e portanto

$$\lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} T(z) = \infty.$$

Ainda, vemos que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(z) = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Assim, usando estas duas últimas relações, podemos definir  $T$  em todo o plano complexo estendido (isto é, o plano complexo unido com o símbolo  $\infty$ ) da seguinte maneira

$$T(z) = \begin{cases} \frac{az + b}{cz + d}, & \text{se } z \neq -\frac{d}{c}, z \neq \infty \\ \infty, & \text{se } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{c}{a}, & \text{se } z = \infty. \end{cases}$$

**Proposição 4.2.1.** *Transformações lineares afins transformam retas em retas e círculos em círculos.*

**Demonstração:** Seja  $T_A(z) = az + b$  uma transformação linear afim e

$$S_r(c) = \{z \in \mathbb{C}; |z - c| = r\}$$

um círculo de raio  $r$  e centro  $c$ . Afirmamos que  $T_A(S_r(c)) = S_{|a|r}(T_A(c))$ . De fato, se  $w \in T_A(S_r(c))$ , então  $w = T_A(z)$  para algum  $z \in S_r(c)$ . Assim,

$$|w - T_A(c)| = |T_A(z) - T_A(c)| = |az + b - (ac - b)| = |a|r,$$

mostrando que  $T_A(S_r(c)) \subset S_{|a|r}(T_A(c))$ . Agora, seja  $w \in S_{|a|r}(T_A(c))$ . Então,  $|w - T_A(c)| = |a|r$ , ou seja,

$$|w - ac - b| = |a|r.$$

Seja  $z = \frac{w - b}{a}$ . Então,  $T_A(z) = w$  e  $|z - c| = \left| \frac{w - b}{a} - c \right| = r$ , mostrando que  $S_{|a|r}(T_A(c)) \subset T_A(S_r(c))$ .

Para mostrar que transformações afins transformam retas em retas, considere a reta

$$r(t) = t + i(\alpha t + \beta), \quad t \in \mathbb{R},$$

em  $\mathbb{C}$ . Então, para  $t \in \mathbb{R}$ , temos

$$T_A(r(t)) = ar(t) + b = a[t + i(\alpha t + \beta)] + b = at + b + i(a\alpha t + a\beta),$$

que é uma reta em  $\mathbb{C}$ .

■

Para termos um estudo de como retas e círculos se comportam sob a ação de transformações de Möbius, primeiramente vamos estudar este comportamento considerando a inversão de Möbius  $f(z) = \frac{1}{z}$ .

### 4.2.1 Inversão de Möbius

Seja  $z = \alpha + \beta i$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então, da inversão de Möbius,  $f(z) = \frac{1}{z}$ , temos

$$w = f(z) = \frac{1}{\alpha + \beta i} = \frac{1}{\alpha + \beta i} \cdot \frac{\alpha - \beta i}{\alpha - \beta i} = \frac{\alpha - \beta i}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \cdot i.$$

Assim,  $w = u + vi$ , onde  $u = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}$  é a parte real e  $v = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$  a parte imaginária do complexo  $w$ .

A inversão pode, de forma particular, modificar determinadas curvas, transformando-as em outras curvas e/ou retas distintas ou não. Vejamos, por exemplo, o seguinte conjunto:

$$W = \{z = \alpha + \beta i; a(\alpha^2 + \beta^2) + b\alpha + c\beta + d = 0\},$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Observe que:

- Se  $a \neq 0$ , então,  $W$  é uma circunferência ou um conjunto vazio;
- Se  $a = 0$ , então,  $W$  é uma reta ou um conjunto vazio.

Sendo  $z = \alpha + \beta i$  e  $\bar{z} = \alpha - \beta i$ , temos:  $z + \bar{z} = 2\alpha$ ,  $z \cdot \bar{z} = \alpha^2 + \beta^2$ ,  $z - \bar{z} = 2\beta i$ . Substituindo em  $W$ , obtemos

$$W = \{a(z \cdot \bar{z}) + \frac{b}{2}(z + \bar{z}) + \frac{c}{2i}(z - \bar{z}) + d = 0\}$$

Aplicando a Inversão sobre  $W$  com  $z = \frac{1}{k}$  e  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{k}}$  obtém-se a imagem

$$f(W) = \{k \in \mathbb{C}; \frac{a}{k\bar{k}} + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\bar{k}}\right) + \frac{c}{2i}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\bar{k}}\right) + d = 0\}.$$

E se multiplicarmos a imagem de  $W$  por  $k\bar{k}$ , teremos

$$f(W) = \{k \in \mathbb{C}; a + \frac{b}{2}(\bar{k} + k) + \frac{c}{2i}(\bar{k} - k) + d(k\bar{k}) = 0\}.$$

E ainda, substituindo  $k$  por  $\alpha + \beta i$ , teremos

$$f(W) = \{k = \alpha + \beta i, k \in \mathbb{C}; a + b\alpha - c\beta + d(\alpha^2 + \beta^2) = 0\}.$$

Enfim, com o que foi exposto acima, demonstramos a seguinte proposição.

**Proposição 4.2.2.** *Seja  $f(z) = \frac{1}{z}$  a inversão de Möbius. Então:*

1. *Toda circunferência que passa pela origem ( $d = 0$  e  $a \neq 0$ ) é transformada, pela inversão, em uma reta que não passa pela origem;*
2. *Toda circunferência que não passa pela origem ( $d \neq 0$  e  $a \neq 0$ ) é transformada, pela inversão, em uma circunferência que não passa pela origem;*
3. *Toda reta que não passa pela origem ( $a = 0$  e  $d \neq 0$ ) é transformada, pela inversão, em uma circunferência que passa pela origem;*
4. *Toda reta que passa pela origem ( $a = 0$  e  $d = 0$ ) é transformada, pela inversão, em uma reta que passa pela origem.*

**Exemplo 4.2.1.** Considere  $\beta : x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$  a circunferência de centro  $C(1, -4)$  e raio  $r = 3$  que não passa pela origem. Aplicando a inversão, onde  $a = 1 \neq 0$ ,  $b = -2$ ,  $c = 8$  e  $d = 8$ , onde

$$W = \{z = u + vi; 1(u^2 + v^2) - 2u + 8v + 8 = 0\}.$$

Então teremos  $f(W)$  como a imagem dada por:

**Solução:**

$$\begin{aligned} f(W) &= \{w \in \mathbb{C}; w = u + vi; 8(u^2 + v^2) - 2u - 8v + 1 = 0\} \\ &= \{8(u^2 + v^2) - 2u - 8v + 1 = 0\} \\ &= \left\{8\left(u^2 - \frac{1}{4}u + \frac{1}{64}\right) - \frac{1}{8} + 8\left(v^2 - v + \frac{1}{4}\right) - 2 + 1 = 0\right\} \\ &= \left\{\left(u - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{64}\right\}, \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Ou seja, uma circunferência que não passa na origem e que tem raio  $r = \frac{3}{8}$ .

**Exemplo 4.2.2.** Considere  $\gamma : 7x - 9y + 3 = 0$  a reta que não passa na origem. Assim,

$a = 0, b = 7, c = -9$  e  $d = 3$ , onde

$$W = \{z = u + vi; 0 \cdot (u^2 + v^2) + 7u - 9v + 3 = 0\}$$

Então, a imagem é:

**Solução:**

$$\begin{aligned} f(W) &= \{w \in \mathbb{C}; w = u + vi; 3(u^2 + v^2) + 7u - (-9)v = 0\} \\ &= \left\{ \left(u + \frac{7}{6}\right)^2 + \left(v + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{130}{36} \right\}, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

ou seja, uma circunferência que passa na origem e tem raio  $r = \frac{\sqrt{130}}{6}$ .

**Observação 4.2.2.** Uma outra forma de provar a proposição 4.2.2 é considerando a fórmula de Euler. Para isso, seja  $z = \alpha + \beta i$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Então,

$$e^z = e^{\alpha + \beta i} = e^\alpha \cdot e^{\beta i} = e^\alpha \cdot (\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta).$$

Se  $\alpha = 0$ , obtemos a fórmula de Euler

$$e^{\beta i} = \cos\beta + i\operatorname{sen}\beta.$$

Assim, podemos escrever  $z = |z| \cdot e^{\beta i}$ .

**Demonstração:** Seja  $z = \cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta$ . Então da inversão de Möbius,  $f(z) = \frac{1}{z}$ , obtemos

$$w = f(z) = \frac{1}{\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta} = \frac{1}{\cos\beta + i\operatorname{sen}\beta} \cdot \frac{\cos\beta - i\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta - i \cdot \operatorname{sen}\beta} = \cos\beta - i\operatorname{sen}\beta.$$

Assim,  $w = u + vi$ , onde  $u = \cos\beta$  é a parte real e  $v = -\operatorname{sen}\beta$  é a parte imaginária do complexo  $w$ . Dessa forma, seguindo o mesmo raciocínio anterior, temos da mesma forma, o seguinte conjunto

$$\begin{aligned} W &= \{z = \cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta; a(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) + b\cos\beta + c\operatorname{sen}\beta + d = 0\} \\ &= \{z = \cos\beta + i\operatorname{sen}\beta; a + b\cos\beta + c\operatorname{sen}\beta + d = 0\}, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ . Observe que:

- Se  $a \neq 0$ , então,  $W$  é uma circunferência ou um conjunto vazio;
- Se  $a = 0$ , então,  $W$  é uma reta ou um conjunto vazio.

Se  $z = \cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta$  e  $\bar{z} = \cos\beta - i \operatorname{sen}\beta$ , temos

$$z + \bar{z} = 2 \cos \beta, \quad z \cdot \bar{z} = \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1, \quad z - \bar{z} = -2i \cdot \operatorname{sen}\beta.$$

Substituindo em  $W$ , obtemos

$$W = \left\{ a(z \cdot \bar{z}) + \frac{b}{2}(z + \bar{z}) + \frac{c}{2i}(z - \bar{z}) + d = 0 \right\}.$$

Aplicando a inversão sobre  $W$  com  $z = \frac{1}{k}$  e  $\bar{z} = \frac{1}{\bar{k}}$  obtém-se a imagem

$$f(W) = \left\{ k \in \mathbb{C}; \frac{a}{k\bar{k}} + \frac{b}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{\bar{k}}\right) + \frac{c}{2i}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{\bar{k}}\right) + d = 0 \right\}.$$

E se multiplicarmos a imagem de  $W$  por  $k\bar{k}$ , teremos

$$f(W) = \left\{ k \in \mathbb{C}; a + \frac{b}{2}(\bar{k} + k) + \frac{c}{2i}(\bar{k} - k) + d(k\bar{k}) = 0 \right\}.$$

Substituindo  $k$  por  $\cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta$ , concluímos que

$$\begin{aligned} f(W) &= \{k = \cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta, k \in \mathbb{C}; a + b\cos\beta - c\operatorname{sen}\beta + d(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) = 0\} \\ &= \{k = u + iv, k \in \mathbb{C}; a + bu - cv + d(u^2 + v^2) = 0\}. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

■

**Exemplo 4.2.3.** Considere  $\beta : x^2 + y^2 - 2x + 8y + 8 = 0$  a circunferência de centro  $C(1, -4)$  e raio  $r = 3$  que não passa pela origem. Aplicando a inversão, onde  $a = 1 \neq 0, b = -2, c = 8$  e  $d = 8$ , onde

$$W = \{z = u + vi; 1(u^2 + v^2) - 2u + 8v + 8 = 0\}.$$

Então teremos  $f(W)$  como a imagem dada por:

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 f(W) &= \{w = \cos\beta + i \cdot \operatorname{sen}\beta; 8(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) - 2\cos\beta - 8\operatorname{sen}\beta + 1 = 0\} \\
 &= \{8(u^2 + v^2) - 2u - 8v + 1 = 0\} \\
 &= \left\{ \left(u - \frac{1}{8}\right)^2 + \left(v - \frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Portanto, temos uma circunferência que não passa na origem e que tem raio  $r = \frac{3}{8}$ .

**Exemplo 4.2.4.** Considere  $\gamma : 7x - 9y + 3 = 0$  a reta que não passa na origem. Assim,  $a = 0, b = 7, c = -9$  e  $d = 3$ , onde

$$W = \{z = u + vi; 0 \cdot (u^2 + v^2) + 7u - 9v + 3 = 0\}$$

Então, a imagem é:

**Solução:**

$$\begin{aligned}
 f(W) &= \{w = \cos\beta + i\operatorname{sen}\beta; 3(\cos^2\beta + \operatorname{sen}^2\beta) + 7\cos\beta - (-9)\operatorname{sen}\beta = 0\} \\
 &= \{3(u^2 + v^2) + 7u + 9v = 0\} \\
 &= \left\{ \left(u + \frac{7}{6}\right)^2 + \left(v + \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{130}{36} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Portanto, temos uma circunferência que passa na origem e tem raio  $r = \frac{\sqrt{130}}{6}$ .

### 4.3 Transformação de Círculos e Retas

Combinando O Teorema 4.2.1 juntamente com as proposições 4.2.1 e 4.2.2 temos demonstrado o seguinte teorema.

**Teorema 4.3.1.** Seja  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  uma transformação de Möbius. Então:

1. Se  $S$  é um círculo, a imagem de  $S$  por  $T$  é ou um círculo ou uma reta no plano estendido. A imagem é uma reta se, e somente se,  $c \neq 0$  e o ponto  $z = \frac{-d}{c}$  está  $S$ ;
2. se  $r$  é uma reta, a imagem de  $r$  por  $T$  é ou uma reta ou um círculo no plano estendido. A imagem é um círculo se, e somente se,  $c \neq 0$  e o ponto  $z = \frac{-d}{c}$  não está na reta  $r$ .

Além disso, se fixarmos três pontos  $z_1, z_2, z_3$  em  $\mathbb{C}$  (ou em  $r$ ) e especificarmos  $T(z_1), T(z_2)$  e  $T(z_3)$ , a transformação  $T$  é única.

**Exemplo 4.3.1.** Encontre a imagem do círculo unitário  $|z| = 1$  pela transformação de Möbius  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ .

**Solução:** O ponto  $z = -\frac{d}{c} = 1$  está no círculo unitário  $|z| = 1$ , então pelo Teorema 4.3.1 a imagem deste círculo é uma reta. Como qualquer reta é determinada por dois pontos, encontremos dois valores na imagem de  $T$  para encontrá-la. Temos  $T(-1) = -\frac{1}{2}$  e  $T(i) = -\frac{1}{2} - i\frac{3}{2}$ , logo a imagem de  $T$  é a reta  $r = \{-\frac{1}{2} + iy : y \in \mathbb{R}\}$ .

**Exemplo 4.3.2.** Encontre a imagem do círculo unitário  $|z| = 2$  pela transformação de Möbius  $T(z) = \frac{z+2}{z-1}$ .

**Solução:** O ponto  $z = -\frac{d}{c} = 1$  não está no círculo  $S = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 2\}$ , então o Teorema 4.3.1 garante que a imagem de  $S$  é um círculo, que chamamos de  $S'$ . Neste caso, para encontrar a descrição exata de  $S'$ , notemos que  $S$  é simétrico com respeito ao eixo real, isto é, se  $z$  está em  $S$ , então  $\bar{z}$  também está. Ainda, observamos que

$$T(\bar{z}) = \frac{\bar{z} + 2}{\bar{z} - 1} = \overline{\left(\frac{z + 2}{z - 1}\right)} = \overline{T(z)},$$

assim, se  $z \in S$  então ambos  $T(z)$  e  $\overline{T(z)} = T(\bar{z})$  estão em  $S'$ . Logo, concluímos que  $S'$  é simétrico com respeito ao eixo real. Como  $z = 2$  e  $z = -2$  estão em  $S$  e  $T(2) = 4$ ,  $T(-2) = 0$ , concluímos que  $S'$  é o círculo de centro em 2 e raio 2, isto é,

$$S' = \{z \in \mathbb{C}; |z - 2| = 2\}.$$

## 4.4 Transformação de Möbius e Matrizes

Quando trabalhamos com transformações de Möbius, é útil utilizar sua representação matricial, o que facilita muito o cálculo de compostas e inversas.

**Definição 4.4.1.** Seja  $T$  uma transformação de Möbius dada por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

A esta transformação associamos uma matriz  $[T]$ , definida por

$$[T] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Note que, como para qualquer  $\lambda \neq 0$  complexo temos

$$T(z) = \frac{(\lambda a)z + (\lambda b)}{(\lambda c)z + (\lambda d)},$$

vemos que esta representação matricial não é única, isto é, a mesma transformação pode nos dar matrizes distintas.

**Exemplo 4.4.1.** Sejam  $T(z) = z + b$ ,  $H(z) = az$  ( $a > 0$ ),  $R(z) = az$  ( $|a| = 1$ ) e  $f(z) = \frac{1}{z}$ , respectivamente, a translação, a homotetia, a rotação e a inversão. Então, suas respectivas matrizes são:

**Solução:**

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [H] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [R] = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [f] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Proposição 4.4.1.** Sejam

$$T_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}, \quad T_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$$

duas transformações Möbius. Então:

a) a composta  $T_2 \circ T_1$  é uma transformação de Möbius e vale

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2] \cdot [T_1];$$

b) a inversa  $T_1^{-1}$  é uma transformação de Möbius e vale

$$[T_1^{-1}] = [T_1]^{-1}.$$

**Demonstração:**

a) Temos que

$$\begin{aligned}
 T_2(T_1(z)) &= \frac{a_2(T_1(z)) + b_2}{c_2(T_1(z)) + d_2} \\
 &= \frac{a_2 \cdot \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + b_2}{c_2 \cdot \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} + d_2} \\
 &= \frac{(a_2a_1 + b_2c_1)z + (a_2b_1 + b_2d_1)}{(c_2a_1 + d_2c_1)z + (c_2b_1 + d_2d_1)}. \tag{4.4.1}
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T_2 \circ T_1] = \begin{bmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{bmatrix} = [T_2] \cdot [T_1].$$

b) Temos que  $[T_1]^{-1} = \frac{1}{a_1d_1 - b_1c_1} \begin{bmatrix} d_1 & -b_1 \\ -c_1 & a_1 \end{bmatrix}$ . Além disso, é fácil ver que

$$T_1^{-1}(z) = \frac{\left(\frac{d_1}{a_1d_1 - b_1c_1}\right)z + \frac{-b_1}{a_1d_1 - b_1c_1}}{\left(\frac{-c_1}{a_1d_1 - b_1c_1}\right)z + \frac{a_1}{a_1d_1 - b_1c_1}} = \frac{d_1z_1 - b_1}{-c_1z + a_1}$$

é a transformação inversa de  $T_1$ . ■

**Exemplo 4.4.2.** Sejam  $T(z) = \frac{2z - 1}{z + 2}$  e  $S(z) = \frac{z - i}{iz - 1}$ . Use a representação matricial para encontrar  $S^{-1} \circ T$ .

**Solução:** As representações matriciais de  $T$  e  $S$  são

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad [S] = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & -1 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$[S^{-1}] = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix},$$

e portanto

$$[S^{-1} \circ T] = \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + i & 1 + 2i \\ 1 - 2i & 2 + i \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$S^{-1} \circ T(z) = \frac{(-2 + i)z + 1 + 2i}{(1 - 2i)z + 2 + i}.$$

---

## Referências

---

- [1] Adler, Irving. Iniciação à Matemática de Hoje. Ao livro técnico, 1972.
- [2] Alencar Filho, Edgard. Elementos de Álgebra Abstrata. Nobel, São Paulo, 1980.
- [3] Bombelli, R. (1966). L Algebra. U. Forti e E. Bortolotti (Eds.). Milano: Feltrinelli.
- [4] Boyer, Carl B. História da Matemática. Edhar Blucher, São Paulo, 1974.
- [5] Cajori, Florian. Uma História da Matemática. Editora Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2007.
- [6] Eves, Howard. Introdução à História da Matemática. Editora da Unicamp, Campinas 2005.
- [7] Hidalgo, Rubén A. Transformaciones de Mobius: Una Introducion. Departamento de Matemática, Universidad Técnica Federico Santa María, Chile, 2012.
- [8] Lang, Serge. Estruturas Algébricas. Ao Livro Técnico, Brasília, 1972.
- [9] Medeiros, L. Adauto da J. Introdução às Funções Complexas. McGraw- Hill do Brasil, Sao Paulo, 1972.
- [10] Santos, J.C. Transformadas de Mobius e Equações do Terceiro Grau. Bol. Soc. Port. Mat., 2005.
- [11] Spiegel, M. Ralph. Variáveis Complexas com uma Introdução às Transformações Conformes e suas Aplicações. McGraw-Hill do Brasil, Brasília, 1973.