UFES – Universidade Federal do Espírito Santo

Centro de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –

PROFMAT

GEOMETRIA NOS VAGÕES: CONEXÕES ENTRE O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL E OS TIPOS DE VAGÕES

Autor: Adolpho Olimpio dos Santos Filho

Orientador: Professor Etereldes Gonçalves Junior

Vitória – ES

14 de agosto de 2015

ADOLPHO OLIMPIO DOS SANTOS FILHO

GEOMETRIA NOS VAGÕES: CONEXÕES ENTRE O ENSINO DE GEOMETRIA ESPACIAL E OS TIPOS DE VAGÕES

Material desenvolvido com a finalidade de auxiliar os professores de Matemática dos cursos que envolvam Ferrovias a estimularem seus alunos, através de exemplos e exercícios, em sala de aula, a fazerem as conexões existentes entre a geometria espacial e os vagões.

Dissertação apresentada ao PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática, sob a orientação do Professor Etereldes Gonçalves Junior.

Vitória – ES

14 de agosto de 2015

Dados Internacionais de Catalogação-na-publicação (CIP)
(Biblioteca Central da Universidade Federal do Espírito Santo, ES, Brasil)

S237g

Santos Filho, Adolpho Olimpio dos, 1981-
Geometria nos vagões : conexões entre o ensino da geometria espacial e os tipos de vagões / Adolpho Olimpio dos Santos Filho. – 2015.
105 f. : il.

Orientador: Etereldes Goncalves Junior.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal do Espírito Santo, Centro de Ciências Exatas.

1. Geometria – História. 2. Geometria sólida. 3. Geometria - Estudo e ensino. I. Gonçalves Junior, Etereldes. II. Universidade Federal do Espírito Santo. Centro de Ciências Exatas. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

TRIGÉSIMA SEXTA ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRE EM MATEMÁTICA

Ata da sessão de defesa da trigésima sexta Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, do aluno Adolpho Olimpio dos Santos Filho, candidato ao grau de Mestre em Matemática. Às 10:00 horas do dia 14 de agosto de 2015, no IC1, sala 32, o presidente da Comissão Examinadora, Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior iniciou a sessão apresentando a Comissão constituída por além dele próprio, que é o Orientador, pelos Professores Doutores: Marcelo Ferreira farias (Examinador Externo) – (UFRRJ) e Moacir Rosado Filho (Examinador Interno) – DMAT/UFES. A seguir, o presidente passou a palavra ao candidato que em 50 minutos apresentou a sua Dissertação intitulada: "Geometria nos Vagões: Conexões entre o Ensino de Geometria Espacial e os Tipos de Vagões". Finda a apresentação, o presidente passou a palavra aos membros da Comissão para procederem a arguição. Finda a arguição, a Comissão retornou e o presidente informou aos presentes que a Dissertação foi Aprovada sem restrições. Logo após, o presidente declarou encerrada a sessão. Eu, Florêncio Ferreira Guimarães Filho, lavrei a presente Ata, que é assinada pelos membros da Comissão Examinadora. Vitória, 14 de agosto de 2015.

Prof. Dr. Etereldes Gonçalves Júnior

Moacir Rosado Filho

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho

CONFERE COM O ORIGINAL
Em 14/08/2015

Prof. Dr. Marcelo Ferreira Farias

AGRADECIMENTOS

A DEUS, por ter me dado saúde, calma, paciência e sabedoria para lidar com as angústias, as abdicações, pelos novos conhecimentos adquiridos durante essa etapa e por concluí-la. E assim, me tornando um profissional mais capacitado.

Ao meu filho, Heitor, que ao nascer durante o período do curso, funcionou como um combustível a mais para minha vida.

À minha esposa, parceira e companheira, Karina, que com muita paciência e sabedoria respeitou meu tempo, meu espaço e cuidou do meu filho, para que eu estudasse e me dedicasse ao curso.

À minha mãe e amiga, Ivone, que me passou os princípios morais, me educou, cuidou, me apoiou sempre e me mostrou o quanto são importantes o conhecimento e o estudo. Ao meu pai, Adolpho, que me deu a vida, e que mesmo de longe, sempre me indicava que o caminho era o conhecimento.

Aos meus avós, Roberto Moll e Aulda Moll, que sempre auxiliaram minha educação e também, de forma fundamental, sempre me mostraram a importância dos estudos.

À minha irmã e amiga, Liliane, que sempre cuidou de mim como um filho, me dando apoio e força nas horas que necessito.

Aos professores do PROFMAT, que compartilharam seus conhecimentos conosco e nos apoiaram no que foi preciso, para que concluíssemos essa etapa.

Ao Centro Educacional Leonardo da Vinci, em especial, à Sra. Maria Helena, à Sra. Palmira e ao Professor Luciano Couto, que enxergaram em mim, apesar de jovem, em 2005, um potencial para o ofício de professor e me deram a possibilidade de fazer parte dessa grande equipe.

Aos colegas da coordenadoria de Ferrovias do IFES Cariacica, que sempre se colocaram à disposição para auxiliar no que foi preciso para a conclusão desse trabalho.

Aos colegas de trabalho do Leonardo da Vinci, do Salesiano e do IFES, que fizeram com que eu amadurecesse como profissional e me motivaram à eterna busca do conhecimento.

PENSAMENTO

Professor, um ofício que exige uma prática reflexiva.

“A autonomia e a responsabilidade de um profissional dependem de uma grande capacidade de refletir em e sobre sua ação. Essa capacidade está no âmago do desenvolvimento permanente, em função da experiência de competências e dos saberes profissionais.

Por isso, a figura do profissional reflexivo está no cerne do exercício de uma profissão, pelo menos quando a consideremos sob um ângulo da especialização e da inteligência no trabalho.”

Philippe Perrenoud

Resumo

Este material surgiu da necessidade de apresentar o conteúdo de geometria espacial, dentro do contexto dos vagões, que é um dos objetivos de estudo dos alunos do curso em Manutenção Eletromecânica Ferroviário Integrado (MEFIN) do Instituto Federal do Espírito Santo – Campus Cariacica.

Neste material são abordados uma breve história da geometria espacial e de alguns personagens importantes que ao longo do tempo ajudaram a organizá-la, ou simplesmente fizeram o seu uso, a necessidade do surgimento das unidades de medidas, um resumo do conteúdo de geometria espacial, imagens de alguns vagões e suas respectivas especificações, associações de alguns modelos de vagões com os sólidos e alguns exemplos de aplicação da geometria nos estudos dos vagões. Espera-se que, após essa leitura, os alunos consigam relacionar os conceitos, as formas e as propriedades dos sólidos com os vagões, e assim criem as conexões necessárias para a resolução de futuras situações-problema que envolvam os conceitos da Geometria.

Palavras-chave: Geometria Espacial – história, conceitos, formas e conexões.

Abstract

This material came from the need to present the content of spatial geometry, regarding railroad cars, which is one of the study objectives of the students of Integrated Electromechanical Rail Maintenance (INERM) at Instituto Federal do Espírito Santo - Cariacica Campus.

In this material the following contents are covered: a brief history of space geometry and some important characters that over time helped organize it, or simply made use of it; the need for the emergence of units of measure, a summary of spatial geometry contents, images of some railroad cars and their specifications; associations of some models of cars with solids and some application examples of geometry in studies of railroad cars. It is expected that after this reading students can relate the concepts, forms and properties of solids to the cars, and thus create the necessary connections to the resolution of future problem situations involving the concepts of geometry.

Keywords: spatial geometry - history, concepts, shapes and connections.

Sumário

Introdução

Após várias reuniões em algumas escolas nas quais trabalho, com pedagogos e outros professores da área de Matemática, pode-se perceber entre os que ali estavam que:

O primeiro contato com a geometria espacial se dá de maneira empírica nas séries iniciais, do 1º ao 5º ano, quando os professores colocam os alunos em contato com várias caixas de papelão nos formatos de prismas, e os fazem reparar em alguns elementos desses sólidos como: os vértices, as arestas e as faces que os compoem. Em algumas escolas os professores têm a possibilidade de trabalhar com o material dourado, o que auxilia o desenvolvimento da ideia de volume. Em outro momento, as crianças são estimuladas a planificar essas caixas, o que desenvolve a visão bidimensional e a tridimensional. Nessa fase, um simples chapeuzinho de aniversário gera um momento de adquirir um conhecimento novo, pois ele agora passa a ser chamado também de cone e sua planificação sai imediatamente, quando esse aluno de forma instintiva resolve abrí-lo. O cone também é observado nas ruas nos chamados cones de trânsito, na casquinha de sorvete, etc. As pirâmides, por causa das belas histórias do Egito, são reconhecidas bem cedo pelas crianças, e esse contato para por aí. A grande maioria dos alunos chegam até o ensino médio acreditando que as pirâmides só possuem base quadrada, afinal, foi dessa forma que ela lhe foi apresentada. No caso das esferas, as crianças fazem a associação com o globo terrestre ou com uma bola de futebol e, geralmente, os professores são indagados por esses alunos com a seguinte pergunta: “Como podemos planificar a esfera?”, o que demonstra que as crianças já estão conseguindo estabelecer algumas relações entre a forma bidimensional e a tridimensional dos objetos que estão à sua volta.

Do 6º ao 9º ano, os alunos passam a ter contato com a geometria plana, pois esse conteúdo consta nos livros didáticos, entretanto geralmente é deixada para o final do ano letivo ou o professor não possuem intimidade com o conteúdo, gerando, assim, uma transmissão desse conhecimento de forma superficial. Por isso, quando o aluno adentra o ensino médio, percebe-se uma enorme lacuna nesse conteúdo. Isso se dá porque a base que lhe foi dada é fraca ou nem mesmo lhe foi apresentada.

O contato com a geometria espacial que faz parte de nosso cotidiano, assim como a plana, é abandonado nas escolas até o ensino médio, quando ela é retomada, muitas vezes de forma inadequada, pois ao invés dela ser trabalhada de forma mais madura, o professor gasta toda a sua energia tentando recuperar o “tempo perdido”, já que é necessário resgatar toda a geometria plana, para depois entrar com o ensino da geometria espacial.

Com esse pouco tempo o professor do ensino médio consegue passar todo o conteúdo, porém deixa a desejar em relação às conexões necessárias da geometria com o mundo, pois da forma que ela é passada, faz parecer como ela é algo isolado. Essa aproximação com o mundo tenta-se fazer através de questões contextualizadas, o que faz com que o aluno ache apenas um pretexto ao invés de enxergá-la no seu dia-a-dia.

O Ministério da Educação vem tentando mobilizar os professores, através do ENEM – Exame Nacional do Ensino Médio, para que eles reflitam sobre suas práticas de ensino e criem uma aproximação maior entre o conteúdo e aplicação dele na vida do aluno. Podemos perceber esse objetivo nas competências do ENEM: “recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural” (ENEM – Fundamentação Teórico – Metodológica – p.64).

“Enem faz dois serviços: permite ao aluno tomar conhecimento do real perfil de seu aprendizado, saber do que é capaz; sinaliza à escola o que se espera dela, qual o novo sentido do ensino médio, não necessariamente entrada, seja para a faculdade, seja para o emprego. Esses serviços são, hoje, essenciais” (ENEM – Fundamentação Teórico – Metodológica – p.64).

No caso da geometria percebemos isso na competência da área 2 da matriz do ENEM.

> Competência de área 2 - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.
>
> H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

> H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.
> H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.
> H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano. (NOVO ENEM, 2009, p.5)

Para ter acesso aos Institutos Federais, os alunos participam de um processo seletivo, que consiste de uma prova de acesso para conseguir uma vaga. Isso ainda ocorre, porém percebeu-se nas análises feitas nas reuniões da coordenadoria de Manutenção Eletromecânico Ferroviário Integrado, do Instituto Federal do Espírito Santo (MEFIN) – Campus Cariacica a mudança do perfil dos alunos, após o aumento do número de vagas e consequentemente uma menor concorrência. Dessa forma, o curso que antes recebia alunos com um diferencial em Matemática, e principalmente em geometria, visto que a prova de acesso exige um nível elevado de conhecimento desse conteúdo, passou a receber alunos com lacunas em geometria.

Diante desse novo perfil de alunos, ao ensinar geometria espacial para os alunos dos 3º anos desse curso, percebeu-se que uma grande parte desses alunos, mesmo depois de ver o conteúdo de Geometria Espacial, e fazer questões contextualizadas a respeito da mesma, não conseguiam enxergá-la dentro do curso técnico. Diante desse quadro, a coordenadoria de MEFIN desafiou os professores para que todos tentássemos criar conexões entre as matérias técnicas e as matérias do núcleo comum.

Incumbiram a mim o desafio de produzir um material complementar que ajudasse os professores que lecionavam esse conteúdo a mostrar para seus alunos algumas aplicações da geometria nos vagões de trem. Esse material sempre será apresentado aos alunos desse curso, após eles terem aprendido a matéria de forma tradicional.

O ensino tradicional do conteúdo será mantido pois a Matemática não pode deixar de cumprir o seu papel que é de desenvolver o raciocínio lógico dedutivo sistemático, e que a geometria não é feita apenas de formas e fórmulas.

> É inegável que submeter principiantes a áridas demonstrações sobre temas excessivamente abstratos, utilizando não raro uma linguagem peculiar e pedante,

> como se fazia no passado, certamente produz efeito traumáticos. Muitas pessoas detestam a Matemática, julgam-se incapazes de aprendê-la e afastam-se dela exatamente devido a isso. Mas parece-me também um grave erro perder-se qualquer oportunidade que surja de ensinar os jovens a deduzir por meio de raciocínio lógico algumas fórmulas importantes e simples [...]. (GARBI GILBERTO, CQD, p.10)

Esse material está dividido em quatro capítulos. O capítulo 1 nos traz uma breve história da Geometria (surgimento, alguns nomes importantes que contribuíram para a sua construção e algumas aplicações do dia-a-dia). O capítulo 2 aborda o surgimento das unidades de medidas de comprimento e tabelas de transformações de unidades de medida, de área e de volume. O capítulo 3 apresenta um resumo dos conteúdos dos principais sólidos relacionados ao estudo desse material (formas, expressões de perímetro, área e volume). No capítulo 4 são apresentados alguns problemas envolvendo aplicação da Geometria nos vagões.

Capítulo 1- Uma breve história da Geometria

1.1. O surgimento da Geometria

Tradicionalmente considera-se que a geometria surgiu com os Egípcios, e que ela nasceu da necessidade de se medir os limites de terrenos, sempre que ocorriam as cheias do rio Nilo. Os artesãos, artistas, carpinteiros, pedreiros, etc, são exemplos de profissionais que utilizavam a geometria em suas especialidades há tempo, muito antes de iniciar o primeiro milênio antes de Cristo. Desta forma acredita-se que já existia um certo conhecimento geométrico que circulava entre os povos do Oriente, assim como um certo conhecimento aritmético.

> Nos últimos séculos do terceiro milênio a.C. os egípcios, no vale do Nilo, e os sumérios (povo altamente desenvolvido, que floresceu na região entre o Tigre e o Eufrates, que por volta de 1800 a.C. foram conquistados pelos babilônios) já haviam criado o sistemas de numeração, com os quais tratavam de suas questões aritméticas, e também detinham vários conhecimentos empíricos de natureza geométrica. Um papiro de 1850 a.C. (o Papiro de Moscou) e outro de 1650 a.C. (o Papiro de Ahmes) comprovam as habilidades dos antigos egípcios na Aritmética e Geometria práticas.

(GARBI, CQD, p.22)

1.2. Os sábios da Grécia

No século VII a.C., os gregos se aproximaram dos egípcios e se apropriaram do conhecimento da Geometria e da Aritmética desenvolvido por estes. Diante disso resolveram estabelecer um conceito a respeito da Matemática, o qual iria revolucionar a Geometria, e começaram a tratá-la de maneira científica. Assim, perceberam que todas as afirmações feitas pela Matemática deveriam ser provadas.

O criador desse conceito foi Tales (640 – 564 a.C.), que nasceu na cidade de Mileto. Tales de Mileto, filósofo e matemático, também conhecido como o Pai da Matemática Dedutiva, fundou uma Escola, que hoje é conhecida como a Escola de Mileto. Nela eram desenvolvidos estudos de: Aritmética, Geometria, Astronomia e Filosofia. Uma das principais contribuições de Tales foi o Teorema de Tales. Apesar de Tales comprovar várias dessas afirmações, provavelmente, elas não atenderiam os padrões atuais de rigor matemático.

Perto da cidade de Mileto, nasceu na cidade de Samos, por volta de 586 a.C.,um homem que após uns anos seria considerado um dos símbolos da Matemática, Pitágoras(586 a.C. – aproximadamente 500 a.C.). Alguns historiadores dizem que ele foi aluno de Tales. Apesar de não haver essa certeza da relação de mestre e aprendiz entre eles, é bem provável que Pitágoras tenha feito contato com membros da Escola de Mileto, sendo assim influenciado pelas ideias de Tales. Pitágoras viveu vários anos no Egito. Depois que voltou para sua terra natal, chegou a fundar uma escola mas, como sua cidade estava sendo governada por um tirano, resolveu fechá-la e se mudou para Crotona, região Magna da Grécia, onde abriu uma nova escola, em 540 a.C., denominada Escola Pitagórica. Essa era voltada para o estudo de Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática e gerou, no antigo mundo grego, o interesse pelos estudos da Matemática. Segundo historiadores, as palavras Filosofia e Filósofo surgiram nessa escola.

Pitágoras, segundo historiadores, foi um dos primeiros a demonstrar de forma razoável e mais rigorosa, várias afirmações matemáticas. Uma de suas principais contribuições foi o Teorema de Pitágoras.

Após anos de inquietação e várias tentativas de apresentar a Matemática de forma ordenada e dedutiva, os filósofos da época perceberam que nem tudo na Matemática pode ser demonstrado e, assim, algumas afirmações devem ser simplesmente aceitas.

> [...] o preceito de Tales – As afirmações feitas na Matemática devem ser provadas – tem limitações. Na realidade, nem tudo na Matemática pode ser demonstrado: algumas afirmações precisam ser aceitas sem provas, para que processo demonstrativo possa ter início.
>
> (GARBI, CQD, p.31)

A essas afirmações que são admitidas sem provas, davam o nome de postulados. Não se tem conhecimento de quais matemáticos ou pensadores chegaram à conclusão de que alguns postulados são evidentes por si mesmos

Em 386 a.C., o mais conhecido filósofo Platão (427 a.C. – 347 a.C.) fundou em Atenas uma Academia e nela os estudos da Matemática foram bem desenvolvidos. Um dos mais notáveis alunos dessa escola foi Aristóteles (384 a.C. – 322 a.C.), de Estagira, filósofo que pelo seu vasto conhecimento afirma: "...nas Ciências existem verdades evidentes por si mesmas, que devem ser aceitas sem provas." Assim, acredita-se que desde aquela época já era utilizado o conceito de Postulados. Platão deu uma importância à geometria assim como à astronomia. Porém, a geometria debatida por ele com seus discípulos Sócrates e Glaucon era a plana.

Aristóteles, o criador da lógica, fez com que as provas matemáticas fossem desenvolvidas de forma ordenada e dedutível, a partir de conceitos primitivos e de postulados.

Em 323 a.C., com a morte do rei Alexandre, o grande, o Egito foi governado pelo general Ptolomeu I, que influenciado pelo filósofo Demétrio, abriu, em Alexandria, um centro científico-cultural, chamado Universidade de Alexandria. Em meados de 300 a.C., surge nessa universidade um geômetra chamado Euclides que, segundo historiadores, provavelmente aprendera Matemática na Academia de Platão. Euclides foi o autor do livro "Os Elementos", que reuniu todo o desenvolvimento da geometria até então conhecido no Egito, na Babilônia e na Grécia, e utilizou a lógica de Aristóteles para organizá-lo. Dessa forma, ele listou alguns postulados e algumas definições e, através da lógica e com um rigor matemático, até então pouco utilizado, provou todos os teoremas de seu livro e, ao mesmo tempo, preencheu as lacunas que existiam até aquele momento no estudo da geometria.

A sistemática e o rigor lógico do livro "Os Elementos" fazem com que o estudo da geometria euclidiana seja formativo. A teoria contida nele possui um algoritmo tão bem formulado que talvez seja por isso que ele seja referência por mais de 2000 anos.

> A maravilha dos “Elementos” consistia precisamente em demonstrar, com exemplo, como a inteligência do homem podia, guiado pelo raciocínio rigoroso, a partir de poucas premissas simples, a verdades que o secular conhecimento empírico podia ter ensinado (Sócrates, na República, designa à dialética tarefa de fundar os axiomas; mas essa é uma arte difícil para a qual tampouco ele sabe encontrar qualquer saída que não seja refletir e concluir). (LEVI BEPPO, p.85)

O estudo desse livro exige tanto empenho, quanto rigor, gerando uma estrutura mental de extrema importância para qualquer área do conhecimento.

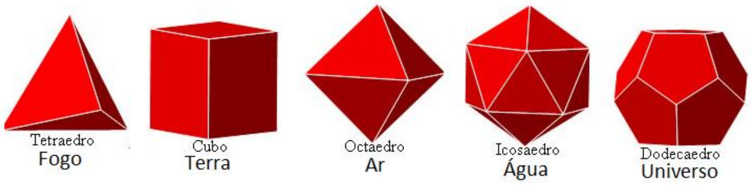
O estudo da geometria no espaço é chamado de Geometria Espacial. Nele estudamos figuras com três dimensões. A elas damos o nome de sólidos geométricos. Entre esses sólidos temos os poliedros (prisma, o cubo, o paralelepípedo, as pirâmides, etc) e os corpos redondos (os cilindros, os cones e as esferas).

Dentre esses poliedros, dadas as peculiaridades, destacam-se os cinco Poliedros regulares ou Poliedros de Platão. Beppo Levi (2010), em seu livro “Lendo Euclides” define poliedro regular da seguinte maneira: “Diz-se que um poliedro é regular quando todas as suas faces forem polígonos regulares congruentes e não houver distinção entre as características de uma aresta e outra ou de um vértice e outro.”

Os cinco Poliedros de Platão são:

1) Tetraedro – formado por quatro triângulos equiláteros;
2) Cubo – formado por seis quadrados;
3) Octaedro – formado por oito triângulos equiláteros;
4) Dodecaedro – formado por doze pentágonos regulares;
5) Icosaedro – formado por vinte triângulos equiláteros.

A paixão de Platão por esses sólidos era tanta que ele associou os sólidos à criação do universo. Ele dizia que o cubo, o icosaedro, o tetraedro, o octaedro e o dodecaedro representavam a terra, a água, o fogo, o ar e o universo, respectivamente.



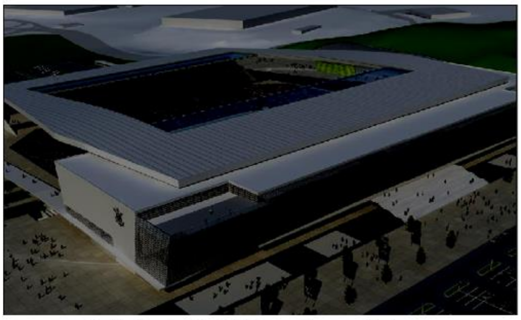
1.3. A Geometria aplicada no nosso dia-a-dia.

Após séculos, percebemos que a ideia de saber mais sobre a geometria é contemporânea, assim como sobre suas relações internas e sobre a relação entre ela e o mundo. Nesse ínterim, percebemos que a relação existente entre o mundo e as formas geométricas é muito estreita, obtendo assim um avanço interno na própria ciência e uma melhor compreensão do mundo.

Na arquitetura e na engenharia civil, nas ruas e, em geral, nas cidades, algo que agrada aos olhos são os projetos que aliam padrões arquitetônicos, beleza, simetria, modernidade, usualidade e funcionalidade com as formas geométricas.

Na Arquitetura

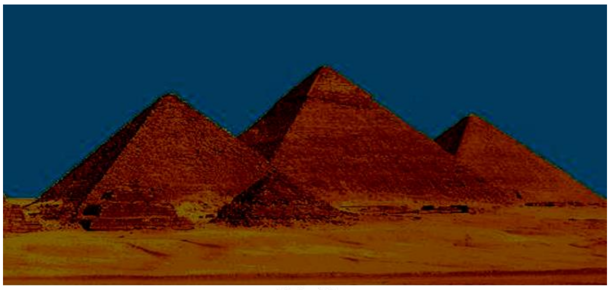
Exemplos:


Estádio do Corinthians (Itaquerão)


Congresso Nacional - Brasília


Teatro Melbourne – Austrália


Jardim Botânico - Curitiba


Pirâmides

No Artesanato

Exemplos:

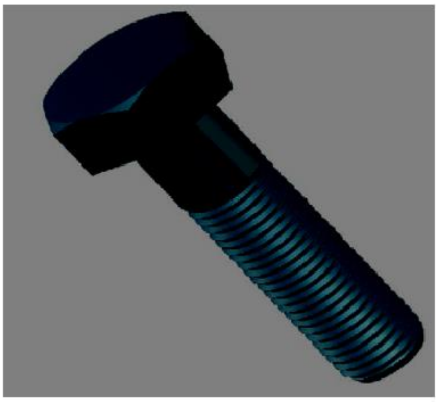


Caixas de jogos

Na indústria

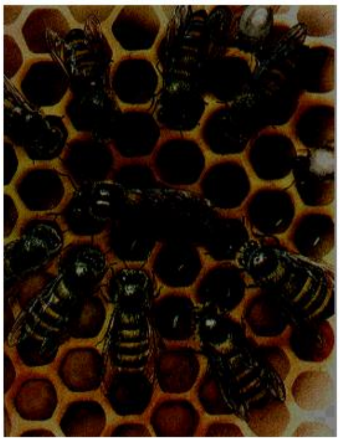
Exemplos:

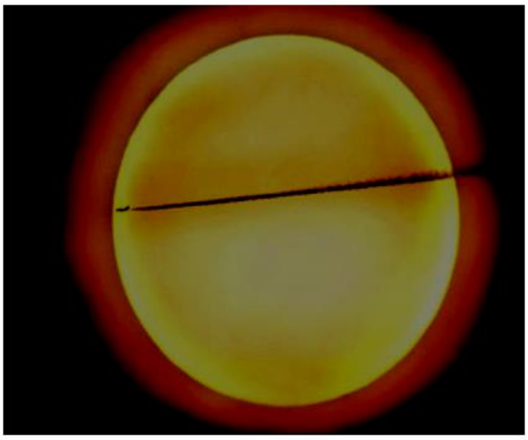

Silo (depósito)


Parafuso

Na Natureza

Exemplos:

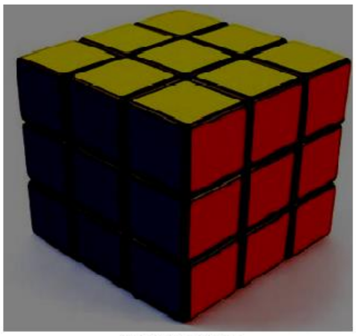

Favo de mel


Sol

Nos Jogos

Exemplo:


Dados


Cubo mágico


Bola de Futebol

"Não há estrada real para a geometria" (Euclides)

Capítulo 2 - Unidades de medidas e suas relações.

2.1. O surgimento das unidades de medidas nos povos.

Segundo o site do Inmetro (www.inmetro.gov.br), a *metrologia* "é a ciência que abrange todos os aspectos teóricos e práticos relativos às medições, qualquer que seja a incerteza em qualquer campo da ciência ou tecnologia".

De acordo com a Sociedade Brasileira de Metrologia (www.metrologia.org.br), a M*etrologia* "é a ciência da medição e sua existência é fundamentada nas necessidades básicas das pessoas que estão diretamente relacionadas à qualidade dos produtos, serviços e bens de consumo da sociedade".

Conforme registrado por Lord Kelvin(1883), cientista britânico, "o conhecimento amplo e satisfatório sobre um processo ou um fenômeno, somente existirá quando for possível medi-lo e expressá-lo por meio de números".

Diante disso, percebemos que as ideias e as observações obtidas de todo fenômeno ou processo só faz sentido se pudermos representá-las através de dados numéricos, ou seja, se pudermos mensurá-las. Sendo assim, é de extrema importância a utilização de uma unidade de medida padrão.

De acordo com a Metrologia, que é a ciência que estuda as medições e suas aplicações no dia a dia, na Matemática existem as Grandezas Fundamentais, as Derivadas e as Adimensionais.

As Grandezas Fundamentais são três: massa, tempo e comprimento. O grama, o segundo e o metro são unidades padrões estabelecidas para medir massa, tempo e comprimento, respetivamente.

As grandezas Derivadas são estabelecidas a partir das grandezas fundamentais e/ou inclusive dela própria.

Exemplos:

Velocidade = (distância):(tempo);

Densidade = (massa):(volume);

Área de um retângulo = largura x comprimento;

Volume de um paralelepípedo = comprimento x largura x altura;

Grandeza adimensionais são grandezas independentes das unidades.

Como exemplo, temos a representação de um ângulo Θ representado em radianos, ou seja, $\Theta = L / rad$, sendo L o comprimento do arco de raio igual a rad.

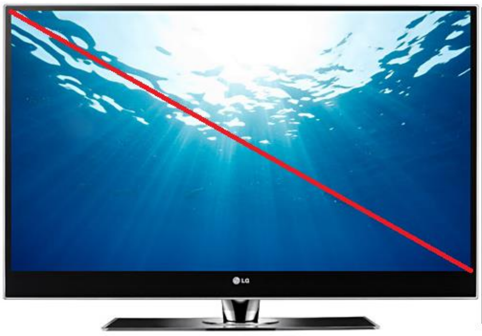
As medições sempre estiveram presentes de alguma forma na vida do homem, pois a necessidade de mensurar é inevitável. Com o passar dos tempos cada povo foi criando uma unidade de medida, como exemplo temos: o Cúbito, o Palmo, a Jarda, a Polegada e o Pé.

O *Cúbito* e o *Palmo* eram utilizados pelos povos egípcios há 4000 anos. O cúbito era a distância entre o cotovelo e a ponta do dedo médio do faraó e o palmo correspondia a sétima parte do cúbito, pois sua medida equivalia a quatro dedos das mãos juntos. Hoje, o palmo é conhecido como a distância em linha reta entre o polegar e o dedo minimo, de uma mesma mão.

A *Jarda* é a distância em linha reta entre a ponta do nariz e a ponta do dedo polegar do braço estendido, do Rei Henrique I da Inglaterra, no século XII. Essa é a unidade básica no sistema de medida que até hoje é utilizado nos Estados Unidos e no Reino Unido. Nos jogos de Futebol Americano, a unidade Jardas é utilizada e equivale a 0,9144 metros. Em inglês ela é conhecida como *yard* ou simplesmente *yd*.

A *Polegada***,** cuja medida é 2,54 centímetros(cm) ou 25,4 milímetros(mm), é utilizada no sistema imperial britânico de medidas. Em inglês ela é conhecida como *inch* ou simplesmente *in***.** Hoje em dia é muito utilizado por nós na hora de identificarmos o tamanho de uma TV;

Exemplo:



Polegadas	Comprimento da diagonal
32``	32 x 2,54 = 81,28 cm
40``	40 x 2,54 = 101,6 cm
46``	46 x 2,54 = 116,84 cm
50``	50 x 2,54 = 127,00 cm

O *pé* cuja medida é 30,48 centímetros (cm), é uma unidade de medidas bastante utilizada nos Estados Unidos, Reino Unido e com uma certa frequência no Canadá. Em inglês é conhecida como *foot* ou simplesmente *ft* ou ainda `. A medida de um pé equivale a doze polegadas e três pés, quando comparada às *jardas.*

Alguns historiadores acreditam que a medida original do pé inglês era a do rei Henrique I da Inglaterra - no século XII - que tinha um pé de 30,48 cm, quando calçado. Mas alguns registros mostram que essa unidade já era utilizada há 70 anos antes do seu nascimento, obviamente não com a mesma medida.

Hoje essa medida é muito utilizada por pilotos de avião (citando a altitude da aeronave durante um voo), por surfistas (altura da onda), etc.

Com a integração dos povos, através de viagens, negócios e para que os cientistas compartilhassem seus estudos, surgiu a necessidade de criar uma unidade de medição padrão que fosse aceita e compreendida por todos. A ideia da criação dessa medida de comprimento padrão se deu no fim do século XVII, porém só se conseguiu chegar a um acordo 130 anos após a proposta inicial.

2.2. A História do Metro

A palavra Metro é oriunda da palavra grega μέτρον (metron), que significa medida.

Na época da Revolução Francesa, a ideia de gerar uma unidade de medida universal saiu do papel. A utilização de diversas unidades de medida era um dos pivôs que gerava desentendimentos entre comerciantes, cobradores de impostos e os demais cidadãos. Com a unificação do país e da sua moeda, sob uma forte influência da economia, surgiu a necessidade de gerar uma padronização das medidas.

Segundo José Luciano de Mattos Dias(1998), em seu livro “Medida, normalização e qualidade; aspectos da história da metrologia no Brasil”, em 1789, a pedido do Governo Republicano Francês, a Academia de Ciência da França criou um sistema de medidas baseado numa constante natural. Foi criado o Sistema Métrico Decimal, que inicialmente era constituído de três unidades básicas: o metro, o litro e o quilograma. O metro foi definido como "a décima milionésima parte da quarta parte do meridiano terrestre", o litro como "o volume de um decímetro cúbico" e o quilograma como "a massa de um decímetro cúbico de água na temperatura de maior massa específica, ou seja, a 4,44ºC". Em 1983, na 17ª conferência geral de pesos e medidas, esse sistema foi substituído pelo Sistema Internacional de Unidades (SI), que determinou o Metro (m) como “comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo, durante um intervalo de tempo de 1/299 792 458 de segundo. O Litro (ℓ) permaneceu com a mesma definição do sistema decimal, porém recomenda-se a utilização da unidade metro cúbico (m^3) que significa “volume de um cubo cuja aresta tem 1 metro de comprimento”. O Quilograma (kg) manteve a mesma definição anterior, porém para materializá-lo foi criado um protótipo no formato de um cilindro, de platina iridiada, com diâmetro e altura iguais a 39 milímetros.

2.3. Os submúltiplos do Metro.

Assim, adotando o *metro* como uma unidade padrão de medida, logo se criou os seus subdivisores e múltiplos.

Tabela dos submúltiplos do metro.

Unidade de medida de comprimento	Siglas das unidades
Milímetro (milésima parte do metro)	mm
Centímetro (centésima parte do metro)	cm
Decímetro (décima parte do metro)	dm
Metro (unidade padrão de medida no SI*)	M
Decâmetro (equivale a 10 m)	dam
Hectômetro (equivale a 100 m)	hm
Quilômetro (equivale a 1000 m)	km

*Sistema internacional de unidades (SI).

Algumas Curiosidades:

O *milímetro* (mm) é a unidade utilizada para medir a quantidade de chuva que caiu em 1 m². Ao dizer que a precipitação de uma chuva foi de 1 mm, significa dizer que em 1 m² "temos uma poça" de altura 1 mm, ou seja, temos um paralelepípedo de 1 m² de base e altura 1 mm. Logo, podemos dizer que caiu 1 litro de água em uma área de 1m².

O *milímetro* (mm) é adotado como a medida padrão na Mecânica, na Europa e na Ásia.

O *centímetro* (cm) é utilizado popularmente para representar as dimensões de escala humana que são menores do que metro. Essa medida é geralmente adotada como padrão de marcenaria.

O decímetro é pouco utilizado. Para uma unidade menor do que metro é preferível utilizar o centímetro (cm) ou o milímetro (mm).

O *metro* (m) é geralmente utilizado como a medida padrão na construção civil.

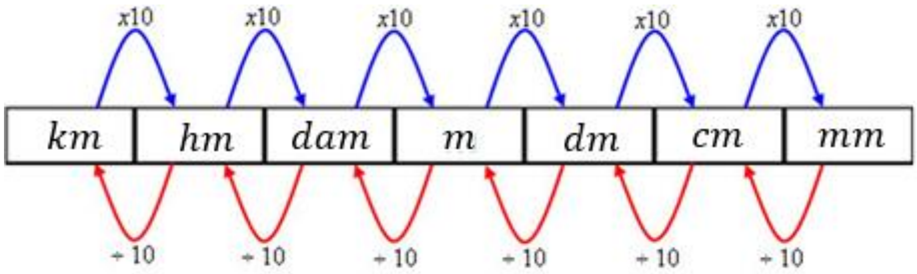
O decâmetro (dam) e o hectômetro (hm) são poucos utilizados, para uma unidade maior ao metro é preferível utilizar o quilômetro (km).

A palavra *quilômetro* (km) é uma combinação do prefixo quilo ("mil") com a palavra metro, razão porque um quilômetro equivale a mil metros.

2.4. Transformações de unidades

Uma maneira prática de transformarmos a unidade padrão do metro (m) para seus submúltiplos é utilizarmos a tabela de transformações.

Tabela de transformações das unidades em metros



Exemplos:

Transforme:

a) 15cm para metros.

Perceba que para transformarmos de cm para m, basta dividirmos por 100, ou seja, 15 cm equivale a 0,15 m.

b) 5,879 km para metros.

Perceba que, para transformarmos de km para m, basta multiplicarmos por 1000, ou seja, 5,879 km equivale a 5879 m.

c) 123456 cm para km.

Perceba que para transformarmos de cm para km, basta dividirmos por 100000, ou seja, 123456 cm equivale a 1,23456 km.

2.5. Área

Área é a porção do plano ocupada por uma figura plana F. Para medi-la, comparamos a figura F com a unidade de área. Esse resultado gera um número, que representa quantas vezes a figura F contém a unidade de área. A unidade de área utilizada no SI para área é o metro quadrado (m^2), quando a unidade de área não é definida utilizamos $1\,u^2$, sendo u a unidade de medida de comprimento. A tabela a seguir apresenta algumas transformações de unidades de áreas.

$1\ cm^2 \leftrightarrow 10^2\ mm^2$
$1dm^2 \leftrightarrow 10^2\ cm^2$
$1\ m^2 \leftrightarrow 10^4\ cm^2$
$1\ m^2 \leftrightarrow 10^2\ dm^2$
$1\ km^2 \leftrightarrow 10^6\ m^2$

2.6. Volume

Volume é a porção do espaço ocupada por um sólido S. Para medi-lo, comparamos o sólido S com a unidade de volume. Esse resultado gera um número, que representa quantas vezes o sólido S contém a unidade de volume. A unidade de volume utilizada no SI para volume é o metro cúbico (m^3), quando a unidade de volume não é definida utilizamos $1u^3$, sendo u a unidade de medida de comprimento.

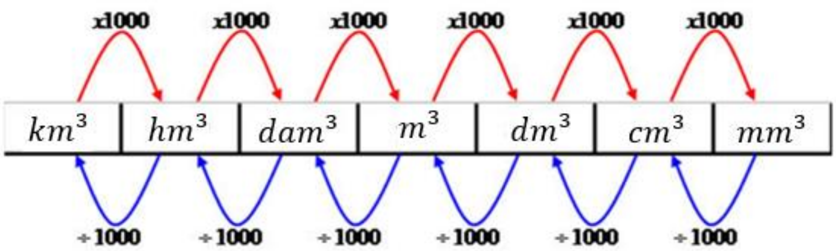
Um dos principais equívocos no estudo dos sólidos é a confusão entre as palavras volume e capacidade. Devemos lembrar que volume é o espaço que o determinado sólido ou objeto ocupa no espaço, enquanto a capacidade é o quanto o objeto ou o sólido é capaz de armazenar algo. Por exemplo, uma rocha sólida no formato de um paralelepípedo possui volume, porém, sua capacidade de algo é nula. Já um pote de sorvete possui volume e capacidade.

Tabela de submúltiplos do metro cúbico.

Unidade de volume em m³	Siglas das unidades
Milímetro cúbico	mm^3
Centímetro cúbico	cm^3
Decímetro cúbico	dm^3
Metro cúbico	m^3
Decâmetro cúbico	dam^3
Hectômetro cúbico	hm^3
Quilômetro cúbico	km^3

Uma maneira prática de transformarmos a unidade padrão do volume m^3 para seus submúltiplos é utilizarmos a tabela de transformações.

Tabela de transformações das unidades em metros cúbicos

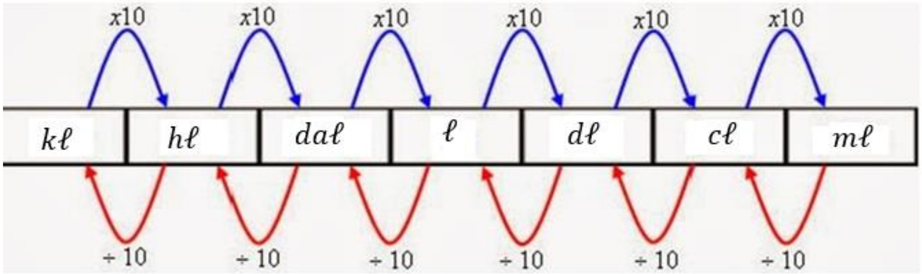


Uma outra forma de medirmos o volume é utilizando a unidade litro (ℓ).

Unidade de volume em litros	Siglas das unidades
Mililitro	$m\ell$
Centilitro	$c\ell$
Decilitro	$d\ell$
Litro	ℓ
Decilitro	$da\ell$
Hectlitro	$h\ell$
Quilolitro	$k\ell$

Percebemos a relação entre os submúltiplos do litro na tabela abaixo.

Tabela de transformações das unidades em litros



A relação entre o volume em m³ e em ℓ ocorre de acordo com a tabela abaixo:

Volume em m^3	Volume em ℓ
$1\ cm^3$	$1\ m\ell$
$1\ dm^3$	1ℓ
$1\ m^3$	$1000\ \ell$

Exemplos:

Transforme:

a) 12ℓ em $m\ell$.

Perceba que ao transformarmos de ℓ para $m\ell$, basta multiplicarmos por 1000, ou seja, 12ℓ equivale a 12000$m\ell$.

b) 75000 mm^3 para ℓ.

Como $1\ mm^3$ equivale a $1m\ell$, temos que $75000\ mm^3$ equivale a $75000\ m\ell$. Porém, $1000\ m\ell$ equivale a $1\ \ell$. Assim, $75000\ m\ell$ equivale a $75\ \ell$.

Capítulo 3 – Geometria: Medidas, áreas e volumes

A ideia de medir está associada ao ato de comparar grandezas de uma mesma espécie, a partir de uma unidade pré-estabelecida que será utilizada como referência de comparação. O resultado dessa comparação é um número real não negativo. Esse número é chamado de medida.

3.1. Medida de um segmento de reta

A medida de um segmento $\overline{AB}$ será indicada por $m(\overline{AB})$ ou simplesmente por AB. De acordo com Osvaldo Dolce e José N. Pompeo (2013), a medida de um segmento é um número real não negativo associado ao segmento, satisfazendo as seguintes propriedades:

1) Segmentos congruentes têm medidas iguais e, reciprocamente, segmentos que têm medidas iguais são congruentes.

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{AB}) = m(\overline{CD})$$

2) Se um segmento é maior que outro, sua medida é maior que a deste outro.

$$\overline{AB} > \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{AB}) > m(\overline{CD})$$

3) A um segmento soma está associado uma medida que é a soma das medidas dos segmentos parcelas.

$$\overline{RS} = \overline{AB} + \overline{CD} \Leftrightarrow m(\overline{RS}) = m(\overline{AB}) + m(\overline{CD})$$

À *medida de um segmento* damos o nome de *comprimento* do segmento.

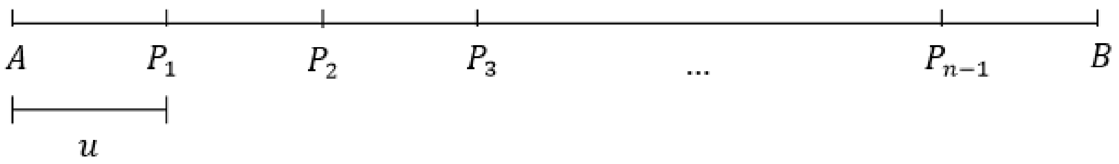
Em relação à congruência, à desigualdade e à adição de segmentos, segundo Eudóxio-Arquimedes (Eudóxio: 408-355 a.C.; Arquimedes: 278-212 a.C.): "dados dois segmentos, existe sempre um múltiplo de um deles que supere o outro", o que nos permite sempre estabelecer a razão entre dois segmentos quaisquer. Portanto podemos sempre medir um deles tomando o outro como unidade de comprimento.

Considere um segmento de reta qualquer u, que chamaremos de segmento unitário, que tomaremos como unidade de comparação. Por definição, a medida do segmento u é 1. Nosso objetivo é mostrar o processo de comparar um segmento de reta qualquer AB a u.

Pela Propriedade 1, temos que todos os segmentos de reta congruentes a u medirá 1.

Uma propriedade que se espera de uma medida de segmento é que a medida de um segmento AC seja a soma da medida de AB com BC se, somente se, B é um ponto do segmento AC.

De maneira geral, dado um número inteiro positivo n, se for possível obter $n-1$ pontos intermediários $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ no segmento AB, de tal modo que os n segmentos $AP_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}B$ sejam todos congruentes ao segmento u, então a medida de AB será n.

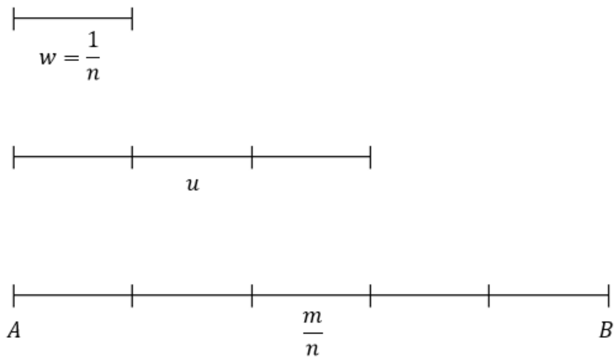


Dessa forma, diremos que um segmento AB tem comprimento igual a n, se AB poder ser decomposto em n segmentos de reta justapostos, todos de comprimento 1.

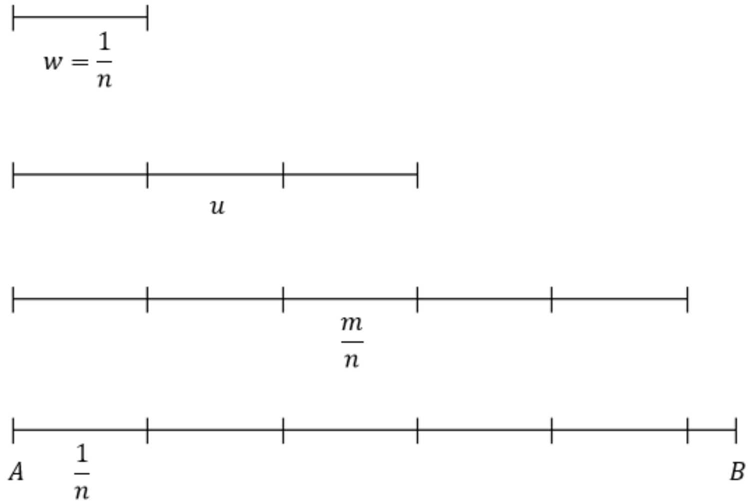
Nem todo segmento AB pode ser decomposto da maneira citada anteriormente. Um exemplo seria um segmento AB, medida menor que u. Sejam $n, w \in \mathbb{N}$, neste caso perceba que podemos dividir a unidade u em n pedaços de mesma medida iguais a w, ou seja, teríamos

$$n \cdot w = u \Rightarrow n \cdot w = 1 \Rightarrow w = \frac{1}{n}.$$

Se o segmento $w = \frac{1}{n}$ for submúltiplo comum de AB e u, então dizemos que AB e u são comensuráveis. Portanto, a medida do segmento AB é m vezes o segmento $\frac{1}{n}$, ou seja, $AB = \frac{m}{n}$.



Se o segmento $w = \frac{1}{n}$ não for submúltiplo comum de AB e u, qualquer que seja o n, então dizemos que AB e u são incomensuráveis. Nesse caso existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, $\frac{1}{n}$ está m vezes em AB, por falta, e $m+1$ vezes em AB, por sobra, ou seja, $\frac{m}{n}$ é uma aproximação de AB por falta e $\frac{m+1}{n}$ é uma aproximação de AB por excesso.

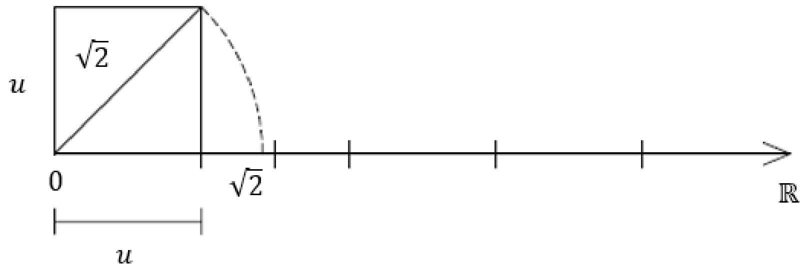


Dessa forma, temos que:

$$\frac{m}{n} < AB < \frac{m+1}{n} \Rightarrow \frac{m}{n} < AB < \frac{m}{n} + \frac{1}{n}.$$

Como o erro é $\frac{1}{n}$, basta adotar um n “tão grande” de tal forma que $\frac{1}{n}$ seja insignificante. Logo, vemos que é possível obter valores aproximados para a medida do segmento $\overline{AB}$, com erro tão insignificante quanto se queira.

Como exemplo de segmentos incomensuráveis, temos o lado e a diagonal de um quadrado, cuja medida do lado é u.



Pelo Teorema de Pitágoras, a medida da diagonal do quadrado de lado u é um número cujo quadrado é 2. Tal número, não pode ser da forma $\frac{m}{n}$, com m.d.c.$(m, n) = 1$, pois do contrário teríamos

$$2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2 \cdot n^2.$$

Como o m.d.c $(m, n) = 1$, temos que a igualdade de $m^2 = 2 \cdot n^2$ é um absurdo. De fato, os inteiros m^2 e n^2 contêm cada um dos seus fatores primos um número par de vezes, pois estão elevados ao quadrado. Logo, $2 \cdot n^2$ contêm um número ímpar de fatores iguais a 2 e não pode ser igual a m^2.

Observe que as medidas de grandezas comensuráveis e de incomensuráveis estão associados com os números racionais e irracionais, respectivamente, pois nos casos de segmentos comensuráveis, temos $AB = n$ (número inteiro) e $AB = \frac{m}{n}$ (número racional); e no de incomensuráveis AB não é da forma $\frac{m}{n}$, ou seja, é um número irracional.

Um cuidado que devemos ter é na utilização das palavras medida e comprimento. No caso do segmento, a sua medida equivale ao comprimento, o mesmo não ocorre para áreas e volumes.

3.2. Medida de uma área

Área é a porção do plano ocupada por uma figura plana F. Para medi-la, comparamos a figura F com a unidade de área. Esse resultado gera um número, que representa quantas vezes a figura F contém a unidade de área.

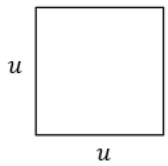
Segundo Elon L. Lima, em seu livro Medida e Forma em Geometria (2006), a área de um polígono é representada por um número real não-negativo e satisfaz as seguintes propriedades:

1) Polígonos congruentes têm áreas iguais;

2) Se o polígono é um quadrado de lado unitário, sua área é igual a 1;

3) Se um polígono pode ser decomposto como reunião de n polígonos menores justapostos (sem sobreposição), então a área desse polígono é igual a soma das áreas desses polígonos menores.

Fixemos um quadrado cujo lado mede uma unidade de comprimento (quadrado unitário), chamado unidade de área, que utilizaremos como unidade de comparação. Por definição, a medida desse quadrado unitário é 1.



Todo quadrado cuja medida do lado é 1 terá, por definição, área igual a 1.

A seguir, vamos comparar as áreas de algumas figuras planas mais conhecidas com a unidade de área.

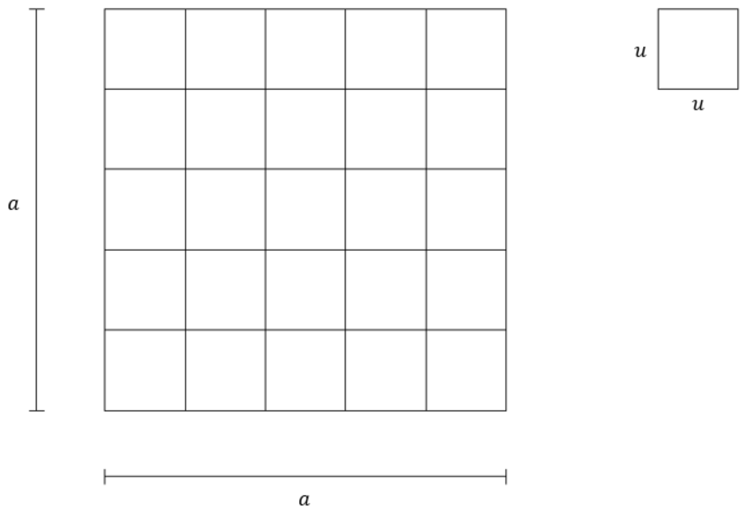
3.2.1. Área do quadrado de lado natural ou racional

Considere um quadrado Q de lado a, racional positivo. Sua área S é dada pela expressão $S = a^2$.

De fato, vamos pensar nos casos de a ser natural e de a ser racional. O caso de a irracional, provaremos mais à frente.

Caso 1) "a" $um\ número\ natural.$

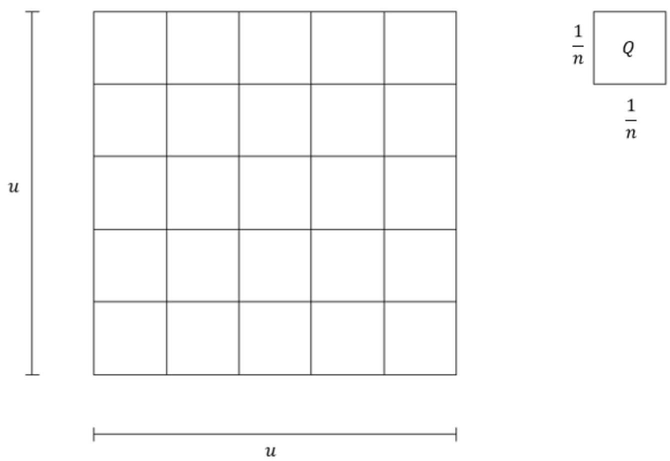
Nesse caso podemos decompor Q em $a \cdot a$ quadrados unitários, assim temos que a área do quadrado Q é $S = a^2 \cdot 1 = a^2$. No caso de $a = 5$ temos:



Observação:

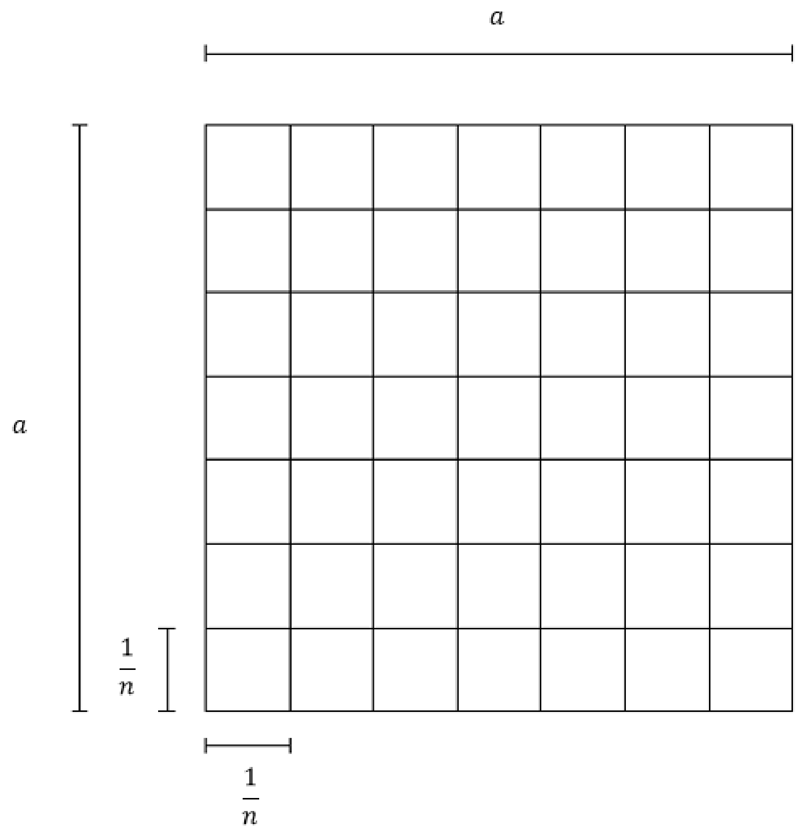
No caso de um quadrado Q de lado $\frac{1}{n}$, sendo n um número natural, podemos decompor um quadrado unitário em n^2 quadrados justapostos, todos congruentes a Q, ou seja, $n^2 \cdot S = 1 \Rightarrow S = \frac{1}{n^2}$.

No caso de $n = 5$, temos:



Caso 2) "a" $um\ número\ racional.$

Nesse caso, podemos escrever $a = \frac{p}{n}$, com $p, n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$. Dividimos cada lado de Q em segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$. Dessa maneira, cada lado será dividido em p segmentos justapostos, cujo comprimento de cada um é igual a $\frac{1}{n}$. Como a área do quadrado de lado $\frac{1}{n}$ é dada por $\frac{1}{n^2}$, e o quadrado Q será subdividido em $p \cdot p \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{p}{n} = a \cdot a = a^2$, logo, a área de Q é $S = a^2$



3.2.2. Área de retângulo

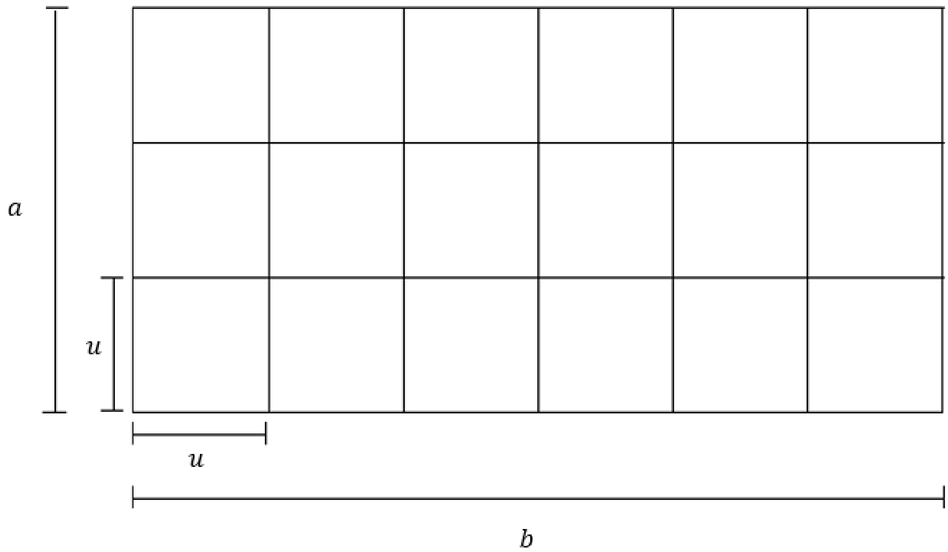
Considere um retângulo R, cujas dimensões são os números positivos a e b, sua área S é

$$S = a \cdot b.$$

De fato, vamos pensar nos seguintes casos:

Caso 1: $a \; e \; b \; naturais$.

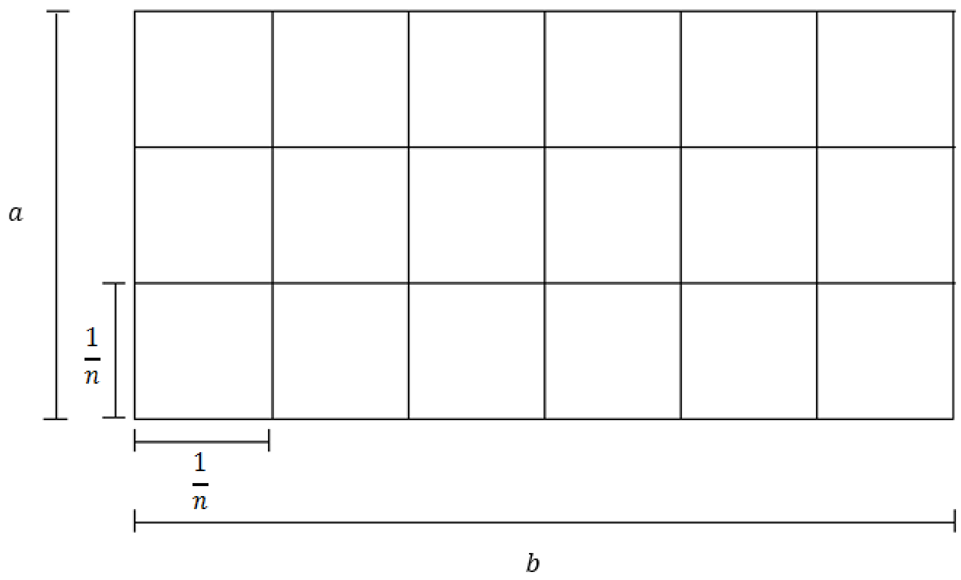
Nesse caso podemos decompor o retângulo R em $a \cdot b$ quadrados unitários. Assim temos que a área do retângulo é igual a $S = a \cdot b \cdot 1 = ab$.



Caso 2: $a \; e \; b \; racionais$.

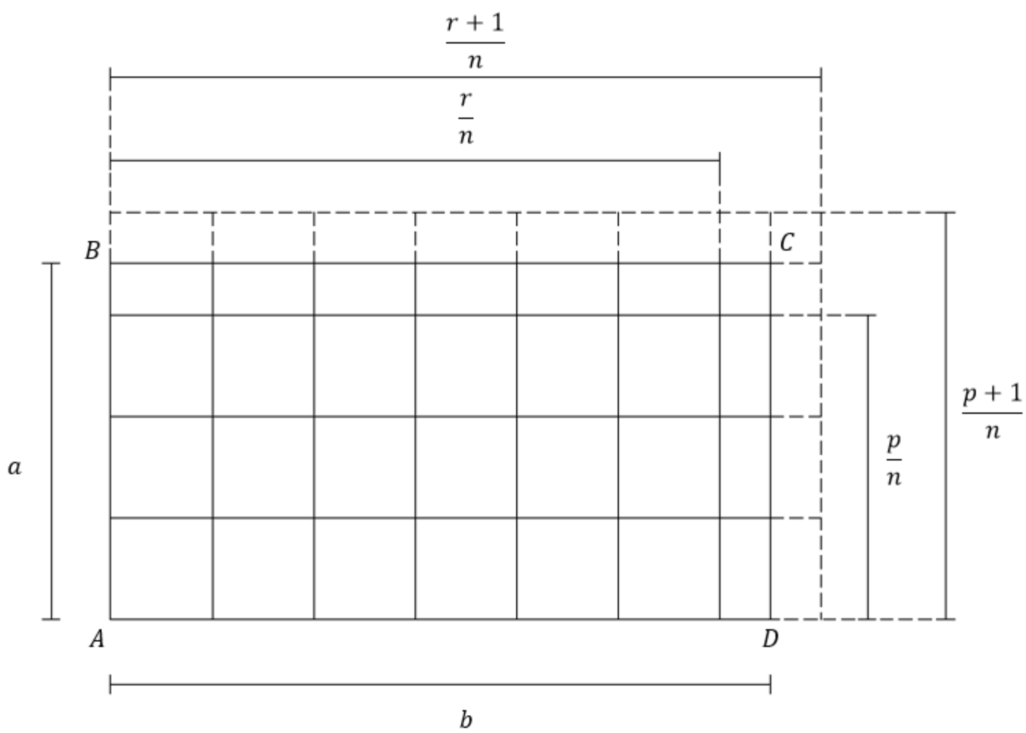
Nesse caso podemos escrever $a = \frac{p}{n}$ e b= $\frac{r}{n}$, com $p, r, n \in IN$ e $n \neq 0$. Dividimos cada lado de R em segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$. O lado que mede a será decomposto em p segmentos justapostos, cuja medida de cada um é $\frac{1}{n}$ e o lado que mede b será decomposto em r segmentos justapostos, cada um medindo $\frac{1}{n}$. Traçando paralelas aos lados a partir dos pontos de subdivisão, o retângulo R ficará subdividido em $p \cdot r$ quadrados, cuja medida dos lados é $\frac{1}{n}$ e de área igual a $\frac{1}{n^2}$.

Logo, a área do retângulo R é igual a $(p \cdot r) \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{p \cdot r}{n^2} = \frac{p}{n} \cdot \frac{r}{n}$, ou seja, a área do retângulo R é igual a $S = a \cdot b$.



Caso 3) $a\ e\ b\ irracionais$.

Considere o retângulo $ABCD$, cujas medidas dos segmentos $AB = a$ e $AD = b$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, tomemos um segmento de reta v de medida $\frac{1}{n}$ e seja $p \in \mathbb{N}$ tal que v esteja contido p vezes em AB, mas v não está contido $p + 1$ vezes em AB, ou seja, $\frac{p}{n}$ é uma aproximação da medida de AB por falta e $\frac{p+1}{n}$ é uma aproximação da medida de AB por excesso.



Dessa forma, temos que:

(i) $\frac{p}{n} < AB < \frac{p+1}{n}$

De maneira análoga, podemos pensar o mesmo para o lado $AD = b$. Temos a equação (ii).

(ii) $\frac{r}{n} < AD < \frac{r+1}{n}$

Fazendo (i)·(ii), temos:

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{r}{n} < AB \cdot AD < \frac{p+1}{n} \cdot \frac{r+1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{n} \cdot \frac{r}{n} < AB \cdot AD < \left(\frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{n} \cdot \frac{r}{n} < \quad a \cdot b \quad < \left(\frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right).$$

Além disso, a área R de $ABCD$ satisfaz

$$\frac{p}{n} \cdot \frac{r}{n} < \quad R \quad < \left(\frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right).$$

Daí,

$$0 \leq |R - ab| < \left[\left(\frac{p}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right)\right] - \frac{pr}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq |R - ab| < \left[\frac{p}{n^2} + \frac{r}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{pr}{n^2}\right] - \frac{pr}{n^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq |R - ab| < \left[\frac{p}{n^2} + \frac{r}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right] < \left[\frac{a}{n} + \frac{b}{n} + \frac{1}{n^2}\right] \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |R - ab| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = ab.$$

Portanto, a área do retângulo é $R = ab$.

Como um quadrado é um retângulo de lados iguais, temos que a área S de um quadrado Q de lado “a”, irracional ,é $S = a \cdot a \Rightarrow S = a^2$.

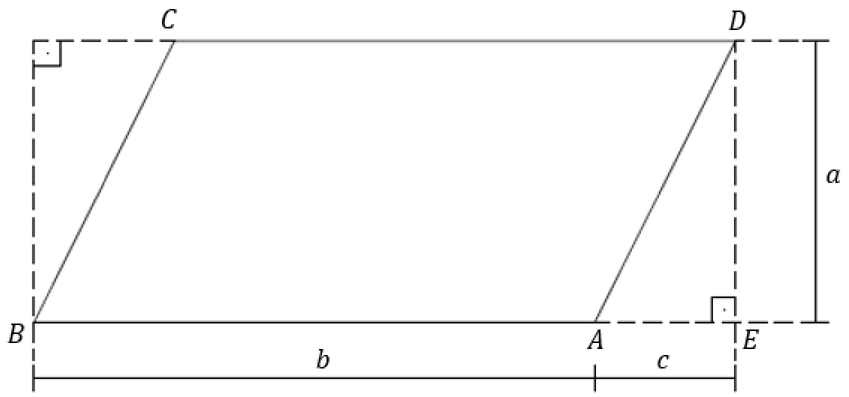
3.2.3. Área do paralelogramo

Um *paralelogramo* é um quadrilátero no qual os lados opostos são paralelos.

Ao tomarmos um dos lados de um paralelogramo como sua base, a menor distância entre a base e o seu lado oposto é considerado a sua altura.

Seja $ABCD$ um paralelogramo de área igual a S. Considere que sua base $\overline{AB}$ tem comprimento b e a altura $\overline{DE}$, relativa ao lado $\overline{AB}$, tem comprimento a.

O paralelogramo $ABCD$ está contido num retângulo de base $b + c$ e altura a. A área desse retângulo é $(b + c) \cdot a = ba + ca$.



Por outro lado, poderíamos dizer que esse retângulo poderia ser formado pela soma das áreas S do paralelogramo dado e dos dois triângulos que, juntos, formam um retângulo de área ca. Portanto, $ba + ca = S + ca \Rightarrow S = ba$.

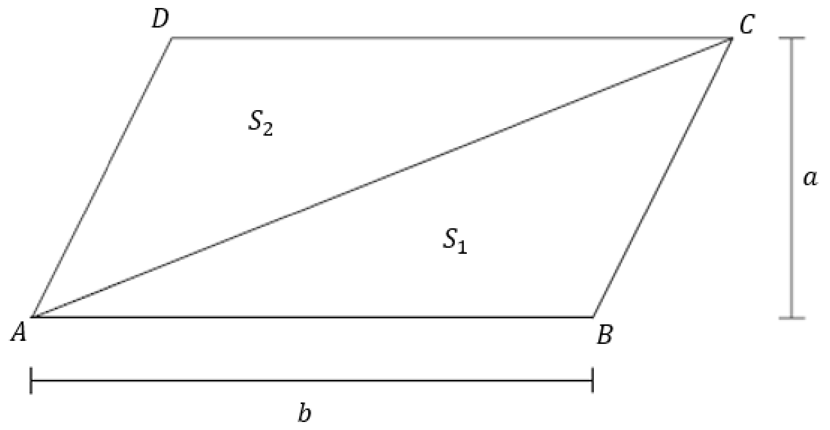
Assim, a área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma das suas bases pelo comprimento da altura correspondente.

3.2.4. Área do triângulo

Um triângulo é um polígono (linha poligonal fechada) formado por três lados. Sua área equivale à metade de um paralelogramo.

De fato, dado um triângulo ABC, se traçarmos a partir dos vértices C e B, respectivamente, retas paralelas a AB e a AC, estas se encontram no ponto D, gerando assim um paralelogramo $ABCD$. Perceba que ao traçarmos uma das diagonais AC ou BD, do paralelogramo $ABCD$, são gerados dois triângulos congruentes. Como exemplo, ao traçarmos a diagonal AC, temos que os triângulos ABC e ACD são congruentes. Ora, podemos então dizer que a área do paralelogramo $ABCD$ é igual à soma dos dois triângulos, ou seja, considerando $S = a \cdot b$, S_1 e S_2 as áreas do paralelogramo e dos triângulos ABC e ACD, repectivamente, temos

$$S_1 + S_2 = S \Rightarrow S_1 + S_2 = a \cdot b \Rightarrow 2 \cdot S_1 = a \cdot b \Rightarrow S_1 = S_2 = \frac{a \cdot b}{2}$$



Portanto, a área de um triângulo qualquer é dado pela metade do produto de uma de suas bases pela sua altura correspondente.

Como qualquer polígono pode ser dividido em triângulos justapostos, cujos vértices coincidem com os do polígono, então a área de um polígono pode ser obtida pela soma das áreas destes triângulos. Como exemplo, vamos utilizar esse raciocínio para obtermos a área de um trapézio.

Determinando a área de um trapézio.

Um trapézio é um quadrilátero que possui apenas dois lados opostos paralelos. Estes lados paralelos serão chamados de bases.

A área do trapézio é a soma dos dois triângulos justapostos, cujos vértices são os mesmos do trapézio.

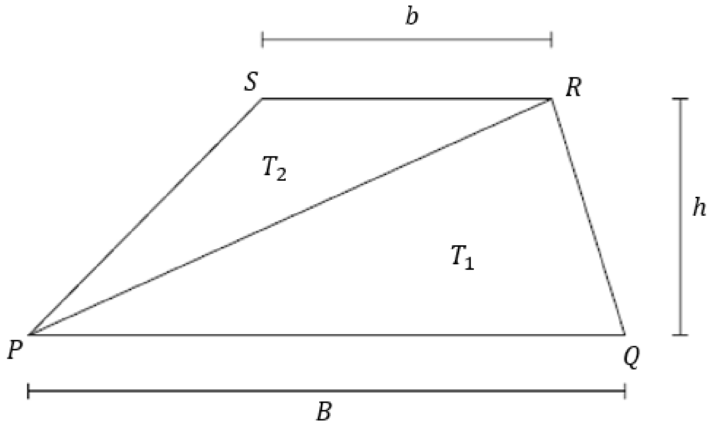
Considere um trapézio $PQRS$, sendo B e b as medidas das bases PQ e RS, respectivamente, e h a distância entre esses lados, ou seja, h é a altura do trapézio dado. Considere também os triângulos PQR e PRS, cujas áreas são:

$$T_1 = \frac{B \cdot h}{2}$$

e

$$T_2 = \frac{b \cdot h}{2},$$

respectivamente, e seja T a área do trapézio.



Logo,

$$T = T_1 + T_2 \Rightarrow T = \frac{B \cdot h}{2} + \frac{b \cdot h}{2} \Rightarrow T = \left(\frac{B + b}{2}\right) \cdot h.$$

Assim, a área do trapézio é igual à semissoma das bases vezes a altura.

3.2.5. Área do círculo e comprimento da circunferência

Uma *Circunferência* é o conjunto de pontos de um mesmo plano que equidistam de um ponto fixo dado, pertencente a esse mesmo plano, que damos o nome de centro da circunferência. A medida das distâncias entre esses pontos e o ponto fixo é chamada de raio da circunferência.

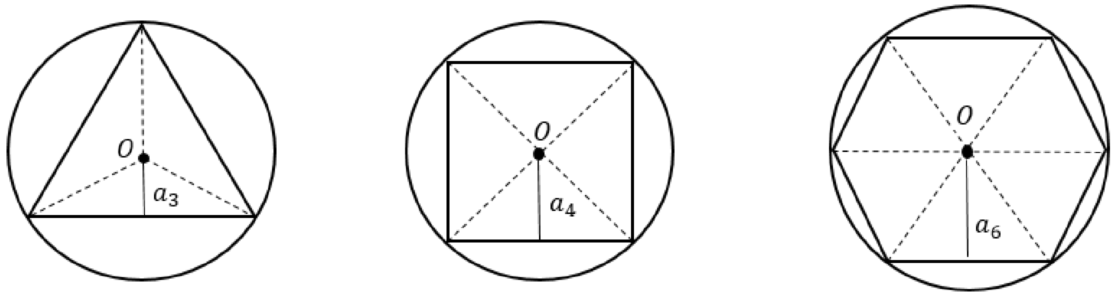
O *Círculo* é a união dos pontos da região interna à circunferência com a respectiva circunferência.

Antes de falarmos do comprimento da circunferência e da área do círculo, definiremos um polígono regular.

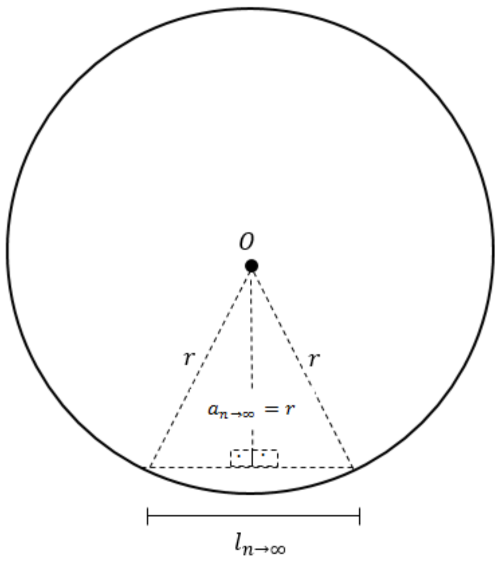
Polígono regular é um polígono cujos lados e ângulos internos são todos iguais.

Um polígono está inscrito num círculo quando seus vértices estão sobre a circunferência. Os vértices de um polígono regular inscritos a uma circunferência a dividem em arcos de mesmo comprimento. O segmento com extremidades no centro da circunferência e a outra no ponto médio de um dos lados do polígono, é chamado de *apótema*. Ela equivale ao raio da circunferência inscrita a este polígono.

,



A área de qualquer polígono regular, cuja medida do lado é l_n, sendo n o número de lados, pode ser calculada pelo produto de seu apótema e de seu semi-perímetro. Percebamos que se tomarmos um n "bem grande", a diferença entre o perímetro $(n \cdot l_n)$ desse polígono regular e o comprimento C da circunferência, circunscrita a esse polígono, será "insignificante". Definiremos o comprimento da circunferência como $\lim_{n\to\infty}(n \cdot l_n) = C$.



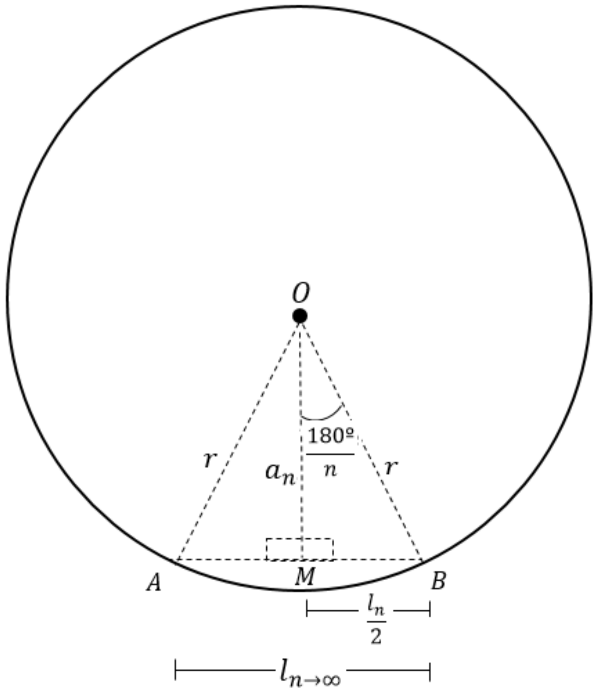
Dessa forma, conseguiremos obter a área de um círculo e o comprimento de uma circunferência. Mostraremos a seguir que o comprimento dividido pelo diâmetro independe do raio, ou seja, é uma constante. A essa constante deu-se o nome de π.

Algumas curiosidade em relação ao π**.**

Em seu livro "Os Elementos" (Livro XII), Euclides prova que a área de dois círculos estão entre si como os quadrados de seus diâmetros. Euclides também sabia que a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro é uma constante d, independente da circunferência adotada, porém não se preocupou em estimar seu valor. Euler, a partir de 1737, chamou essa constante de π. Porém, essa constante já fôra chamada de π, a cerca de dois mil anos antes de Cristo, pelos Babilônios, que atribuíam a π, a área de um círculo de raio um, o valor de $3\frac{1}{8} = 3{,}125$. Já os egípcios, admitiam $\pi = 3{,}16$. Arquimedes, em torno de 250 a.C., utilizou um método que consistia em inscrever um polígono regular em um círculo de raio 1 e ia dobrando o número de lados desse polígono, dessa forma obtendo aproximações por falta para o perímetro desse círculo. De maneira análogo, fazia o mesmo para polígonos circunscritos a essa circunferência, obtendo a aproximação do π, por falta, igual a $\frac{22}{7}$ ou simplesmente $\pi = 3{,}14$, com algarismos decimais exatos até centésimos. Em 264 d.C., o chinês, Liu Hui, obteve um o valor de $\pi = 3{,}14159$, com cinco algarismos decimais exatos. A procura por aproximações de π nunca deixou de existir por parte dos estudiosos em Mátemática. Em 1989, na Universidade de Columbia, nos Estados Unidos, David e Gregory Chudnovsky, com um algoritmo diferente do utilizado por Arquimedes, com auxílio de supercomputadores, calcularam um valor aproximado de π com um bilhão de casas.

3.2.5.1. Comprimento de uma circunferência de raio r.

Agora vamos mostrar que o comprimento dividido pelo diâmetro (segmento de reta, com medida igual a dois raios, cujos extremos são pontos de uma mesma circunferência). Em seguida, vamos determinar o comprimento de uma circunferência de raio *r*.



Temos que:

$$\lim_{n\to\infty}(n \cdot l_n) = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2r} \cdot \lim_{n\to\infty}(n \cdot l_n) = \frac{1}{2r} \cdot C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2r} \cdot n \cdot l_n\right) = \frac{C}{2r}$$

e, no triângulo OBM, temos que:

$$sen\ \frac{180^0}{n} = \frac{\frac{l_n}{2}}{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow sen\ \frac{180^0}{n} = \frac{l_n}{2r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_n = sen\ \frac{180^0}{n} \cdot 2r.$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2r} \cdot n \cdot sen\ \frac{180^0}{n} \cdot 2r\right] = \frac{C}{2r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left[n \cdot sen\ \frac{180^0}{n}\right] = \frac{C}{2r}.$$

Como o $\lim\limits_{n\to\infty}\left[n \cdot sen\,\frac{180^0}{n}\right]$ é uma constante que não depende de C e de r, a essa constante daremos o nome de π .

Daí,

$$\frac{C}{2r} = \pi \Rightarrow C = 2r\pi.$$

Portanto, o comprimento C de uma circunferência de raio r é

$$C = 2r\pi.$$

3.2.5.2. Área do círculo de raio r.

Como já foi dito, a área de um polígono regular pode ser obtida pelo produto de seu apótema pelo de seu semiperímetro. Perceba que se pegarmos um n suficientemente grande, então a área A do círculo pode ser obtida ao fazermos

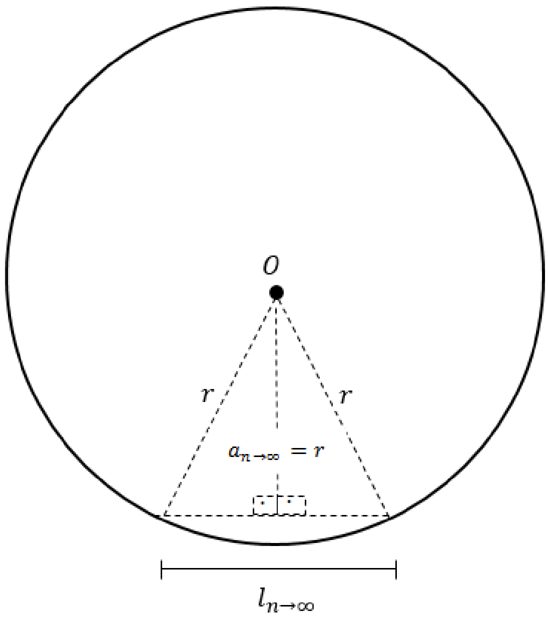
$$A = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{l_n \cdot a_n}{2}\right).$$

De maneira intuitiva, percebemos que

$$\lim_{n\to\infty}(a_n) = r,$$

e sabemos que

$$\lim_{n\to\infty}(n \cdot l_n) = C = 2r\pi.$$



Dessa forma, temos:

$$A = \lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \frac{l_n \cdot a_n}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty}(n \cdot l_n) \cdot \lim_{n\to\infty}(a_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot (2\pi r) \cdot (r) = \pi r^2.$$

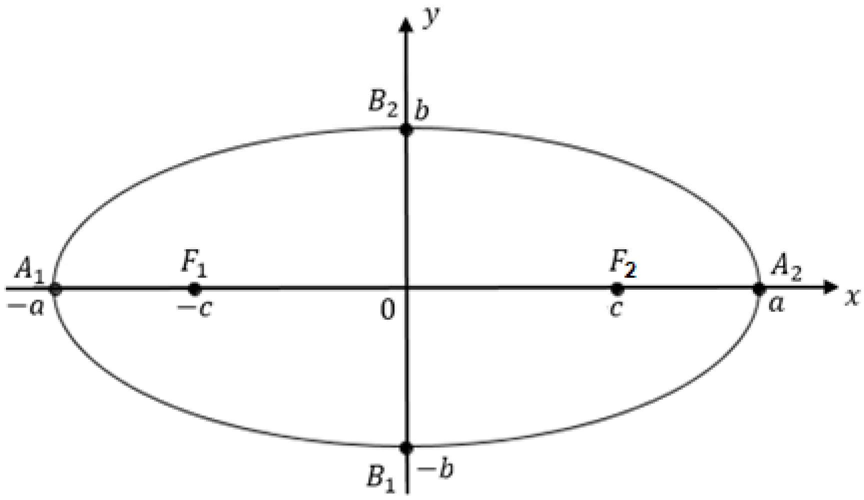
Portanto, a área de um círculo de raio r é dada pela expressão

$$A = \pi r^2.$$

3.2.6. Área e algumas aproximações do perímetro da elipse.

Apolônio foi um dos primeiros a dar uma importância maior para o estudo da Elipse. Após o astrônomo Kepler estabelecer que as órbitas dos planetas são elípticas, o estudo sobre ela ganhou relevância entre os astrônomos. Hoje em dia, utilizam-se das propriedades refletoras da elipse na construção de alguns refletores e salas de sussurros. Veja mais sobre esse assunto na Revista do Professor de Matemática (RPM 36). Para saber mais sobre essas propriedades, veja a dissertação *Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra*, de Rubens Marinho Monteiro.

Apolônio, em seus estudos sobre as cônicas, definiu a elipse como o conjunto de pontos gerados entre a intersecção de um plano θ, não paralelo ao eixo do cone, e as geratrizes do respectivo cone. Com o passar dos anos e com o advento da *geometria analítica*, chegou-se à seguinte descrição para a elipse centrada no plano cartesiano, com eixo maior sobre o eixo $\overrightarrow{OX}$,



$$Elipse = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\},$$

onde $F_1(-c,0)$ e $F_2(c,0)$ são os focos da elipse, $a, b, c \in R^+$, com $a > b$ e $a^2 = b^2 + c^2$. Quanto a excentricidade $e = \frac{c}{a}$, no caso da elipse, temos $0 < e < 1$.

Veja essa demonstração completa em *Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra*, de Rubens Marinho Monteiro.

3.2.6.1. Área da região delimitada por uma elipse

A área de uma elipse, cujas medidas dos eixos são $2a$ e $2b$, é dada pela expressão:

$$A = a \cdot b \cdot \pi.$$

Para demonstrar que área de uma elipse de eixos $2a$ e $2b$ é $ab\pi$, vamos assumir a validade do Princípio de Cavalieri para áreas de figuras planas.

Sejam A e B figuras planas. Se, para toda reta horizontal r, as interseções $\mathrm{r} \cap \mathrm{A}$ e $\mathrm{r} \cap \mathrm{B}$ são formadas por um número finito de segmentos de retas tais que a soma dos comprimentos dos segmentos em $\mathrm{r} \cap \mathrm{A}$ é igual a k vezes a soma análoga em $\mathrm{r} \cap \mathrm{B}$, sendo k uma constante, então a área de A é igual a k vezes a área de B.

Para essa demonstração, vamos comparar as secções horizontais da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ com as secções horizontais do círculo $x^2 + y^2 \leq b^2$, e utilizando o

Princípio de Cavalieri citado anteriormente, comprovaremos que a área dessa elipse é igual a $ab\pi$.

Como já foi dito anteriormente, a equação reduzida da elipse é dada por

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad eq.(i)$$

Isolando a variável x na equação (i) obtemos,

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}$$

ou

$$x=-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \Rightarrow -x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,.$$

A equação reduzida de um círculo, cuja medida do raio é b, é dada por

$$x^2+y^2=b^2 \qquad eq.(ii)$$

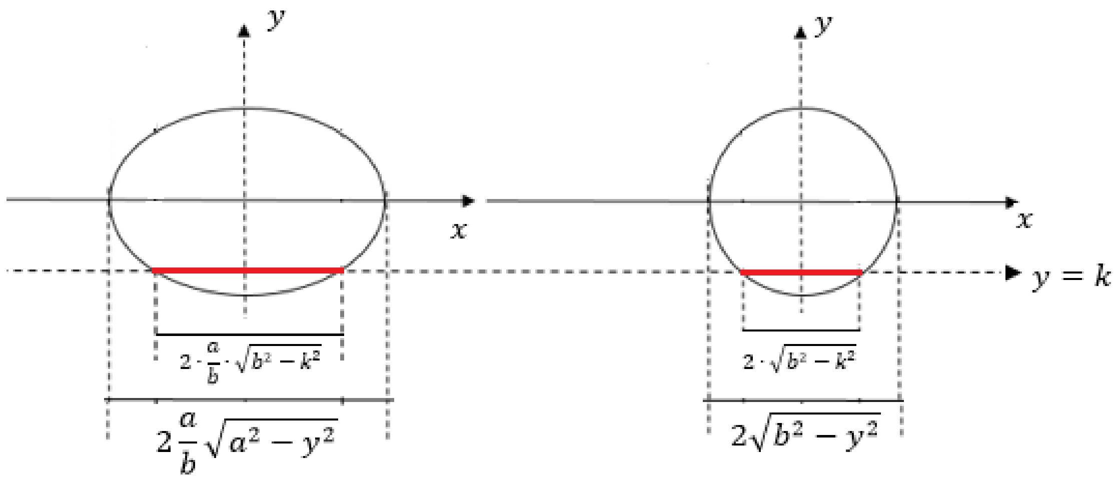
Isolando a variável x na equação (ii) obtemos

$$x=\sqrt{b^2-y^2}$$

ou

$$x=-\sqrt{b^2-y^2} \Rightarrow -x=\sqrt{b^2-y^2}.$$

Seja $y=k$ uma reta horizontal. Se $|k|\leq b$, então a reta intersecta a região da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ em um segmento de reta de comprimento $2\cdot\frac{a}{b}\cdot\sqrt{b^2-k^2}$ e intersecta o círculo $x^2+y^2\leq b^2$ em um segmento de reta de comprimento $2\cdot\sqrt{b^2-k^2}$. O primeiro comprimento é igual a $\frac{a}{b}$ vezes o segundo comprimento. Se $|k|>b$, então a reta não intersecta a elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ e nem o círculo $x^2+y^2\leq b^2$ e, logo, novamente o primeiro comprimento é igual a $\frac{a}{b}$ o segundo comprimento, pois $0=\frac{a}{b}\cdot 0$. Pelo Princípio de Cavalieri para Figuras Planas, conforme enunciado acima, a área da elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ é igual a $\frac{a}{b}$ vezes a área do círculo $x^2 + y^2 \leq b^2$. Mas, a área do círculo $x^2 + y^2 \leq b^2$ é igual a πb^2. Assim, a área da região delimitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$é igual a $\frac{a}{b} \cdot \pi b^2 = \pi ab$.



	$(y = k) \cap Círculo$	$(y = k) \cap Elipse$
$\lvert k\rvert \leq b$	$2 \cdot \sqrt{b^2 - k^2}$	$2 \cdot \frac{a}{b} \cdot \sqrt{b^2 - k^2}$
$\lvert k\rvert > b$	0	$0 \cdot \frac{a}{b} = 0$

Pelo Princípio de Cavalieri, temos:

$\text{Área}(Elipse) = \frac{a}{b} \cdot \text{Área}(Círculo)$

$\text{Área}(Elipse) = \frac{a}{b} \cdot \pi b^2 = \pi ab.$

Existe uma outra forma para provar essa área, usando integral. Porém nosso intuito é fazermos demonstrações, sempre que possível, utilizando ferramentas mais elementares.

3.2.6.2. Uma aproximação do perímetro da elipse

Como já foi dito anteriormente, o estudo da elipse é de extrema importância para a Astronomia, visto que os planetas descrevem órbitas elípticas, com o sol num dos focos, e para os astrônomos é interessante saber a distância percorrida por esses planetas. No capítulo seguinte, utilizaremos a aproximação do comprimento da elipse, que iremos determinar a seguir, para resolvermos a situação-problema 3, que trata de um vagão tanque, cujo formato é um cilindro de base elíptica.

O perímetro P da Elipse, infelizmente, não é nada fácil de determinar, porém vamos encontrar uma aproximação, utilizando o conhecimento básico de Geometria Analítica e o software *Geogebra* e, em seguida, compará-la com uma aproximação obtida através de uma ferramenta mais rebuscada, como a integral.

No artigo *The perimeter of an elipse,* de Tirupthi R. Chandrupatla e Thomas J. Osler, em 2010, eles obtiveram uma aproximação para o perímetro da elipse, cujas medidas dos eixos são $2a$ e $2b$, utilizando a expansão da série de Maclaurin, gerando a expressão

$$\mathrm{P} = 2\pi a \cdot \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{k^2}{1} - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \cdot \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \cdot \frac{k^6}{5} - \cdots\right],$$

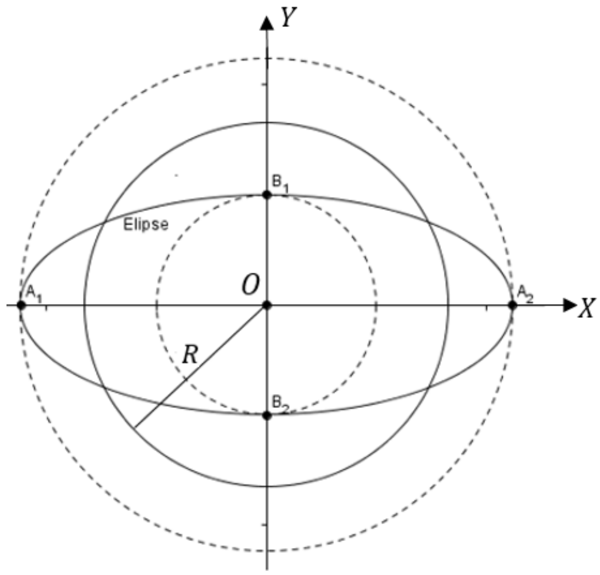
onde $k = 1 - \frac{b^2}{a^2}$.

Da elipse, temos que $a^2 = b^2 + c^2$ e a excentricidade $e = \frac{c}{a}$. Fazendo as devidas substituições em k, podemos reescrever a expressão acima como

$$\mathrm{P} = 2\pi \cdot a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32} - \cdots\right].$$

Com a expressão acima, obtemos o perímetro exato da elipse, pois como $0 < e < 1$, a soma $\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32} - \cdots\right]$ converge. Se considerarmos $R = a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32} - \cdots\right] \approx a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32}\right]$, então podemos dizer que $\mathrm{P} = 2\pi R$, é o comprimento de uma circunferência de raio e R, que é uma aproximação do comprimento de uma elipse.

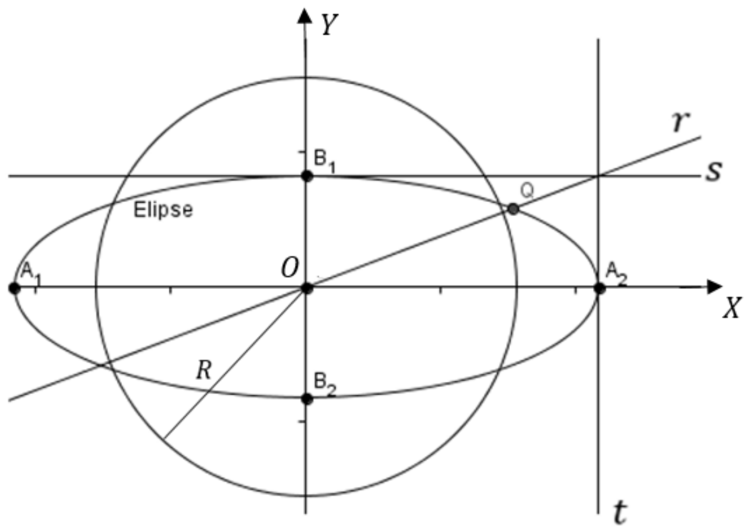
Em busca de uma expressão mais simples para obtenção da aproximação do perímetro da elipse, com uso do software Geogebra, determinamos uma elipse e destacamos as circunferências pontilhadas, cujas medidas dos raios são OA_1 e OB_1. Destacamos também a circunferência de raio $R \approx a\left[1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{32}\right]$ que, como já foi dito, tem comprimento igual a uma aproximação do comprimento da elipse.



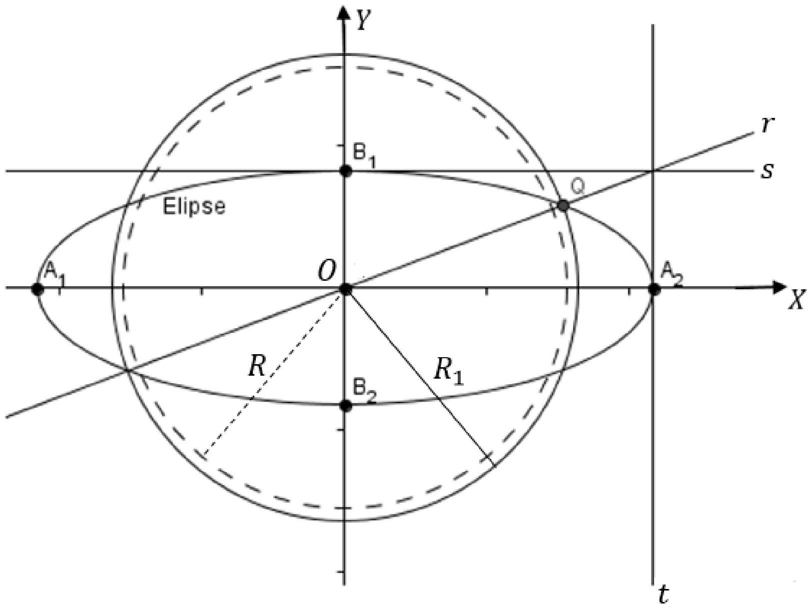
Em seguida, ao observarmos a expressão da elipse centrada na origem $O(0,0)$

$$Elipse = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\},$$

notamos que ela está relacionada diretamente com o a e o b. Traçamos as retas $s: y = b$ e $t: x = a$. Ao observarmos a figura obtida, percebemos que talvez seria interessante relacionar o centro da elipse $O(0,0)$ e as retas s e t. Traçamos assim a reta $r: y = \frac{b}{a}x$, e obtemos um ponto $Q \in (r \cap Elipse)$.



Começamos então a movimentar com o mouse os pontos A_1 e B_1, que é o mesmo de fazermos variações nos valores de a e de b. Após fazermos isso várias vezes, percebemos que o ponto Q, sempre ficava próximo à circunferência de raio R, ou seja, os comprimentos das circunferências de raios $R_1 = OQ$ e R são próximos, o que nos fez concluir que o comprimento da circunferência de raio R_1 também é uma aproximação para o comprimento da elipse.



Assim, determinamos as coordenadas do ponto $Q = (x, y)$, a medida do segmento $\overline{OQ}$ e o comprimento da circunferência de raio $R_1 = OQ$.

Vamos determinar as coordenadas do ponto Q. Como $Q \in (r \cap Elipse)$, temos que:

$$r: y = \frac{b}{a}x$$

e

$$Elipse: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Substiuindo $y = \frac{b}{a}x$ em $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, temos:

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{bx}{a}\right)^2 = a^2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Substituindo $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ em $y = \frac{b}{a}x$, obtemos $y = \frac{b\sqrt{2}}{2}$. Portanto, $Q = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$.

Seja $Q' = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}, 0\right)$ a projeção ortogonal de Q em relação ao eixo $\overrightarrow{OX}$. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $QQ'O$, obtemos $OQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Portanto, o comprimento da circunferência de raio R_1,

$$\mathrm{P}_1 \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Essa aproximação, encontra-se no artigo *Perimeter of an Ellipse*, que mostra que essa aproximação tem um erro máximo de 5%.

Exemplo:

Vamos utilizar as expressões obtidas para aproximar o perímetro de uma elipse, cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1,$$

e em seguida vamos calcular a margem de erro entre as duas aproximações.

Resolução 1:

Utilizando a expressão

$$P \approx 2\pi a\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{32}\right).$$

Precisamos definir o valor de a e da excentricidade e.

$$\begin{cases} a^2 = 25 \\ b^2 = \ \ 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Como $a^2 = b^2 + c^2$, temos que $c = 4$.

Cálculo da excentricidade dessa elipse:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}.$$

Logo,

$$P \approx 2\pi(5) \cdot \left(1-\frac{\left(\frac{4}{5}\right)^2}{4}-\frac{3\left(\frac{4}{5}\right)^4}{32}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \approx 10\pi \cdot \left(\frac{16032}{20000}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \approx 8{,}016\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \approx 8{,}016 \cdot (3{,}14) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P \approx 25{,}17\,.$$

Portanto, o comprimento aproximado dessa elipse é de $P \approx 25{,}17$.

Resolução 2:

Utilizando a expressão

$$P_1 \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Da resolução 1, temos que os valores de $a = 5$ e $b = 3$. Substituindo na expressão acima temos:

$$\mathrm{P}_1 \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(5)^2 + (3)^2}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_1 \approx 2\pi \cdot \sqrt{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_1 \approx 2 \cdot (3{,}14) \cdot (4{,}12) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_1 \approx 25{,}87.$$

Portanto, comprimento aproximado dessa elipse é $\mathrm{P}_1 = 25{,}87$.

Note que a razão $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}} = \frac{25{,}87}{25{,}17} \approx 1{,}0278$, ou seja, a margem de erro entre essas aproximações é $2{,}78\%$.

Existem outras aproximações do perímetro da elipse, sendo que uma das mais famosas é de Ramanujan, matemático indiano,

$$\mathrm{P}_2 \approx \pi \cdot \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}\right].$$

Em tempo, vamos resolver o exemplo anterior utilizando a aproximação P_2 e em seguida vamos compará-la com a P_1.

$$\mathrm{P}_2 \approx \pi \cdot \left[3(5+3) - \sqrt{[3(5)+(3)][(5)+3(3)]}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_2 \approx \pi \cdot \left[24 - \sqrt{[18][14]}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_2 \approx \pi \cdot \left[24 - \sqrt{252}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_2 \approx \pi \cdot [24 - 15{,}87] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_2 \approx \pi \cdot 8{,}13 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}_2 \approx 25{,}52.$$

Portanto, comprimento aproximado dessa elipse é $\mathrm{P}_2 = 25{,}52$.

A razão $\frac{\mathrm{P}_1}{\mathrm{P}_2} = \frac{25{,}87}{25{,}52} \approx 1{,}0137$, ou seja, a margem de erro entre essas aproximações é $1{,}37\%$.

Veja essas e outras aproximações, e suas respectivas demonstrações, no artigo *The perimeter of an elipse,* de Tirupthi R. Chandrupatla e Thomas J. Osler.

A margem de erro dessas aproximações aumentam quando as medidas de a e de b se tornam maiores. Nas aplicações que faremos utilizaremos a aproximação P_1. Como as medidas de a e de b não são tão “discrepantes”, nas aplicações consideramos a margem de erro de até 5% aceitável.

3.3. Volume

Conforme Osvaldo Dolce e José N. Pompeo, em 2013, p.13, o volume de um sólido ou medida do volume de um sólido é um número real positivo associado ao sólido que satisfaz as seguintes propriedades:

1) sólidos congruentes tem volumes iguais;

2) dizemos que dois sólidos são equivalentes se, e somente se, eles têm volumes iguais na mesma unidade de volume;

3) se um sólido S é a reunião de dois sólidos S_1 e S_2 que não têm pontos interiores comuns, então o volume de S é a soma dos volumes de S_1 e S_2.

De outra maneira, dizemos que o volume de um sólido é um número real não-negativo, que representa a quantidade de vezes que a unidade de volume está contida nesse sólido. Mais uma vez, para fazermos essa medição iremos adotar uma unidade que será utilizada como referência de comparação.

Fixemos um cubo, cuja aresta tem uma unidade de comprimento, que chamaremos de cubo unitário. Utilizaremos esse cubo unitário, como unidade de comparação. Por definição, a medida do volume de um cubo unitário é 1.

Ao medirmos um volume, são usadas unidades cúbicas, por exemplo cm^3 e m^3. Um número inteiro de unidades cúbicas cabe perfeitamente em alguns tipos de sólidos. Mas nem sempre isso é possível na maioria dos sólidos, como por exemplo temos o cilindro. Para esses casos existem fórmulas para descobrir os seus volume. Encontrar a área da base, ou corte transversal, de um sólido é a chave para calcular seu volume. Cada sólido tem um corte transversal diferente.

Uma das técnicas mais utilizadas para auxiliar no cálculo do volume de alguns sólidos é o Princípio de Cavalieri.

Princípio de Cavalieri: *Sejam* A *e* B *dois sólidos. Se qualquer plano horizontal secciona* A *e* B *gerando figuras planas com áreas iguais, então* $volume(A) = volume(B)$.

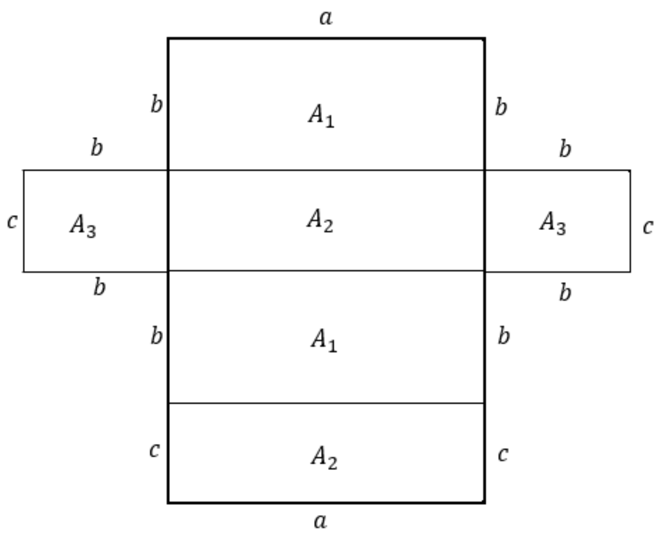
O princípio de Cavalieri pode ser demonstrado usando conceitos matemáticos mais avançados, como a integral. Como esse material será utilizado no Ensino Médio, o utilizaremos como um Princípio, pois entendemos que a sua ideia é bastante intuitiva.
O *sólido* é um objeto com três dimensões: largura, comprimento e altura.

Uma outra maneira de obtermos o volume de um objeto irregular, com pequenas dimensões, é a técnica de submersão. Essa técnica consiste na ideia utilizada por Arquimedes, matemático grego do século III a.c., que percebeu que ao submergir um objeto na água contida num recipiente, o volume desse objeto submerso equivale ao volume de água que ele deslocou. Hoje em dia temos recipientes com marcações que nos auxiliam para tal medição. Obviamente essa não é uma técnica tão apurada, para calcular o volume de objetos irregulares. A técnica mais apurada utiliza a Integral, mas não entraremos em detalhes, pois esta só nos é apresentada nos cursos de Cálculo.

3.3.1. Volume de um paralelepípedo reto-retângulo

O paralelepípedo reto-retângulo, também conhecido como bloco retangular, é um sólido limitado por seis retângulos, denominados faces do bloco. Esses retângulos são de dois em dois congruentes entre si. Os lados desses retângulos são chamados de arestas desse sólido. Uma caixa de fósforo é um exemplo de bloco retangular.

Abaixo, temos um exemplo de um paralelepípedo reto-retângulo ou bloco de retangular e sua planificação.

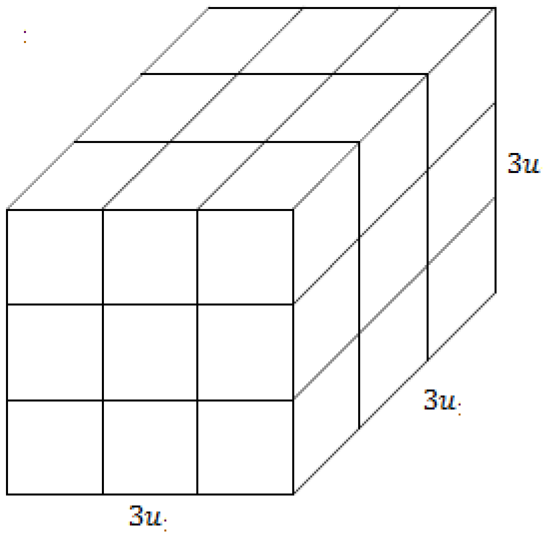


Nesse caso, a, b e c são as arestas desse bloco retangular.

O bloco retangular cujas arestas possuem o mesmo comprimento $a = b = c$ é chamado de cubo de aresta a. O cubo é formado por seis faces quadradas iguais.

Se n é um número inteiro, um cubo C cuja aresta mede n unidades de comprimento pode ser decomposto em n^3 cubos unitários justapostos, então o volume de C é n^3.

Exemplo: Cubo cuja medida da aresta é $3u$.



Se decompormos cada aresta de um cubo unitário no mesmo número inteiro n de partes iguais, decompô-lo-emos em n^3 cubos justapostos, cada um com aresta $\frac{1}{n}$ (n inteiro), tendo volume igual a $\frac{1}{n^3}$, ou seja, $\left(\frac{1}{n}\right)^3$.

De maneira geral, dado um cubo C cuja aresta tem como comprimento um número racional $\frac{p}{n}$, podemos decompor cada uma de suas arestas em p partes iguais, cada uma das quais tem comprimento $\frac{1}{n}$. Deste modo, o cubo C ficará decomposto em p^3 cubos justapostos, cada um dos quais tem aresta medindo $\frac{1}{n}$. O volume de cada cubo menor é $\left(\frac{1}{n}\right)^3$. Daí, o volume de C é igual a

$$p^3 \cdot \frac{1}{n^3} = \left(\frac{p}{n}\right)^3.$$

Portanto, o volume de um cubo C cujo comprimento da aresta é um número racional a é igual a a^3.

O caso do comprimento da aresta do cubo C ser um número irracional, provaremos mais adiante.

Vamos retornar à proposta inicial, que era de calcular a medida do volume do bloco retangular de dimensões a, b e c (racionais).

Dado um bloco retangular B de arestas (dimensões) $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ e $c = \frac{r}{n}$, podemos decompor cada uma dessas arestas em segmentos iguais a $\frac{1}{n}$, o bloco ficará decomposto em pqr cubos justapostos, cada um desses cubos tendo aresta $\frac{1}{n}$ e, portanto, volume igual a $\left(\frac{1}{n}\right)^3$. Daí,

$$vol(B) = \frac{pqr}{n^3} = \frac{p}{n} \cdot \frac{q}{n} \cdot \frac{r}{n}.$$

Portanto, um bloco retangular B de arestas com comprimentos racionais a, b e c, seu volume será o produto desses comprimentos, ou seja,

$$vol(B) = abc.$$

No caso que os comprimentos das arestas a, b e c forem irracionais. Seja $n \in \mathbb{N}$. Analogamente ao que foi visto no estudo das áreas, existem $r, s\ e\ t \in \mathbb{N}$, tais que:

(i) $\quad \frac{r}{n} < a < \frac{r+1}{n}$

(ii) $\quad \frac{s}{n} < b < \frac{s+1}{n}$

(iii) $\frac{t}{n} < c < \frac{t+1}{n}$.

Fazendo (i)·(ii)·(iii), temos:

$$\frac{r}{n} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{t}{n} < a \cdot b \cdot c < \frac{r+1}{n} \cdot \frac{s+1}{n} \cdot \frac{t+1}{n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{r}{n} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{t}{n} < a \cdot b \cdot c < \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{s}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{t}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

e

$$\frac{r}{n} \cdot \frac{s}{n} \cdot \frac{t}{n} < vol(B) < \left(\frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{s}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{t}{n} + \frac{1}{n}\right).$$

Dai,

$$0 \leq |vol(B) - abc| < \left[\left(\frac{r}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{s}{n} + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{t}{n} + \frac{1}{n}\right)\right] - \frac{rst}{n^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq |vol(B) - abc| < \left[\frac{rst}{n^3} + \frac{rs}{n^3} + \frac{rt}{n^3} + \frac{r}{n^3} + \frac{st}{n^3} + \frac{s}{n^3} + \frac{t}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right] - \frac{rst}{n^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq |vol(B) - abc| < \left[\frac{rs}{n^3} + \frac{rt}{n^3} + \frac{r}{n^3} + \frac{st}{n^3} + \frac{s}{n^3} + \frac{t}{n^3} + \frac{1}{n^3}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq |vol(B) - abc| < \left[\frac{ab}{n^2} + \frac{ac}{n^2} + \frac{a}{n} + \frac{bc}{n^2} + \frac{b}{n} + \frac{c}{n} + \frac{1}{n^3}\right] \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |vol(B) - abc| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(B) = abc.$$

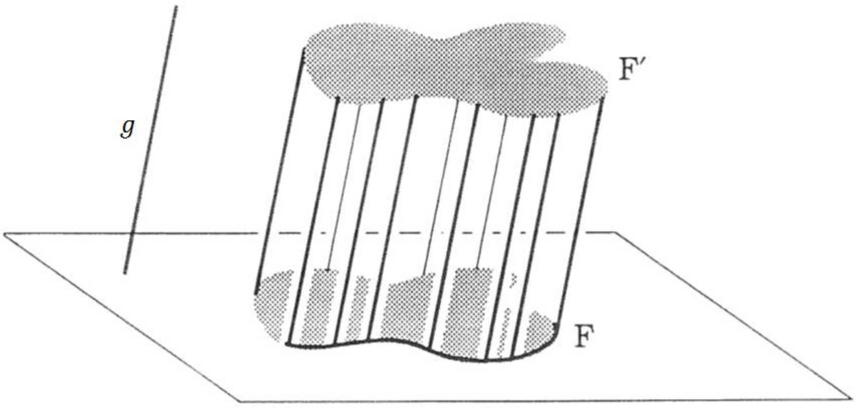
Portanto, o volume do bloco retangular é $vol(B) = abc$.

Em tempo, como um cubo C é um bloco retangular de arestas iguais, temos que o volume de um cubo cujo comprimento da aresta é um número "a" irracional, é de $vol(C) = a \cdot a \cdot a \Rightarrow vol(C) = a^3$.

Obviamente, sabemos que as formas dos sólidos não se resumem nas dos até aqui estudados. A seguir, vamos determinar expressões/fórmulas que irão nos auxiliar a medir o volume de alguns sólidos conhecidos e utilizados no dia-a-dia. Nosso estudo será em cima de alguns sólidos de revolução como: o Cilindro, o Cone, os Prismas e troncos. No capítulo a seguir, apresentaremos alguns exemplos da aplicação desses sólidos, através de algumas relações/conexões que iremos estabelecer entre esses e alguns tipos de vagões.

3.3.2. Cilindro

Conforme Elon L. Lima, em seu livro “Medida e Forma em Geometria” (2006, p.87), para determinarmos um cilindro C, consideramos uma figura F, em um plano horizontal, a base do cilindro. O cilindro fica determinado por sua base F e por um segmento de reta g, não paralelo ao plano horizontal, chamado geratriz do cilindro, do seguinte modo: por cada ponto de F levantamos um segmento de reta paralelo a, e do mesmo comprimento que, g. A reunião desses segmentos é o cilindro C, de base F e geratriz g.



Curso para professores de Matemática do 2º grau.- IMPA – Rio de Janeiro, 1991.

As extremidades, que não pertencem à base F dos segmentos que geram o cilindro C, constituem uma figura plana F', contida num plano paralelo ao plano de F. A distância entre estes planos (isto é, o comprimento da perpendicular baixada de um ponto do plano F' sobre o plano F) chama-se a altura do cilindro C. O volume de um cilindro é o produto da área da base pela altura do cilindro. Tal fato será provado mais adiante.

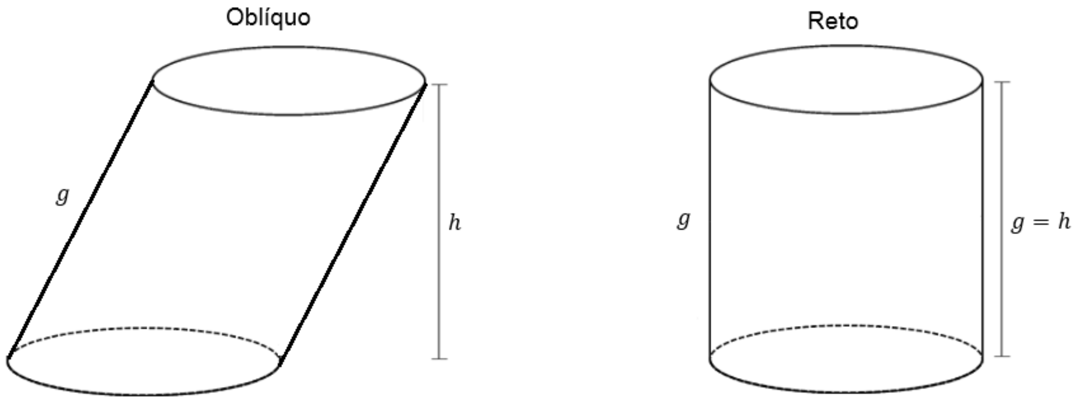
A fim de não gerar confusão, entenderemos a palavra *Cilindro* como *Cilindro de base circular*, salvo quando especificarmos de outra maneira.

3.3.2.1 Cilindro de base circular ou simplesmente Cilindro

Um cilindro pode ser:

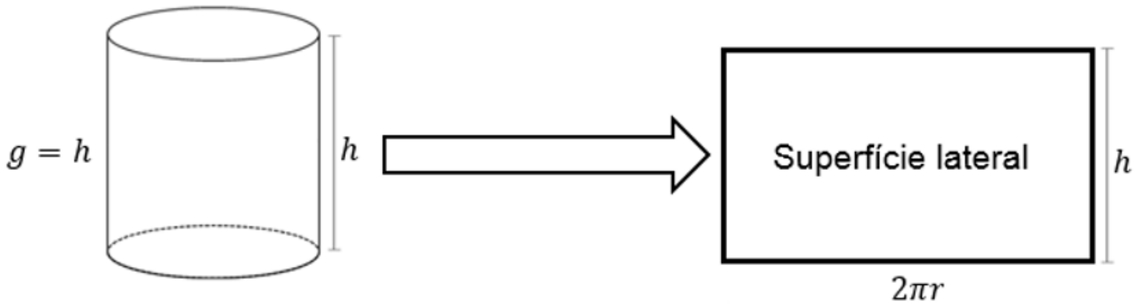
i) reto ou cilindro de revolução: quando a geratriz é perpendicular à bases.

ii) oblíquo: quando a geratriz não é perpendicular à base.



Nesse material, vamos nos ater basicamente ao estudo do *Cilindro reto* ou *cilindro de revolução,* visto que ele pode ser obtido pela rotação de um retângulo em torno de um de seus lados. Considere um cilindro reto de altura h, cuja base é um círculo de raio r. Sua superfície é formada por dois círculos de raio r mais a superfície lateral. Observe que o comprimento da geratriz de um cilindro reto coincide com sua altura. Podemos então dizer que a superfície lateral é a reunião de segmentos de comprimento h, perpendiculares à base, levantados a partir dos pontos da circunferência da base.

Ao cortarmos o cilindro ao longo de uma geratriz, obteremos um retângulo ao desenrolar sua superfície lateral, sem alterar a área, de modo que o comprimento da base desse retângulo é $2\pi r$ e altura h. Portanto, a área da superfície lateral do cilindro é igual à área desse retângulo, que mede $2\pi rh$.



Como a base é um círculo de raio r, sua área mede πr^2.

O Volume de um cilindro C é igual ao produto da área da base pela altura. Daí,

$$vol(C) = \pi r^2 \cdot h.$$

De fato,

Lembremos que o volume de um paralelepípedo P é o produto da área da base pela altura. Dado um cilindro cilindro C de base F e altura h, é sempre possível construirmos, no mesmo plano da base F, um retângulo cuja área a seja igual a área de F, sendo esse retângulo a base de um paralelepípedo P de mesma altura h do cilindro C. Para qualquer plano horizontal $\prod$, a seção $\prod \cap C$ é uma figura plana congruente á F, enquanto $\prod \cap P$ é um retângulo congruente à base de P, qualquer que seja o plano horizontal $\prod$. Como F e C têm mesma área, de acordo com o Princípio de Cavalieri, temos

$$vol(C) = vol(P) = a \cdot h\,,$$

ou seja,

$$vol(C) = \pi r^2 \cdot h.$$

Observe que a definição utilizada acima para cilindro, no caso particular em que a base F é circular, é a mesma utilizada para uma base F quando essa é um polígono qualquer. Quando isso ocorrer, o sólido C ficará limitado por faces planas e será chamado de *Prisma*.

3.3.2.2. Prismas

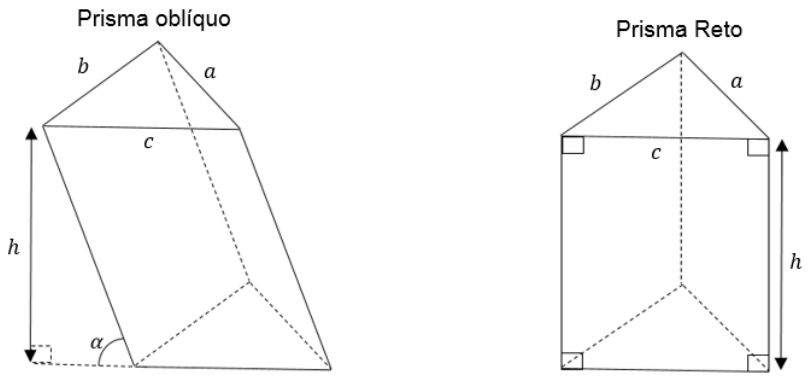
Definição: Prisma é um cilindro cujas bases são polígonos.

Como consequência da definição de prisma, percebemos que não resta outra alternativa para as faces laterais, faces planas que não são bases, a não ser a de serem paralelogramos e, no caso particular de prisma reto, retângulos.

Um Prisma é classificado como:

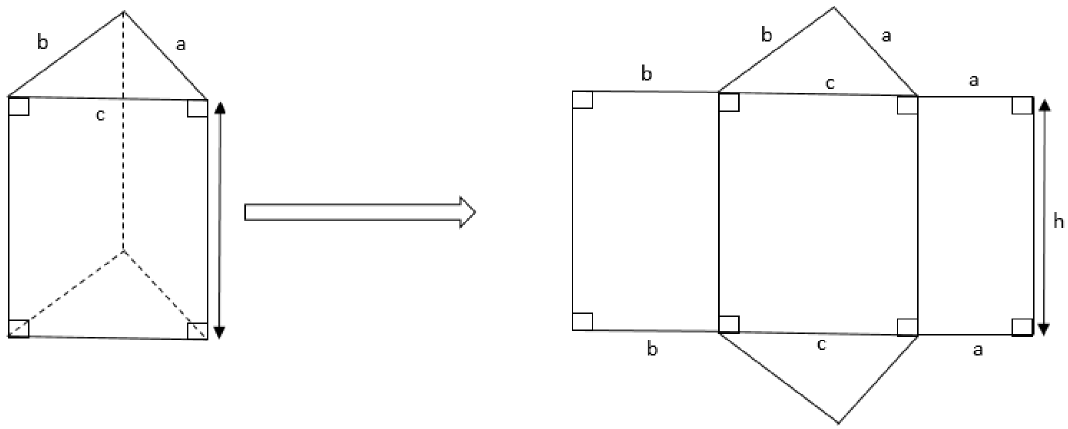
i) reto: quando as arestas laterais são perpendiculares às bases, ou seja, as medidas das arestas laterais coincidem com a da altura.

ii) oblíquo: quando as arestas laterais não são perpendiculares às bases, ou seja, as medidas das arestas laterais não coincidem com a da altura;



Nesse material, vamos nos ater basicamente ao estudo do *Prisma reto*.

Exemplo de um prisma reto triangular planificado:



A área lateral de um prisma é a soma das suas faces laterais.

O volume de um prisma de altura h cuja área da base é A_b, pode ser obtido, assim como em qualquer cilindro, pelo produto da área da base pela sua altura, ou seja,

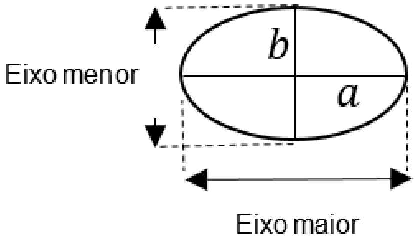
$$vol(prisma) = A_b \cdot h.$$

3.3.2.3. Cilindro elíptico

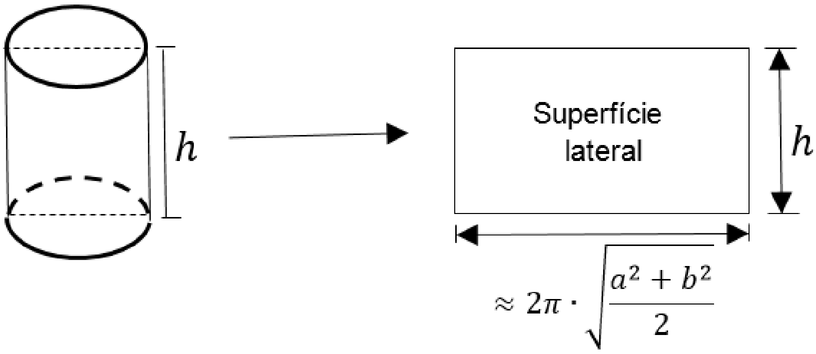
Definição: Cilindro cuja base é uma elipse. Seu volume também será obtido pelo produto da área da base pela sua altura, ou seja,

$$vol(cilindro\ elíptico) = ab\pi \cdot h,$$

sendo $2a$ e $2b$ as medidas dos eixos da elipse.



Ao cortarmos esse cilindro ao longo de uma geratriz, obteremos um retângulo ao desenrolar sua superfície lateral, sem alterar a área, de modo que o comprimento da base desse retângulo é aproximadamente $2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ e altura é h.



Portanto, a área lateral A_l do cilindro elíptico é dada, aproximadamente, por

$$A_l \approx 2\pi \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \cdot h.$$

3.3.3. Cone

Definição: Um cone K, tendo como base uma figura plana F, e com um vértice como ponto P situado fora de F, é a reunião dos segmentos de reta que ligam o ponto P a todos os pontos de F.

O plano que contém a base F do cone K será considerado horizontal. A distância do vértice P a este plano, ou seja, o comprimento da perpendicular baixada de P sobre o plano, chama-se altura do cone.

Lema 1: *Seja K um cone de vértice V de altura h_0 e base F_0 situada no plano horizontal $\prod_0$. Seja $\prod$ outro plano horizontal, entre V e $\prod_0$. Indiquemos por F a seção $\prod \cap K$ e com h a distância entre V e $\prod$, isto é, a altura do cone de base F e vértice P.* (E. L. LIMA, 2006, p.89)

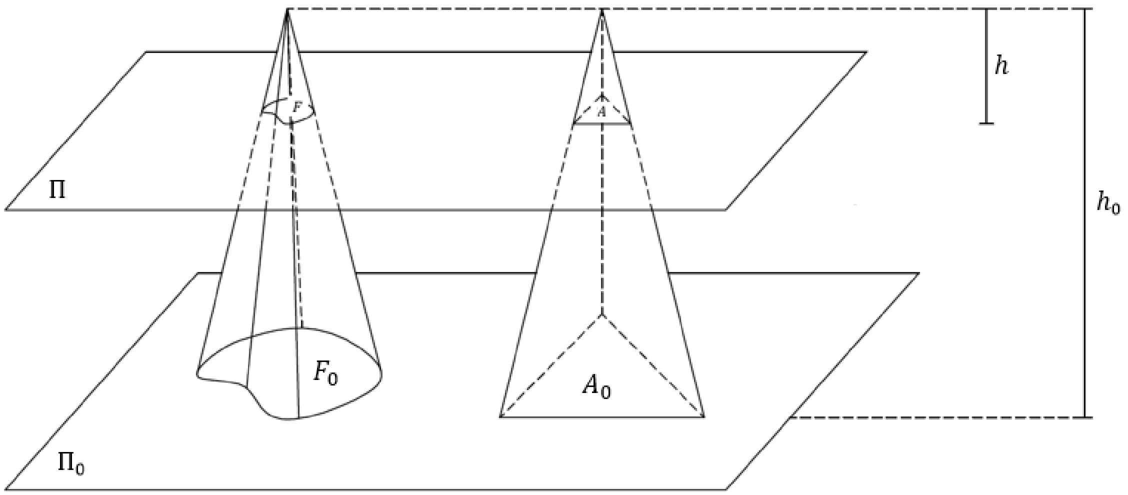
Tem-se a relação

$$\frac{área\ (F_0)}{área\ (F)} = \left(\frac{h_0}{h}\right)^2.$$

Teorema 1: *Dois cones de mesma altura, cujas medidas das áreas das bases são equivalentes, possuem volumes equivalentes.*

Demonstração:

Dado um cone K de base F_0 e altura h_0, é sempre possível construirmos, no mesmo plano horizonta $\prod_0$ da base F_0, um polígono cuja área a seja igual à área de F_0, sendo esse polígono a base da pirâmide P de mesma altura h_0 do cone K.



Para qualquer plano horizontal $\prod$, a seção $\prod \cap K$ é uma figura plana semelhante à F_0, enquanto $\prod \cap P$ é um polígono semelhante à base de P. Pelo Lema 1, temos:

$$\frac{área\ (\prod \cap K)}{área\ (F_0)} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^2$$

e

$$\frac{área\ (\prod \cap P)}{área\ (A_0)} = \left(\frac{h}{h_0}\right)^2,$$

daí,

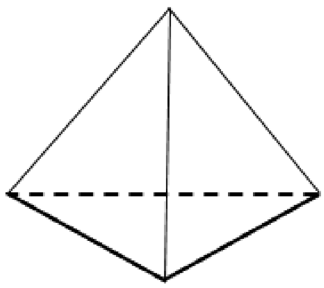
$$área\ (\prod \cap K) = área\ (\prod \cap P).$$

Logo, pelo Princípio de Cavalieri para volumes, temos que o volume dos cones são equivalentes.

Em particular, vamos considerar um cone de base F_0 triangular. O sólido T obtido fica limitado por faces planas triangulares e será chamado de *Tetraedro*.

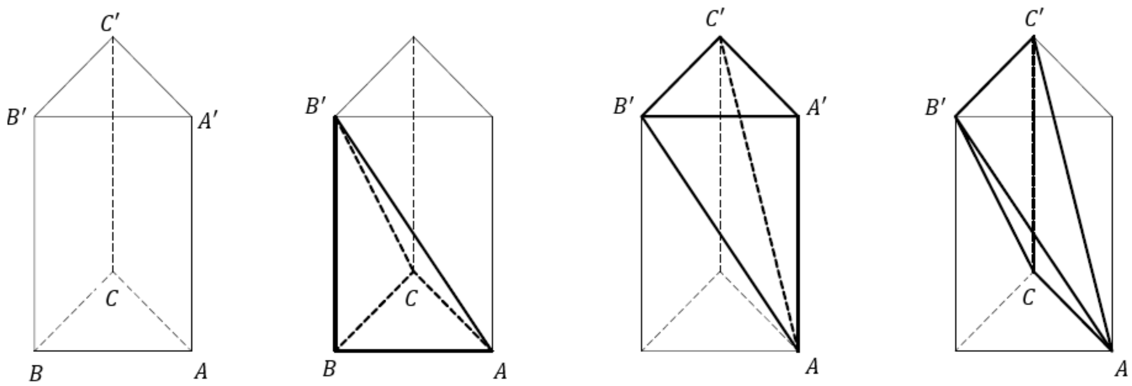
3.3.3.1. Volume do tetraedro

Teorema 2: O volume de um tetraedro é igual a um terço do volume de um prisma de mesma altura e base desse tetraedro.



Demonstração:

O volume de um prisma, como visto anteriormente, é igual ao produto de sua base pela sua altura. Dessa maneira, basta provarmos que ele pode ser decomposto em três pirâmides, cada uma delas com volume igual ao da pirâmide de mesma base e altura do prisma.



A figura da esquerda foi decomposta em três pirâmides, $ABCB'$, $A'B'C'A$ e $ACC'B'$ de volumes iguais.

Observe que além da própria pirâmide $ABCB'$, temos a pirâmide $A'B'C'A$, que possui mesma altura e base congruente à base da primeira, e a pirâmide $ACC'B'$, cuja base ACC' é congruente à base $AA'C'$ da segunda e cuja altura, a partir do vértice B', é igual a altura da segunda pirâmide, $AA'C'B'$, a partir do mesmo vértice B'. Daí, pelo teorema 1 acima,

$$vol(ACC'B') = vol(A'B'C'A) = vol(ABCB').$$

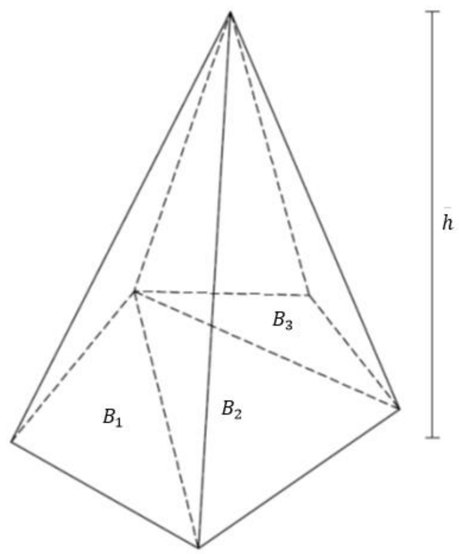
Portanto, o volume de um tetraedro T cuja área da base é B e altura é h, é um terço do produto da área da base pela sua altura.

$$vol(T) = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h.$$

3.3.3.2. Volume de uma pirâmide

De maneira geral, se considerarmos uma pirâmide P de altura h cuja base é um polígono qualquer de área igual a B, é sempre possível dividir essa base em n triângulos justapostos, sendo os vértices desses triângulos os mesmos do polígono da base dessa pirâmide, cujas áreas são $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$, onde $B = B_1 + B_2 + \cdots + B_n$.

Exemplo:



Dessa forma, teríamos n tetraedros de altura h. Logo,

$$vol(P) = \frac{1}{3} \cdot B_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot B_2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot B_3 \cdot h + \cdots + \frac{1}{3} \cdot B_n \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(P) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (B_1 + B_2 + B_3 + \cdots + B_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(P) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot B.$$

Portanto, o volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da altura pela área da base.

3.3.3.2.1. Volume de um cone.

Pelo *teorema 1*, temo que $vol(P) = vol(K)$, sendo K um cone de altura igual a h, de base F qualquer, cuja $Área(F) = B$. Portanto, o volume de um cone K é igual a um terço do produto da altura pela base, ou seja,

$$vol(K) = vol(P) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot B.$$

3.3.3.3. Cone de base circular ou simplesmente Cone.

A fim de não gerar confusão, entenderemos a palavra *Cone,* como o *Cone de base circular*, salvo quando especificarmos de outra maneira. Como sua base é um círculo de raio r, a área de sua base é πr^2. Daí, seu volume é dado por

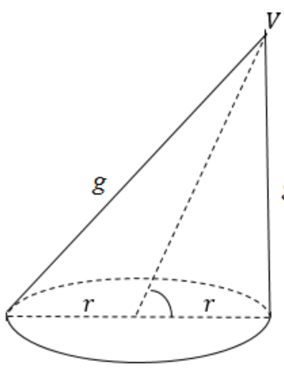
$$vol(Cone) = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot h.$$

Um cone é classificado como:

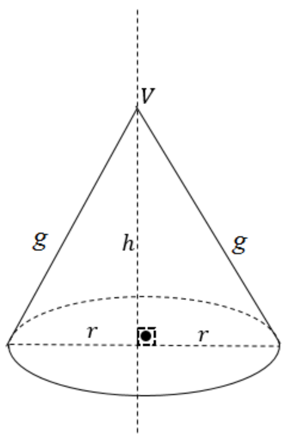
i) oblíquo: quando as geratrizes possuem as medidas diferentes umas das outras;

ii) reto ou cone de revolução: quando as geratrizes possuem a mesma medida.

Oblíquo

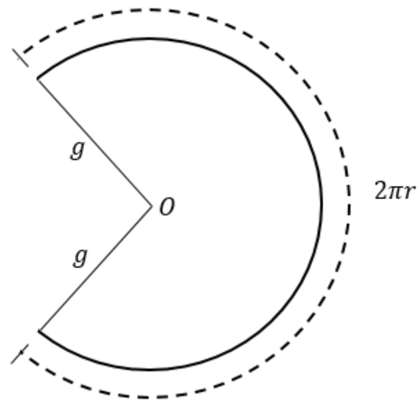


Reto



Nesse material, vamos nos ater somente ao estudo do *Cone reto* ou *Cone de revolução,* visto que esse pode ser obtido pela rotação de um triângulo retângulo em torno de um de seus catetos. Ao cortarmos esse cone de vértice V ao longo de uma geratriz g, obteremos um setor circular de centro V e raio g, ao desenrolar sua superfície lateral, sem alterar a área, de modo que o comprimento do arco mede exatamente o perímetro da circunferência da base de raio r. Portanto, a área da superfície lateral A_l desse cone é igual à área desse setor circular, que mede $\pi r g$.

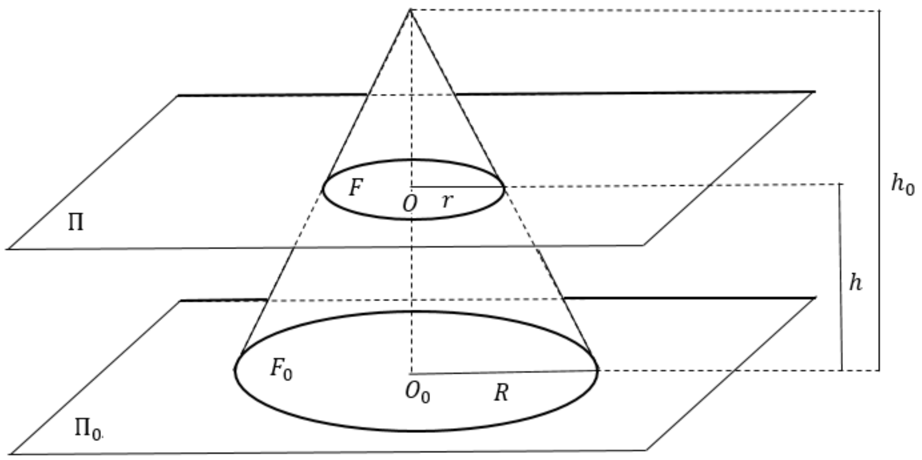
De fato, ao planificarmos a superfície lateral de um cone reto obtemos um setor circular cuja medida do raio é igual a g e o arco gerado por esse setor mede $2\pi r$. Como a área do setor circular é diretamente proporcional ao arco gerado, temos que:



$$\begin{matrix} 2\pi g & - & \pi g^2 \\ 2\pi r & - & A_l \end{matrix} \Rightarrow A_l = \pi r g$$

3.3.3.4.Volume do tronco de cone.

Um cone K de altura h_0, cuja base F_0 de área A_B está apoiada num plano horizontal $\prod_0$. Para qualquer plano horizontal $\prod$, a uma distância h do plano $\prod_0$, a seção $\prod \cap K = F$ de área A_b, será a base de um novo cone, semelhante ao original.



O volume de um tronco de cone T de altura h, de bases F_0 e F, sendo essas figuras planas quaisquer, cujas áreas são, respectivamente, A_B e A_b, pode ser obtido pela expressão

$$vol(T) = \frac{h}{3} \cdot \left(A_b + \sqrt{A_b \cdot A_B} + A_B\right).$$

Demonstração:

Considere um cone K de altura h_0, cuja base F_0 de área A_B está apoiada num plano horizontal $\prod_0$, que foi seccionado por um plano horizontal $\prod$ a uma distância h do plano $\prod_0$. A seção $\prod \cap K$ será a base F de área A_b de um novo cone semelhante ao original. O volume desse tronco de cone de altura h e cujas bases são F_0 e F poderá ser obtido ao subtrairmos do volume do cone original o volume do cone gerado.

Daí,

$$vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot h_0 - \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 \cdot (h_0 - h) \Rightarrow$$

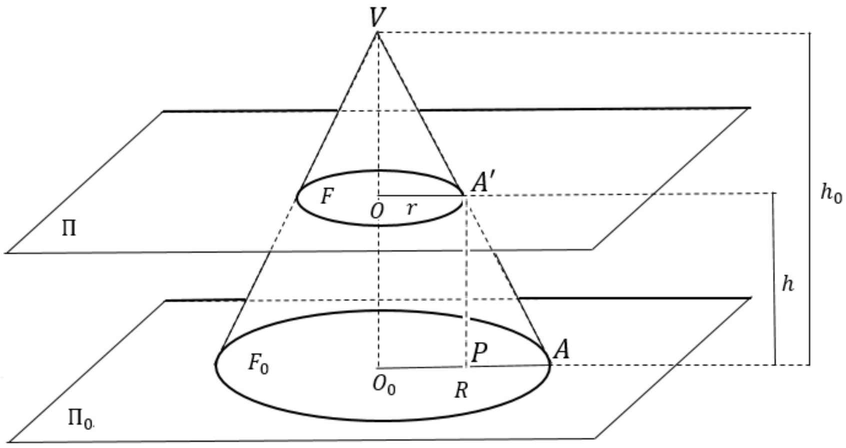
$$\Rightarrow vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi[R^2 h_0 - r^2 \cdot (h_0 - h)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi[R^2 h_0 - r^2 h_0 + r^2 h] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi[h_0(R^2 - r^2) + r^2 h] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi[h_0(R - r)(R + r) + r^2 h] \quad (1)$$

Traçando uma perpendicular ao segmento OA a partir de A', obtemos o ponto P, e por consequência $R - r$ é a medida do segmento PA. Veja figura abaixo:



Como os triângulos $VOA \sim A'PA$, temos:

$$\frac{h_0}{R} = \frac{h}{R-r} \Rightarrow h_0 = \frac{Rh}{R-r} \qquad (2)$$

Substituindo (2) em (1)

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi \left[\frac{Rh}{R-r} \cdot (R-r)(R+r) + r^2 h\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi [Rh \cdot (R+r) + r^2 h] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{1}{3} \cdot \pi [R^2 h + Rrh + r^2 h] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{h}{3} \cdot [\pi R^2 + \pi Rr + \pi r^2] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow vol(K) = \frac{h}{3} \cdot \left[\pi R^2 + \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi r^2} + \pi r^2\right],$$

ou seja,

$$vol(K) = \frac{h}{3} \cdot \left[A_B + \sqrt{A_B . A_b} + A_b\right].$$

Pelo Lema 1 e o Princípio de Cavalieri, concluímos que de forma geral, a expressão acima determina o volume de um tronco de cone de altura h e bases F_0 e F, sendo essas figuras quaisquer, cujas áreas são, respectivamente, A_B e A_b. Obviamente é válido para o volume do tronco de pirâmide.

Capítulo 4 - Conexões entre a geometria espacial e os tipos de vagões, através de situações-problemas

Nesse capítulo apresentaremos algumas situações-problemas, que não estão relacionadas a nenhuma empresa e não necessariamente a situações reais, mas que de alguma maneira fará com que os alunos do curso MEFIN relacionem/façam conexões entre a geometria, os vagões e alguns outros sólidos relacionados a ferrovias. Após a leitura e a discussão desses problemas, os alunos utilizarão seus conhecimentos técnicos e o de geometria, adquiridos ao longo do curso técnico, para fazer a resolução dos mesmos.

Situação-problema 1:

Trata-se de uma situação em que uma empresa deseja transportar um líquido em vagão tanque, porém é necessário cumprir algumas normas para esse transporte. Para a sua resolução serão utilizados os conhecimentos de: volume de cilindro, diferenciar capacidade e volume, circunferência, razão e proporção, e transformação de unidades.

Situação-problema 2:

Esse problema nos traz uma situação de transporte de toras utilizando um vagão plataforma do modelo PER. Para que haja uma otimização no transporte, será necessário encontrar a melhor maneira de empilhamento das toras. Em sua resolução serão necessários os conhecimentos de: volume de cilindro, segmento circular, razões trigonométricas, teorema de Pitágoras e densidade.

Situação-problema 3:

Nesse terceiro problema deseja-se descobrir o número de latas de tinta que será necessário para pintar a parte externa de um vagão tanque, cujo formato é de um cilindro de base elíptica. Em sua resolução deve-se ter o conhecimento de área do cilindro de base elíptica e regra de três.

Situação-problema 4:

Esse problema nos traz a situação de uma empresa que utilizará um vagão gôndola para transportar minério e para fazer o carregamento dessa carga será utilizada uma carregadeira, cuja pá tem o formato interno de prisma reto. Em sua resolução será utilizado o conhecimento de volume de prisma e aritmética básica.

Situação-problema 5:

Nesse problema vamos calcular a capacidade de um vagão Hopper, que se assemelha com um tronco de pirâmide de base retangular, que foi construído por uma empresa. Para sua resolução será preciso ter o conhecimento de cálculo de volume de tronco de pirâmide.

Situação-problema 6:

Trata-se de uma situação em que se deseja saber o número de vagões do tipo Hopper Aberto (HAE) que será necessário para fazer o transporte de soja que está num armazém em forma de silo. Para resolvermos essa situação devemos ter o conhecimento de volume de cilindro e de cone.

SITUAÇÃO - PROBLEMA 1

Uma empresa irá transportar um líquido não corrosivo e esse transporte será feito por um vagão tanque. Essa empresa trabalha segundo as leis e os regulamentos técnicos metrológicos impostos pelo INMETRO. Segundo estudos a respeito desse líquido, constatou-se que:

- ao ser transportado, durante o percurso, a temperatura não ultrapassa os 40ºC;
- o mesmo sofre uma expansão volumétrica de até 30%, ocorrendo o ápice aos 40ºC.

O vagão tanque utilizado será o TCS e está representado pela figura abaixo.

Especificações do Vagão Tanque do modelo TCS a ser utilizado.

TCS	
Utilização Corrente:	Derivados de Petróleo e Líquidos
Bitola (m):	1,60
Sistema Carga:	Superior (Domo)
Sistema Descarga:	Por Baixo
Altura Útil (m):	2,60
Largura Útil (m):	2,60
Comprimento Útil (m):	15,30

Abaixo, temos a parte do regulamento técnico metrológico a que se refere a portaria do Inmetro nº 112 de 24 de maio de 1989.

2. DEFINIÇÕES

2.2 Vagão-tanque: veículo ferroviário, sem meio próprio de propulsão, equipado com tanque de carga.

2.3 Capacidade total: volume máximo de líquido que o tanque de carga pode conter, até o seu transbordamento.

2.4 Capacidade nominal: volume de líquido que o tanque de carga deve conter até o plano de referência.

2.5 Referência: linha não materializada, contida no plano de referência, coincidente com a geratriz superior do corpo do tanque de carga.

2.6 Plano de referência: plano horizontal até o qual deve ser enchido o tanque de carga para conter o volume correspondente à respectiva capacidade nominal.

2.7 Domo: parte do tanque de carga, de forma cilíndrica vertical, destinada a receber a expansão de volume do líquido nele contido.

2.8 Vertical de medição: vertical que passa pelo ponto médio do eixo longitudinal do tanque de carga.

3. UNIDADE DE MEDIDA

3.1 A unidade de medida de volume autorizada para os tanques de carga montados sobre veículos ferroviários é o litro cujo o símbolo é l.

4. CARACTERÍSTICAS CONSTRUTIVAS

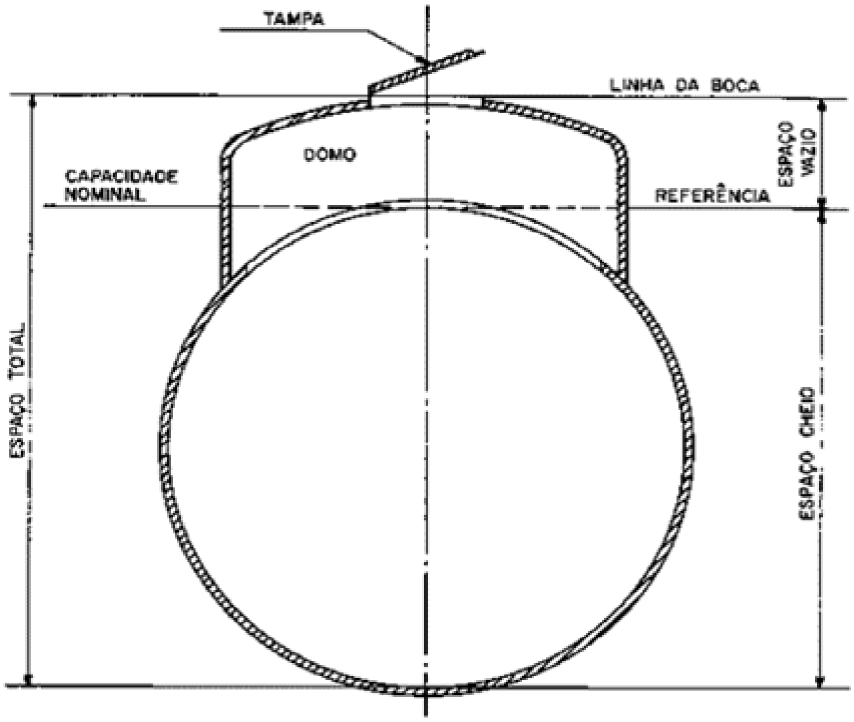
4.6.1. As dimensões do domo devem ser tais que acima do plano de referência haja um volume de expansão do líquido de no mínimo igual a 1,5% (um e meio por cento) da capacidade nominal do tanque de carga.

4.6.2 O domo deve ter a forma de um cilindro vertical, de seção circular, e ser constante ao longo de sua altura.

5. VERIFICAÇÕES

Todo vagão tanque deve ser apresentado ao Órgão Metrológico munido de todos os seus acessórios, em condições normais de utilização, com o tanque de carga limpo e previamente desgaseificado.

CORTE TRANSVERSAL DO VAGÃO TANQUE
ANEXO 1



(DESENHO ANEXO A PORTARIA INMETRO No112 DE 24 DE MAIO DE 1989)

Em relação a essa situação, e considerando todas as normas impostas pelo INMETRO, determine:

a) o diâmetro do Domo, de altura 50 cm, de um vagão tanque TCS, caso utilizemos toda a sua capacidade nominal;
b) o volume máximo, aproximadamente, desse líquido que será transportado em um único vagão;

c) a taxa de vazão da descarga, sendo que 1 hora após o início do descarregamento o nível do líquido no tanque, em sua temperatura normal, era de 1,5 m.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 1

Na resolução desse problema utilizaremos os conhecimentos de: volume de cilindro, diferenciar capacidade e volume, circunferência, razão e proporção, e transformação de unidades.

Dados:

Altura Útil (m): 2,60, desconsiderando a altura do Domo;

Largura Útil (m): 2,60

Comprimento Útil (m): 15,30

Sejam:

R (raio da base do tanque) $= \frac{2,6}{2} = 1,3\ m$;

$H =$ Comprimento útil do tanque $= 15,3\ m$;

$C_D =$ Capacidade do Domo;

$C_N =$ Capacidade nominal do Tanque;

$V_L =$ Volume do líquido a ser transportado no vagão;

a) o diâmetro mínimo do Domo, de altura 50 cm, de um vagão tanque TCS, caso utilizemos toda a sua capacidade nominal;

Sejam:

$r =$ raio do Domo em metros;

h (Altura do Domo) , ou seja, $h\ = 0,50\ m$;

Segundo o INMETRO: "*4.6.1. As dimensões do domo devem ser tais que acima do plano de referência haja um volume de expansão do líquido no mínimo igual a 1,5% (um e meio por cento) da capacidade nominal do tanque de carga.*"

Portanto, temos:

$$C_D = 1{,}5\% \cdot C_N \implies \pi \cdot r^2 \cdot h = 0{,}015 \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \implies$$

$$\implies r^2 \cdot (0{,}5) = 0{,}015 \cdot (1{,}3)^2 \cdot (15{,}3) \implies$$

$$\implies r^2 = \frac{0{,}015 \cdot 1{,}69 \cdot 15{,}3}{0{,}5}$$

$$\Rightarrow r^2 = 0{,}77571$$

Assim, o diâmetro do Domo será de $2 \cdot r \approx 2 \cdot (0{,}8807) \approx 1{,}76\, m$.

b) o número inteiro, em litros, mais próximo do volume máximo desse líquido que será transportado em um único vagão;

$V_L \cdot 1{,}3 \leq C_N + C_D$ e $C_D = 1{,}5\% \cdot C_N$

$\Rightarrow V_L \cdot 1{,}3 \leq 101{,}5\% \cdot C_N$

$\Rightarrow V_L \cdot 1{,}3 \leq 101{,}5\% \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H$ substituindo $\pi \approx 3{,}14,\ R = 1{,}3\, m\ e\ H = 15{,}3\, m$

$\Rightarrow V_L \cdot 1{,}3 \leq 1{,}015 \cdot (3{,}14) \cdot (1{,}3)^2 \cdot (15{,}3)$ $(\div\ 1{,}3)$

$\Rightarrow V_L \leq 1{,}015 \cdot (3{,}14) \cdot (1{,}3) \cdot (15{,}3)$

$\Rightarrow V_L \leq 63{,}391419\, m^3$

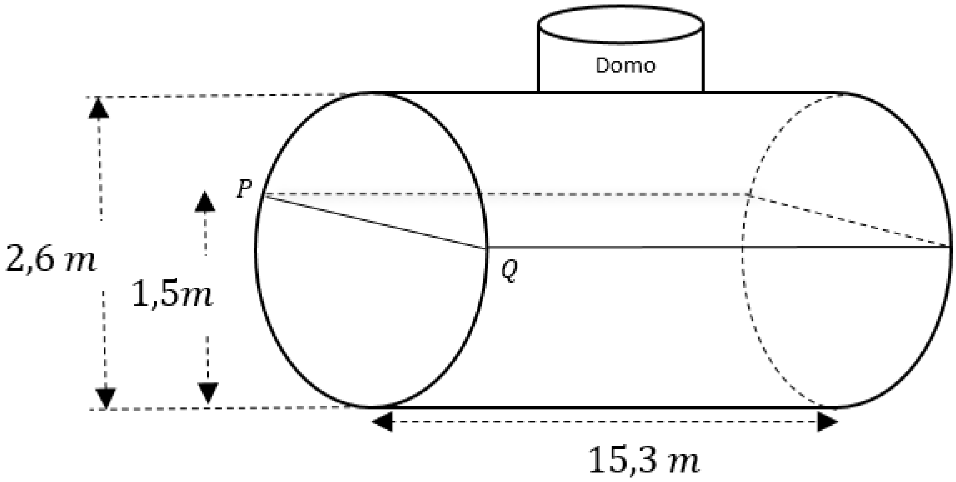
$\Rightarrow V_L \leq 63{,}391419 \cdot 1000\, \ell$

$\Rightarrow V_L \leq 63391{,}42\, \ell$

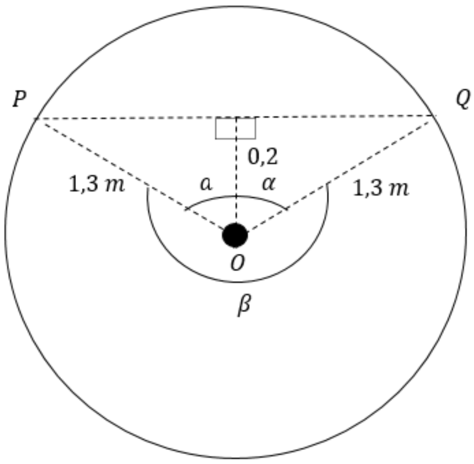
Assim, o inteiro mais próximo do volume máximo é 63391ℓ .

c) a taxa de vazão da descarga, sendo que 1 hora após o início do descarregamento o nível do líquido no tanque, em sua temperatura normal, era de 1,5 m.

$$Vazão = \left(Vol.\ inicial\ do\ líquido - Vol.\ após\ 1\ hora\right)\frac{\ell}{hora}$$



Visualização da base:



Seja V o volume do líquido após 1 hora.

$$V = (\frac{\beta}{360°}\pi \cdot R^2 + \Delta POQ) \cdot H$$

Cálculo do α :

$$cos\ \alpha = \frac{0,2}{1,3} \approx 0,1538 \Rightarrow \alpha \approx 81°$$

Cálculo do β:

$$2 \cdot \alpha + \beta = 360°$$
$$\beta = 360° - 2\alpha$$
$$\beta = 360° - 2 \cdot 81°$$
$$\beta = 198°.$$

$$V = \left(\frac{\beta}{360°} \cdot \pi \cdot R^2 + \Delta POQ\right) \cdot H =$$

$$= \left(\frac{\beta}{360°} \cdot \pi \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot sen\ \alpha\right) \cdot H =$$

$$= \left(\frac{198°}{360°} \cdot (3,14) \cdot (1,3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (1,3)^2 \cdot sen162°\right) \cdot (15,3)$$

Como $sen\ 162° \approx 0,309$

$$V \approx 48,654\ m^3 \text{ ou } V \approx 48654\ \ell$$

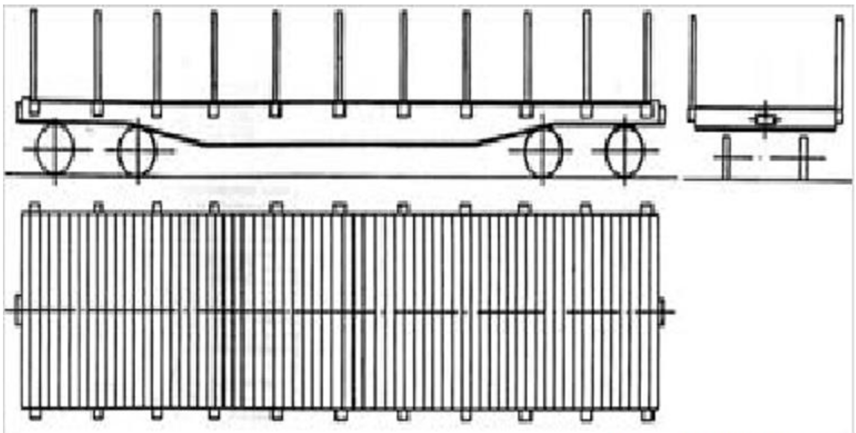
Assim, a $Vazão = \left(Vol.\ inicial\ do\ líquido - Volume\ após\ 1\ hora\right)\frac{\ell}{hora}$

$$= (63391 - 48654)\frac{\ell}{hora}$$

$$= 14787\frac{\ell}{hora}.$$

SITUAÇÃO - PROBLEMA 2

Uma Madeireira utiliza o Modal Ferroviário para transportar suas toras. Para isso utiliza o vagão Plataforma do modelo PER, semelhante ao da figura abaixo.



Fonte:<www.mrs.com.br/aempresa/vagoes

Especificações do Vagão Plataforma do modelo PER a ser utilizado.

PER	
Utilização Corrente:	Siderúrgicos, Madeira e Grandes Volumes
Bitola (m):	1,60
Sistema Carga:	Cima ou Lateral
Sistema Descarga:	Cima ou Lateral
Altura Útil (m):	1,30
Largura Útil (m):	3,00
Comprimento Útil (m):	13,30
Tara (kg)	**27.000***

Peso Bruto (kg)	100.000*
Capacidade Máxima	73.000*

*Valores supostos

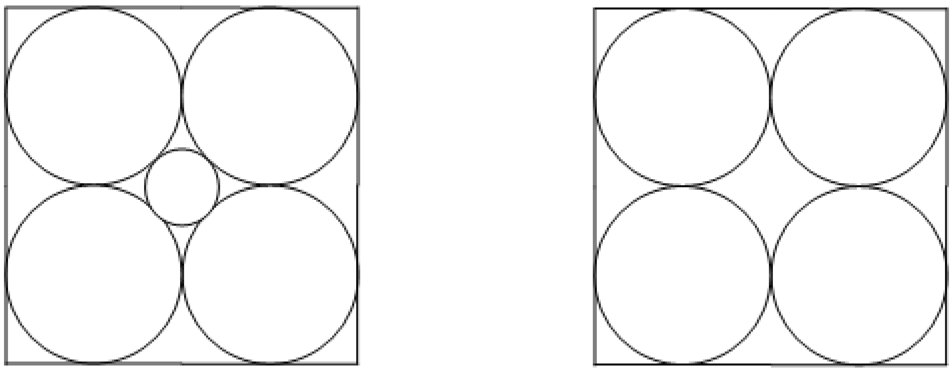
Essa Madeireira separa as toras pelos comprimentos das bases de suas toras. Após a triagem as toras foram separadas em dois grupos, denominados: Toras Grandes e Toras Pequenas.

Grupo	Quantidade	Circunferência (cm)	Comprimento (m)	Densidade (kg/m³)
Grandes	24	50π	6,5	1.010
Pequenas	40	20π	6,5	

Para transportá-las, pensou-se em iniciar o carregamento utilizando um dos dois modelos, o Modelo 1 (Mod. I) ou o Modelo 2 (Mod. II). Sendo que, se possível, poderá ser colocado no espaço restante, acima do tipo de empilhamento escolhido dentre os modelos abaixo, as toras pequenas inteiras na posição horizontal, a fim de completar até altura permitida pela especificação do vagão.

Para efeito de cálculos, utilize: $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ e $\pi \approx 3{,}14$.

Fig. 2 (secção vertical)



Mod. I   Mod. II

Em relação a tudo que se apresentou dessa situação, e utilizando todo o seu conhecimento técnico, responda:

a) É possível fazer o carregamento utilizando o Mod. 1? Justifique sua resposta através de cálculos.
b) Qual o número de vagões necessários para fazer o transporte de todas as toras? Justifique sua resposta.
c) Qual o valor desse transporte, se o custo é de R$ 0,20/kg transportado?

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 2

Nessa resolução serão necessários os conhecimentos de: volume de cilindro, segmento circular, razões trigonométricas, teorema de Pitágoras e densidade.

Dados:

Comprimento da tora Grande: $2 \cdot \mathrm{R} \cdot \pi = 50 \cdot \pi \rightarrow \mathrm{R} = 25\ \mathrm{cm}$

Comprimento da tora Pequena: $2 \cdot \pi \cdot r = 20 \cdot \pi \rightarrow r = 10$ cm

Densidade: 1.010 kg/m³

Dimensões do vagão:

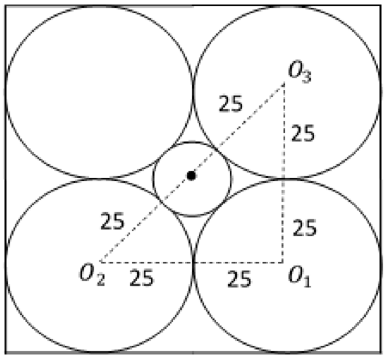
Altura Útil: 1,30 m

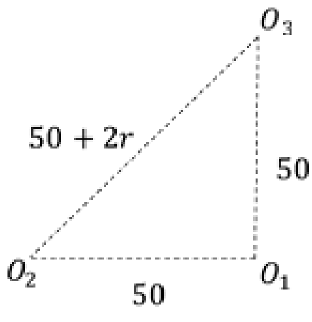
Largura Útil: 3,00 m

Comprimento Útil: 13,30 m

a) É possível fazer o carregamento utilizando o Mod. 1?

Solução:





Por Pitágoras:

$$(2r + 50)^2 = 50^2 + 50^2$$

$$2r + 50 = 50\sqrt{2}$$

$$2r = 50\left(\sqrt{2} - 1\right), \ \sqrt{2} \approx 1{,}4$$

$$r \approx 25(1{,}4 - 1)$$

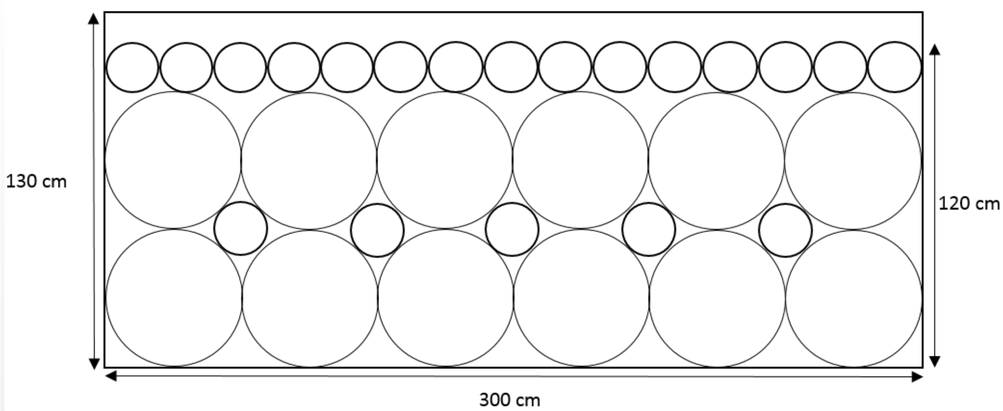
$$r \approx 10\ cm$$

Assim, é possível sim utilizar o Mod. 1.

b) Qual o número de vagões necessários para fazer o transporte de todas as toras?

Solução:

Uma das maneiras de organizar as toras em questão é a apresentada abaixo.



Geometricamente será necessário apenas um vagão. Note que serão duas fileiras dessas, pois $2 \cdot 6{,}5 < 13{,}30\ m$ (comprimento útil do vagão). Agora falta conferirmos se não irá ultrapassar a capacidade máxima do vagão.

Sejam:

$V_G = \text{volume da tora grande} \rightarrow\ V_G = \pi \cdot (0{,}25)^2 \cdot 6{,}5 \rightarrow\ V_G = 1{,}275625\ \text{m}^3$

$V_P = \text{volume da tora pequena} \rightarrow\ V_P = \pi \cdot (0{,}10)^2 \cdot 6{,}5 \rightarrow\ V_P = 0{,}2041\text{m}^3$

$V_T = 24 \cdot V_G + 40 \cdot V_P$

$\quad = 24 \cdot 1{,}275625 + 40 \cdot 0{,}2041$

$\quad = \ 30{,}615 + 8{,}16$

$V_T = 38{,}779\ \mathrm{m}^3$.

Como a densidade dessa madeira é de $1.010\ \mathrm{kg/m^3}$, temos que a massa total do carregamento será de $38{,}779 \cdot 1010 = 39.166{,}79\ \mathrm{kg} < 73.000\ \mathrm{kg}$ que é a capacidade máxima do vagão.

Portanto, será necessário apenas um único vagão para fazer esse transporte.

c) Qual o valor desse transporte, se o custo é de R$ 0,20/kg transportado?

O valor gasto para fazer o transporte será de $39.166{,}79 \cdot \text{R\$ } 0{,}20 = \text{R\$ } 7.833{,}36$.

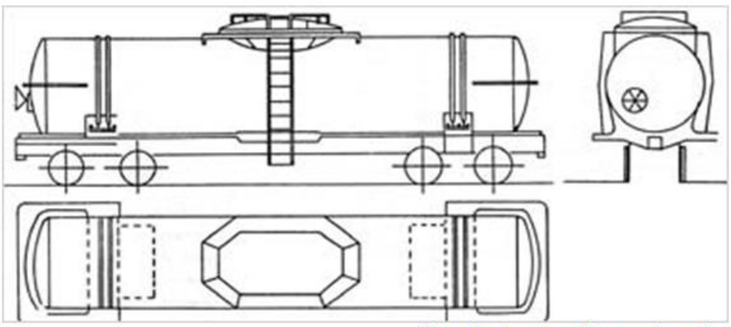
SITUAÇÃO - PROBLEMA 3

Deseja-se pintar a parte externa de um vagão tanque semelhante ao da figura abaixo, cujas especificações do modelo estão na tabela a seguir.

Figura ilustrativa

Fonte: <www.fepasa.com>

Vagão tanque



Fonte: <https://www.mrs.com.br/aempresa/vagoes.php>

Especificações técnicas

TCR	
Utilização Corrente:	Derivados de Petróleo e Líquidos
Bitola (m):	1,60
Sistema Carga:	Superior (Domo)
Sistema Descarga:	Por Baixo
Altura Útil (m):	2,30
Largura Útil (m):	1,20
Comprimento Útil (m):	9,20

Para isso será utilizada uma lata de tinta com rendimento de 5m²/litro. Sabendo que a espessura do vagão é de 0,1 metros, determine o número de latas, aproximadamente, necessárias para pintar esse vagão externamente. Considere que será gasto uma lata para pintar o domo. (utilize $\pi \approx 3{,}14$).

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 3

Nesse problema é necessário que o aluno tenha os seguintes conhecimentos: área e perímetro de elipse, volume de cilindro, transformação de unidades e regra de três.

Dados:

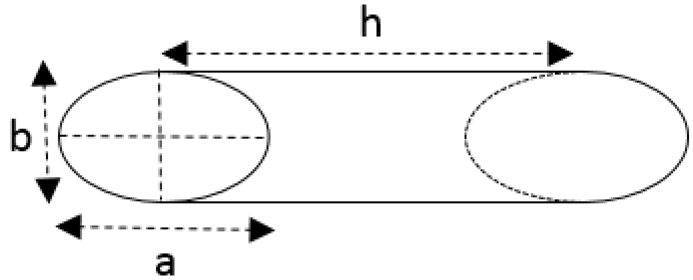
Sejam a e b as dimensões da base e h o comprimento do tanque:

$a = 115(medida\ interna) + 10(espessura) \Rightarrow a = 125\ cm\ ou\ 1{,}25\ m.$

$b = 70(medida\ interna) + 10(espessura) \Rightarrow b = 80\ cm\ ou\ 0{,}80\ m.$

$h = 920(medida\ interna) + 20(dobro\ da\ espessura) \Rightarrow h = 940\ cm\ ou\ 9{,}40\ m.$

Figura ilustrativa do cilindro



Cálculo da área da base (A_B):

$$A_B = a \cdot b \cdot \pi \;\Rightarrow\; A_B \approx 0{,}7 \cdot 1{,}25 \cdot 3{,}14$$

$$A_{\,B} \approx 2{,}7475\, m^3$$

Cálculo da área da superfície lateral do cilindro, sem o Domo, (A_L):

$$A_L \approx 2 \cdot \pi \cdot h \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \approx$$

$$\approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 9{,}4 \cdot \sqrt{\frac{1{,}25^2 + 0{,}7^2}{2}} \approx$$

$$\approx 59{,}032 \cdot \sqrt{1{,}02625} \approx$$

$$\approx 59{,}032 \cdot 1{,}0130 \approx$$

$$\approx 59{,}80\, m^2$$

Área total, sem o domo, (A_T):

$$A_T = 2 \cdot A_B + A_L$$

$$A_T \approx 2 \cdot (2{,}7475) + (59{,}80)$$

$$\approx 5{,}495 + 59{,}80$$

$$\approx 65{,}295\, m^2$$

Se a tinta possui rendimento igual a 5m²/litro, então para pintarmos $65{,}295\, m^2$ serão necessárias 14 latas para pintar a superfície lateral, sem o domo, e as bases. Como ainda é preciso uma lata para pintar o domo, logo serão necessárias $14 + 1 = 15$ latas para pintar toda a superfície desse vagão.

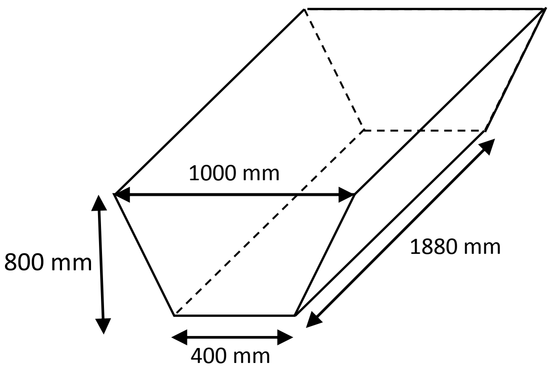
SITUAÇÃO - PROBLEMA 4

Uma empresa utilizará um vagão gôndola para transportar minério. Para carregar o vagão será utilizada uma carregadeira, cuja pá tem o formato interno aproximado a um prisma reto cuja base é um trapézio isósceles, com as dimensões internas da pá representadas nas figuras abaixo. Sabe-se que quando essa pá é carregada com minério, a quantidade é 10% superior à capacidade dela. Por motivo de segurança, o vagão que será utilizado só poderá receber 70% da sua capacidade.

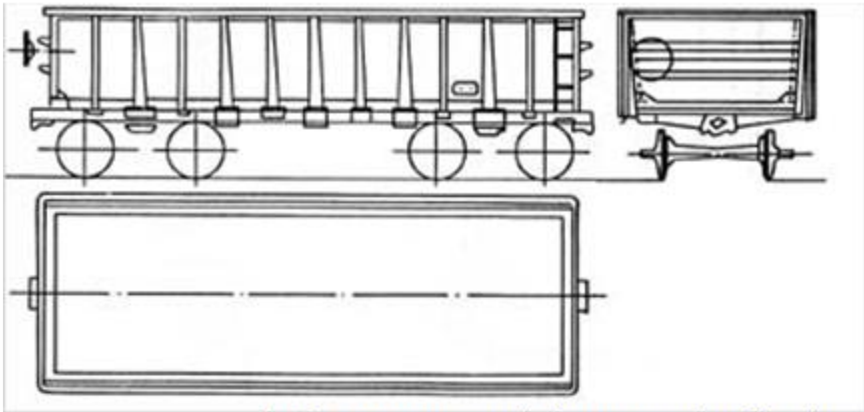
Figura ilustrativa do vagão gôndola

Fonte: <vfco.brazilia.jor.br>

Fonte: bomfimnoticias.com



Vagão Gôndola



Fonte:< www.mrs.com.br/aempresas/vagões.php>

Especificações técnicas

GDS	
Utilização Corrente:	Minério
Bitola (m):	1,60
Sistema Carga:	Por Cima
Sistema Descarga:	Em Car-Dumper
Altura Útil (m):	1,40
Largura Útil (m):	2,50
Comprimento Útil (m):	8,10

Quantas pás serão necessárias para carregar 10 vagões?

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 4

Para a resolução desse problema o aluno terá que ter o conhecimento de: área de trapézio, volume de cilindro, porcentagem e transformação de unidades.

Dados:

Como o vagão tem o formato de um paralelepípedo de dimensões $1{,}4\ m\ X\ 2{,}5\ m\ X\ 8{,}1\ m$, sua capacidade é $C_V = 1{,}4 \cdot 2{,}5 \cdot 8{,}1 \ \Rightarrow\ C_V = 28{,}35\ m^3$.

Como a pá tem o formato de um prisma reto cuja base é um trapézio, sua capacidade pode ser expressa por: $C_P = A_B \cdot h$, sendo A_B a área do trapézio e h a altura do prisma.

$$C_P = \frac{(1000mm + 400mm) \cdot 800mm}{2} \cdot 1880\ mm \implies$$

$$= \frac{(1\ m + 0{,}4\ m) \cdot 0{,}80\ m}{2} \cdot 1{,}88\ m =$$

$$= \frac{(1{,}4\ m) \cdot 0{,}8\ m}{2} \cdot 1{,}88\ m \implies$$

$$\implies C_P = 1{,}0528\ m^3.$$

Temos que $70\% \cdot C_V = 0{,}7 \cdot 28{,}35 = 19{,}845\ m^3$. Como são 10 vagões ,a carga total será de $10 \cdot 19{,}845 = 198{,}45\ m^3$.

Como cada pá equivale a $110\% \cdot 1{,}0528 \implies 1{,}1 \cdot 1{,}0528 \implies 1{,}15808\ m^3$, logo o número de pás para carregar os 10 vagões será de $\frac{198{,}45}{1{,}15808} \approx 171{,}36$, ou seja, 172 pás.

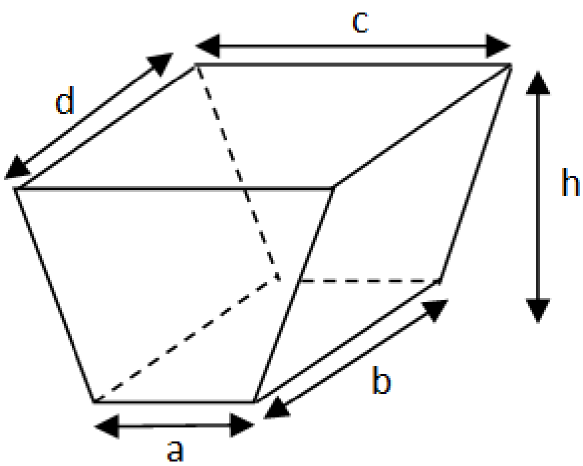
SITUAÇÃO - PROBLEMA 5

A parte interna de um Vagão Hopper se assemelha a três troncos de pirâmide de bases retangulares. Uma empresa pretende construir um vagão hopper, semelhante ao da figura abaixo.

Figura ilustrativa

Fonte: <vfco.brazilia.jor.br>

A figura abaixo representa um terço da peça que forma um vagão do modelo acima. As dimensões dessa peça abaixo são: $a = 635\ cm, b = 120\ cm, c = 1270\ cm, d = 240\ cm$ e $h = 220\ cm$, sendo h a altura.



Determine o volume desse vagão, em metros cúbicos.

RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 5

Na resolução desse exercício é necessário saber calcular o volume do tronco de pirâmide e transformação de unidades de medidas

A capacidade de cada um dos troncos de pirâmide é dado pela expressão:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(a \cdot b + \sqrt{(a \cdot b) \cdot (c \cdot d)} + c \cdot d\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{220}{3} \cdot \left(635 \cdot 120 + \sqrt{(635 \cdot 120) \cdot (1270 \cdot 240)} + 1270 \cdot 240\right) cm^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{2{,}2}{3} \cdot \left(6{,}35 \cdot 1{,}2 + \sqrt{(6{,}35 \cdot 1{,}2) \cdot (12{,}7 \cdot 2{,}4)} + 12{,}7 \cdot 2{,}4\right) m^3 =$$

$$= \frac{2{,}2}{3} \cdot \left(7{,}62 + \sqrt{7{,}62 \cdot 30{,}48} + 30{,}48\right) =$$

$$= \frac{2{,}2}{3} \cdot (53{,}34) =$$

$$= 39{,}116\ m^3$$

Como esse vagão será composto de três troncos de pirâmides, logo sua capacidade será de $3 \cdot 39{,}116 = 117{,}348\ m^3$.

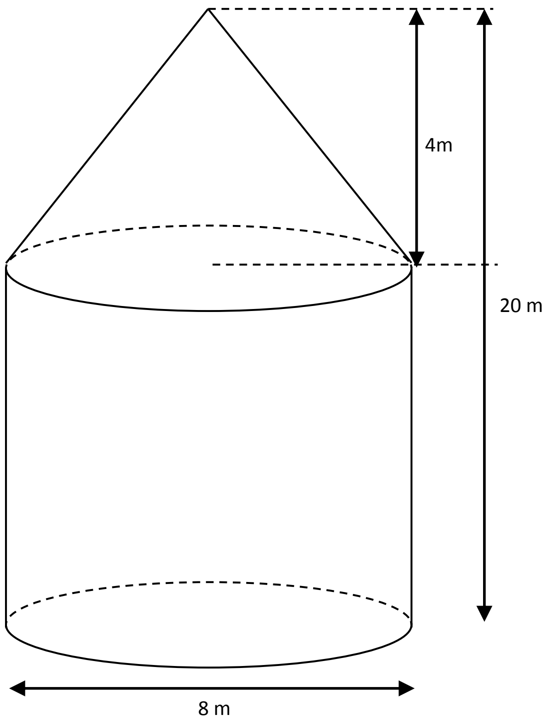
SITUAÇÃO - PROBLEMA 6

Um armazém de soja possui dez silos, cujas dimensões internas são 8 m de diâmetro, 20 m de altura total, sendo 4 m de altura da cobertura superior, como mostra a figura. Sabe-se que todos eles estão sendo utilizados na sua capacidade máxima. A soja contida nele será transportada em vagões do modelo Hopper Aberto (HAE) em aço. O peso bruto do vagão é de 100.000 kg e sua tara é de 22.000 kg. Determine o número mínimo de vagões que serão necessários para fazer esse transporte. (Dados: A semente de **soja**, em geral, tem um peso volumétrico de 770 kg/m³.)

Figura ilustrativa do silo

Fonte: <doc.brazilia.jor.br>

Modelo Matemático do silo



RESOLUÇÃO DO PROBLEMA 6

Para a resolução desse problema o aluno deverá ter o conhecimento de: volume de cone e de cilindro, transformação de unidades e proporção.

Dados:

Peso volumétrico da soja $= 770\ kg/m^3$

A capacidade do vagão = peso bruto – tara $\Longrightarrow 10000\ kg - 22000\ kg\ \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow\ 78000\ kg$$

A capacidade do silo = capacidade do cone + capacidade do cilindro

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h_{cone} + \pi \cdot r^2 \cdot h_{cilindro}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (4)^2 \cdot 4 + \pi \cdot (4)^2 \cdot (20 - 4)$$

$$= \frac{64}{3} \cdot \pi + 16 \cdot 16 \cdot \pi$$

$$= \frac{64}{3} \cdot \pi + 256 \cdot \pi$$

$$= \frac{832}{3} \cdot \pi$$

$$\approx \frac{832}{3} \cdot 3{,}14$$

$$\approx 870{,}83\ m^3$$

Como o peso volumétrico da soja é de $770\ kg/m^3$ e a capacidade do silo é de, aproximadamente, $870{,}83\ m^3$, esse silo contém $770 \cdot 870{,}83 \approx 670539{,}10\ kg.$

Logo, o número mínimo de vagões necessários para esse transporte, será de $\frac{670539{,}10}{78000} \approx 8{,}596$, ou seja, aproximadamente igual a nove.

Considerações Finais

É fato que a contextualização do conhecimento é de extrema importância para o aprendizado, porém não podemos deixar de lado o porquê e como surgiram os conceitos, as propriedades e as expressões. Ao apresentar as propriedades e as demonstrações tradicionais da Geometria, é possível aproximar os alunos desse conteúdo, mas apenas isso não basta.

Os alunos estão cada vez menos interessados nas aulas tradicionais. Isso se torna notável em suas falas na sala de aula, principalmente nas de Matemática: "Por que eu preciso saber disso? Onde vou aplicar esse conhecimento? Terei que saber todas essas fórmulas?". Fica evidente que apenas passar o conteúdo de forma tradicional não mais os atrai. Torna-se necessário criar situações-problema que os desafiem, os façam abandonar todas as outras coisas, pelo menos por um instante, para raciocinar sobre determinada situação, dando importância àquilo que está sendo lecionado.

Antigamente as fórmulas eram apresentadas e, em seguida, eram resolvidos vários exercícios mecânicos e iguais, meras aplicações de fórmula, nem um pouco desafiadores. Nas demonstrações, o objetivo era mostrar que a Matemática tinha uma estrutura lógica/dedutiva e que tudo se encaixava perfeitamente. Os exercícios funcionavam mais como uma forma de justificar a existência das fórmulas e ajudar a decorá-las.

Para demonstrar uma expressão, não basta apenas saber os axiomas e as propriedades, é preciso um encadeamento lógico para relacioná-los e chegar ao objetivo. Para resolver uma situação-problema, não basta apenas saber todas as expressões. É preciso ler, interpretar, colher os dados, identificar o problema e, através de um encadeamento lógico, escolher corretamente as ferramentas/expressões que serão utilizadas para a resolução do problema. É esse tipo de procedimento que é muito utilizado na Matemática, e principalmente na Geometria, que os alunos devem adquirir para que saibam tomar as atitudes corretas nas situações do dia-a-dia e como profissionais.

Fica nítido que nós professores precisamos nos capacitar para adaptar nossas aulas, de tal maneira a desenvolver em nossos alunos esses tipos de procedimentos. Precisamos quebrar as amarras de nossas formações acadêmicas e nos transformarmos profissionalmente, compartilhar experiências, criar novas metodologias de ensino, enfim, criar aulas mais atrativas, para que o conhecimento seja mais significativo.

Referências Bibliográficas

DANTE L. R. Matemática, contextos e aplicações. v.2. Ed. Ática. 1ª edição.

GARBI, G.G. C.Q.D, explicações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da geometria. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010, 1ª edição.

LEVI, Bepo. Lendo Euclides. Rio de Janeiro: Editora Civilização Brasileira , 2008.

Sistema Internacional de Unidades - INMETRO. <www.inmetro.gov.br>

DIAS, José Luciano de Mattos. Medida, normalização e qualidade; aspectos da história da metrologia no Brasil. Rio de Janeiro: Ilustrações, 1998.

POMPEO, José Nicolau E, DOLCE, Osvaldo. Fundamentos da Matemática: Geometria Plana. São Paulo: Atual, 2013, 9ª edição.

POMPEO, José Nicolau E, DOLCE, Osvaldo. Fundamentos da Matemática: Geometria Espacial. São Paulo: Atual, 2013, 9ª edição.

LIMA E. E, CARVALHO P. C, Wagner E. MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, V.2, sexta edição.

LIMA E. E, CARVALHO P. C, Wagner E. MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, V.3, sexta edição.

LIMA, Elon Lages. Medida e Forma em Geometria: Comprimento, Área, Volume e Semelhança. Rio de Janeiro: SBM, 2006, 4ª edição.

BARBOSA, João L. M. Geometria Euclidiana Plana. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

VORDERMAN, Carol. Matemática para Pais e Filhos: A maneira mais fácil de compreender e explicar todos os conceitos da disciplina. São Paulo: Publifolha, 2013, 1ª edição.

http://www.ime.usp.br/~brolezzi/disciplinas/20102/mat341/sinopsessamuel.htm. Acesso em 2 de Janeiro de 2015.

http://rodrigomatxy.blogspot.com.br. Acesso em 22 de dezembro de 2014.

http://redeglobo.globo.com/globociencia/noticia/2011/12/historia-da-geometria-euclidiana-do-antigo-egito-salas-de-aula.html. Acesso em 11 de novembro de 2014.

http://www.mundoeducacao.com/matematica/unidades-medida-ao-longo-historia.htm. Acesso em 2 de fevereiro de 2015.

http://cta.if.ufrgs.br/projects/instrumentacao-fisica/wiki/Dist%C3%A2ncia_e_Comprimento_Defini%C3%A7%C3%B5es_Hist%C3%B3ria_e_Medi%C3%A7%C3%B5es. Acesso em 10 de fevereiro de 2015.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Metro Acesso em 18 de agosto de 2014.

http://www.brasilescola.com/matematica/polegadas.htm . Acesso 18 de agosto de 2014.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Jarda . Acesso em 18 de agosto de 2014.

http://pt.wikipedia.org/wiki/Pé_(unidade). Acesso em 18 de agosto de 2014.

http://www.planetseed.com/pt-br/sciencearticle/o-metro-uma-medida-para-todas-pessoas-e-todos-os-tempos. Acesso em 18 de agosto de 2014.

LAGES, Elon. Curso para professores de Matemática do 2º grau. Rio de Janeiro: IMPA, 1991.

IEZZI, Gelson E, ... [et al.]. Matemática: Ciências e aplicações, vol. 2: ensino médio. São Paulo: Editora Atual, 2010, 5ª edição.

PAIVA, Manoel R. Matemática. São Paulo: Editora Moderna Plus, vol. 2, 2010.

Projeto pedagógico do curso (PPC) do curso de Manutenção Eletromecânico Ferroviário, da coordenadoria de Ferrovias do Campus Cariacica do Instituto Federal do Espírito Santo.

https://www.mrs.com.br/aempresa/vagoes.php. Acesso em 9 de agosto de 2014.

https://www.mathsisfun.com/geometry/ellipse-perimeter.html. Acesso em 16 de junho de 2014.