

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS**

**Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional  
PROFMAT**

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO**

**Ensaio Fractais à Luz do Ensino Médio**

**Genilton José Cavalcante de Oliveira**



Instituto de Matemática

Maceió, Abril de 2016



PROFMAT



UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE  
NACIONAL - PROFMAT

GENILTON JOSÉ CAVALCANTE DE OLIVEIRA

**Ensaio Fractais à Luz do Ensino Médio**

Maceió  
2016



GENILTON JOSÉ CAVALCANTE DE OLIVEIRA

## Ensaio Fractais à Luz do Ensino Médio

*Dissertação de Mestrado apresentada ao MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.*

Orientador: *Gregório Manoel da Silva Neto*

Maceió  
2016

**Catálogo na fonte**  
**Universidade Federal de Alagoas**  
**Biblioteca Central**  
**Divisão de Tratamento Técnico**

Bibliotecária Responsável: Helena Cristina Pimentel do Vale

O48e Oliveira, Genilton José Cavalcante de.  
Ensaio fractais à luz do ensino médio / Genilton José Cavalcante de Oliveira.  
– 2016.  
145 f. il.

Orientador: Gregório Manoel da Silva Neto  
Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade  
Federal de Alagoas. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e  
Matemática. Maceió, 2016.

Inclui bibliografia e apêndices.

1. Geometria – Ensino auxiliado por computador. 2. Logo (Linguagem de  
programação de computador). 3. Fractais. I. Título.

CDU: 514: 371.315

## Folha de Aprovação

GENILTON JOSÉ CAVALCANTE DE OLIVEIRA

### ENSAIOS FRACTAIS À LUZ DO ENSINO MÉDIO

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas e aprovada em 02 de abril de 2016.

Banca Examinadora:



Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto - UFAL (Presidente)



Profa. Dra. Viviane de Oliveira Santos – UFAL



Profa. Dra. Mônica de Cássia Siqueira Martins – UFTM

*À minha esposa Lidiana, e aos meus filhos Gabrielle e Asafe.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, pela sustentação diária e por me ajudar a superar todas as tribulações.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo aporte financeiro no decorrer do curso de Mestrado.

Aos meus colegas da turma do PROFMAT, pelo convívio e pelos diversos momentos de descontração.

Ao professor Gregório, pela orientação, paciência e acolhimento do tema.

À minha esposa Lidiana, pelo constante afeto e incentivo neste curso.

Ao meu casal de filhos Gabrielle e Asafe pelo amor incondicional.

À minha mãe Maria de Fátima, por alicerçar os meus primeiros passos.

Ao professor Dayveson Noberto, pelos ajustes ortográficos do texto.

Ao professor Francisco Djnnathan, pelas sugestões pedagógicas nas seções do trabalho.

Aos colendos amigos e amigas da SEFAZ-AL, TRT-AL, Detran-AL e da Escola Estadual Moreira e Silva, pelo convívio, conselhos e diversos momentos alegres.

A todos da SBM, que contribuíram para que o PROFMAT tomasse corpo e trouxesse benefícios para a educação brasileira.

*A simplicidade é o último grau da sofisticação.*

—LEONARDO DA VINCI

# RESUMO

A presente dissertação apresenta noções básicas da geometria fractal, que, com sua beleza estética, foi usada como um recurso didático para introduzir e facilitar a aprendizagem de conteúdos de matemática elementar tais como: progressão geométrica, funções exponenciais, logaritmos e fundamentos de geometria plana. Para isso, descrevemos o histórico, as aplicações dos fractais em outras ciências e oportunidades de abordagem desse tema em contextos de sala de aula (com o registro dos resultados), incluindo atividades com construção de fractais no computador. Dentre as atividades desenvolvidas e propostas, algumas envolvem um grande número de alunos e outras fazem uso do ambiente FMSLogo; um software livre que interpreta a linguagem de programação LOGO a qual utilizamos para construir fractais e figuras planas. No capítulo anterior às considerações finais, há uma breve descrição de quatro programas com duas finalidades: dois deles executam comandos da linguagem LOGO e os demais permitem a visualização do conjunto de Mandelbrot, além disso, nesse mesmo rol de programas, dois funcionam em celulares android. Ao final, temos dois apêndices sobre LOGO/FMSLogo e as conclusões finais sobre as experiências realizadas onde destacamos o interesse dos alunos em aprender geometria com o FMSlogo. Executamos as atividades deste trabalho nas dependências do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte - IFRN - Campus Macau.

**Palavras-chave:** Fractais, Conjunto de Mandelbrot, Ensino Médio, linguagem LOGO, FMSLogo.

## ABSTRACT

This thesis is designed to present how some basic notions of fractal geometry which, through its aesthetical beauty, was used as a didactic resource to introduce and facilitate the learning of topics in Mathematics, like geometrical progression, exponential functions, and logarithm. For doing so, I discuss the history and the application of fractals in other sciences, as well as suggestions to approaching this theme in lessons (with register of results), including the construction of fractals in the computer. Among the devised and assigned activities, some were developed by a great number of students and some were developed through FMSLogo environment, a free software that interprets LOGO programming language which was used to make fractals and plane figures. In the chapter before the final considerations, there is a brief description of four programs with two purposes: two of them execute LOGO language commands and the others allow the visualization of Mandelbrot set. Besides that, two of these programs run in Android mobile phones. In the end, we have two appendixes on LOGO/FMSLogo and the final conclusions about the experiences where I highlighted students' interest in learning geometry with FMSLogo. This research was conducted in the premise of the Federal Institute of Education, Science and Technology of Rio Grande do Norte - IFRN - Campus Macau.

**Keywords:** Fractals, Mandelbrot set, Secondary Education, LOGO language, FMSLogo.



## LISTA DE FIGURAS

1.1	Sequência $\frac{1}{2^n}$ na reta real . . . . .	19
2.1	Construção do Fractal de Apolônio . . . . .	28
2.2	Níveis do fractal de Apolônio . . . . .	28
2.3	Níveis do fractal pentagonal de Durer . . . . .	28
2.4	Conjunto de Cantor . . . . .	29
2.5	Ilha de Koch . . . . .	29
2.6	Objetos não-fractais . . . . .	31
2.7	Tipos de autossimilaridade . . . . .	32
2.8	Fractais na natureza . . . . .	33
2.9	Dimensões na Geometria Euclidiana. . . . .	34
2.10	Evolução da Curva de Koch e a da Curva de Koch Quádrica. . . . .	34
2.11	Segmento de reta dividido em 4 partes . . . . .	36
2.12	Divisões do quadrado e do cubo . . . . .	36
2.13	Metodo de contagem de caixas . . . . .	37
2.14	Fotos microscópicas de células epiteliais . . . . .	39
2.15	Imagem com quadros semelhantes . . . . .	40
2.16	Ampliação fractal . . . . .	40
2.17	Geração da superfície montanhosa . . . . .	41
2.18	Exemplos de quadros semelhantes na imagem . . . . .	42
2.19	Regra de construção - limite do quadrado . . . . .	43
2.20	Formas autossimilares em construções . . . . .	43
2.21	Imagens da Square Federation . . . . .	43
3.1	Georg Cantor - 1867. . . . .	45
3.2	Primeiros 5 níveis do Conjunto de Cantor ( $\mathbb{K}$ ). . . . .	46
3.3	Helge von Koch. . . . .	48
3.4	Segmento inicial $AD$ . . . . .	48
3.5	Divisão do segmento $AD$ . . . . .	48
3.6	Nível 1 da Curva de Koch . . . . .	48
3.7	Níveis da curva de Koch. . . . .	49
3.8	Triângulos criados a cada nível da curva de Koch . . . . .	50
3.9	Curva de Koch no lado triângulo . . . . .	52
3.10	Níveis do Floco de Neve de Koch . . . . .	52
3.11	Auto retrato de Dürer - 1500 . . . . .	54
3.12	Fractal hexagonal de Dürer . . . . .	54

3.13	a) Ilha de Koch (centro), b) Curvas de Koch (lados)	56
3.14	Giuseppe Peano	57
3.15	Níveis da curva de peano	57
3.16	Monumento em Cuneo-Itália com uma curva de Peano-Hilbert na pedra	57
3.17	Waclaw Sierpinski	59
3.18	Primeiros níveis do triângulo de Sierpinski	59
3.19	Logomarca do PROFMAT	60
3.20	Objeto gerador da Curva de Sierpinski	62
3.21	Criação do triângulo de Sierpinski com o objeto gerador	62
3.22	Etapas do tapete de Sierpinski	63
3.23	Conjunto de Cantor na diagonal do tapete de Sierpinski	65
3.24	Karl Menger - 1937	65
3.25	Níveis da Esponja de Menger	66
3.26	Esponja de Menger criada por junção de cubos	67
3.27	Esponja de Menger com “entradas”	67
3.28	Secções da Esponja de Menger	69
3.29	Níveis do fractal das secções de $\mathbb{E}$	69
3.30	Benoît Mandelbrot	70
3.31	Conjunto de Mandelbrot (Representação com asteriscos)	71
3.32	Ampliações do conjunto de Mandelbrot	72
3.33	Triângulo gerador do Fractal Pinwheel	74
3.34	divisão do triângulo na razão $\frac{\sqrt{5}}{5}$	74
3.35	Níveis do Fractal Pinwheel	75
3.36	Fractal Pinwheel por ampliação	77
3.37	Diagrama de fatores naturais de 1 a 49	78
3.38	Organização das três duplas de pontos	79
3.39	Organização dos 5 grupos de 6 pontos	79
3.40	Diagramas de $n = 25$ com pontos unidos pelas linhas	79
3.41	Diagrama de fatores do número 15	80
3.42	Diagramas de 81 (Triângulo de Sierpinski), 125 (fractal de Dürer pentagonal) e 121	80
3.43	Diagramas de fatores	80
4.1	Desenhos de triângulos na folha	82
4.2	Construção gradual do STS	82
4.3	Triângulos da base mais claros	83
4.4	Triângulos produzidos pelos alunos	85
4.5	Cálculos dos exercícios da atividade 1	86
4.6	Imagens das tarefas concluídas	87
4.7	Níveis do triângulo de Sierpinski com latas	87
4.8	Cálculos dos exercícios da atividade 1	90
4.9	Níveis 4 e 5 do triângulo de Sierpinski Metálico	90
4.10	Moldes do cubo gerador	92
4.11	Esponja de Menger - Nível 0 e 1	92
4.12	Esponjas de Menger - Níveis 1 e 2	93

## LISTA DE FIGURAS

11

4.13	Ornamentação com as esponjas de menger de nível 1 . . . . .	94
4.14	Parte frontal da MEM - 8 esponjas de nível 2 . . . . .	95
4.15	Imagens naturais . . . . .	96
4.16	Fractal 1 . . . . .	97
4.17	Variação da curva de Peano com triângulos . . . . .	98
4.18	Curva de Koch quádrica . . . . .	98
4.19	Variação do Conjunto de Cantor . . . . .	98
4.20	Passos do cartão fractal - nível 1 . . . . .	99
4.21	Próximos passos . . . . .	99
4.22	Níveis 1, 2 e 3 do cartão fractal . . . . .	99
4.23	Exemplos de fractais . . . . .	100
4.24	Fractal com círculos . . . . .	101
4.25	Fractal $F$ . . . . .	102
4.26	Ilha de Minkowski . . . . .	102
5.1	Ambientes que interpretam a linguagem LOGO . . . . .	104
5.2	Segmento de reta gerado por: PD 45 PF 100 . . . . .	104
5.3	Quadrado desenhado com a sequência de comandos . . . . .	105
5.4	Resultados dos comandos com aninhamentos do REPITA . . . . .	105
5.5	Janela com a edição do comando QUAD . . . . .	106
5.6	Resultados dos comandos . . . . .	107
5.7	Estrutura da curva de Koch (nível 1) . . . . .	107
5.8	Execução: rotina KOCH (Nível 4) . . . . .	109
5.9	App Fractoid . . . . .	109
5.10	Resultados dos comandos 1 e 2 . . . . .	110
5.11	Tela inicial do Ultra Fractal . . . . .	114
5.12	Aplicando zoom . . . . .	114
5.13	Abas da mini-janela Fractal Properties . . . . .	115
5.14	Criando/Escolhendo um novo fractal . . . . .	115
5.15	Escolhendo um novo fractal e configurações . . . . .	115
5.16	Conjunto de Mandelbrot para os expoentes 3, 4 e 5 . . . . .	116
5.17	Porção com 250 e 1000 iterações . . . . .	116
5.18	Tela do app Fractoid . . . . .	116
5.19	Config. do Fractoid . . . . .	117
5.20	Diferentes quantidades de iterações . . . . .	117
5.21	Conjunto de Mandelbrot com as funções $f$ e $g$ . . . . .	118
5.22	Variações de algoritmo de cores . . . . .	118
5.23	Itens da Opção Mais . . . . .	118
A.1	Instalação e atalho do FMSLogo . . . . .	126
A.2	Partes da tela do FMSLogo . . . . .	127
A.3	Tabela das 16 cores básicas do FMSLogo . . . . .	130
A.4	REPITA com CONTEVEZES . . . . .	130
A.5	Resultados dos exemplos 2 e 5 . . . . .	131

A.6	Definindo e executando o comando QUADRADO . . . . .	132
A.7	Janela com resultado dos comandos . . . . .	133
A.8	Rotina POLIGONO desenhando um heptágono . . . . .	133
A.9	Executando a rotina fatorial . . . . .	135
A.10	Chamando a rotina TRI_RECURSIVO . . . . .	136
B.1	Resultado ARVORESIMPLES . . . . .	137
B.2	Resultado CANTOR . . . . .	137
B.3	Rotina CANTOR2 (Nível 2) . . . . .	137
B.4	Rotina PEANO (Nível 4) . . . . .	138
B.5	Rotina PEANO2 (Nível 3) . . . . .	138
B.6	Rotina KOCH (Nível 4) . . . . .	138
B.7	Execução ILHAKOCH . . . . .	139
B.8	Rotina KOCH2 (Nível 3) . . . . .	139
B.9	Rotina TSIERPINSKI . . . . .	139
B.10	Rotinas SIERPINSKI . . . . .	140
B.11	Rotina MINKOWSKI . . . . .	140
B.12	Rotina QUADRADO3 . . . . .	141
B.13	Rotina TEODORO . . . . .	141
B.14	Rotina KOCHCIRCULAR . . . . .	141

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>1 Começando com generalidades</b>	<b>18</b>
1.1 Sequências de números reais . . . . .	18
1.1.1 O limite de uma sequência . . . . .	18
1.1.2 Progressão Geométrica . . . . .	20
1.2 Logaritmos . . . . .	23
1.3 Iterações . . . . .	24
1.4 Algoritmos . . . . .	25
<b>2 Conceitos e histórico dos fractais</b>	<b>27</b>
2.1 Pre-história dos Fractais . . . . .	27
2.2 Os conceitos sobre fractais . . . . .	30
2.3 As características dos fractais . . . . .	31
2.4 Dimensão Fractal . . . . .	33
2.4.1 Dimensão por Autossimilaridade . . . . .	35
2.4.2 Dimensão por contagem de caixas (box-counting) . . . . .	37
2.5 A presença dos fractais em outras áreas . . . . .	38
2.5.1 Fractais na medicina . . . . .	38
2.5.2 Fractais na informática . . . . .	39
2.5.3 Fractais nas Artes . . . . .	41
2.5.4 Fractais na arquitetura . . . . .	42
<b>3 Estudo de alguns fractais</b>	<b>44</b>
3.1 Fractais pioneiros . . . . .	44
3.1.1 O Conjunto de Cantor . . . . .	44
3.1.2 As Curvas Koch . . . . .	47
3.1.3 O Fractal de Dürer . . . . .	53
3.1.4 A Curva de Peano . . . . .	56
3.1.5 O Triângulo de Sierpinski . . . . .	59
3.1.6 A Esponja de Menger . . . . .	65
3.1.7 O Conjunto de Mandelbrot . . . . .	70
3.1.7.1 O conjunto $M$ em cores . . . . .	71
3.1.7.2 Estudo de algumas constantes $c$ . . . . .	73
3.2 Outros Fractais . . . . .	74

3.2.1	O Fractal Pinwheel . . . . .	74
3.2.2	Diagrama de fatores . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Fractais em contextos de sala de aula</b>	<b>81</b>
4.1	Atividades desenvolvidas . . . . .	81
4.1.1	Atividade 1 - Super Triângulo de Sierpinski . . . . .	81
4.1.2	Atividade 2 - Triângulo de Sierpinski Metálico . . . . .	87
4.1.3	Atividade 3 - Mega Esponja de Menger . . . . .	90
4.2	Atividades propostas . . . . .	95
4.2.1	Atividade 1 - Investigando fractais na natureza . . . . .	95
4.2.2	Atividade 2 - Calculando a dimensão fractal . . . . .	97
4.2.3	Atividade 3 - Cartões Fractais . . . . .	98
4.2.4	Atividade 4 - Criando o próprio fractal . . . . .	100
4.3	Lista de exercícios com fractais . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Atividades com fractais usando softwares</b>	<b>103</b>
5.1	A Linguagem LOGO . . . . .	103
5.1.1	Um primeiro contato com o FMSLogo . . . . .	104
5.1.2	O aplicativo Turtle Draw . . . . .	109
5.2	Atividades com a linguagem LOGO . . . . .	110
5.2.1	Atividade 1 . . . . .	110
5.2.2	Atividade 2 . . . . .	111
5.3	Softwares para visualizar o Conjunto de Mandelbrot . . . . .	113
5.3.1	O software Ultra Fractal . . . . .	113
5.3.2	O aplicativo Fractoid . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>119</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>123</b>
<b>A</b>	<b>Tutorial FMSLogo</b>	<b>125</b>
<b>B</b>	<b>Comandos LOGO das imagens e das atividades</b>	<b>137</b>

# INTRODUÇÃO

Orientado pela dificuldade de aprendizado dos meus alunos e pela minha própria curiosidade sobre o tema, tomei a iniciativa de adaptar minhas aulas de modo a buscar a atenção das turmas pelo atraente aspecto estético das imagens fractais. A geometria fractal, além de seu design, possui uma estreita relação com a natureza, com as artes e diversas competências matemáticas do ensino médio. Neste trabalho, a geometria fractal foi explorada em contextos de sala de aula, de forma paralela aos conteúdos de sequências, funções exponenciais, áreas, perímetros e volumes, como uma forma de diversificar a abordagem desses assuntos. Além disso, as atividades em grupo e aquelas realizadas no computador contribuíram para manifestar a curiosidade e estimular a participação dos alunos no estudo de temas relacionados. As imagens utilizadas no trabalho, em sua maioria, foram de autoria própria, construídas através dos softwares CorelDraw, Microsoft Paint e FMSLogo.

A abordagem da geometria fractal, de forma concomitante com os assuntos do nível médio, pode ampliar a percepção geométrica do aluno, levando-o a uma reflexão/investigação sobre o que está “por trás” da estética visual das imagens fractais. Neste sentido, a Secretaria de Estado da Educação do Paraná teve a feliz iniciativa de incluir expressamente a geometria fractal nas suas Diretrizes Curriculares da Educação Básica - DCE, o referido documento preceitua o seguinte:

Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades... As abordagens das Geometrias: fractal, hiperbólica e elíptica não se encerram, unicamente, nos conteúdos aqui elencados. Desde que explore conceitos básicos, o professor tem a liberdade de investigar e realizar outras abordagens. Os conceitos destes conteúdos são fundamentais para que o aluno do Ensino Médio amplie seu conhecimento e pensamento geométrico. [PAR08]

No que está relacionado ao uso de recursos tecnológicos na educação, os quais utilizamos para construir algumas figuras fractais, o computador torna-se um grande aliado para o ensino da matemática. Os PCNs fazem menção ao estímulo do pensamento, a autonomia e a uma nova relação professor-aluno:

As experiências escolares com o computador também têm mostrado que seu uso efetivo pode levar ao estabelecimento de uma nova relação professor-aluno, marcada por uma maior proximidade, interação e colaboração. ... como meio para desenvolver autonomia pelo uso do *software* que possibilite pensar, refletir e criar soluções; [Nac99]

A organização deste trabalho/pesquisa está estruturada em 6 capítulos e 2 apêndices. O capítulo 1 contém conceitos gerais que serão utilizados no decorrer dos capítulos. Salientamos que, no corpo de todos os capítulos, expressões como forma fractal, objeto fractal, padrão fractal, designam objetos com as características fractais: a presença de autossemelhança, dimensão não-inteira e grande complexidade.

No capítulo 2, temos um breve histórico dos fractais, apresentando seus conceitos, características e enfatizando a presença dessas formas na natureza e em outras áreas do conhecimento. Ainda no capítulo, existe uma breve fundamentação de duas expressões que permitem calcular a dimensão fractal.

No capítulo 3, temos um estudo mais detalhado dos fractais considerados como pioneiros: O Conjunto de Cantor, as Curvas de Koch, o Fractal de Durer, a Curva de Peano, o Triângulo e o Tapete de Sierpinski, a Esponja de Menger e o Conjunto de Mandelbrot. Nesse capítulo também foram abordados dois fractais criados após os anos 90: o Fractal Pinwheel e o Diagrama de Fatores.

No capítulo 4, estão descritos os roteiros de atividades, desenvolvidas e propostas, diretamente vinculadas aos fractais. Entre as atividades realizadas, algumas reuniram mais de uma turma, e dessa forma estabeleceu-se uma divertida interação com um grande número de alunos. Ainda neste capítulo, temos algumas considerações sobre as tarefas implementadas e uma amostra do registro fotográfico dos trabalhos concluídos pelos alunos.

No capítulo 5, resumimos as funcionalidades de quatro softwares e são descritas atividades voltadas à construção de figuras planas e fractais no computador. Os dois primeiros programas, permitem a construção de fractais usando a Linguagem de programação LOGO, e os demais permitem a visualização do conjunto de Mandelbrot. Destaco que os softwares *Turtle Draw* e *Fractint* funcionam em dispositivos móveis.

No capítulo 6, temos as conclusões do trabalho, descrevendo alguns resultados quanto a participação dos alunos e os desdobramentos das atividades constantes nos capítulos 4 e 5. Este capítulo também inclui sugestões para trabalhos futuros a respeito de outros fractais que não foram explorados nesta dissertação. Finalizamos o trabalho com dois apêndices: um tutorial da Linguagem LOGO e do software FMSLogo, e uma listagem dos comandos LOGO que produzem as imagens fractais que ilustram o trabalho.



## LISTA DE TABELAS

2.1	Resumo do comportamento de $n_k$ e $\frac{\log n_k}{\log k}$ . . . . .	38
3.1	Quantitativos do conjunto $K_n$ . . . . .	45
3.2	Resumo do estudo da curva de Koch . . . . .	51
3.3	Resumo do comportamento do Fractal Hexagonal de Dürer . . . . .	55
3.4	Evolução de $\ell_k$ e $N_K$ na Curva de Peano . . . . .	58
3.5	Quantidade de triângulos e medida do lado - nível $k$ . . . . .	61
3.6	Lado e quantidade de triângulos do nível $k$ . . . . .	64
3.7	Tamanho da aresta e número de cubos . . . . .	66
3.8	$c_1 = -2,00001$ (sequência da esquerda para a direita) . . . . .	73
3.9	$c_2 = -1,99999$ (sequência da esquerda para a direita) . . . . .	73
3.10	Valores de $N_k, A_k$ e $P_k$ ao longo dos níveis do Fractal de Pinwheel . . . . .	76
4.1	Quadro com quantitativos do T.S.M . . . . .	88
4.2	Informações sobre o cartão fractal . . . . .	100

# 1. COMEÇANDO COM GENERALIDADES

“Não lhes explico tudo, para não privá-los do prazer de aprenderem sozinhos.”

René Descartes.

Este capítulo apresenta alguns conceitos preliminares que são necessários à compreensão do tema deste trabalho incluindo assuntos relacionados à área de informática.

## 1.1. Sequências de números reais

**Definição 1.1.1.** *Uma sequência, ou sucessão, é uma lista ordenada de números reais. Os elementos da sequência são indexados por números naturais. Mais precisamente, uma sequência de números reais é uma função  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  que associa cada número natural  $n$  a um número real  $a(n)$ . O valor  $a(n)$ , para todo  $n \in \mathbb{N}$ , é representado por  $a_n$ , ou seja, o  $n$ -ésimo termo da sequência. Escreveremos  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ , ou simplesmente  $(a_n)$ , para designar uma sequência a qualquer.*

**Definição 1.1.2.** *Uma sequência  $(a_n)$  é dita sequência recorrente (ou simplesmente recorrência) se cada termo  $a_n$  seguinte é determinado em função de termos anteriores. Dado um inteiro positivo  $k$ , uma sequência recorrente de ordem  $k$  é tal que:*

$$a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, a_{n+k-2}, \dots, a_{n+1}, a_n), \forall k, n \in \mathbb{N}.$$

Exemplos de recorrência:

- a)  $(x_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$ , (Sequência de Fibonacci<sup>1</sup>)  
onde,  $x_1 = x_2 = 1$  e  $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$ , para  $n > 0$ .
- b)  $(y_n) = (1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, 21, 28, \dots)$ , (Sequência de Padovam<sup>2</sup>)  
onde,  $y_1 = y_2 = y_3 = 1$  e  $y_{n+3} = y_{n+1} + y_n$ , para  $n > 0$ .
- c)  $(z_n) = (1, 1, 2, 3, 5, 11, 26, \dots)$   
onde,  $z_1 = z_2 = 1$  e  $z_{n+3} = z_n \cdot z_{n+1} + z_{n+2}$ , para  $n > 0$ .

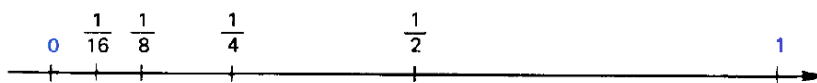
### 1.1.1. O limite de uma sequência

Consideremos a sequência  $(a_n) = \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots \right)$ . Representando seus 4 primeiros termos (em preto) na reta real (fig. 1.1), temos:

<sup>1</sup>Leonardo Fibonacci (1170-1250), também conhecido como Leonardo de Pisa, foi um matemático italiano autor da sequência bastante conhecida que leva seu nome.

<sup>2</sup>Richard Padovan nasceu em 1935, é arquiteto e estudou na Architectural Association, Londres (1952-57). É autor do livro - “Proportion: Science, Philosophy, Architecture”

**Figura 1.1** Sequência  $\frac{1}{2^n}$  na reta real



Fonte: [IDD<sup>+</sup>01], (adaptado)

Notemos que os termos da sequência se aproximam de zero, isto é, quando  $n$  é bastante “grande” o  $n$ -ésimo termo da sequência ( $a_n$ ) estará tão próximo de zero quanto desejarmos. Assim, se quisermos que a distância entre ( $a_n$ ) e zero seja menor que  $\frac{1}{1000}$ , deveremos ter:

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \frac{1}{1000}$$

então:

$$\frac{1}{2^n} < \frac{1}{1000} \Rightarrow 2^n > 1000 \Rightarrow n > 9$$

Isto significa que, a partir do 10<sup>o</sup> termo, os demais termos da sequência estarão próximos de 0, com aproximação menor que  $\frac{1}{1000}$ .

Em geral, dada uma aproximação  $\varepsilon > 0$ , é possível encontrar um número  $n_0$  tal que  $\forall n > n_0$ , teremos  $\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < \varepsilon$ .

Nessas condições, dizemos que o limite de  $\frac{1}{2^n}$ , quando  $n$  tende a infinito é zero, ou converge para zero. Esse limite é representado por:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$$

**Definição 1.1.3.** Uma sequência  $(a_n) = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$  tem limite  $L$ , se dado  $\varepsilon > 0$  é possível obter um número natural  $n_0$  tal que  $\forall n > n_0$  teremos  $|a_n - L| < \varepsilon$ . Neste caso, indica-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

Também dizemos que, se a sequência  $(a_n)$  tem limite  $L$ , então  $(a_n)$  é limitada, ou converge para  $L$ . Se a sequência não tem limite, dizemos que ela é ilimitada ou diverge.

**Lema 1.1.1.** Se  $-1 < q < 1$ , então toda sequência  $(a_n) = (1, q, q^2, q^3, \dots, q^n, \dots)$  converge para zero quando  $n$  tende ao infinito, isto é, se  $|q| < 1$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

As seqüências abaixo tem limite igual a zero:

$$1. (a_n) = \left(1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \dots, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \dots\right)$$

$$2. (b_n) = (1, 0.5, 0.25, 0.125, \dots, (0.5)^n, \dots)$$

$$3. (c_n) = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \dots, \left(-\frac{1}{3}\right)^n, \dots\right)$$

### 1.1.2. Progressão Geométrica

**Definição 1.1.4.** Dados  $a, q \in \mathbb{R}$ , chama-se *Progressão Geométrica (P.G.)* a recorrência  $(a_n)$  dada por:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{cases}$$

Em outras palavras, a P.G. é uma seqüência cujo próximo termo é igual ao produto do termo anterior com uma constante real  $q$  chamada *razão da P.G.*

**Exemplos:**

$$(b_n) = (3, 6, 12, 24, 48, \dots) \quad q = 2.$$

$$(c_n) = \left(9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots\right) \quad q = \frac{1}{3}.$$

$$(d_n) = (2, 2\sqrt{3}, 6, 6\sqrt{3}, \dots) \quad q = \sqrt{3}.$$

#### Termo Geral da P.G

Usando a definição 1.1.4, vamos deduzir uma expressão que nos permite determinar qualquer termo  $a_n$ , de uma P.G, a partir do termo  $a_1$  e da razão  $q$ . Considerando  $a_1$  e  $q$  não nulos, temos que:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ a_4 &= a_3 \cdot q \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} \cdot q \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando-se membro a membro todas as  $n - 1$  equações, obtemos:

$$\begin{aligned} \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \cancel{a_4} \cdot \dots \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot a_n &= a_1 \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \dots \cdot \cancel{a_{n-2}} \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot q^{n-1} \\ a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

A expressão  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$  é conhecida como a *fórmula do termo geral da P.G.*

### Exemplos

1. Determinar o 11º termo da sequência  $(b_n) = (3, 3\sqrt{2}, 6, 6\sqrt{2}, \dots)$

**Solução:**

$$\text{Conforme a definição 1.1.4, } a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$$

Então, usando a fórmula do termo geral, obtemos:

$$a_{11} = a_1 \cdot q^{10} = 3 \cdot (\sqrt{2})^{10} = 3 \cdot \sqrt{1024} = 96 \quad \blacksquare$$

2. A sequência  $(c_n) = \left(-4, 2, -1, -\frac{1}{2}, \dots, -\frac{1}{512}\right)$  tem 13 termos. Obtenha o valor do termo central.

**Solução:**

Segue-se da definição 1.1.4 que:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2}$$

O termo central é exatamente  $a_7$ , logo,

$$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow a_7 = -4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^6 \Rightarrow a_7 = -\frac{4}{64} = -\frac{1}{16} \quad \blacksquare$$

3. Prove que, se  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  é uma P.G, então  $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots)$  também é.

**Demonstração:**

$$\text{Seja } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \text{ e } b_n = a_n^2, \text{ logo } b_n = (a_1 \cdot q^{n-1})^2 = a_1^2 \cdot (q^2)^{n-1}.$$

Tomando  $a_1^2 = c_1$  e  $q^2 = r$ , teremos  $b_n = c_1 \cdot r^{n-1}$  que é o termo geral de uma P.G de razão  $r$  e primeiro termo igual a  $c_1$ .  $\blacksquare$

### A Soma dos $n$ primeiros termos de uma P.G

Considere a P.G  $(a_n) = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots)$ . Queremos obter uma expressão que determine o valor da soma  $S_n$  dos  $n$  primeiros termos de  $(a_n)$ .

Seja,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (1.1)$$

Multiplicando (1.1) por  $q$ , obtemos

$$q \cdot S_n = a_1 \cdot q + a_2 \cdot q + \dots + a_{n-1} \cdot q + a_n \cdot q$$

usando a definição 1.1.4 em cada termo, obtemos:

$$q \cdot S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n \cdot q \quad (1.2)$$

Tomando a diferença (1.2) – (1.1), obtemos:

$$\begin{aligned} q \cdot S_n - S_n &= (\cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_n \cdot q) - (a_1 + \cancel{a_2} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n}) \\ \Rightarrow S_n(q-1) &= a_n \cdot q - a_1, \text{ mas } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \\ \Rightarrow S_n(q-1) &= a_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - a_1 = a_1 \cdot q^n - a_1, \\ \Rightarrow S_n(q-1) &= a_1(q^n - 1) \end{aligned}$$

Portanto, supondo  $q \neq 1$ , temos:

$$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}. \quad (1.3)$$

Para  $q = 1$  temos que  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = a_1 \cdot 1^{n-1} = a_1, \forall n > 0$ . Logo,

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n \cdot a_1$$

### Soma dos termos de uma P.G infinita

Seja a sequência  $(a_n) = \left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$ . Temos que  $a_1 = 2$  e  $q = \frac{1}{2}$ , logo, os primeiros termos de  $(a_n)$  são:

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 \\ a_2 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{2}{2} = 1 \\ a_3 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = 0,5 \\ a_4 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{2}{8} = 0,25 \\ a_5 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{2}{16} = 0,125 \\ &\vdots \\ a_{10} &= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{2}{512} = 0,00390625 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Percebemos que, quando  $n$  aumenta, o valor de  $a_n$  diminui e se aproxima cada vez mais de zero, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

Vamos determinar a soma  $S$  dos termos de uma P.G infinita, de razão  $q$ , onde  $|q| < 1$ . Em outras palavras, queremos saber o valor de  $S_n$  quando  $n$  tende ao infinito.

De fato,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pelo lema 1.1.1,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , logo:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Portanto, para todo  $q \in \mathbb{R}$ , tal que  $|q| < 1$ ,

$$S = \frac{a_1}{1 - q}.$$

**Exemplo 1.1.1.** Determine o valor da soma  $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} + \dots$

**Solução:** Trata-se da soma infinita dos termos de uma P.G, tal que  $a_1 = 1$  e  $q = \frac{1}{10} < 1$ , logo,

$$S_n = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}.$$

## 1.2. Logaritmos

**Definição 1.2.1.** Sejam  $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ , com  $0 < a \neq 1$ . O expoente  $x$ , tal que  $a^x = b$ , é chamado de logaritmo de  $b$  na base  $a$ , o qual denotamos por  $\log_a b = x$ , de modo que:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

**Exemplos:**

- a)  $\log_2 8 = 3 \Leftrightarrow 2^3 = 8$ ;
- b)  $\log_{\sqrt{3}} 27 = 6 \Leftrightarrow \sqrt{3}^6 = 27$ ;
- c)  $\log_{\frac{1}{5}} 125 = -3 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125$ .

**Definição 1.2.2.** O logaritmo decimal de  $b \in \mathbb{R}_+^*$ , é aquele cuja base é 10, isto é,  $\log_{10} b$ , o qual indicamos simplesmente por  $\log b$ .

**Exemplos:**

- a)  $\log 0,001 = \log 10^{-3} \Rightarrow 10^x = 10^{-3} \Rightarrow x = -3$ ;
- b)  $\log \sqrt[3]{100} \Rightarrow 10^x = \sqrt[3]{100} \Rightarrow 10^x = 10^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ .

## Propriedades operatórias dos Logaritmos

Sejam  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tais que,  $0 < a \neq 1, b > 0$  e  $c > 0$ , os logaritmos possuem as seguintes propriedades:

- a)  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ ;
- b)  $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ ;
- c)  $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$ ;
- d)  $a^{\log_a b} = b$ ;
- e)  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ , com  $0 < c \neq 1$  (mudança de base).

Usaremos estas propriedades na solução de algumas atividades propostas no capítulo 4.

### 1.3. Iterações

O processo de iteração de uma função  $f$ , ou funções iteradas, consiste em aplicar  $f$  nela mesma  $k$  vezes ( $k$  composições), com  $k \in \mathbb{N}$ . Para simplificar a notação, faremos:

$$\begin{aligned} f^1(x) &= f(x) \\ f^2(x) &= f(f(x)) \\ f^3(x) &= f(f(f(x))) \\ &\vdots \\ f^k(x) &= \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{k \text{ vezes}} \end{aligned}$$

Em particular, definimos  $f^0(x) = x$ . As funções iteradas, são utilizadas largamente como uma forma de construção computacional de fractais.

**Definição 1.3.1.** *Seja  $f : A \rightarrow B$  e  $x \in A$ . A sequência de iteradas  $f^0(x), f^1(x), f^2(x), f^3(x), \dots$  é chamada órbita de  $x$ .*

**Exemplo 1.3.1.** *Seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(x) = x^2$ . A órbita de  $x = 2$  por  $f$  é:  $f^0(2), f^1(2), f^2(2), f^3(2), \dots$*

$$\begin{aligned} f^0(2) &= 2 \\ f^1(2) &= 2^2 = 4 \\ f^2(2) &= f(f(2)) = 4^2 = 16 \\ f^3(2) &= f(f(f(2))) = 16^2 = 256 \\ &\vdots \end{aligned}$$



Faremos uso de funções iteradas, no conjunto dos números complexos, na definição do conjunto de Mandelbrot, capítulo 3.

## 1.4. Algoritmos

**Definição 1.4.1.** *Um algoritmo pode ser definido como uma sequência lógica e finita de passos (instruções) usada para resolver um determinado problema ou executar uma tarefa.*

Segundo [FC08], ao estabelecer um algoritmo, estamos determinando um padrão de comportamento que deverá ser seguido (uma norma de execução de ações) para alcançar o resultado de um problema. Ainda de acordo com [FC08], para o desenvolvimento de um algoritmo eficiente, é necessário obedecermos algumas premissas básicas no momento de sua elaboração:

- Definir ações simples e sem ambiguidade;
- Organizar as ações de forma ordenada;
- Estabelecer as ações dentro de uma sequência finita de passos.

Dentre as inúmeras ações que os algoritmos são capazes de realizar, podemos destacar:

1. Ler e escrever dados;
2. Avaliar expressões algébricas, relacionais e lógicas;
3. Tomar decisões com base nos resultados das expressões avaliadas;
4. Repetir um conjunto de ações de acordo com uma condição;
5. Construir objetos geométricos.

Na sequência abaixo, há um exemplo simples de um algoritmo para a troca de um pneu. Assim, percebemos que a utilidade dos algoritmos é bem abrangente e independe da área de conhecimento ou do domínio de aplicação.

### **Algoritmo: Trocar pneu do carro**

1. Desligar o carro;
2. Abrir o porta-mals e pegar as ferramentas (chave e macaco);
3. Pegar o estepe;
4. Suspender o carro com o macaco;
5. Remover os 4 parafusos do pneu furado;
6. Colocar o estepe;
7. Colocar os 4 parafusos;

8. Baixar o carro com o macaco;
9. Guardar as ferramentas no porta-malas.

Em particular, um programa de computador é um conjunto de algoritmos que descrevem uma tarefa a ser executada computacionalmente. Quanto mais complexo o programa, maior será a quantidade e a complexidade de seus algoritmos. Os algoritmos computacionais são escritos através de uma linguagem de programação e, nesse aspecto, o conteúdo dos algoritmos são chamados de *código fonte* do programa. No capítulo 5, iremos conhecer a linguagem de programação LOGO. Ela é bastante intuitiva e pode ser facilmente utilizada por crianças e adolescentes para a construção de figuras planas e/ou fractais.

## 2. CONCEITOS E HISTÓRICO DOS FRACTAIS

*A Geometria Fractal mudará profundamente a sua forma de ver as coisas. Continuar lendo pode ser perigoso. Existe o risco de perda definitiva da visão inofensiva que tens das nuvens, florestas, galáxias, folhas, penas, pedras, montanhas, tapeçaria e muitas outras coisas. Nunca mais irá recuperar as suas interpretações de todos esses objetos que até agora eram familiares.*

Michael Fielding Barnsley [Bar14]

No presente capítulo, temos uma breve introdução dos fractais geométricos. Veremos, suas características e conceitos a fim de trazer uma compreensão mínima desse tema para aplicá-lo paralelamente aos conteúdos do ensino nível médio.

Em linhas gerais, adotaremos o conceito de que os fractais são objetos geométricos fragmentados, com grande riqueza de detalhes, cujas partes, independente do tamanho, contém cópias similares do objeto inteiro. Começaremos com um pouco da pré-história, a relação com a natureza e à ideia de dimensão fractal. Em virtude da estreita relação da geometria fractal com os diversos ramos da ciência, ela ganhou um lugar de destaque na matemática, especialmente, na Teoria do Caos<sup>1</sup>.

### 2.1. Pre-história dos Fractais

Provavelmente, considerando a época em que viveu Apolônio<sup>2</sup>, as formas mais antigas, com características autossimilares, são os *fractais de Apolônio* cuja origem depende-se do problema dos círculos de Apolônio. Um caso particular desses fractais, inicia em um processo que envolve três círculos congruentes e tangentes entre si. No primeiro passo, constrói-se um círculo tangente menor, no espaço vazio entre os 3 círculos iniciais. O fractal de Apolônio é produzido através da construção sucessiva de novos círculos tangentes, nos espaços vazios entre os círculos criados nos passos anteriores. Veja isto nas figs. 2.1 e 2.2.

Passados mais de 16 séculos, Albrecht Dürer (1471-1528) produziu uma figura com padrões fractais baseada em um pentágono regular, o *pentágono de Dürer*, fig. 2.3. Um fractal hexagonal com estas características será estudado no capítulo 3.

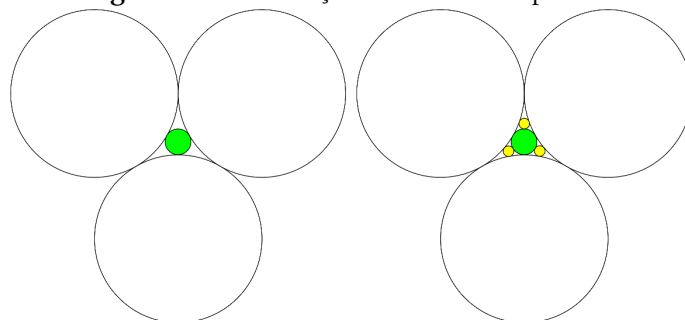
Apesar da existência milenar de algumas formas com padrões fractais, a ideia que temos hoje, passou por um longo período de amadurecimento através dos estudos de alguns matemáticos do século XIX e XX. Eles estavam trabalhando em curvas e superfícies com características diferentes daquelas da Geometria Euclidiana, ou seja, formas que não se encaixavam em retas e planos, cones e esferas, cujas curvas e superfícies eram sempre “lisas” e regulares.

Segundo Stewart [LG10], as formas Euclidianas não apresentam nenhuma estrutura detalhada em menor escala, superfícies são sempre superfícies e curvas continuam sendo curvas

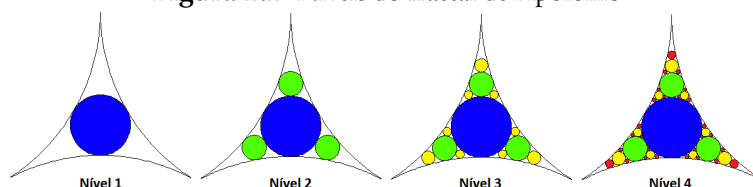
---

<sup>1</sup>A teoria do Caos ocupa-se no estudo de fenômenos que são altamente sensíveis à pequenas mudanças em suas condições iniciais, e por esta instabilidade, alterações mínimas podem produzir grandes efeitos futuros, com pouquíssima previsibilidade.

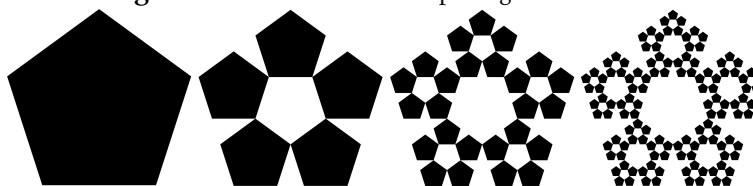
<sup>2</sup>Apolônio de Perga (262 a.C. - 190 a.C.) era um matemático e astrônomo grego da escola alexandrina, chamado de “o Grande Geômetra”, viveu em Alexandria, Éfeso e Perga.

**Figura 2.1** Construção do Fractal de Apolônio

Fonte: Autoria própria (usando o software Corel Draw)

**Figura 2.2** Níveis do fractal de Apolônio

Fonte: <http://mathworld.wolfram.com/images/gifs/apollgas.gif>, 2016

**Figura 2.3** Níveis do fractal pentagonal de Durer

Fonte: Autoria própria (utilizando o software Corel Draw)

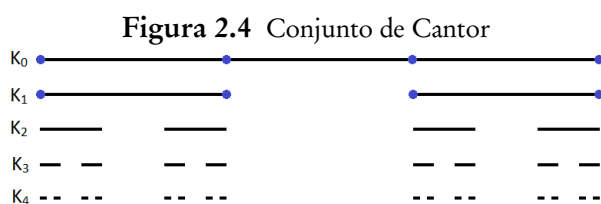
por mais que sejam ampliadas; essa era a característica fundamental para que as técnicas seculares da análise e do cálculo funcionassem. As técnicas consistem em aproximar curvas com retas tangentes e superfícies usando planos tangentes, porém, esses princípios simplesmente não funcionam em superfícies/curvas muito irregulares.

Os matemáticos da época, com seus perfis investigativos e “caçadores de contra-exemplos”, imaginaram curvas altamente irregulares que, no início, eram vistas como parte de uma galeria de “monstros matemáticos”. O objetivo, conforme [LG10], era mostrar as limitações da análise clássica, pois, durante os séculos XVII e XIX, acreditava-se que qualquer curva contínua, exceto aquelas que tinham dobras e interrupções, possuía retas tangentes (derivadas) em quase todos os seus pontos. Entretanto, em uma palestra na academia de Berlim, em 18 de julho de 1872, para a surpresa dos matemáticos presentes, Karl Theodor Wilhelm Weierstrass, provou que esta afirmação era falsa apresentando um exemplo de curva, que era contínua, porém, não diferenciável. Veja diversas outras curvas desta natureza em [Thi03].

Em 1890, Giuseppe Peano construiu uma curva que se desdobrava continuamente até cobrir todos os pontos da superfície de um quadrado unitário. Esse fato trouxe questionamentos quanto a ideia clássica de dimensão, pois a curva unidimensional de Peano era capaz de preencher completamente uma superfície plana. O estudo pioneiro de Peano deu origem a

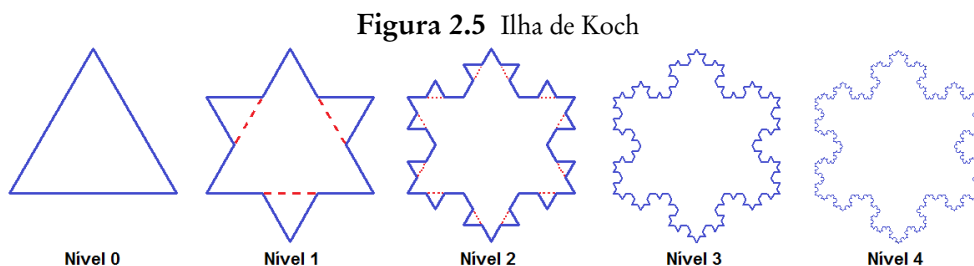
uma nova categoria de curvas, as chamadas: *curvas que preenchem o plano* (*space filling curves*).

No final do século XIX, conforme [CEJ12], matemáticos estavam estabelecendo as bases para a moderna teoria dos conjuntos e nessa época surgiram conjuntos com propriedades “estranhas”. Em 1883, Georg Cantor idealizou o mais simples destes: o conjunto de Cantor. O conjunto inicia a partir do intervalo  $K_0 = [0, 1]$ . Em um primeiro estágio, remove-se o terço médio aberto central  $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  de  $K_0$ , gerando o conjunto  $K_1$ , composto por dois segmentos disjuntos. Essa regra é aplicada continuamente a cada segmento que permanece e assim obtemos o conjunto de Cantor (fig. 2.4).



Fonte: Autoria própria

Em 1904, Helge von Koch introduziu a sua *Curva de Koch* (fig. 2.10), um objeto criado a partir de um segmento de reta, que em um primeiro passo, tem seu terço médio substituído por um triângulo equilátero sem base. Aplicando essa regra infinitas vezes em cada segmento restante, obtemos a Curva de Koch. Mais tarde, em 1906, Koch apresentou outra curva análoga que recebeu o nome de *Floco de Neve de Koch* (ou *ilha de Koch*), fig. 2.5. Essa curva equivale a três Curvas de Koch construídas ao longo dos lados de um triângulo equilátero. No capítulo 3, veremos que a Ilha de Koch é um “monstro matemático” cuja área finita é delimitada por uma fronteira infinita.



Fonte: Autoria própria (usando o FMSLogo)

A descoberta desses “monstros” dividiu o pensamento matemático da época. Para alguns, esses objetos eram apenas “extravagantes” e meramente artificiais, jamais seriam aplicáveis ao estudo de fenômenos naturais; para outros, como David Hilbert<sup>3</sup>, tais descobertas eram “paraísos”, uma nova visão para os limites do cálculo e da análise, uma fonte de inspiração para o estudo de novas classes de curvas. Anos mais tarde, Mandelbrot, com sua visão sistemática, enxergou justamente o contrário, para ele, a geometria dos fractais era capaz de incluir montanhas e nuvens:

<sup>3</sup>David Hilbert (Königsberg, 23/01/1862 - Göttingen, 14/02/1943) matemático alemão autor de uma lista com 23 problemas apresentada em 1900 no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris. Hilbert contribuiu significativamente no estudo das curvas que preenchem o plano

...muitas formas da natureza - por exemplo, as formas das montanhas, nuvens, pedras trincadas e árvores - são demasiadamente complicadas para a Geometria Euclidiana. Montanhas não são cones. Nuvens não são esferas. Zonas costeiras de uma ilha não são círculos. Os rios não fluem em linha reta. Portanto, temos de ir além de Euclides se queremos estender a ciência relativa aos aspectos de natureza. [LG10]

## 2.2. Os conceitos sobre fractais

*Minha vida parecia ser uma série de eventos e acidentes.  
No entanto, quando eu olho para trás, vejo um padrão.*  
(Benoit B. Mandelbrot)

O conceito preciso de fractal é uma questão que ainda permanece em aberto, não há uma definição pronta e largamente aceita pela comunidade científica. A idéia de fractal que conhecemos hoje, possui pouco mais de 40 anos e começou a ser delineada por Mandelbrot em meados de 1975 na primeira edição de [Man91].

Uma das inspirações de Mandelbrot para estabelecer as bases da geometria fractal, foi a natureza; ele buscava uma forma mais precisa para descrever o estereótipo irregular e áspero dos elementos naturais. A partir daí, Mandelbrot utilizou o termo **Fractal**, oriundo da palavra em latim *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar, criar fragmentos irregulares, ou seja, a palavra era perfeita para designar o padrão das formas “irregulares” e aleatórias presentes no meio natural, as quais não cabiam na Geometria Euclidiana. Por conseguinte, Mandelbrot [Man91] apresentou a seguinte definição para fractal: “Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovith excede estritamente a sua dimensão topológica”. Ocorre que essa definição, bastante técnica e restritiva, mostrou-se muito limitada e desconsiderava algumas formas<sup>4</sup> que tinham propriedades geométricas nativas dos fractais.

Conforme [Fed13], após alguns anos, Mandelbrot [Man86] especifica uma definição mais flexível para fractal: “Um fractal é uma forma composta de partes que, de algum modo, são semelhantes ao todo”. Em especial, os conceitos e fundamentações de Mandelbrot [Man83], atraíram vertiginosamente a atenção da comunidade científica. Nessa publicação, havia uma variada descrição de fenômenos e simulações computacionais de outras áreas que se encaixavam perfeitamente nos conceitos da geometria fractal. Dessa forma, os fractais se posicionaram na vanguarda das pesquisas científicas do século XX e XXI, conquistando espaço desde as artes à economia, da biologia à computação.

Um outro conceito de fractal bastante aceito, dado por Falconer [Fal04], reúne algumas propriedades baseadas nas características geométricas dos fractais, isto é, essas figuras ou objetos, referem-se a um grupo de elementos os quais têm algumas das seguintes propriedades:

- a) os elementos apresentam formas regulares ou irregulares e detalhadamente finas para diferentes escalas de observação arbitrariamente definidas;

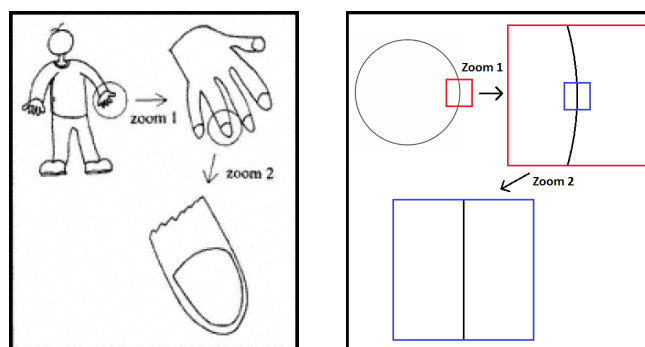
---

<sup>4</sup>O tetraedro de Sierpinski, que não foi abordado neste trabalho, é um exemplo de fractal que não se enquadra nesta definição, veja <https://www.youtube.com/watch?v=VO6lK00v6lY>.

- b) essas formas apresentam autossemelhanças exatas ou aproximadas, eventualmente estatísticas;
- c) essas formas não podem ser descritas com uma linguagem geométrica tradicional, tanto local como globalmente; assim sendo define-se um parâmetro característico denominado dimensão fractal que pode não ser um número inteiro;
- d) essas formas podem ser definidas, em alguns casos, matematicamente de modo recursivo.

Com foco em todos estes princípios apresentados, podemos concluir que os objetos das figs. 2.6(a) e 2.6(b) não constituem formas fractais, suas sucessivas ampliações não contém porções autossemelhantes. Veremos mais detalhes sobre autossemelhança na seção seguinte.

Figura 2.6 Objetos não-fractais



(a) Uma pessoa

(b) Um círculo

Fonte: (a) [Add97]; (b) Autoria própria

### 2.3. As características dos fractais

Os fractais, independente de onde são encontrados ou da sua regra de construção, possuem características marcantes que os diferenciam dos demais objetos geométricos da Geometria de Euclides. A autossemelhança, a infinidade de detalhes e a dimensão não-inteira são inerentes a todos os fractais. A autossemelhança diz respeito ao grau de similaridade que as partes dos fractais apresentam à medida em que são ampliadas, ou seja, o quanto são parecidas as partes ao todo, por menores que sejam. Conforme [Jan08], os tipos de autossemelhança são:

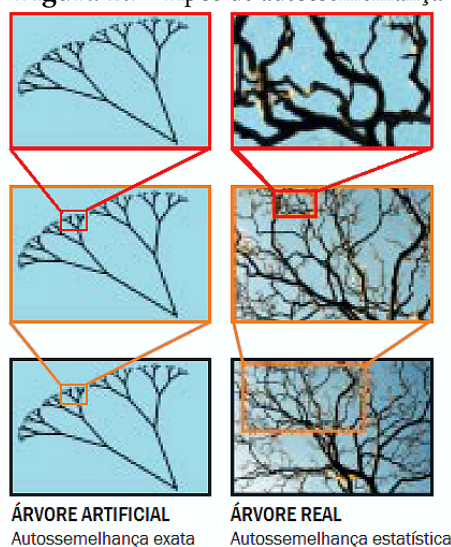
- a) **Autossemelhança exata ou estrita:** É o tipo mais restrito de similaridade, quaisquer partes do fractal contém cópias reduzidas do todo. Em outras palavras, o fractal com este tipo de similaridade é composto por miniaturas perfeitas de si mesmo. Apenas os fractais estabelecidos por bases matemáticas são estritamente autossemelhantes, eles também são conhecidos como *fractais puros*.

- b) **Autossemelhança aproximada ou estatística:** é o caso menos evidente de autossemelhança, exige-se que o fractal tenha medidas numéricas ou estatísticas que se preservem com a mudança de escala. Boa parte das formas naturais obedecem à autossemelhança estatística, nelas, suas partes não são idênticas ao todo, porém são parecidas. Janos [Jan08] diz que:

O que existe nas figuras da natureza é uma autossemelhança aproximada em diferentes escalas. Essa autossemelhança aproximada é chamada de autossemelhança estatística, porque, em diferentes escalas, essa autossemelhança existe em média. Nos fractais matemáticos, as partes são cópias exatas do todo, mas nos fractais naturais as partes são apenas reminiscências do todo. [Jan08]

A fig. 2.7 ilustra a autossemelhança exata de uma árvore artificial, criada por meio de um software<sup>5</sup>, e a autossemelhança aproximada de uma árvore real.

**Figura 2.7** Tipos de autossemelhança



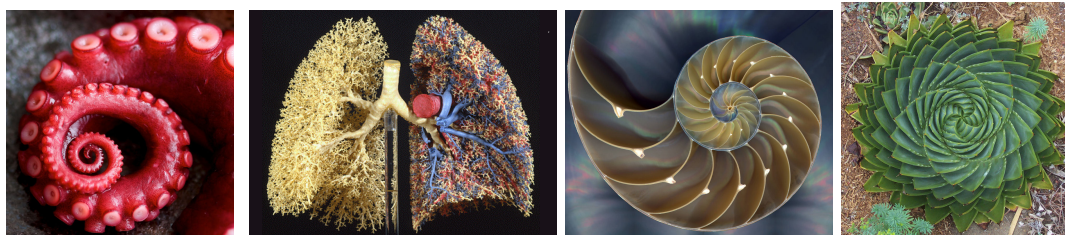
Fonte: [Tay02](adaptado)

Alguns dos fractais dotados de autossemelhança exata são: a Curva de Koch, o triângulo de Sierpinski, o Conjunto de Cantor, a Esponja de Menger e outros fractais que veremos em detalhes no capítulo 3. As Árvores, o couves-flor, brônquios e bronquíolos, conchas, nuvens e rios são exemplos de fractais com autossemelhança estatística; estes contêm partes que, mesmo sem ser idênticas, mantém a estrutura do todo. por exemplo: uma muda ou um galho de árvore, tem o aspecto de uma pequena árvore; um pedaço de brócolis, tem um “tronco” verde-claro e suas extremidades são verde-escuro, ou seja, é um brócolis pequeno que continua mantendo o aspecto do todo (fig. 2.8(g)). Na fig. 2.8, temos uma amostra dos inúmeros formatos fractais que podemos encontrar na natureza.

<sup>5</sup>O software FMSLogo, o qual veremos no capítulo 5, permite a criação dessa imagem de forma simples.



**Figura 2.8** Fractais na natureza



(a) Tentáculos      (b) Brônquios e bronquíolos      (c) Concha de Nautilus      (d) Babosa



(e) Árvore Sangue do Dragão      (f) Couve-flor romanesco      (g) Brócolis

Fonte: (a)...(f) <http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380>; (g) Autoria própria

## 2.4. Dimensão Fractal

*“Não há ramo da Matemática, por mais abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real.”*  
(Nicolay Lobachevsky)

No ensino básico, temos o primeiro contato com as formas mais simples da Geometria Euclidiana: ponto, segmentos de reta, polígonos, círculos, paralelepípedos, cones, pirâmides, esferas. Nesse período, somos ensinados a calcular medidas de comprimentos, perímetros, áreas e volumes e nesse aprendizado, adquirimos uma noção intuitiva de dimensão. Segundo [LG10], o conceito de dimensão, nos moldes da Geometria Euclidiana, nos diz que:

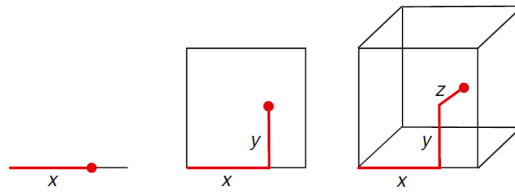
1. Um segmento de reta tem dimensão 1, pois entende-se que qualquer ponto  $A$  do segmento pode ser especificado usando apenas uma coordenada, isto é, um ponto  $A$ , está a uma distância de  $x$  unidades de uma extremidade do segmento.
2. Um quadrado tem dimensão 2, isto é, qualquer ponto  $A$  do quadrado pode ser determinado usando apenas duas coordenadas  $(x, y)$ , de sorte que  $x$  é a distância de  $A$  até o lado esquerdo e  $y$  é a distância de  $A$  até o lado inferior do quadrado.
3. Um cubo tem dimensão 3, pois entende-se que qualquer ponto  $A$  do cubo pode ser especificado usando apenas três coordenadas  $(x, y, z)$ . Onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  representam, respectivamente, as distâncias de  $A$  até à face esquerda, a face inferior e a face traseira.

Nesse sentido, um ponto, isoladamente, não tem direções, portanto tem dimensão zero. Uma linha tem um único sentido de direção, no quadrado encontram-se em duas direções,

e no cubo temos três. Princípios semelhantes se aplicam à superfícies e linhas curvas. Uma linha curva tem dimensão 1, a superfície de um objeto liso, como uma esfera ou um toro, possui dimensão 2. Um objeto sólido, como uma esfera ou um toro sólidos, tem dimensão 3.

Neste aspecto, a dimensão de um objeto é a quantidade de coordenadas necessárias para representar, de forma única, um ponto do objeto, portanto, a dimensão é um número inteiro. Um ponto, uma reta, uma superfície e um sólido possuem dimensões 0, 1, 2 e 3, respectivamente (Veja fig. 2.9). Matematicamente falando, há lugar para outras dimensões. Por exemplo, no espaço de Einstein, o espaço-tempo, além das 3 coordenadas espaciais, existe a coordenada tempo, o que torna este espaço quadridimensional.

**Figura 2.9** Dimensões na Geometria Euclidiana.



Fonte: [LG10]

Para estabelecer alguns princípios da dimensão fractal, vamos tomar como referência duas curvas: a Curva de Koch ( $K_1$ ), cujo processo de construção foi descrito brevemente na seção 2.1, e uma variação dela, onde a regra de formação consiste na substituição do terço central dos segmentos por quadrados sem base, a *Curva de Koch Quádrica* ( $K_2$ ). Tomemos ambas as curvas iniciadas por um segmento de tamanho 1.

Sejam  $P_k$  e  $P'_k$  os perímetros, no nível  $k$ , de  $K_1$  e  $K_2$ , respectivamente. Conforme a tabela da fig. 2.10, à medida que os níveis avançam, temos que  $P_k = \left(\frac{4}{3}\right)^k$  e  $P'_k = \left(\frac{5}{3}\right)^k$ . Em ambas as curvas, o perímetro é infinito, pois:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{3}\right)^k = \infty.$$

**Figura 2.10** Evolução da Curva de Koch e a da Curva de Koch Quádrica.

Nível	Curva de Koch	$P_k$	Curva de Koch Quádrica	$P'_k$
0		1		1
1		$\frac{4}{3}$		$\frac{5}{3}$
2		$\frac{16}{9}$		$\frac{25}{9}$
3		$\frac{64}{27}$		$\frac{125}{27}$

Fonte: Autoria própria, usando o FMSLogo

A respeito da complexidade destas curvas, [dAMdBM<sup>+</sup>08] menciona o seguinte:

Uma curva deste tipo, devido à sua complexidade infinita, contém um número de infinitas “dobras” que, se ampliadas, continuam aparecendo indefinidamente. Devido a este infinito detalhamento, esta curva “ocupa” mais “espaço” que uma linha convencional, possuindo assim uma dimensão fractal maior que 1.0, sem chegar, no entanto, a ocupar o espaço de uma faixa que a contém (dimensão 2.0). Desta maneira, conceito de dimensão fractal,  $D$ , está intimamente relacionado com a estrutura de ocupação do espaço da figura.

Em outras palavras, é impossível construir uma curva suave  $C$ , de dimensão 1, tal que,  $C \supset K_1$  ou  $C \supset K_2$ , no entanto,  $K_1$  e  $K_2$  não tomam proporções de objetos bidimensionais. Por outro lado, sejam  $D_1$  e  $D_2$  as dimensões de  $K_1$  e  $K_2$ . Notamos que,  $K_2$  possui mais dobras que  $K_1$ , e assim, preenche um pouco mais de "espaço", logo:  $D_1 < D_2$ . Portanto, considerando a dimensão Euclidiana, podemos constatar que  $1 < D_1 < D_2 < 2 \Rightarrow D_1, D_2 \notin \mathbb{Z}$ .

Intuitivamente, as dimensões dos objetos da geometria euclidiana com suas construções baseadas substancialmente em ponto, reta, plano e espaço são mais simples de assimilar. Entretanto, no caso da geometria dos fractais, não temos uma percepção dimensional tão imediata, pois os fractais não seguem a uma forma única de construção elementar, cada um possui a sua regra individual de formação.

O matemático Felix Hausdorff<sup>6</sup> estabeleceu uma medida, bastante complexa e abrangente (mais tarde aperfeiçoada por Besicovitch<sup>7</sup>), que permite o cálculo da dimensão de diversos conjuntos, sejam eles fractais, ou não. Posteriormente, Mandelbrot utilizou os estudos de Hausdorff-Besicovitch para medir e comparar os fractais, isto é, esse trabalho serviu de base para determinar o quanto um objeto fractal é mais “rugoso” ou mais “espaçoso” que outro.

A partir dos conceitos elementares da própria Geometria Euclidiana, veremos duas formas para o cálculo da dimensão fractal: a dimensão por autossimilaridade e a dimensão por contagem de caixas.

### 2.4.1. Dimensão por Autossimilaridade

Esta dimensão é adequada apenas para os fractais que apresentam autossimilaridade exata. Utilizando elementos Geometria Euclidiana, vamos obter uma fórmula que expressa a dimensão fractal de um objeto, a qual resulta fundamentalmente em valores não-inteiros. Tomemos inicialmente um segmento de reta, um quadrado e um cubo. Iremos dividir os lados de cada um desses objetos em  $r$  partes iguais e depois verificar a relação entre  $r$ , a quantidade  $n$  de partes e a sua dimensão  $D$ .

<sup>6</sup>Felix Hausdorff (Breslávia, 8 de novembro de 1868 - Bonn, 26 de janeiro de 1942), matemático alemão, considerado um dos fundadores da topologia.

<sup>7</sup>Abram Samoilovitch Besicovitch (Berdyansk, 23 de janeiro de 1891 - Cambridge, 2 de novembro de 1970), matemático russo, naturalizado britânico. Trabalhou principalmente em funções de uma variável real, funções analíticas e funções quase periódicas.

## Segmento de reta

Vamos dividir um segmento de reta em  $r = 4$  partes congruentes:

**Figura 2.11** Segmento de reta dividido em 4 partes



Fonte: Autor

Desta feita, obtemos  $n = 4^1$  segmentos congruentes de tamanho  $\frac{1}{4}$ .

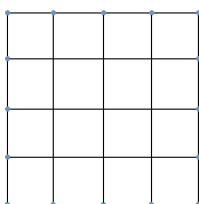
## Quadrado

Analogamente, dividindo o lado de um quadrado em  $r = 4$  partes iguais, obtemos  $n = 4^2$  quadrados congruentes (fig. 2.12(a)).

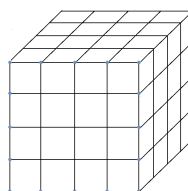
## Cubo

No caso de um cubo, ao dividirmos sua aresta igualmente em  $r = 4$  partes, obtemos  $n = 4^3$  cubos congruentes (fig. 2.12(b)).

**Figura 2.12** Divisões do quadrado e do cubo



(a) Quadrado



(b) Cubo

Fonte: Autorial própria

Se os lados de cada miniatura dos objetos fossem ampliados por um fator de aumento  $r > 1$ , elas se tornariam congruentes ao objeto original. Seja  $D$  a dimensão de cada um desses objetos, diante do exposto, podemos relacionar os valores de  $r$ ,  $n$  e  $D$  da seguinte forma:

$$n = r^D \tag{2.1}$$

tomando o logaritmo decimal de ambos os membros de 2.1, obtemos:

$$\log n = \log r^D \Rightarrow \log n = D \log r.$$

portanto:

$$D = \frac{\log n}{\log r}. \tag{2.2}$$

Para exemplificar o cálculo da dimensão por autossimilaridade, tomemos a Curva de Koch Quádrica (2.10). Por construção, seus segmentos são divididos em  $r = 3$  partes, onde cada

uma gera  $n = 5$  novos segmentos, logo, pela equação 2.2, sua dimensão fractal vale:

$$D = \frac{\log n}{\log r} = \frac{\log 5}{\log 3} \cong 1,4649$$

No próximo capítulo, iremos determinar a dimensão por autossimilaridade de alguns fractais. Em sua maioria, a dimensão fractal desses objetos é um número não-inteiro.

## 2.4.2. Dimensão por contagem de caixas (box-counting)

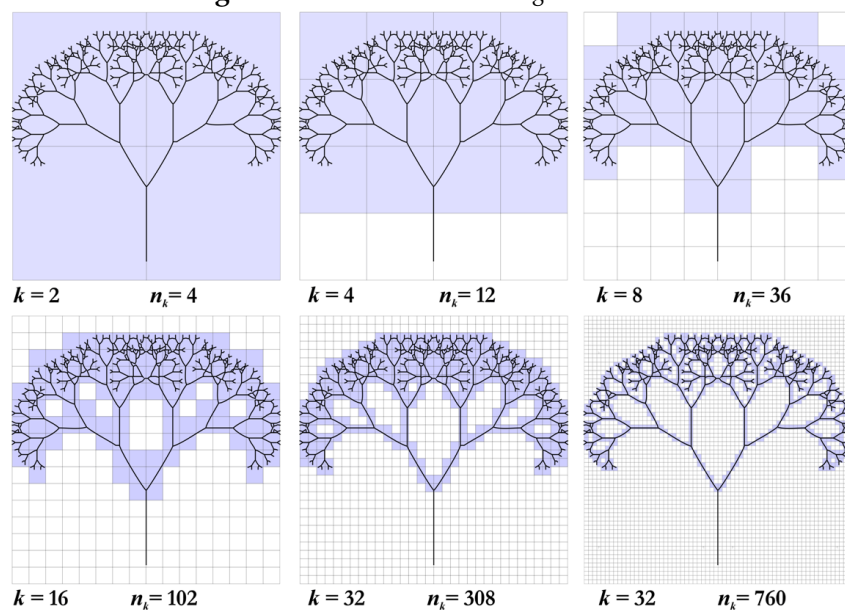
Existem inúmeras fórmulas que são utilizadas para determinar a dimensão fractal de um objeto. O cálculo da dimensão por contagem de caixas (box-counting) é um dos mais utilizados por sua simplicidade de implementação computacional. O algoritmo para o cálculo, considera uma figura qualquer coberta por um conjunto de retângulos. Inicialmente, desenhamos um único retângulo de forma a conter uma figura plana  $F$ . Em seguida, divide-se cada lado do retângulo em  $k$  partes iguais, obtendo assim  $k^2$  retângulos semelhantes.

**Definição 2.4.1.** *Seja  $n_k$  o número de retângulos que interceptam pelo menos um ponto de uma figura  $F$  contida em uma malha retangular constituída por  $k^2$  retângulos. A dimensão fractal  $D$  de  $F$  é dada por:*

$$D = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\log n_k}{\log k}$$

Vamos acompanhar uma aplicação desse método na fig. 2.13. Os quadrados pintados são aqueles que contém algum ponto da imagem. Por simplicidade, dividimos o retângulo em quantidades crescentes de potências de 2.

Figura 2.13 Metodo de contagem de caixas



Fonte: Autoria própria.

A tabela 2.4.2 contém um resumo da evolução  $n_k$  e da razão  $\frac{\log n_k}{\log k}$  a medida que  $k$  aumenta:

**Tabela 2.1** Resumo do comportamento de  $n_k$  e  $\frac{\log n_k}{\log k}$

$k$	$n_k$	$\log k$	$\log n_k$	$\frac{\log n_k}{\log k}$
2	4	0,30103	0,60206	2,00000
4	12	0,60206	1,07918	1,79248
8	36	0,90309	1,55630	1,72331
16	102	1,20412	2,00860	1,66811
32	308	1,50515	2,48855	1,65336
64	760	1,80618	2,88081	1,59498

Fonte: Autoria própria.

Quanto maior o número de caixas, melhor será a precisão da dimensão fractal do objeto. Alguns softwares, fazem a varredura de uma imagem e informam a quantidade de retângulos que interceptam algum ponto de uma figura, permitindo assim, a análise da dimensão de objetos mais complexos. Pela definição do método box counting, notamos que ele pode ser usado para uma grande variedade de figuras, sejam elas fractais ou não-fractais.

## 2.5. A presença dos fractais em outras áreas

Nesta seção, iremos descrever uma amostra das inúmeras aplicações científicas dos fractais. As variadas publicações de Mandelbrot, ajudaram a aumentar o campo de atuação dos fractais possibilitando pesquisas paralelas em fenômenos econômicos e até medicinais. Diversos trabalhos estão sendo publicados de forma multidisciplinar com a geometria fractal.

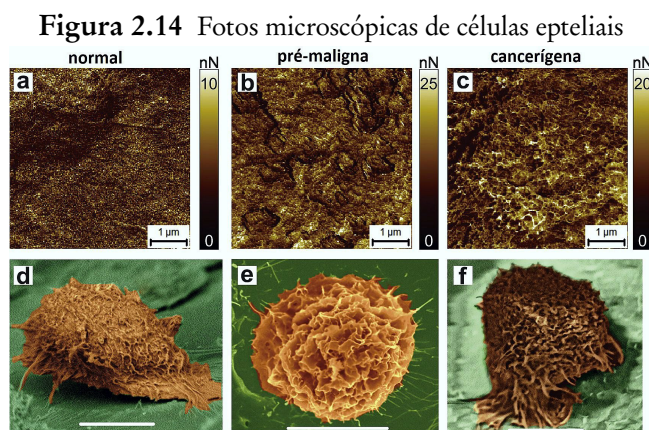
### 2.5.1. Fractais na medicina

Na área médica, uma das utilidades da dimensão fractal no estudo do câncer, é caracterização do estágio em que se encontra os tumores malignos. Imagens adquiridas através de ressonância magnética foram comparadas a imagens de cistos (tumores benignos), imagens de gliomas (tumores malignos) e imagens de lesões massivas. Concluiu-se que, com a técnica da dimensão fractal, é possível obter uma melhor distinção entre os tumores benignos dos malignos pelo fato destes últimos serem mais invasivos e, conseqüentemente, terem uma maior irregularidade em seu contorno. Assim, extraindo-se a dimensão fractal desses contornos, pode-se distinguir os tumores e, posteriormente, analisar o estágio em que se encontram. Entre os trabalhos que utilizam a técnica da dimensão fractal na medicina, podemos destacar:

- Análise fractal do contorno ósseo e o contorno dental através de imagens radiográficas;
- Cálculo da dimensão fractal de células para identificar o risco de câncer de mama;
- Outras investigações com fractais através de imagens oriundas de ressonância magnética, doppler, ultrassom e tomografia computadorizada.



A seguir temos gravuras microscópicas de células epiteliais, de modo que as figs. 2.14(c) e 2.14(f), representam células cancerígenas pois elas contêm uma maior rugosidade/aspereza em sua superfície. A dimensão fractal, nesses casos, será substancialmente maior que a mesma dimensão calculada em células normais, figs. 2.14(a) e 2.14(d).



Fonte: [DGWS15](adaptada)

## 2.5.2. Fractais na informática

A indústria cinematográfica, os algoritmos de compressão de imagens/vídeos e a simulação de paisagens, utilizam técnicas baseadas nos padrões da geometria fractal.

### Compressão e ampliação de imagens/vídeos

Muitas pessoas desconhecem o padrão de imagem Fractal Image File - FIF. Esta tecnologia foi descontinuada há algum tempo, todavia, sua metodologia de compressão e descompressão está em constante desenvolvimento. Os arquivos FIF, apesar da sua ótima taxa de compressão, perderam espaço para os arquivos JPEG<sup>8</sup>, pois apesar dos arquivos FIF ocuparem menos espaço em memória, os JPEG possuem um algoritmo de compressão mais ágil.

Na época das imagens FIF, o matemático Michael Barnsley<sup>9</sup> e sua equipe registraram várias patentes relacionadas a modelos matemáticos e computacionais para o tratamento de imagens, visando minimizar o consumo de memória e a sua velocidade de compressão e descompressão. Algumas dessas patentes, foram voltadas para a compactação fractal; em linhas gerais, um dos métodos consiste em particionar uma imagem em quadros e identificar quais deles são semelhantes. Com isso, as partes similares da imagem são reutilizadas e armazenadas uma única vez, otimizando o consumo de memória. Na fig. 2.15, há um exemplo de imagem com quadros semelhantes destacados.

A técnica baseada em fractais, também é utilizada para otimizar a transmissão e a am-

<sup>8</sup>Joint Photographic Experts Group JPEG. Grupo de trabalho especializado em padrões de codificação de imagens. Mais detalhes em <https://jpeg.org/about.html>

<sup>9</sup>Michael Fielding Barnsley, nasceu em 1946, Matemático Britânico além de pesquisador é empresário com trabalhos voltados para a compressão fractal. Ele detém diversas patentes nessa tecnologia.

**Figura 2.15** Imagem com quadros semelhantes

(a) Imagem original

(b) Partes semelhantes

Fonte: <http://www.rasip.fer.hr/research/compress/algorithms/adv/fraccomp/index.html>, 2015

pliação de imagens/vídeos no padrão 4K, cuja resolução (quantidade de pixels<sup>10</sup>) é 4 vezes maior que o formato fullHD, os quais demandam um grande consumo de memória para serem armazenados e reproduzidos. A tecnologia TRUDEF<sup>11</sup>, utiliza algoritmos fractais para redimensionar imagens em uma resolução 4 vezes maior que o arquivo original. O método consiste em dobrar as dimensões das imagens/vídeos de forma a quadruplicar sua quantidade de pixels; por exemplo, um vídeo fullHD, com  $1920 \times 1080 = 2073600$  pixels, passa a ter uma resolução de  $3840 \times 2160 = 8294400$  (padrão 4K) pixels sem comprometer a qualidade da imagem. A fig. 2.16 apresenta um caso real da aplicação dessa técnica.

**Figura 2.16** Ampliação fractal

Fonte: <http://www.tmmi.us/trudef-fractal-scaling>, 2016

## Geração de superfícies montanhosas

Com o vertiginoso avanço da computação gráfica, é pouco provável que a paisagem montanhosa que apreciamos em um filme seja 100% real. Adiante, iremos ilustrar um algoritmo simples que permite, através de um software ou de forma manual, a criação de uma

<sup>10</sup>O píxel é o menor item visual de uma imagem digital. O menor ponto exibido na tela de um dispositivo.

<sup>11</sup>Tecnologia desenvolvida pela empresa americana TMMI, <http://www.tmmi.us/technology>, baseia-se em algoritmos matemáticos de zoom fractal.

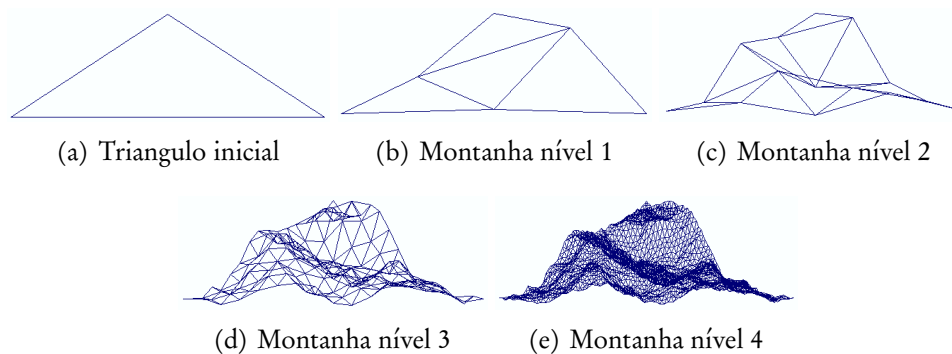


superfície montanhosa utilizando subdivisões randômicas em um triângulo qualquer. A superfície final gerada, tem um aspecto fractal.

O algoritmo começa a partir de um triângulo no espaço (ou no plano), e a superfície, semelhante a de uma montanha, é produzida pelo seguinte processo:

1. Determinar os pontos médios dos lados do triângulo;
2. Unir esses pontos com segmentos de reta, gerando assim, quatro novos triângulos;
3. Deslocar, aleatoriamente, os pontos médios para cima ou para baixo dentro de uma variação de altura ou profundidade;
4. Repetir recursivamente, nos triângulos obtidos, os passos anteriores  $k$  vezes considerando que, a cada novo passo, a variação de altura/profundidade deverá ser igual a metade da variação anterior.

**Figura 2.17** Geração da superfície montanhosa



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Fractal>, 2015 (adaptado)

Vale destacar que alguns softwares controlam o nível de aspereza de montanhas e relevos através da dimensão fractal, uma maior dimensão gera mais aspereza na superfície. Quando a dimensão se aproxima de dois, a superfície fica cada vez mais "lisa".

### 2.5.3. Fractais nas Artes

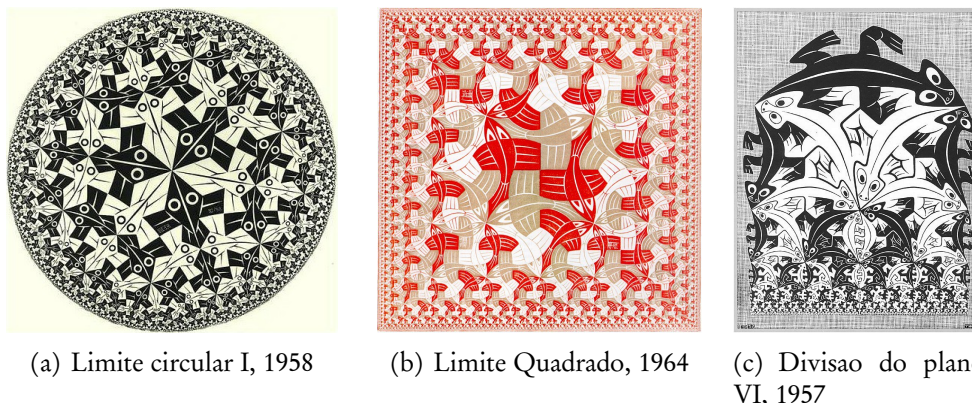
*“Apesar de não possuir qualquer conhecimento ou treino nas ciências exatas, sinto muitas vezes que tenho mais em comum com os matemáticos do que com os meus colegas artistas.”*  
(Maurits Cornelius Escher)

O atraente visual dos fractais trouxe mais ênfase ao casamento das artes com a matemática. As fórmulas matemáticas e as iterações, produzem através de softwares fractais, bonitas imagens com diferentes estilos (3D, coloridas, em tons de cinza). Muito tempo antes, alguns artistas já produziam suas obras utilizando formas autossimilares.

O modelo da geometria fractal se encaixa perfeitamente na intuição artística dos pintores; Maurits Cornelius Escher e Salvador Dali são dois desses artistas cujos quadros eram recheados de imagens que diminuam de tamanho, recursivamente, até o limite da menor gravura

que as suas mãos pudessem desenhar. Em especial, Escher demonstra um gosto especial pelas estruturas autossemelhantes. Até aqueles que não apreciam a matemática, percebem com facilidade a constante miniaturização das imagens em seus quadros famosos. Escher é quase uma unanimidade nas citações contidas nas literaturas alusivas à matemática com a arte; seu estilo é bastante apreciado tanto pela beleza quanto pelo capricho característico de seus quadros que sempre apelam para a intuição de infinito.

**Figura 2.18** Exemplos de quadros semelhantes na imagem



Fonte: <http://www.bb.com.br/docs/pub/inst/img/EscherCatalogo.pdf>, 2015

A regra de formação da obra limite do quadrado (fig. 2.18(b)), que pode ser acompanhada na fig. 2.19, consiste no seguinte:

1. Pegue uma folha na forma de um quadrado de lado  $\ell_0$ ;
2. Identifique o centro da folha e desenhe um quadrado central de lado  $\ell_1 = \frac{\ell_0}{2}$  (quadrado de 1ª geração);
3. Em seguida, ao redor do quadrado de 1ª geração, desenhe quadrados de lado  $\ell_2 = \frac{\ell_1}{2} = \frac{\ell_0}{4}$ , ou seja, os quadrados de 2ª geração;
4. Desenhe, até preencher a folha de papel, os quadrados ao redor daqueles da geração anterior. Por fim, divida estes quadrados em triângulos retângulos (veja a fig. 2.19).

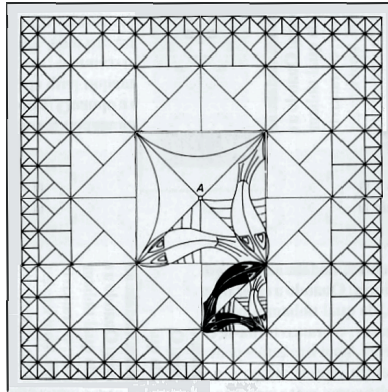
#### 2.5.4. Fractais na arquitetura

Obras arquitetônicas atuais e de longas datas foram construídas utilizando detalhes autosemelhantes. Veremos algumas imagens de construções seculares, cuja composição exibe o apelo aos padrões fractais. Os detalhes autossimilares enalteciam essas construções.

A Catedral de S. Maria, Anagni-Itália e a Basílica de San Lorenzo, Roma, construídas nos séc. XII e XIII, contém mosaicos em pedra, cuja disposição dos ladrilhos são análogas ao triângulo de Sierpinski (fig. 2.20(c)). Na fig. 2.20(a) temos a estrutura fractal do templo hindu Vishnu, composto por picos similares cujas etapas de construção estão na fig. 2.20(b).

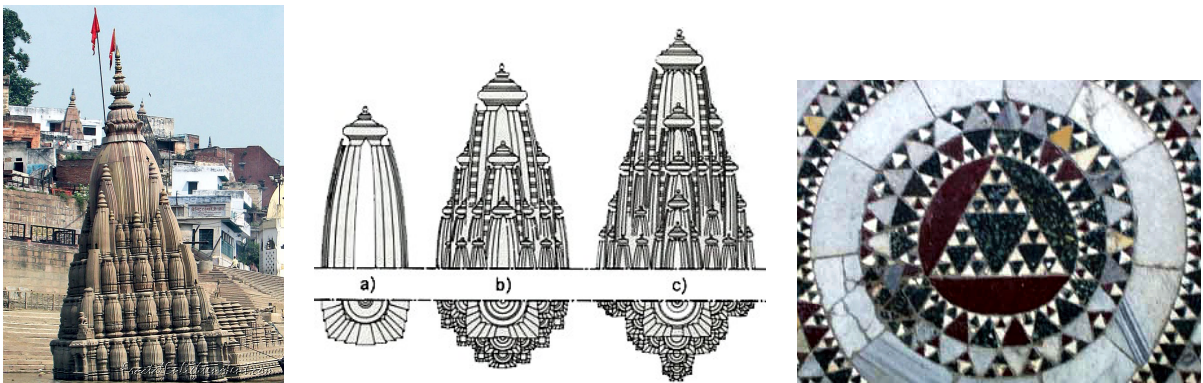
O complexo de edifícios da Federation Square, inaugurado em outubro de 2002, em Melbourne, Austrália, contém fachadas compostas por peças triangulares (fig. 2.21) organizadas como o fractal Pinwheel (fig. 3.35), o qual será visto no capítulo 3.

Figura 2.19 Regra de construção - limite do quadrado



Fonte: [http://amadora.cienciaviva.pt.../Escher\\_PAV.pdf](http://amadora.cienciaviva.pt.../Escher_PAV.pdf), 2015 (adaptado)

Figura 2.20 Formas autossimilares em construções



(a) Templo Vishnu

(b) Estrutura autossimilar do templo

(c) Mosaicos da Catedral de Anagni

Fonte: (a),(b) <http://fractalenlightenment.com/...the-fractal-structure-of-hindu-temples>

(c) [TLL11]

Figura 2.21 Imagens da Square Federation



(a) Square Federation

(b) Detalhe da fachada

Fonte: <http://www.kynetonbushresort.com.au/...smallvisionsofvictoria923267-302.jpg>, 2016

## 3. ESTUDO DE ALGUNS FRACTAIS

Neste capítulo, veremos os aspectos estruturais de alguns objetos fractais pioneiros; que foram idealizados nos últimos 150 anos. Essas figuras representam os primórdios da geometria fractal e para cada uma delas iremos conhecer suas características e fazer uma conexão com os conteúdos relacionados do nível médio. Os fundamentos que iremos estudar, serão importantes para o desenvolvimento das atividades do capítulo seguinte. Na primeira parte do capítulo, dos fractais pioneiros, veremos o Conjunto de Cantor, as curvas de Koch, o fractal hexagonal de Dürer, a curva de Peano, o triângulo e o table de Sierpinski, a esponja de Menger e o conjunto de Mandelbrot. Na outra seção, temos dois fractais mais recentes: o fractal Pinwhell e o diagrama de fatores.

### 3.1. Fractais pioneiros

Considerando a base histórica e conforme já comentamos no capítulo anterior, os primeiros objetos com características fractais oriundos do cálculo diferencial foram criados por Karl Weierstrass, George Cantor, Von Koch, Giuseppe Peano, David Hilbert, Waclaw Sierpinski e outros matemáticos. Em virtude do formato irregular e pelas propriedades incomuns, esses objetos foram intitulados como “monstros matemáticos”. Para cada um dos fractais que vamos estudar, mostraremos seu processo de construção, o cálculo de sua dimensão fractal e algumas medidas relevantes como perímetro, área e/ou volume utilizando os assuntos de matemática presentes no currículo do ensino médio. Alguns resultados, serão comprovados através do conceito de limites.

#### 3.1.1. O Conjunto de Cantor

*“Ninguém poderá nos expulsar do Paraíso que Cantor criou para nós.”*  
(David Hilbert)

O conjunto  $\mathbb{K}$  de Cantor<sup>1</sup>, ou *Poeira de Cantor*, apresentado pela primeira vez em 1883, é um subconjunto do intervalo  $[0, 1]$  definido recursivamente. O algoritmo de construção de  $\mathbb{K}$  terá um apelo geométrico, no entanto, ele pode ser descrito algebricamente.

#### Construção do conjunto de Cantor

Denotemos por  $Q_n$  e  $\ell_n$  a quantidade e o tamanho dos segmentos no nível  $n$  do Conjunto de Cantor. Partindo do intervalo  $K_0 = [0, 1]$ , obteremos  $\mathbb{K}$  através dos seguintes passos:

1. Dividir  $K_0$  em três partes iguais e retirar o seu terço médio aberto  $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ , e assim,

---

<sup>1</sup>Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (São Petersburgo, 03/03/1845 - Halle, 06/01/1918) foi um matemático russo. Cantor é conhecido por ter contribuído significativamente para teoria dos conjuntos e utilizou de forma pioneira o símbolo  $\mathbb{R}$  para designar o conjunto dos números reais.



Figura 3.1 Georg Cantor - 1867.



Fonte: <https://GeorgCantor1845-1918Berlin1867-2>, 2015

obtemos o conjunto

$$K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

que possui  $Q_1 = 2$  intervalos disjuntos de tamanho  $\ell_1 = \frac{1}{3}$ . Nesse momento,  $K_1$  é o nível 1 do conjunto  $\mathbb{K}$ .

2. Dividir os dois segmentos de  $K_1$  em três partes iguais e analogamente remove-se os terços médios de cada segmento. Assim, obtém-se o conjunto

$$K_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

que contém  $Q_2 = 2^2$  intervalos disjuntos de tamanho  $\ell_2 = \frac{\ell_1}{3} = \frac{1}{9}$ .  $K_2$  é o nível 2 de  $\mathbb{K}$

3. Repetir esse processo, indefinidamente, gerando o conjunto  $K_n$  através da remoção dos  $Q_{n-1} = 2^{n-1}$  terços médios abertos dos segmentos de  $K_{n-1}$ .

A cada passo, o número de segmentos dobra enquanto a medida de cada um fica  $\frac{1}{3}$  menor, isto é,  $K_3$  terá o dobro de segmentos de  $K_2$ , pois cada segmento de  $K_2$  é gera outros dois, logo  $Q_3 = 2 \cdot Q_2 = 2^3$ . Analogamente, cada segmento de  $K_3$  mede um terço dos segmentos de  $K_2$ , então,  $\ell_3 = \frac{\ell_2}{3} = \frac{1}{27}$ . Em geral, o conjunto  $K_n$  terá  $Q_n = 2^n$  intervalos de tamanho  $\ell_n = \frac{1}{3^n}$ . Veja os valores de  $Q_n$  e  $\ell_n$  na tabela 3.1.

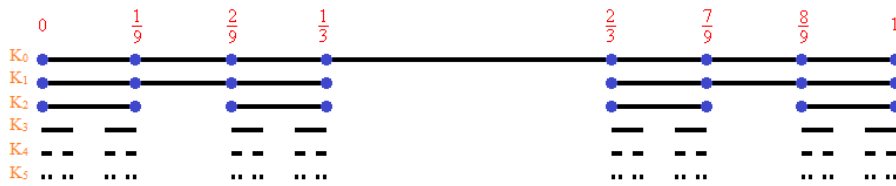
Tabela 3.1 Quantitativos do conjunto  $K_n$ 

Nível	0	1	2	3	4	...	n
$Q_n$	1	2	4	8	16	...	$2^n$
$\ell_n$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	...	$\frac{1}{3^n}$

Fonte: Autoria própria.

Fazendo  $n$  crescer infinitamente, obteremos o Conjunto de Cantor. A fig. 3.2 ilustra geometricamente as primeiras 5 etapas de  $\mathbb{K}$ .

**Figura 3.2** Primeiros 5 níveis do Conjunto de Cantor ( $\mathbb{K}$ ).



Fonte: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conjunto\\_de\\_Cantor.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Conjunto_de_Cantor.png), 2015 (adaptado)

O Conjunto  $\mathbb{K}$  é a intersecção infinita de todos os  $K_i, i \in \mathbb{N}$ , tal que:

$$\mathbb{K} = K_0 \cap K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_n \cap \dots = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$$

Uma forma de construir o Conjunto de Cantor através de um processo recursivo de substituição é:

- a) **Objeto inicial (Nível 0):** um segmento de reta \_\_\_\_\_;
- b) **Nível 1:** Substitua o segmento \_\_\_\_\_ por \_\_\_\_\_;
- c) Substitua, infinitamente, todos os segmentos \_\_\_\_\_ por \_\_\_\_\_, no devido tamanho, e siga para o próximo nível.

Vejamos algumas características paradoxais a respeito de  $\mathbb{K}$ .

**Proposição 3.1.1.** *O comprimento  $C$  de  $\mathbb{K}$  é nulo.*

**Demonstração:** No nível  $n$ , cada  $K_n$  possui  $2^n$  intervalos de tamanho  $\frac{1}{3^n}$ , então o comprimento  $C_n$  de  $K_n$  é dado por  $C_n = Q_n \cdot \ell_n$  (número de segmentos vezes o tamanho de cada um), logo:

$$C_n = 2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Fazendo  $n$  ir para ao infinito, temos que:

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$

■

Em particular, apesar do seu comprimento nulo, o conjunto  $\mathbb{K}$  contém infinitos elementos. Note que os extremos de cada intervalo nunca são removidos, ou seja, o conjunto  $I = \left\{0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{7}{9}, \left(\frac{1}{3}\right)^n, \left(\frac{2}{3}\right)^n, \dots\right\} \subset \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}$ .

**Proposição 3.1.2.** *A soma  $S_R$  dos comprimentos de todos segmentos removidos de  $\mathbb{K}$  vale 1.*

**Demonstração:**

$$S_R = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + 8 \cdot \frac{1}{81} + \dots \quad (3.1)$$

Multiplicando o segundo membro de (3.1) por  $\frac{2}{2}$ , obtemos:

$$S_R = \frac{2}{2} \cdot \left( 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + 8 \cdot \frac{1}{81} + \dots \right) \Rightarrow S_R = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left( \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \frac{16}{81} + \dots \right)}_S$$

O valor de  $S$ , entre parênteses, corresponde à soma dos termos de uma P.G infinita onde  $a_1 = q = \frac{2}{3} < 1$ , logo:

$$S_R = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

■

Observe que o comprimento do conjunto de Cantor, poderia ser calculado tomando a diferença entre a medida de  $K_0$  e o total de segmentos removidos, então,  $C = K_0 - S_R = 1 - 1 = 0$ . Notamos que qualquer parte do Conjunto de Cantor contém uma réplica menor de todo o conjunto, isto caracteriza a autossemelhança exata de  $\mathbb{K}$ .

### A Dimensão de $\mathbb{K}$

Visto que, em cada nível, dividimos os segmentos do fractal de Cantor em  $r = 3$  partes, que dão origem a  $n = 2$  partes menores, segue-se daí que sua dimensão fractal vale:

$$D = \frac{\log n}{\log r} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong \frac{0,30102}{0,47712} \cong 0,63092$$

Concluimos que  $\mathbb{K}$  ocupa mais “espaço” que um ponto, no entanto, não é um objeto unidimensional pois  $0 < D < 1$ .

### 3.1.2. As Curvas Koch

Nesta seção, mostraremos mais informações sobre as curvas de Koch<sup>2</sup> além daquelas contidas no item 2.1. Nossa análise será feita sob um ponto de vista matemático que está relacionado com a estrutura destes fractais. Primeiramente, veremos a *Curva de Koch* e em seguida o *Floco de neve de Koch (ou ilha de Koch)*.

<sup>2</sup>Niels Fabian Helge von Koch (Estocolmo, 25/01/1870 - Estocolmo, 11/03/1924), matemático sueco que deu nome aos famosos fractais conhecidos como Curva e Floco de Neve de Koch. Koch obteve seu doutorado em Matemática pela Universidade de Estocolmo, em 26 de Maio de 1892.

**Figura 3.3** Helge von Koch.



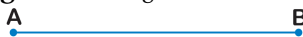
Fonte: <http://www.datuopinion.com/helge-von-koch>, 2015

### Construção da Curva de Koch

O processo de construção da Curva de Koch é o seguinte:

1. Começamos com um segmento de reta  $AD$  de comprimento  $\ell_0$ . Nesse instante, temos o nível zero da curva.

**Figura 3.4** Segmento inicial  $AD$



Fonte: Autoria própria.

2. Agora divide  $AD$  em três partes iguais de comprimento  $\frac{\ell_0}{3}$ .

**Figura 3.5** Divisão do segmento  $AD$



Fonte: Autoria própria.

3. Substitua o segmento central  $BC$  por um triângulo equilátero de lado  $\frac{\ell_0}{3}$  sem a base.

**Figura 3.6** Nível 1 da Curva de Koch



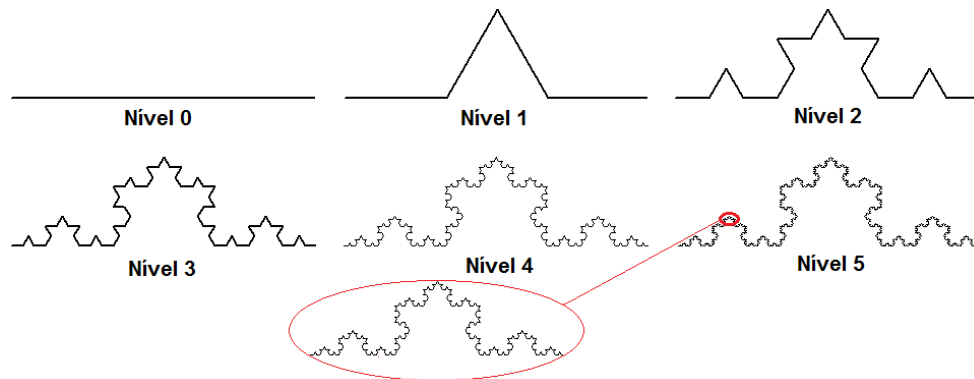
Fonte: Autoria própria.

4. Repita, continuamente, os passos 2 e 3 para todos os segmentos restantes do passo anterior e vá para o próximo nível da curva.

A Curva de Koch é um fractal com autossimilaridade exata que resulta da repetição infinita deste algoritmo.



Figura 3.7 Níveis da curva de Koch.



Fonte: Autoria própria. (Usando o software FMSLogo e o Microsoft Paint)

### Análise da Curva de Koch

Em nosso estudo da Curva de Koch, vamos considerar os seguintes elementos:

- $N_k$  - o número de segmentos da curva no  $k$ -ésimo nível;
- $\ell_k$  - comprimento de cada segmentos do  $k$ -ésimo nível;
- $P_k$  - perímetro da curva no nível  $k$ ;
- $T_k$  - quantidade de novos triângulos que são construídos no nível  $k$ ;
- $A_k$  - área de todos os novos triângulos equiláteros de lado  $\ell_k$  gerados no nível  $k$ .

**Proposição 3.1.3.** No  $k$ -ésimo nível da curva, temos  $N_k = 4^k$  segmentos de tamanho  $\ell_k = \frac{\ell_0}{3^k}$ .

**Demonstração:** A partir do nível 0, temos  $N_0 = 1$  segmento de tamanho  $\ell_0$ . Pela regra de construção da curva, temos que:

- No nível 1: dividimos  $\ell_0$  em  $N_1 = 4$  segmentos de tamanho  $\ell_1 = \frac{\ell_0}{3}$ ;
- No nível 2: cada segmento do nível 1, gera outros 4 de tamanho  $\ell_2 = \frac{\ell_1}{3} = \frac{\ell_0}{3^2}$ , logo  $N_2 = 4 \cdot N_1 = 4^2$ ;
- No nível 3: os segmentos do nível 2, produzem 4 segmentos de tamanho  $\ell_3 = \frac{\ell_2}{3} = \frac{\ell_0}{3^3}$ , logo  $N_3 = 4 \cdot N_2 = 4^3$ ;

Seguindo esse raciocínio, concluímos que  $N_k = 4^k$  e  $\ell_k = \frac{\ell_0}{3^k}$  ■

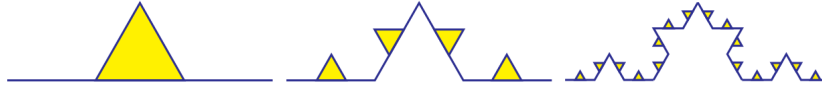
**Proposição 3.1.4.** No nível  $k$ , são construídos  $T_k = 4^{k-1}$  novos triângulos sem base ( $\wedge$ ).

**Demonstração:** Observe que:

- No nível 1, o segmento inicial dá origem a 1 triângulo, logo  $T_1 = 1$ ;
- No nível 2, cada um dos 4 segmentos do nível 1, gera um novo triângulo, logo  $T_2 = 4^1$ ;
- No nível 3, os 16 segmentos do nível 2 dão origem a 16 triângulos, então  $T_3 = 4^2$ .

Seguindo essa sequência (fig. 3.8), no nível  $k$ , teremos:  $T_k = 4^{k-1}$  ■

**Figura 3.8** Triângulos criados a cada nível da curva de Koch



Fonte: Autoria própria. (Usando o software Corel Draw)

**Proposição 3.1.5.** A área  $A_k$  dos novos triângulos criados no nível  $k$  vale  $A_k = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^k$ .

**Demonstração:**

A área  $A$  de um triângulo equilátero de lado  $\ell$  vale  $A = \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Nesse caso,  $A_k$  será igual à quantidade  $T_k$  de triângulos vezes a área de cada triângulo de lado  $\ell_k$ , logo,

$$A_k = T_k \cdot (\ell_k)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 4^{k-1} \cdot \left(\frac{\ell_0}{3^k}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = (\ell_0)^2 \cdot \frac{4^k \cdot 4^{-1}}{3^{2k}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Portanto,

$$A_k = (\ell_0)^2 \cdot \frac{4^k}{(3^2)^k} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (\ell_0)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4^k}{9^k} = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^k \quad \blacksquare$$

**Proposição 3.1.6.** O perímetro  $P$  da curva de Koch é infinito.

**Demonstração:** Temos que  $P_k = N_k \cdot \ell_k$  é o perímetro da curva no nível  $k$ . O valor de  $P$  é dado por:

$$P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \cdot \ell_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot \frac{\ell_0}{3^k} = \ell_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty \quad \blacksquare$$

**Proposição 3.1.7.** A área  $A_T$  compreendida entre a Curva de Koch e o segmento inicial é finita.

**Demonstração:** A área total  $A_T$  é igual à soma das áreas de todos os triângulos gerados em cada nível, então

$$A_T = A_1 + A_2 + \dots + A_k + \dots$$

$$A_T = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^1 + (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^k + \dots$$

$$A_T = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \underbrace{\left[ \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^k + \dots \right]}_S$$

A expressão entre colchetes é a soma  $S$  dos termos de uma P.G. infinita cujo primeiro termo  $a_1$  e a razão  $q$  são tais que  $a_1 = q = \frac{4}{9} < 1$ , assim:

$$S = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{4}{5}$$

Segue-se daí que:

$$A_T = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{4}{5} = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{20}$$

O cálculo da área  $A_T$  e do perímetro da Curva de Koch motivam o uso dos conceitos de progressão geométrica para demonstrar as características paradoxais da Curva de Koch. Vejamos um resumo do estudo da curva de Koch na tabela 3.2:

**Tabela 3.2** Resumo do estudo da curva de Koch

Etapa	$N_k$	$\ell_k$	$P_k$	$T_k$	$A_k$
1	4	$\frac{\ell_0}{3}$	$\ell_0 \frac{4}{3}$	1	$(\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{36}$
2	16	$\frac{\ell_0}{9}$	$\ell_0 \frac{16}{9}$	4	$(\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{81}$
3	64	$\frac{\ell_0}{27}$	$\ell_0 \frac{64}{27}$	16	$(\ell_0)^2 \frac{4\sqrt{3}}{729}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
k	$4^k$	$\frac{\ell_0}{3^k}$	$\ell_0 \left(\frac{4}{3}\right)^k$	$4^{k-1}$	$(\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{16} \left(\frac{4}{9}\right)^k$

Fonte: Autoria própria.

### A Dimensão da curva de Koch

Pela regra de formação da curva de Koch, ao dividirmos os segmentos em  $r = 3$  partes, obtemos  $n = 4$  segmentos novos, então

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \cong \frac{0,6025}{0,4771} \cong 1,26185\dots$$

Portanto,  $1 < D < 2$ ; comprovando que uma simples curva de dimensão 1 não pode conter completamente a curva de Koch. Todavia, ela não preenche uma superfície plana.

## O Floco de Neve de Koch

O nome deste fractal deve-se a sua semelhança com o formato estrutural de um floco de neve, e por esta razão foi batizado como *Floco de Neve de Koch* (ou *ilha de Koch*). A figura matriz do Floco de neve de Koch é um triângulo equilátero. Seu processo de formação produz uma curva de Koch em cada um dos três lados do triângulo.

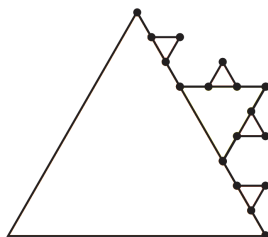
### Construção do Floco de Neve de Koch

O Floco de neve de Koch surge a partir de um triângulo equilátero de forma que, em cada lado (fig. 3.9), constrói-se uma curva de Koch, isto é:

1. Começamos com um triângulo equilátero de lado  $\ell_0$ ;
2. Dividimos cada um dos seus lados em três segmentos congruentes;
3. Substitua cada segmento central por um triângulo equilátero de lado  $\frac{\ell_0}{3}$ ;
4. Remova a base dos triângulos construídos no passo 2;
5. Repita os passos 2, 3 e 4 para cada segmento restante e siga para o próximo nível

Na fig. 3.9, os triângulos de lado  $\frac{\ell_0}{3}$  e  $\frac{\ell_0}{9}$  emergem de um lados do triângulo inicial.

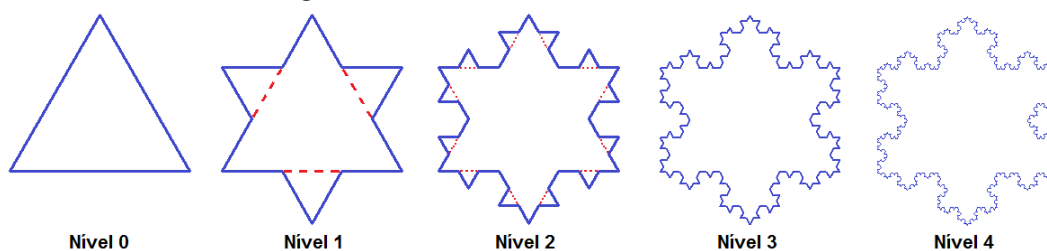
**Figura 3.9** Curva de Koch no lado triângulo



Fonte: Autoria própria.

Após infinitas repetições desse procedimento, teremos a Ilha de Koch. A figura 3.10 ilustra os seus cinco primeiros estágios.

**Figura 3.10** Níveis do Floco de Neve de Koch



Fonte: Autoria própria. (Usando o software FMSLogo)

## Estudo do Floco de Neve de Koch

Analogamente ao estudo da curva de Koch, iremos determinar o número de segmentos, a medida dos segmentos, o perímetro e a área total do Floco de Neve de Koch no seu  $k$ -ésimo nível, os quais serão designados por  $N'_k$ ,  $\ell'_k$ ,  $P'$  e  $A'_T$ , respectivamente. Considerando que a Ilha de Koch é composta por três curvas de Koch, concluímos que a medida dos segmentos coincidem, enquanto que o número de segmentos e o perímetro valem o triplo dos valores correspondentes da curva de Koch. Portanto, com base na tabela 3.2, segue-se que:

- $N'_k = 3N_k = 3 \cdot 4^k$ ;
- $\ell'_k = \ell_k = \frac{\ell_0}{3^k}$ ;
- $P' = 3P = \infty$ .

**Proposição 3.1.8.** *A área  $A'_T$ , delimitada pelo floco de neve de Koch, é finita.*

**Demonstração:**

A superfície da ilha de Koch corresponde a três vezes à área da curva de Koch ( $A_T$ ) mais a área  $A_0 = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$  do triângulo central, portanto:

$$A'_T = 3A_T + A_0 = 3 \cdot (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{20} + (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 2 \frac{(\ell_0)^2 \sqrt{3}}{5} \quad \blacksquare$$

## A Dimensão do Floco de Neve de Koch

Analogamente à curva de Koch, cada segmento do floco de neve é dividido em  $r = 3$  partes, que, por sua vez, dão origem a  $n = 4$  novos segmentos, portanto:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} = \frac{0,6025}{0,4771} \cong 1,26185\dots$$

Da mesma forma, o Floco de Neve ocupa mais “espaço” que uma reta e não chega a ser um objeto geométrico bidimensional, pois  $1 < D < 2$ .

### 3.1.3. O Fractal de Dürer

Na seção 2.1, falamos brevemente do fractal pentagonal de Dürer (fig. 2.3). A seguir, veremos as características do fractal hexagonal de Dürer<sup>3</sup> e calcularemos seu perímetro e sua área ao longo dos níveis de iteração. O nome do fractal, deve-se ao estilo que Dürer construía polígonos congruentes ao longo dos vértices de um polígono inicial, de forma que, polígonos vizinhos, tinham um vértice comum. As figuras poligonais construídas nesta regra são conhecidas como *fractais do tipo Dürer*.

<sup>3</sup>Albrecht Dürer (Nuremberg, 21 de maio de 1471 - Nuremberg, 6 de abril de 1528) pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte alemão. Historicamente, atribui-se a Dürer a autoria do algoritmo para desenhar um pentágono regular utilizando apenas régua e compasso.

**Figura 3.11** Auto retrato de Dürer - 1500



Fonte: <http://www.judithdobrzynski.com/3013/staring-durer-in-the-face>

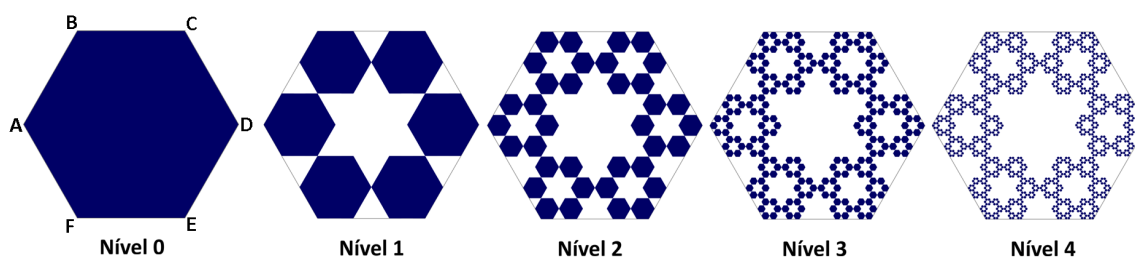
### O processo de construção

Vejam os passos para construção do fractal de Dürer, os quais podem ser acompanhados na figura 3.12.

**Objeto inicial:** Uma superfície hexagonal regular  $ABCDEF$  de lado  $\ell_0$  (nível zero).

- 1) Nos vértices A, B, C, D, E e F, construa um hexágono semelhante de lado  $\frac{\ell_0}{3}$ ;
- 2) Remova os 6 triângulos equiláteros localizados entre os hexágonos construídos;
- 3) Remova a região poligonal (flocó de neve de Koch) da parte central do hexágono. Ao final deste passo, temos nível 1 do fractal de Dürer;
- 4) Repita, infinitamente, os passos 1, 2 e 3 em cada hexágono restante e vá para o próximo nível do fractal.

**Figura 3.12** Fractal hexagonal de Dürer



Fonte: Autoria própria. (Utilizando o software CorelDraw)

### Estudo do fractal Hexagonal de Dürer

Neste estudo, iremos analisar a quantidade de hexágonos, a medida do lado, o perímetro e a área do Fractal Hexagonal de Dürer ao longo do nível  $k$ , os quais designaremos por  $N_k, \ell_k, P_k$  e  $A_k$ , respectivamente. No estágio zero, iniciamos com  $N_0, \ell_0, P_0$  e  $A_0$ .

Inicialmente, temos uma superfície hexagonal preenchida. Por construção, no nível 1, existem 6 hexágonos regulares de lado  $\ell_1 = \frac{\ell_0}{3}$ . Seguindo o processo, cada hexágono do primeiro nível gera outros 6 hexágonos menores de lado  $\ell_2 = \frac{\ell_1}{3} = \frac{\ell_0}{3^2}$ . Mais geralmente, a evolução de  $N_k, \ell_k, P_k$  e  $A_k$  ocorre conforme a tabela 3.3:

**Tabela 3.3** Resumo do comportamento do Fractal Hexagonal de Dürer

Nível	$N_k$	$\ell_k$	$P_k$	$A_k$
0	1	$\ell_0$	$6 \cdot 6\ell_0$	$6(\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$
1	6	$\frac{\ell_0}{3}$	$6 \cdot 6 \frac{\ell_0}{3}$	$6 \cdot 6 \left(\frac{\ell_0}{3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$
2	$6^2$	$\frac{\ell_0}{3^2}$	$6^2 \cdot 6 \frac{\ell_0}{3^2}$	$6^2 \cdot 6 \left(\frac{\ell_0}{3^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$
3	$6^3$	$\frac{\ell_0}{3^3}$	$6^3 \cdot 6 \frac{\ell_0}{3^3}$	$6^3 \cdot 6 \left(\frac{\ell_0}{3^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k$	$6^k$	$\frac{\ell_0}{3^k}$	$6^k \cdot 6 \frac{\ell_0}{3^k}$	$6^k \cdot 6 \left(\frac{\ell_0}{3^k}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$

Fonte: Autoria própria.

Para preencher a coluna  $A_k$ , usamos o fato de que um hexágono regular de lado  $\ell$  é constituído por 6 triângulos equiláteros de mesmo lado, então, sua área  $A$  vale:

$$A = 6 \cdot \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$$

**Proposição 3.1.9.** *A área do fractal hexagonal de Dürer é nula enquanto o seu perímetro é infinito.*

**Demonstração:** Sejam  $S$  e  $P$  as medidas da área e do perímetro procurados, para  $k$  suficientemente grande, temos que:

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k \quad P = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k$$

logo,

$$S = \lim_{k \rightarrow \infty} 6^k \cdot 6 \left(\frac{\ell_0}{3^k}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 6(\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{6^k}{3^{2k}} = 6(\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{9}\right)^k = 0$$

$$P_T = \lim_{k \rightarrow \infty} 6^k \cdot 6 \frac{\ell_0}{3^k} = 6\ell_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{3}\right)^k = \infty$$

■

### Dimensão do fractal de Dürer

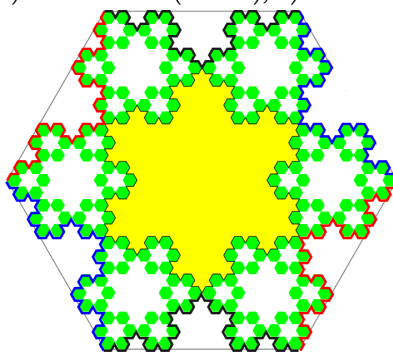
Pela regra de construção do fractal, o lado do hexágono é particionado em  $r = 3$  segmentos, produzindo  $n = 6$  novos hexágonos. Segue-se daí que a dimensão  $D$  deste objeto vale

$$D = \frac{\log n}{\log r} = \frac{\log 6}{\log 3} \cong \frac{0,77815}{0,47712} \cong 1,63092$$

### Propriedades do fractal de Dürer

Um olhar mais minucioso no fractal de Dürer nos revela a presença de 7 fractais em sua estrutura. São exatamente 6 curvas de Koch, construídas ao longo dos lados do hexágono inicial, e uma Ilha de Koch na parte central. Vale destacar, que este fractal foi apresentado antes do nascimento do próprio Koch. Veja fig. 3.13.

Figura 3.13 a) Ilha de Koch (centro), b) Curvas de Koch (lados)



Fonte: Autoria própria. (Figura construída no CorelDraw)

### 3.1.4. A Curva de Peano

As Curvas de Peano<sup>4</sup>, batizadas assim pelo estudo pioneiro do matemático Giuseppe Peano, são curvas contínuas<sup>5</sup> que têm a característica peculiar de preencher superfícies planas completamente. Esse tipo de curva é obtida por uma sucessão de outras menores, que se replicam sucessivamente em outras escalas.

#### Construção da Curva de Peano

Peano foi autor de diversas curvas<sup>6</sup>, mostraremos o processo recursivo de construção de uma delas a partir de um segmento de reta com tamanho  $\ell_0$ . Veja fig. 3.15.

<sup>4</sup>Giuseppe Peano (27 de agosto de 1858 - 20 de abril de 1932), matemático italiano autor de mais de 200 livros e artigos. A axiomatização padrão dos números naturais é chamada de axiomas de Peano, em sua homenagem.

<sup>5</sup>Intuitivamente, uma curva contínua é uma linha suave, sem “quebras” ou interrupções.

<sup>6</sup>Segundo o site: <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/PeanoComplete.shtml> existem ao todo, 272 curvas de Peano.



**Figura 3.14** Giuseppe Peano

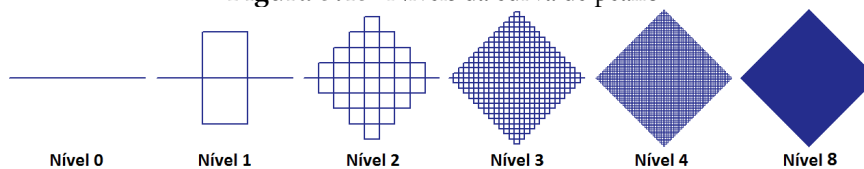


Fonte: <https://andreamacco.files.wordpress.com/2015/09/peano-math.jpg>, 2016

**Objeto inicial (Nível 0):** Um segmento de reta com comprimento  $\ell_0$ .

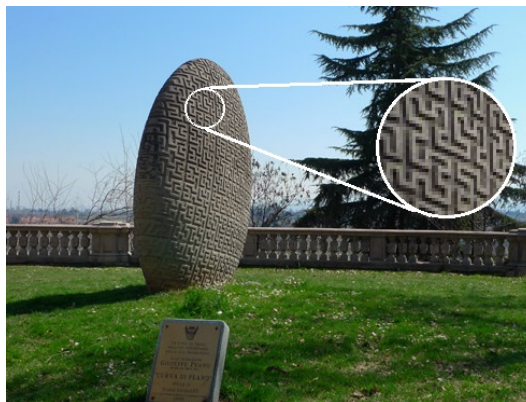
- 1) Dividir o segmento em 3 partes congruentes;
- 2) Construir um quadrado de lado  $\frac{\ell_0}{3}$  acima e abaixo do terço médio;  
Nesse passo, são obtidos 9 segmentos de tamanho  $\frac{\ell_0}{3}$ .
- 3) Repetir, indefinidamente, os passo 1 e 2 para todos os novos segmentos e vá para o próximo nível. A reunião infinita de todos esses segmentos constitui a Curva de Peano.

**Figura 3.15** Níveis da curva de peano



Fonte: Autoria própria. (Utilizando o software FMSLogo)

**Figura 3.16** Monumento em Cuneo-Itália com uma curva de Peano-Hilbert na pedra



Fonte: [http://www.wandern-piemonte.it/images/monumento\\_curva\\_peano.jpg](http://www.wandern-piemonte.it/images/monumento_curva_peano.jpg), 2015

## Estudo da Curva de Peano

Vamos denotar por  $N_k$  e  $C_k$  a quantidade e o tamanho de cada segmento no nível  $k$  da curva. Para conhecer o comportamento da curva, vejamos na tabela 3.1.4 a evolução de  $N_k$  e  $C_k$ , à medida que  $k$  aumenta:

**Tabela 3.4** Evolução de  $\ell_k$  e  $N_k$  na Curva de Peano

Nível	$\ell_k$	$N_k$
0	$\ell_0$	1
1	$\ell_1 = \frac{\ell_0}{3}$	9
2	$\ell_2 = \frac{\ell_1}{3} = \frac{\ell_0}{3^2}$	$9 \cdot N_1 = 9^2$
3	$\ell_3 = \frac{\ell_2}{3} = \frac{\ell_0}{3^3}$	$9 \cdot N_2 = 9^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k$	$\ell_k = \frac{\ell_0}{3^k}$	$9^k$

No nível 1, temos 9 segmentos de tamanho  $\ell_1 = \frac{\ell_0}{3}$ . No segundo nível, cada um dos  $N_1 = 9$  segmentos, gera mais 9 partes de tamanho um terço menor, então  $\ell_2 = \frac{\ell_1}{3} = \frac{\ell_0}{3^2}$  e  $N_2 = 9 \cdot N_1 = 9^2$ . Em geral, temos  $\ell_k = \frac{\ell_0}{3^k}$  e  $N_k = 9^k$ .

**Proposição 3.1.10.** *O comprimento  $C$  da Curva de Peano é infinito.*

**Demonstração:** O comprimento da curva, em um dado nível  $k$ , é exatamente o produto da quantidade de segmentos pela medida de cada um, logo, fazendo  $k$  ir ao infinito, temos:

$$C = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \cdot \ell_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 9^k \cdot \frac{\ell_0}{3^k} = \ell_0 \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{9^k}{3^k} = \ell_0 \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k = \infty \quad \blacksquare$$

Anos mais tarde, matemáticos como David Hilbert, Waclaw Sierpinski e Eliakim Moore publicaram trabalhos com foco nas curvas de Peano. Dentre estes, Hilbert foi quem mais popularizou esses modelos de curvas. Em virtude dos resultados obtidos por Hilbert, algumas literaturas denominam esses objetos como *curvas de Peano-Hilbert*.

## Dimensão da Curva de Peano

Ao longo dos níveis deste fractal, cada segmento é dividido em  $r = 3$  partes produzindo outros  $n = 9$  segmentos. Logo,

$$D = \frac{\log n}{\log r} = \frac{\log 9}{\log 3} = \frac{\log 3^2}{\log 3} = \frac{2 \cdot \log 3}{\log 3} = 2$$

Isso nos leva a concluir que a Curva de Peano cobre uma superfície plana. Para  $\ell_0 = 1$ , esse fractal preenche um quadrado de diagonal  $d = 1$ .

### 3.1.5. O Triângulo de Sierpinski

Nesta seção, iremos apresentar dois processos de formação do triângulo de Sierpinski<sup>7</sup>, um dos fractais mais conhecidos e abordados nas literaturas relacionadas.

Figura 3.17 Waclaw Sierpinski



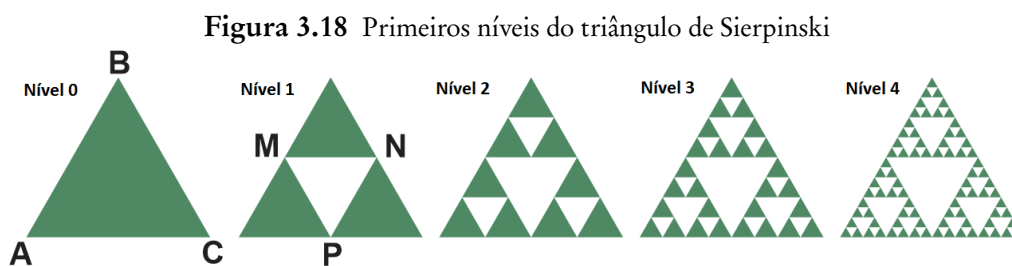
Fonte: <http://www.madrimasd.org/blogs/matematicas/page/3>, (2016)

#### Construção do Triângulo de Sierpinski

Este primeiro processo consiste na remoção de triângulos a partir de um triângulo qualquer, mas, por simplicidade, tomemos um triângulo equilátero de lado  $\ell_0$ .

**Objeto inicial:** Um triângulo equilátero  $ABC$  preenchido de lado  $\ell_0$  (nível zero).

- 1) Marcar e unir os pontos médios  $M, N$  e  $P$  dos lados  $AB, BC$  e  $AC$ , respectivamente;
- 2) Remover o triângulo central  $MNP$ , cujo lado mede  $\frac{\ell_0}{2}$ . Após esta remoção, temos o nível 1, do triângulo de Sierpinski;
- 3) Repetir, continuamente, os passos 1 e 2 para todos os triângulos restantes.



Fonte: Autoria própria. (Imagem criada no CorelDraw)

O triângulo de Sierpinski é o resultado deste processo após infinitas repetições. Em particular, o segundo nível deste fractal representa a imagem utilizada na logomarca do curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT (fig. 3.19).




<sup>7</sup>Waclaw Sierpinski (Varsóvia, 14 de março de 1882 - Varsóvia, 21 de outubro de 1969) matemático polonês. Sierpinski publicou diversos trabalhos a respeito das curvas que preenchem o plano.

**Figura 3.19** Logomarca do PROFMAT



Fonte: [www.profmtat-sbm.org.br](http://www.profmtat-sbm.org.br), 2015

Usando um procedimento de substituição recursiva, também podemos construir o Triângulo de Sierpinski do seguinte modo:

1. Objeto inicial: Uma superfície triangular 
2. Substitua, continuamente, cada triângulo  por  no respectivo tamanho e avance para o próximo nível.

### Estudo do triângulo de Sierpinski

Para cada estágio da geração do triângulo de Sierpinski, iremos determinar:

- a) A medida do lado e a quantidade de novos triângulos no nível  $k$ ;
- b) O perímetro e área total do triângulo de Sierpinski.

### Medida do lado e quantidade de triângulos

Sejam  $\ell_k$  e  $N_k$  a medida do lado e a quantidade de triângulos no nível  $k$ , respectivamente. Observando a fig. 3.18, ao passo que os níveis avançam, temos que:

$$\ell_1 = \frac{\ell_0}{2}, \quad \ell_2 = \frac{\ell_1}{2} = \frac{\ell_0}{2^2}, \quad \ell_3 = \frac{\ell_2}{2} = \frac{\ell_0}{2^3}, \quad \dots, \quad \ell_k = \frac{\ell_0}{2^k}$$

Com relação à quantidade de triângulos, começamos em  $N_0 = 1$ . Em seguida

$$N_1 = 3N_0 = 3, \quad N_2 = 3N_1 = 3^2, \quad N_3 = 3N_2 = 3^3, \quad \dots, \quad N_k = 3^k.$$

Podemos resumir os valores de  $\ell_k$  e  $N_k$  na tabela 3.5:

### Perímetro e área:

Conhecidos os valores de  $N_k$  e  $\ell_k$ , sejam  $A_k$  e  $P_k$  a área e o perímetro de cada pequeno triângulo no nível  $k$ . Em um triângulo equilátero de lado  $\ell$ , sabemos que sua área  $A$  e perímetro  $P$  valem:

$$A = \ell^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad P = 3\ell$$

Tabela 3.5 Quantidade de triângulos e medida do lado - nível  $k$ 

Nível	0	1	2	3	4	...	$k$
$\ell_k$	$\ell_0$	$\frac{\ell_0}{2}$	$\frac{\ell_0}{4}$	$\frac{\ell_0}{8}$	$\frac{\ell_0}{16}$	...	$\frac{\ell_0}{2^k}$
$N_k$	1	3	9	27	81	...	$3^k$

fonte: Autoria própria

portanto,

$$A_k = (\ell_k)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\ell_0}{2^k}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{(\ell_0)^2}{4^k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$P_k = 3\ell_k = \frac{3\ell_0}{2^k}$$

**Proposição 3.1.11.** *A área do triângulo de Sierpinski é nula enquanto o seu perímetro é infinito.***Demonstração:** Sejam  $A_T$  e  $P_T$  a área e o perímetro procurados respectivamente, o valor de  $A_T$  é igual ao produto do número de triângulos ( $N_k$ ) pela área de cada um. O perímetro  $P_T$  é obtido através de todos os perímetros  $P_k$ , logo:

$$A_T = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \cdot A_k, \quad P_T = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \cdot P_k$$

segue-se daí que:

$$A_T = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \cdot \frac{(\ell_0)^2}{4^k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = (\ell_0)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k = 0$$

$$P_T = \lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \cdot \frac{3\ell_0}{2^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 3\ell_0 \cdot \frac{3^k}{2^k} = 3\ell_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$$

■

### Dimensão do triângulo de Sierpinski

O triângulo de Sierpinski é um fractal com autossimilaridade exata. Ao dividir cada um de seus lados por  $r = 2$ , obtemos  $n = 3$  novos triângulos. Calculando a sua dimensão fractal por autossimilaridade, obtemos:

$$D = \frac{\log n}{\log r} = \frac{\log 3}{\log 2} = 1,58496\dots$$

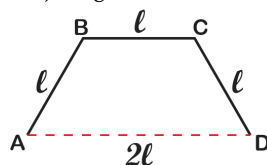
Esse número nos diz que o triângulo de Sierpinski não cabe em uma reta e não chega a ser um objeto geométrico com duas dimensões.

## Outros processos de construção

Sierpinski foi um dos estudiosos que trabalhou em diversas curvas análogas àquelas criadas por Peano. O triângulo de Sierpinski surgiu originalmente como uma curva contínua contida em um triângulo equilátero.

Um outro processo de construção<sup>8</sup> começa a partir de um objeto tomado como *gerador* da curva. Nosso gerador será semelhante a um trapézio isósceles ABCD sem a base maior AD (de medida  $2\ell$ ) de tal modo que a base menor e os lados não paralelos sejam tais que  $AB = BC = CD = \ell$ .

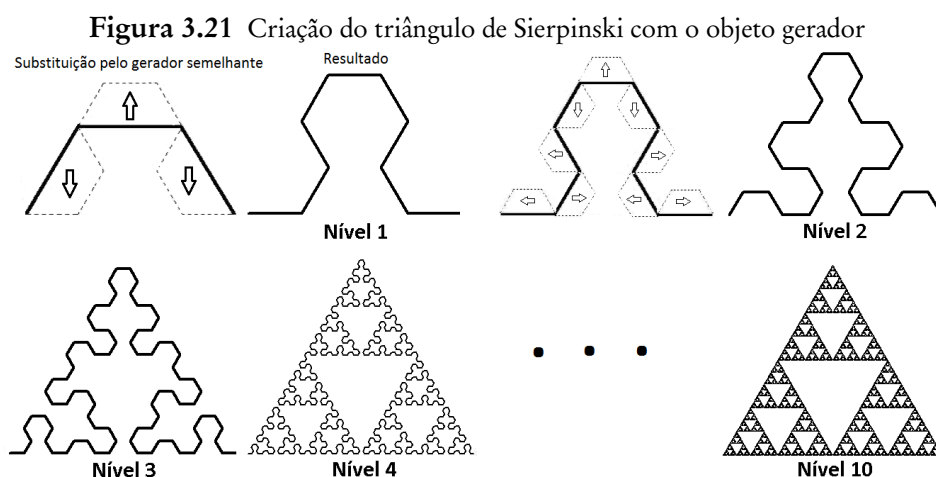
Figura 3.20 Objeto gerador da Curva de Sierpinski



Fonte: Autoria própria.

Tomando por referencial o gerador na posição da figura 3.20, o processo de geração consiste nos seguintes passos:

1. Substitua cada lado do gerador por uma cópia semelhante do próprio gerador na razão  $r = \frac{1}{2}$ . A cópia dos lados não-paralelos, AB e CD, deve ser voltada para “baixo”, enquanto que a réplica do lado BC é voltada para cima, fig. 3.21 (nível 1);
2. Repita o passo anterior, indefinidamente, para cada novo segmento gerado e siga para o próximo nível;



Fonte: Autoria própria. (Usando o FMSLogo e o Microsoft Paint)

Repetindo essas regras infinitas vezes, chegaremos ao triângulo de Sierpinski. Por outro lado, notamos que este processo gera uma curva com infinitas dobras que não se interceptam.

<sup>8</sup>No site <http://www.oftenpaper.net/sierpinski.htm>, há uma grande variedade de construções do triângulo de Sierpinski com diversas cores e efeitos tridimensionais.

## O Tapete de Sierpinski

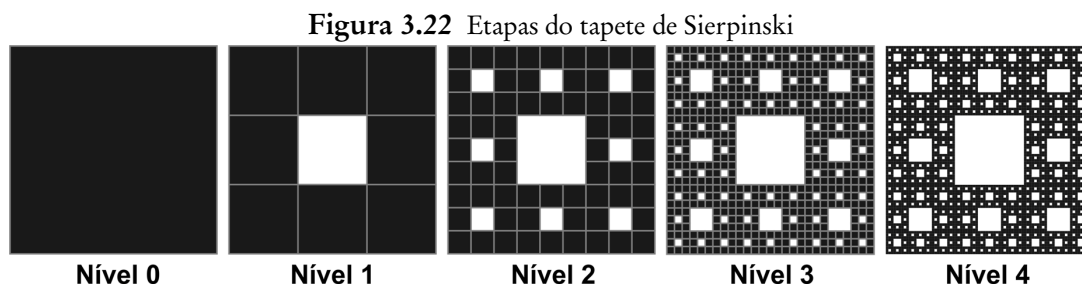
O tapete de Sierpinski é concebido a partir de um quadrado. Tomemos um quadrado de lado  $\ell_0$  e analogamente ao triângulo de Sierpinski, iremos determinar sua área e número de quadrados no  $k$ -ésimo nível.

### Construção do tapete de Sierpinski

O tapete de Sierpinski  $\mathbb{T}$  é um fractal construído através de um processo recursivo de remoção. Iremos usar a notação  $T_k$ , para indicar o  $k$ -ésimo nível do tapete de Sierpinski. Esse objeto é resultado de infinitas execuções do algoritmo abaixo (veja fig. 3.22).

**Objeto inicial:** Um quadrado de lado  $\ell_0$  ( $T_0$ )

1. Divida o lado de  $T_0$  em 3 partes iguais de forma a obter 9 quadrados congruentes;
2. Remova o quadrado central. Neste instante temos o tapete de nível 1, isto é,  $T_1$ ;
3. Repita, infinitamente, os passos 1 e 2 para todos os quadrados restantes e siga para o nível seguinte.



Fonte: Autoria própria. (Utilizando o CorelDraw)

### Estudo do Tapete de Sierpinski

Analogamente aos estudos realizados nas seções anteriores, iremos analisar matematicamente o comportamento do tapete de Sierpinski. Inicialmente, vamos determinar a medida do lado, o número de quadrados, o perímetro e a área dos quadrados restantes do  $T_k$ , os quais serão denotados por  $\ell_k, N_k, P_k$  e  $A_k$ , respectivamente.

No começo,  $N_0 = 1, P_0 = 4\ell_0$  e  $A_0 = (\ell_0)^2$ . Conforme a regra de formação do tapete, a cada passo, os lados do quadrado são divididos por 3 e remove-se o quadrado central, logo,

no nível 1, teremos:

$$\begin{aligned}\ell_1 &= \frac{\ell_0}{3}, \\ N_1 &= 8 \\ P_1 &= N_1 \cdot 4\ell_1 = 8 \cdot \frac{4\ell_0}{3} = \frac{8}{3}P_0 \\ A_1 &= N_1 \cdot (\ell_1)^2 = 8 \cdot \left(\frac{\ell_0}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}(\ell_0)^2 = \frac{8}{9}A_0\end{aligned}$$

No nível 2, cada quadrado do nível 1 gera 8 quadrados de lado  $\frac{\ell_1}{3}$ , então concluímos que:

$$\begin{aligned}\ell_2 &= \frac{\ell_1}{3} = \frac{\ell_0}{3^2} \\ N_2 &= N_1 \cdot 8 = 8^2 \\ P_2 &= N_2 \cdot 4\ell_2 = 8^2 \cdot \frac{4\ell_0}{3^2} = \left(\frac{8}{3}\right)^2 P_0 \\ A_2 &= N_2 \cdot (\ell_2)^2 = 8^2 \cdot \left(\frac{\ell_0}{9}\right)^2 = \frac{8^2}{9^2}(\ell_0)^2 = \left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0\end{aligned}$$

No geral, em cada etapa  $k$ , o tapete de Sierpinski segue conforme a tabela 3.6:

**Tabela 3.6** Lado e quantidade de triângulos do nível  $k$

Nível	0	1	2	3	...	$k$
$\ell_k$	$\ell_0$	$\frac{\ell_0}{3}$	$\frac{\ell_0}{3^2}$	$\frac{\ell_0}{3^3}$	...	$\frac{\ell_0}{3^k}$
$N_k$	1	8	$8^2$	$8^3$	...	$8^k$
$P_k$	1	$\frac{8}{3}P_0$	$\left(\frac{8}{3}\right)^2 P_0$	$\left(\frac{8}{3}\right)^3 P_0$	...	$\left(\frac{8}{3}\right)^k P_0$
$A_k$	1	3	$\left(\frac{8}{9}\right)^2 A_0$	$\left(\frac{8}{9}\right)^3 A_0$	...	$\left(\frac{8}{9}\right)^k A_0$

Fazendo  $k$  ir ao infinito, encontramos o perímetro total  $P_T$  e a área total  $A_T$  do tapete de Sierpinski. De fato,

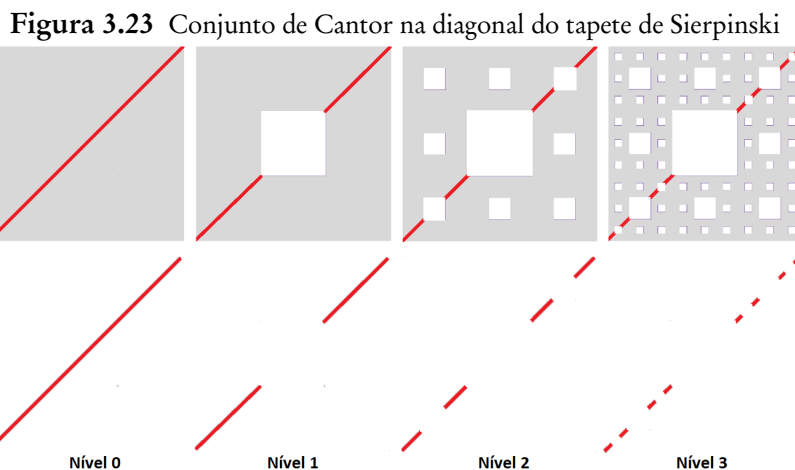
$$P_T = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3}\right)^k P_0 = P_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{3}\right)^k = \infty.$$

e

$$A_T = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k A_0 = A_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k = 0$$



Seja  $d$  uma diagonal de  $T_0$ ; uma propriedade do tapete de Sierpinski é que  $T \cap d = \mathbb{K}$ . Em outras palavras, a intersecção do tapete com  $d$  resulta em um conjunto de Cantor que inicia com um segmento de comprimento  $d = \ell_0\sqrt{2}$  ( $K_0 = [0, d]$ ), veja fig. 3.23.



Fonte: Autoria própria. (Usando o CorelDraw)

### 3.1.6. A Esponja de Menger

A Esponja de Menger<sup>9</sup>, a qual denotaremos por  $\mathbb{E}$ , é um objeto geométrico construído através de um infinito processo recursivo em um cubo. Este fractal é considerado uma versão tridimensional do Conjunto de Cantor e do Tapete de Sierpinski.

**Figura 3.24** Karl Menger - 1937



Fonte: <http://science.nd.edu/about/history/>, 2015

#### Construção da esponja Menger

Seja  $E_k$  a Esponja Menger em seu nível  $k$ , sua construção assemelha-se ao processo de remoção do tapete de Sierpinski e segue os seguintes passos (veja fig. 3.25):

<sup>9</sup>Karl Menger (Viena, 13/01/1902 - Highland Park, 05/10/1985) foi um matemático austríaco. Contribuiu com a teoria dos jogos trabalhando muitos anos no Instituto de Tecnologia de Illinois.

**Objeto Inicial:** Um cubo de aresta  $a_0$  (nível 0);

1. Divida as arestas do cubo inicial em três partes iguais. Dessa forma, serão criados 27 cubos congruentes de aresta  $\frac{a_0}{3}$ ;
2. Remova os cubos menores localizados no meio de cada face e remova o cubo central, deixando apenas os 20 cubos de aresta  $a_1 = \frac{a_0}{3}$ . Nesse ponto, temos uma Esponja Menger de Nível 1 ( $E_1$ ), veja fig. 3.25(b);
3. Repita, continuamente, os passos 1 e 2 para cada um dos pequenos cubos restantes e vá para o próximo nível.

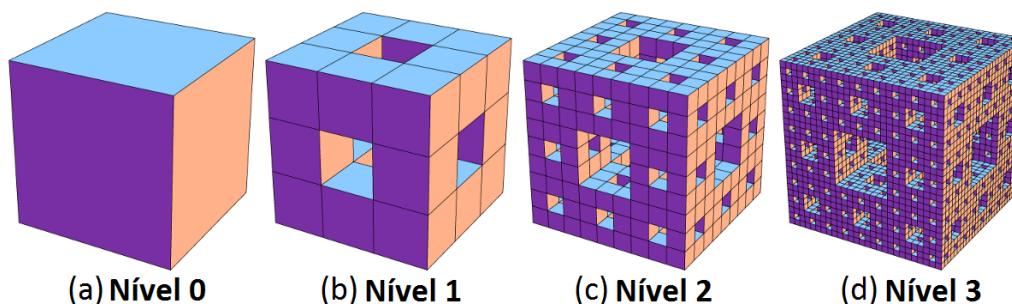
Observe que, em uma segunda repetição desses passos, cada um dos 20 cubos de aresta  $a_1$  dá origem a outros 20 cubos de aresta  $a_2 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_0}{3^2}$ . Ao final,  $E_2$  terá  $20^2$  cubos, 3.25(c). A esponja de Menger é o resultado de infinitas repetições deste processo. Para acompanharmos o quantitativo e o tamanho da aresta dos cubos em  $E_k$ , vejamos a tabela 3.7:

**Tabela 3.7** Tamanho da aresta e número de cubos

Nível	0	1	2	3	4	...	$k$
Aresta	$a_0$	$\frac{a_0}{3}$	$\frac{a_0}{3^2}$	$\frac{a_0}{3^3}$	$\frac{a_0}{3^4}$	...	$a_k = \frac{a_0}{3^k}$
Cubos restantes	1	20	400	8000	160000	...	$20^k$
Cubos removidos	0	7	$7 \cdot 20$	$7 \cdot 20^2$	$7 \cdot 20^3$	...	$7 \cdot 20^{k-1}$

Fonte: Autoria própria

**Figura 3.25** Níveis da Esponja de Menger



Fonte: <http://i1.wp.com/blog.../2012/02/Menger-stages-big.png>, 2015 (adaptado)

### Outra forma de construção

A esponja de Menger também pode ser gerada a partir de um processo de reunião de cubos. Para ilustrar esse procedimento, veja a fig. 3.26. Começando da esquerda para direita, temos as esponjas de nível 0, 1 e 2. O nível zero tem apenas um cubo (6cm de aresta), o nível 1 tem 20 cubos; o nível 2 é fruto da união de 20 esponjas de nível 1, e assim sucessivamente.

**Figura 3.26** Esponja de Menger criada por junção de cubos



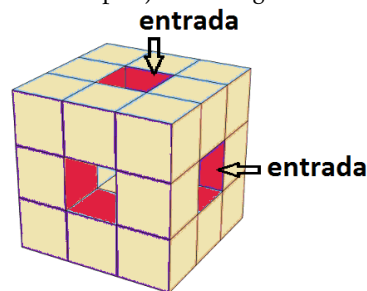
Fonte: Autoria própria.

### Estudo da Esponja de Menger

Em nosso estudo, vamos calcular a quantidade de quadrados, área da superfície e o volume da Esponja de Menger em cada nível  $k$ , os quais denotaremos por  $Q_k$ ,  $A_k$  e  $V_k$ . Em seguida, iremos determinar a área total  $A_T$  e o volume  $V_T$  da esponja de Menger. Nesse caso, basta analisar  $A_k$  e  $V_k$  quando  $k$  tende ao infinito.

Inicialmente, temos que  $Q_0 = 6$ . No nível 1, após as remoções dos cubos menores, cada face perde o quadrado central, restando 8 quadrados de lado  $a_1 = \frac{a_0}{3}$ . Com a remoção dos cubos centrais, percebemos que cada face deixa uma “entrada”. As referidas entradas tem 4 quadrados de lado  $a_1$ . Para uma melhor compreensão, veja as entradas do nível 1, destacadas em vermelho na fig. 3.27.

**Figura 3.27** Esponja de Menger com “entradas”



Fonte: Autoria própria.

Fazendo uma analogia, podemos comparar cada entrada como um cômodo que tem chão, teto e duas paredes quadradas, isto é, 4 quadrados. Portanto, as seis entradas do nível 1 adicionam  $6 \cdot 4 = 24$  quadrados de lado  $a_1$  na superfície da esponja. Com efeito, a quantidade de quadrados em  $E_1$  vale

$$Q_1 = Q_0 \cdot 8 + 24.$$

Na passagem para o nível 2, cada um dos  $Q_1$  quadrados de  $E_1$  dá origem a 8 novos quadrados de lado  $a_2$ . Além disso, cada um dos 20 cubos terá 24 quadrados gerados pelas suas 6 pequenas “entradas”, logo, a quantidade  $Q_2$  de quadrados será:

$$Q_2 = Q_1 \cdot 8 + 20 \cdot 24 = (Q_0 \cdot 8 + 24) \cdot 8 + 20 \cdot 24 = Q_0 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 20 \cdot 24.$$

Seguindo este raciocínio, ao chegar no nível 3, cada um dos  $Q_2$  quadrados de  $E_2$  deu origem a 8 novos quadrados de lado  $a_3$ , e cada um dos  $20^2$  cubos tem 24 quadrados de entradas, portanto

$$Q_3 = Q_2 \cdot 8 + 20^2 \cdot 24 = (Q_0 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 20 \cdot 24) \cdot 8 + 20^2 \cdot 24 = Q_0 \cdot 8^3 + 24 \cdot 8^2 + 20 \cdot 24 \cdot 8 + 20^2 \cdot 24.$$

Generalizando estes resultados para o nível  $k$ , teremos:

$$\begin{aligned} Q_k &= Q_{k-1} \cdot 8 + 20^{k-1} \cdot 24 \\ \Rightarrow Q_k &= Q_0 \cdot 8^k + 24 \cdot 8^{k-1} + 20^1 \cdot 24 \cdot 8^{k-2} + \dots + 20^{k-2} \cdot 24 \cdot 8 + 20^{k-1} \cdot 24 \end{aligned}$$

A área  $A_k$ , é igual a quantidade de quadrados de lado  $a_k$  vezes a área de cada um, então:

$$\begin{aligned} A_k &= Q_k \cdot (a_k)^2 = \left(\frac{a_0}{3^k}\right)^2 \cdot Q_k = (a_0)^2 \frac{Q_k}{9^k} \\ \Rightarrow A_k &= (a_0)^2 \left( \frac{Q_0 \cdot 8^k + 24 \cdot 8^{k-1} + 20^1 \cdot 24 \cdot 8^{k-2} + \dots + 20^{k-2} \cdot 24 \cdot 8 + 20^{k-1} \cdot 24}{9^k} \right) \\ \Rightarrow A_k &= (a_0)^2 \left( \frac{Q_0 \cdot 8^k}{9^k} + \frac{24 \cdot 8^{k-1}}{9^k} + \frac{20^1 \cdot 24 \cdot 8^{k-2}}{9^k} + \dots + \frac{20^{k-2} \cdot 24 \cdot 8}{9^k} + \frac{20^{k-1} \cdot 24}{9^k} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow A_k &= (a_0)^2 \left( \frac{Q_0 \cdot 8^k}{9^k} + \frac{24 \cdot 8^{k-1}}{9^k} + \frac{20^1 \cdot 24 \cdot 8^{k-2}}{9^k} + \dots + \frac{20^{k-2} \cdot 24 \cdot 8}{9^k} \right) + \underbrace{(a_0)^2 \cdot \frac{20^{k-1} \cdot 24}{9^k}}_Q \end{aligned}$$

Em particular,  $A_k > Q$ , e  $A_T = \lim_{k \rightarrow \infty} A_k$ , logo, tomando o limite em cada membro, temos,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k > \lim_{k \rightarrow \infty} Q = \lim_{k \rightarrow \infty} (a_0)^2 \cdot \frac{20^k \cdot 20^{-1} \cdot 24}{9^k} = (a_0)^2 \frac{24}{20} \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{20}{9} \right)^k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} A_k = \infty \quad \blacksquare$$

Portanto, a área da Esponja de Menger é infinita.

O cálculo do volume  $V_k$  de  $E_k$  fica imediato se observarmos a tabela 3.7. Basta multiplicarmos a quantidade de cubos restantes no nível  $k$  pelo volume de cada um, logo,

$$V_k = 20^k \cdot (a_k)^3 = 20^k \cdot \left(\frac{a_0}{3^k}\right)^3 = a_0 \cdot \frac{20^k}{(3^k)^3} = a_0 \cdot \frac{20^k}{27^k} = a_0 \left(\frac{20}{27}\right)^k$$

Segue-se daí que:

$$V_T = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k = a_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{20}{27}\right)^k = 0$$

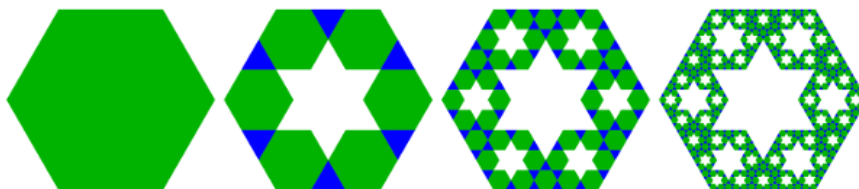
## Propriedades da Esponja de Menger

Notamos que cada face de  $E_k$  contém um tapete de sierpinski, além disso, existem duas propriedades interessantes da esponja de Menger. Uma diz respeito à relação de suas diagonais com o conjunto de Cantor e a outra refere-se à uma secção transversal. Seja  $d$  uma das diagonais de  $E_0$ , a intersecção  $d \cap \mathbb{E}$  é um conjunto de Cantor cujo segmento inicial vale  $K_0 = [0, d]$ , donde  $d = \ell_0 \sqrt{3}$ .

Uma outra propriedade está relacionada à secção gerada por um plano  $\alpha$  que contém os pontos médios de dois pares arestas consecutivas, contidos em faces opostas da esponja (pontos  $M, N, P$  e  $Q$  da fig. 3.28(a)). A intersecção  $\alpha \cap \mathbb{E}$ , gera um objeto (fig. 3.29) semelhante ao fractal Hexagonal de Dürer, diferindo apenas pela presença de triângulos equiláteros (em azul) entre os hexágonos. Veja as animações<sup>10</sup> com detalhes desta secção.



**Figura 3.29** Níveis do fractal das secções de  $\mathbb{E}$



Fonte: <http://blog.zacharyabel.com/wp-content/uploads/2012/02/>, 2016

## Dimensão da Esponja de Menger

Pelo processo de construção da Esponja de Menger, as suas arestas são divididas em  $r = 3$  partes e cada cubo gera  $n = 20$  cubos menores. Logo, a dimensão de  $\mathbb{E}$  vale:

$$D = \frac{\log n}{\log r} = \frac{\log 20}{\log 3} \cong \frac{1,30103}{0,47712} = 2,7268\dots$$

<sup>10</sup>

- <https://www.youtube.com/watch?v=fWsmq9E4YCO>
- <https://www.simonsfoundation.org/multimedia/mathematical-...rprising-menger-sponge-slice>

Portanto, constatamos que esta forma fractal é mais “espaçosa” que um plano, porém, não chega a ser um objeto tridimensional.

### 3.1.7. O Conjunto de Mandelbrot

*Nuvens não são esferas, montanhas não são cones, continentes não são círculos, o som do latido não é contínuo e nem o raio viaja em linha reta.*  
(Benoît Mandelbrot)

O conjunto  $\mathbb{M}$  de Mandelbrot<sup>11</sup> produz o mais famoso dos fractais. Alguns matemáticos o consideram como um dos objetos mais complexos da matemática. Apesar da sua colenda complexidade e beleza, o conjunto  $\mathbb{M}$  resulta de um processo de construção simples, utilizando iteradas de funções complexas.

Figura 3.30 Benoît Mandelbrot



Fonte: [https://commons.wikimedia.org/...\\_Mandelbrot\\_mg\\_1785.jpg](https://commons.wikimedia.org/..._Mandelbrot_mg_1785.jpg), 2016

Segundo [Man10], a gênese do conjunto  $\mathbb{M}$ , veio após a segunda guerra mundial, quando o seu tio Szolem Mandelbrot, professor de Matemática do “Collège de France”, disse-lhe o seguinte: “Olhe, há um problema que eu não podia resolver há 25 anos atrás, e que ninguém podia resolver. Esta é uma construção de Gaston Julia<sup>12</sup> e Pierre Fatou. Se puder encontrar algo novo, qualquer coisa, você tem sua carreira feita.”

Inicialmente Mandelbrot não viu nada de novo, então ele resolveu utilizar um computador e uma impressora nesse problema relativamente antigo. Primeiramente, fez sua investigação no conjunto dos números reais, depois partiu para os números complexos e eis que surge uma forma intrigante e complexa na impressão: era o conjunto de Mandelbrot. Iremos falar desse conjunto para a classe de funções complexas  $f(z) = z^2 + c$ , com  $c \in \mathbb{C}$  constante.

**Definição 3.1.1.** *Seja a função complexa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $f(z) = z^2 + c$ . O conjunto  $\mathbb{M}$ , para  $f$ , é constituído por todas as constantes  $c$  complexas, cuja órbita de zero é limitada.*

<sup>11</sup>Benoît B. Mandelbrot (Varsóvia, 20/11/1924 - Cambridge, 14/10/2010) foi um matemático francês de origem judaico-polonesa. É conhecido principalmente por suas contribuições no campo da geometria fractal. Ele mostrou a correlação desta geometria com a natureza e diversos ramos da ciência.

<sup>12</sup>Gaston Maurice Julia (1893-1978) e Pierre Joseph Louis Fatou (1878-1929) foram matemáticos franceses que fizeram pesquisas no campo da dinâmica analítica complexa.

**Definição 3.1.2.** O módulo de um número complexo  $z = a + bi$ , é dado por  $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

Em outras palavras se  $c \in \mathbb{M}$ , então a sequência  $c, f(0), f^2(0), f^3(0), \dots, f^n(0), \dots$ , é limitada para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Em termos práticos, para determinar se  $f^n(0)$  cresce infinitamente, basta checar se existe um inteiro  $n$  tal que  $|f^n(0)| > 2$ , ou seja, se  $|f^n(0)| \leq 2$  então  $c \in \mathbb{M}$ . A fig. 3.31 mostra uma das primeiras reproduções gráficas do conjunto de Mandelbrot. Nessa época, anos 70, os computadores não tinham o poder de processamento equivalente às máquinas dos anos 80. Na imagem, notamos que a representação faz uma aproximação gráfica do conjunto de Mandelbrot usando apenas asteriscos (\*) como pontos do plano complexo.

**Figura 3.31** Conjunto de Mandelbrot (Representação com asteriscos)



Fonte: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d7/Mandel.png>, 2015

### 3.1.7.1. O conjunto $\mathbb{M}$ em cores

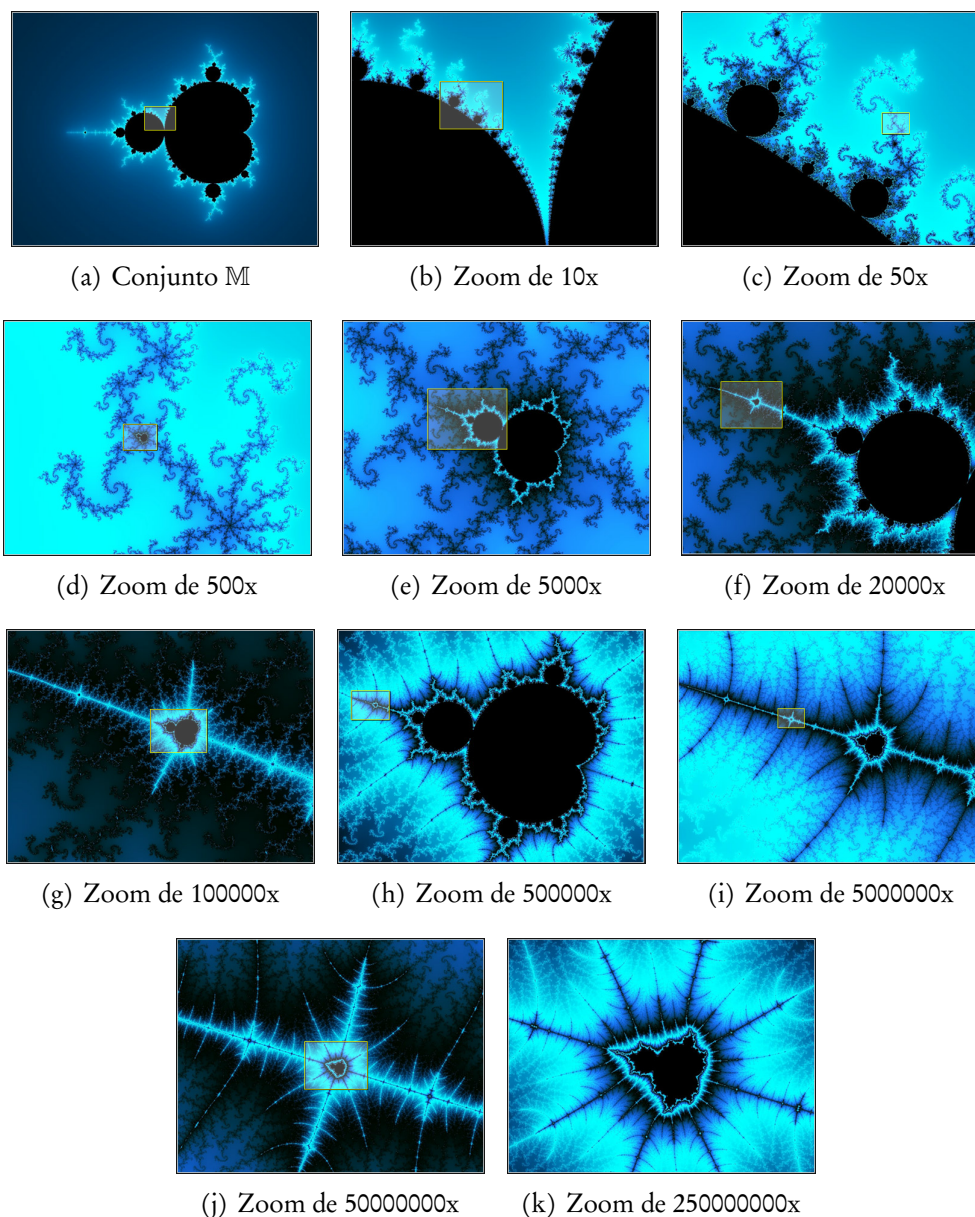
Em geral, o conjunto de Mandelbrot costuma ser apresentado em diversas cores, o que enaltece seu aspecto visual. Os softwares especializados em fractais (veja pag. 113) utilizam diferentes algoritmos de coloração. A maioria deles, representa graficamente os elementos do conjunto  $\mathbb{M}$  em preto. Entretanto, o capricho das imagens vem das demais cores associadas aos números complexos que estão fora de  $\mathbb{M}$ . O algoritmo mais comum, relaciona uma cor  $c_1$  a um ponto  $y$  cuja primeira iterada escapa do círculo de raio 2. Se a segunda iterada de  $y$  escapa do círculo, o ponto é associado a uma cor  $c_2$ . De forma geral, seja  $f_y(z) = z^2 + y$ , se  $|f_y^k(0)| > 2$  para algum  $k$  natural, então  $y$  é plotado no plano com uma cor  $c_k$ . Na fig. 3.32(a) e no site<sup>13</sup>, temos duas possíveis representações coloridas do conjunto de Mandelbrot.

Este fractal de Mandelbrot, possui infinitas cópias com autossemelhança aproximada. Acompanhe, na fig. 3.32, as sucessivas ampliações (Zoom's) do conjunto  $\mathbb{M}$  (Até 250 milhões de vezes maior!):

<sup>13</sup><http://www.prof-edigleyalexandre.com/2011/11/criando-wallpapers-fractal-hd-em-linux.html>



**Figura 3.32** Ampliações do conjunto de Mandelbrot



Fonte: <http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/fractal-detail.html>, 2016

O vídeo<sup>14</sup> exibe ampliações do conjunto de Mandelbrot com diversos níveis de cores e detalhes. Também no site<sup>15</sup>, há animação interativa das ampliações da fig. 3.32. No capítulo 5, temos uma breve descrição do programa UltraFractal, nele o usuário pode ampliar e reduzir livremente qualquer parte do Conjunto de Mandelbrot, bem como configurar o número de iterações, modificar as cores e salvar as imagens.

<sup>14</sup>Veja *A Journey in The Mandelbrot set*, um vídeo baseado em uma exposição chamada *sedução*, disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=JGxbhdr3w2I>. Nas imagens, o autor, professor Pavel Boytchev, combina partes do conjunto de Mandelbrot com a natureza e fotos digitais.

<sup>15</sup><http://www.pbs.org/wgbh/nova/physics/fractal-detail.html>



### 3.1.7.2. Estudo de algumas constantes $c$

Nesta seção, veremos o comportamento das iteradas de alguns valores de  $c$  (exemplos de [LG10]), pela função  $f(z) = z^2 + c$ . Também iremos verificar a órbita dos pontos  $c_1 = c - \varepsilon$  e  $c_2 = c + \varepsilon$  e constatar, por observação, que  $c_1 \in \mathbb{M}$  e  $c_2 \notin \mathbb{M}$ , para  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , suficientemente pequeno. Vamos acompanhar a sequência de iteradas para:

a)  $c = -2$ :

$$f^0(0) = -2, \quad f^1(0) = (-2)^2 - 2 = 2, \quad f^2(0) = 2^2 - 2 = 2, \quad \dots, \quad f^k(0) = 2, \dots$$

b)  $c_1 = -2 - 0,00001 = -2,00001$ ; vejamos as iteradas numa tabela:

**Tabela 3.8**  $c_1 = -2,00001$  (sequência da esquerda para a direita)

2,00003	2,00011	2,00043	2,00171	2,00683
2,02737	2,11023	2,45306	4,01748	14,14011
197,942	39,179,2	1,5E+9	2,4E+18	5,5E+36
3,1E+73				

Fonte: [LG10](adaptado)

c)  $c_2 = -2 + 0,00001 = -1,99999$  acompanhe as iteradas na tabela:

**Tabela 3.9**  $c_2 = -1,99999$  (sequência da esquerda para a direita)

1,999970	1,999890	1,999570	1,998290	1,993174
1,972752	1,891762	1,578773	0,492534	-1,757400
1,088466	-0,815231	-1,335388	-0,216729	-1,953019
1,814292	1,291665	-0,331592	-1,890037	1,572248
0,471975	-1,777230	1,158556	-0,657737	-1,567371
0,456663	-1,791449	1,209298	-0,537588	-1,710989
0,927494	-1,139744	-0,700973	-1,508626	0,275963

Fonte: [LG10](adaptado)

Conforme a sequência na tabela 3.8, vemos que  $c_2$  escapa do conjunto de Mandelbrot. Por observação, a órbita de  $c_1$  (tabela 3.9) fica oscilando continuamente, mesmo em sequências mais longas, nesse caso,  $c_1 \in \mathbb{M}$ . Em  $c = -2$ , as iteradas estacionam em 2, logo  $c \in \mathbb{M}$ .

Esse fato curioso também ocorre em  $c = 0,25$ ,  $c_1 = 0,25 - 0,00001 = 0,24999$  e  $c_2 = 0,25 + 0,00001 = 0,25001$ , isto é, apesar da proximidade de  $c_1$  e  $c_2$ , temos que  $c, c_1 \in \mathbb{M}$  e  $c_2 \notin \mathbb{M}$ . Usando uma planilha, é relativamente fácil gerar sequências mais longas e constatar os mesmos comportamentos das órbitas de  $c_1, c_2$  para qualquer  $\varepsilon$  real, tal que  $|\varepsilon| < 0,00001$ .

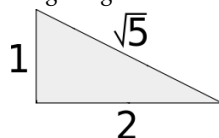
## 3.2. Outros Fractais

Para finalizar o estudo da nossa amostra de fractais, iremos abordar, nesta seção, as propriedades de dois fractais que foram concebidos recentemente.

### 3.2.1. O Fractal Pinwheel

O *Fractal Pinwheel*, o qual chamaremos de  $\mathbb{P}$ , é uma forma geométrica construída a partir de um processo análogo àquele que produz o triângulo de Sierpinski. Conforme [FW11], este objeto foi criado por Charles Radin<sup>16</sup> inspirado no *Ladrilhamento Pinwheel* definido por John Conway<sup>17</sup>. Este fractal, criado nos anos 90, origina-se a partir de um triângulo  $T_0$  de lados 1, 2 e  $\sqrt{5}$ . Em particular,  $T_0$  é retângulo, pois  $(\sqrt{5})^2 = 1^2 + 2^2$ . Salientamos que um triângulo semelhante a  $T_0$  também pode representar o objeto inicial do fractal  $\mathbb{P}$ .

Figura 3.33 Triângulo gerador do Fractal Pinwheel



Fonte: [https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pinwheel\\_1.svg](https://en.wikipedia.org/wiki/File:Pinwheel_1.svg) (adaptado), 2015

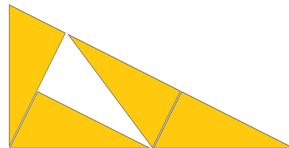
### Construção do Fractal Pinwheel

O algoritmo de construção de  $\mathbb{P}$  consiste na remoção de triângulos do interior de  $T_0$ . Este é um exemplo de fractal cujo fator de aumento  $r$  é irracional.

**Objeto inicial:** Um triângulo  $T_0$  com a superfície preenchida (Nível 0);

1. divida  $T_0$  em cinco triângulos retângulos congruentes, na razão  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ , fig 3.34;
2. em seguida, remova o triângulo central, cujo cateto maior é paralelo à hipotenusa de  $T_0$ . Nesse momento temos o nível 1 de  $\mathbb{P}$ ;

Figura 3.34 divisão do triângulo na razão  $\frac{\sqrt{5}}{5}$



Fonte: Autoria própria.

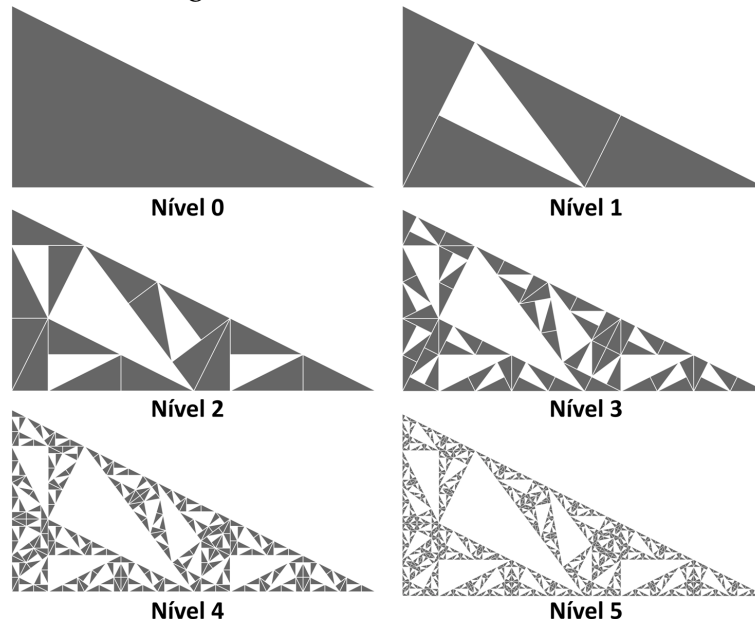
<sup>16</sup>Charles Lewis Radin - Matemático americano, conhecido pelos seus trabalhos em ladrilhamentos não periódicos. Veja mais em [http://www.wikiwand.com/en/Charles\\_Radin](http://www.wikiwand.com/en/Charles_Radin)

<sup>17</sup>Matemático inglês com trabalhos em teoria de grupos finitos, teoria dos números, teoria dos jogos combinatórios e teoria do código. ([http://www.wikiwand.com/en/John\\_Horton\\_Conway](http://www.wikiwand.com/en/John_Horton_Conway))

3. repita os passos 1 e 2, infinitamente, nos triângulos restantes, e vá para o nível seguinte.

O Fractal Pinwheel resulta da execução infinita desses passos. (fig. 3.35)

**Figura 3.35** Níveis do Fractal Pinwheel



Fonte: Autoria própria. (Usando o software CorelDraw)

### Estudo do Fractal Pinwheel

Faremos um estudo da quantidade de triângulos, da área e do perímetro dos triângulos do Fractal Pinwheel. Considere como  $N_k$ ,  $P_k$  e  $A_k$  a quantidade, o perímetro e a área de cada pequeno triângulo da  $k$ -ésima etapa de  $\mathbb{P}$ .

No início, temos que  $N_0 = 1$ ,  $A_0 = \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$  e  $P_0 = 1 + 2 + \sqrt{5} = 3 + \sqrt{5}$ . Por construção, no nível 1, o triângulo inicial dá lugar a  $N_1 = 4$  triângulos congruentes e cada um deles é semelhante a  $T_0$  na razão  $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Proposição 3.2.1.** *Sejam  $A_1$  e  $A_2$  triângulos semelhantes na razão  $r$ , a razão de semelhança entre as áreas e os perímetros de  $A_1$  e  $A_2$  valem respectivamente  $r^2$  e  $r$ .*

Usando a proposição 3.2.1, podemos afirmar que:

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \cdot A_0 = \frac{1}{5}A_0 \quad P_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}P_0$$

Seguindo para o nível 2, cada triângulo do nível 1 gera 4 triângulos, portanto, no nível 2 teremos  $N_2 = 4 \cdot N_1 = 4^2$  triângulos. Segue-se também que:

$$A_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \cdot A_1 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot A_0 = \frac{1}{25} A_0$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot P_1 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} P_0 = \frac{1}{5} P_0$$

Seguindo para o terceiro nível, cada um dos  $N_2 = 4^2$  triângulos gera 4 quadrados menores, logo  $N_3 = 4 \cdot N_2 = 4^3$ . Concluimos então que:

$$A_3 = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 \cdot A_2 = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{25} A_0 = \frac{1}{125} A_0$$

$$P_3 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot P_2 = \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot P_0 = \frac{\sqrt{5}}{25} \cdot P_0$$

Generalizando, os valores de  $N_k, A_k$  e  $P_k$  evoluem conforme a tabela abaixo:

**Tabela 3.10** Valores de  $N_k, A_k$  e  $P_k$  ao longo dos níveis do Fractal de Pinwheel

Nível	$N_k$	$A_k$	$P_k$
0	1	$A_0 = 1$	$P_0 = 3 + \sqrt{5}$
1	4	$\frac{1}{5} A_0$	$\frac{\sqrt{5}}{5} P_0$
2	16	$\frac{1}{25} A_0$	$\frac{1}{5} P_0$
3	64	$\frac{1}{125} A_0$	$\frac{\sqrt{5}}{25} P_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k$	$4^k$	$\frac{1}{5^k} A_0$	$\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^k P_0$

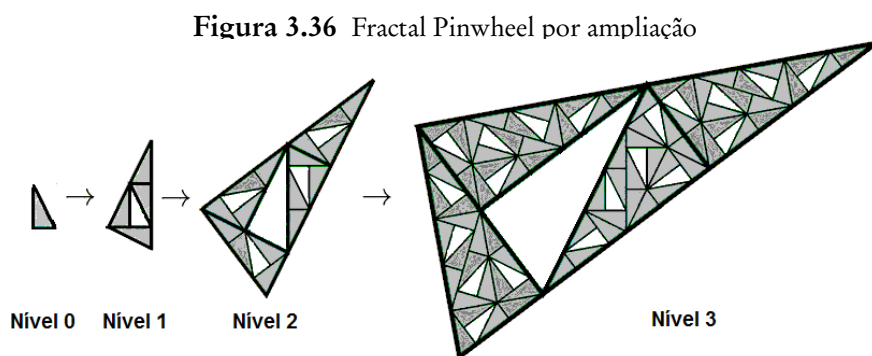
Fonte: Autoria própria.

Diante do exposto, seja  $A_T$  e  $P_T$  a área e o perímetro total de  $\mathbb{P}$ ; tomando a quantidade de triângulos do nível  $k$ , concluimos que:

$$A_T = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \cdot A_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot \frac{1}{5^k} A_0 = A_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{5}\right)^k = 0$$

$$P_T = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \cdot P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} 4^k \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^k \cdot P_0 = P_0 \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4\sqrt{5}}{5}\right)^k = \infty$$

Um outro processo que produz o Fractal Pinwheel consiste em manter  $T_0$  fixo e depois uní-lo com quatro triângulos congruentes até formar um triângulo semelhante maior. Em seguida, remove-se  $T_0$  e assim obtemos o triângulo  $T_1$  (nível 1), que passa a ser o gerador do próximo nível. A partir daí, reunimos quatro cópias de  $T_1$ , removendo-o em seguida para obter  $T_2$  (nível 2). Executando esse processo de reunião, continuamente, obtemos o Fractal Pinwheel por ampliação (veja fig. 3.36).



Fonte: [FW11] (adaptado)

Curiosamente, ao construir este fractal por ampliação, demonstra-se que, a cada nível, o fractal pinwheel gira  $\arctan \frac{1}{2} \cong 26,565^\circ$  em torno do vértice do ângulo reto.

### Dimensão do fractal

Por construção, o fractal Pinwheel possui como fator de aumento  $r = \sqrt{5}$  e por sua vez, são geradas  $n = 4$  partes. Portanto, a dimensão  $D$  deste fractal é:

$$D = \frac{\log 4}{\log \sqrt{5}} = \frac{\log 4}{\frac{1}{2} \log 5} \cong \frac{0,60205}{0,34948} \cong 1,7227$$

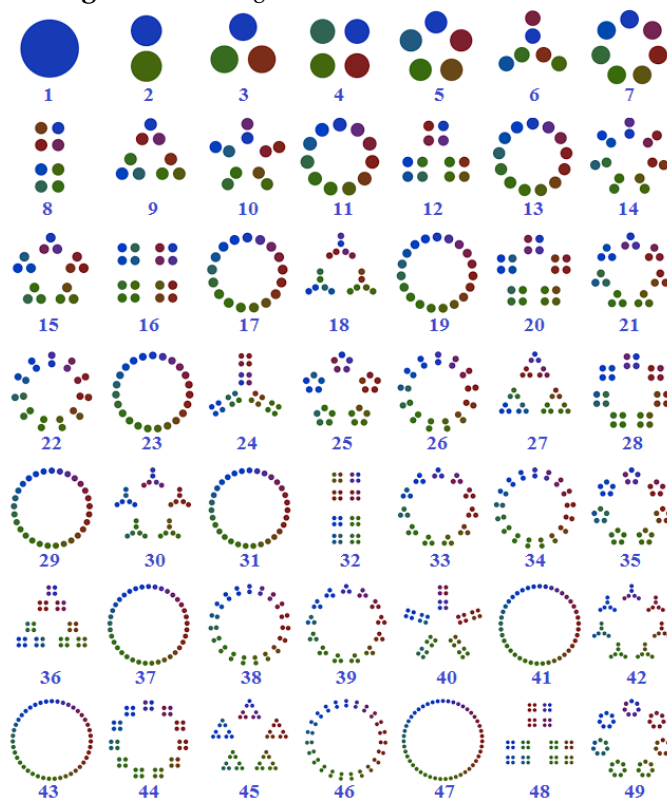
### 3.2.2. Diagrama de fatores

O objetivo desta seção é apresentar uma das mais recentes formas fractais criadas no século XXI. Os *Diagramas de Fatores* (uma possível tradução para “*Factorization Diagrams*”) consistem em uma representação geométrica de um número natural  $n$  por meio de uma reunião de pontos, agrupados conforme os fatores primos de  $n$ . Esses diagramas foram idealizados por Brent Yorgey<sup>18</sup> em outubro de 2012. Na fig. 3.37 temos os diagramas dos 49 primeiros naturais não-nulos.

Em geral, o diagrama não apresenta uma estrutura fractal, porém quando  $n = a^b$ , com  $b \in \mathbb{N}$  e  $a$  primo, o diagrama de fatores torna-se autossimelhante. Veja fig. 3.42.

<sup>18</sup>Veja mais sobre os diagramas de fatores e Brent Yorgey em <http://mathlesstraveled.com/about-me/>

Figura 3.37 Diagrama de fatores naturais de 1 a 49



Fonte: <http://members.peak.org/~jeremy/factordiagrams/resources/FactorizationDiagrams.png>, 2015

### Construção do diagrama


Considere o número natural  $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdots p_{k-1} \cdot p_k$ , onde cada  $p_i$  é um fator primo de  $n$ . Vamos admitir que os fatores estão em ordem crescente.

**Objeto inicial:** Um número  $n \in \mathbb{N}^*$ ;

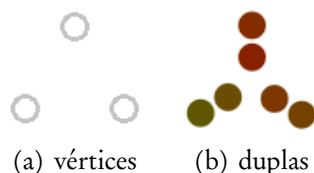
1. Se  $p_1 = 2$ , coloque os pontos um acima do outro (ou lado a lado), caso contrário, organize os  $p_1$  pontos como se fossem vértices de um polígono regular de  $p_1$  lados;
2. Organize cada grupo de  $p_1$  pontos, do passo anterior, na posição dos vértices de um polígono regular de  $p_2$  lados;
3. Organize o grupo de  $p_1 \cdot p_2$  pontos do item anterior ao longo dos vértices de um polígono imaginário de  $p_3$  lados;
4. Repita  $k$  vezes este processo até arrumar os  $p_1 \cdot p_2 \cdots p_{k-1}$  pontos ao longo dos  $p_k$  vértices de um polígono regular “imaginário” de  $p_k$  lados.

**Exemplo 3.2.1.** Construir o diagrama de fatores de  $n = 30$ .

**Solução:** temos que  $n = 2 \cdot 3 \cdot 5$ , então:

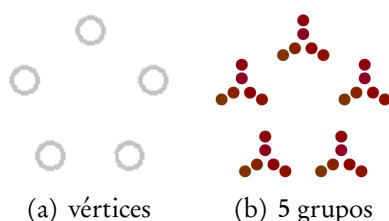
1. organize os  $p_1 = 2$  pontos, um acima do outro: 
2. organize cada grupo (dupla) de  $p_1 = 2$  pontos ao longo de  $p_2 = 3$  vértices de um triângulo virtual:

**Figura 3.38** Organização das três duplas de pontos



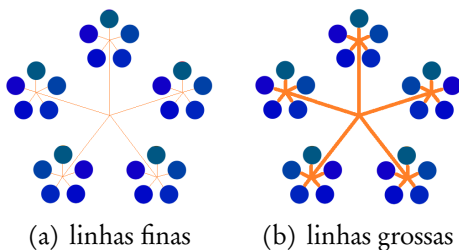
3. arrume os  $p_1 \cdot p_2 = 6$  pontos do item anterior em cada um dos  $p_3 = 5$  vértices de um pentágono imaginário, e assim finalizamos o diagrama de fatores de  $n = 30$ .

**Figura 3.39** Organização dos 5 grupos de 6 pontos



Os pontos do diagrama podem ser unidos com linhas finas ou mais largas, com origem no centro dos polígonos virtuais e extremidade nos pontos, veja figs. 3.2.2 e 3.42.

**Figura 3.40** Diagramas de  $n = 25$  com pontos unidos pelas linhas

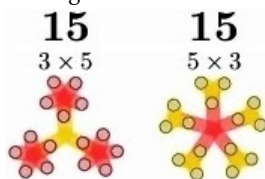


Fonte: Autoria própria. (usando o CorelDraw e o Microsoft Paint)

No exemplo 3.2.1, fizemos a construção do diagrama de  $n = 30$  com os fatores em ordem crescente. No entanto, em virtude da comutatividade multiplicativa de  $\mathbb{N}$ , a ordem dos fatores pode gerar outros diagramas. Na fig 3.41, temos dois possíveis diagramas para  $n = 15$ , isto é, um deles tem 3 grupos de 5 pontos enquanto o outro diagrama tem 5 grupos de 3 pontos pois  $15 = 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$ .

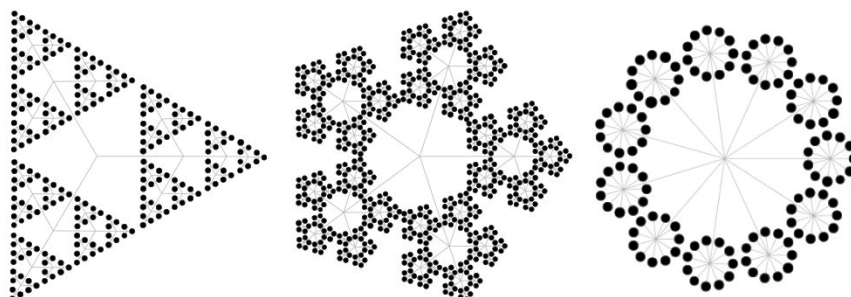
Para determinar a quantidade de diagramas de um número  $n$ , temos que fazer uso dos conceitos de análise combinatória e calcular o número de permutações dos fatores de  $n$ .

Figura 3.41 Diagrama de fatores do número 15



Fonte: [https://disco.bu.edu/~tsl/The\\_Beauty\\_of\\_Numbers.html](https://disco.bu.edu/~tsl/The_Beauty_of_Numbers.html), 2015

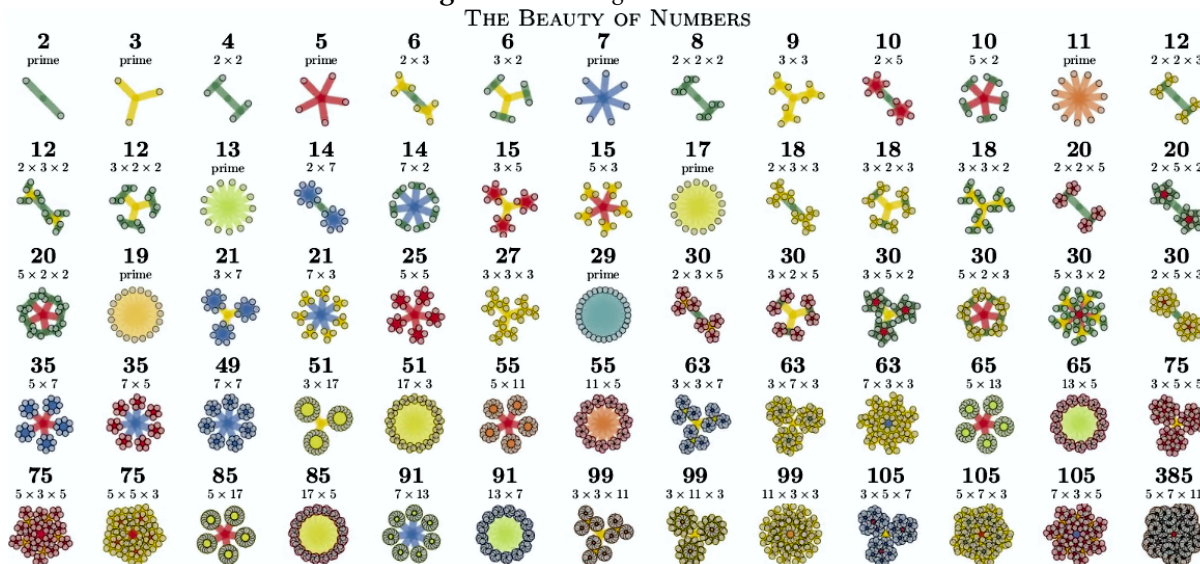
Figura 3.42 Diagramas de 81 (Triângulo de Sierpinski), 125 (fractal de Dürer pentagonal) e 121



Fonte: Autoria própria. (Utilizando o Software CorelDraw)

Note que os diagramas de 81 e 125 são análogos ao triângulo de Sierpinski e ao fractal pentagonal de Dürer, respectivamente. Veja mais diagramas na animação criada por Todd S. Lehman<sup>19</sup> (fig. 3.43). Também no site<sup>20</sup>, desenvolvido por Stephen Von Worley, podemos visualizar uma sequência de diagramas de fatores, a partir de 1, com a possibilidade de avançar, pausar e acelerar a contagem dos números.

Figura 3.43 Diagramas de fatores



Fonte: [https://disco.bu.edu/~tsl/The\\_Beauty\\_of\\_Numbers.html](https://disco.bu.edu/~tsl/The_Beauty_of_Numbers.html), 2015

<sup>19</sup>[https://disco.bu.edu/~tsl/The\\_Beauty\\_of\\_Numbers.html](https://disco.bu.edu/~tsl/The_Beauty_of_Numbers.html)

<sup>20</sup><http://www.datapointed.net/visualizations/math/factorization/animated-diagrams/>



## 4. FRACTAIS EM CONTEXTOS DE SALA DE AULA

Neste capítulo, iremos abordar atividades<sup>1</sup> que utilizam na íntegra os estudos dos fractais geométricos vistos no capítulo 3. Essas atividades incluem a identificação de padrões, cálculo da dimensão, área, volume, perímetro e outras características do fractal da tarefa. Vale salientar que, cada atividade pode ser adaptada quanto a duração e número de integrantes, visto que existem tarefas envolvendo a construção de grandes objetos e/ou a manipulação de materiais recicláveis.

### 4.1. Atividades desenvolvidas

No decorrer desta seção, mostraremos três atividades que devem ser desenvolvidas em grupo, em decorrência do volume de trabalho, pois alguns objetos tem dimensões próximas de 7 metros. A critério do professor, as atividades podem envolver mais de uma turma e assim estimular a interação dos alunos. A Atividade 1, por exemplo, foi desenvolvida com a participação de 3 turmas da 1<sup>a</sup> série.

#### 4.1.1. Atividade 1 - Super Triângulo de Sierpinski

Esta atividade consiste na construção de um Super Triângulo de Sierpinski - STS (fig. 4.6), através da reunião de vários triângulos equiláteros de 21cm de lado (triângulos menores). A tarefa foi aplicada em três turmas da 1<sup>a</sup> série e parte do desafio era descobrir quantos triângulos menores são necessários para construir o STS. A atividade garantiu uma boa participação dos alunos em virtude da curiosidade das turmas em ver a aparência final do trabalho. A fig. 4.2 tem um esboço da construção gradativa do STS.

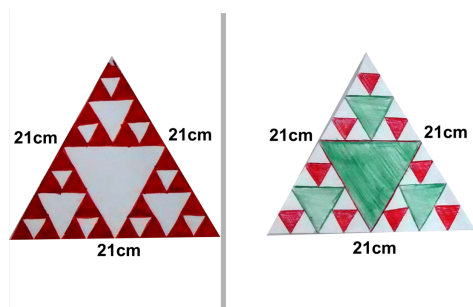
#### As características do STS

O Super Triângulo de Sierpinski deve ter as seguintes características:

1. Possuir aproximadamente 7m de lado;
2. Ser construído com triângulos menores conforme a fig 4.1. Cada triângulo deve ter 21cm de lado (largura de uma folha de papel A4);
3. Cada triângulo do item anterior deve ser um pequeno triângulo de Sierpinski de nível 3, colorido e desenhado à mão;
4. O STS deve ser montado no período de uma hora/aula, em um local amplo;
5. Não é permitido utilizar fotocópias (xerox) dos triângulos menores;

---

<sup>1</sup>Realizamos as seguintes atividades: Super Triângulos de Sierpinski (3 turmas envolvidas), Triângulo de Sierpinski Metálico (com 243 latinhas de refrigerante) e a Mega Esponja de Menger(usando 3200 cubos). Além dessas, sugerimos que os docentes desenvolvam as atividades propostas.

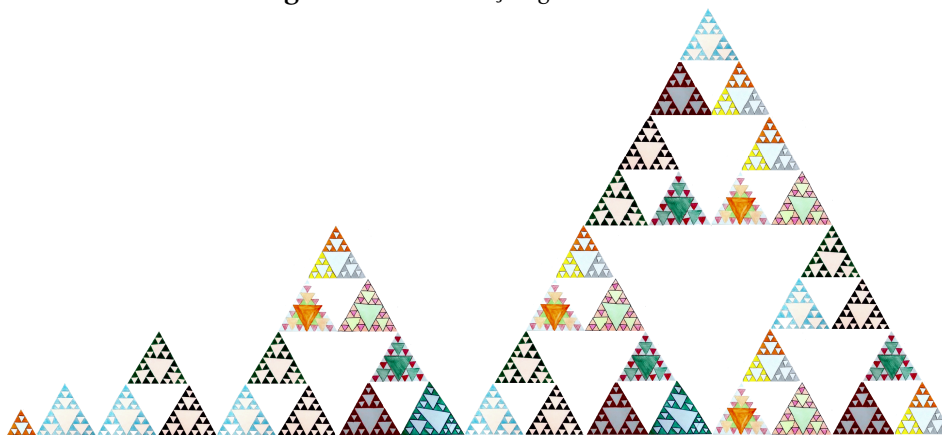
**Figura 4.1** Desenhos de triângulos na folha

(a) exemplo 1

(b) exemplo 2

Fonte: Autoria própria

Resumidamente, a atividade consiste em produzir vários triângulos, como na fig. 4.1, de forma que, ao final, o lado do STS atinja o tamanho especificado. Na fig. 4.2, temos um exemplo de construção passo a passo do STS. A ideia é aumentar o STS aos poucos, com os triângulos pequenos, até que seja atingida a medida de 7m de lado.

**Figura 4.2** Construção gradual do STS

Fonte: Autoria própria.

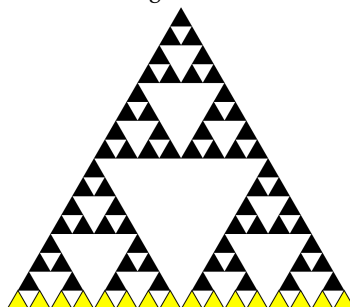
### Objetivo Geral

1. Estimular o trabalho em equipe para que sejam estabelecidas estratégias na resolução do problema;
2. Permitir que os alunos comprovem a relação que existe entre a atividade e os conteúdos estudados, além de estimular a construção do conhecimento em interações coletivas.

### Objetivos da atividade

1. Escrever as funções exponenciais  $f, g, h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , tais que:
  - a)  $f$  expressa a quantidade total de triângulos menores do STS em seu nível  $k$ ;

**Figura 4.3** Triângulos da base mais claros



Fonte: A autoria própria

- b)  $g$  expressa o número de triângulos da base do STS no  $k$ -ésimo nível (fig. 4.3);  
 c)  $h$  expressa a medida do lado do STS no  $k$ -ésimo nível.

2. Descobrir a quantidade de triângulos necessária para que o STS atinja os 7m de lado;
3. Determinar a medida da altura, a área e o perímetro total do STS.

### Pré-requisitos da atividade

A atividade necessita que o aluno esteja familiarizado com os seguintes conteúdos:

- função/equação exponencial;
- propriedades operatórias dos logaritmos;
- área do triângulo equilátero;
- regra de formação do triângulo de Sierpinski.

### Público alvo

Em particular, a tarefa foi proposta para os alunos da primeira série do ensino médio para estimular o estudo dos conteúdos de funções/equações exponenciais e logaritmos. No entanto, essa atividade pode ser adaptada em turmas da segunda série para abordar os conteúdos de progressão geométrica.

### Tempo necessário

As turmas tinham um prazo de duas semanas para a produção de todos os triângulos menores (conforme fig. 4.1), e após esse período, cada turma montou o seu Super Triângulo de Sierpinski durante uma hora/aula (45min) no ginásio da escola.

### Desenvolvimento da atividade

Inicialmente, deve-se apresentar a regra de formação do triângulo de Sierpinski e, posteriormente, propor a atividade apresentando claramente as suas características e objetivos.

Em seguida, define-se um prazo de uma ou duas semanas, para que todos os alunos desenhem e descubram a quantidade de triângulos necessária (veja solução na equação 4.1). Antes do dia da construção do STS, o professor precisa reservar com antecedência o horário e um local amplo para que os alunos montem o STS. Ademais, o professor também pode levar uma câmera ou solicitar o auxílio de um técnico da escola para registrar o desenvolvimento da atividade, resguardando-se com as devidas autorizações da escola e dos alunos quanto ao uso das imagens.

Considerando que foram envolvidas três turmas, A, B e C; a turma A finalizou o trabalho primeiro, depois, durante o horário de aula das turmas B e C, os alunos fizeram a tarefa a partir das extremidades do STS da turma A. No final, todos os trabalhos ficaram reunidos em um STS ainda maior (fig. 4.6(c)).

### Solução da atividade

Deve-se observar que, para realizar a atividade, é preciso descobrir, inicialmente, o nível necessário do STS para que ele atinja a medida exigida. Após descobrir o devido nível, a turma saberá quantos triângulos menores devem ser confeccionados.

Vamos recorrer à tabela 3.5 da página 61 e aos logaritmos decimais, para descobrir o valor do nível  $k$  para que  $l_k = 21\text{cm}$  quando  $l_0 = 700\text{cm}$  (7m). Assim, ao determinarmos o valor de  $k$ , a quantidade de triângulos será  $N_k$ , logo, tomando  $\log 2 = 0,30$  e  $\log 3 = 0,47$ , temos:

$$\begin{aligned}
 l_k &= 21 \Rightarrow \frac{l_0}{2^k} = 21 \Rightarrow \frac{700}{2^k} = 21 \\
 &\Rightarrow 2^k = \frac{700}{21} \Rightarrow \log 2^k = \log \frac{100}{3} \\
 &\Rightarrow k \log 2 = \log 100 - \log 3 \\
 &\Rightarrow k = \frac{\log 100 - \log 3}{\log 2} \\
 &\Rightarrow k \cong \frac{2 - 0,47}{0,30} = \frac{1,53}{0,3} \\
 &\Rightarrow k \cong 5,1
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

O nível de um fractal é um número inteiro, assim, tomamos  $k = 5$ . Segue-se que, para cumprir a atividade, cada turma deveria confeccionar  $N_5 = 3^5 = 243$  triângulos! Um valor relativamente alto, porém, dividindo-se esta quantidade pelo número de alunos da turma (média de 25 alunos), cada um ficou responsável pela produção de  $243/25 \cong 10$  triângulos.

### Material Usado

Nessa atividade, foram utilizados os seguintes materiais:

- **Lápis de cor, hidrocor ou giz cera para colorir os triângulos.**

Pelas características do STS, os triângulos menores devem ser coloridos, então cada aluno ficou livre para definir a(s) cor(es) de sua preferência;

- **Folhas de papel A4**

Sugerimos que fossem utilizadas folhas de papel A4 por dois motivos:

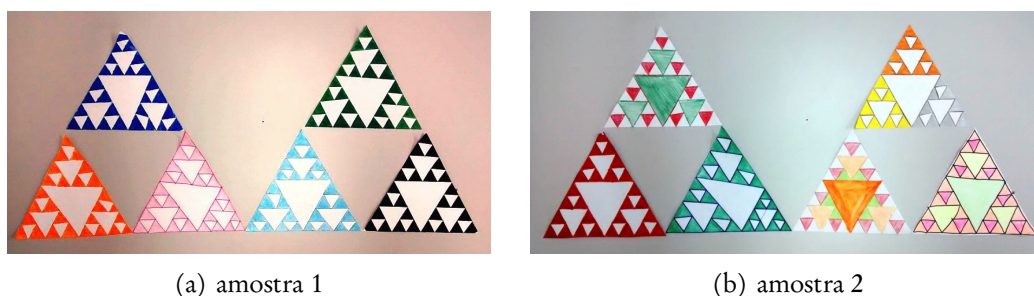
- a) a folha tem exatamente 21cm de largura (lado dos triângulos menores), facilitando o desenho;
- b) as folhas armazenadas na gráfica da escola poderiam ser reutilizadas.

- **Tesoura e régua.**

Para recortar e traçar o triângulo no papel A4.

Abaixo uma amostra dos  $729 = 3^6$  triângulos confeccionados pelas 3 turmas. Muitos triângulos ficaram com algumas imperfeições (triângulo verde à direita, fig. 4.4).

**Figura 4.4** Triângulos produzidos pelos alunos



(a) amostra 1

(b) amostra 2

Fonte: Autoria própria.

### Considerações sobre a atividade

Com respeito aos desdobramentos da atividade, destacamos o seguinte:

1. Poucos alunos (no máximo 7), de todas as turmas, conseguiram solucionar a atividade conforme a equação 4.1. Reservei parte de uma aula para mostrar a solução.
2. Após a divulgação do prazo para a produção dos triângulos menores, percebi que nada havia sido feito nas aulas seguintes. Ocorreu uma dispersão na turma e cada aluno ficou aguardando a iniciativa de algum colega para começar.
3. Conforme a solução 4.1, cada sala ficou encarregada por construir 243 triângulos. Considerando a observação do item anterior, para dinamizar os trabalhos e evitar dispersão dos alunos, optei por dividir cada sala em 3 grupos onde cada grupo ficou responsável pela produção de 81 triângulos<sup>2</sup>. Assim, cada grupo ficou mais engajado e estabeleceu-se uma disputa saudável para ver qual grupo terminaria a sua parte primeiro. Ao final, os grupos de cada turma concluíram a sua missão em tempo hábil, e cada sala conseguiu cumprir a tarefa de confeccionar os  $81 \cdot 3 = 243$  triângulos necessários ao STS.

<sup>2</sup>Ou seja, na turma A formaram-se 3 grupos; na turma B, formaram-se 3 grupos; Turma C, mais 3 grupos formados. Cada grupo fez 81 triângulos, completando os 243 por turma

4. Optei por envolver três turmas para ver um STS ainda maior. Cada turma fez um STS de nível 5 ( $3^5 = 243$  triângulos). Juntando as três salas, todos tiveram a oportunidade de prestigiar um STS de nível 6 com  $3^6 = 729$  triângulos! A construção coletiva final produziu um Super Triângulo de Sierpinski com quase 14m de lado.

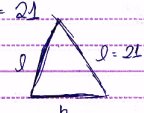
### Resultados

A seguir, destacamos algumas imagens dos cálculos efetuados pelos alunos (fig. 4.5), bem como da atividade concluída, fig. 4.6.

Figura 4.5 Cálculos dos exercícios da atividade 1

(a) Cálculos 1

• (21 cm) → Valor dado ao  $l = 21$



Ex: Quanto vale "K", para que "L<sub>K</sub>" se aproxime ao máximo de 7m?

$l = 21$        $21 \cdot 2^x$   
 $lx = ?$        $21 \cdot 2^5 = 672 \text{ cm}$   
                   $\approx 700 \text{ cm}$   
                  ou 7m

(b) Cálculos 2

$1, 3, 9, 27, 81 \dots, 3^x \rightarrow f(x) = 3^x$

NÍVEL	N <sub>k</sub>	B <sub>k</sub>	L <sub>k</sub>
0	1	1	21
1	3	2	42
2	9	4	84
3	27	8	168
4	81	16	336
5	243	32	672

$f(x) = 3^x$        $g(x) = 2^x$        $h(x) = 21 \cdot 2^x$

(c) Cálculos 3

Matemática I

N<sub>k</sub> - nº de triângulos no nível k  
 B<sub>k</sub> - quantidade de triângulos na base  
 L<sub>k</sub> - tamanho do lado do triângulo no nível k

$f(x) = 3^x$        $g(x) = 2^x$        $h(x) = 21 \cdot 2^x$

Quanto vale K para que L<sub>K</sub> se aproxime ao máximo de 7m?

$21 \cdot 2^x$   
 $21 \cdot 2^5 \approx 672 \text{ cm} \Rightarrow L_K = 700 \text{ cm} \Rightarrow L_K = 7m$

(d) Cálculos 4

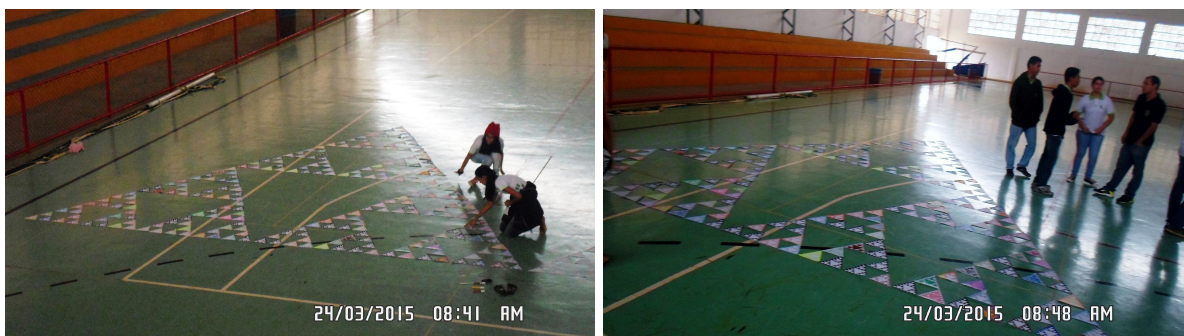
NÍVEL	N <sub>k</sub>	B <sub>k</sub>	L <sub>k</sub>	$f(x) = 3^x$	
0	1	1	21	$f(1) = 3^1$	$f(5) = 3^5$
1	3	2	42	$f(1) = 3$	$f(5) = 243$
2	9	4	84	$f(2) = 3^2$	$f(5) - f(3)$ $243 - 27 \Rightarrow 216$
3	27	8	168	$f(2) = 9$	
4	81	16	336	$f(3) = 3^3$	
5	243	32	672	$f(3) = 27$	
⋮	⋮	⋮	⋮	$f(4) = 3^4$	
K	N <sub>k</sub>	B <sub>k</sub>	L <sub>k</sub>	$f(4) = 81$	

+ tilibra

Fonte: Autoria própria.



**Figura 4.6** Imagens das tarefas concluídas



(a) Turma A - Foto 1

(b) Turma A - Foto 2



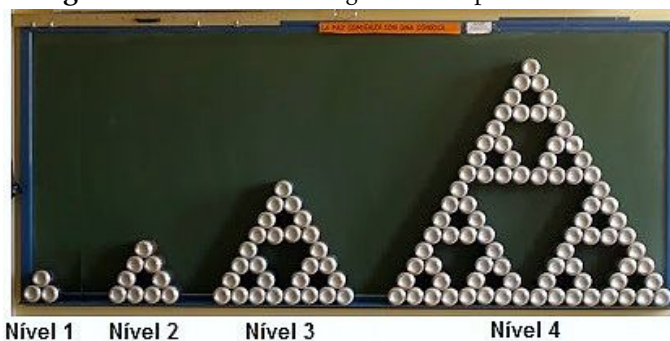
(c) Reunião de todas as tarefas ( $3^6 = 729$  triângulos)

Fonte: Autoria própria.

#### 4.1.2. Atividade 2 - Triângulo de Sierpinski Metálico

Esta atividade baseia-se na construção de um *Triângulo de Sierpinski Metálico* - TSM, até seu nível 5, a partir de latinhas de refrigerante de 350ml. O nível 1 usa 3 latas; o nível 2 tem 3 grupos de latas do nível 1 ( $3 \cdot 3 = 9$ ), e o nível 3 reúne 3 grupos de latas de nível 2, isto é,  $3 \cdot 3^2 = 27$  latinhas. Em geral, o nível  $k$  do TSM usa  $3^k$  latas (veja fig. 4.7).

**Figura 4.7** Níveis do triângulo de Sierpinski com latas



Fonte: <http://lh3.ggpht.com/.../s400/P5070465.JPG>, 2015 (adaptado)

### Objetivo geral

1. Estimular o trabalho em grupo para que, de forma conjunta, seja encontrada a solução do problema;
2. Permitir que os alunos percebam a relação entre a atividade e os conteúdos estudados, estimulando a interação em grupo.

### Objetivos da atividade

- a) Exercitar os conteúdos de progressão geométrica (P.G), mais precisamente a fórmula do termo geral e a soma dos termos de uma P.G.
- b) Utilizar a fórmula do termo geral da P.G, para preencher as sequências do quadro abaixo, onde  $N_k$ ,  $B_k$  e  $L_k$  representam respectivamente o número de latas, a quantidade de latas na base e a largura do TSM no nível  $k$  em centímetros. O diâmetro da base de uma única latinha de 350ml, mede aproximadamente 6,6cm.

**Tabela 4.1** Quadro com quantitativos do T.S.M

Nível	1	2	3	4	5	...	k
$N_k$	3	9				...	
$B_k$	2			16		...	$2^k$
$L_k$	13,2	26,4				...	$2^k \cdot 6,6$

Na sequência, destacamos os procedimentos para desenvolver a atividade, levando em consideração a experiência ocorrida na escola.

### Pré-requisitos da atividade

A atividade necessita que o aluno esteja familiarizado com os seguintes conteúdos:

- Progressão geométrica;
- Regra de formação do triângulo de Sierpinski.

### Público alvo

A atividade foi realizada em uma turma da segunda série do nível médio como forma de aplicar os conteúdos de progressão geométrica. Entretanto, a Atividade 2 é análoga a Atividade 1, e pode ser adaptada para a primeira série e abordar funções/equações exponenciais.

### Tempo necessário

Para execução dessa atividade, disponibilizamos um período de duas semanas, tendo em vista a reunião dos materiais (latinhas) para a confecção do TSM. Salientamos que, antes desse período, os alunos assistiram quatro horas/aula para o aprendizado das idéias de P.G.



## Material utilizado

- **Latas de refrigerante de 350ml**  
O professor também pode utilizar latas de 250ml, 473ml ou garrafas pet;
- **Fita adesiva**  
Utilizamos duas fitas adesivas de 5cm de largura para unir as latas. Pode-se usar cola de silicone ou outro material para juntar as latas;
- **Tinta para colorir as latas**  
Facultamos aos alunos o uso de tinta para pintar as latas.

## Desenvolvimento da atividade

A atividade deve ser posta em prática quando o professor perceber que os alunos já estão seguros quanto aos conceitos relativos à fórmula do termo geral e soma dos termos de uma P.G. Se necessário, para maior comodidade dos alunos, o laboratório de matemática pode ser reservado para que as equipes montem e guardem as partes do triângulo gradativamente. Recomenda-se que os alunos lavem e sequem as latas para eliminar alguma sujeira no interior/exterior das latas. A critério do professor, as equipes podem concluir a construção do TSM em algum lugar de boa visibilidade na escola. O produto final do trabalho desperta a curiosidade dos espectadores.

Em particular, não propus nenhuma estratégia de construção, apenas mostrei a figura 4.7 para que a turma visualizasse o formato do TSM. Entretanto, caso haja dificuldade, pode-se adotar os seguintes passos:

1. Unir 3 latas, com fita adesiva ou cola, em uma superfície plana (nível 1);
2. Unir 3 grupos de latas do nível 1, obtendo assim, o nível 2 do TSM;
3. Unir 3 grupos de latas do nível 2, todas apoiadas em uma superfície plana. (nível 3);
4. Continuar o processo, sempre reunindo os 3 grupos de latas, do nível anterior até chegar ao nível desejado do TSM.

## Considerações sobre a atividade

Sobre os desdobramentos dessa atividade, salientamos o seguinte:

1. Por questões análogas à Atividade 1, a turma foi dividida em 3 grupos, para dinamizar a execução dos trabalhos. Cada grupo ficou responsável por montar um TSM de nível 4. Ao final os três trabalhos, foram reunidos no TSM de nível 5.
2. Alguns alunos não fizeram a devida limpeza nas latas e acabaram sujando o local onde o STM foi montado, usar latas limpas é fundamental.
3. Latas enferrujadas comprometem o aspecto visual do TSM pois o fundo das latas é voltado para frente; latas amassadas comprometem o equilíbrio e a estrutura do TSM.
4. Após a exposição do trabalho, sugeri que os alunos doassem as latas para alguma instituição ou pessoa que trabalha com reciclagem.

## Resultados

Vejam as figs. 4.8 e 4.9, com uma amostra do que foi produzido pelos alunos:

Figura 4.8 Cálculos dos exercícios da atividade 1

Matemática I

NÍVEL	$N_k$	$B_k$	$L_k$
0	1	1	6,6
1	3	2	13,2
2	9	4	26,4
3	27	8	52,8
4	81	16	105,6
5	243	32	211,2

$6,6 \times 2^x$	$6,6 \times 2^3 = 52,8$
$6,6 \times 2^1 = 13,2$	$6,6 \times 2^4 = 105,6$
$6,6 \times 2^2 = 26,4$	$6,6 \times 2^5 = 211,2$

Nível	$N_k$	$B_k$	$L_k$
0	1	1	6,6
1	3	2	13,2
2	9	4	26,4
3	27	8	52,8
4	81	16	105,6
5	243	32	211,2
⋮			
k			$6,6 \cdot 2^k$

(a) Cálculos A

(b) Cálculos B

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.9 Níveis 4 e 5 do triângulo de Sierpinski Metálico



(a) Triângulo no nível 4

(b) Triângulo no nível 5

Fonte: Autoria própria.

### 4.1.3. Atividade 3 - Mega Esponja de Menger

O intuito dessa atividade é a construção de uma Mega Esponja de Menger - MEM, de nível 3, através do processo de junção, com cubos de 6cm de aresta (veja fig. 3.26). Ao final, a medida da aresta da MEM deve ser superior a 1,5m. Os cubos de aresta 6cm, serão chamados de cubos geradores.

## Características da Mega Esponja de Menger

A MEM deve ser construída com os seguintes requisitos:

1. Utilizar cubos geradores coloridos de aresta 6cm, feitos com um material mais firme que papel (papelão, cartolina guache, etc);
2. Expor a MEM em um local de fácil visualização;
3. Garantir uniformidade no tamanho da aresta dos cubos geradores para evitar distorções e imperfeições no trabalho final;
4. A aresta da MEM deve ter uma medida superior a 1,5m.

## Objetivo geral

Explorar a capacidade de construção de objetos em três dimensões, de forma a estimular o estudo coletivo dos conteúdos de geometria espacial.

## Objetivos da atividade

1. Determinar a quantidade de cubos da esponja do nível 3;
2. Calcular a área da superfície e o volume da esponja de menger;
3. Determinar a medida da diagonal da MEM.

## Público alvo

Alunos da terceira série do ensino médio, durante as aulas de geometria espacial, abordando os assuntos de volume e área total do paralelepípedo/cubo.

## Tempo necessário

Considerando que o processo de construção da MEM é trabalhoso, recomenda-se estabelecer um prazo mínimo de 30 dias, ou mais, para o levantamento do material e a confecção dos cubos. Este tempo pode ser minimizado conforme a participação de mais turmas.

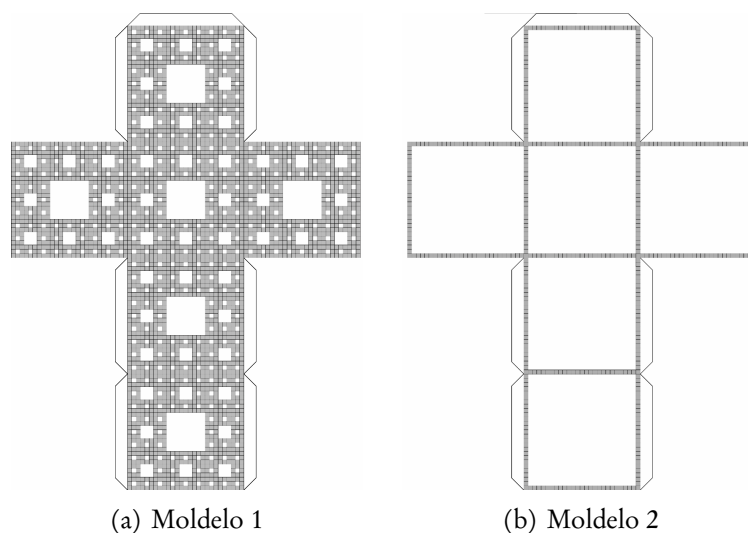
## Material Usado

Como foi dito nas características da MEM, a fim de garantir firmeza à esponja, é necessário utilizar materiais mais resistentes para garantir a sustentação dos cubos à medida em que eles são empilhados. Sendo assim, utilizamos:

1. Cartolina guache e papelão;
2. Lápis, caneta ou lapiseira para traçar os moldes dos cubos (fig. 4.10);
3. Régua e tesoura para medir e recortar os cubos semente;
4. Fita adesiva ou cola para unir os cubos.

Na fig. 4.10, temos dois modelos planificados do cubo gerador para recorte, o primeiro tem o tapete de Sierpinski em cada face. Vale ressaltar que o lado dos quadrados deve medir 6cm. Na fig. 4.11, temos cubos montados conforme o modelo 4.10(a).

**Figura 4.10** Moldes do cubo gerador

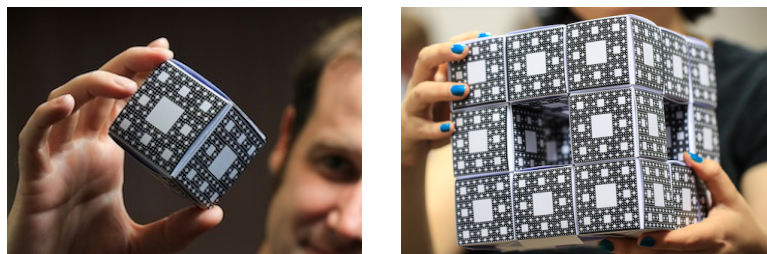


(a) Modelo 1

(b) Modelo 2

Fonte: Autoria própria, 2015

**Figura 4.11** Esponja de Menger - Nível 0 e 1



(a) Cubo gerador (nível 0)

(b) Esponja de Menger (nível 1)

Fonte: [www.megamenger.com](http://www.megamenger.com), 2015 (adaptado)

## Desenvolvimento da Atividade

Como já foi dito anteriormente, a MEM terá  $20^3 = 8000$  cubos em seu nível 3. Nesse cenário específico, foram envolvidas duas turmas de terceira série (30 alunos cada). A estratégia adotada foi a seguinte:

- Dividir as turmas em grupos de 3 alunos e estabelecer um prazo de 30 dias para conclusão da atividade. Cada turma teve 10 equipes;
- Cada grupo (3 alunos) deve montar 20 esponjas de nível 1, usando cubos geradores, e formar uma Esponja de Menger de nível 2 (fig. 4.12(b));

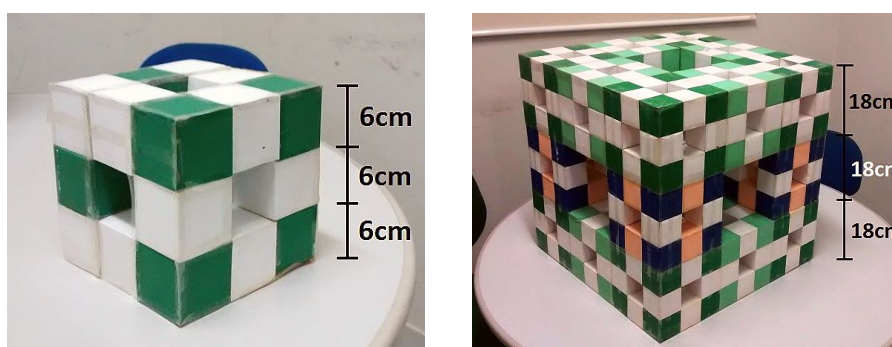
- Ao final, o professor irá reunir as 20 equipes (das duas turmas), em um local amplo, e orientá-los na montagem das 20 esponjas do item anterior para formar a MEM;
- Solicitar à coordenação de comunicação da escola o registro do trabalho, com a devida autorização do uso da imagem dos envolvidos.

### Solução do problema

Os valores referentes à quantidade de cubos, à área da superfície e ao volume da Mega Esponja de Menger estão descritos na seção 3.1.6. A tabela 3.7, pág. 66, informa a quantidade de cubos do nível 3, isto é,  $20^3 = 8000$ . A medida da diagonal  $d$  da MEM depende da medida de sua aresta. Para determinar a aresta, os alunos precisaram notar que:

- No nível 1, a aresta  $a_1$  da esponja mede o equivalente a 3 arestas do cubo gerador, logo,  $a_1 = 3 \cdot 6 = 18\text{cm}$  (fig. 4.12(a));
- No nível 2, a medida aresta  $a_2$  da esponja equivale a 3 arestas de nível 1, portanto,  $a_2 = 3 \cdot a_1 = 3^2 \cdot 6 = 54\text{cm}$  (fig. 4.12(b));
- Finalmente, no nível 3, a aresta  $a_3$ , da MEM terá  $a_3 = 3 \cdot a_2 = 3^3 \cdot 6 = 162\text{cm}$ .

Figura 4.12 Esponjas de Menger - Níveis 1 e 2



(a) Nível 1

(b) Nível 2

Fonte: Autoria própria, 2015

Sabemos que a diagonal  $d$  de um cubo de aresta  $a$  vale  $d = a\sqrt{3}$ , portanto, a diagonal da MEM vale  $d = 162\sqrt{3}\text{cm}$  ou  $d = 1,62\sqrt{3}\text{m}$ .

Sejam  $A_0$  e  $V_0$  a área e volume iniciais da Esponja de Menger. Para calcular a área e o volume da MEM, ou seja,  $A_3$  e  $V_3$ , bastaria considerar  $A_0 = 6 \cdot 1,62^2$  e  $V_0 = 1,62^3$ . Em seguida, conforme a seção 3.1.6, temos que  $A_3 = Q_3 \cdot (a_3)^2$  e  $V_3 = 20^3 \cdot (a_3)^3$ .

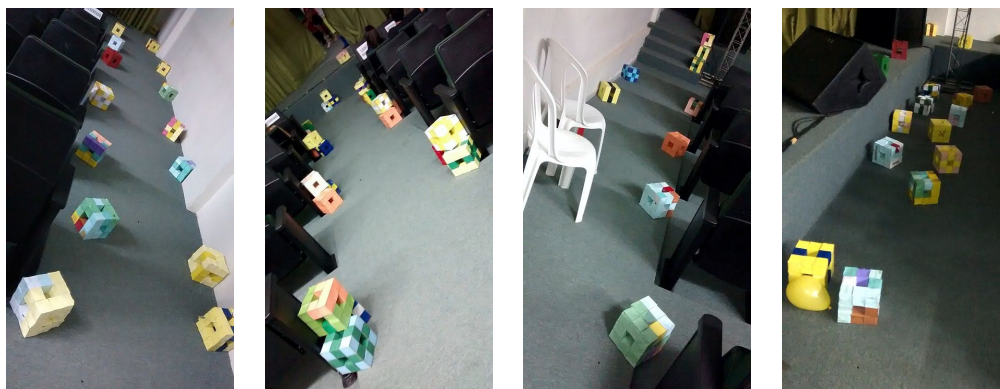
### Considerações sobre a atividade

Em virtude da quantidade de cubos e do pouco envolvimento da turma, encontramos algumas dificuldades. Após a exposição do trabalho na escola, a MEM foi reutilizada em uma peça teatral e temos as seguintes considerações:



1. A ideia inicial, foi envolver duas turmas para minimizar o esforço necessário à conclusão da atividade, a quantidade de cubos a serem produzidos era grande;
2. Ao final, em virtude do pouco envolvimento de uma das turmas, não foi possível confeccionar todos os cubos necessários, porém, a outra turma concluiu 10 esponjas de nível 2 e assim foi possível montar a parte frontal da MEM conforme fig. 4.14.
3. Uma das 10 esponjas criadas no item anterior, foi feita com cartolina comum, dessa forma, ela ficou muito frágil e foi descartada pois não era firme o suficiente para sustentar as demais.
4. Após uma semana de exposição do trabalho, alunos da segunda série queriam reaproveitar a MEM para compor o cenário de uma peça teatral da disciplina de artes cujo tema era: **músicas da infância**. As cores e o formato da esponja caracterizavam, segundo os alunos, um ambiente infantil. Com isso, a MEM foi desmontada e as esponjas de nível 1 e 2 foram usadas como adereço do palco e dos corredores do auditório (fig. 4.13).
5. Visando minimizar o esforço dos alunos e garantir a conclusão da atividade em uma turma, recomendo que o trabalho seja voltado para a construção de uma MEM de nível 2, com cubos geradores de aresta 10cm. Nessa configuração, bastam 400 cubos.

Figura 4.13 Ornamentação com as esponjas de menger de nível 1



(a) Foto 1

(b) Foto 2

(c) Foto 3

(d) Foto 4



(e) Foto 5

Fonte: Autoria própria

## Resultados

Algumas imagens com os resultados da atividade:

**Figura 4.14** Parte frontal da MEM - 8 esponjas de nível 2



Fonte: Autoria própria

## 4.2. Atividades propostas

### 4.2.1. Atividade 1 - Investigando fractais na natureza

Nesta atividade, o professor formará grupos de alunos cuja missão é identificar e registrar com fotos, a presença de autossimilaridades em formas da natureza como: árvores, conchas, nuvens, pedras e outros elementos que serão tema de debate em sala de aula.

#### Objetivos da atividade

- a) Estimular a percepção geométrica da autossimilaridade em elementos na natureza;
- b) Analisar as imagens capturadas identificando quais partes são mais semelhantes ao todo;
- c) Comprovar a presença da geometria fractal em diversas formas naturais.

#### Roteiro da atividade

1. O professor propõe aos alunos que formem grupos de 5 membros (ou outra quantidade) de forma que cada um deve investigar e registrar padrões fractais na natureza com fotos, apontando as partes autossemelhantes;
2. Reservar notebook, datashow, adaptadores de tomada, extensões e outros equipamentos para o dia da apresentação dos alunos;
3. Determinar um prazo de 7 a 15 dias para registro das imagens;

4. Estabelecer um tempo entre 15 e 20min para cada apresentação dos grupos;
5. Para otimizar as apresentações, o professor poderá receber os slides de cada equipe antes do início das exposições (um dia antes) e organizar em um notebook;
6. A critério do professor, haverá um sorteio para definir a ordem das apresentações;
7. As apresentações, desde que divulgadas previamente, podem ser realizadas no auditório da escola para serem prestigiadas por outras turmas e professores;
8. As imagens colhidas pelos grupos podem ser impressas para exposição na escola;
9. Os alunos podem incluir, se possível, as razões de semelhança entre as partes autossimilares das imagens.

### Público alvo

Essa atividade tem uma característica de observação e investigação, ela pode ser aplicada em todas as séries do ensino médio, inclusive no ensino fundamental.

### Tempo necessário

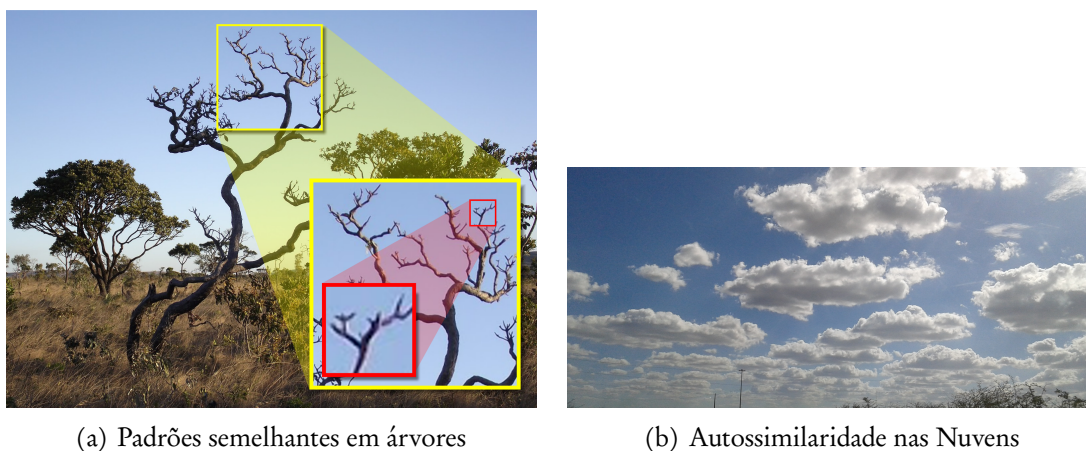
Vide item 3 e 4 do roteiro da atividade.

### Material utilizado

A atividade necessita apenas de:

- Datashow e Notebook/computador com software visualizador de slides/imagens;
- Smartphones, tablets ou câmeras fotográficas para o registro das imagens.

**Figura 4.15** Imagens naturais



Fonte: A autoria própria.



### 4.2.2. Atividade 2 - Calculando a dimensão fractal

Nesta atividade, pretende-se estimular a capacidade dos alunos em identificar a estrutura e a regra de formação de fractais propostos. A partir do padrão, o aluno irá calcular a dimensão por autossimilaridade do respectivo fractal.

#### Objetivos

- Identificar do padrão e da regra de formação do fractal;
- Permitir que os alunos apliquem os conhecimentos adquiridos nas aulas de logaritmos.

#### Pré-requisitos

Como pré-requisito, o aluno deve estar familiarizado com os conteúdos de logaritmos. Deve-se também dedicar uma ou duas horas/aula para apresentar os conceitos de fractais e a fórmula para o cálculo da sua dimensão por autossimilaridade.

#### Público alvo

Alunos da primeira série do ensino médio no decorrer das aulas de logaritmos.

#### Materiais

Lista de exercícios com fractais, lápis, caderno, borracha e calculadora.

#### Tempo necessário

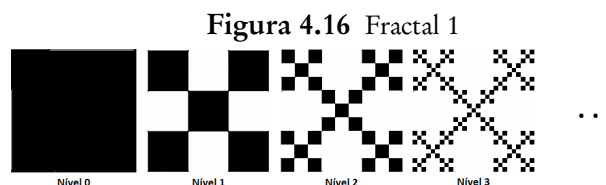
A depender da quantidade de fractais a serem analisados, o tempo necessário para resolver os exercícios não será superior a uma hora/aula (45 min).

#### Roteiro da atividade

O professor aplica a seguinte lista de exercícios como uma tarefa de classe, ou para casa. Pode-se resolver uma questão exemplo para orientar os alunos.

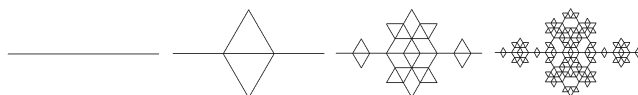
1) Analise a regra de formação dos fractais abaixo. Em seguida, calcule a dimensão por autossimilaridade para cada um deles.

1. Fractal 1



Fonte: Autoria própria. (Utilizando o CorelDraw)

## 2. Fractal 2

**Figura 4.17** Variação da curva de Peano com triângulos

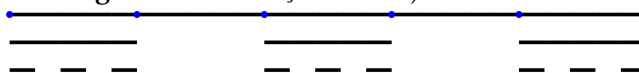
Fonte: Autoria própria. (Utilizando o software FMSLogo)

## 3. Fractal 3

**Figura 4.18** Curva de Koch quádrica

Fonte: Autoria própria. (Utilizando o FMSLogo)

## 4. Fractal 4

**Figura 4.19** Variação do Conjunto de Cantor

Fonte: Autoria própria. (Utilizando o FMSLogo)

### 4.2.3. Atividade 3 - Cartões Fractais

O *youtube* contém diversos vídeos que mostram processos de criação de cartões fractais. Através de uma simples sequência de cortes/dobras, o aluno poderá produzir um interessante cartão fractal. O vídeo<sup>3</sup> apresenta um passo a passo para confecção de dois tipos deste cartão. A atividade baseia-se na construção de um desses cartões.

#### Objetivo

Exercitar o cálculo do volume e/ou da área dos paralelepípedos do cartão fractal.

#### Público alvo

Alunos da terceira série do ensino médio, durante as aulas de geometria espacial, abordando os assuntos de volume e área total do paralelepípedo/cubo.

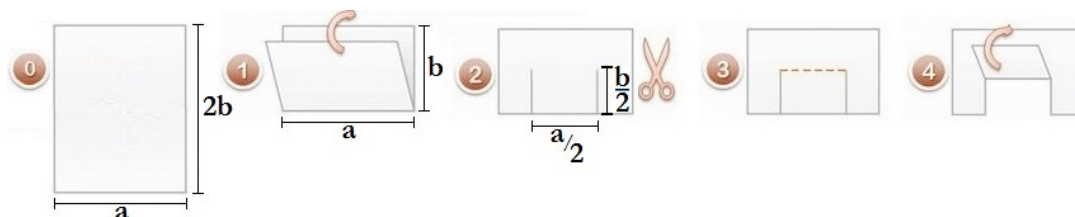
#### Roteiro da atividade

1. Entregue uma folha de papel A4 para cada aluno;
2. Forneça para os alunos os seguintes passos (fig. 4.20):

<sup>3</sup><https://www.youtube.com/watch?v=iXVIXtsb2QA>

- Dobre a folha ao meio;
- Faça dois cortes conforme a fig. 4.20(2) (metade das medidas da folha dobrada);
- As linhas tracejadas indicam dobras, faça uma dobra conforme fig. 4.20(4);
- Abra as dobras formando um paralelepípedo, em alto relevo, como na fig. 4.22(a). Este é o primeiro nível do cartão fractal.

**Figura 4.20** Passos do cartão fractal - nível 1



Fonte: Autor, 2015

3. Nos próximos níveis:

- Deixe o papel dobrado como o passo 6 da fig. 4.21;
- Faça dois novos cortes de comprimento igual a metade dos cortes anteriores, como na fig. 4.21(7);;
- Faça mais uma dobra na parte tracejada fig. 4.21 (8 e 9);
- Deixe as dobras em alto relevo conforme a fig. 4.22(b);

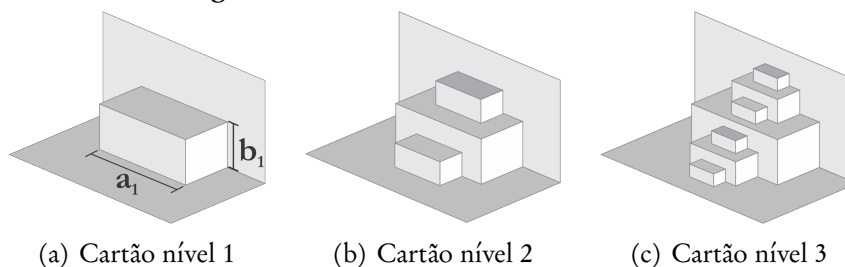
**Figura 4.21** Próximos passos



Fonte: Autoria própria

4. Proponha a construção do cartão até o nível 3 (ou 4), fig. 4.22(c), sempre com cortes iguais à metade do comprimento de um corte precedentes.

**Figura 4.22** Níveis 1, 2 e 3 do cartão fractal



(a) Cartão nível 1

(b) Cartão nível 2

(c) Cartão nível 3

Fonte: Autoria própria.

Concluído o cartão fractal, vamos considerar os seguintes quantitativos:

- a)  $a_k$  - comprimento dos paralelepípedos gerados no nível  $k$ ;
- b)  $b_k$  - altura dos paralelepípedos gerados no nível  $k$ ;
- c)  $N_k$  - quantidade de novos paralelepípedos do nível  $k$ ;
- d)  $N_T$  - número total de paralelepípedos;
- e)  $V_k$  - volume dos paralelepípedos criados no nível  $k$ .

Sejam  $a$  e  $b$  (fig. 4.20) as dimensões da folha A4 em centímetros, logo  $a = a_0 = 20$  e  $b = b_0 \cong 15$ , e assim teremos  $a_1 = \frac{a_0}{2} = 10\text{cm}$ ,  $b_1 = \frac{b_0}{2} = 7,5\text{cm}$  e  $V_1 = a_1 \cdot b_1 \cdot b_1 = 562,5\text{cm}^3$ . Com base nisso, peça que os alunos completem a seguinte tabela:

**Tabela 4.2** Informações sobre o cartão fractal

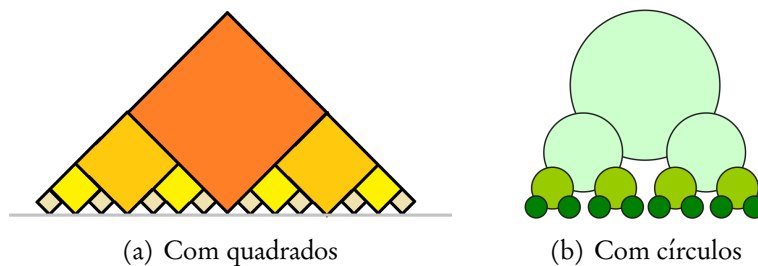
Nível	$N_k$	$N_T$	$V_k$	$a_k$	$b_k$
1	1	1	562,5cm <sup>3</sup>	10	$\frac{15}{2}$
2	2	3		5	$\frac{15}{4}$
3	4	7			
4	8				
5					
$k$					

Fonte: Autoria própria

#### 4.2.4. Atividade 4 - Criando o próprio fractal

Sugerir aos alunos a criação de um fractal bidimensional usando algum processo recursivo de inclusão/remoção em uma figura plana. Os estudantes irão valer-se da própria criatividade para produzir os seus fractais sendo permitida a variação de cores a cada nível da figura. Paralelamente, peça que eles determinem a dimensão fractal e os valores da área e/ou perímetro do fractal em seu nível  $k$ . Veja exemplos na fig. 4.23.

**Figura 4.23** Exemplos de fractais



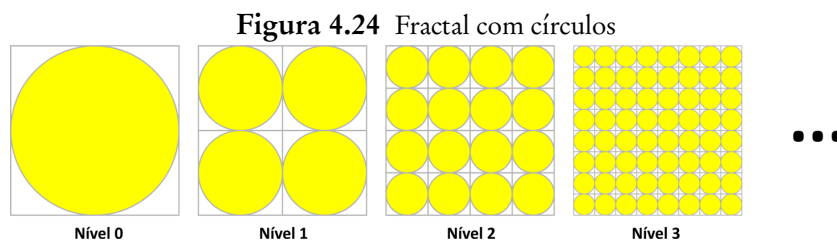
Fonte: Autoria própria (Utilizando o CorelDraw).

### 4.3. Lista de exercícios com fractais

Nesta seção, apresentamos uma lista de questões, agrupadas por assunto, cuja resolução necessita das noções fractais vistas no capítulo 3. O aluno precisa estar familiarizado com as características do fractal associado à questão.

#### Progressão geométrica

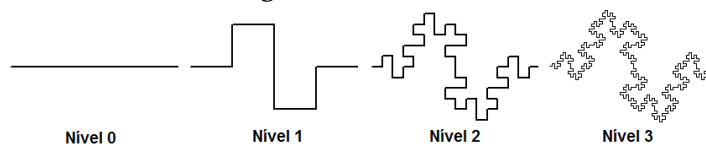
1. Considerando o processo de remoção, determine, a partir do nível zero, a quantidade de triângulos removidos no triângulo de Sierpinski até o seu nível 4.
2. O segmento inicial de uma curva de Koch mede uma unidade. Com base nisso, calcule o percentual de aumento do perímetro da curva ao passar do nível 3 para o nível 5.
3. Seja  $N_k$  a quantidade de quadrados do tapete de Sierpinski em seu nível  $k$ , determine a diferença entre  $N_2$  e  $N_5$ .
4. Partindo de um círculo inscrito em um quadrado auxiliar de lado 2, seja  $N_k$ ,  $P_k$ ,  $A_k$ , e  $L_k$ , o número de círculos, o perímetro de cada círculo, a área de cada círculo e o lado dos quadrados do nível  $k$  no fractal da fig. 4.24. Analise a regra de formação deste fractal e complete a tabela seguinte:



Fonte: Autoria própria. (Utilizando o CorelDraw)

Nível	$N_k$	$P_k$	$A_k$	$L_k$
0	1	$2\pi$	$\pi r^2$	
1	4			
2				$\frac{1}{2}$
3				
4				
k				

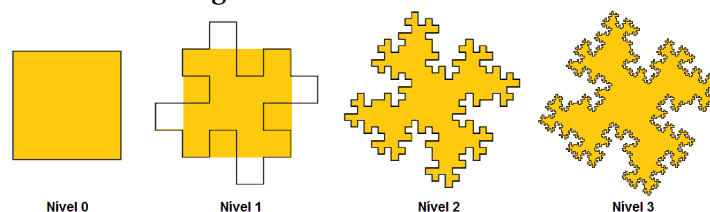
5. Analise os níveis do fractal  $F$  abaixo. Sabendo que  $F$  inicia num segmento de tamanho 1, calcule a dimensão e a expressão que representa o perímetro  $P_k$  de  $F$  em seu nível  $k$ .

Figura 4.25 Fractal  $F$ 

Fonte: Autoria própria.

6. Abaixo temos o fractal conhecido como *Ilha de Minkowski*<sup>4</sup>. Ele equivale ao fractal da questão anterior, aplicado aos quatro lados de um quadrado de lado  $\ell$ . Mostre que, em qualquer nível, a área da ilha de Minkowsky é constante.

Figura 4.26 Ilha de Minkowski



## Equações exponenciais

Nas questões abaixo, o nível zero dos fractais é um triângulo equilátero de lado 1cm.

1. A partir de qual nível, a área do triângulo de Sierpinski será inferior a  $0,001\text{cm}^2$ ?
2. Em qual nível o perímetro do triângulo de Sierpinski será igual a  $\frac{6561}{128}\text{cm}^2$ ?
3. A partir de qual nível o perímetro do floco de neve de Koch será maior que a distância Maceió-Natal (aproximadamente 540km)?

## Análise combinatória

1. Considere o número natural  $n = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot a$ , com fatores distintos e sendo  $a$  um número primo menor que 30. Quantos são os diagramas de fatores do número  $n$ ?
2. Qual é o número  $n$ , múltiplo de 18 com dois algarismos, que possui a maior quantidade possível de diagramas de fatores?
3. Seja  $n \in \mathbb{N}$ , tal que  $n = 2 \cdot a$ . Quantos são os possíveis diagramas de fatores de  $n$  com  $a$  primo e menor que 10?
4. Quantos são os diagramas dos números  $n$  divisíveis por 21, tal que  $100 < n < 150$ ?
5. Quantos diagramas de fatores tem o número 150?

<sup>4</sup>Hermann Minkowski (Kaunas, 22/06/1864 - Göttingen, 12/01/1909) - Físico e matemático alemão. Criou e desenvolveu a "geometria dos números", Usou métodos geométricos para solucionar problemas complexos de teoria dos números, física e teoria da relatividade. Ele também é conhecido por formular a quarta dimensão (espaço-tempo) usada por Einstein na teoria da relatividade.

## 5. ATIVIDADES COM FRACTAIS USANDO SOFTWARES

Neste capítulo iremos conhecer algumas atividades e ferramentas computacionais que dão capacidades ao aluno para a construção de fractais e outras figuras planas. O processo de geração manual de fractais pode demandar muito tempo e esforço se usarmos apenas lápis, régua e compasso. O uso de softwares educacionais, dinamiza a criação de objetos e permite que os estudantes tenham acesso à novas tecnologias de ensino/aprendizagem, isso pode tornar as aulas mais atrativas e manifestar o interesse da turma. O computador pode proporcionar uma aprendizagem mais sólida no momento em que abre oportunidades para que o usuário faça, refaça, teste e simule a execução das atividades, permitindo que o aprendizado seja construído no ritmo do aluno através de seus erros, acertos e tentativas.

Mais adiante, iremos apresentar algumas propostas de atividades usando a linguagem de programação LOGO, cujos comandos serão abordados sucintamente para permitir a construção de figuras. Além disso, as próximas seções trazem noções das ferramentas FMSLogo e TurtleDraw<sup>1</sup>, que interpretam a linguagem LOGO. Há também uma breve descrição de como manusear dois programas que visualizam o conjunto de Mandelbrot, para que o professor ou aluno possam conhecer este fractal e explorar seus infinitos detalhes.

### 5.1. A Linguagem LOGO

A linguagem de programação LOGO foi criada nos anos 60 por uma equipe do Massachusetts Institute of Technology - MIT. Entre os membros da equipe, destacamos Seymour Papert, matemático e grande incentivador do uso desta linguagem para auxiliar o aprendizado de programação de computadores para jovens e crianças. Embora existam inúmeros ambientes que interpretam LOGO, iremos direcionar nosso foco na ferramenta FMSLogo para o ensino de geometria.

#### Os ambientes que interpretam a linguagem LOGO

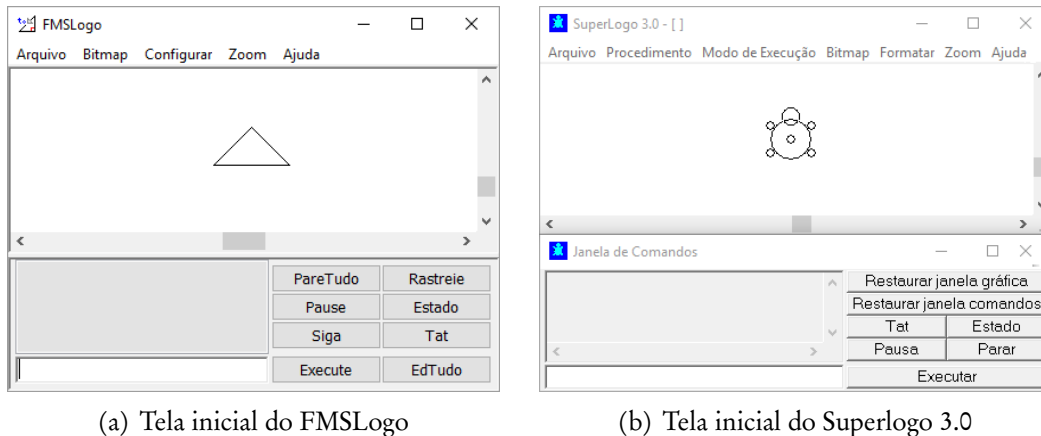
Para utilizar os comandos em português da linguagem LOGO no windows, sugerimos a utilização dos ambientes FMSLogo ou SuperLOGO. A versão 3 do SuperLOGO<sup>2</sup> foi desenvolvida pela Universidade de Campinas - Unicamp e seu último release foi disponibilizado no ano 2000, em consequência disso, o recurso da ajuda do programa não é compatível com as versões mais recentes do windows. Por estas questões de compatibilidade, adotamos o FMSLogo, cuja última atualização foi feita em 02/01/2016. Um personagem que ficou bastante associado ao LOGO foi uma pequena tartaruga, no entanto, diferentemente das demais ferramentas, o cursor do FMSLogo tem a forma de um pequeno triângulo isósceles ao invés da tartaruga.

---

<sup>1</sup><https://play.google.com/store/apps/details?id=com.alimuzaffar.turtledraw>

<sup>2</sup>Pode ser baixada em: <http://www.nied.unicamp.br/?q=content/download-super-logo-3>

**Figura 5.1** Ambientes que interpretam a linguagem LOGO



(a) Tela inicial do FMSLogo

(b) Tela inicial do Superlogo 3.0

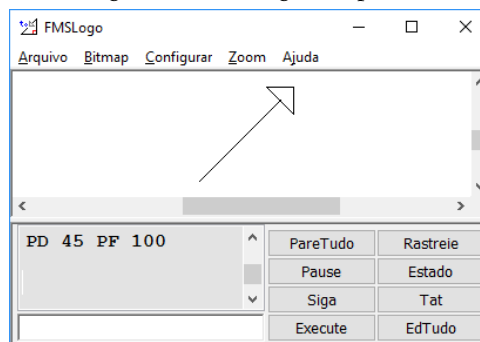
Fonte: Autoria própria.

### 5.1.1. Um primeiro contato com o FMSLogo

Nesta seção, veremos superficialmente os comandos LOGO na ferramenta FMSLogo<sup>3</sup> para a construção de figuras planas. Esta abordagem mínima será suficiente para compreensão da linguagem. Para saber mais sobre o FMSLogo, consulte o tutorial do Apêndice A.

Para um primeiro contato, abra o FMSLogo e digite na linha de comandos, ao lado do botão executar: **PARADIREITA 45 PARAFRENTE 100**, ou simplesmente, **PD 45 PF 100** e tecle Enter. Assim, o cursor gira 45° no sentido horário (à direita) e traça um segmento de reta de tamanho igual a 100 passos (pixels). Os comandos **PD** e **PF** são abreviaturas de **PARADIREITA** E **PARAFRENTE**, abreviaturas facilitam a escrita dos comandos.

**Figura 5.2** Segmento de reta gerado por: PD 45 PF 100



Fonte: Autoria própria.

O comando **PD X** faz o cursor girar X graus no sentido horário, enquanto **PF X** move o cursor para desenhar um segmento de reta de tamanho X. Limpe a tela com o comando **TAT**. Agora, escreva a seguinte sequência de comandos, da esquerda para direita:

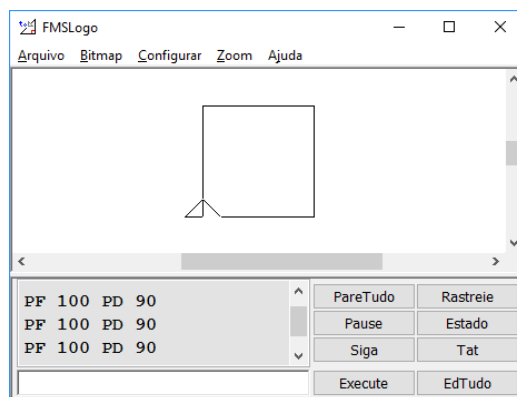
**PF 100 PD 90 PF 100 PD 90 PF 100 PD 90 PF 100 PD 90**

<sup>3</sup>Disponível em: <http://fmslogo.sourceforge.net/>



O FMSLogo desenhará um quadrado.

**Figura 5.3** Quadrado desenhado com a sequência de comandos

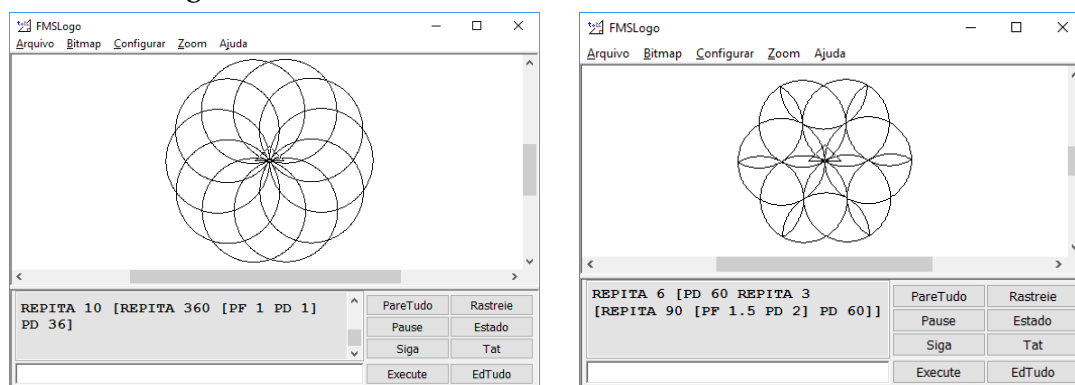


Fonte: Autoria própria.

Note que o bloco, **PF 100 PD 90**, se repete 4 vezes, nessas condições, podemos utilizar o comando **REPITA**. O mesmo quadrado pode ser construído através dos comandos **REPITA 4 [PF 100 PD 90]**, esta sequência significa: “repita 4 vezes os comandos para frente 100 e para direita 90”. Uma pergunta: O FMSLogo traça apenas linhas retas? Não! Partindo do princípio que uma circunferência tem  $360^\circ$ , podemos desenhá-la fazendo 360 repetições do comando **PF 1 PD 1** (mover 1 passo e girar 1 grau), logo, o **REPITA 360 [PF 1 PD 1]** fará o programa desenhar uma circunferência<sup>4</sup>. Podemos ainda agrupar diversos comandos **REPITA**. Vejamos dois exemplos de agrupamentos do **REPITA** (fig. 5.4):

1. **REPITA 10 [REPITA 360 [PF 1 PD 1] PD 36]**
2. **REPITA 6 [PD 60 REPITA 3 [REPITA 180 [PF 1.1 PD 1] PD 60]]**

**Figura 5.4** Resultados dos comandos com aninhamentos do **REPITA**



(a) Resultado do comando 1

(b) Resultado do comando 2

Fonte: Autoria própria.

<sup>4</sup>Na verdade, este comando constrói um polígono regular de 360 lados. Porém, a figura obtida é visualmente satisfatória para uma circunferência.

## O comando APRENDA

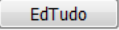
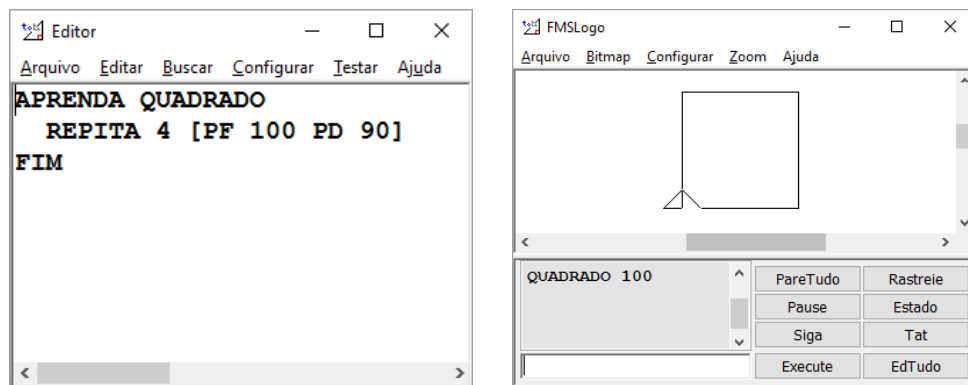
Na linguagem LOGO podemos criar novos comandos e operações (rotinas ou procedimentos) de uma forma bastante simples. O bloco de comandos necessários para se construir um quadrado poderia, por exemplo, ser encapsulado em um procedimento chamado **QUADRADO**. Inicialmente, se o usuário digitar **QUADRADO** na linha de comandos, o FMS-LOGO mostra a seguinte mensagem: “não sei como fazer **QUADRADO**”, isto significa que este comando não foi definido. Para criar uma nova rotina clique no botão **EdTudo**  (abreviatura de Edite Tudo). Na janela que aparece digite o comando da fig. 5.5.

Figura 5.5 Janela com a edição do comando QUAD



(a) Janela de edição de comandos

(b) Executando a rotina QUADRADO

Fonte: Autoria própria.

Ao final, vá até o menu arquivo desta janela e clique em Guardar e Sair. Agora Digite **QUADRADO**, na linha de comandos, e tecele enter para ver o resultado. Note que este comando **QUADRADO** é muito estático. Ele não é capaz de desenhar quadrados de lado 50 ou 200, por exemplo. O comando **QUADRADO** seria mais útil se ao digitarmos **QUADRADO X**, o LOGO desenhasse um quadrado de lado **X**, assim como **PD X** gira o cursor em **X** graus. Vamos melhorar o comando **QUADRADO**; clique no botão **EdTudo** e redefina a rotina da seguinte forma:

```

APRENDA QUADRADO :LADO
  REPITA 4 [PF :LADO PD 90]
FIM

```

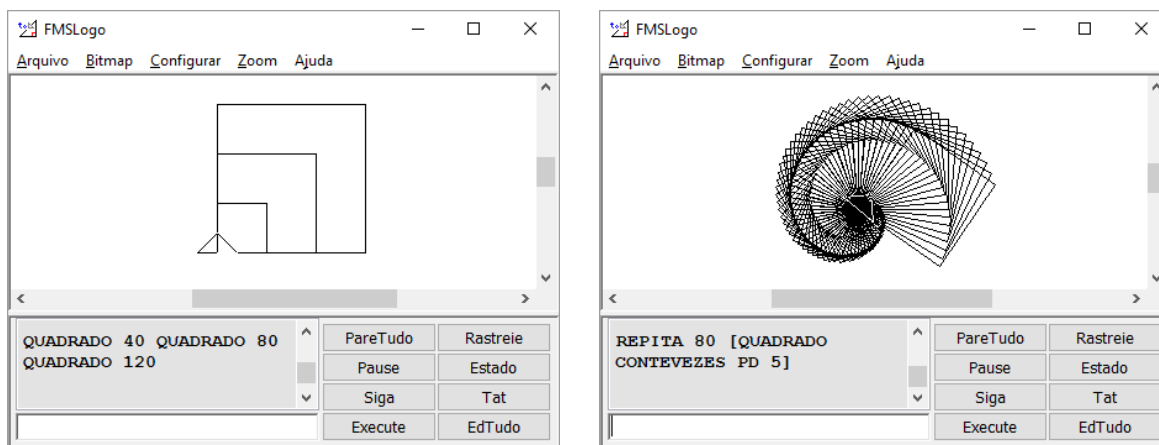
Agora, a rotina **QUADRADO** tem o parâmetro **:LADO**, isso permite que o usuário digite **QUADRADO** e um valor para a medida do lado. Salve as alterações no menu arquivo e clique em Guardar e Sair. Em seguida teste a rotina **QUADRADO**, digitando os comandos:

1. **QUAD 40 QUAD 80 QUAD 120.**
2. **REPITA 120 [QUAD CONTEVEZES PD 3]**

No primeiro exemplo, o LOGO desenha três quadrados de lado 40, 80 e 120. No segundo comando, serão feitos 120 quadrados com giros sucessivos de 3 graus e lados crescentes. O

palavra reservada **CONTEVEZES** indica a quantidade de execuções do **REPITA**, isto é, na primeira repetição, **CONTEVEZES** = 1, na segunda **CONTEVEZES** = 2, e assim sucessivamente. Veja os resultados dos comandos na fig. 5.6.

**Figura 5.6** Resultados dos comandos



(a) Primeiro resultado

(b) Segundo resultado

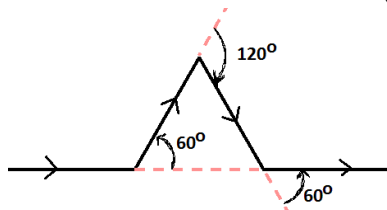
Fonte: Autoria própria.

## Alguns fractais feitos no LOGO

Uma rotina chama-se recursiva, quando ela executa a si mesma. Vejamos a definição de uma rotina desse tipo para construir a curva de Koch, usando o comando **APRENDA**. No estudo do capítulo 3, vimos que os processos de formação dos fractais são recursivos, ou seja, no nível seguinte, são executados os mesmos passos do nível anterior em partes menores.

Para facilitar o raciocínio da definição dos comandos recursivos, seja **KOCH :TAM :N**, a rotina que constrói uma curva de koch no nível **:N** iniciando com um segmento de tamanho **:TAM**. A seguir, para cada nível, vamos mostrar uma sequência de comandos da rotina **KOCH**, que constroem a curva, a partir do nível, partindo de um segmento de tamanho 306.

**Figura 5.7** Estrutura da curva de Koch (nível 1)



Fonte: Autoria própria. (Utilizando o CorelDraw e o Paint)

Vejamos, gradativamente, o algoritmo da rotina **KOCH**, em cada estágio, até a sua generalização para qualquer nível.

1. Koch nível 0: **KOCH 306 0**

Comandos da rotina KOCH para desenhar o nível 0;

**APREND**A KOCH :TAM :N

**SE** :N = 0 [**PF** :TAM]

**FIM**

Chamada da rotina: **KOCH 306 0**



2. Koch nível 1: **KOCH 102 0** **KOCH 102 0**

Considerando a estrutura da curva no nível 1 (fig. 5.7), os comandos recursivos necessários à sua construção seriam:

**APREND**A KOCH :TAM :N

KOCH :TAM/3 0 **PE** 60 ;primeiro segmento, tamanho  $306/3 = 102$

KOCH :TAM/3 0 **PD** 120

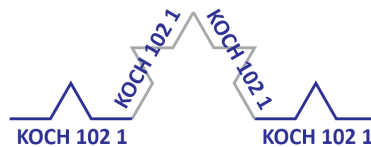
KOCH :TAM/3 0 **PE** 60

KOCH :TAM/3 0

**FIM**

Chamada da rotina: **KOCH 306 1**

Note que, na chamada de **KOCH 306 1**, o parâmetro :TAM vale 306, porém, internamente temos :TAM/3, logo, as chamadas internas farão 4 execuções de **KOCH 102 0**.



3. Koch nível 2: **KOCH 102 1** **KOCH 102 1**

A curva de nível 2 tem quatro mini-curvas de nível 1, cada uma iniciando com um segmento de tamanho 102. Para este nível, os comandos internos seriam:

**APREND**A KOCH :TAM :N

KOCH :TAM/3 1 **PE** 60

KOCH :TAM/3 1 **PD** 120

KOCH :TAM/3 1 **PE** 60

KOCH :TAM/3 1

**FIM**

Chamada da rotina: **KOCH 306 2**.

Observe que a execução de **KOCH 306 2** faz 4 chamadas de **KOCH 102 1**, e esta última, executa 4 vezes o comando **KOCH 34 0**. Portanto, seguindo este raciocínio, conclui-se que a execução de **KOCH :TAM :N**, faz 4 execuções de **KOCH :TAM/3 :N-1**.

#### 4. Koch nível k:

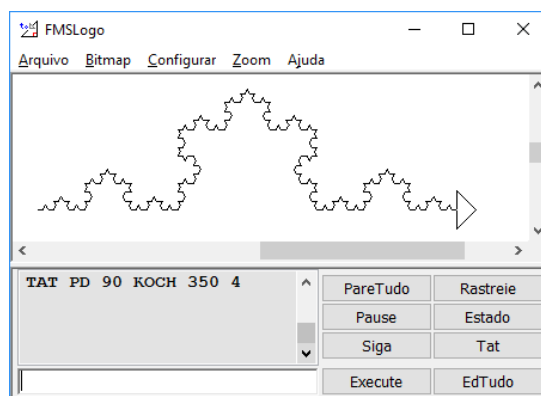
Diante do exposto, podemos generalizar a rotina KOCH da seguinte forma:

```

APRENDA KOCH :N :TAM
  SE :N = 0 [PF :TAM PARE]
  KOCH :N-1 :TAM/3 PE 60
  KOCH :N-1 :TAM/3 PD 120
  KOCH :N-1 :TAM/3 PE 60
  KOCH :N-1 :TAM/3
FIM
Chamada da rotina: KOCH 350 4.

```

**Figura 5.8** Execução: rotina KOCH (Nível 4)

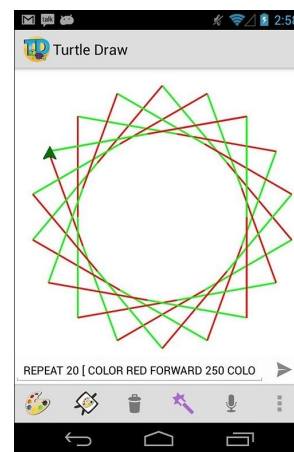


Fonte: Autoria própria.

### 5.1.2. O aplicativo Turtle Draw

Considerando a presença das tecnologias móveis em nossa vida diária, existe uma versão do LOGO para dispositivos android<sup>5</sup> chamada *Turtle Draw*. O único ponto negativo (ou não) é que esta versão trabalha no idioma inglês. Para utilizá-la, basta baixá-la na *Google Play Store*<sup>6</sup>. O respectivo comando LOGO em português tem seu equivalente em inglês, essa variação de idioma pode servir como motivação para integração da matemática com a disciplina de língua inglesa. Utilizar o LOGO no smartphone ou tablet pode estimular o ensino/aprendizagem de geometria plana.

**Figura 5.9** App Fractoid



Fonte: Autoria própria.

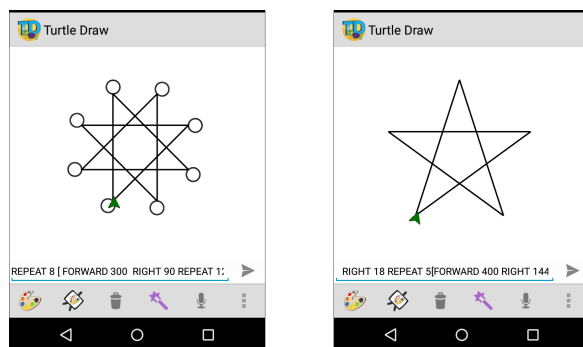
<sup>5</sup>Sistema operacional do Google para dispositivos móveis

<sup>6</sup>Loja on-line de aplicativos do google

Vejam os dois exemplos de comandos no Turtle Draw com os resultados na fig. 5.10:

1. **REPEAT** 8 [**FORWARD** 300 **RIGHT** 90 **REPEAT** 120 [**FORWARD** 1 **LEFT** 3] **RIGHT** 45]
2. **RIGHT** 18 **REPEAT** 5 [**FORWARD** 400 **RIGHT** 144]

**Figura 5.10** Resultados dos comandos 1 e 2



Fonte: Autoria própria

## 5.2. Atividades com a linguagem LOGO

Nesta seção, temos algumas atividades com LOGO para auxiliar o ensino/aprendizagem de geometria plana com fractais. Em cada uma delas, proponha que os alunos escrevam os comandos LOGO necessários para desenhar as figuras da lista de exercícios a seguir. O tempo estimado para cada atividade é de duas horas/aula (90min). Para realizar as atividades, pode ser necessário reservar a sala de informática, solicitando a instalação prévia do FMSLogo nos computadores.

### 5.2.1. Atividade 1

Nesta atividade os alunos terão seu primeiro contato com a linguagem LOGO. Esta tarefa servirá como uma preparação para os exemplos mais complexos da Atividade 2. Deve-se ficar atento e acompanhar o desempenho dos alunos para decidir quando avançar ou aplicar mais questões exemplo, até que os alunos estejam familiarizados com os comandos.

#### Pré-requisitos

Para esta atividade, dependendo do rendimento da turma, é necessário dedicar previamente, pelo menos quatro horas/aula para cada um dos conteúdos abaixo:

1. Fundamentos de geometria plana: ângulos, ponto médio, polígonos regulares, ângulo interno e ângulo externo de um polígono;
2. Comandos básicos da linguagem LOGO utilizando o ambiente FMSLogo;

## Objetivos

Auxiliar o aprendizado da linguagem LOGO e dos fundamentos de geometria plana para que os alunos adquiram habilidades para construir fractais.

## Público alvo

Alunos de qualquer série do ensino médio desde que atendidos os pré-requisitos;

## Tempo necessário

Para esta atividade sugerimos um tempo mínimo de duas horas/aula (90min).

## Roteiro da atividade

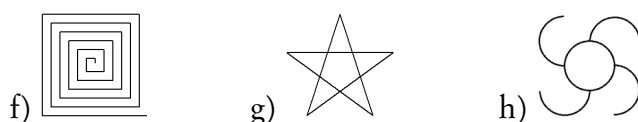
Proponha a resolução individual ou em duplas da seguinte lista de exercícios.

### Escreva os comandos LOGO para desenhar as figuras abaixo

#### 1. Nível simples



#### 2. Nível intermediário



### 5.2.2. Atividade 2

Nesta atividade o nível das figuras é mais complexo e já inclui formas fractais. Em especial, para as figuras fractais, os alunos podem solucionar a questão de forma dinâmica (comando APRENDA recursivo) ou estática (apenas com REPITA).

#### Pré-requisitos

1. Que os alunos tenham resolvido com sucesso a Atividade 1.
2. Domínio no manuseio de variáveis com LOGO. Se necessário, consulte o Tutorial FMSLogo no Apêndice A.
3. Domínio no uso de procedimentos recursivos para as questões de fractais;

## Objetivos

Permitir que os alunos construam fractais usando a linguagem LOGO.

## Roteiro da atividade

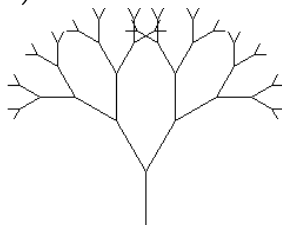
Proponha a resolução da seguinte lista de exercícios para os alunos de forma individual ou em duplas. Para que os alunos tenham mais tempo para descobrir as soluções, esta tarefa pode ser resolvida em casa.

### 1) Escreva uma rotina para criar os fractais abaixo:

a) Curva de Koch nível 2.



b) Árvore

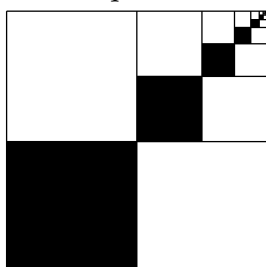


c) Curva de "Koch Circular"



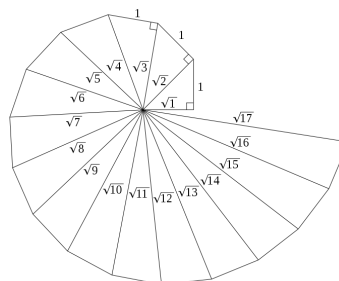
### 2) Utilize os comandos REPITA e/ou APRENDA para desenhar as figuras abaixo:

a) Escreva os comandos para construir os quadrados abaixo:



Fonte: Autoria própria

b) Construa a espiral de Teodoro<sup>7</sup> até o triângulo retângulo de hipotenusa  $\sqrt{17}$ .



Fonte: [https://...ral\\_of\\_Theodorus.svg.png](https://...ral_of_Theodorus.svg.png), 2016

## Considerações sobre as Atividades

Em sala de aula, utilizei integralmente a Atividade 1 (5.2.1), junto com mais exemplos, como forma de fixar a aprendizagem dos conteúdos de geometria plana. Através do manuseio da linguagem LOGO o aluno passa a dar credibilidade à geometria e observa com os próprios olhos, que os fundamentos matemáticos transmitidos pelo professor, realmente fazem sentido. Com respeito a atividade 2, informo que somente os alunos que possuem mais gosto

<sup>7</sup>Teodoro(465 aC.), filósofo e matemático grego, natural de Cirene (hoje Shahhat, Líbia). Foi aluno de Protágoras e professor de Platão, criou a famosa espiral que leva seu nome usando triângulos retângulos.



e afinidade com a matéria conseguiram resolver de forma dinâmica, eram questões desafio valendo pontos extras.

Na prática, seriam necessárias umas duas semanas (ou mais) para que os alunos aprendam de forma satisfatória e dominem os comandos APRENDA e a utilização de rotinas recursivas. No entanto, para o aprendizado de geometria e fixação dos princípios da autossimilaridade dos fractais, as soluções estáticas com o comando REPITA são suficientes. Havendo espaço, pode-se ensinar mais da parte de programação do LOGO para os alunos interessados.

### 5.3. Softwares para visualizar o Conjunto de Mandelbrot

A seguir apresentamos dois softwares que permitem a visualização do Conjunto de Mandelbrot: o Ultra Fractal e o Fractoid. Os programas possuem diversas configurações e funcionalidades para visualização do Conjunto em inúmeras escalas. O Ultra Fractal funciona no Windows e o Fractoid é compatível com o Android. Outros softwares que geram fractais podem ser baixados nos sites<sup>8</sup>.

#### 5.3.1. O software Ultra Fractal

O Ultra Fractal é um software de geração de fractais com menus no idioma inglês. A versão utilizada neste trabalho foi a 5.04 datada de agosto/2010. O programa permite a personalização de cores, tamanhos, fórmulas, resolução da imagem, forma de preenchimento e outras configurações. Pode-se ainda salvar o conteúdo do fractal ativo em um arquivo externo. Em essência, o Ultra Fractal é um software comercial com recursos avançados de animação e renderização de imagens. A versão livre, é fácil de utilizar e permite a visualização do Conjunto de Mandelbrot com grande qualidade.

#### Instalação

O site do Ultra Fractal é o [www.ultrafractal.com](http://www.ultrafractal.com). Nele podemos baixar outras versões, o manual do programa e consultar o fórum de discussão. O instalador está disponível no link<sup>9</sup>, a instalação é simples, basta executar o arquivo uf504.exe e clicar em Next ou Yes nas telas seguintes. Ao final clique em Install e depois Finish. Finalmente, após clicar em Finish, aguarde alguns segundos e clique no botão **Evaluate**, e na próxima tela clique em **OK**.

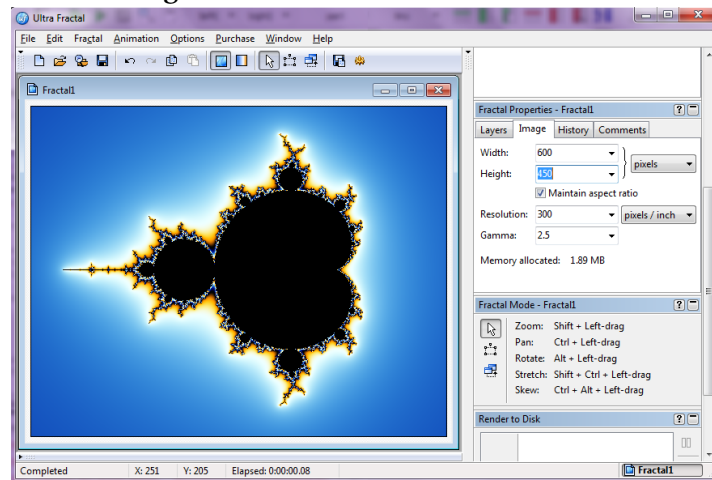
---

<sup>8</sup>

- <http://fractal.foundation.org/resources/fractal-software/>;
- [https://www.dmoz.org/Science/Math/Chaos\\_and\\_Fractals/Software](https://www.dmoz.org/Science/Math/Chaos_and_Fractals/Software);
- [https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal-generating\\_software](https://en.wikipedia.org/wiki/Fractal-generating_software);

<sup>9</sup><http://www.ultrafractal.com/download/uf504.exe>

Figura 5.11 Tela inicial do Ultra Fractal

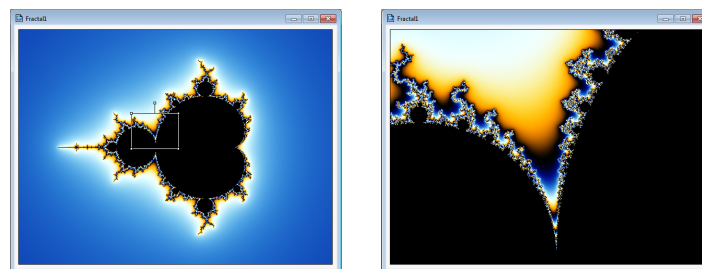


Fonte: Autoria própria.

### Aplicando Zoom

Para ampliar a imagem, selecione a região desejada, formando um retângulo, clicando e arrastando o ponteiro do mouse. Em seguida dê um duplo clique no interior do retângulo.

Figura 5.12 Aplicando zoom



(a) Área de seleção

(b) Ampliação da seleção

Fonte: Autoria própria.

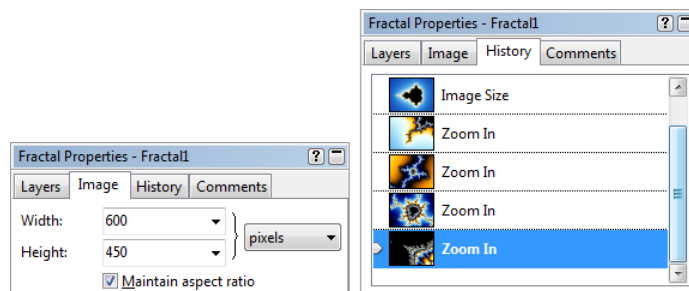
### Algumas configurações do Ultra Fractal

No lado direito da tela, na aba **Image** (fig. 5.13(a)), podemos definir a largura e a altura da imagem (width e Height), em centímetros(cm), polegadas (inch) ou pixels (pontos de tela). As dimensões padrão são 640 por 480 pixels. A opção *maintain aspect ratio* mantém a proporção caso o usuário altere a largura/altura. A Aba **History**(fig. 5.13(b)) tem um histórico dos últimos zooms aplicados, o que permite retornar a uma ampliação anterior.

### Criando/selecionando um novo fractal

O Ultra Fractal permite que o usuário crie ou escolha um fractal definido por outras funções. Tomemos o Conjunto de Mandelbrot, para a função  $f(z) = z^n + c$ . Siga até o

Figura 5.13 Abas da mini-janela Fractal Properties



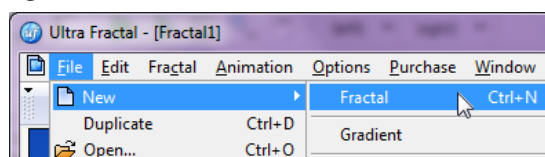
(a) Aba Image

(b) Aba History

Fonte: Autoria própria.

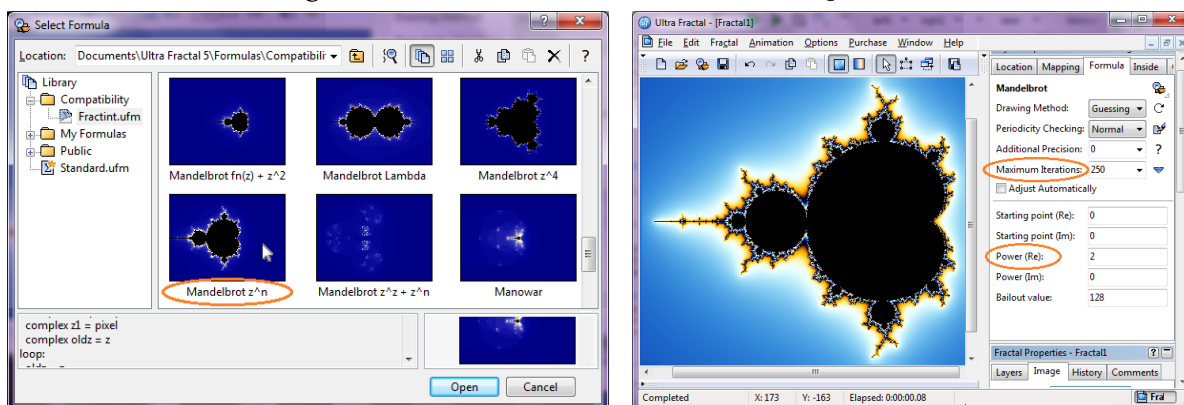
menu File/New/Fractal (fig. 5.14). Na parte esquerda da tela que surge, abra a biblioteca *compatibility* e escolha o item *Fractint.ufm* (fig. 5.15). Na parte direita, deslize a barra de rolagem até **Mandelbrot  $z^n$**  (fig. 5.15(a)). Agora clique no botão **open**.

Figura 5.14 Criando/Escolhendo um novo fractal



Fonte: Autoria própria.

Figura 5.15 Escolhendo um novo fractal e configurações



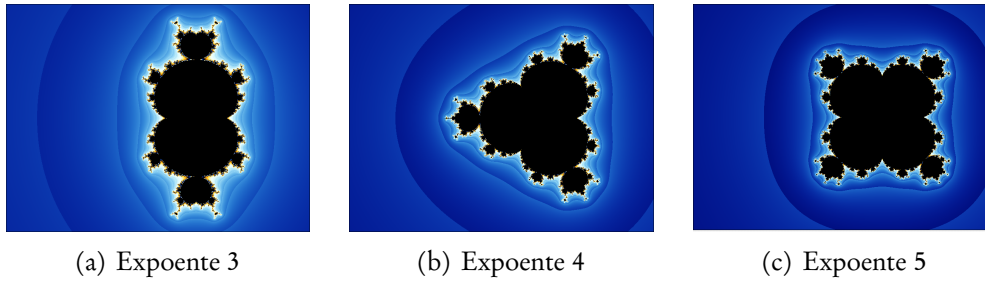
(a) Criando/Escolhendo um novo fractal

(b) Fórmula: Power(Re) e Maximum Iterations

Fonte: Autoria própria.

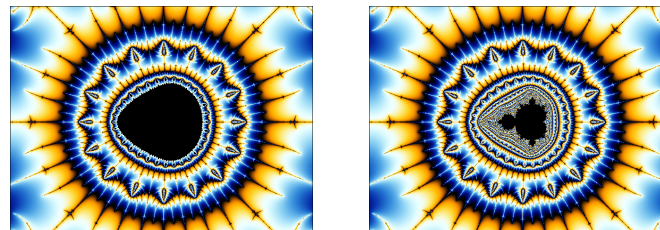
Após a escolha, aparentemente não há mudanças, entretanto, na aba *Formula*, parte superior direita da tela, surge o item **Power (Re)** (fig. 5.15(b)) que é expoente  $n$  de  $f(z) = z^n + c$ . O padrão é  $n = 2$ , quando  $n$  é alterado para 3, 4 e 5, eis os fractais que aparecem, fig. 5.16.

Um outro recurso é a definição do número de iterações. Na fig. 5.15(b), observe que o número máximo de iterações, *Maximum Iterations*, vale 250, isto é, a órbita dos pontos  $x \in \mathbb{C}$

**Figura 5.16** Conjunto de Mandelbrot para os expoentes 3, 4 e 5

Fonte: Autorial própria.

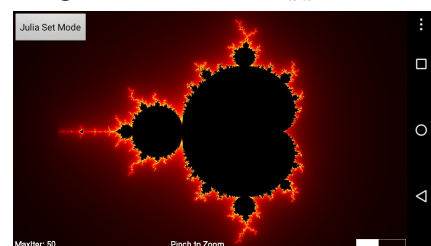
são calculadas até  $f^{250}(x)$ . Quanto mais iterações, mais detalhada será a imagem. Na fig. 5.17, temos uma ampliação do conjunto de Mandelbrot com 250 e 1000 iterações.

**Figura 5.17** Porção com 250 e 1000 iterações

Fonte: Autorial própria.


### 5.3.2. O aplicativo Fractoid

Na linha dos dispositivos android, o app **Fractoid**, com menus em inglês, possui bons recursos para visualização do conjunto de mandelbrot. O programa é leve e fácil de usar e iremos abordar rapidamente algumas de suas funcionalidades. No Fractoid, para aplicar zoom, basta fazer o movimento de abertura com dois dedos, igual ao gesto de aumentar uma foto no celular. Nessa simples ferramenta, o usuário poderá conhecer a complexidade e a beleza do conjunto de Mandelbrot.

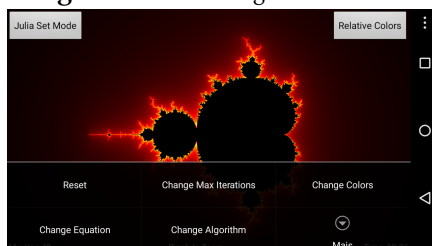
**Figura 5.18** Tela do app Fractoid

Fonte: Autorial própria.

### Configurações

Para acessar as configurações do fractoid, pressione os 3 pontos  no canto superior direito da tela. Após esta ação, o aplicativo mostra as opções a seguir (fig. 5.19):

**Figura 5.19** Configs. do Fractoid



Fonte: Autoria própria.

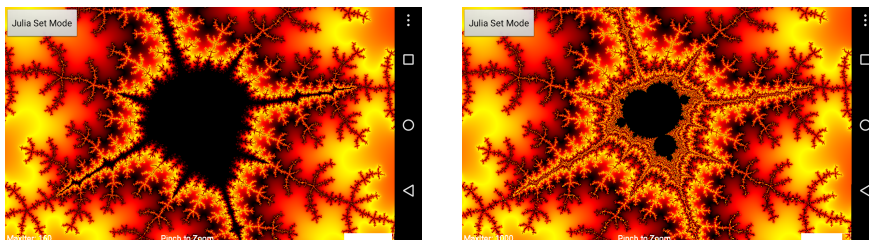
### Opção reset

Permite reiniciar o fractal para o seu tamanho original preservando as definições de cor e algoritmo já escolhidas.

### Opção Change Max Iterations

Define o limite de iterações processadas pelo Fractoid. Escolha o valor desejado de iterações e pressione em OK. Analogamente ao Ultra Fractal, o Fractoid exibe mais detalhes na imagem quando o máximo de iterações é reajustado. Na fig. 5.20 há uma mesma parte do conjunto de Mandelbrot com 40 e 1000 iterações. Salientamos que, um número maior iterações, demanda mais tempo de processamento.

**Figura 5.20** Diferentes quantidades de iterações



(a) 40 iterações

(b) 1000 iterações

Fonte: Autoria própria.

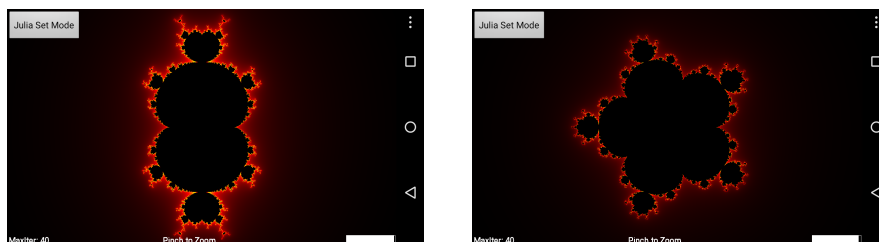
### Opção Change Equation

Esta versão do Fractoid disponibiliza uma listagem com funções pré-definidas. Na fig. 5.21, temos o conjunto de Mandelbrot para as funções complexas  $f$  e  $g$  definidas por  $f(z) = z^3 + c$  e  $g(z) = x^6 + c$ .

### Opção Change Colors

Nesta opção o usuário escolhe um esquema de cores para o fractal ativo. O programa disponibiliza uma boa variedade de estilos de cores. Nas telas da fig. 5.21, o esquema de cores selecionado foi o Camp Fire.

**Figura 5.21** Conjunto de Mandelbrot com as funções  $f$  e  $g$



(a) Conjunto  $M$  para função  $f$

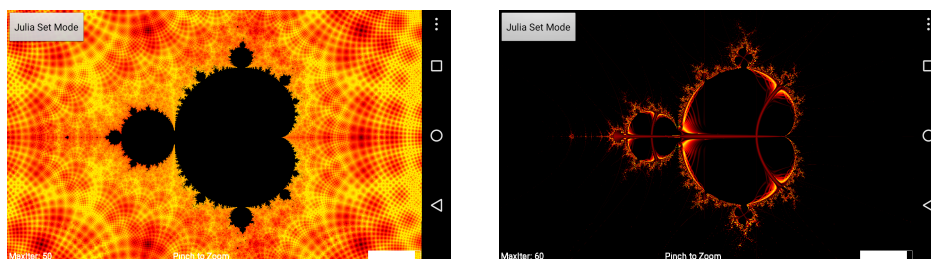
(b) Conjunto  $M$  para função  $g$

Fonte: Autoria própria.

### Opção Change Algorithm

Ao mudar o algoritmo de cores, o programa altera a regra de coloração do fractal. As colorações disponíveis apresentam um bom design estético, na (fig. 5.22) há dois algoritmos de cores.

**Figura 5.22** Variações de algoritmo de cores



(a) Algoritmo Gaussian Integer

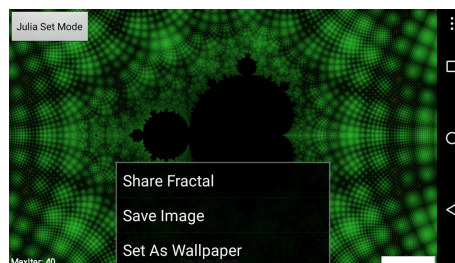
(b) Algoritmo Epsilon Cross...

Fonte: Autoria própria.

### Opção Mais

Se o usuário desejar compartilhar, salvar ou tornar seu fractal como papel de parede do smartphone/tablet, basta ir até a opção **Mais** e escolher uma das três opções.

**Figura 5.23** Itens da Opção Mais



Fonte: Autoria própria.

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente dissertação propôs a inclusão da geometria fractal como forma de favorecer o aprendizado dos conteúdos de matemática da segunda fase do ensino básico. Para esta inclusão, o trabalho apresenta conceitos, exemplos, atividades desenvolvidas e propostas, descrevendo inclusive, tarefas que fazem uso de recursos computacionais.

A prática pedagógica desenvolvida consistiu numa abordagem prévia da geometria fractal, durante a introdução dos conteúdos regulares, o professor mostra os conceitos dos fractais, e em seguida, associa esse tema ao assunto estudado propondo a resolução de atividades motivadoras. Nesse contexto, as atividades desenvolvidas/propostas no trabalho são desafiantes e assim observamos um maior envolvimento dos alunos, em comparação com outras atividades, sem o uso dos fractais, aplicadas em outros anos letivos.

Tomando como referência, a atividade do Super Triângulo de Sierpinski - STS, destaco que houve uma disputa saudável entre as turmas para ver quem montaria o STS primeiro e o mais alinhado possível, pois a medida que o STS cresce, há uma tendência de desalinhamento dos lados do triângulo. Um outro aspecto positivo é que todas as atividades executadas chamaram a atenção de outras turmas, o que pode manifestar o interesse no estudo do assunto.

Ainda com respeito as atividades, usamos com sucesso a linguagem de programação LOGO para a construção de fractais e figuras planas. Foi uma oportunidade ímpar, os alunos nunca usaram o computador para a aprendizagem matemática e tornaram-se “engenheiros” de suas próprias figuras. Nesse momento eles puderam ver com os próprios olhos os conceitos estudados tomando forma, concluindo que a matemática descreve as formas geométricas de forma muito precisa e que os assuntos não são caprichos matemáticos criados apenas para “complicar a vida dos alunos”. O trabalho também descreve os recursos de outros programas que são úteis para visualizar o Conjunto de Mandelbrot, permitindo diversas ampliações e servindo como um atrativo visual para introduzir a noção de infinito nos fractais.

Em particular, destaco a iniciativa de um aluno relativamente desatento, que ansiosamente queria saber onde poderia baixar o FMSLogo para resolver os exercícios de casa. Confesso que fiquei feliz com essa iniciativa, pois a solução das questões só é possível se o aluno estudar geometria, ou seja, antes de usar a ferramenta, o aluno precisa conhecer bem a estrutura geométrica das figuras para, posteriormente, escrever os comandos LOGO necessários à sua construção. No geral, ficou evidente a satisfação dos alunos à medida em que eles conseguiam construir as imagens das tarefas propostas, uma experiência proveitosa que serviu para solidificar os conceitos geométricos.

Sugerimos, como tema de trabalhos futuros, a investigação de outros fractais que não foram objeto de estudo deste trabalho como: a curva de Césaró, a curva do dragão, o fractal tetra círculo, a árvore pitagórica, a Espiral de Harriss, as curvas de Gosper, a pirâmide de Sierpinski e outras curvas de Peano-Hilbert, bem como as aplicações da linguagem LOGO na sala de aula quanto ao ensino de geometria plana.

Concluimos que o trabalho trouxe benefícios; que houve uma pequena melhoria na aprendizagem e no interesse dos alunos; que o trabalho pode acrescentar ao professor mais uma forma de abordar os conteúdos relacionados aos fractais e esperamos que este material manifeste o desejo no estudo e na pesquisa da geometria dos fractais.



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Add97] Paul S Addison. *Fractals and chaos: an illustrated course*. CRC Press, 1997.
- [Alm07] Sónia da Costa Ferreira Almeida. Utilização de maplets para a interpretação gráfica de sistemas de lindenmayer. 2007.
- [ASG13] Andréa Cristina Prokopczyk Arita, Flávia Souza Machado da Silva, and Laura Rezzieri Gambera. A geometria da esponja de menger. *CQD-Revista Virtual Paulista de Matemática*, pages 1–8, 2013.
- [Bap13] Tiago Roberto Ferreira Baptista. *Fractais-Aplicações em Engenharia*. PhD thesis, 2013.
- [Bar02] Ruy Madsen Barbosa. *Descobrimdo a Geometria Fractal: para a sala de aula*. Autêntica Editora, 2002.
- [Bar06] Michael Fielding Barnsley. *Superfractals*. Cambridge University Press, 2006.
- [Bar14] Michael F Barnsley. *Fractals everywhere*. Academic press, 2014.
- [BC06] Danilo Mattos Bonfim and Leandro Nunes de Castro. Síntese computacional de fenômenos naturais: geometria fractal e vida artificial parte 2: síntese de formas. *Cadernos de História da Ciência*, 2(2):77–100, 2006.
- [CEJ12] Antony J Crilly, Rae Earnshaw, and Huw Jones. *Fractals and chaos*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [CRI11] Tony CRILLY. Ideias de matemática que precisa mesmo de saber. *Tradução de Jorge Nuno Silva. Portugal-Alfragide: Editora D. Quixote-Grupo Leya*, 2011.
- [dAMdBm<sup>+</sup>08] Thiago Albuquerque de Assis, José Garcia Vivas Miranda, Fernando de Brito Mota, Roberto Fernandes Silva Andrade, and Caio Mário Castro de Castilho. Geometria fractal: propriedades e características de fractais ideais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 30(2):2304, 2008.
- [DGWS15] M E Dokukin, N V Guz, C D Woodworth, and I Sokolov. Emergence of fractal geometry on the surface of human cervical epithelial cells during progression towards cancer. *New Journal of Physics*, 17(3):033019, 2015.
- [DKN12] Priti Dimri, Dharmendra Kumar, and Ashish Negi. New escape time koch curve in complex plane. *International Journal of Computer Applications*, 58(8), 2012.
- [dS13] M. du Sautoy. *Os mistérios dos números: Uma viagem pelos grandes enigmas da matemática (que até hoje ninguém foi capaz de resolver)*. Zahar, 2013.



- [Fal04] Kenneth Falconer. *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*. John Wiley & Sons, 2004.
- [FC08] FABRICIO FERRARI and CRISTIAN CECHINEL. Introdução a algoritmos e programação. *Bagé: Universidade Federal do Pampa, Campus Bagé*, 2008.
- [Fed13] J. Feder. *Fractals*. Physics of Solids and Liquids. Springer US, 2013.
- [FW11] Natalie Priebe Frank and Michael F Whittaker. A fractal version of the pinwheel tiling. *The Mathematical Intelligencer*, 33(2):7–17, 2011.
- [IDD<sup>+</sup>01] Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, and Nilze de ALMEIDA. *Matemática: ciência e aplicações*. 2001.
- [Jan08] Michel Janos. *Geometria fractal*. Ciencia Moderna, 2008.
- [LG10] Nigel Lesmoir-Gordon. *The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [Lim04] Elon Lages Lima. *Análise real*. Impa, 2004.
- [M<sup>+</sup>11] Maria Vitória Duarte Moreira et al. Os fractais e a aprendizagem de conceitos matemáticos nos ensinos básico e secundário. 2011.
- [Man83] Benoit B Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*, volume 173. Macmillan, 1983.
- [Man86] Benoit B Mandelbrot. Self-affine fractal sets, i: The basic fractal dimensions. In *Fractals in physics*, volume 1, 1986.
- [Man91] Benoit B Mandelbrot. *Objectos fractais: forma, acaso e dimensão; seguido de Panorama da linguagem fractal*. Gradiva, 1991.
- [Man10] Benoit Mandelbrot fractais e a arte da rugosidade. [https://www.ted.com/talks/benoit\\_mandelbrot\\_fractals\\_the\\_art\\_of\\_roughness/transcript?language=pt-br](https://www.ted.com/talks/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness/transcript?language=pt-br), 2010. Acesso em: 08/03/2016.
- [Man13] Big brains. small films. benoit mandelbrot, the father of fractals | ibm. <http://animalnewyork.com/2013/meet-benoit-mandelbrot-father-fractals/>, 2013. Acesso em: 03/03/2016.
- [Nac99] Parâmetros Curriculares Nacionais. ensino médio. *Brasília: Ministério da Educação*, pages 538–545, 1999.
- [PAR08] Diretrizes Curriculares da Educação Básica PARANÁ. Matemática. *Curitiba: SEED*, 2008.

- [S<sup>+</sup>03] Nicoletta Sala et al. Fractal geometry and self-similarity in architecture: An overview across the centuries. In *Meeting Alhambra, ISAMA-BRIDGES Conference Proceedings, University of Granada*, pages 235–244, 2003.
- [Ste91] Ian Stewart. *Será que Deus joga dados?: a nova matemática do caos*. Zahar, 1991.
- [Ste14] I. Stewart. *Em busca do infinito: Uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. Zahar, 2014.
- [Tay02] Richard P Taylor. Order in pollock’s chaos. *Scientific American*, 287(6):84–89, 2002.
- [Thi03] Johan Thim. Continuous nowhere differentiable functions. *Mémoire de DEA, Luleå University of Technology*, 2003.
- [TLL11] Laura TEDESCHINI-LALLI and E Laura. Sierpinski triangles in stone on medieval floors in rome. *APLIMAT-JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS*, 4(4):113–122, 2011.
- [Ven12] J. Ventrella. *Brainfilling Curves - A Fractal Bestiary*. Eyebrian Books, 2012.

# Apêndices



# TUTORIAL FMSLOGO

A seguir, temos um tutorial do ambiente FMSLogo que, por sua vez, interpreta a linguagem de programação LOGO. Este documento contém os comandos mínimos para serem aplicados no ensino de programação, geometria plana e construção de fractais. O FMSLogo pode servir como um primeiro contato do aluno com as tecnologias que auxiliam o ensino/aprendizagem de geometria plana.

## Breve histórico

A linguagem de programação LOGO foi criada por Wallace Feurzeig, Daniel Bobrow e Seymour Papert em meados dos anos 60 no Massachusetts Institute of Technology - MIT com sede em Cambridge, Estados Unidos. Papert, um matemático que colaborara com Piaget, tornou-se o principal motivador da utilização do LOGO como forma de auxiliar a aprendizagem de programação e geometria para crianças.

A tradução da linguagem para o português foi realizada em 1982, pela Unicamp<sup>1</sup> (Universidade de Campinas), na ferramenta SuperLOGO, desde então a linguagem é utilizada com sucesso no ensino de programação e geometria, para crianças e adolescentes. A palavra LOGO vem do grego que significa: pensamento, raciocínio, cálculo, razão, linguagem.

A linguagem LOGO tem comandos bastante simples e a construção de um objeto geométrico, segue uma sequência de passos tal como a escrita de um algoritmo em língua portuguesa. Afim de caracterizar a linguagem de uma forma lúdica, a maioria dos ambientes que interpretam a LOGO utilizam uma tartaruga como cursor. Algumas literaturas denominam a geometria descrita pelo LOGO como sendo a *geometria da tartaruga*.

## Instalação do FMSLogo

O FMSLogo é um software hospedado pelo SourceForge.net<sup>2</sup>, uma comunidade de software livre que contribui para a divulgação de projetos com código em aberto. Conforme mencionamos no início do capítulo, o FMSLogo é um interpretador da linguagem LOGO e está disponível para download em seu site<sup>3</sup>. O instalador é pequeno, tem apenas 7.3MB, e pode ser instalado em diversos idiomas. A instalação e utilização do programa é simples; basta conhecer algumas ações do sistema operacional Microsoft Windows como o uso de menus, botões, ícones, atalhos, cliques, duplo clique no mouse, etc.

### Instalando...

Após baixar o FMSLogo, execute o instalador (wxfmslogo-6.35.0.exe) com dois cliques. Na janela que aparece escolha o idioma português e clique em OK, fig. A.1(a). Na próxima tela clique no botão **seguinte**, e depois clique em **instalar**. Ao final, clique no botão

---

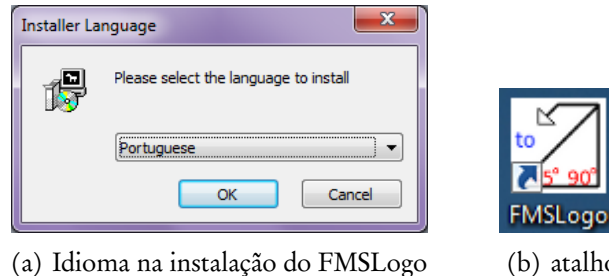
<sup>1</sup>Mais precisamente, no Núcleo de Informática aplicada à Educação - NIED.

<sup>2</sup>Veja mais sobre o SourceForge em: <https://sourceforge.net/>

<sup>3</sup>Página web do FMSLogo no sourceforge: <http://fmslogo.sourceforge.net/>

**fechar.** Para executar o FMSLogo, dê um duplo clique no atalho correspondente na área de trabalho, fig. A.1(b).

**Figura A.1** Instalação e atalho do FMSLogo



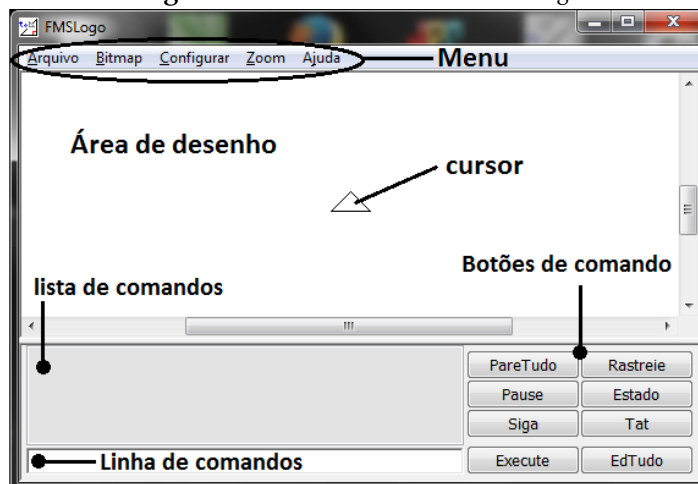
## O primeiro contato

A tela do FMSLogo é bem resumida, além do cursor, ela divide-se em (fig. A.2):

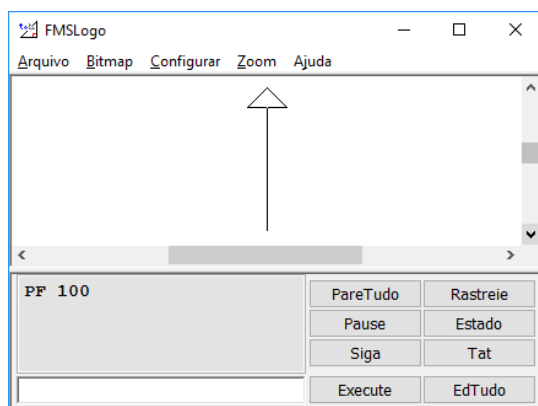
1. **Barra de Menu:** Contém os menus Arquivo, Bitmap, Configurar, Zoom e Ajuda;
2. **Área de desenho (ou tela gráfica):** É a região onde o cursor faz os desenhos;
3. **Lista de comandos:** Mostra os últimos comandos digitados. Clicando em uma das linhas, o FMSLogo preenche automaticamente o comando na linha de comandos;
4. **Linha de comandos:** Nessa linha digitamos os comandos para execução;
5. **Botões de comandos:** Contém alguns botões que executam ações:
  - *PareTudo:* interrompe a execução de um procedimento (ou rotina).
  - *Rastreie:* Mostra a execução, linha a linha, de uma rotina na lista de comandos;
  - *Pause:* Faz uma pausa na execução de um procedimento;
  - *Estado:* mostra algumas informações sobre o cursor gráfico.
  - *Siga:* Mostra a execução de uma rotina, linha por linha em uma janela;
  - *Tat:* Limpa a área de desenho.
  - *Execute:* Executa o(s) comando(s) escrito(s) na linha de comandos;
  - *EdTudo:* Mostra a tela de edição com todos os procedimentos salvos;

Para começar, digite **PF 100** na linha de comandos, tecle **Enter**, e veja o resultado. Em seguida limpe a tela clicando no botão *Tat* e escreva: **PF 100 PD 90 PF 100 PD 135 PF 141**. No comando **PF 100** o FMSLogo desenha um segmento de reta de tamanho 100. No comando seguinte, o cursor desenha um triângulo retângulo isósceles, de sorte que **PD 90** e **PD 135** fazem o cursor girar 90 e 135 graus no sentido horário. O LOGO não faz distinção quanto a escrita dos comandos em letras maiúsculas, minúsculas ou ambas as formas.

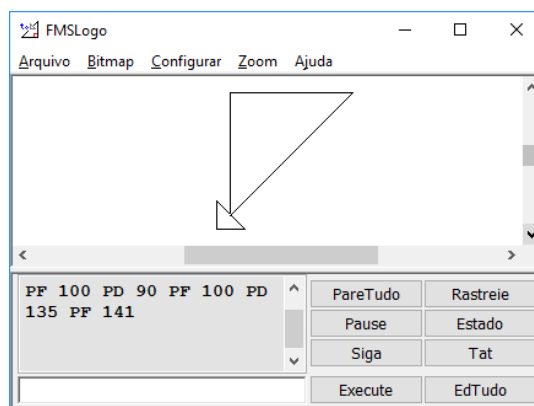
Figura A.2 Partes da tela do FMSLogo



Fonte: Autoria própria.



(a) Resultado do Comando 1



(b) Resultado do Comando 2

## Comandos básicos

O cursor gráfico do FMSLogo é uma seta na forma de um triângulo retângulo isósceles posicionado bem no centro da tela gráfica. Em certos momentos, podemos fazer referência à linguagem LOGO e ao FMSLogo de uma mesma forma, por exemplo: "cores no LOGO ou cores no FMSLogo", diz respeito aos tratamentos de cores. Para fazer desenhos, basta fazer o cursor se movimentar na tela. Os comandos básicos, e mais usados, que movimentam o cursor são:

- **PARAFRENTE X (PF X):** Movimenta o cursor para frente deixando um segmento de reta de tamanho X na tela;
- **PARATRAS X (PT X):** Movimenta o cursor para trás deixando um segmento de reta de tamanho X na tela;
- **PARADIREITA X (PD X):** Faz o cursor girar X graus no sentido horário;
- **PARAESQUERDA X (PE X):** Gira o cursor em X graus no sentido antihorário;

A maioria comandos LOGO possuem uma forma abreviada (Mnemônico<sup>4</sup>) os quais facilitam a digitação. Os comandos PF, PT alteram a posição do cursor e são os mnemônicos de PARAFRENTE E PARATRAS. Os comandos PD e PE mudam a direção (ângulo) do cursor, são as abreviaturas de PARADIREITA e PARAESQUERDA.

Note que os comandos PF, PT, PD, PE precedem um número, tal número representa o parâmetro do comando (exemplo: PF 100, PE 60). Existem comandos que não necessitam de parâmetros, o comando TARTARUGA (TAT) é um exemplo. Por outro lado, a LOGO tem comandos que usam mais de um parâmetro. Os parâmetros em LOGO podem ser letras, números ou listas. As letras vem precedidas por aspas ("), e as listas são escritas entre colchetes ([ ]). Os números decimais utilizam ponto como separador decimal. Durante este tutorial veremos como utilizar cada tipo de parâmetro.

Se um comando for executado com uma quantidade ou tipo de parâmetro diferente do esperado, a LOGO mostra uma mensagem de erro. Vejamos outros comandos:

- **USENADA (UN):** Ao mover o cursor, ele não deixará rastros na tela.
- **USEBORRACHA (UB):** Faz o cursor apagar os traços por onde passar.
- **USELÁPIS (UL):** retorna o estado padrão do cursor, deixando traços ao se mover.
- **TAT:** limpa a tela, posicionando o cursor no centro.

Vejamos uma lista simples de comandos que fazem o cursor se movimentar para desenhar um quadrado. Digite, da esquerda para direita, a seguinte sequência na linha de comandos:

```
PF 80    PE 90    PF 80    PE 90
PF 80    PE 90    PF 80    PE 90
```

Ao final, clique no botão executar ou tecele enter. Pode-se digitar todos os comandos, separados por espaço, em uma única linha.

## Comentários em LOGO

Algumas vezes precisamos incluir uma breve descrição das finalidades de um comando, ou grupo de comandos. Para inserir um comentário em uma linha qualquer, basta colocar um ponto e vírgula antes do comentário. Linhas comentadas não são executadas. Exemplo:

```
PD 30    PF 150    PD 120 ;Comentário:  comandos que desenham um triângulo
PF 150    PD 120    PF 150
```

## Os comandos ROTULE, ESCREVA e MOSTRE

Os comandos ROTULE e ESCREVA escrevem mensagens na tela, a diferença entre eles é o local da escrita. O ROTULE escreve na área de desenho e o ESCREVA na janela de

<sup>4</sup>Segundo a ajuda do FMSLogo, alguns mnemônicos são originais do SuperLogo e podem não funcionar no FMSLogo. Um exemplo deles é o comando MOSTRE. No SuperLogo podemos digitar apenas MO, já o FMSLogo reconhece apenas MOSTRE.



comandos do FMSLogo. Abaixo um exemplo de chamada de cada comando.

**ROTULE** [Exemplo com o rotule]

**ESCREVA** [Exemplo com o escreva]

**ESC** [Exemplo com o mnemônico de escreva]

O comando **MOSTRE**<sup>5</sup> exibe o conteúdo de parâmetros internos do FMSLogo. O resultado do **MOSTRE** é apresentado na janela de comandos. Logo abaixo, temos exemplos de chamadas do comando **MOSTRE**:

- **MOSTRE CORDOFUNDO:** mostra a cor do fundo da janela gráfica;
- **MOSTRE CORDOLÁPIS:** mostra a cor do lápis (cor do traço);
- **MOSTRE POS:** mostra a posição da tartaruga;
- **MOSTRE ESPL:** mostra a espessura atual do traço;

## Usando cores no FMSlogo

No LOGO Você pode alterar a cor do traço e do fundo, por exemplo. Nestes comandos será necessário um número (ou uma lista) passado como parâmetro representando a nova cor. Abaixo, exemplos de utilização do comando:

1. **MUDECF** 5
2. **MUDECF** [125 0 255]

No exemplo 1, o parâmetro é um código que representa uma cor, nesse formato só podemos informar 16 cores (veja fig. A.3). No segundo exemplo, pode-se definir inúmeras cores, pois cada valor entre os colchetes pode variar de 0 a 255. Esta definição com três números é uma padronização de cores chamada RGB (Reg, Green, Blue), que consiste na geração de cores a partir da combinação dos níveis de tonalidades de vermelho, verde e azul. Vejamos alguns comandos para alteração de cores:

- **MUDECF:** muda cor do fundo da área de desenho.
- **MUDECL:** altera a cor do lápis (cor do traço).
- **MUDECP:** muda cor do preenchimento (preenchimento do comando **PINTE**).
- **PINTE:** preenche uma área fechada onde o cursor está posicionado.








## O Comando REPITA

O comando **REPITA** é usado para fazer repetições de um único, ou um grupo de comandos. O **repita** necessita de dois parâmetros: o número **X** de repetições e o bloco de

---

<sup>5</sup>O comando **MOSTRE** também exibe o resultado de outros comandos, veja exemplos em [A](#)

**Figura A.3** Tabela das 16 cores básicas do FMSLogo

Código	Nome	Código [R G B]	Cor
0	Preto	[0 0 0]	
1	Azul	[0 0 255]	
2	Verde	[0 255 0]	
3	Ciano	[0 255 255]	
4	Vermelho	[255 0 0]	
5	Magenta	[255 0 255]	
6	Amarelo	[255 255 0]	
7	Branco	[255 255 255]	
8	Marrom	[155 96 59]	
9	Marrom-claro	[197 136 18]	
10	Verde-médio	[100 162 64]	
11	Verde-azul	[120 187 187]	
12	Salmão	[255 149 119]	
13	Roxo	[144 113 208]	
14	Laranja	[255 163 0]	
15	Cinza	[183 183 183]	

Fonte: Autoria própria

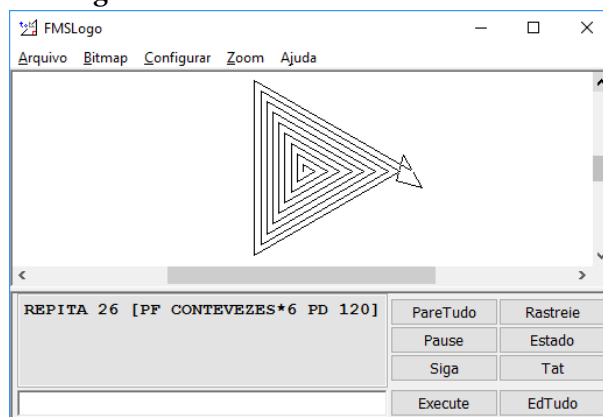
comandos a ser repetido entre colchetes. A escrita do comando é a seguinte: **REPITA X [COMANDOS]**.

O bloco de comandos: **PF 100 PD 120 PF 100 PD 120 PF 100 PD 120**, pode ser substituído por, **REPITA 3 [PF 100 PD 120]**, ambos os comandos desenharam um triângulo equilátero de lado 100.

No interior do bloco de comandos do REPITA, podemos utilizar a palavra reservada **CONTEVEZES**. Ela representa a quantidade atual de ciclos de execução dos comandos, isto é, na primeira execução do repita, **CONTEVEZES = 1**, na segunda execução **CONTEVEZES = 2**, e assim sucessivamente. Vejamos o resultado do REPITA abaixo (fig. A.4):

**REPITA 26 [PF CONTEVEZES\*6 PD 120]**

**Figura A.4** REPITA com CONTEVEZES



Fonte: Autoria própria.

## Valores aleatórios

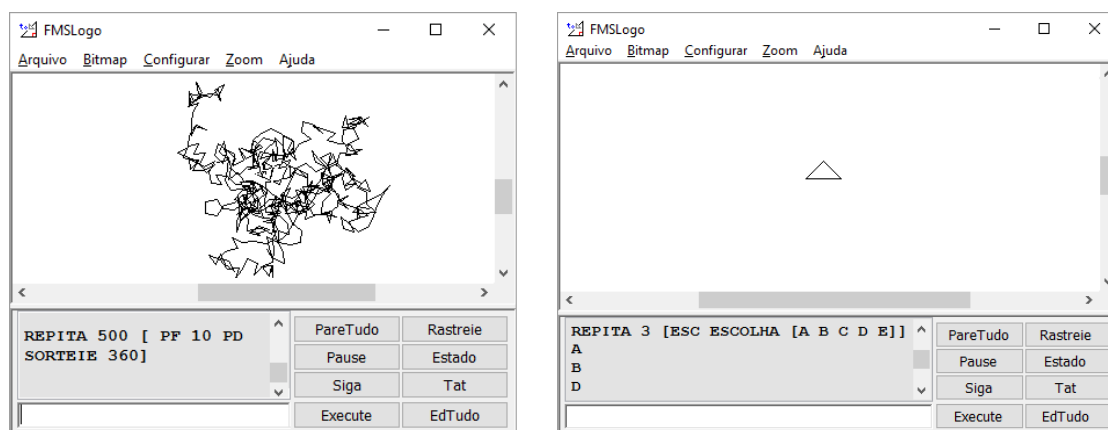
Os comandos **SORTEIE** e **ESCOLHA** permitem que a linguagem LOGO gere números aleatórios. Adiante veremos exemplos com a execução destes comandos.

- **SORTEIE X**: Retorna um número natural aleatório entre 0 (zero) e X-1.
- **ESCOLHA**: Retorna aleatoriamente um item de uma lista ou a letra de uma palavra.

### Exemplos:

1. **ESC SORTEIE 50** ;*escreve um número entre 0 e 49*
2. **REPITA 500 [PF 10 PD SORTEIE 360]** ;*o cursor move-se aleatoriamente*
3. **MOSTRE ESCOLHA [2 5 7 9]** ;*escolhe um dos números 2, 5, 7 ou 9*
4. **MOSTRE ESCOLHA "MACEIO** ;*mostra uma das letras M, A, C, E, I ou O*
5. **REPITA 3 [ESC ESCOLHA [A B C D E]]**

Figura A.5 Resultados dos exemplos 2 e 5



(a) Movimento ateuatório do cursor (Ex. 2)

(b) Escolha entre A, B, C, D e E (ex. 5)

Fonte: Autoria própria.

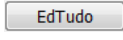
## Criando novos comandos

Assim como outras linguagens de programação, o LOGO permite que o usuário crie procedimentos (rotinas) que encapsulam um grupo de comandos. A nova rotina, pode ser considerada um novo comando que pode ser salvo em um arquivo. Se uma rotina apenas executa ações, ela é chamada de **procedimento**. Quando uma rotina retorna um valor, ela se chama **função**. As funções usam a palavra reservada **DEVOLVA**.

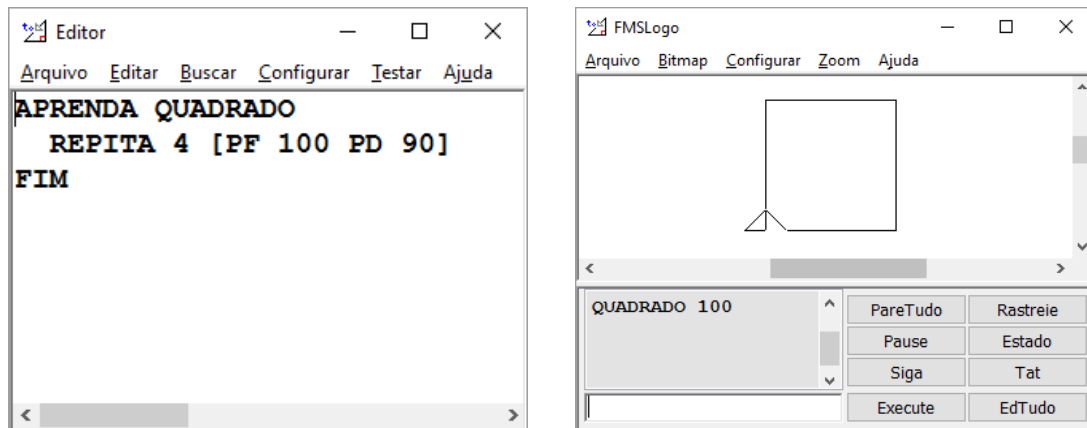
## O comando APRENDA

A definição de novos comandos/rotinas pode ser feita através do comando **APRENDA**. Para exemplificar, o usuário pode encapsular o bloco de comandos necessários para se cons-

truir um quadrado em um procedimento chamado **QUADRADO**. Inicialmente, se o usuário digitar **QUADRADO** na linha de comandos, o **FMSLOGO** mostra a seguinte mensagem: “não sei como fazer **QUADRADO**”, isto significa que esta rotina ainda não foi definida.

Para criar uma novo procedimento, clique no botão **EdTudo**  (abreviatura de Edite Tudo). Na janela que surge, digite o comando da fig. A.6(a). Reiterando que os comandos podem ser escritos em letras maiúsculas, minúsculas ou ambas.

**Figura A.6** Definindo e executando o comando **QUADRADO**



(a) Janela de edição de comandos

(b) Executando a nova rotina **QUAD**

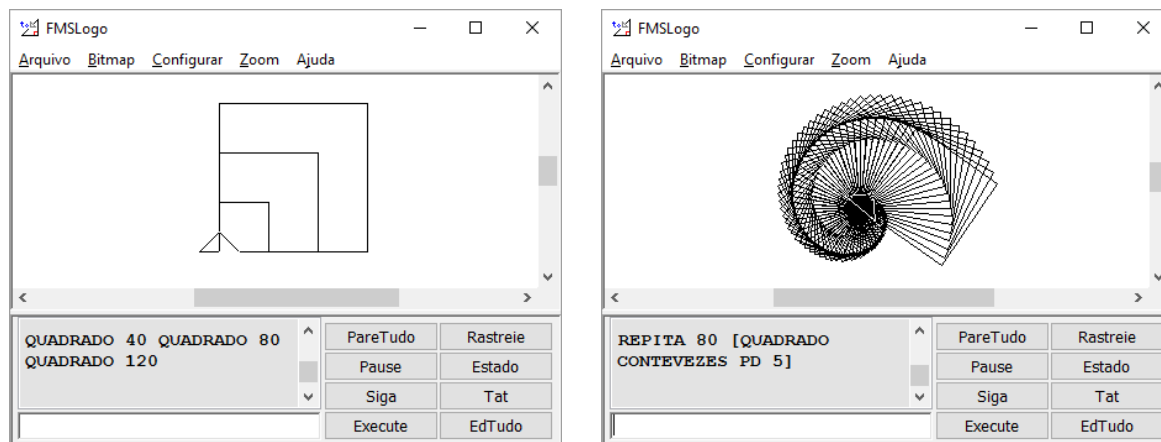
Fonte: Autoria própria.

Ao final, vá até o menu *Arquivo* desta janela, e clique em *Guardar e Sair*. Agora, na linha de comandos, teste a rotina digitando **QUADRADO**, teclando **enter** e veja o resultado. Todavia, vale destacar que este novo comando **QUADRADO** é muito estático. Ele não é capaz de desenhar quadrados de lado 50, 200, por exemplo. Esse comando seria mais útil se, ao digitar **QUADRADO X**, o **LOGO** desenhasse um quadrado de lado **X** passado como parâmetro, do mesmo modo que **PD X** faz o cursor girar **X** graus. Para melhorar o comando **QUADRADO**, de forma a torná-lo mais dinâmico, clique no botão **EdTudo** e redefina a rotina da seguinte forma:

```
APRENDA QUADRADO :LADO
  REPITA 4 [PF :LADO PD 90]
FIM
```

A rotina **QUADRADO**, agora tem um parâmetro chamado **:LADO**. Isso permite que o usuário digite o comando **QUADRADO** junto com um valor, e este será a medida do lado do quadrado. Salve as alterações indo até menu *arquivo* e clique em *Guardar e Sair*. Em seguida execute o **comando1: QUADRADO 40 QUADRADO 80 QUADRADO 120**, na linha de comandos. Depois limpe a tela com **TAT** e veja o efeito do **comando2: REPITA 80 [QUADRADO CONTEVEZES PD 5]**. No primeiro exemplo, o **LOGO** desenha três quadrados de lados 40, 80 e 120. No segundo exemplo serão feitos 80 quadrados, de tamanhos variados, com giros de 5 graus a cada ciclo do repita.

Figura A.7 Janela com resultado dos comandos



(a) Resultado do comando 1

(b) Resultado do comando 2

Fonte: Autoria própria.

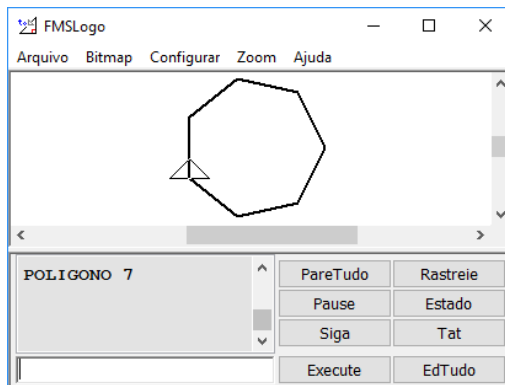
## Variáveis no LOGO

As variáveis, como o nome já sugere, são componentes de uma linguagem de programação cujo valor pode ser alterado (variar) durante a execução de uma rotina ou programa. Para definir uma variável no logo basta incluir a palavra chave **LOCAL** e colocar uma aspas (") antes do nome da variável. Para atribuir um valor à uma variável utilize o comando **ATRIBUA** precedendo a variável também com uma aspas e valor a ser atribuído em seguida. Por exemplo, o comando **ATRIBUA "X 10** atribui o valor 10 à variável X. Abaixo temos a rotina **POLIGONO** que define a variável **ANGULO** e atribui-lhe um valor.

```

APRENDA POLIGONO :N ;:N - número de lados
LOCAL "ANGULO
ATRIBUA "ANGULO 360/:N ;atribuindo o valor 360/:N na variável ANGULO
REPITA :N [PF 50 PD :ANGULO]
FIM
  
```

Figura A.8 Rotina POLIGONO desenhando um heptágono



Fonte: Autoria própria.

Uma outra solução para a rotina POLIGONO, com dois parâmetros, é a seguinte:

```
APRENDA POLIGONO :LADO :N ;:LADO - tamanho do lado, :N - número de lados
  REPITA :N [PF :LADO PD 360/:N]
FIM
```

Para utilizar o valor atual de uma variável ou parâmetro, deve-se colocar dois pontos antes. O comando abaixo desenha um retângulo cuja base mede o dobro da altura.

```
APRENDA RETANGULO :ALTURA
  REPITA 2 [PF :ALTURA PD 90 PF 2*:ALTURA PD 90]
FIM
```

## Comando SE

Em uma dada rotina, pode ser necessário que um bloco de comandos seja executado somente se uma condição for satisfeita. A estrutura condicional do LOGO é feita através do comando **SE**. A forma de escrita do comando é: **SE <TESTE> [COMANDOS]**. O bloco de [COMANDOS] será executado somente se <TESTE> for verdadeiro, caso contrário, o LOGO executará os próximos comandos após o **SE**. O procedimento abaixo testa se um ano é bissexto.

```
APRENDA BISSEXTO :ANO
  LOCAL "R
  ATRIBUA "R RESTO :ANO 4 ;RESTO DA DIVISAO DE :ANO POR 4
  SE :R = 0 [ESC [O ANO É BISSEXTO] PARE]
  ESC [O ANO NÃO É BISSEXTO]
FIM
```

A instrução **PARE** interrompe a execução do programa. Na rotina BISSEXTO, quando a condição for verdadeira será escrita a mensagem “O ANO É BISSEXTO” e a rotina pára. Caso contrário será escrito “O ANO NÃO É BISSEXTO”. A seguir temos um exemplo de uma **função**, isto é, uma rotina que retorna um valor.

```
APRENDA MAXIMO :A :B
  DEVOLVA (SE :A > :B [:A][:B])
FIM
EXEMPLO: ESCREVA MAXIMO 10 20
```

## Rotinas recursivas no LOGO

Os procedimentos recursivos são aqueles que executam a si mesmos, dentro dos seus comandos internos. Iremos ilustrar a recursividade no LOGO elaborando duas rotinas: uma

que calcula o fatorial de um número  $n$  e outra que desenha um triângulo com cópias semelhantes no seu centro.

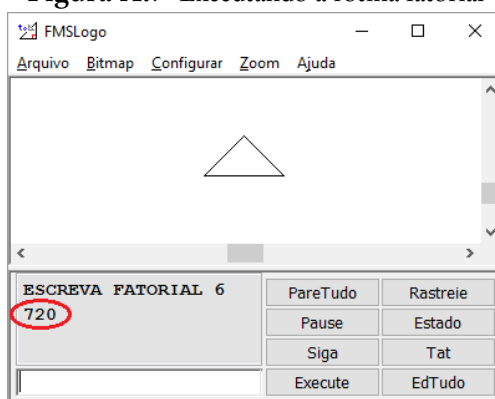
```

APRENDA FATORIAL :N
  SE :N = 0 [DEVOLVA 1 PARE]
  DEVOLVA :N * FATORIAL :N - 1
FIM

```

Note que o procedimento fatorial chama a si mesmo na terceira linha de comandos, tendo como condição de parada o fatorial de zero. Digite os comandos desse procedimento clicando no botão **EdTudo**, salve-o e depois execute-o digitando **ESCREVA FATORIAL 6**. O FMSLogo mostrará o resultado 720, fig. A.9.

**Figura A.9** Executando a rotina fatorial



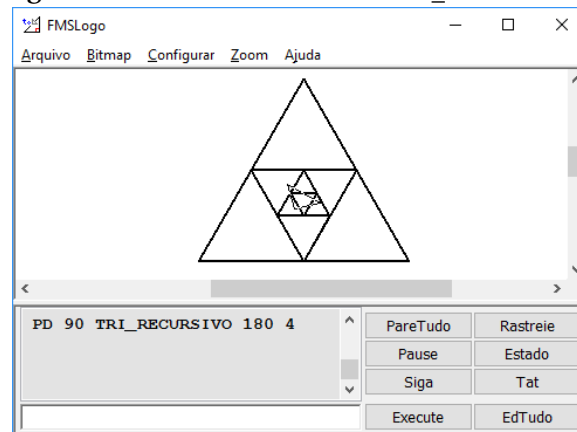
Fonte: Autoria própria.

Abaixo temos o procedimento recursivo **TRI\_RECURSIVO**, ele será usado para desenharmos uma sequência de triângulos. Além da auto execução, ele chama a rotina **TRIANGULO**. Isto significa que, novos procedimentos podem executar outras rotinas pré-definidas.

```

APRENDA TRIANGULO :LADO
  REPITA 3 [PF :LADO PE 120]
FIM
APRENDA TRI_RECURSIVO :LADO :NIVEL
  TRIANGULO :LADO
  PF :LADO/2 PE 60
  SE :NIVEL > 1 [TRI_RECURSIVO :LADO/2 :NIVEL-1]
FIM
EXEMPLO: PD 90 TRI_RECURSIVO 180 4

```

**Figura A.10** Chamando a rotina TRI\_RECURSIVO

Fonte: Autoria própria.

## Algumas considerações

A linguagem LOGO possui inúmeros comandos, inclusive para o manuseio de arquivos. Se necessário consulte o menu Ajuda do FMSLogo. Além do índice, há uma ferramenta de busca por nome ou parte do nome de um comando. Para cada comando existem exemplos ilustrando as suas funcionalidades. Vale destacar que existem programas que interpretam a linguagem LOGO em outros sistemas operacionais. A ferramenta KTurtle, funciona no *Linux*. Consulte exemplos mais avançados em LOGO no site<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup>Workshop Logo: <http://fmslogo.sourceforge.net/workshop/>



# COMANDOS LOGO DAS IMAGENS E DAS ATIVIDADES

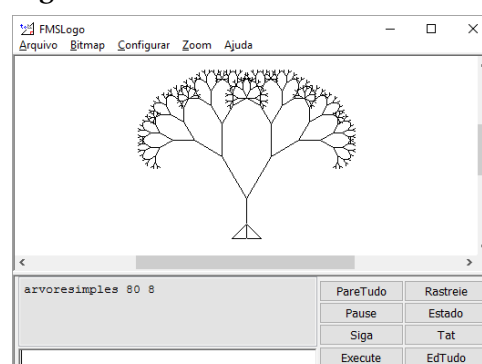
Esta seção contém os comandos-soluções dos problemas propostos em LOGO bem como o código fonte de algumas imagens fractais presentes neste trabalho. Abaixo de cada solução, e nas próprias figuras, há um exemplo execução do comando no FMSLogo.

## Árvore (fig. 2.13)

```
APRENDA ARVORESIMPLES :TAM :NIVEL
SE :NIVEL = 0 [PF :TAM PT :TAM PARE]
PF :TAM PE 30
ARVORESIMPLES :TAM/1.5 :NIVEL-1 PD 30
PD 30
ARVORESIMPLES :TAM/1.5 :NIVEL-1 PE 30
PT :TAM
FIM
```

Exemplo: ARVORESIMPLES 80 8

Figura B.1 Resultado ARVORESIMPLES



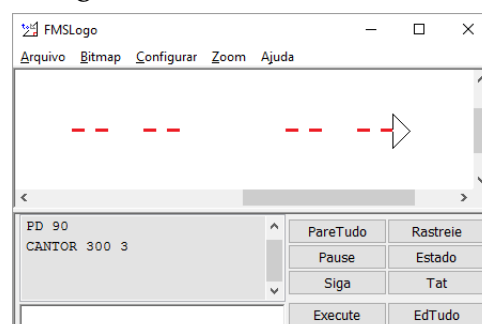
Fonte: Autoria própria.

## Conjunto de Cantor (fig. 3.23)

```
APRENDA CANTOR :TAM :NIVEL
SE :NIVEL = 0 [PF :tam PARE] UL
CANTOR :TAM/3 :NIVEL-1 UN
PF :TAM/3 UL
CANTOR :TAM/3 :NIVEL-1
FIM
```

Exemplo: PD 90 CANTOR 300 3

Figura B.2 Resultado CANTOR



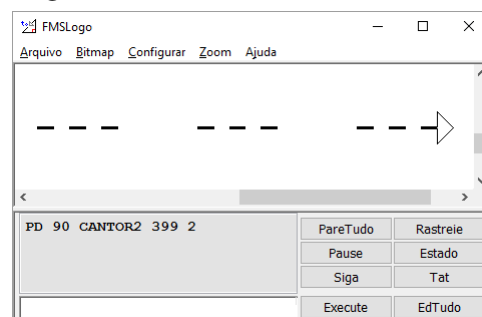
Fonte: Autoria própria.

## Variação do Conjunto de Cantor (fig. 4.19)

```
APRENDA CANTOR2 :TAM :NIVEL
SE :NIVEL = 0 [PF :TAM PARE]
REPITA 2 [UL CANTOR2 :TAM/5 :NIVEL-1
UN PF :TAM/5]
UL CANTOR2 :TAM/5 :NIVEL-1
FIM
```

Exemplo: PD 90 CANTOR2 399 2

Figura B.3 Rotina CANTOR2 (Nível 2)



Fonte: Autoria própria.

## Curva de Peano (fig. 3.15)

```

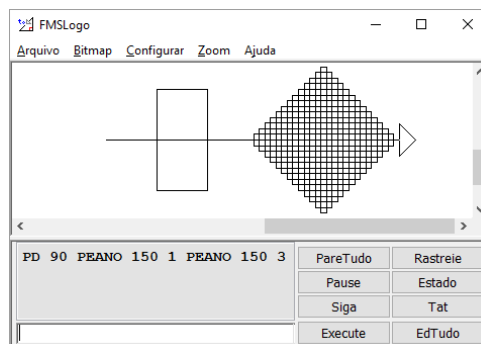
APRENDA PEANO :TAM :NIVEL
SE :NIVEL = 0 [PF :TAM PARE]
PEANO :TAM/3 :NIVEL-1 PE 90
PEANO :TAM/3 :NIVEL-1 PD 90
PEANO :TAM/3 :NIVEL-1 PD 90
PEANO (2*:TAM/3) :NIVEL-1 PD 90
PEANO :TAM/3 :NIVEL-1 PD 90
PEANO :TAM/3 :NIVEL-1 PD 90
PEANO (2*:TAM/3) :NIVEL-1

```

**FIM**

**EXEMPLO: PD 90 PEANO 150 1 PEANO 150 3**

**Figura B.4** Rotina PEANO (Nível 4)



Fonte: Autoria própria.

## Variação da Curva de Peano (fig. 4.17)

```

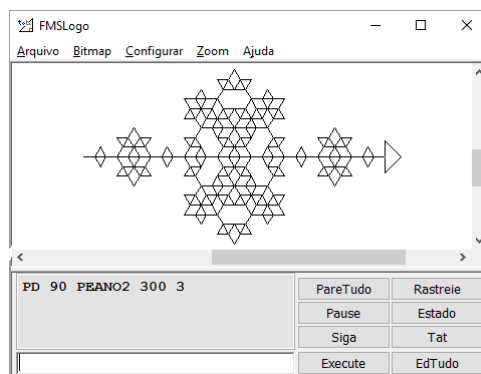
APRENDA PEANO2 :TAM :NIVEL
SE :NIVEL = 0 [PF :TAM PARE]
PEANO2 :TAM/3 :NIVEL-1 PE 60
PEANO2 :TAM/3 :NIVEL-1 PD 120
PEANO2 :TAM/3 :NIVEL-1 PD 60
PEANO2 :TAM/3 :NIVEL-1 PD 120
PEANO2 :TAM/3 :NIVEL-1 PD 120
PEANO2 :TAM/3 :NIVEL-1
PEANO2 :TAM/3 :NIVEL-1

```

**FIM**

**Exemplo: PD 90 PEANO2 300 3**

**Figura B.5** Rotina PEANO2 (Nível 3)



Fonte: Autoria própria.

## Curva de Koch (fig. 3.7)

```

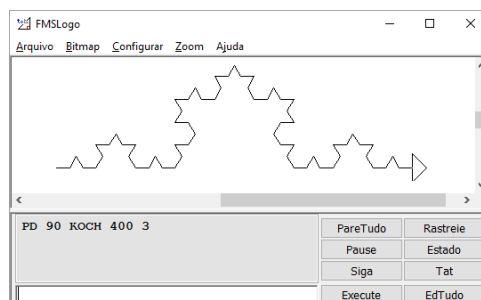
APRENDA KOCH :TAM :NIVEL
SE :NIVEL = 0 [PF :TAM PARE]
KOCH :TAM/3 :NIVEL-1 PE 60
KOCH :TAM/3 :NIVEL-1 PD 120
KOCH :TAM/3 :NIVEL-1 PE 60
KOCH :TAM/3 :NIVEL-1

```

**FIM**

**Exemplo: PD 90 KOCH 400 3**

**Figura B.6** Rotina KOCH (Nível 4)



Fonte: Autoria própria.

## Floco de neve de Koch

A rotina ILHAKOCH, usa a rotina KOCH para desenhar a Ilha de Koch (fig. 3.10).

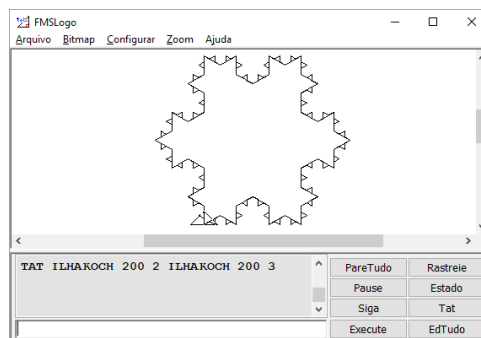
```

APRENDA ILHAKOCH :TAM :NIVEL
  REPITA 3 [KOCH :TAM :NIVEL PD 120]
FIM

```

Exemplo: ILHAKOCH 200 2 ILHAKOCH 200 3

Figura B.7 Execução ILHAKOCH



Fonte: Autoria própria.

## Curva de Koch Quádrica (fig. 4.18)

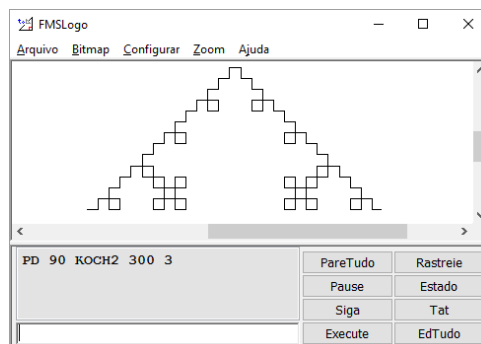
```

APRENDA KOCH2 :TAM :NIVEL
  SE :NIVEL = 0 [PF :TAM PARE]
  KOCH2 :TAM/3 :NIVEL-1 PE 90
  KOCH2 :TAM/3 :NIVEL-1 PD 90
  KOCH2 :TAM/3 :NIVEL-1 PD 90
  KOCH2 :TAM/3 :NIVEL-1 PE 90
  KOCH2 :TAM/3 :NIVEL-1
FIM

```

Exemplo: PD 90 KOCH2 300 3

Figura B.8 Rotina KOCH2 (Nível 3)



Fonte: Autoria própria.

## Triângulo de Sierpinski - Solução 1

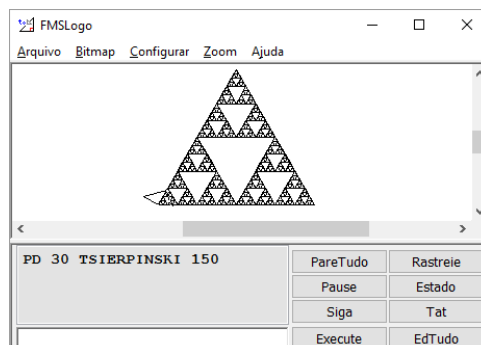
```

APRENDA TSIERPINSKI :X
  SE :X < 3 [PARE]
  REPITA 3 [TSIERPINSKI :X/2 PF :X PD 120]
FIM

```

Exemplo: PD 30 TSIERPINSKI 150

Figura B.9 Rotina TSIERPINSKI



Fonte: Autoria própria.

## Triângulo de Sierpinski - Solução 2 (fig. 3.21)

Abaixo os comandos LOGO para o triângulo de Sierpinski com a outra regra de formação. A solução requer a definição das rotinas, SIERPINSKI1 e SIERPINSKI2.

```

APRENDA SIERPINSKI1 :LADO :NIVEL
  SE :NIVEL = 0 [PF :LADO PARE]
  SIERPINSKI2 :LADO/2 :NIVEL - 1 PD 60
  SIERPINSKI1 :LADO/2 :NIVEL - 1 PD 60
  SIERPINSKI2 :LADO/2 :NIVEL - 1

```

**FIM**

```

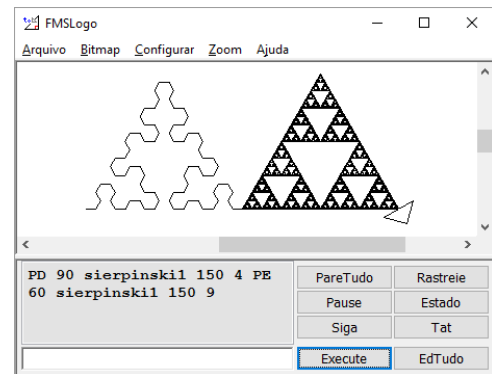
APRENDA SIERPINSKI2 :LADO :NIVEL
  SE :NIVEL = 0 [PF :LADO PARE]
  SIERPINSKI1 :LADO/2 :NIVEL - 1 PE 60
  SIERPINSKI2 :LADO/2 :NIVEL - 1 PE 60
  SIERPINSKI1 :LADO/2 :NIVEL - 1

```

**FIM**

**Exemplo:** **PD 90 SIERPINSKI1 150 4 PE 60**  
**SIERPINSKI1 150 9**

Figura B.10 Rotinas SIERPINSKI



Fonte: Autoria própria.

## Ilha de Minkowski

A seguir uma solução LOGO para a ilha de Minkowski fig. 4.26. A rotina **MINK** é a solução referente a fig. 4.25. A rotina **MINKOWSKY** necessita da rotina **MINK**.

```

APRENDA MINK :TAM :NIVEL
  SE :NIVEL = 0 [PF :TAM PARE]
  MINK :TAM/4 :NIVEL-1 PE 90
  REPITA 2 [MINK :TAM/4 :NIVEL-1 PD 90]
  MINK :TAM/4 :NIVEL-1
  REPITA 2 [MINK :TAM/4 :NIVEL-1 PE 90]
  MINK :TAM/4 :NIVEL-1 PD 90
  MINK :TAM/4 :NIVEL-1

```

**FIM**

```

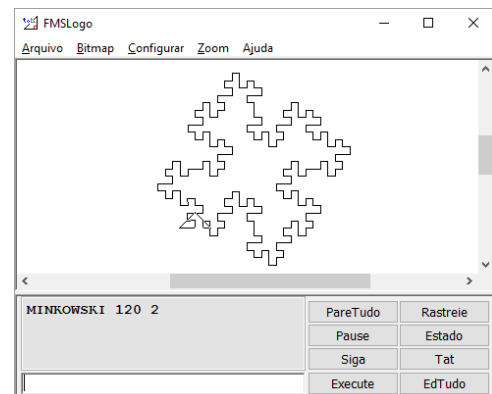
APRENDA MINKOWSKI :TAM :NIVEL
  REPITA 4 [MINK :TAM :NIVEL PD 90]

```

**FIM**

**Exemplo:** **MINKOWSKI 120 2**

Figura B.11 Rotina MINKOWSKI



Fonte: Autoria própria.

## Quadrado pintado

Abaixo, os comandos LOGO que constroem o quadrado pintado da figura 5.2.2. A rotina **QUAD** desenha um quadrado de lado **:LADO**, a rotina **PINTAR** serve para pintar o

interior de um quadrado, e a rotina **QUADRADO3** desenha o quadrado pintado.

**APRENDA** PINTAR

**PE** 45 **UN** **PT** 2 **PINTE** **PF** 2 **PD** 45 **UL**

**FIM**

**APRENDA** QUAD :LADO

**REPITA** 4 [**PF** :LADO **PE** 90]

**FIM**

**APRENDA** QUADRADO3 :LADO :N

**SE** :N = 0 [**PARE**]

**REPITA** :N [**REPITA** 3 [**QUAD** :LADO **PE** 90]

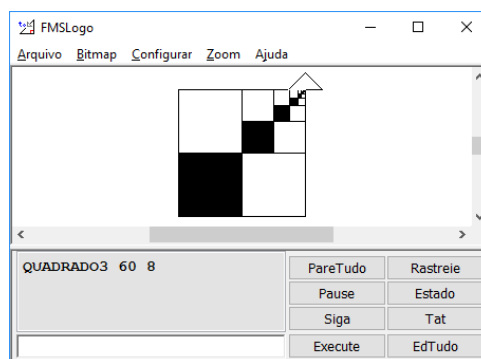
**PINTAR** **PF** :LADO/2 **PE** 90

**PF** :LADO/2 **ATRIBUA** "LADO :LADO/2]

**FIM**

**EXEMPLO:** **TAT** **QUADRADO3** 60 8

**Figura B.12** Rotina **QUADRADO3**



Fonte: Autoria própria.

## Espiral de Teodoro (fig. 5.2.2)

**APRENDA** TEODORO :L :NIVEL

**LOCAL** "HIP

**ATRIBUA** "HIP :L

**REPITA** :NIVEL [**PF** :L

**PE** (180 - **ARCTAN** :HIP/:L)

**PF** **RAIZQ** :L\*:L + :HIP\*:HIP

**PE** (180 - **ARCTAN** :L/:HIP)

**PF** :HIP **PE** 90 **PF** :L

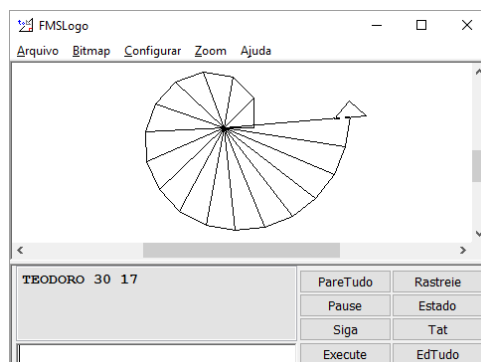
**PE** (90 - **ARCTAN** :HIP/:L)

**ATRIBUA** "HIP **RAIZQ** :L\*:L + :HIP\*:HIP]

**FIM**

**Exemplo:** **TEODORO** 30 17

**Figura B.13** Rotina **TEODORO**



Fonte: Autoria própria.

## Curva de Koch Circular (fig. 5.2.2)

**APRENDA** KOCHCIRCULAR :TAM :NIVEL

**SE** :NIVEL = 0 [[**PF** :TAM/3 **PE** 90 **REPITA** 180  
[**PF** (**PI**\*:TAM/3)/360 **PD** 1] **PE** 90 **PF** :TAM/3  
**PARE**]]

**KOCHCIRCULAR** :TAM/3 :NIVEL-1 **PE** 90

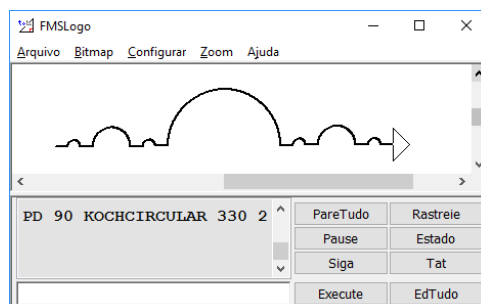
**REPITA** 180 [**PF** (**PI**\*:TAM/3)/360 **PD** 1] **PE** 90  
**PE** 90

**KOCHCIRCULAR** :TAM/3 :NIVEL-1 **PE** 90

**FIM**

**Exemplo:** **KOCHCIRCULAR** 330 2

**Figura B.14** Rotina **KOCHCIRCULAR**



Fonte: Autoria própria.

## Solução das atividades propostas

Abaixo, a solução das atividades 1 e 2 (págs. [111](#) e [112](#)), capítulo 5.

### Atividade 1

- a) REPITA 4 [REPITA 180 [PF 1 PD 1] PE 180];
- b) PD 30 REPITA 4 [PF 100 PD 120 PF 100 pe 120];
- c) REPITA 3 [PF 100 PD 120];
- d) REPITA 4 [PD 90 PF 30 PE 90 PF 30 PD 90 PF 100];
- e) PD 45 REPITA 2 [REPITA 3 [PF 100 PD 90 PF 100 PE 90] PD 180];
- f) PD 18 REPITA 5 [PF 200 PD 144];
- g) REPITA 30 [PF 5\*CONTEVEZES PD 90];
- h) REPITA 4 [REPITA 90 [PF 1 PD 1] PE 90 REPITA 180 [PF 1 PD 1]  
REPITA 180 [PT 1 PE 1] PD 90];

### Atividade 2

- a) Vide Quadrado Pintado [B.12](#);
- b) Vide Espiral de Teodoro [B.13](#);
- c) Vide Curva de Koch em [B.6](#);
- d) Vide Árvore em [B.1](#);
- e) Vide Cantor em [B.14](#).