Universidade Federal de Juiz de Fora

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

**Thiago de Oliveira Alves**

**Lógica Formal e sua aplicação na argumentação matemática**

Juiz de Fora

2016

**Thiago de Oliveira Alves**

**Lógica Formal e sua aplicação na argumentação matemática**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon

Juiz de Fora

2016

Ficha catalográfica elaborada através do Modelo Latex do CDC da UFJF
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Alves, Thiago de Oliveira.
Lógica Formal e sua aplicação na argumentação matemática / Thiago de Oliveira Alves. – 2016.
99 f.

Orientador: Prof. Dr. Eduard Toon
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2016.

1. Lógica matemática. 2. Demostração. 3. Argumento. I. Toon, Eduard, orient. II. Título.

**Thiago de Oliveira Alves**

**Lógica Formal e sua aplicação na argumentação matemática**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, na área de concentração em Ensino de Matemática, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em: 18 de julho de 2016

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Eduard Toon - Orientador
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki
Universidade Federal de Juiz de Fora

Prof. Dr. Marcelo Oliveira Veloso
Universidade Federal de São João del-Rei

**AGRADECIMENTOS**

Aos meus colegas de turma, todos especiais, de forma que sem o apoio deles não estaria agora a concluir esta dissertação. A Nayara Guida de O. Santos pela oportunidade de aplicar e aprimorar os métodos apresentados neste trabalho em seus estudos do curso de graduação em Matemática. Ao Prof. Dr. Eduard Toon pela total confiança depositada em mim.

“Historicamente falando, a matemática e a lógica têm sido domínios de estudo inteiramente distintos. A matemática tem estado relacionada com a ciência e a lógica com o idioma grego. Mas ambas se desenvolveram nos tempos modernos: a lógica tornou-se mais matemática e a matemática tornou-se mais lógica. Em consequência, tornou-se agora inteiramente impossível traçar uma linha divisória entre as duas; na verdade, as duas são uma.”[25]

Bertrand Russell

**RESUMO**

O uso da Lógica é de fundamental importância no desenvolvimento de teorias matemáticas modernas, que buscam *deduzir* de axiomas e conceitos primitivos todo seu corpo de teoremas e consequências. O objetivo desta dissertação é descrever as ferramentas da Lógica Formal que possam ter aplicações imediatas nas demonstrações de conjecturas e teoremas, trazendo justificativa e significado para as técnicas dedutivas e argumentos normalmente utilizados na Matemática. Além de temas introdutórios sobre argumentação e âmbito da lógica, o trabalho todo é apresentado por método sistemático em busca de um critério formal que possa separar os argumentos válidos dos inválidos. Conclui-se que com uma boa preparação inicial no campo da Lógica Formal, o matemático iniciante possa ter uma referência sobre como proceder estrategicamente nos processos de provas de conjecturas e um conhecimento mais profundo ao entender os motivos da validade dos teoremas que encontrará ao se dedicar a sua área de formação.

Palavras-chave: Lógica matemática. Demonstração. Argumento.

## ABSTRACT

The use of Logic is of fundamental importance in the development of modern mathematical theories that seek *deduce* from axioms and primitive concepts all your body of theorems and consequences. The aim of this work is to describe the tools of Formal Logic that may have immediate applications in the statements of theorems and conjectures, bringing justification and meaning to the deductive techniques and arguments commonly used in Mathematics. In addition to introductory topics on argumentation and scope of Logic, all the work is presented by systematic method in search of a formal criterion that can separate the valid arguments of the invalids. It follows that with a good initial preparation in the field of Formal Logic, the novice mathematician could have a reference on how to strategically proceed in conjectures evidence processes and a deeper knowledge to understand the reasons for the validity of theorems found on their training area.

Key-words: Mathematical logic. Demonstration. Argument.

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

É comum observar, nos períodos iniciais de um curso de graduação em Matemática, alunos que sentem dificuldades em demonstrar ou provar certas afirmações matemáticas ou até mesmo acompanhá-las e entendê-las na leitura de livros-textos. Essa deficiência normalmente é fruto de um ensino básico onde se privilegiou a instrução dos alunos quanto à verdade ou falsidade de várias afirmações, dando pouca ênfase em como justificar de forma válida ou argumentar em defesa do que se quer afirmar [12]. Vindo de uma educação deste tipo, os futuros professores já começam a enfrentar dificuldades logo no início de sua formação, em que devem encarar a verdadeira natureza dedutiva da matemática e seus fundamentos e não somente a aplicação de conhecimentos prontos em casos práticos.

A falta de preparação do professor de Matemática quanto a esse ponto fundamental, que é a argumentação dedutiva na Matemática, pode levar a continuação de um ciclo onde mais alunos no Ensino Básico estarão pouco preparados para argumentar e defender suas próprias posições intelectuais, prejudicando o que é fundamental para o desenvolvimento teórico de vários ramos do conhecimento humano com ênfase em abordagens lógicas, como o Direito, a Filosofia, a Linguística, as Ciências da Computação, Ciências da Comunicação, Tecnologias de Informação e também a própria Matemática [4].

Este trabalho foi elaborado visando ilustrar e, no mais, dar um pequeno incentivo ao uso da Lógica (princípios e teoremas elementares) na vida dos professores e futuros professores que, com suas tutorias, influenciarão os alunos de qualquer nível de formação quanto a essa importante abordagem.

No Capítulo 2 será feita uma introdução geral ao conceito de argumento e formalização dedutiva, mostrando alguns exemplos de argumentos válidos e falácias comuns. Depois é feito um estudo sobre o campo de ação da Lógica ao diferenciar e especificar os conceitos de *descoberta* (processo criativo) de *justificação* (processo lógico-formal). No Capítulo 3 serão apresentados os tipos básicos de argumentação, onde se definirá os conceito de *dedução* e *indução*, mostrando suas principais características, vantagens, desvantagens e uso nas ciências em geral.

No Capítulo 4 será iniciado o estudo da Lógica Formal com o Cálculo Proposicional. Neste capítulo será apresentado o conceito de proposição e suas propriedades binárias. A partir daí, com o conceito de *proposição* (atômica ou simples), será definida a *proposição composta* com o uso de *conectivos* e as propriedades que cada um deles tem de alterar o valor-verdade de uma proposição composta a partir de seus componentes atômicos.

Logo em seguida, com as regras de formação para formulas bem formadas (fbf), o uso dos conectivos é ampliado no que se denomina *fórmula proposicional.* O método da tabela-verdade é introduzido para mostrar o valor-verdade das fórmulas proposicionais a partir se suas proposições componentes e conectivos aplicados. Será usado a tabela-verdade para demonstrar os conceitos de *tautologia*, *contradição* e *contingência*, que serão fundamentais, junto com outros teoremas para formular a definição de *equivalência* que se aplica a todas as leis da álgebra de proposições. Será definido também o conceito de *implicação lógica*, através dos conceitos de tautologia e contradição.

Com base nisso, o conceito de *argumento* será apresentado de maneira formal, onde culminará com a demonstração de um critério de validade que justificará os principais argumentos válidos que podem ser usados na Matemática, com uma pequena ilustração de seu uso.

No capítulo 5 a linguagem do Cálculo Proposicional será expandida, para uma maior abordagem dos casos de demonstrações, no que se denomina Cálculo de Predicados, que se incluem os símbolos $\forall$ ("para todo") e $\exists$ ("existe"), suas regras e equivalências básicas, ilustrando também seu vasto uso nas afirmações matemáticas e nos teoremas.

No Capítulo 6, com as linguagens da Lógica Formal em mãos, serão abordadas as técnicas e estratégias básicas para as demonstrações de teoremas matemáticos ou conjecturas em geral e, por último, no Capítulo 7, um Plano de Curso da disciplina de Lógica para os períodos iniciais da graduação em Matemática.

# 2 O CAMPO DE AÇÃO DA LÓGICA

Neste capítulo, para explicar o âmbito da Lógica, serão apresentados de maneira informal os conceitos de *argumentos* e *inferências*, ligados respectivamente aos de *justificação* e *descoberta*. Na primeira seção será ilustrado o que seria uma formalização de um argumento, processo que omite o conteúdo de suas afirmações, deixando em evidência somente seu formato, isto é, os componentes para sua validade ou não. Serão mostrados alguns exemplos de argumentos válidos e inválidos, suas formalizações e usos em diferentes contextos científicos. Na seção posterior, será mostrada a utilidade dos processos de descoberta nas ciências e na Matemática.

## 2.1 ARGUMENTOS E INFERÊNCIAS

Frequentemente estamos em contato com artigos de jornais, anúncios de vendas e propagandas políticas que nos tentam convencer de que certa opinião é a correta, precisamos de um determinado produto ou que Fulano é o melhor representante político. Ao tentar nos convencer de tais coisas, nos são apresentados *argumentos*, que seriam a conclusão a ser aceita acompanhada de várias outras afirmações que se relacionam com esta, buscando apoiá-la e dar corroboração. Um argumento poderia ser assim definido como um conjunto de enunciados em que um deles é a *conclusão* a qual se deseja provar ou evidenciar e os outros enunciados, chamados de *premissas*, cumpririam este papel [26]. Provar e evidenciar são conceitos diferentes em muitos aspectos. As evidências são usadas para tornar provável ou aceitável a conclusão e prestam a argumentos chamados *indutivos* [4]. São os exemplos dos artigos de jornais, publicidades, justificação de teorias nas ciências naturais e debates jurídicos. Já as provas, no sentido lógico [6] (não confundir com "provas de um crime" ou "provas históricas") nos dão a garantia de que a conclusão é verdadeira e se prestam a argumentos chamados *dedutivos* [4]. Como estes são de aplicação fundamental na Matemática, iremos tomá-los como exemplo para explicar conceitos fundamentais do âmbito da Lógica.

Uma afirmação pode ser suficientemente óbvia para convencer alguém de sua veracidade, mas quando não, surge o problema da prova ou evidenciação e aí a necessidade de argumentar. Porém, no sentido lógico de prova, é preciso destacar que um bom argumento não necessariamente deve convencer uma pessoa da veracidade da conclusão. Argumentos logicamente válidos podem não ser convincentes, ao passo que argumentos logicamente inválidos podem nos levar facilmente à enganos sobre determinados fatos e juízos. O papel da Lógica é identificar e separar estes dois tipos de argumentos, assim como ensinar a formulá-los [26].

Para entender melhor esta diferença, cabe definir o que é a *validade* de um argumento. Dizemos que um argumento é válido se sua conclusão é verdadeira sempre que as premissas também forem [26]. E se as premissas não forem verdadeiras? Aí não podemos afirmar nada sobre a veracidade da conclusão. Porém, isso não muda em nada a validade do argumento, pois na definição dada não é afirmado em momento nenhum que as premissas deveriam ser verdadeiras e sim que "se" elas fossem, a conclusão também seria. Falando de outra forma, em um argumento válido nunca ocorre o caso em que as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa. Já num argumento inválido, a conclusão pode ser falsa mesmo no caso em que as premissas sejam verdadeiras. Existe aí então nosso primeiro obstáculo a ser enfrentado e é o que a maioria das pessoas possui inicialmente, a dificuldade de entender a separação entre *conteúdo de verdade* das premissas e da conclusão, e o *componente lógico* do argumento como um todo, que relaciona formalmente as premissas com a conclusão tornando-o válido ou inválido. Então o âmbito da Lógica é estudar o componente lógico dos argumentos e não o de determinar o conteúdo de verdade dos enunciado. Determinar se certas afirmações são verdadeiras ou falsas é papel para a ciência ou a observação do mundo externo ao discurso [4].

Vamos exemplificar.

**Exemplo 2.1.1.** *Podemos começar com um exemplo de um argumento válido.*

1. *Todas as cachorras são mamíferas.*
2. *Afrodite é uma cachorra.*
3. *Portanto, Afrodite é mamífera.*

Neste exemplo, que é uma representação formal de um argumento, a palavra "portanto" tem um papel fundamental que é de separar as premissas da conclusão. As afirmações 1 e 2, antes da palavra "portanto", são as premissas e a afirmação "Afrodite é mamífera", que está depois, é a conclusão. Outras palavras ou locuções também se prestam a esse papel como "então", "logo", "consequentemente", "segue-se que", "daí", "assim", "isso implica que", etc.

Primeiro podemos analisar o conteúdo de verdade dos enunciados que compõem o argumento. A premissa 1 expressa realmente um fato, já que todos os cachorros são mamíferos (independente do sexo). A premissa 2 pode ser verdadeira ou falsa, dependendo do *domínio de discurso*, ou seja, sobre o conjunto de coisas das quais estamos falando e que podem dar uma interpretação para a sentença. Podemos considerar dois casos. Se por acaso estivermos falando de *deuses gregos*, então a proposição é falsa, pois a deusa Afrodite, por definição, não é uma "cachorra". Porém, se estou falando de uma cachorra que tem por nome "Afrodite", então a proposição estará expressando um fato e será verdadeira.

Independente desses dois casos, a validade do argumento não é afetada, pois fica claro pela definição que demos acima que *se* as premissas forem verdadeiras, a conclusão obrigatoriamente também será. Ou seja, a definição de validade não apela para nenhum dos casos específicos acima e sim para o fato de que se for o caso em que as premissas sejam verdadeiras, a conclusão também será. E se for o caso em que a premissa 2 é falsa, já que podemos não saber sobre o que o argumentador está falando? Neste caso não poderemos concluir nada sobre a verdade da conclusão através do argumento, mesmo que, independente disso, já soubéssemos que a deusa Afrodite não é mamífera. A questão tratada aqui é que se ela fosse cachorra, então seria mamífera, e isto o argumento expressa validamente, não importando se ela é ou não de fato.

Sobre a questão do componente de verdade em um argumento podemos dizer que quando ocorre que um argumento é válido e que as premissas são todas verdadeiras em alguma interpretação, chamamos este argumento de *sólido* ou *correto* [4]. Estes, sem dúvida, são os melhores de todos os argumentos, pois nesses a conclusão é necessariamente verdadeira para aquela interpretação. Não se deve portanto cometer o erro de interpretar as premissas em um domínio de discurso e a conclusão em outro. Desta forma um argumento sólido poderá chegar a conclusões absurdas. As vezes isso ocorre em argumentos onde determinados termos nas premissas e na conclusão são sutilmente ambíguos.

**Exemplo 2.1.2.** *Podemos tratar agora de um argumento inválido muito frequentemente cometido. É a chamada "afirmação do consequente".*

1. *Se a Afrodite tomar veneno ela morre.*
2. *Afrodite morreu. (neste caso a cachorra!)*
3. *Portanto, Afrodite tomou veneno.*

Muitas vezes não fica claro para uma pessoa que a ocorrência de um determinado fato pode não ter somente uma causa ou condição para que ocorra. Neste exemplo, a premissa 2 não possui somente uma causa. Por isso, passa despercebido que argumentar desta forma não é válido. Observe que mesmo se as duas premissas fossem verdadeiras, a conclusão poderia ser falsa. Afrodite poderia ter sido morta atropelada e sem tomar o veneno, por exemplo. Um argumento inválido também é chamado de *falácia* e esta específica é uma *falácia formal*, isto é, relacionada ao componente lógico do argumento, e chamada "falácia da afirmação do consequente" [4], pois busca provar uma causa ou condição usando como apoio uma consequência dela [11]. Como vimos, esta "consequência" pode não ter uma causa única.

Se introduzirmos o símbolo "A" para representar a sentença "Afrodite tomou veneno", "C" para representar a sentença "Afrodite morreu", e o símbolo "$\rightarrow$" para representar "implica que" ou "se..., então...", a premissa 1 poderá ser formulada como $A \rightarrow C$. A sentença assim formalizada da premissa 1 é chamada de *condicional.* Em um condicional, o que expressa a causa ou condição é o "A", chamado *antecedente* do condicional e, “C” é dito o *consequente*, que expressa o efeito ou a consequência. Com a formalização simbólica das premissas, fica mais fácil observar a forma que elas tomam no argumento e analisar somente o componente lógico sem se preocupar com o conteúdo de verdade que cada uma expressa. A *falácia da afirmação do consequente* possuirá então a forma

1. $A \to C$
2. $C$
3. $\therefore A$

No contexto matemático é muito comum afirmações do tipo citado abaixo [11].

**Exemplo 2.1.3.** *(Falácia da afirmação do consequente).*

1. *Se $x$ é par, então ele é divisível por 2.*
2. *$x$ é divisível por 2.*
3. *Portanto, $x$ é par.*

Este argumento possui a forma da *falácia da afirmação do consequente.*

- A: “$x$ é par”.
- C: “$x$ é divisível por 2”.

    1. $A \to C$
    2. $C$
    3. $\therefore A$

Ou seja, formalmente ele busca provar a veracidade do *antecedente* (causa ou condição) através de uma consequência dele. Já vimos que formalmente isto não é válido, pois a consequência mencionada pode não ter uma única causa. Porém, o que causa confusão neste exemplo é o fato de *sabermos* que a *única* causa para um número ter a propriedade de “ser par” é equivalente a ele ter a propriedade de “ser divisível por 2” e esse conhecimento prévio que temos de coisas que nos parecem trivial é que torna difícil a separação entre a análise do conteúdo de verdade das premissas da análise formal do argumento.

Na análise formal, que resulta em dizer se o argumento é válido ou não, não podemos levar em consideração o que *sabemos* sobre cada premissa [4]. Neste exemplo, o que sabemos sobre a paridade de um número só é útil da premissa 2 para a conclusão, pois quando ouvimos ou lemos que "$x$ é divisível por 2", nosso conhecimento prévio nos leva automaticamente a aceitar a conclusão. No entanto, o argumentador pretende também se basear na premissa 1 para chegar a conclusão e esta estabelece somente que uma condição *sufuciente* para que um número seja "divisível por 2" é que ele seja "par". Ou seja, basta o número ser par que, como consequência disso, será divisível por 2. Ela não afirma em nenhum momento que esta é a *única* condição, mesmo sabendo-se que é, e também não afirma o contrário, que a condição para "ser par" é ser "divisível por 2", como segue-se da premissa 2 para a conclusão. Portanto, não podemos ir além do que foi colocado na premissa 1 e concluir em conjunção com a premissa 2 (afirmação do consequente) que necessariamente $x$ é par.

De fato, todas as premissas e também a conclusão podem ser verdadeiras ($x$=12, por exemplo), mas argumentar assim não constitui um passo válido em uma demonstração e nem a prova de que 12 é par, por exemplo. A razão disso é porque, mais uma vez lembrando, a validade de um argumento não depende do conteúdo de verdade das premissas e conclusão e sim da forma como eles estão encadeados, tornando necessária a veracidade da conclusão caso as premissas sejam verdadeiras.

O argumento válido seria

**Exemplo 2.1.4.** *Correção do exemplo 2.1.3 (Modus Ponens).*

1. *Se x for divisível por 2, então ele é par.*
2. *x é divisível por 2.*
3. *Portanto, x é par.*

Ou também

**Exemplo 2.1.5.** *Outra alternativa para a correção do exemplo 2.1.3.*

1. *x é par se, e somente se, ele é divisível por 2.*
2. *x é divisível por 2.*
3. *Portanto, x é par.*

O exemplo 2.1.4 é válido por afirmar na premissa 2 que o número $x$ *satisfaz* a condição da premissa 1, isto é, ser divisível por dois. Logo, supondo verdadeira a premissa 1, $x$ obrigatoriamente deve ser par. Esta forma de argumentar também é chamada de "afirmação do antecedente" ou *modus ponens* (em latim, "modo de afirmar") [4], pois prova uma consequência usando como apoio a causa ou condição para tal [11]. O exemplo 2.1.5 é válido pois expressa na premissa 1 que a condição para um número ser divisível por

2 é *unicamente* ele ser par. Portanto, se $x$ é divisível por 2, não há outra forma a não ser concluir que ele é par. Os exemplos 2.1.4 e 2.1.5 podem ser exemplos de argumentos sólidos (além de válidos, suas premissas são verdadeiras) se $x$=12, por exemplo. Fica apresentado então o argumento válido *modus ponens* e sua falácia associada, a "afirmação do consequente".

A formalização do argumento *modus ponens* é

1. $A \rightarrow C$
2. $A$
3. $\therefore C$

Será abaixo exemplificado mais uma falácia frequentemente cometida. A "falácia da negação do antecedente".

**Exemplo 2.1.6.** *Negação do antecedente.*

1. *Se a Afrodite tomar veneno, ela morre.*
2. *Afrodite não tomou veneno.*
3. *Portanto, ela não morreu.*

Mesmo sendo convincente, este argumento não é válido. É fácil ver que mesmo as duas premissas sendo verdadeiras, a conclusão pode ser falsa. Afrodite pode ter morrido de outras formas mesmo não tomando o veneno. Esta falácia chama-se "negação do antecedente" [4] por tentar erroneamente provar que uma consequência não ocorreu usando como apoio a ausência de uma causa ou condição para tal [11]. Como é bem sabido, um fato não necessita de uma causa ou condição única para ocorrer, a não ser que alguma premissa diga isso.

A forma desta falácia é

1. $A \rightarrow C$
2. $\neg A$
3. $\therefore \neg C$

Onde o símbolo "$\neg$" antes de cada sentença significa "não é o caso que..." e representa sua negação.

Formulando esta falácia em um contexto matemático [11].

**Exemplo 2.1.7.** *(Falácia da negação do antecedente).*

1. *Se $x$ é par, então ele é divisível por 2.*

2. *$x$ não é par.*

3. *Portanto, ele não é divisível por 2.*

Formalmente é a *falácia da negação do antecedente.*

- A: "$x$ é par".

- C: "$x$ é divisível por 2".

    1. $A \to C$
    2. $\neg A$
    3. $\therefore \neg C$

Este é mais um exemplo de erro comum em passos de demonstrações matemáticas. Mesmo que tenhamos $x$=13, este argumento continuaria sendo uma falácia. Veja que a premissa 1 não afirma que a *única* condição para que um número seja divisível por 2 é ele ser par, mesmo *sabendo-se* que é. Porém, como a veracidade das premissas ou conclusão não influencia na validade do argumento, a negação do antecedente na premissa 2 o torna inválido.

O argumento abaixo é válido e embora não tenha a mesma conclusão do anterior, ele mostra a forma correta de negar e introduz o conceito de condição necessária [11].

**Exemplo 2.1.8.** *(Modus Tollens).*

1. *Se a Afrodite tomar veneno, ela morre.*

2. *Afrodite não morreu.*

3. *Portanto, ela não tomou veneno.*

O *modus tollens* é formalmente expressado pela fórmula abaixo [4].

1. $A \to C$

2. $\neg C$

3. $\therefore \neg A$

A premissa 1 diz que a morte é uma condição *necessária* para quem toma veneno, mas a premissa 2 nega que esta condição tenha ocorrido. Portanto, não importa o que tenha realmente acontecido, supondo estas premissas verdadeiras, temos a certeza de que veneno a cachorra não tomou. Esta forma de argumento válido chama-se "negação do consequente" ou *modus tollens* (em latim, "modo de negar") [4], pois prova que uma causa ou condição não ocorreu usando como apoio a ausência da consequência delas [11].

Como ficou estabelecido nos parágrafos anteriores, o problema central da Lógica é analisar e formular argumentos e decidir sobre sua validade ou invalidade. Ou seja, não cabe à Lógica decidir se certos enunciados são verdadeiros ou falsos. Cabe agora dizer mais uma coisa que a Lógica não é: uma ferramenta para resolver problemas, como frequentemente é aceito [26]. Os processos psicológicos e criativos de um raciocínio dependem principalmente da experiência acumulada na resolução de certos tipos de problemas, onde a mente busca por analogia um caminho aceitável para se ir de um passo à outro em busca da solução. Cada passo dependendo exclusivamente da crença particular da pessoa de que aquele é o caminho certo para chegar a solução. Sendo que muitas das vezes a concentração se dispersa levando a mente para pensamentos totalmente irrelevantes ao problema. Estes processos, diferentes de um argumento e dos quais a Lógica não possui métodos e receitas, chama-se *inferência* [26], e é objeto de estudo da Heurística, matéria de preocupação dos psicólogos, filósofos e também matemáticos [23].

## 2.2 DESCOBERTA E JUSTIFICAÇÃO

Os conceitos de *descoberta* e *justificação* estão intimamente relacionados com os conceitos de *inferência* e *argumento*, respectivamente [26]. A descoberta é resultado de uma inferência e, quando alguém faz uma afirmação, ela está relacionada a pergunta "de que modo esta afirmação foi concebida?". Já a justificação de um enunciado é um argumento e, para uma afirmação qualquer, está relacionada a pergunta "que razões temos para aceitar esta afirmação como verdadeira?". Como é possível ver, são perguntas com respostas totalmente diferentes. Veja o famoso exemplo de Newton e a descoberta da Lei da Gravitação Universal. Segundo contam, ele ao se repousar sobre uma macieira, teve um *insight* sobre o funcionamento da gravidade ao ver uma maçã caindo no chão. Outro exemplo famoso e muito citado nos meios científicos é sobre a descoberta da estrutura dos anéis de benzeno por August Kekulé que, relatado pelo mesmo [13], inferiu isso depois de um sonho em que "uma cobra mordia o próprio rabo". Nenhum destes dois exemplos constitui de forma alguma uma maneira de justificar a veracidade da tais leis e fatos. A justificação só pôde ser feita mediante observações, experimentos e argumentos.

A confusão que ocorre em tratar os conteúdos do contexto da descoberta como se fossem do contexto da justificação é chamada de *falácia genética*, um exemplo de *falácia informal* (não ligada ao componente lógico do argumento) em que se considera fatores na descoberta, ou gênese, de um enunciado como fatos relevantes para a sua veracidade ou falsidade [26]. Por exemplo, se um nazista condenasse a teoria da relatividade porque Einstein era judeu. Ou afirmar que as “vias de Aquino” são falsas porque ele passou a acreditar em Deus quando criança através de seus pais. Porém, nem todos os argumentos que misturam estes dois contextos são inválidos. Existem formas corretas de se usar os chamados “argumentos de autoridade” e “argumentos contra a pessoa” [26], em que podemos apoiar ou rejeitar uma afirmação usando como apoio uma autoridade que *seja confiável e possua grande conhecimento com evidências confirmatórias a respeito de um assunto*. Estes, no caso, seriam exemplos de argumentos indutivos. Não consistiriam de provas cabais, mas de apoios à provável veracidade ou falsidade de uma afirmação. Autoridades com mesma competência ainda podem discordar. Como grande parte das informações e conhecimentos que temos do mundo vem de uma instrução obtida através terceiros, seria impossível desenvolver trabalhos científicos e transmitir conhecimentos sem citar alguma pessoa, obra ou instituição.

Muitas coisas podem influenciar no processo de descoberta, como: a condição social e religiosa, curiosidade, inteligência inata, imaginação fértil, poder de percepção, experiência e conhecimentos gerais. Nenhuma dessas coisas o estudo da Lógica pode substituir. Em novos termos, a lógica não ensina métodos para a descoberta e sim para a análise e construção de justificações. Não se deve esperar que o estudo da Lógica fornecerá um conjunto de regras para guiar o raciocínio na solução de problemas ou fornecer os passos a tomar nas inferências. A história da humanidade mostrou que importantes descobertas e soluções de problemas surgiram de livres jogos de imaginação e inteligência [26].

A Matemática, por exemplo, longe de ser somente um grande sistema hipotético dedutivo em que proposições provam as outras e assim por diante, ela é também um campo muito fértil para descobertas que envolvem as propriedades de seus entes, como propriedades de números primos, ângulos, etc. De fato, a par de um conhecimento básico, um matemático pode se colocar livremente a experimentar afirmações sobre algum ente matemático e fazer *conjecturas*. Uma conjectura, no campo matemático, seria um resultado enunciado a partir da consideração e verificação de casos particulares [27]. No contexto da justificação, a Matemática não é uma ciência experimental, portanto atividades deste tipo em que alguns exemplos são verificados não constituem provas de que as propriedades valham para todos os casos. Porém, o ato de conjecturar, é útil e abre caminho para descoberta de teoremas novos que serão incluídos no corpo da Matemática após serem apresentadas provas como justificativas. As inferências que são passos do processo de descoberta podem se tornar posteriormente argumentos para dar justificativa a um enunciado. Neste caso, tudo que se pode justificar já se sabe que é verdade, pois passou anteriormente pelo processo da descoberta. Cabe lembrar que uma justificação inadequada ou a falta dela não constitui uma prova de que o enunciado é falso, pois nada impede que posteriormente boas provas possam ser obtidas.

Serão mostrados agora, no âmbito da Aritmética, alguns exemplos que ilustram o contexto da descoberta e da justificação na Matemática, onde pode-se entender a diferença entre como um teorema foi concebido e que provas temos para aceitá-los como verdadeiros.

**Exemplo 2.2.1.** *(Uma conjectura que se mostrou falsa). Baseado na verificação de cinco casos (n=0, 1, 2, 3 e 4) o matemático Pierre de Fermat (1601-1665) conjecturou que todo número inteiro da forma* $2^{2^n}+1$*, conhecidos agora como números de Fermat, são primos. Porém, Euler mostrou em 1739 que o número* $2^{2^5}+1$*, isto é, para n=5, é divisível por 641. Isso provou que a conjectura de Fermat era falsa [20].*

Este se tornou um clássico exemplo de que não basta verificar que uma propriedade valha para alguns números para concluir que ela valha para todos. De modo geral, não é com experiências que se prova algo na Matemática.

**Exemplo 2.2.2.** *(Uma conjectura que se mostrou verdadeira). Usando seus métodos, Fermat mostrou que não existem inteiros positivos* $x$*,* $y$ *e* $z$*, tais que* $x^3+y^3=z^3$*. Indo além, ele afirmou, na margem de seu exemplar de Bachet da Aritmética de Diofanto, saber provar que o mesmo valia para qualquer potência a partir da terceira. Ou seja, que não existem inteiros positivos* $x$*,* $y$ *e* $z$*, tais que* $x^n+y^n=z^n$*, para* $n\geq 3$*. Porém, acrescentou que não poderia escrever a prova, pois a margem era estreita demais para isso. Este ficou conhecido como o "Último teorema de Fermat" e a busca de grandes matemáticos durante os séculos para provar esta afirmação levou a grandes desenvolvimentos e descobertas novas dentro da Aritmética. Somente 350 anos depois que, em 1995, o matemático inglês Andrew Wiles deu uma prova, encerrando este grande capítulo da história das ciências, em especial da Matemática [15].*

**Exemplo 2.2.3.** *(Conjecturas que ainda não foram provadas) [15].*

1. *Sempre existe um número primo entre* $n^2$ *e* $(n+1)^2$*.*

2. *Existem infinitos números primos na forma* $n^2-n+41$*.*

3. *A sequência de Fibonacci contém infinitos números primos.*

4. *Existem infinitos números primos gêmeos, isto é, números primos que diferem de 2 unidades. Por exemplo, (3, 5), (5, 7), (17, 19), (107, 109), etc.*

5. *(conjectura de Goldbach) Todo número natural par maior do que 3 pode ser escrito como a soma de dois primos.*

Estes exemplos são de questões em aberto, onde apesar de não terem sido provadas pelos métodos corretos, não deve-se concluir com isso sua falsidade.

Como a Matemática forma um corpo de conhecimentos com uma linguagem que é hipotético-dedutiva, podemos considerar razoavelmente que todo "conhecimento novo" ou dito "novo teorema", após provado, se mostra somente uma reformulação sintetizada que torna explícito os conhecimentos já estabelecidos por teoremas anteriores. Ou seja, uma teoria ou ramo da Matemática não passa de um grande "argumento". Porém, é de se aceitar que estas passagens nem sempre são triviais e o papel da demostração é genuinamente uma tarefa esclarecedora. Outra situação importante que envolve as demonstrações é o fato de que a criação de uma técnica para uma demonstração específica de um ramo da Matemática pode também ser útil em outros ramos.

# 3 TIPOS DE ARGUMENTAÇÃO

Neste capítulo serão tratados os argumentos dedutivos e os indutivos, mostrando suas principais características e propriedades. Na *dedução*, aplicada à Matemática, será mostrado como funciona o *método axiomático*. Na *indução*, aplicada às teorias científicas em geral, serão ilustrados alguns processos causais e a falseabilidade.

## 3.1 DEDUÇÃO

É muito comum ver em livros de Matemática ou outras fontes a *dedução* sendo definida como um argumento que "parte de uma afirmação geral e conclui uma particular" [27]. O conceito de *generalidade* expressa um Todo, isto é, uma afirmação para todos os elementos de um conjunto. Já o conceito de *particularidade* se refere a uma parte qualquer deste conjunto de coisas, mesmo que seja somente um dos elementos deste conjunto. Quando estamos nos referindo a exatamente um elemento, é o que expressa o conceito de *singularidade*. No caso, a definição comum de dedução se refere a argumentos em que, concluem-se propriedades de uma parte de um conjunto a partir de premissas que falam de todos os elementos deste conjunto. De fato, a maioria dos argumentos dedutivos conhecidos são desta forma, mas a dedução não é somente isso. Dedução é melhor definida como um argumento em que **se as premissas forem verdadeiras, então a conclusão também será**. Ou de outra forma, um argumento formalizado em que, qualquer que seja a interpretação, **não existe o caso das premissas serem verdadeiras e a conclusão falsa**. Uma dedução é um argumento *válido*. Um argumento inválido é um argumento indutivo ou um erro de dedução. No primeiro caso a conclusão pode ter uma boa probabilidade de ser verdadeira se as premissas também forem, no segundo a veracidade da conclusão independe das premissas, como foi mostrado no Capítulo 2.

Os exemplos a seguir mostram três casos de dedução, sendo que dois deles não partem de afirmações gerais para particulares.

**Exemplo 3.1.1.** *(Do geral para o particular)*

1. *Todo homem é mortal.*
2. *Sócrates é um homem.*
3. *Portanto, Sócrates é mortal.*

**Exemplo 3.1.2.** *(Do geral para o geral)*

1. *Todo mamífero tem um coração.*
2. *Todo cavalo é um mamífero.*
3. *Portanto, todo cavalo tem um coração.*

**Exemplo 3.1.3.** *(Do particular para o particular)*

1. *Alguns gregos são matemáticos.*
2. *Portanto, Alguns matemáticos são gregos.*

As premissas de um argumento dedutivo visam dar uma **prova** para a conclusão. Ou seja, a veracidade da conclusão de uma dedução possui uma relação de *necessidade* com a veracidade das premissas. Porém, a conclusão de uma dedução não é um conhecimento novo. Toda informação expressada na conclusão já está de forma implícita expressada nas premissas. Por isso ocorre a necessidade da conclusão ser verdadeira se as premissas também forem. Isso de certa forma é uma desvantagem da dedução, pois não podemos com ela alcançar conhecimentos novos do mundo. Só se prova algo quando já se sabe que é verdade. O papel da dedução no entanto é sintetizar, reformular ou tornar óbvio alguma informação. Isto é muito útil, pois nem todas as informações são trivialmente aceitas como verdadeiras assim que enunciadas e muitas delas possuem a necessidade de serem verdadeiras se outras anteriores supostamente são. Esta elucidação é o principal papel da dedução [26].

No âmbito da Matemática é preciso *definir* conceitos e *provar* as propriedades destes conceitos. Definir um conceito é explicá-lo usando termos que já definem conceitos anteriores e provar uma propriedade ou uma afirmação é deduzi-la de afirmações provadas anteriormente usando regras de argumentação válidas fornecidas pala Lógica. Porém, não é possível fazer este regresso de definições e provas *ad infinitum* [12].

Um matemático também não pode cometer as mesmas circularidades que se encontram as vezes em definições de dicionários. Por exemplo, não seria bom definir "bola" como "algo esférico" e ao mesmo tempo "esférico" como "algo em forma de bola". Por isso parte-se de poucos termos sem definição, chamados **conceitos primitivos** e usa-se estes conceitos para definir os outros que serão introduzidos. O propósito é dar uma definição exata que tire qualquer ambiguidade. Cabe lembrar que os conceitos matemáticos podem não só representar *entes* matemáticos como "ângulo", "raiz", por exemplo, mas também *relações* como "pertence", "é maior que", etc.

As provas também devem partir de poucas afirmações *sem provas* (hipóteses básicas) para que se possa deduzir as outras. Estas afirmações, chamadas **axiomas** ou **postulados**, possuem em sua estrutura os conceitos primitivos e, as afirmações ou propriedades provadas por elas são chamadas de **teoremas**. Uma prova matemática então pode ser entendida como **uma dedução onde cada passo toma como premissa um teorema, um axioma, uma definição ou um conceito primitivo**. Por isso a necessidade de se aprender a fazer argumentos válidos, fazendo com que o estudo da Lógica se torne propedêutico.

**Exemplo 3.1.4.** *Desenvolvimento axiomático da Geometria Plana [17].*

1. *Termos indefinidos: "reta" e "ponto".*

2. *Relações indefinidas: "está em" e "entre".*

3. *Alguns axiomas:*

   a) ***Axioma de incidência**: Dois pontos diferentes estão em uma e somente uma reta.*

   b) ***Axioma de ordem**: Dados três pontos quaisquer que estão uma reta, não há mais do que um que está entre os outros dois.*

**Exemplo 3.1.5.** *Desenvolvimento axiomático da Teoria dos Conjuntos [17].*

1. *Termos indefinidos: "elemento" e "conjunto".*

2. *Relação indefinida: "pertence".*

3. *Alguns axiomas:*

   a) ***Axioma de extensão**: Dois conjuntos $A$ e $B$ são iguais se cada elemento de $A$ pertence a $B$ e cada elemento em $B$ pertence a $A$.*

   b) ***Axioma de especificação**: Seja $A$ um conjunto qualquer e seja $P$ uma propriedade qualquer que possa ser atribuída a elementos de $A$. Existe assim um conjunto $B$ cujos elementos pertencem a $A$ e possuem tal propriedade.*

A organização e rigor axiomáticos na Matemática ficou bem estabelecida no fim do século XIX e início do XX, após a contribuição de grandes matemáticos como Cauchy, Weierstrass, Bolzano, Cantor, Frege, Hilbert, Bourbaki e outros [5]. Porém o método axiomático é muito mais antigo que isso e teve seu início na Grécia antiga com Os Elementos de Euclides, a primeira e mais influente obra matemática a expor da forma axiomática a Geometria. O método exposto por Euclides em sua obra tornou-se admirado por vários pensadores de várias áreas do conhecimento por carregar o peso de todas as suas afirmações sobre poucas e firmes bases. Tentou-se seguir seu modelo em várias outras ciências, por exemplo a Física por Arquimedes. Porém, somente a Geometria manteve este status até dois séculos atrás com o início do uso do método axiomático pela Aritmética [21].

Por cerca de dois mil anos acreditou-se que o mundo era como exposto pela geometria euclidiana, pois seus postulados eram intuitivos, tinham significação costumeira dos termos e tratavam de um mundo visível, com exceção de um que curiosamente não era tão evidente assim aos antigos. O famoso "axioma das paralelas":

> "E, caso uma reta, caindo sobre duas retas, faça os ângulos interiores e do mesmo lado menores do que dois retos, sendo prolongada as duas retas, ilimitadamente, encontrarem-se no lado no qual estão os menores do que dois retos." [5]

Ele afirmava, não nos mesmos termos, mas algo logicamente equivalente a "por um ponto só se pode traçar uma única reta paralela a uma reta dada"[7]. Tentou-se então por séculos provar este axioma através dos outros. Achava-se que ele seria um teorema e não um axioma. Somente no século XIX com os trabalhos de Gauss, Bolyai, Lobachewsky e Riemann é que se ficou provado a *impossibilidade* de provar o axioma das paralelas a partir dos outros [21]. Mais que isso, a hegemonia de Euclides na Geometria foi derrubada, passando-se a construir outros sistemas geométricos com a mudança de certos axiomas. Destruiu-se então a crença de que os axiomas devem ser estabelecidos por sua auto-evidência e o trabalho do matemático puro passou a ser o de *deduzir teoremas de hipóteses postuladas* e não cabe a ele decidir se os axiomas são verdadeiros ou não. Este é o significado do famoso epigrama de Russell:"a matemática pura é o assunto em que não sabemos acerca do que estamos falando e se o que estamos dizendo é verdade" [21].

Esta revisão na Geometria incitou uma revisão em outras áreas axiomatizadas. O significado costumeiro dado aos termos, como nos exemplos anteriores, ajudam de fato a descobrir e aprender os teoremas, pois sentimos que entendemos suas várias inter-relações e facilita a elaboração de seus enunciados. Porém, a validade de um argumento matemático não depende de qualquer significado dado aos termos. Fugindo dos significados familiares dos termos, os únicos que precisamos considerar são os que estão expressos nos axiomas que os contém, de tal forma que buscar-se-á como tarefa primordial explorar as puras relações lógicas entre os enunciados [21].

Ernest Nagel, no livro a "Prova de Gödel", faz uma analogia interessante entre a Matemática e o jogo de xadrez que deixa em evidência toda a estrutura e organização dessa ciência exata.

> "O xadrez é jogado com 32 peças de propósitos especificados, sobre um tabuleiro dividido em 64 quadrados onde as peças podem se movimentar segundo regras fixadas. O jogo obviamente pode ser desenvolvido sem que

> se atribua qualquer 'interpretação' às peças ou as várias posições sobre o tabuleiro, embora uma tal interpretação possa ser fornecida, caso se deseje. Por exemplo, poderíamos estipular que um dado peão de representar um certo regimento em um exército, que uma certa casa representa uma certa região geográfica assim por diante. Mas semelhantes estipulações (ou interpretações) não são costumeiras; tampouco as peças nem as casas nem as posições das peças sobre o tabuleiro significam algo *fora* do jogo. Neste sentido, as peças e suas configurações sobre o tabuleiro são 'isentas de significado'. Assim o jogo é análogo a um cálculo matemático formalizado. As peças e as casas do tabuleiro correspondem aos signos elementares do cálculo; as posições legais das peças sobre o tabuleiro, às formulas do cálculo; as posições iniciais das peças no tabuleiro, aos axiomas ou fórmulas iniciais do cálculo; as as posições subsequentes das peças no tabuleiro, às fórmulas derivadas dos axiomas (*i.e.*, aos teoremas); e as regras do jogo, às regras de inferência (ou derivação) para o cálculo." [21]

A intensa formalização da matemática ajudou a derrubar as barreiras da interpretação habitual que limitavam o desenvolvimento de novos sistemas de postulados. De fato, muitos deles, apesar de não poderem ser aplicados de forma intuitiva como a Geometria e a Aritmética, consistem de sistemas de grande valor e interesse matemático. A intuição (isto é, o senso comum) não é um guia seguro para as ciências e não pode ser considerada como um critério de verdade e fecundidade para as teorias. Como afirma Nagel:

> "A intuição é, em primeiro lugar, uma faculdade elástica: nossos filhos não terão provavelmente dificuldade em aceitar como intuitivamente óbvios os paradoxos da relatividade, assim como nós não nos assustamos com ideias que eram tidas totalmente como não intuitivas há um par de gerações." [21]

## 3.2 INDUÇÃO

Diferente do argumento dedutivo, o argumento indutivo não serve para dar uma prova, no sentido lógico do termo, a conclusão. Suas premissas servem para dar **evidências** ou sustentar uma provável veracidade da conclusão. Portanto, podemos dizer que os argumentos indutivos são *inválidos*, pois é possível as premissas serem verdadeira e a conclusão falsa.

**Exemplo 3.2.1.** *Argumento indutivo*

1. *Todos os cavalos observados até hoje tinham um coração.*

2. *Portanto, todo cavalo tem um coração.*

No entanto, não devemos confundir a invalidade do argumento indutivo com uma aparente *inutilidade*. O conceito de validade, como já foi dito antes é um conceito aplicado à deduções, onde ou as premissas provam a conclusão ou não provam. Não existe meio termo. Um argumento inválido poderia ser também um erro de dedução, pois é obvio que neste caso as premissas não provam a conclusão. No caso do argumento indutivo, mesmo as premissas não provando a conclusão, elas podem ser relevantes para sustentar que a conclusão é verdadeira. Quanto melhor forem as premissas usadas, mais forte será esta relação e mais provável a conclusão se mostrará. A conclusão não possuirá uma necessidade de ser verdadeira caso as premissas também sejam. Dizemos neste caso que a conclusão é *contingente*. Ou seja, poderia ser ou não ser verdadeira (com diferentes graus de probabilidade) [4].

Longe de serem inúteis, a desvantagem de não possuir conclusão necessária é compensada com o fornecimento de uma informação nova que não está implícita nas premissas. Podemos ver no exemplo que a premissa 1 faz uma afirmação para somente uma parcela observada de cavalos. De fato, não seria prático observar se todos os cavalos do mundo possuem realmente um coração. Porém, a conclusão afirma que *todos* os cavalos, incluindo aqueles que não foram observados, possuem um coração. Esta afirmação geral com certeza não se encontra nas premissas, mas é uma conclusão razoável e muito provavelmente é verdadeira.

Os argumentos indutivos são largamente utilizados nas ciências naturais, biológicas e humanas onde se tratam de afirmações contingentes e ajudam à tornar prático concluir, com grande probabilidade, através de experimentos particulares, lei gerais do universo pesquisado. Esta útil forma de conceber conhecimentos novos do mundo possui também uma fraqueza sutil. No exemplo anterior, se descobríssemos apenas *um* cavalo que não tivesse coração, isso seria o suficiente para mostrar que a conclusão é falsa. A busca destes chamados **contra-exemplos** é o que se chama de **falsear** uma teoria. O filósofo austríaco Karl Raimund Popper (1902-1994) foi um grande crítico do método indutivo como demarcador da ciência. Segundo a concepção tradicional de ciência, o ponto de partida são os dados observáveis e empíricos. Estes dados são acumulados e transformam-se em hipóteses que, após *verificadas*, passam a se tornar teorias através do método indutivo. Porém, como vimos, não há nenhuma necessidade lógica que justifique "saltar" de uma parcela observável de dados para leis gerais. No seu livro *Logik der Forschung* ou "A Lógica da Descoberta Científica" [24], uma obra mestra de nosso tempo, ele defende que a verificação não deve ser o critério para a demarcação do que é científico ou não e, ao invés disso, toda boa teoria científica é aquela que prevê sua *falseabilidade* e resiste a estes testes negativos.

Os argumentos indutivos podem ser divididos em três grandes grupos e em geral não são somente argumentos que "partem de uma afirmação particular e conclui uma geral” como são frequentemente definidos. Uma indução é um argumento em que **se as premissas são verdadeiras, a conclusão provavelmente também será** .

Temos em um grupo os **argumentos analógicos**. Estes se baseiam na ideia de que se duas coisas compartilham algumas propriedades relevantes, provavelmente compartilharão outras propriedades.

**Exemplo 3.2.2** (Argumento analógico)**.** *Antes, eu tive dois carros da marca X e eles apresentavam um alto consumo de combustível e precisavam de poucos reparos. Recentemente comprei outro carro da marca X. Portanto, terei um alto gasto com combustível e precisarei de poucos reparos.*

Um outro grupo de argumentos indutivos é o mais comumente usado. As **inferências estatísticas**. Neste grupo, um padrão frequentemente observado é usado como apoio à generalização por um argumento que usa regularidade estatística.

**Exemplo 3.2.3** (Inferência estatística)**.** *Um levantamento com 1000 estudantes universitários brasileiros mostrou que 80% deles sonham em ganhar mais dinheiro em suas vidas que seus pais. Portanto, a vasta maioria de todos os estudantes universitários espera ganhar mais dinheiro em suas vidas que seus pais.*

Por último temos os **argumentos causais**, onde ocorre uma inferência baseada no conhecimento de causa e efeito.

**Exemplo 3.2.4.** *A luminária do meu quarto não estava funcionando. Eu troquei a lâmpada por uma que funcionava e mesmo assim ela não acendeu. Levei ela para um outro cômodo da casa onde a tomada funcionava e mesmo assim ela não acendeu. Portanto, o defeito deve estar nos fios da luminária.*

Observe neste exemplo que se considera várias causas possíveis para uma única consequência, o não funcionamento da luminária. A eliminação das causas possíveis e enumeradas é um dos métodos básicos propostos pelo filósofo inglês John Stuart Mill (1806-1873) para o estabelecimento de relações causais. Seus métodos são largamente usados em pesquisas científicas, por exemplo, nas pesquisas médicas [22].

Uma observação deve ser feita aqui. Não se deve confundir a indução apresentada neste capítulo com a chamada **indução matemática** que, apesar de levar o nome de “indução”, é uma forma de dedução (v. Apêndice).

## 3.3 QUADRO COMPARATIVO

| **Quadro comparativo** | | |
|---|---|---|
| | **Argumentos dedutivos** | **Argumentos indutivos** |
| Papel das premissas | *Provar a conclusão.* | *Evidenciar a conclusão.* |
| Papel informativo da conclusão | *Não é um conhecimento novo que já não esteja implícito nas premissas.* | *É um conhecimento novo que não está nas premissas.* |
| Relação premissa-conclusão | *Se as premissas são verdadeiras, a conclusão necessariamente é verdadeira.* | *Se as premissas são verdadeiras, a conclusão provavelmente é verdadeira.* |
| **Vantagens** | *A necessidade da conclusão.* | *A conclusão expressa conhecimento novo.* |
| **Desvantagens** | *Não produz conhecimentos novos.* | *A conclusão é contingente.* |

# 4 CÁLCULO PROPOSICIONAL

Aqui se inicia o estudo formal da Lógica, onde em seis seções serão apresentados os fundamentos da linguagem e operações do Cálculo Proposicional, que será de fundamental importância teórica para a justificação das técnicas dedutivas normalmente utilizadas na Matemática. É neste capítulo que será introduzido de maneira formal o conceito de *argumento* e *validade*, assim como o critério formal para decidir se um argumento é válido ou não, apresentando assim as principais equivalências lógicas e passos válidos que podem ser usados durante uma demonstração.

## 4.1 ASPECTOS GERAIS DAS PROPOSIÇÕES

Neste estudo, uma *proposição* será classificada como um conceito primitivo. Ou seja, não daremos uma definição para este termo. No entanto, elucidaremos seu significado apresentando suas principais propriedades para os propósitos de estudo do Cálculo Proposicional clássico. Primeiro podemos determinar que uma *sentença* em uma linguagem natural ou artificial é uma sequência de símbolos gramaticalmente correta e completa. É a fórmula da linguagem. A *proposição*, no entanto, é um conceito abstrato que representa o conteúdo informacional de uma sentença, isto é, o significado ou ideia contido na sentença. Uma proposição é o conteúdo informativo expressado por uma sentença declarativa que **afirma fatos** ou fazem **juízos sobre coisas**. Portanto, uma proposição não poderá ser representada por uma palavra isolada, por locução substantiva, uma pergunta, uma exclamação ou uma ordem.

**Exemplo 4.1.1.** *Sentenças ou expressões linguísticas.*

1. *A casa é rústica.*
2. $2 + 3 \geq 6$.
3. *Casa.*
4. *A casa rústica.*
5. *Quem está aí?*
6. *Atenda a porta.*
7. *Bem vindo!*

Neste exemplo somente (1) e (2) expressam proposições.

A proposição, por ser uma afirmação informativa, possui a característica se ser verdadeira ou falsa em um determinado contexto, os chamados *valores-verdade*, e este é o primeiro dos três princípios que servirão de base para o Cálculo Proposicional. São eles:

- **Princípio da bivalência (PB)**: Os valores-verdade que uma proposição pode assumir são *verdadeiro* ou *falso*.
- **Princípio do terceiro excluído (PTE)**: Uma proposição *sempre* é verdadeira *ou* falsa.
- **Princípio da não contradição (PNC)**: Uma proposição *nunca* é verdadeira *e* falsa.

Estes princípios foram formulados pela primeira vez pelo filósofo grego Aristóteles (384-322 a.C.) na obra *Metafísica* [3]. O **PNC** no livro IV e o **PTE** no livro X. Esta portanto não é a formulação original destes princípios. Podem ser encontradas muitas outras formulações equivalentes. O **PB** indica que uma proposição poderá ser *verdadeira* ou *falsa* e o **PTE** complementa esta informação afirmando que qualquer proposição *sempre* terá um desses valores, isto é, não pode acontecer de uma proposição não ter nenhum desses valores ou, equivalentemente, ter um terceiro valor qualquer (por isso o nome "terceiro excluído"). Logo, sempre que uma proposição não for verdadeira, ela será falsa e, sempre que ela não for falsa, será verdadeira. O aspecto final de uma proposição é completado com o **PNC** afirmando que mesmo que uma proposição seja verdadeira ou falsa ela nunca terá estes dois valores concomitantemente. Resumindo, **uma proposição é sempre verdadeira ou falsa e nunca ambas**.

Estes princípios definem intuitivamente uma função $I : P \to \{V, F\}$ entre o conjunto das proposições $P$ e o conjunto dos valores-verdade $\{V, F\}$, onde $V$ é "verdadeiro" e $F$ é "falso".

- **PB**: Este princípio define que o contradomínio é formados apenas pelos valos V e F.
- **PTE**: Este princípio define que toda proposição, sem exceção, está associada a algum destes valores-verdade. Ou seja, $P$ é o domínio.
- **PNC**: Este princípio define que cada proposição está associada a somente um valor-verdade.

Denotaremos por $I(p)$ o valor-verdade ou *interpretação* da proposição $p$ e diremos $I(p) = V$ se a $p$ for verdadeira e $I(p) = F$ se $p$ for falsa. Uma *interpretação* $I$ para uma linguagem consistem em dois componentes:

- **Domínio de discurso**: O *domínio de discurso* da interpretação $I$ é o conjunto das coisas sobre a qual $I$ interpreta a linguagem como estando falando. Por exemplo, quando dizemos "para todo $x$" ou "para algum $x$", estamos nos referindo, de acordo com a interpretação $I$, ao "$x$" elemento do *domínio de discurso*.

- **Denotação**: Para cada palavra, expressão ou símbolo não lógico em uma sentença existe um elemento do *domínio de discurso* ao qual ela denota, isto é, representa seu significado.

$I(p) = V$ equivale a dizer que na interpretação $I$ os indivíduos do *domínio de discurso* que as constantes ou símbolos na sentença de $p$ denotam encontram-se relacionados na mesma forma que a relação da sentença expressa.

As proposições que não respeitam algum destes princípios não serão consideradas neste estudo do Cálculo Proposicional. Enunciados vagos, enunciados a respeito do futuro e enunciados paradoxais não serão considerados proposições neste sistema. Como exemplos abaixo.

**Exemplo 4.1.2.** *"A água está* ***morna****". O conceito de morno e tépido, assim como beleza, tonalidades de vermelhos, alto e baixo não são bivalentes, isto é, possuem diferentes "graus" de verdade e são estudados com mais precisão em um ramo da Lógica não-clássica denominado Lógica Multivalorada [10].*

**Exemplo 4.1.3.** *"Amanhã irá ocorrer um assalto no Banco Central". Este enunciado não pode ser verdadeiro e nem falso, pois as condições objetivas sob as quais poderíamos determinar se ele é verdadeiro ou falso ainda não ocorreram. Ela fere o* ***PTE*** *por não possuir nenhum dos valores-verdade estabelecidos pelo* ***PB*** *ou possuir um terceiro valor, por exemplo: "talvez", que o defina melhor no presente.*

**Exemplo 4.1.4.** *"Este enunciado é falso". Esta é a famosa* ***antinomia do mentiroso****. Se este enunciado for verdadeiro, então ele é falso e se ele for falso, então será verdadeiro, fato este que fere o* ***PNC****.*

Existem vários sistemas lógicos habilitados a trabalhar com estes tipos de enunciados e argumentos que os contenham. Estes sistemas, como podemos ver, podem ser concebidos excluindo de seu corpo axiomático algum dos princípios que serão utilizados neste estudo e, conseguem trazer importantes e férteis contribuições para a Lógica Moderna. O sistema de Cálculo Proposicional que estudamos aqui faz parte do que é chamado de *Lógica Clássica*, desenvolvida inicialmente por Aristóteles e dois milênios depois aprimorada pelo matemático George Boole (1815-1864) e sistematizada em sua forma final pelo filósofo e matemático Gottlob Frege (1848-1925) [22]. As Lógicas que rejeitam algum dos três princípios acima ou acrescentam outros elementos para tratar de sentenças em que a *Lógica Clássica* não tem o poder de abordar são chamadas *Lógicas Não-Clássicas*, tendo como alguns exemplos a *Lógica Difusa* pelo matemático Lofti Zadeh em 1960 [14], a *Lógica Modal* [22] e a *Lógica Paraconsistente* [8].

## 4.2 CONECTIVOS: PROPOSIÇÕES SIMPLES E COMPOSTAS

**Definição 4.2.1** (Conectivos)**.** *Palavras ou expressões usadas para formar proposições a partir de uma ou mais proposições.*

No cálculo Proposicional são utilizados cinco conectivos, como resumido na tabela abaixo.

| **Conectivo** | **Símbolo** | **Denominação** |
|---|---|---|
| É falso que ... | $\neg$ | Negação |
| e | $\wedge$ | Conjunção |
| ou | $\vee$ | Disjunção |
| Se ..., então ... | $\rightarrow$ | Condicional |
| ... se, e somente se, ... | $\leftrightarrow$ | Bicondicional |

As proposições são divididas entre *proposições simples* (ou *atômicas*) e *proposições compostas* (ou *moleculares*).

**Definição 4.2.2** (Proposição simples)**.** *Uma proposição que não contém conectivos.*

As *proposições simples* são representadas pelas letras minúsculas p, q, r, ..., chamadas *letras proposicionais atômicas.*

**Exemplo 4.2.1.** *(Exemplos de proposições simples):*

- *p: "Carlos é careca".*
- *q: "Thiago é estudante".*
- *r:* $5 + 7 = 11$*.*

**Definição 4.2.3** (Proposição composta)**.** *Uma proposição que contém algum conectivo.*

As *proposições compostas* são representadas pelas letras maiúsculas P, Q, R, ..., chamadas *letras proposicionais moleculares.*

**Exemplo 4.2.2.** *(Exemplos de proposições compostas):*

- *P: " **É falso que** Carlos é careca".*
- *P: "Carlos é careca **ou** Leandro está enganado".*
- *Q: "Thiago é estudante **e** (Thiago) tem uma cachorra".*
- *R: **Se*** $5 + x = 11$*, **então*** $x = 7$*.*

Visto que cada uma delas é formada por uma ou mais proposições simples modificadas ou ligadas por conectivos.

O valor-verdade de uma proposição composta é univocamente estabelecido pelo valor-verdade das proposições simples componentes de acordo com as regras de operação dos conectivos.

A **negação** é um conectivo *monádico*, isto é, que modifica somente uma proposição seja ela simples ou composta. As vezes recebe também o nome de *modificador* em vez de conectivo. Ela é usada incluindo o símbolo "$\neg$" antes da letra proposicional. Assim, se temos uma proposição $p$, sua negação será denotada por $\neg p$ e poderá ser lida como "não é o caso que p", "é falso que p" ou simplesmente "não p". O símbolo de negação pode ser incluído mais de uma vez na frente de uma letra proposicional. Por exemplo $\neg\neg p$ pode ser lido como "não é o caso que é falso que $p$" e assim por diante.

**Exemplo 4.2.3.** *Negação.*

- *$p$: "O mordomo é o culpado".*
- *$\neg p$: "O mordomo não é culpado".*
- *$\neg\neg p$: "É falso que o mordomo não é culpado".*
- *$\neg\neg\neg p$: "Não é o caso que é falso que o mordomo não é culpado".*
- *$q$: $5x = 100$.*
- *$\neg q$: $5x \neq 100$*
- *$r$: "$f$ é contínua".*
- *$\neg r$: "$f$ é descontínua".*

A principal propriedade semântica da negação é enunciada por $V_1$: **se $p$ for verdadeira, $\neg p$ é falsa e se $p$ é falsa $\neg p$ é verdadeira**. O que nos permite construir a tabela abaixo.

| $p$ | $\neg p$ |
|---|---|
| V | F |
| F | V |

Sendo $I(p)$ a denotação para o valor-verdade da proposição $p$, a negação fica portanto determinada pelas equações $\neg V = F$, $\neg F = V$ e $I(\neg p) = \neg I(p)$.

No exemplo acima, se o valor-verdade da proposição $p$ fosse verdadeiro, quer dizer $I(p) = V$, então o valor-verdade de $\neg\neg\neg p$, isto é $I(\neg\neg\neg p)$, poderia ser calculado por

$$\begin{aligned} I(\neg\neg\neg p) &= \neg\neg\neg V \\ &= \neg\neg F \\ &= \neg V \\ &= F \end{aligned} \tag{4.1}$$

Serão tratados agora da sintaxe e semântica dos conectivos *diádicos*, isto é, da denotação e interpretação dos conectivos que formam proposições compostas a partir de exatamente *duas* outras proposições, seja cada uma delas simples ou composta. São eles a **conjunção**, a **disjunção**, o **condicional** e o **bicondicional**. Estes conectivos são utilizados sendo incluídos entre as duas letras proposicionais.

Desta forma, sejam $p$ e $q$ duas proposições. Sua **conjunção** é denotada por $p \wedge q$ e se lê "$p$ e $q$".

**Exemplo 4.2.4.** *Conjunção.*

- *$p$: "Luíza estuda Lógica".*
- *$q$: "Nayara estuda Matemática".*
- *$p \wedge q$: "Luíza estuda Lógica e Nayara estuda Matemática".*
- *$r$: "2 é par".*
- *$s$: "2 é primo".*
- *$r \wedge s$: "2 é par e 2 é primo".*

A propriedade semântica da conjunção é enunciada por $V_2$: $p \wedge q$ **só será verdadeira se $p$ for verdadeira e $q$ for verdadeira**. Usando esta propriedade e o **PTE** podemos construir a tabela abaixo com todas as interpretações possíveis para as duas proposições componentes e sua conjunção.

| $p$ | $q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | F |

A conjunção fica portanto determinada pelas equações $V \wedge V = V$, $V \wedge F = F \wedge V = F \wedge F = F$ e $I(p \wedge q) = I(p) \wedge I(q)$.

A tabela indica que se ao menos uma proposição componente da conjunção for falsa, a conjunção será falsa. Por exemplo, a proposição “3 é par **e** 3 é primo” é falsa, pois é uma conjunção entre a proposição $p$: “3 é par” e $q$: “3 é primo” e, neste caso, $p$ é falsa.

A **disjunção** tem características semelhantes à conjunção. Dadas as proposições $p$ e $q$, sua disjunção é denotada por $p \vee q$ e se lê “p ou q”.

**Exemplo 4.2.5.** *Disjunção.*

- *$p$: “x pertence a A”.*
- *$q$: “x pertence a B”.*
- *$p \vee q$:“x pertence a A ou x pertence a B”.*

A propriedade semântica da disjunção é $V_3$: $p \vee q$ **só é falsa se** $p$ **for falsa e** $q$ **for falsa**. Junto com o **PTE** construímos a tabela abaixo com todas as interpretações possíveis para cada proposição componente e a disjunção.

| $p$ | $q$ | $p \vee q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | V |
| F | V | V |
| F | F | F |

A disjunção fica portanto determinada pelas equações $V \vee V = V \vee F = F \vee V = V$, $F \vee F = F$ e $I(p \vee q) = I(p) \vee I(q)$.

A tabela mostra que se no *mínimo* uma proposição componente for verdadeira, a disjunção também será verdadeira. Ou seja, se $p$ for verdadeira, se $q$ for verdadeira ou se ambas, $p$ e $q$, forem verdadeiras, a disjunção $p \vee q$ se torna verdadeira. Dessa forma, diferente da conjunção, a proposição “3 é par **ou** 3 é primo” é verdadeira, já que de fato 3 é primo.

O fato de não ser excluído a possibilidade de ambas as proposições componentes serem verdadeiras é o que caracteriza o “ou” da conjunção como “ou” *inclusivo* (no sentido de “e/ou”). O “ou” *exclusivo* aparece naturalmente em contextos como o da proposição “hoje é sábado **ou** hoje é domingo”, onde não há possibilidade de hoje “ser sábado” e “ser domingo” simultaneamente. De forma geral, o “ou” utilizado no Cálculo Proposicional e também na Matemática é *inclusivo*, a não ser que se diga o contrário ou o contexto não permita.

Este problema aparece porque no português existe somente uma palavra (“ou”) para designar o “ou” *inclusivo* e o *exclusivo*. Em latim, por exemplo temos as palavras “vel” e “aut” para “ou” *inclusivo* e *exclusivo*, respectivamente. Para superar esta dificuldade, será usada a forma “ou ... ou ...” para designar o “ou” *exclusivo*. Assim, quando for dito “**ou** Paulo é professor **ou** Paulo é médico”, por exemplo, estaremos excluindo a possibilidade dele ser “professor” e “médico” simultaneamente. A proposição “ou $p$ ou $q$” poderá ser formalizada como $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$. Se tomarmos $p$: “Paulo é professor” e $q$: “Paulo é médico”, esta formalização se traduz literalmente como “Paulo é professor ou Paulo é médico e é falso que Paulo é professor e Paulo é médico”.

O conectivo **condicional** já foi apresentado no Capítulo 2. Porém, ele sem dúvida é de suma importância para a Lógica e a Matemática e merece uma explanação mais completa. Dadas as proposições $p$ e $q$, temos o condicional $p \to q$ ou $q \to p$. Vimos que a proposição antes do “$\to$” é o *antecedente* e a proposição que vem depois é o *consequente*. A tabela abaixo lista as várias formas de se ler ou expressar um condicional e será útil para a análise de enunciados de teoremas e suas demonstrações, que apresentam em grande parte estas formas.

| $p \to q$ |
|---|
| Se $p$, então $q$. |
| $p$ implica $q$. |
| Se $p$, $q$. |
| Dado $p$, $q$. |
| Quando $p$, $q$. |
| $p$ somente se $q$ |
| $p$ é condição suficiente para $q$. |
| $q$ se $p$. |
| $q$, pois $p$. |
| $q$ quando $p$. |
| $q$ desde que $p$. |
| $q$ sempre que $p$. |
| $q$ é condição necessária para $p$. |

Tomando como exemplos proposições sobre triângulos na Geometria Plana como $p$: “T é equilátero” e $q$: “T é isósceles”. O teorema que afirma $p \to q$ pode ser encontrado expressado, com pequenas modificações, nas formas apresentadas na tabela acima, além de poder ser utilizado em qualquer uma dessas formas em um passo de uma demonstração. A tabela a seguir ilustra isso.

| $p \to q$ |
|---|
| **Se** T é equilátero, **então** T é isósceles. |
| T ser equilátero **implica** que T é isósceles. |
| **Se** T é equilátero, T é isósceles. |
| **Dado** que T é equilátero, T é isósceles. |
| **Quando** T é equilátero, T é isósceles. |
| T é equilátero **somente se** T é isósceles |
| T ser equilátero **é condição suficiente para** T ser isósceles. |
| T é isósceles **se** T é equilátero. |
| T é isósceles, **pois** T é equilátero. |
| T é isósceles **quando** T é equilátero. |
| T é isósceles **desde que** T seja equilátero. |
| T é isósceles **sempre que** T é equilátero. |
| T é isósceles **é condição necessária para** T é equilátero. |

Existem algumas proposições que podem ser associadas à uma proposição condicional. Elas são obtidas negando ou mudando a posição do antecedente e do consequente em relação ao conectivo. São elas a *recíproca*, a *contrária* e a *contrapositiva*, como mostra a tabela abaixo.

| Proposição associada | Formalização | Exemplo |
|---|---|---|
| Condicional | $p \to q$ | Se T é equilátero, então T é isósceles. |
| Recíproca | $q \to p$ | Se T é isósceles, então T é equilátero. |
| Contrária | $\neg p \to \neg q$ | Se T não é equilátero, então T não é isósceles. |
| Contrapositiva | $\neg q \to \neg p$ | Se T não é isósceles, então T não é equilátero. |

A propriedade semântica do condicional é enunciada por $V_4$: $p \to q$ **só é falsa quando** $p$ **é verdadeiro e** $q$ **é falso**. Esta propriedade junto com o **PTE** nos leva a tabela abaixo dos valores-verdades do condicional em função dos possíveis valores-verdade do antecedente e consequente.

| $p$ | $q$ | $p \to q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

O condicional fica portanto determinada pelas equações $V \to V = F \to V = F \to F = V$, $V \to F = F$ e $I(p \to q) = I(p) \to I(q)$.

As duas últimas linhas da tabela não são muito intuitivas, mas devemos pensar no condicional “se $p$, então $q$” querendo dizer que **sempre que** $p$ **é verdadeiro, também é**

**verdadeiro** $q$ e não que é *necessário* que $p$ seja verdadeiro, mas sim que é *suficiente*. Ou seja, $p \rightarrow q$ assegura que: **é falso o caso em que** $p$ **e não** $q$. Observe que esta última proposição grifada pode ser formalizada como $\neg(p \wedge \neg q)$. Esta formalização pode ser usada para provar que qualquer uma das linhas estão corretas usando somente as operações de conjunção e negação já estabelecidas.

Por exemplo, na terceira linha temos $I(p) = F$ e $I(q) = V$, portanto

$$\begin{aligned} I(\neg(p \wedge \neg q)) &= \neg I(p \wedge \neg q) \\ &= \neg(I(p) \wedge I(\neg q)) \\ &= \neg(I(p) \wedge \neg I(q)) \\ &= \neg(F \wedge \neg V) \\ &= \neg(F \wedge F) \\ &= \neg(F) \\ &= V \end{aligned} \tag{4.2}$$

Na quarta linha temos $I(p) = F$ e $I(q) = F$, portanto

$$\begin{aligned} I(\neg(p \wedge \neg q)) &= \neg(I(p) \wedge \neg I(q)) \\ &= \neg(F \wedge \neg F) \\ &= \neg(F \wedge V) \\ &= \neg(F) \\ &= V \end{aligned} \tag{4.3}$$

Como mostra a tabela.

No capítulo 2 foi afirmado que, no condicional "$A \rightarrow C$", o antecedente "$A$" poderia representar a *causa* ou *condição* e que o consequente "$C$" poderia representar o *efeito* ou *consequência*. Porém, na semântica do condicional apresentada nesta seção foi deixado em evidência que, no condicional "$A \rightarrow C$", "$A$" seria a *condição* suficiente para "$C$" e "$C$" seria a *condição* necessária para "$A$". Cabe ressaltar agora a distinção entre *causa* e *condição*.

O conceito de *condição* expressado pela semântica do conectivo condicional é mais amplo que o conceito de *causa* e de certa forma abrange este. Toda *causa* pode ser uma *condição suficiente* e todo *efeito* pode ser uma *condição necessária* desde que sejam formulados em uma proposição condicional **causa** $\rightarrow$ **efeito** [26]. Desta forma basta que a *condição* (suficiente) da ocorrência da causa seja preenchida para que o efeito ocorra e se a *condição* (necessária) da ocorrência do efeito não for preenchida, saberemos que sua causa também não ocorreu.

**Exemplo 4.2.6** ($Causa \rightarrow Efeito$)**.** .

- ***Causa****: Afrodite tomar veneno.*
- ***Efeito****: Afrodite morrer.*
- *Se Afrodite tomar veneno, então ela morre.*

Podemos ver neste exemplo que o antecedente, *condição suficiente* para o consequente, é uma *causa* e que o consequente, *condição necessária* para o antecedente, é um *efeito*. Porém nem toda *condição suficiente* é uma *causa* e nem toda *condição necessária* é um *efeito*, como no exemplo abaixo:

**Exemplo 4.2.7** ($Condição\ suficiente \rightarrow Condição\ necessária$)**.** .

- ***Condição suficiente****: Marte ser um planeta.*
- ***Condição necessária****: A grama ser verde.*
- *Se Marte é um planeta, então a grama é verde.*

Na proposição "Se Marte é um planeta, então a grama é verde" temos a antecedente "Marte é um planeta" e o consequente "A grama é verde" ambos verdadeiros. Logo, pela primeira linha da tabela do conectivo condicional esta proposição é **verdadeira**. Ou seja, "Marte é um planeta" é uma *condição suficiente* para "A grama é verde" e, da mesma forma, "A grama é verde" é uma *condição necessária* para "Marte é um planeta". No entanto, não existe nenhuma relação causa-efeito entre Marte ser um planeta e a grama ser verde. Ou seja, o que o conectivo condicional expressa com os termos "*condição suficiente*" e "*condição necessária*" é somente uma **relação entre os valores-verdade** do antecedente e do consequente, independente de qual proposição sejam eles ou da conexão real que possa existir ente eles. Em casos particulares o condicional pode expressar relação causa-efeito, mas não necessariamente.

O último conectivo a ser tratado é o **bicondicional**. Dados duas proposições $p$ e $q$, o bicondicional entre eles é denotado por $p \leftrightarrow q$. O bicondicional é a simplificação da conjunção $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$. Por isso o nome "bicondicional". Ou seja, ele afirma que o condicional e a recíproca são verdadeiros. Portanto, o bicondicional só é verdadeiro quando o condicional e sua recíproca associada são verdadeiros. A tabela a seguir ilustra as principais formas de se ler um bicondicional e deixa em evidência sua relação com o conectivo condicional.

| $p \leftrightarrow q$ |
|---|
| $p$ se, e somente se, $q$. |
| Se $p$, então $q$ e se $q$, então $p$. |
| $p$ é condição suficiente e necessária para $q$. |

Baseado na semântica do condicional e da conjunção podemos resumir a propriedade semântica do bicondicional em $V_5$: $p \leftrightarrow q$ **só é verdadeiro quando** $p$ **e** $q$ **possuem os mesmos valores-verdade**. Isso junto com o **PTE** nos dá a tabela abaixo dos valores-verdade do bicondicional em função de suas componentes.

| $p$ | $q$ | $p \leftrightarrow q$ |
|---|---|---|
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | F |
| F | F | V |

O bicondicional fica portanto determinada pelas equações $V \leftrightarrow V = F \leftrightarrow F = V$, $V \leftrightarrow F = F \leftrightarrow V = F$ e $I(p \leftrightarrow q) = I(p) \leftrightarrow I(q)$.

Pode ser observado que na segunda e terceira linha da tabela o bicondicional deve ser falso, pois em cada uma enquanto o condicional $(p \rightarrow q)$ é verdadeiro, a recíproca $(q \rightarrow p)$ é falsa e vice-versa.

## 4.3 FÓRMULAS BEM FORMADAS

A linguagem formal do Cálculo Proposicional é constituída de três conjuntos de símbolos:

- **Letras proposicionais**: conjunto das letras minúsculas $p$, $q$, $r$, ..., usadas para designar proposições simples. Ocasionalmente, poderá ser acrescentado subscritos numéricos para representar outras letras sentenciais. Por exemplo, $p_1$, $p_2$, etc.
- **Conectivos**: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.
- **Parêntesis**: (, ).

As letras proposicionais são os *símbolos não-lógicos* e os conectivos e parêntesis são os *símbolos lógicos*. Observa-se que as letras proposicionais moleculares $P$, $Q$, $R$, ..., usadas para denotar proposições compostas não são consideradas símbolos do sistema. De fato, mesmo sendo chamadas de “letras proposicionais”, elas só são usadas para abreviar fórmulas compostas, em que pode haver a ocorrência de mais de uma letra sentencial atômica. Desta forma, o termo “letras proposicionais” se refere a somente **letras proposicionais atômicas**.

Além dos símbolos, a linguagem deve possuir uma *regra de formação* ou regra gramatical. Ou seja, se considerarmos *fórmula* ou *sentença* do Cálculo Proposicional qualquer sequência de símbolos da linguagem (sejam eles símbolos lógicos ou não-lógicos), a *regra de formação* permite diferenciar o que é uma *fórmula* ou *sentença* sem sentido de outra significativa e completa, chamada de *fórmula bem formada* (fbf). Para enunciar as *regras de formação* do Cálculo Proposicional, serão usadas letras gregas para denotar fórmulas. Evita-se desta forma o uso de letras pertencentes ao vocabulário do Cálculo Proposicional.

**Definição 4.3.1** (Fórmula bem formada)**.** .

1. *Qualquer letra proposicional é uma fbf.*
2. *Se $\phi$ é uma fbf, então $\neg\phi$ é uma fbf.*
3. *Se $\phi$ e $\psi$ são fbf, então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \rightarrow \psi)$ e $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são fbf.*

Como exemplo disso temos que, pela regra 1, "$p$" e "$q$" são fbf. Daí "$\neg q$" é uma fbf pela regra 2. Desta forma, pela regra 3, "$(p \wedge \neg q)$" é uma fbf. Portanto "$\neg(p \wedge \neg q)$" também é uma fbf pela regra 2.

Ou ainda, pela regra 1 "$p$" é uma fbf e, portanto, pela regra 2, "$\neg p$" é uma fbf. Novamente pela regra 2 "$\neg\neg p$" é uma fbf. Pode-se aplicar sucessivamente a regra 2 e concluir que "$\neg\neg\neg\neg\neg p$" é uma fbf, por exemplo.

A regra 3 estipula que além de introduzir o conectivo diádico deve-se incluir um par de parêntesis correspondentes. Por isso, tecnicamente, "$p \wedge q$" não é uma fbf e sim "$(p \wedge q)$", por exemplo. Contudo, será tomado a liberdade de omissão dos parêntesis nestes casos simples, pois não trás dificuldades significativas para o entendimento da fórmula. O propósito da inclusão dos parêntesis na regra 3 é o da necessidade de existir alguma regra que ensine como usá-los, mostrando, por exemplo, que "$((\wedge(p$" não é uma fbf e que "$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$" é.

**Definição 4.3.2** (Subfórmula bem formada)**.** *Uma subfórmula bem formada (subfbf) é uma parte de uma fbf que é uma fbf.*

Assim "$p$" é uma subfbf de "$\neg(p \wedge q)$", e "$\neg r$" é uma subfbf de "$\neg\neg r$". Cada fbf é considerada uma subfbf dela mesma.

Uma particular ocorrência de um conectivo em uma fbf é denominada o *escopo* da ocorrência daquele conectivo na fórmula.

**Definição 4.3.3** (Escopo)**.** *O escopo de uma ocorrência de um conectivo em uma fbf é a menor subfbf que contém aquela ocorrência.*

Assim, na fbf "$(\neg p \wedge (q \rightarrow \neg r))$", o escopo da primeira ocorrência de "$\neg$" é "$\neg p$" e o da segunda ocorrência de "$\neg$" é "$\neg r$", o escopo de "$\rightarrow$" é "$(q \rightarrow \neg r)$" e o escopo de "$\wedge$" é a fórmula toda. Na fórmula "$\neg(p \wedge (q \vee r))$" o escopo de "$\vee$" é "$(q \vee r)$", o escopo de "$\wedge$" é "$(p \wedge (q \vee r))$" e o escopo de "$\neg$" é a fórmula toda.

Cada fbf tem exatamente um conectivo cujo escopo é a fórmula toda.

**Definição 4.3.4** (Conectivo principal)**.** *Conectivo cujo escopo é toda fbf onde ele ocorre.*

Desse modo a fórmula“$(\neg p \wedge (q \rightarrow \neg r))$”, cujo conectivo principal é “$\wedge$”, é chamada de *conjunção*, independente da ocorrência de outros conectivos. Da mesma forma “$\neg(p \wedge (q \vee r))$” , cujo conectivo principal é “$\neg$”, é uma *negação*.

## 4.4 FÓRMULAS PROPOSICIONAIS E TABELAS-VERDADE

Pela Definição 4.3.1, temos que qualquer proposição simples ou composta pode ser expressa por uma fbf. Neste sentido, considerando as letras proposicionais $p$, $q$, $r$, ..., como variáveis e combinadas com os símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, pode-se formar expressões que serão chamadas de *fórmulas proposicionais*

$$\phi(p, q, r, ...).$$

O valor-verdade de uma *fórmula proposicional* é univocamente determinado pelo valor-verdade de suas proposições componentes, aplicando seguidamente as operações definidas pelos conectivos caso seja composta.

$$I(\phi(p, q, r, ...)) = \phi(I(p), I(q), I(r), ...).$$

Uma forma de mostrar por extensão a relação entre os valores-verdade de $p$, $q$, $r$, ... e o de $\phi(p, q, r, ...)$ é o uso da *tabela-verdade*, um conceito ampliado do das tabelas usadas para cada conectivo na seção 4.2. Na *tabela-verdade* cada linha mostra o valor-verdade de $\phi(p, q, r, ...)$ em função de alguma interpretação de $p$, $q$, $r$, .... Assim, o valor-verdade da *fórmula proposicional* pode ser mostrado em **todas as interpretações possíveis**.

**Exemplo 4.4.1.** *A fórmula proposicional $\phi(p) = p$, tem valor-verdade $V$ se $I(p) = V$ e valor-verdade $F$ se $I(p) = F$.*

**Exemplo 4.4.2.** *O valor da fórmula proposicional $\phi(p, q, r) = \neg p \vee (q \wedge r)$ para $I(p) = V$, $I(q) = F$ e $I(r) = V$, ou, de outra forma $(p, q, r) = (V, F, V)$ é **falso**, pois*

$$\begin{aligned} I(\phi(p, q, r)) &= I(\neg p \vee (q \wedge r)) \\ &= I(\neg p) \vee I(q \wedge r) \\ &= \neg I(p) \vee (I(q) \wedge I(r)) \\ &= \neg V \vee (F \wedge V) \\ &= F \vee F \\ &= F \end{aligned}$$

**Teorema 4.4.1** (Teorema das linhas)**.** *A tabela-verdade de $\phi(p_1, p_2, ..., p_n)$ possui $2^n$ linhas.*

*Demonstração.* Cada letra proposicional $p_i$ $(1 \leq i \leq n)$ possui, pelo **PTE**, exatamente duas interpretações $I(p_i) = V$ ou $I(p_i) = F$. Como $\phi$ possui exatamente $n$ letras proposicionais, temos $\underbrace{2 \times 2 \times ...2}_{n} = 2^n$ linhas, uma para cada interpretação possível. □

Para a construção prática de uma tabela-verdade, escreve-se a fórmula no lado superior direito da tabela e lista-se em ordem, à esquerda da fórmula, as letras proposicionais componentes. Posta a primeira letra proposicional $p_1$, na coluna abaixo dela deve-se atribuir $\dfrac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ valores V seguidos de igual quantidade de valores F. Abaixo da segunda letra proposicional $p_2$ atribui-se $\dfrac{2^n}{4} = 2^{n-2}$ valores V, seguidos de $2^{n-2}$ valores F, seguidos de $2^{n-2}$ valores V e seguidos, finalmente, de $2^{n-2}$ valores F. O procedimento é repetido para todas as letras proposicionais $p_i$ $(i \leq n)$ que recebem **alternadamente** $\dfrac{2^n}{2^i} = 2^{n-i}$ valores V seguidos de igual número de valores F, terminando na última letra proposicional $p_n$, onde a coluna abaixo possui $2^{n-n} = 1$ valor V e F alternadamente.

Por exemplo, se a fórmula proposicional tiver 3 letras proposicionais $p$, $q$ e $r$, ela terá, pelo Teorema 4.4.1, $2^3 = 8$ linhas e na coluna sob $p$ teremos 4 valores V seguidos de 4 valores F. Na coluna sob $q$ teremos 2 valores V, seguidos de 2 valores F, seguidos de 2 valores V e, finalmente, seguidos de 2 valores F. Por último, sob $r$ teremos V e F alternadamente. A construção prática fica ilustrada como abaixo.

| $p$ | $q$ | $r$ | $\phi(p, q, r)$ |
|---|---|---|---|
| V | V | V | |
| V | V | F | |
| V | F | V | |
| V | F | F | |
| F | V | V | |
| F | V | F | |
| F | F | V | |
| F | F | F | |

Após o estabelecimento de todas as interpretações possíveis para as letras proposicionais, é preciso calcular o valor-verdade de $\phi(p_1, p_2, ..., p_n)$ em cada uma. Para isso, sob a fórmula proposicional à direita, traça-se uma coluna para cada letra proposicional e uma coluna para cada um dos conectivos contido nela. Então calcula-se o valor da fórmula determinando-se, em ordem, o valor-verdade das menores subfbfs, passando para as subfbfs cada vez maiores até chegar na fórmula toda. A coluna com o valor-verdade de cada subfbf e fbf é a que está escrita abaixo de seu conectivo principal. Por exemplo, a tabela-verdade de $\phi(p, q) = \neg(p \wedge \neg q)$ teria $2^2 = 4$ linhas e começaria como

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | | | | |
| V | F | | | | | |
| F | V | | | | | |
| F | F | | | | | |

Repete-se as colunas de $p$ e $q$ em cada ocorrência delas na fórmula proposicional.

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | | V | | | V |
| V | F | | V | | | F |
| F | V | | F | | | V |
| F | F | | F | | | F |

Calcula-se o valor-verdade da menor subfbf até a fórmula toda, deixando em evidência a coluna do conectivo principal para mostrar que esta é a coluna dos valores-verdade da fórmula.

| $p$ | $q$ | $\neg$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | **V** | V | F | F | V |
| V | F | **F** | V | V | V | F |
| F | V | **V** | F | F | F | V |
| F | F | **V** | F | F | V | F |
| | | 4 | 1 | 3 | 2 | 1 |

A numeração abaixo mostra a ordem dos procedimentos no cálculo, desde a atribuição de valores para as letras proposicionais (1), passando pelo cálculo das subfbfs (2) e (3), e chegando aos valores da fórmula proposicional para cada interpretação (4).

A ordem de procedimento em um cálculo proposicional deve sempre privilegiar o que está entre parêntesis. Porém, na ausência desses, será tomado como convenção que a ordem de procedência em que se deve calcular cada conectivo é

1. $\neg$;
2. $\wedge$ e $\vee$;
3. $\rightarrow$;
4. $\leftrightarrow$.

Portanto, o conectivo mais "fraco" é "$\neg$" e o mais "forte" é "$\leftrightarrow$". Assim, a proposição

$$p \rightarrow q \leftrightarrow s \wedge r$$

é uma **bicondicional** e não uma condicional ou conjunção. Para convertê-la em uma conjunção, por exemplo, será necessário acrescentar um parêntesis:

$$(p \to q \leftrightarrow s) \wedge r$$

e, analogamente, para convertê-la em uma condicional:

$$p \to (q \leftrightarrow s \wedge r)$$

O consequente da condicional anterior é um bicondicional. Para transformá-lo em conjunção, basta escrever:

$$p \to ((q \leftrightarrow s) \wedge r).$$

## 4.5 TAUTOLOGIAS, CONTRADIÇÕES E CONTINGÊNCIAS

Algumas proposições possuem um único valor-verdade independente da interpretação. Por exemplo, a proposição "se hoje é quinta-feira, então hoje é quinta-feira", é verdadeira mesmo que hoje não seja quinta-feira. Da mesma forma, seria verdadeira se a proposição fosse "se o Brasil é um país, então o Brasil é um país" ou "se Paulo é médico, então Paulo é médico", mesmo que o Brasil não fosse um país ou Paulo não fosse médico. Isso indica que o que faz estas proposições serem verdadeiras não é sua instância particular e sim sua fórmula. Neste exemplo $\phi(p) = p \to p$. De fato, a tabela-verdade desta fórmula indica que ela possui o valor-verdade V em todas as linhas independente de $I(p) = V$ ou $I(p) = F$.

| $p$ | $p$ | $\to$ | $p$ |
|---|---|---|---|
| V | V | **V** | V |
| F | F | **V** | F |

Pode-se definir portanto,

**Definição 4.5.1** (Tautologia). *A fórmula proposicional $\phi(p, q, r, ...)$ é uma tautologia se, e somente se, para qualquer proposição $p_0$, $q_0$, $r_0$, ...; $\phi(p_0, q_0, r_0, ...)$ for verdadeira.*

Uma fórmula proposicional tautológica será denotada por T e sua tabela-verdade se encerrará somente com V em seu conectivo principal. Caso a fórmula possua somente valores F em seu conectivo principal ela será chamada de *contradição* e será denotada por $\perp$. Temos portanto,

**Definição 4.5.2** (Contradição). *A fórmula proposicional $\phi(p, q, r, ...)$ é uma contradição se, e somente se, para qualquer proposição $p_0$, $q_0$, $r_0$, ...; $\phi(p_0, q_0, r_0, ...)$ for falsa.*

Um exemplo de contradição é o bicondicional $\phi(p) = p \leftrightarrow \neg p$, como mostra a tabela-verdade.

| $p$ | $p$ | $\leftrightarrow$ | $\neg$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|
| V | V | **F** | F | V |
| F | F | **F** | V | F |
| | 1 | 3 | 2 | 1 |

**Teorema 4.5.1.** *[17, Observação 14.2] $\phi(p, q, r, ...)$ é uma tautologia se, e somente se, $\neg\phi(p, q, r, ...)$ é uma contradição.*

*Demonstração.* Se $\phi(p, q, r, ...)$ é uma tautologia, então é verdadeira em todas as interpretações possíveis. Logo, por $V_1$, $\neg\phi(p, q, r, ...)$ será falsa em todas as interpretações possíveis e, portanto, será uma contradição.

Reciprocamente, se $\phi(p, q, r, ...)$ é uma contradição, então é falsa em todas as interpretações possíveis. Logo, por $V_1$, $\neg\phi(p, q, r, ...)$ é verdadeira em todas as interpretações possíveis e, portanto, é uma tautologia. □

**Teorema 4.5.2** (Princípio da substituição para tautologias)**.** *[17, pág. 278] Se $\phi(p, q, r, ...)$ é uma tautologia, então, para quaisquer fórmulas proposicionais $\phi_1$, $\phi_2$ , $\phi_3$, ...; $\phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3, ...)$ é uma tautologia.*

*Demonstração.* Seja $\phi(p, q, r, ...)$ uma tautologia. Assim ela não depende dos valores particulares de $p$, $q$, $r$, .... Logo, substituindo $p$ por $\phi_1$, $q$ por $\phi_2$, $r$ por $\phi_3$, ..., teremos ainda uma tautologia. □

O Teorema 4.5.2 é uma generalização do conceito de tautologia e, junto com o Teorema 4.5.1, versam sobre como construir ou identificar tautologias e contradições a partir de subfbfs. Por exemplo, se $\phi(p) = p \to p$ é uma tautologia, pelo Teorema 4.5.2, $\phi((p \vee q) \to p) = ((p \vee q) \to p) \to ((p \vee q) \to p)$ também é uma tautologia e, pelo Teorema 4.5.1, $\neg(((p \vee q) \to p) \to ((p \vee q) \to p))$ é uma contradição. O princípio de substituição pode ser igualmente formulado para contradições.

**Teorema 4.5.3** (Princípio da substituição para contradições)**.** *[1, pág. 46] Se $\phi(p, q, r, ...)$ é uma contradição, então, para quaisquer fórmulas proposicionais $\phi_1$, $\phi_2$ , $\phi_3$, ...; $\phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3, ...)$ é uma contradição.*

*Demonstração.* Se $\phi(p, q, r, ...)$ é uma contradição, pelo Teorema 4.5.1, $\neg\phi(p, q, r, ...)$ é uma tautologia. Assim, pelo Teorema 4.5.2, $\neg\phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3, ...)$ é uma tautologia. Portanto, novamente pelo Teorema 4.5.1, $\phi(\phi_1, \phi_2, \phi_3, ...)$ é uma contradição. □

O caso em que a fórmula proposicional não possui um único valor-verdade será denominado *contingência*. Por exemplo, $\phi(p,q) = \neg(p \wedge \neg q)$, como foi mostrado pela tabela-verdade na seção anterior. Toda letra proposicional é contingente, pois dado $\phi(p) = p$, $I(p) = V$ ou $I(p) = F$.

Os conceitos de tautologia, contradição e contingência são fundamentais no estudo da dedução lógica. Saber identificar uma tautologia será importante para separar os argumentos válidos dos inválidos. Já as contradições devem ser evitadas em qualquer base de um sistema teórico. O método da tabela-verdade será fundamental para decidir se uma proposição ou fórmula proposicional é uma tautologia ou uma contradição, basta haver somente a ocorrência do valor V no conectivo principal caso seja tautologia e somente a ocorrência do valor F caso seja contradição. A proposição será contingente se existir ao menos uma interpretação que a deixe com valor-verdade diferente de outras linhas.

## 4.6 DEDUÇÃO NATURAL

### 4.6.1 **Equivalência lógica e regras de substituição**

Agora, serão estudadas as proposições que possuem sempre os mesmos valores-verdade de outra em cada interpretação de suas proposições componentes. Essas proposições são úteis, pois em qualquer passo de uma dedução ou prova uma pode ser substituída pela outra se isto servir para tornar algum ponto mais evidente ou dar prosseguimento ao processo de prova. Serão estudadas as propriedades de suas fórmulas proposicionais diante da relação de *equivalência lógica*.

**Definição 4.6.1** (Equivalência lógica)**.** *Sejam $\phi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...)$ fórmulas proposicionais com as mesmas letras proposicionais. Elas são logicamente equivalentes se, e somente, se assumem o mesmo valor-verdade para cada atribuição de valor-verdade às letras proposicionais.*

Denotamos que $\phi(p,q,r,...)$ é *logicamente equivalente* à $\psi(p,q,r,...)$ por

$$\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...).$$

É importante que as fórmulas estejam nas mesmas letras proposicionais, pois, caso contrário, não faria sentido dizer que elas assumem o mesmo valor-verdade para cada atribuição de valor-verdade às letras proposicionais . Portanto, não basta somente que **suas tabelas-verdade sejam idênticas**. Por tabelas-verdade idênticas entende-se que em cada linha as fórmulas possuem os mesmos valores-verdade atribuídos às suas letras proposicionais e conectivo principal. Não entende-se necessariamente que elas tenham as mesmas letras proposicionais ou a mesma sequência de símbolos, o que equivaleria a dizer que cada fórmula proposicional só é logicamente equivalente a si mesma. Por exemplo, se possuir tabelas-verdade idênticas fosse condição suficiente para a equivalência lógica, então $p \to q$ seria logicamente equivalente a $r \to s$ pela possibilidade de serem construídas desta forma. De modo geral, para qualquer proposição contingente, seria possível encontrar outra logicamente equivalente a ela, mas com letras proposicionais diferentes. Daí, em qualquer passo da prova, seria válido substituir uma por outra e qualquer coisa poderia ser deduzida de qualquer outra coisa, o que não é desejado para um sistema de dedução natural. Possuir tabelas-verdade idênticas é uma **condição necessária** da definição de equivalência lógica e só é uma **condição suficiente** se for postulado que as fórmulas possuem as mesmas letras proposicionais.

**Teorema 4.6.1.** *[19, pág. 19] Existem $2^{(2^n)}$ fórmulas proposicionais distintas não-equivalentes com as mesmas $n$ letras proposicionais.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.4.1 (Teorema das linhas), existem $2^n$ atribuições possíveis de valores-verdade para as $n$ letras proposicionais. Como em cada uma destas atribuições a fórmula proposicional pode assumir o valor V ou F, existem, portanto, $2^{(2^n)}$ fórmulas proposicionais distintas não-equivalentes com as mesmas letras proposicionais. □

Por exemplo, um conjunto de 4 fórmulas proposicionais distintas não-equivalentes com apenas uma letra proposicional $p$ é

| $p$ | $\neg p$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ |
|---|---|---|---|
| V | F | V | F |
| F | V | V | F |

Qualquer fórmula $\phi(p)$ diferente será equivalente a uma dessas.

Um conjunto com 16 fórmulas proposicionais distintas não-equivalentes com 2 letras proposicionais $p$ e $q$ é

| $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $p \vee \neg p$ | $p \wedge \neg p$ | $p \vee q$ | $p \wedge q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | F | V | F | V | V |
| F | V | V | F | V | F | V | F |
| V | F | F | V | V | F | V | F |
| F | F | V | V | V | F | F | F |

| $p \to q$ | $p \leftrightarrow q$ | $\neg(p \leftrightarrow q)$ | $q \to p$ | $\neg p \wedge \neg q$ | $\neg p \vee \neg q$ | $\neg(q \to p)$ | $\neg(p \to q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | F | V | F | F | F | F |
| V | F | V | F | F | V | V | F |
| F | F | V | V | F | V | F | V |
| V | V | F | V | V | V | F | V |

Qualquer outra fórmula com as mesmas letras proposicionais é equivalente a uma dessas.

**Teorema 4.6.2.** *[17, Teorema 14.1] A relação entre as proposições definidas por* $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$ *é reflexiva, simétrica e transitiva. Em outras palavras.*

1. *Para cada* $\phi(p,q,r,...)$, $\phi(p,q,r,...) \equiv \phi(p,q,r,...)$.
2. *Se* $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$, *então* $\psi(p,q,r,...) \equiv \phi(p,q,r,...)$.
3. *Se* $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$ *e* $\psi(p,q,r,...) \equiv \chi(p,q,r,...)$, *então* $\phi(p,q,r,...) \equiv \chi(p,q,r,...)$.

*Demonstração.* 1. Qualquer fórmula proposicional $\phi(p,q,r,...)$ sempre terá a tabela-verdade idêntica a sua própria tabela-verdade.

2. Se $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$, então $\phi(p,q,r,...)$ possui tabela-verdade idêntica a de $\psi(p,q,r,...)$. Logo $\psi(p,q,r,...)$ possui tabela-verdade idêntica a de $\phi(p,q,r,...)$ e como ambas possuem as mesmas letras proposicionais, $\psi(p,q,r,...) \equiv \phi(p,q,r,...)$.

3. Se $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...) \equiv \chi(p,q,r,...)$, então $\phi(p,q,r,...)$ possui tabela-verdade idêntica a de $\psi(p,q,r,...)$ e, $\psi(p,q,r,...)$ possui tabela-verdade idêntica a de $\chi(p,q,r,...)$, além de possuírem as mesmas letras proposicionais. Portanto, $\phi(p,q,r,...) \equiv \chi(p,q,r,...)$. □

**Teorema 4.6.3.** *[17, Teorema 14.2]* $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$ *se, e somente se, o bicondicional "*$\phi(p,q,r,...) \leftrightarrow \psi(p,q,r,...)$*" for uma tautologia.*

*Demonstração.* $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$ se, e somente se, elas assumem valores-verdade iguais a cada atribuição de valores-verdade às letras proposicionais, fazendo, por $V_5$, que o bicondicional "$\phi(p,q,r,...) \leftrightarrow \psi(p,q,r,...)$" seja sempre verdadeiro em todas as interpretações possíveis. Isto ocorre se, e somente se, "$\phi(p,q,r,...) \leftrightarrow \psi(p,q,r,...)$" é uma tautologia. □

Este teorema permite fazer um uso mais rápido do método das tabelas-verdade para provar equivalências. De fato, dados duas fórmulas proposicionais $\phi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...)$ com as mesmas letras proposicionais, em vez de construir duas tabelas-verdade, uma para cada fórmula, e depois comparar se são idênticas, basta construir uma tabela só para a fórmula bicondicional "$\phi(p,q,r,...) \leftrightarrow \psi(p,q,r,...)$" e verificar se ela é uma tautologia.

**Corolário 4.6.4.** *[17, Corolário 14.1] Se* $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$, *então, para qualquer fórmula proposicional* $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$, ...; $\phi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...) \equiv \psi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...)$.

*Demonstração.* É consequência direta do Teorema 4.5.2 (príncipio da substituição) e do Teorema 4.6.3. De fato, se $\phi(p, q, r, ...) \equiv \psi(p, q, r, ...)$, pelo Teorema 4.6.3, $\phi(p, q, r, ...) \leftrightarrow \psi(p, q, r, ...)$ é uma tautologia, logo, pelo Teorema 4.5.2, $\phi(\chi_1, \chi_2, \chi_3, ...) \leftrightarrow \psi(\chi_1, \chi_2, \chi_3, ...)$ é uma tautologia. Portanto, novamente pelo Teorema 4.6.3, $\phi(\chi_1, \chi_2, \chi_3, ...) \equiv \psi(\chi_1, \chi_2, \chi_3, ...)$. □

O Corolário 4.6.4 generaliza o conceito de equivalência lógica. Como uma fórmula proposicional é a fórmula de uma proposição simples ou composta, se uma equivalência lógica for provada para fórmulas com apenas proposições simples componentes, o Corolário 4.6.4 garante que a equivalência entre estas fórmulas pode ser provada quando ocorrem proposições compostas no lugar das simples.

Sejam as seguintes proposições simples $p$, $q$, $r$, $v$ e $f$, onde $v$ é uma proposição verdadeira e $f$ é uma proposição falsa. As letras $v$ e $f$ são consideradas constantes do cálculo. Enuncia-se seguinte Teorema:

**Teorema 4.6.5** (Álgebra de proposições)**.** *[17, Teorema 14.4] São verdadeiras as equivalências lógicas abaixo.*

| *leis idempotentes* | |
|---|---|
| *(1a).* $p \vee p \equiv p$ | *(1b).* $p \wedge p \equiv p$ |
| *leis associativas* | |
| *(2a).* $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ | *(2b).* $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ |
| *leis comutativas* | |
| *(3a).* $p \vee q \equiv q \vee p$ | *(3b).* $p \wedge q \equiv q \wedge p$ |
| *leis distributivas* | |
| *(4a).* $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ | *(4b).* $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ |
| *leis de identidade* | |
| *(5a).* $p \vee f \equiv p$ | *(5b).* $p \wedge v \equiv p$ |
| *(6a).* $p \vee v \equiv v$ | *(6b).* $p \wedge f \equiv f$ |
| *leis complementares* | |
| *(7a).* $p \vee \neg p \equiv v$ | *(7b).* $p \wedge \neg p \equiv f$ |
| *(8a).* $\neg\neg p \equiv p$ | *(8b).* $\neg v \equiv f$, $\neg f \equiv v$ |
| *leis de De Morgan* | |
| *(9a).* $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ | *(9b).* $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ |
| *implicação material* | |
| *(10a).* $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ | *(10b).* $p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$ |

| *contraposição* | |
|---|---|
| *(11).* $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ | |
| *exportação-importação* | |
| *(12).* $p \wedge q \to r \equiv p \to (q \to r)$ | |
| *redução ao absurdo* | |
| *(13).* $p \to q \equiv p \wedge \neg q \to f$ | |
| *equivalência bicondicional* | |
| *(14a).* $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ | *(14b).* $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ |

*Demonstração.* Aplicando o Teorema 4.6.3, é possível mostrar, através do método da tabela-verdade, que o bicondicional associado a cada equivalência lógica da álgebra de proposições é uma tautologia. □

Pelo Corolário 4.6.4, o Teorema 4.6.5 continua válido se substituirmos as letras proposicionais $p$, $q$, $r$, $v$ e $f$, pelas fórmulas proposicionais $\phi$, $\psi$, $\chi$, T e $\perp$, respectivamente.

Algumas equivalências do Teorema 4.6.5 são particularmente muito úteis em demonstrações matemáticas e são frequentemente utilizadas como estratégias iniciais para provas de teoremas. Além disso, alguns deles expressam princípios e teoremas do próprio Cálculo Proposicional e, no geral, informam por quais formulações equivalentes podemos substituir uma proposição em qualquer momento da argumentação para auxiliar no procedimento de prova. Por isso são também chamadas de *Regras de Substituição* [4].

As equivalências (7a), (7b) e (8b) das *leis complementares* representam as formulações do **PTE**, do **PNC** e do Teorema 4.5.1 sobre tautologias, respectivamente.

As *leis de De Morgan* nos informam qual a forma correta de negar uma conjunção ou uma disjunção. Por exemplo, é comum ver alunos negando a proposição "$x$ pertence a $A$ **e** $x$ pertence a $B$" como "$x$ não pertence a $A$ **e** $x$ não pertence a $B$". Porém, o que afirma a equivalência (9b) é que **negar que duas proposições são ao mesmo tempo verdadeiras é afirmar que *ao menos uma* é falsa**. Portanto, a negação correta do exemplo seria "$x$ não pertence a $A$ **ou** $x$ não pertence a $B$". O mesmo ocorre quando a proposição a ser negada é uma disjunção, como "$x$ pertence a $A$ **ou** $x$ pertence a $B$". A equivalência (9a) afirma que **negar que pelo menos uma das proposições é verdadeira equivale a afirmar que *ambas* são falsas**. A negação correta seria "$x$ não pertence a $A$ **e** $x$ não pertence a $B$".

A equivalência (10b), como mencionada na seção 4.2, é uma das formas de expressar um condicional. Ela diz que **afirmar um condicional equivale a negar que o *antecedente* seja verdadeiro ao mesmo tempo que o *consequente* seja falso**.

Outra equivalência muito importante é a (8a), também chamada de *dupla negação*. Ela diz que **negar a negação de uma proposição equivale a afirmá-la**. Junto com a equivalência (10b) ela é útil para nos dar a forma correta de negar uma proposição condicional.

$$\begin{aligned} p \to q &\equiv \neg(p \wedge \neg q) \\ \neg(p \to q) &\equiv \neg\neg(p \wedge \neg q) \\ \neg(p \to q) &\equiv (p \wedge \neg q) \end{aligned}$$

Onde, na segunda linha, foram negadas os dois membros de (10b), e na terceira linha aplicada (8a) no segundo membro, resultando na equivalência lógica afirmando que **negar uma proposição condicional equivale a afirmar o *antecedente* e negar o *consequente***. Por exemplo, negar a proposição "se $x$ pertence a $A$, então $x$ pertence a $B$" equivale a afirmar "$x$ pertence a $A$ e $x$ não pertence a $B$".

Grande parte dos teoremas na Matemática são proposições condicionais. Saber a forma correta de negar um condicional é saber quais os casos em que estes teoremas seriam falsos. Tratando-se de uma conjectura na forma condicional, saber negá-la corretamente é ter um guia para a busca de um falseamento, isto é, um contra-exemplo. No exemplo do parágrafo anterior, se fosse encontrado um $x$ que pertencesse a $A$ e não a $B$, o condicional seria falseado e esse $x$ seria o contra-exemplo.

As equivalências (11), (12), (13) e (14b) são muitas das vezes usadas como métodos ou técnicas iniciais de demonstrações. A equivalência lógica (11) diz que **afirmar uma proposição condicional equivale a afirmar sua contrapositiva**. Por exemplo, dizer "se T é equilátero, então T é isósceles" equivale a dizer "se T não é isósceles, então T não é equilátero". Se fosse pedido para provar uma dessas proposições, seria possível provar uma ou outra, escolhendo a mais fácil para isso.

A equivalência (12) é também chamada de *técnica de condicionalização*, *prova do condicional* ou simplesmente *demonstração condicional*. Dado um conjunto de premissas, é pedido que prove certa afirmação condicional. Na fórmula "$p \to (q \to r)$", "$p$" seria a premissa e "$(q \to r)$" seria o teorema a ser provado. Algumas vezes pode ser difícil provar um condicional e este método busca facilitar este problema. Independente do conjunto de premissas, a equivalência (12) afirma que se pode incluir o antecedente "$q$" do teorema a esse conjunto e a partir disso provar somente o consequente "$r$", como mostra a fórmula logicamente equivalente "$(p \wedge q) \to r$". Ou seja, o antecedente se torna uma das hipóteses e o que será preciso provar não é mais um condicional. Resumindo, como método de prova, a *lei de exportação-importação* justifica que um teorema da forma

"Seja $p$. Se $q$, então $r$."

é logicamente equivalente à forma

"Sejam $p$ e $q$. $r$."

A equivalência (13) é a formulação da famosa *redução ao absurdo*. Usada como método de prova, essa equivalência diz que para se provar uma afirmação a partir de um conjunto de premissas, basta mostrar que as premissas em conjunção com a negação da afirmação a ser provada geram uma contradição. Na formulação de (13), "$p$" seria a premissa e "$q$" a afirmação a ser provada. Pela importância deste método de demonstração a tabela a seguir mostra, pelo Teorema 4.6.3, que o bicondicional $(p \to q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q \to f)$, associado a esta equivalência lógica, é uma tautologia.

| $f$ | $p$ | $q$ | $(p$ | $\to$ | $q)$ | $\leftrightarrow$ | $(p$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q$ | $\to$ | $f)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| F | V | V | V | V | V | **V** | V | F | F | V | V | F |
| F | V | F | V | F | F | **V** | V | V | V | F | F | F |
| F | F | V | F | V | V | **V** | F | F | F | V | V | F |
| F | F | F | F | V | F | **V** | F | F | V | F | V | F |
| | | | 1 | 2 | 1 | 5 | 1 | 3 | 2 | 1 | 4 | 1 |

Observa-se que cada membro do bicondicional é um condicional nas letras proposicionais $p$ e $q$ ($f$ é uma constante) e apesar de terem fórmulas diferentes a primeira coluna 2 da esquerda para a direita e a coluna 4 indicam que elas possuem tabelas-verdade idênticas. Portanto, por $V_5$, o bicondicional é verdadeiro em todas as atribuições possíveis de valores-verdade às letras proposicionais, isto é, uma tautologia.

A equivalência (14b) é a formulação da estratégia básica para se demonstrar afirmações bicondicionais. Como estratégia de prova, essa equivalência justifica que para provar o bicondicional "$p \leftrightarrow q$", é preciso provar o condicional "$p \to q$" e a recíproca "$q \to p$". Por exemplo, para provar a proposição

(a) "$x$ é par se, e somente se, $x$ é divisível por 2"

deve-se provar que se $x$ é par, então ele é divisível por 2 e que se $x$ for divisível por 2, então ele é par.

Aplicando a lei da *contraposição* (11) em "$q \to p$", temos que $q \to p \equiv \neg p \to \neg q$. Ou seja, a recíproca de um condicional é logicamente equivalente ao seu contrário. Se for mais fácil então, pode-se usar como alternativa para provar um bicondicional "$p \leftrightarrow q$", provar "$p \to q$" e depois provar "$\neg p \to \neg q$". Neste caso, para provar o exemplo (a), seria possível usar a alternativa de provar que se $x$ é par, então ele é divisível por 2 e seguidamente provar que se ele for ímpar (não for par), então ele não é divisível por 2.

### 4.6.2 Implicação lógica, argumentos válidos e regras de inferência

Serão estudadas agora as *implicações lógicas*, isto é, as formas corretas de deduzir, além das maneiras de identificá-las e distingui-las das formas erradas ou falácias.

**Definição 4.6.2** (Implicação lógica)**.** *Dizemos que a fórmula proposicional $\phi(p,q,r,...)$ implica logicamente $\psi(p,q,r,...)$ se, e somente se, $\psi(p,q,r,...)$ for verdadeira todas as vezes que $\phi(p,q,r,...)$ for verdadeira.*

Denotamos a relação de *implicação lógica* entre $\phi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...)$ por

$$\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$$

e lemos "$\phi(p,q,r,...)$ implica logicamente $\psi(p,q,r,...)$".

**Teorema 4.6.6.** *[17, Teorema 14.5] $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$ se, e somente se, o condicional "$\phi(p,q,r,...) \to \psi(p,q,r,...)$" for uma tautologia.*

*Demonstração.* $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$ se, e somente se, sempre que $\phi(p,q,r,...)$ for verdadeira, $\psi(p,q,r,...)$ também for. Logo, não ocorre o caso de $\phi(p,q,r,...)$ ser verdadeira e $\psi(p,q,r,...)$ falsa, fazendo, por $V_4$, que o condicional "$\phi(p,q,r,...) \to \psi(p,q,r,...)$" seja verdadeiro em todas as interpretações possíveis das letras proposicionais. Isto ocorre se, e somente se, "$\phi(p,q,r,...) \to \psi(p,q,r,...)$" for tautologia. □

Diferente da *equivalência lógica*, que representa uma relação de equivalência (Teorema 4.6.2), na *implicação lógica* as fórmulas não precisam estar nas mesmas letras proposicionais. O que interessa é somente uma determinada relação entre os valores-verdade das fórmulas. Se $\phi(p,q,r,...)$ implica logicamente $\psi(p,q,r,...)$, não ocorre o caso em que $\phi(p,q,r,...)$ é verdadeira e $\psi(p,q,r,...)$ é falsa.

**Teorema 4.6.7.** *[17, Teorema 14.6] A relação nas proposições definidas por $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$ é reflexiva, anti-simétrica e transitiva, isto é:*

1. *Para todo $\phi(p,q,r,...)$, $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \phi(p,q,r,...)$.*

2. *Se $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...) \Rightarrow \phi(p,q,r,...)$, então $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$.*

3. *Se $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...) \Rightarrow \chi(p,q,r,...)$, então $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \chi(p,q,r,...)$.*

*Demonstração.* 1. Pela definição de tautologia e por $V_4$, o condicional "$\phi(p,q,r,...) \to \phi(p,q,r,...)$" é uma tautologia e, pelo Teorema 4.6.6, $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \phi(p,q,r,...)$ para qualquer fórmula $\phi(p,q,r,...)$.

2. Se $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...) \Rightarrow \phi(p,q,r,...)$, então, pelo Teorema 4.6.6, "$\phi(p,q,r,...) \to \psi(p,q,r,...)$" e "$\psi(p,q,r,...) \to \phi(p,q,r,...)$" são tautologias. Logo, não ocorre o caso em que $I(\phi(p,q,r,...)) = V$ e $I(\psi(p,q,r,...)) = F$ e que $I(\phi(p,q,r,...)) = F$ e $I(\psi(p,q,r,...)) = V$, fazendo com que $\phi(p,q,r,...)$ e $\psi(p,q,r,...)$ tenham sempre os mesmos valores-verdade. Segue-se daí e por $V_5$ que o bicondicional "$\phi(p,q,r,...) \leftrightarrow \psi(p,q,r,...)$" é uma tautologia. Portanto, pelo Teorema 4.6.3, $\phi(p,q,r,...) \equiv \psi(p,q,r,...)$.

3. Se toda vez que $\phi(p,q,r,...)$ for verdadeira, $\psi(p,q,r,...)$ também for e, por conseguinte, toda vez que $\psi(p,q,r,...)$ for verdadeira, $\chi(p,q,r,...)$ também for, então todas as vezes que $\phi(p,q,r,...)$ for verdadeira, $\chi(p,q,r,...)$ também será, provando o item 3. □

**Corolário 4.6.8.** *[17, Teorema 14.7] Se $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$, então, para qualquer fórmula proposicional $\chi_1$, $\chi_2$, $\chi_3$, ...; $\phi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...) \Rightarrow \psi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...)$.*

*Demonstração.* É consequência direta do Teorema 4.5.2 (príncipio da substituição) e do Teorema 4.6.6. De fato, se $\phi(p,q,r,...) \Rightarrow \psi(p,q,r,...)$, pelo Teorema 4.6.6, $\phi(p,q,r,...) \to \psi(p,q,r,...)$ é uma tautologia, logo, pelo Teorema 4.5.2, $\phi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...) \to \psi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...)$ é uma tautologia. Portanto, novamente pelo Teorema 4.6.6, $\phi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...) \Rightarrow \psi(\chi_1,\chi_2,\chi_3,...)$. □

O Corolário 4.6.8, assim como o Corolário 4.6.4, é um princípio de substituição. Neste caso para as implicações lógicas.

Será dada agora um estudo mais técnico dos argumentos e de suas formas válidas.

**Definição 4.6.3** (Argumento)**.** *É uma afirmação de um dado conjunto de fórmulas proposicionais $\phi_1$, $\phi_2$, ..., $\phi_n$, chamadas premissas, que conduz ou tem como consequência uma outra fórmula proposicional $\phi$ como conclusão.*

O argumento assim definido pode ser também uma sequência de cálculo e não apenas composto por afirmações em linguagem corrente. Existem duas formas de expressar os argumentos indicando suas premissas e conclusão. São elas:

$$\begin{array}{c} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \underline{\phi_n} \\ \phi \end{array}$$

ou, de forma linear,

$$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \phi$$

Esta segunda forma será a adotada neste texto. O símbolo "$\vdash$", chamado *traço de asserção*, não é um símbolo do Calculo Proposicional. É apenas um símbolo que separa as premissas da conclusão do argumento, dizendo que a fórmula a sua direita pode ser deduzida usando como premissas somente as fórmulas que estão à sua esquerda. A sequência "$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \phi$" pode ser lida como.

1. "$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ acarretam $\phi$".

2. "$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$, portanto $\phi$".

3. "$\phi$ decorre de $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$".

4. "$\phi$ se infere de $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$".

5. "$\phi$ se deduz de $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$".

Porém, muitas vezes a conclusão pode não ser deduzida das premissas dadas, mostrando que o argumento é inválido ou uma *falácia*.

**Definição 4.6.4** (Argumento válido)**.** *O argumento "$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \phi$" é válido se, e somente, se $\phi$ for verdadeira todas as vezes que $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$ são verdadeiras.*

Isto quer dizer que, para um argumento ser válido, nunca ocorrerá o caso em que **todas** as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa. Uma outra forma de dizer:

$$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge ... \wedge \phi_n) \Rightarrow \phi$$

Segue-se disso e do Teorema 4.6.6 que,

**Teorema 4.6.9.** *[1, pág. 88] O argumento "$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \vdash \phi$" é válido se, e somente se, o condicional "$(\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge ... \wedge \phi_n) \rightarrow \phi$" é uma tautologia.*

Este teorema culmina o aspecto mais importante da Lógica e responde a pergunta "qual o critério para determinar se um argumento é válido ou inválido?". Critério este que está agora rigorosamente baseado nos princípios do Cálculo Proposicional e será útil para toda toda formulação correta nesta linguagem.

A validade de um argumento é um conceito formal e independente de qualquer instância particular que o argumento possa ter. O Teorema seguinte mostra isso.

**Teorema 4.6.10** (Validade formal)**.** *[17, Teorema 17.1] Se o argumento "$\phi_1(p, q, r, ...)$, $\phi_2(p, q, r, ...), ..., \phi_n(p, q, r, ...) \vdash \phi(p, q, r, ...)$" é válido, então, para quaisquer fórmulas proposicionais $\psi_1$, $\psi_2$, $\psi_3$, ..., também é válido o argumento "$\phi_1(\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...), \phi_2(\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...)$, $..., \phi_n(\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...) \vdash \phi(\psi_1, \psi_2, \psi_3, ...)$".*

*Demonstração.* Se o argumento "$\phi_1(p,q,r,...), \phi_2(p,q,r,...), ..., \phi_n(p,q,r,...) \vdash \phi(p,q,r,...)$" é válido, então, pelo Teorema 4.6.9, o condicional "$\phi_1(p,q,r,...) \wedge \phi_2(p,q,r,...) \wedge ... \wedge \phi_n(p,q,r,...) \rightarrow \phi(p,q,r,...)$" é uma tautologia. Logo, pelo Teorema 4.5.2, "$\phi_1(\psi_1,\psi_2,\psi_3,...) \wedge \phi_2(\psi_1,\psi_2,\psi_3,...) \wedge ... \wedge \phi_n(\psi_1,\psi_2,\psi_3 ...) \rightarrow \phi(\psi_1,\psi_2,\psi_3,...)$" é uma tautologia. Portanto, novamente pelo Teorema 4.6.9, conclui-se que o argumento "$\phi_1(\psi_1,\psi_2,\psi_3,...), \phi_2(\psi_1,\psi_2,\psi_3,...), ..., \phi_n(\psi_1,\psi_2,\psi_3,...) \vdash \phi(\psi_1,\psi_2,\psi_3,...)$" é válido. □

Os exemplos abaixo mostram argumentos válidos e falácias com a aplicação do Teorema 4.6.9 e do Teorema 4.6.10.

**Exemplo 4.6.1** (Modus ponens)**.** $p \rightarrow q, p \vdash q$

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $p$ | $\rightarrow$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* | *V* | *V* | *V* | *V* | ***V*** | *V* |
| *V* | *F* | *V* | *F* | *F* | *F* | *V* | ***V*** | *F* |
| *F* | *V* | *F* | *V* | *V* | *F* | *F* | ***V*** | *V* |
| *F* | *F* | *F* | *V* | *F* | *F* | *F* | ***V*** | *F* |
| | | *1* | *2* | *1* | *3* | *1* | *4* | *1* |

**Exemplo 4.6.2** (Falácia da afirmação do consequente)**.** $p \rightarrow q, q \vdash p$

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $q$ | $\rightarrow$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* | *V* | *V* | *V* | *V* | ***V*** | *V* |
| *V* | *F* | *V* | *F* | *F* | *F* | *F* | ***V*** | *V* |
| *F* | *V* | *F* | *V* | *V* | *V* | *V* | ***F*** | *F* |
| *F* | *F* | *F* | *V* | *F* | *F* | *F* | ***V*** | *F* |
| | | *1* | *2* | *1* | *3* | *1* | *4* | *1* |

A tabela-verdade mostra que no caso em que $p$ é falso e $q$ é verdadeiro, o argumento não procede.

**Exemplo 4.6.3** (Modus tollens)**.** $p \rightarrow q, \neg q \vdash \neg p$

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\rightarrow$ | $q)$ | $\wedge$ | $\neg$ | $q$ | $\rightarrow$ | $\neg$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *V* | *V* | *V* | *V* | *V* | *F* | *F* | *V* | ***V*** | *F* | *V* |
| *V* | *F* | *V* | *F* | *F* | *F* | *V* | *F* | ***V*** | *F* | *V* |
| *F* | *V* | *F* | *V* | *V* | *F* | *F* | *V* | ***V*** | *V* | *F* |
| *F* | *F* | *F* | *V* | *F* | *V* | *V* | *F* | ***V*** | *V* | *F* |
| | | *1* | *2* | *1* | *4* | *3* | *1* | *5* | *3* | *1* |

**Exemplo 4.6.4** (Falácia da negação do antecedente)**.** $p \to q, \neg p \vdash \neg q$

| $p$ | $q$ | $(p$ | $\to$ | $q)$ | $\wedge$ | $\neg$ | $p$ | $\to$ | $\neg$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $F$ | $V$ | $\boldsymbol{V}$ | $F$ | $V$ |
| $V$ | $F$ | $V$ | $F$ | $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $\boldsymbol{V}$ | $V$ | $F$ |
| $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $V$ | $V$ | $F$ | $\boldsymbol{F}$ | $F$ | $V$ |
| $F$ | $F$ | $F$ | $V$ | $F$ | $V$ | $V$ | $F$ | $\boldsymbol{V}$ | $V$ | $F$ |
| | | *1* | *2* | *1* | *4* | *3* | *1* | 5 | *3* | *1* |

A tabela também mostra que o argumento falha caso $p$ seja falso e $q$ verdadeiro.

**Exemplo 4.6.5.** *O argumento "$(p \vee q) \to (r \leftrightarrow s), \neg(r \leftrightarrow s) \vdash \neg(p \vee q)$" é válido. Com efeito, se o* modus tollens *é válido, então, pelo Teorema 4.6.10, substituindo "$p$" por "$(p \vee q)$" e "$q$" por "$(r \leftrightarrow s)$", na forma "$p \to q, \neg q \vdash \neg p$", temos que o argumento "$(p \vee q) \to (r \leftrightarrow s), \neg(r \leftrightarrow s) \vdash \neg(p \vee q)$" é válido.*

**Exemplo 4.6.6.** *O argumento $\phi \vdash T$ é válido para qualquer fórmula proposicional $\phi$. De fato, sendo $T$ uma tautologia, não ocorre o caso em que $\phi$ é verdadeira e $T$ é falsa.*

**Exemplo 4.6.7.** *O argumento $\perp \vdash \phi$ é válido para qualquer fórmula proposicional $\phi$. De fato, sendo $\perp$ uma contradição, não ocorre o caso em que $\perp$ é verdadeira e $\phi$ é falsa.*

Estes dois exemplos mostram dois casos de dedução trivial: 1. Uma tautologia pode ser deduzida de qualquer proposição, isto é, pode ser incluída a qualquer momento em um passo de uma demonstração. 2. Se um sistema possuir contradições, qualquer coisa poderá ser deduzida dele.

Foi visto também que a tabela-verdade é um método completo para decidir se qualquer argumento formulado corretamente na linguagem do Cálculo Proposicional é válido ou não e, se não for, mostrar em qual interpretação ele falha. Porém, uma desvantagem disso é que algumas vezes, dependendo do número de premissas do argumento e do tamanho das fórmulas proposicionais, a construção de uma tabela-verdade pode ser uma tarefa exaustiva e muito complicada. Existem outros métodos mais diretos de se provar que uma forma de argumento é válida e neste trabalho será abordado o *método dedutivo*, baseado na aplicação do Teorema 4.6.5 da *álgebra de proposições*. O fato do Cálculo Proposicional possuir métodos ou algoritmos para decidir se um argumento é válido ou não é o que o caracteriza como um sistema formal *decidível*.

A lista a seguir formaliza alguns dos principais argumentos válidos usados nas ciências, filosofia e, em especial, na Matemática. Cada uma dessas formas pode ser usada como passos corretos em uma demonstração, inclusive combinando umas com as outras ou com as regras de substituição. Pode-se também aplicá-las parcialmente nas fórmulas.

**Teorema 4.6.11** (Regras de inferência)**.** *[4] Os seguintes argumentos abaixo são válidos.*

1. *Simplificação (**SIMP.**):* $p \wedge q \vdash p$ *ou* $p \wedge q \vdash q$.
2. *Conjunção (**CONJ.**):* $p, q \vdash p \wedge q$.
3. *Adição (**AD.**):* $p \vdash p \vee q$.
4. *Modus ponens (**MP**):* $p \to q, p \vdash q$.
5. *Modus tollens (**MT**):* $p \to q, \neg q \vdash \neg p$.
6. *Silogismo disjuntivo (**SD**):* $p \vee q, \neg p \vdash q$.
7. *Silogismo hipotético (**SH**):* $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.
8. *Dilema construtivo (**DC**):* $p \to q, r \to s, p \vee r \vdash q \vee s$.
9. *Prova por casos (**PPC**) [11]:* $p \to q, r \to q, p \vee r \vdash q$.

*Demonstração.* A prova será feita usando o Teorema 4.6.5 (método dedutivo) junto com os Corolários 4.6.4 e 4.6.8. Em cada item, conclui-se que o condicional associado a cada argumento é uma tautologia ou que a conjunção das premissas implica logicamente a conclusão.

1. Simplificação: $p \wedge q \vdash p$.

$$\begin{aligned} p \wedge q \to p &\equiv \neg(p \wedge q) \vee p \\ &\equiv (\neg p \vee \neg q) \vee p \\ &\equiv (\neg p \vee p) \vee \neg q \\ &\equiv f \vee \neg q \\ &\equiv T \end{aligned}$$

2. Conjunção: $p, q \vdash p \wedge q$.

$$\begin{aligned} p \wedge q \to p \wedge q &\equiv \neg(p \wedge q) \vee (p \wedge q) \\ &\equiv T \end{aligned}$$

3. Adição: $p \vdash p \vee q$.

$$\begin{aligned}
p \to p \vee q &\equiv \neg p \vee (p \vee q) \\
&\equiv (\neg p \vee p) \vee q \\
&\equiv v \vee q \\
&\equiv v
\end{aligned}$$

4. Modus ponens: $p \to q, p \vdash q$.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \wedge p &\equiv (\neg p \vee q) \wedge p \\
&\equiv (\neg p \wedge p) \vee (q \wedge p) \\
&\equiv f \vee (q \wedge p) \\
&\equiv (q \wedge p) \\
&\Rightarrow q
\end{aligned}$$

5. Modus tollens: $p \to q, \neg q \vdash \neg p$.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \wedge \neg q &\equiv (\neg p \vee q) \wedge \neg q \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg q) \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee f \\
&\equiv (\neg p \wedge \neg q) \\
&\Rightarrow \neg p
\end{aligned}$$

6. Silogismo disjuntivo: $p \vee q, \neg p \vdash q$.

$$\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \neg p &\equiv (p \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg p) \\
&\equiv f \vee (q \wedge \neg p) \\
&\equiv (q \wedge \neg p) \\
&\Rightarrow q
\end{aligned}$$

7. Silogismo hipotético: $p \to q, q \to r \vdash p \to r$.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r) &\equiv (p \to q) \land (q \to r) \land p \to r \\
&\equiv (p \to q) \land p \land (q \to r) \to r \\
&\equiv ((p \to q) \land p) \land (q \to r) \to r \\
&\Rightarrow q \land (q \to r) \to r \\
&\equiv (q \to r) \land q \to r \\
&\Rightarrow r \to r \\
&\equiv T
\end{aligned}$$

8. Dilema construtivo: $p \to q, r \to s, p \lor r \vdash q \lor s$.

$$\begin{aligned}
(p \to q) \land (r \to s) \land (p \lor r) &\equiv ((p \to q) \land (r \to s) \land p) \lor ((p \to q) \land (r \to s) \land r) \\
&\equiv ((p \to q) \land p \land (r \to s)) \lor ((p \to q) \land (r \to s) \land r) \\
&\Rightarrow (q \land (r \to s)) \lor ((p \to q) \land (r \to s) \land r) \\
&\Rightarrow (q \land (r \to s)) \lor ((p \to q) \land s) \\
&\Rightarrow q \lor ((p \to q) \land s) \\
&\Rightarrow q \lor s
\end{aligned}$$

9. Prova por casos: $p \to q, r \to q, p \lor r \vdash q$.

   Pode-se substituir $s$ por $q$ na forma do **DC**, obtendo-se $p \to q, r \to q, p \lor r \vdash q \lor q$. Temos pela lei idempotente (1a) que $q \lor q \equiv q$. Logo, pela validade do **DC**, o Teorema 4.6.10 nos garante que o argumento formal $p \to q, r \to q, p \lor r \vdash q$ é válido.

□

Observa-se que para o bicondicional existem argumentos análogos ao *modus ponens* e *modus tollens*, como listados na tabela a seguir [11]:

| | **Tipo 1** | **Tipo 2** | **Tipo 3** | **Tipo 4** |
|---|---|---|---|---|
| Premissas | $\phi \leftrightarrow \psi$ | $\phi \leftrightarrow \psi$ | $\phi \leftrightarrow \psi$ | $\phi \leftrightarrow \psi$ |
| | $\phi$ | $\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi$ |
| Conclusão | $\psi$ | $\phi$ | $\neg\psi$ | $\neg\phi$ |

Pode-se provar a validade destes argumentos, desmembrando cada bicondicional em seus condicionais associados e usar *modus ponens* e *modus tollens*, como apropriado. Ou usar como base a tabela-verdade do conectivo bicondicional. Isso coloca um papel de “sinal de equivalência” ao conectivo bicondicional, podendo, quando em uma definição, premissa ou teorema, generalizar o conceito de equivalência lógica para fórmulas em contextos e linguagens diferentes. Permitindo assim, no momento da demonstração, um intercâmbio entre linguagens e definições em diferentes contextos matemáticos.

**Exemplo 4.6.8** (Linguagem da Teoria dos Conjuntos $\leftrightarrow$ Linguagem do Cálculo Proposicional)**.** .

- $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.
- $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.
- $x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B)$.
- $x \in U - A \leftrightarrow \neg(x \in A)$.
- $A \subset B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$.
- $A = B \leftrightarrow (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

Destas *regras de inferência*, incluindo o **MP** e o **MT**, algumas delas podem ter importantes aplicações em demonstrações matemáticas. São elas o **SD**, o **SH** e **PPC**.

O **SD** pode ser usado para provar que uma propriedade é verdadeira se ela faz parte de uma dicotomia, isto é, um grupo de somente duas alternativas. Basta, portanto, provar que a outra alternativa é falsa. Por exemplo, um número inteiro só pode ser par ou ímpar. Ao se provar que ele não é par, o **SD** garante que ele é ímpar. A **PPC** também pode ser usada em casos de dicotomias, mas para provar uma alternativa independente. Neste caso, como há somente duas alternativas, $p$ ou $r$, e ambas implicam uma propriedade $q$, então esta propriedade está provada. Por exemplo, para provar que todos os números inteiros possuem certa propriedade. Como os números inteiros podem ser divididos em dois “casos” contrários, pares e ímpares, pode-se provar que os pares possuem a propriedade e que os ímpares também possuem, evitando-se assim a impossível situação de ter que provar a propriedade para cada número ou o erro de ficar apresentando apenas exemplos. Inclusive, para se obter os casos possíveis de uma dicotomia, pode-se usar o **PTE**, onde ou $p$ é verdadeiro ou $\neg p$ é verdadeiro. Já o **SH** é fundamental em provas de transitividade em qualquer tipo de relação que possua tal propriedade. Por exemplo, nas demonstrações do item 3 dos Teoremas 4.6.2 e Teorema 4.6.7.

# 5 CÁLCULO DE PREDICADOS

Como foi visto nos capítulos anteriores, a validade de um argumento é uma característica formal que pode ser analisada segundo regras de "cálculo" em uma linguagem apropriada. Ou seja, se um argumento é válido, toda sua estrutura formal deve evidenciar esta validade. No entanto, a linguagem do Cálculo Proposicional não é suficiente para expressar a validade de muitos argumentos. Por exemplo, o argumento válido:

1. Todos os mamíferos possuem coração.
2. Todo cavalo é mamífero.
3. Portanto, todo cavalo possui coração.

Se formulássemos $p$: "todos os mamíferos possuem coração", $q$: "todo cavalo é mamífero" e $r$: "todo cavalo possui coração", o argumento acima teria a forma $p, q \vdash r$, que não é a forma de um argumento válido, pois a fórmula "$p \wedge q \to r$" não é uma tautologia.

O que torna o argumento acima válido é uma relação entre a estrutura interna de suas proposições que não podem ser expressadas pelo Cálculo Proposicional. A linguagem da lógica formal deve ser ampliada para evidenciar esta estrutura, no que é denominado *Cálculo de Predicados*. O Cálculo de Predicados possui todas as regras do Cálculo Proposicional (regras de substituição e regras de inferência) incluindo outras que serão estudadas a seguir.

## 5.1 SENTENÇAS ABERTAS

Considere a sentença "$x$ é mamífero". A princípio, ela não é uma **proposição**, pois não é verdadeira nem falsa. Tudo depende do que "$x$" está denotando. No conjunto dos animais, se tivermos $x$: "cavalo", ela se tornará "**cavalo** é mamífero", portanto verdadeira. Se tivermos $x$: "peixe", ela se tornará "**peixe** é mamífero", logo será falsa. O "$x$" é chamado de *variável* da sentença, sendo seus valores, "cavalo", "peixe", "árvore", etc. os **sujeitos** e a condição "...é mamífero" o **predicado**. Uma sentença que possua um termo indefinido (variável), aberto a qualquer valor em um domínio de discurso é chamada *sentença aberta*. O processo de substituir uma variável por uma constante é chamado *instanciação* e a proposição formada por cada substituição das variáveis por constantes individuais é denominada *instância de substituição*.

Os **símbolos não lógicos** do Cálculo de Predicados são:

- **Letras Nominais**: expressando constantes ou nomes próprios de cada indivíduo do domínio de discurso. Serão representadas pelas letras minúsculas de $a$ até $s$, incluindo subscritos se necessário.

- **Variáveis**: serão representadas pelas letras minúsculas de $u$ até $z$, incluindo subscritos se necessário.

- **Letras Predicativas**: representando os predicados e as relações. Serão simbolizados por letras maiúsculas.

A sentença aberta "$x$ é mamífero" pode ser denotada por $M(x)$, onde $M$ simboliza o predicado "... é mamífero". Neste caso, sendo $c$: "cavalo", a proposição "cavalo é mamífero" será denotada por $M(c)$ e sendo $p$: "peixe", a proposição "peixe é mamífero" será denotada por $M(p)$, por exemplo.

O predicado denotado por $M(x)$ é um predicado *unário* ou de *predicado de grau um* [22], pois representa a propriedade de uma única variável (o sujeito). Os predicados que combinam dois ou mais nomes (sujeito e objetos) para formar uma sentença são denominados *predicados de relação* [22].

**Exemplo 5.1.1.** *(Predicado binário ou de grau dois):*

- $M(x,y)$*: $x$ ama $y$.*

- $N(x,y)$*: $x \leq y$*

**Exemplo 5.1.2.** *(Predicado ternário ou de grau três):*

- $O(x,y,z)$*: $x$ deu $y$ para $z$.*

- $P(x,y,z)$*: $z = 2x + y$*

**Exemplo 5.1.3.** *(Predicado quaternário ou de grau quatro):*

- $Q(x,y,z,w)$*: $x$ convocou $y$ para levar $z$ até $w$.*

- $R(x,y,z,w)$*: $xy \leq z^2 + x^2$*

De forma geral, um predicado *n-ário* ou *predicado de grau n* expressa uma sentença na forma $P(x_1, x_2, ..., x_n)$. Por definição, o *predicado de grau zero* é a própria letra proposicional atômica do Cálculo Proposicional, onde não é preciso representar a estrutura interna da proposição [6].

Considerando então $n$ conjuntos $A_1, A_2, ..., A_n$ e seu produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$, tem-se:

**Definição 5.1.1** (Sentença aberta com n variáveis)**.** *Chama-se sentença aberta com n variáveis em $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ uma expressão $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ tal que $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ é falsa ou verdadeira, isto é, uma proposição, para toda n-upla $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.*

O conjunto $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ chama-se *conjunto universo*, *domínio de discurso* ou simplesmente *domínio* das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ e qualquer elemento $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ diz-se uma *n-upla de valores* das variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$.

## 5.2 CONJUNTO VERDADE

$P(a_1, a_2, ..., a_n)$ é verdadeira em uma interpretação se, e somente se, os indivíduos denotados por $a_1, a_2, ..., a_n$ estão na mesma relação denotada por $P$. Quando isso é possível, isto é, quando existe um domínio de discurso e denotações que tornam $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ verdadeira, dizemos que a sentença aberta $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ é *satisfatível* [6].

**Exemplo 5.2.1.** *Seja* ***a*** *denotando o número natural "2",* ***b*** *denotando o número natural "1" e o predicado* ***S*** *denotando "... é sucessor de ...". Ou seja,*

$$\boldsymbol{S(x,\ y)}\text{: } x \text{ é sucessor de } y.$$

*Temos que* ***S(a,b)*** *é verdadeiro, pois 2 é sucessor de 1 e* ***S(b, a)*** *é falso, pois 1 não é sucessor de 2.*

***S(x, y)*** *é satisfatível, pois existe uma interpretação que a torna verdadeira.*

Seja $P(x)$ uma sentença aberta no domínio de discurso $A$. O conjunto de indivíduos de $A$ que tornam $P(x)$ verdadeira é chamado *conjunto verdade* de $P$ e é denotado por $V_P$.

$$V_P=\{\text{x}|\ x \in A \wedge I(P(x)) = V\}$$

Ou simplesmente

$$V_P=\{x \in A|\ \text{P(x)}\}.$$

Podem ocorrer três casos:

1. Se $V_P = A$, então $P(x)$ exprime uma condição ou propriedade *universal* em $A$.
2. Se $V_P = \emptyset$, então $P(x)$ exprime uma condição ou propriedade *impossível* em $A$.
3. Se $V_P \neq \emptyset$, então $P(x)$ exprime uma condição ou propriedade *possível* em $A$.

**Exemplo 5.2.2.** *No conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$*:*

- $P(x)$*:* $x + 1 > x$ *é universal.* $V_P = \mathbb{R}$
- $Q(x)$*:* $x + 1 = x$ *é impossível.* $V_Q = \emptyset$.
- $R(x)$*:* $9x^2 - 1 = 0$ *é possível.* $V_R = \{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\}$.

**Exemplo 5.2.3.** *No conjunto dos números naturais* $\mathbb{N}$*:*

- $R(x)$*:* $9x^2 - 1 = 0$ *é impossível* $V_R = \emptyset$
- $S(x)$*:* $3x > 1$ *é universal em* $\mathbb{N}$*, mas não é em* $\mathbb{R}$*, pois* $S$ *não é satisfeita para* $x \leq \dfrac{1}{3}$ *em* $\mathbb{R}$*.*

**Exemplo 5.2.4** (Axioma lógico de identidade)**.** $x = x$ *é universal e* $x \neq x$ *é impossível em qualquer domínio considerado. Ou seja,*

*"*$a = a$*, qualquer que seja o ente* $a$*".*

*Entende-se por "ente" ("ser" ou "entidade") a tudo que se considera existente e a que, por isso, se pode dar um nome [1].*

De forma geral, podemos definir conjunto verdade da seguinte forma.

**Definição 5.2.1** (Conjunto verdade)**.** *Chama-se conjunto verdade de uma sentença aberta* $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ *em* $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$*, o conjunto de todas as n-uplas* $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ *tais que* $P(a_1, a_2, ..., a_n)$ *é verdadeira.*

Ou seja,

$$V_P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) |\ x_1 \in A_1 \wedge x_2 \in A_2 \wedge ... \wedge x_n \in A_n \wedge P(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ é verdadeira}\}$$

Ou simplesmente

$$V_P = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n |\ P(x_1, x_2, ..., x_n)\}.$$

**Exemplo 5.2.5.** *Dados os conjuntos A={2, 3, 4, 5} e B={3, 6, 7, 10} e a sentença aberta* $D(x, y)$ *em* $A \times B$ *definida por "x divide y", também representada por "x|y". O conjunto verdade de* $P$ *é*

$$\begin{aligned} V_P &= \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B \wedge (x|y)\} \\ &= \{(2, 6), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (5, 10)\} \end{aligned}$$

**Exemplo 5.2.6.** *Seja o conjunto dos lógicos L={Aristóteles, Boole, Frege, Russell} e a sentença aberta* $N(x, y)$ *em* $L \times L$ *definida por "x nasceu antes de y". O conjunto verdade de* $N$ *é*

$$\begin{aligned} V_N = \{&(Aristóteles, Boole), (Aristóteles, Frege), (Aristóteles, Russell), \\ &(Boole, Frege), (Boole, Russell), (Frege, Russell)\} \end{aligned}$$

**Exemplo 5.2.7.** *Seja $Q(x, y, z)$ em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definida por $18x - 7y + 13z = 39$.*

$$\begin{aligned} V_Q &= \{(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} | 18x - 7y + 13z = 39\} \\ &= \{(1, -3, 0), (4, 1, -2), (3, 4, 1), (6, 8, -1), ...\} \end{aligned}$$

## 5.3 QUANTIFICADORES

Quando uma sentença aberta $P(x)$ é *universal* em um domínio não vazio $A$, isto é, $V_P = A \neq \emptyset$, dizemos que ela é verdadeira **para todo** indivíduo ou valor do domínio. Usamos o símbolo "$\forall$" para representar "para todo" ou "qualquer que seja" e representamos simbolicamente esta afirmação por

$$\forall x \in A, P(x)$$

Ou, quando não causar confusão a omissão do domínio, pode-se simplificar para $\forall x P(x)$. Abaixo, estão algumas formas de leitura

| $\forall x P(x)$ |
|---|
| Para todo $x$, tem-se $P(x)$. |
| Para um $x$ arbitrário, $P(x)$. |
| Qualquer que seja $x$, $P(x)$. |
| Para cada $x$, $P(x)$. |
| Cada objeto é tal que $P(x)$. |
| $P(x)$ sempre se verifica. |

**Exemplo 5.3.1.** *Seja o conjunto P={$x \in \mathbb{Z}$/ x é par} e $D(x)$: "x é divisível por 2" uma sentença aberta em $P$. Temos que $P \neq \emptyset$ e $V_D = P$. Logo,*

$$\forall x \in P, D(x)$$

*Onde pode-se ler das seguintes maneiras.*

- *Para todo x pertencente a P, x é divisível por 2.*
- *Qualquer que seja x pertencente a P, x é divisível por 2.*
- *Todo número par é divisível por 2.*
- *Qualquer inteiro par é divisível por 2.*

O símbolo "$\forall$" é denominado *quantificador universal* e seu uso transforma uma sentença aberta $P(x)$ em uma **proposição** no domínio $A$, sendo esta operação lógica chamada de *quantificação universal.* A proposição resultante de uma quantificação universal é verdadeira caso $V_P = A$ e falsa caso $V_P \neq A$.

No caso em que uma sentença aberta $P(x)$ é *possível* em um domínio não vazio $A$, isto é, $V_P \neq \emptyset$, dizemos que **existe** um ou mais indivíduos ou valores no domínio que tornam esta sentença verdadeira. O símbolo "$\exists$" é utilizado para representar os termos "existe", "para algum", etc. e representamos simbolicamente esta afirmação por

$$\exists x \in A, P(x)$$

Ou, podendo omitir o domínio, simplifica-se para $\exists x P(x)$. Abaixo estão representadas algumas formas de leitura.

| $\exists x P(x)$ |
|---|
| Para algum $x$, $P(x)$. |
| Há um $x$ tal que $P(x)$. |
| Para um $x$, pelo menos, $P(x)$. |
| Para um adequado $x$, $P(x)$. |
| Existe um $x$ tal que $P(x)$. |

**Exemplo 5.3.2.** *Seja o conjunto $R$={$x \in \mathbb{Z}$/ $x$ é primo} e $P(x)$: "$x$ é par" uma sentença aberta em $R$. Temos que $V_P \neq \emptyset$. Logo,*

$$\exists x \in R, P(x)$$

*Onde pode-se ler das seguintes maneiras.*

- *Existe $x$ pertencente a $R$, tal que $x$ é par.*
- *Para algum $x$ pertencente a $R$, $x$ é par.*
- *Algum número primo é par.*
- *Pelo menos um número primo é par.*

O símbolo "$\exists$" é denominado *quantificador existencial* e seu uso também transforma em **proposição** uma sentença aberta $P(x)$ num domínio $A$, sendo esta operação lógica chamada de *quantificação existencial*. A proposição resultante de uma quantificação existencial é verdadeira caso $V_P \neq \emptyset$ e falsa caso $V_P = \emptyset$.

Temos então a inclusão de mais dois **símbolos lógicos** pelo Cálculo de Predicados, o quantificador universal "$\forall$" e o quantificados existencial "$\exists$". No caso particular em que o domínio $A$ seja **finito** e **enumerável** e tenha $n$ elementos $a_1, a_2, ..., a_n$, são verdadeiras as seguintes proposições:

- $\forall x P(x) \leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$.
- $\exists x P(x) \leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$.

## 5.4 FÓRMULAS BEM FORMADAS

Sobre as *regras de formação* de fórmulas no Cálculo de Predicados pode-se fazer algumas considerações. Um predicado n-ário associado a exatamente $n$ termos, sejam eles variáveis ou letras nominais (constantes), formam as expressões que representam as *fórmulas atômicas* do Cálculo de Predicados. Temos portanto, uma ampliação da definição de *fórmula bem formada* (fbf) usada no Cálculo Proposicional (Definição 4.3.1).

**Definição 5.4.1** (Fórmula bem formada)**.** .

1. *Uma fórmula atômica é uma fbf.*
2. *Se $\phi$ é uma fbf, então $\neg\phi$, $\forall\xi\phi$ e $\exists\xi\phi$, onde $\xi$ é uma variável, são fbfs.*
3. *Se $\phi$ e $\psi$ são fbfs, então $(\phi \wedge \psi)$, $(\phi \vee \psi)$, $(\phi \to \psi)$, $(\phi \leftrightarrow \psi)$ são fbfs.*

**Exemplo 5.4.1.** *Sejam $P(a, x, y)$ de três termos e $Q(x, a, b, z)$ de quatro termos, fórmulas atômicas. Logo são fbf pela cláusula 1. Temos com isso que $\neg P(a, x, y)$ e $\exists y Q(x, a, b, z)$ são fbfs pela cláusula 2. Pode-se formar com essas, a fbf $(\neg P(a, x, y) \to \exists y Q(x, a, b, z))$ pela cláusula 3. A partir daí, outra forma possível seria tomar pela cláusula 2, $\forall y(\neg P(a, x, y) \to \exists y Q(x, a, b, z))$ como fbf e, novamente pela cláusula 2, $\exists z \forall y(\neg P(a, x, y) \to \exists y Q(x, a, b, z))$ seria fbf.*

A definição de *subfórmula bem formada* (subfbf) (Definição 4.3.2) e de *escopo* de um conectivo (Definição 4.3.3) são as mesmas do Cálculo Proposicional com o acréscimo dos quantificadores no conceito de fbf. Porém, no Cálculo de Predicados é possível falar de *escopo dos quantificadores.*

**Definição 5.4.2** (Escopo do quantificador)**.** *Dado uma fórmula de um dos dois tipos*

$$\forall\xi\phi \text{ ou } \exists\xi\phi$$

*dizemos que a fórmula $\phi$ é o escopo do quantificador correspondente.*

Por exemplo, na fbf $\exists z \forall y(\neg P(a, x, y) \to \exists y Q(x, a, b, z))$ O escopo do primeiro quantificador é $\forall y(\neg P(a, x, y) \to \exists y Q(x, a, b, z))$, o escopo do segundo quantificador, em "$\forall y$", é $(\neg P(a, x, y) \to \exists y Q(x, a, b, z))$ e o do quantificador em "$\exists y$" é $Q(x, a, b, z)$. Vemos neste último exemplo que, embora seja habitual que o escopo contenha a variável do quantificador, isto não é obrigatório. Na subfbf $\exists y Q(x, a, b, z)$ o quantificador é chamado *supérfluo.*

Para uma omissão dos parêntesis na construção das fórmulas do Cálculo de Predicados, deve-se também adotar uma ordem de precedência para que se identifique os escopos dos símbolos lógicos. Convenciona-se, em vista do que já foi estipulado no Cálculo Proposicional, a seguinte ordem dos símbolos mais "fracos" para os mais "fortes" [16].

1. $\neg$, $\forall$ e $\exists$;
2. $\wedge$ e $\vee$;
3. $\rightarrow$;
4. $\leftrightarrow$.

Logo, junto com a negação, os quantificadores abrangem, na ausência dos parêntesis, a menor subfbf seguinte. Por exemplo, na fórmula $\exists z\forall y\neg P(a,x,y) \rightarrow \exists yQ(x,a,b,z)$ o escopo do primeiro quantificador (em "$\exists z$") é $\forall y\neg P(a,x,y)$ e o do segundo (em "$\forall y$") é $\neg P(a,x,y)$, diferente do que foi visto para a fórmula com o parêntesis $\exists z\forall y(\neg P(a,x,y) \rightarrow \exists yQ(x,a,b,z))$.

Em vista disso, certa ocorrência de uma variável $\xi$ em uma fórmula é considerada *ligada* se e somente se

1. A variável $\xi$ é a variável de algum quantificador.
2. A variável $\xi$ ocorre no escopo de um quantificador do tipo $\forall\xi$ ou $\exists\xi$

Caso contrário, ela é dita *livre* [16].

**Exemplo 5.4.2.** *Na fórmula $\exists yQ(x,a,b,z)$. A ocorrência ligada é a da variável $y$ e as ocorrências livres são das variáveis $x$ e $z$.*

**Exemplo 5.4.3.** *Seja a fórmula $\exists x\forall yP(x,y,z)$. As ocorrências ligadas são das variáveis $x$ e $y$ e a ocorrência livre é de $z$.*

Uma *variável ligada* é uma variável em que pelo menos uma de suas ocorrências na fórmula é ligada. Se ao menos uma das ocorrências for livre, ela é chamada *variável livre*.

**Exemplo 5.4.4.** *Na fórmula $\forall xP(x) \wedge \exists yG(x,y)$, $x$ é livre e também é ligada. Já $y$ é somente ligada.*

Com o conceito de *variável livre*, *variável ligada* e com a Definição 5.1.1 pode-se concluir que uma **proposição** no Cálculo de Predicado é uma fbf que não possui variáveis livres. Isto ocorre por duas maneiras: (1) pela instanciação ou (2) pela quantificação de todas as variáveis livres. Por exemplo, $\exists x\forall yP(x,y,z)$ não é uma proposição, pois $z$ é livre. Dizemos que é uma sentença aberta em $z$. No caso da sentença $\forall xP(x) \wedge \exists yG(x,y)$, $x$ também é variável livre, logo a fórmula não é uma **proposição**. Dizemos que ela é uma sentença aberta em $x$. Já as sentenças $\exists x \forall y P(x, y, a)$ e $\forall x P(x) \wedge \forall x \exists y G(x, y)$ são **proposições**, pois foram obtidas das anteriores fazendo, respectivamente, instanciação e quantificação nas variáveis livres.

É aceito o seguinte **princípio de substituição para variáveis ligadas**: *Todas as vezes que uma variável ligada é substituída, em todos os lugares que ocupa em uma fórmula proposicional, por outra variável que não figure na mesma fórmula, obtém-se uma fórmula proposicional equivalente* [1].

**Exemplo 5.4.5.** *"$\forall$ fulano, fulano é mortal" é equivalente à "$\forall x$ ($x$ é mortal)" ou também "$\exists x \forall y(y + x = x + z)$" é equivalente à "$\exists u \forall v(v + u = u + z)$".*

Além disso, se $\phi(t)$ é uma fbf contendo a letra nominal ou variável $t$ e $t = t_0$ ou $t_0 = t$, podemos substituir, em qualquer momento de uma dedução, pelo menos uma ocorrência de $t$ em $\phi$ pela letra nominal ou variável $t_0$, obtendo $\phi(t_0)$ sem nenhum prejuízo ao raciocínio. Este princípio também é chamado de **substitutividade da identidade** [22].

**Exemplo 5.4.6.** *Sendo $a = b$ podemos substituir "$P(a, c)$" por "$P(b, c)$" ou também, sendo $x = 2$ podemos obter "$f(2) = 2 + 1$" de "$f(x) = x + 1$".*

Sobre a ordem em que se escrevem os quantificadores na hora de montar a fórmula, deve-se observar duas condições:

1. **Quantificadores de mesma espécie podem ser comutados**: Por exemplo,
   - $\forall x \forall y P(x, y) \equiv \forall y \forall x P(x, y)$
   - $\exists x \exists y P(x, y) \equiv \exists y \exists x P(x, y)$
2. **Quantificadores de espécies diferentes não podem em geral ser comutados**: A comutação de quantificadores de espécies diferentes pode mudar completamente o significado da proposição e até mesmo seu valor-verdade. Por exemplo, tome a sentença aberta $P(x, y)$: "$x$ é filho de $y$" no universo $H$ dos seres humanos.
   - $\forall x \exists y P(x, y)$ ou $\forall x \exists y$($x$ é filho de $y$) quer dizer que para todo indivíduo $x$ escolhido, existirá um indivíduo $y$ no qual $x$ é filho de $y$. Em outros termos **todo humano é filho de alguém**, o que é verdadeiro.
   - $\exists y \forall x P(x, y)$ ou $\exists y \forall x$($x$ é filho de $y$) quer dizer que existe um indivíduo $y$ que, para qualquer indivíduo $x$, $x$ é filho de $y$. Em outros termos **Algum humano é pai (ou mãe) de todos os outros**, o que é falso.

Tomemos também como exemplo a sentença aberta no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ definida por $P(x, y) : y > x$.

- $\forall x \exists y P(x, y)$ ou $\forall x \exists y (y > x)$ quer dizer que, no conjunto dos naturais, para todo número $x$ escolhido, existirá um número $y$ no qual $y$ é maior que $x$. Em outros termos **Qualquer número natural é menor que algum outro** ou $\mathbb{N}$ **é ilimitado superiormente**, o que é verdadeiro.
- $\exists y \forall x P(x, y)$ ou $\exists y \forall x (y > x)$ quer dizer que, no conjunto dos naturais, existe um número $y$ que, para qualquer número $x$, $y$ é maior que $x$ . Em outros termos **Existe um número natural maior que todos os outros**, o que é falso.

## 5.5 REGRAS DE INFERÊNCIA: OMISSÃO E INTRODUÇÃO DE QUANTIFICADORES

Diferente do Cálculo Proposicional, não existe e nem pode existir um procedimento algorítmico que detecta se um argumento é *inválido* no Cálculo de Predicados. Ou seja, ele é *indecidível* neste sentido [22]. A indecidibilidade do Cálculo de Predicados pode ser provada por raciocínio metalógico e é conhecida como *Tese de Church* [6]. Na Matemática, grande parte dos teoremas fazem afirmações universais ou de existência de elementos com certas propriedades. O raciocínio é feito geralmente obedecendo o contexto, isto é, o domínio, a interpretação da letra predicativa e suas regras particulares. Porém, é muito útil entender os princípios formais que regem o raciocínio envolvendo proposições ou sentenças quantificadas. Eles são resumidos em quatro *regras de inferência*, duas sobre *instanciação* (omissão) e duas sobre *generalização* (introdução) dos quantificadores universal e existencial. Estas regras são tidas como princípios ou axiomas do Cálculos de Predicado [16].

A primeira regra, a da *instanciação universal* (I.U.), afirma que qualquer instância de substituição de uma determinada variável pode ser validamente deduzida a partir de sua quantificação universal na fórmula. Ou seja, se uma afirmação é verdadeira para todos os elementos do domínio, então é verdadeira para algum elemento particular, seja ele definido ou não. Usaremos a letra minúscula "$t$" para representar um termo que pode ser tanto definido (o nome de algum indivíduo em alguns casos) como indefinido (uma variável, "fulano", etc. em outros casos), simplificando assim os enunciados quando se pretender dizer que uma regra vale para qualquer um dos dois casos. As letras "$\xi$" e "$\varsigma$" serão utilizadas para destacar, entre as possíveis variáveis da fórmula, as que serão usadas na aplicação das regras. Temos então:

**Axioma 5.5.1** (Instanciação universal)**.** *[4, pág. 314]*

$$\forall \xi \phi(\xi) \Rightarrow \phi(t).$$

Por exemplo, das premissas $\forall x(C(x) \to M(x))$ e $C(a)$, podemos concluir $M(a)$ pela seguinte dedução formal, onde em cada linha numerada se encontra uma premissa ou passo da dedução. A justificativa de cada passo é colocada à direita, mostrando o número das linhas usadas para inferi-lo e a regra aplicada a elas. A letra "P" indica as premissas da dedução.

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(C(x) \to M(x))$ | P |
| 2. $C(a)$ | P |
| 3. $C(a) \to M(a)$ | 1, I.U. |
| 4. $M(a)$ | 2, 3, MP |

Se considerarmos $C(x)$: "$x$ é cachorro", $M(x)$: "$x$ é mamífero" e $a$: "Afrodite". Teríamos a seguinte dedução:

| | |
|---|---|
| 1. Todo cachorro é mamífero. | P |
| 2. Afrodite é cachorra. | P |
| 3. Se Afrodite é cachorra, então ela é mamífera. | 1, I.U. |
| 4. Portanto, Afrodite é mamífera. | 2, 3, MP |

O mesmo raciocínio acima pode ser utilizado tomando-se como hipóteses "$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$", que é equivalente a "$\forall x(x \in \mathbb{Z} \to x \in \mathbb{Q})$", e "$2 \in \mathbb{Z}$" para deduzir que $2 \in \mathbb{Q}$.

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(x \in \mathbb{Z} \to x \in \mathbb{Q})$ | P |
| 2. $2 \in \mathbb{Z}$ | P |
| 3. $(2 \in \mathbb{Z} \to 2 \in \mathbb{Q})$ | 1, I.U. |
| 4. $2 \in \mathbb{Q}$ | 2, 3, MP |

A segunda regra é a *generalização universal* (G.U.), que afirma que podemos deduzir a quantificação universal de uma variável em uma fórmula se ela representar a instância de substituição de um indivíduo *arbitrariamente selecionado* no domínio desta quantificação. De fato, a suposição de que a sentença $P(x)$ no domínio $A$ é verdadeira é a consideração de que $x$ é um representante arbitrário dos elementos do domínio que fazem parte do conjunto verdade $V_P$. Um elemento *arbitrariamente selecionado* dentro de um domínio é aquele elemento em que se pode fazer uma afirmação sobre ele sem distingui-lo de qualquer outro indivíduo deste domínio [22]. Se pudermos provar uma propriedade para um indivíduo $x$, *sem fazer nenhuma distinção particular entre ele e um outro indivíduo do domínio*, estamos considerando que $x$ poderia ser qualquer um e provando que a propriedade vale para todos.

**Axioma 5.5.2** (Generalização universal)**.** *[4, pág. 315]*

$$\phi(\xi) \Rightarrow \forall\varsigma\phi(\varsigma)$$

*Onde $\xi$ é uma variável que denota qualquer indivíduo arbitrariamente selecionado no domínio da quantificação.*

Por exemplo, das premissas $\forall x(M(x) \to H(x))$ e $\forall x(E(x) \to M(x))$, podemos concluir $\forall x(E(x) \to H(x))$ pela seguinte dedução formal.

| | |
|---|---|
| 1. $\forall x(M(x) \to H(x))$ | P |
| 2. $\forall x(E(x) \to M(x))$ | P |
| 3. $M(y) \to H(y)$ | 1, I.U. |
| 4. $E(y) \to M(y)$ | 2, I.U. |
| 5. $E(y) \to H(y)$ | 3, 4, SH |
| 6. $\forall x(E(x) \to H(x))$ | 5, G.U. |

Se considerarmos $M(x)$: "$x$ é mamífero", $H(x)$: "$x$ possui coração" e $E(x)$: "$x$ é cavalo". Teríamos a seguinte dedução:

| | |
|---|---|
| 1. Todo mamífero possui coração. | P |
| 2. Todo cavalo é mamífero. | P |
| 3. Se um tal elemento é mamífero, então possui coração. | 1, I.U. |
| 4. Se um tal elemento é cavalo, então é mamífero. | 2, I.U. |
| 5. Se um tal elemento é cavalo, então possui coração. | 3, 4, SH |
| 6. Todo cavalo possui coração. | 5, G.U. |

Observa-se nas linhas 3 e 4, concluídas por I.U., que usamos uma variável $y$ ou "um tal elemento" em vez de uma constante $a$ ou um nome específico. A razão disso é que neste exemplo queríamos deduzir uma proposição geral e não podemos usar a generalização universal a partir de uma afirmação singular, pois uma afirmação singular distingue o elemento, denotado pela constante ou nome próprio, dos outros elementos do domínio. Por exemplo, são incorretas as deduções "$H(a) \Rightarrow \forall x H(x)$" ou "Se Albert tem coração, então todo cavalo tem coração". Esta é a razão para qual a regra estipula que $y$ deve denotar um indivíduo arbitrariamente selecionado no domínio da quantificação, que é o conjunto dos animais ou, mais especificamente, de "todos os cavalos", podendo ser $a$, $b$, $c$, etc., fazendo com que a sentença seja universal neste conjunto de elementos.

Por exemplo, sendo $P(x)$: "$x$ é divisível por 2", no domínio dos números pares $A$=$\{x|\ x$ é par$\}$ é lícito fazer a seguinte dedução:

| | |
|---|---|
| 1. $P(x),\, x \in A$ | P |
| 2. $\forall x \in A, P(x)$ | 1, G.U. |

Onde foi deixado em evidência o domínio da quantificação e que a variável $x$ é um elemento arbitrário deste domínio.

Porém, não seria lícito fazer a G.U. da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} 1.\ P(x),\ x \in A & \text{P} \\ 2.\ \forall x \in \mathbb{Z}, P(x) & \text{1, G.U.} \end{array}$$

Pois $x$ é um elemento arbitrariamente selecionado, mas do conjunto $A$ e não do domínio de quantificação $\mathbb{Z}$.

Também, sequer seria lícito pensar que "se um número inteiro é divisível por 2, então todo inteiro é divisível por 2". Ou seja, sendo $x \in \mathbb{Z}$, isto é formalmente mostrado por:

$$\begin{array}{ll} 1.\ P(x),\ x \in \mathbb{Z} & \text{P} \\ 2.\ \forall x \in \mathbb{Z}, P(x) & \text{1, G.U.} \end{array}$$

Onde, neste caso, $x$ pertence ao domínio da quantificação, mas não está representando um elemento arbitrariamente selecionado em $\mathbb{Z}$, pois não se pode afirmar $P(x)$: "$x$ é divisível por 2" em $\mathbb{Z}$ sem fazer distinção entre os elementos. Característica particular da interpretação do predicado $P$ em $\mathbb{Z}$.

De maneira formal, sem levar em consideração a interpretação dos predicados, muitos autores, como Nolt [22, pág. 260-261] e Hegenberg [16, pág. 70], acrescentam que a G.U. "$\phi(\xi) \Rightarrow \forall \varsigma \phi(\varsigma)$" não pode ser usada quando $\phi(\xi)$ está em alguma premissa ou hipótese não descartada, evitando assim estes casos ilícitos.

A terceira regra é a *instanciação existencial* (I.E.) segundo a qual podemos deduzir uma instância de substituição para uma variável quantificada existencialmente em uma fórmula. De fato, se uma variável aparece quantificada existencialmente em uma fórmula, então supõe-se que existe no mínimo um indivíduo que satisfaça aquela condição. Daí podemos *nomear arbitrariamente* este indivíduo de forma a expressar a validade desta substituição. A quantificação existencial não afirma *qual* indivíduo possui a determinada propriedade ou relação com os outros termos da fórmula. Por isso deve-se tomar o cuidado de nomear a instância com termos que ainda não foram usados anteriormente na demonstração, considerando assim a possibilidade genérica deste indivíduo ser diferente de qualquer outro que já tenha sido citado.

O problema da I.E. é a *nomeação arbitrária* de um elemento, diferente da regra G.U. que é uma *seleção arbitrária* de elementos. Para um único elemento é possível a escolha de vários nomes diferentes, desde que o nome a ser dado seja especificado na definição. Por isso, é possível os símbolos $a$ e $b$ denotarem os mesmos indivíduos. Dizemos neste caso que $a = b$ [22]. Porém, para se evitar ambiguidades, elementos diferentes não são considerados como tendo o mesmo nome em uma linguagem formal como a Lógica ou a Matemática [4]. Para a escolha de nomes iguais deve-se considerar que os indivíduos nomeados são os mesmos (idênticos).

**Axioma 5.5.3** (Instanciação existencial)**.** *[4, pág. 316]*

$$\exists\xi\phi(\xi) \Rightarrow \phi(\alpha)$$

*Onde $\alpha$ é qualquer constante individual que não tenha ocorrido previamente na demonstração.*

Por exemplo, não tomando os cuidados necessários pode-se fazer a seguinte dedução errada:

| | |
|---|---|
| 1. $\exists xP(x) \wedge \exists xI(x)$ | P |
| 2. $P(a) \wedge \exists xI(x)$ | 1, I.E. |
| 3. $P(a) \wedge I(a)$ | 2, I.E.(incorreta) |

O erro ocorre na linha 3, onde foi introduzida por I.E. a constante $a$ que já havia ocorrido antes na linha 2. É fácil ver que a dedução formal está errada fazendo, por exemplo, $P(x)$:"$x$ é par" e $I(x)$:"$x$ é ímpar" ou $P(x)$:"$x$ é um círculo" e $I(x)$:"$x$ é quadrado". O uso da mesma constante, denota o mesmo indivíduo, fazendo com que $a$ seja "par e ímpar" ou um "círculo quadrado", por exemplo.

A dedução correta seria:

| | |
|---|---|
| 1. $\exists xP(x) \wedge \exists xI(x)$ | P |
| 2. $P(a) \wedge \exists xI(x)$ | 1, I.E. |
| 3. $P(a) \wedge I(b)$ | 2, I.E. |

Onde, se "existe um número par e existe um número ímpar", então $a$ é um deles e $b$ é o outro. Se tivéssemos $P(x)$:"$x$ é um quadrilátero" e $I(x)$:"$x$ é um losango", as escolhas de nomes diferentes $a$ e $b$ não traria problemas, pois nada impede que os dois sejam os nomes do mesmo elemento, mas não excluindo a possibilidade se serem nomes de elementos diferentes, pois esta é a questão central da I.E..

Por isso, na I.E. a instância é uma constante e na G.U. o representante arbitrário é denotado por uma variável. Isso evita, por exemplo, a dedução $\exists xP(x) \Rightarrow \forall xP(x)$:

| | |
|---|---|
| 1. $\exists xP(x)$ | P |
| 2. $P(a)$ | 1, I.E. (correta) |
| 3. $\forall xP(x)$ | 2, G.U. (incorreta) |

Na linha 2, o elemento que satisfazia a premissa recebeu um nome qualquer. Já a linha 3 não decorre da linha 2, pois *nome arbitrário* é diferente de *indivíduo arbitrário* e a G.U. pede esta segunda condição.

A quarta e última regra é a *generalização existencial* (G.E), onde podemos deduzir uma quantificação existencial de uma fórmula a partir de qualquer instância de substituição verdadeira dela. Ou seja, se a afirmação é verdadeira para um termo, seja ele definido ou não, então existe um termo que satisfaz a sentença.

**Axioma 5.5.4** (Generalização existencial)**.** *[4, pág. 316]*

$$\phi(t) \Rightarrow \exists\xi\phi(\xi).$$

Falando de outra forma, a G.E é um modelo para provas de afirmações existenciais. De fato, se temos que provar que $\exists x P(x)$, basta apresentar apenas um elemento $t$ que verifique $P(x)$. A regra G.E, garantirá $P(t) \Rightarrow \exists x P(x)$. Por exemplo, para provar que existe um número que é primo e é par, podemos apresentar o número 2, que é primo e par. Sendo $P(x)$: "$x$ é par" $R(x)$: "$x$ é primo"

$$\begin{array}{lll} 1. & R(2) \wedge P(2) & \text{P} \\ 2. & \exists x(R(x) \wedge P(x)) & \text{1, G.E.} \end{array}$$

A regra G.E estabelece duas importantes pressuposições [22]:

1. Todos os nomes próprios referem-se a indivíduos existentes.

2. Existe pelo menos um indivíduo.

A primeira pressuposição é resultado do fato de que a G.E. pode ser aplicada a qualquer letra nominal. Como o quantificador existencial afirma existência, podemos sempre garantir a validade da G.E. interpretando cada letra nominal como se referindo a indivíduos existentes. A invalidade surge quando ignoramos esta pressuposição e consideramos uma letra proposicional como um indivíduo inexistente. Por exemplo, seja $a$:"Apolo" e $M(x)$:"$x$ é mitológico". Usando G.E. teremos o seguinte derivação:

$$\begin{array}{lll} 1. & M(a) & \text{P} \\ 2. & \exists x M(x) & \text{1, G.E.} \end{array}$$

O raciocínio é inválido, pois a premissa é verdadeira (Apolo é mitológico) e a conclusão é falsa, pois seres mitológicos não existem, de fato. O erro não é no uso da G.E., mas usar o nome de uma coisa inexistente. O Cálculo de Predicados usual não está equipado para lidar com estes nomes [22].

A segunda pressuposição é consequência da primeira. De fato, se as letras nominais representam elementos existentes, o uso da G.E. pressupões a existência de pelo menos um indivíduo. Contudo, não pressupõe a existência de mais de um indivíduo (não-linguístico), ainda que possa existir (com a inclusão de subscritos) um potencial infinito de letras proposicionais. Nada impede que duas ou até todas as letras proposicionais possam referir-se ao mesmo elemento, como dito antes [22]. Podemos, usando a G.E., fazer a seguinte dedução válida fundamental: $\forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)$.

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \forall x P(x) & \text{P} \\
2.\ P(a) & 1,\ \text{I.U.} \\
3.\ \exists x P(x) & 2,\ \text{G.E.}
\end{array}
$$

Onde usamos $a$ na linha 2 como elemento representativo, já que podemos presumir que existe ao menos um.

## 5.6 REGRAS DE SUBSTITUIÇÃO: NEGAÇÃO DE SENTENÇAS QUANTIFICADAS

As regras de substituição para quantificadores estabelecem uma forma de equivalência entre sentenças quantificadas universalmente e existencialmente. O teorema a seguir é referente as quatro regras de substituição ou equivalências dos quantificadores:

**Teorema 5.6.1** (Equivalências dos quantificadores)**.** *[22, tabela 6.1] São verdadeiras as equivalências abaixo.*

| |
|---|
| *1.* $\forall x P(x) \equiv \neg \exists x \neg P(x)$ |
| *2.* $\exists x P(x) \equiv \neg \forall x \neg P(x)$ |
| *3.* $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ |
| *4.* $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ |

*Demonstração.* Seja $A$ o domínio de discurso da sentença $P(x)$. Temos que o conjunto verdade de $P(x)$ é $V_P = \{x | x \in A \wedge P(x)\}$ e o conjunto verdade de $\neg P(x)$ é $V_{\neg P} = \{x | x \in A \wedge \neg P(x)\} = \{x | x \in A \wedge x \notin V_P\} = A - V_P$, o complementar de $V_P$ no domínio $A$.

1. $\forall x P(x)$ se, e somente se $V_P = A$, o que equivale a dizer que $A - V_P = V_{\neg P} = \emptyset$. Isto é possível se, e somente se, "$\exists x \neg P(x)$" for falsa, que é expressado por $\neg \exists x \neg P(x)$.

2. $\exists x P(x)$ se, e somente se $V_P \neq \emptyset$, o que equivale a dizer que $A - V_P = V_{\neg P} \neq A$. Isto é possível se, e somente se, "$\forall x \neg P(x)$" for falsa, que é expressado por $\neg \forall x \neg P(x)$.

3. Negando os dois membros da equivalência 1, temos

$$\neg\forall x P(x) \equiv \neg\neg\exists x \neg P(x)$$

Aplicando a regra de *dupla negação* (Teorema 4.6.5, 8a) no segundo membro,

$$\neg\forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$$

4. Negando os dois membros da equivalência 2, temos

$$\neg\exists x P(x) \equiv \neg\neg\forall x \neg P(x)$$

Aplicando a regra de *dupla negação* (Teorema 4.6.5, 8a) no segundo membro,

$$\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$$

□

**Exemplo 5.6.1.** *1. A negação da proposição "**todos** os números são inteiros", pela regra 3 do Teorema 5.6.1, é "**existe ao menos um** número que **não** é inteiro".*

*2. A negação da proposição "**existe ao menos um** número natural $n$ tal que $n+2 > 8$", pela regra 4 do Teorema 5.6.1, é "**para todo** número natural $n$, tem-se $n+2 \ngtr 8$".*

Observa-se no Teorema 5.6.1 que, sendo $P(x)$ uma propriedade qualquer, ela poderia ser considerada como sendo qualquer propriedade expressa por uma fórmula aberta em $x$. Por exemplo, "$Q(x) \wedge R(x)$" ou "$\exists z \forall y S(x, y, z)$". Logo, a substituição de $P(x)$ por qualquer outra fórmula aberta em $x$ não alteraria o resultado da aplicação do teorema.

De forma geral, sendo $\xi$ uma variável e $\phi(\xi)$ uma fórmula aberta em $\xi$, teríamos as seguintes regras para *intercâmbio de quantificadores*:

| |
|---|
| 1. $\forall\xi\phi(\xi) \equiv \neg\exists\xi\neg\phi(\xi)$ |
| 2. $\exists\xi\phi(\xi) \equiv \neg\forall\xi\neg\phi(\xi)$ |
| 3. $\neg\forall\xi\phi(\xi) \equiv \exists\xi\neg\phi(\xi)$ |
| 4. $\neg\exists\xi\phi(\xi) \equiv \forall\xi\neg\phi(\xi)$ |

Como equivalências lógicas ou *regras de substituição*, a aplicação do intercâmbio dos quantificadores pode ser feita em qualquer fbf ou subfbf quantificada.

**Exemplo 5.6.2.** *1. Pela regra 1 do* intercâmbio de quantificadores*, $\exists z \forall y S(x, y, z) \equiv \exists z(\forall y \phi(y)) \equiv \exists z(\neg\exists\neg y \phi(y)) \equiv \exists z \neg\exists y \neg S(x, y, z)$.*

2. *Aplicando regra 3 e 4 do* intercâmbio de quantificadores, *teremos que* $\neg(\forall x \exists y P(x,y)) \equiv \exists x(\neg \exists y P(x,y)) \equiv \exists x \forall y \neg P(x,y)$.

**Exemplo 5.6.3.** *Seja* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ *o limite de uma função quando* $x$ *tende para* $a$*, sendo* $a$ *um ponto de acumulação de* $X$*. Considerando* $\epsilon > 0$ *e* $\delta > 0$ *números reais, podemos definir este limite por:*

$$\forall \epsilon \exists \delta (x \in X \wedge 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon).$$

*Pelo item 2 do exemplo anterior, temos que a negação desta proposição, que equivale a dizer que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$*, pode ser dada por* $\neg(\forall \epsilon \exists \delta P(\epsilon, \delta)) \equiv \exists \epsilon \forall \delta \neg P(\epsilon, \delta)$*, onde* $P(\epsilon, \delta)$*: "*$x \in X \wedge 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$*".*

*Já a negação* $\neg P(\epsilon, \delta)$ *pode ser obtida se detalharmos mais a estrutura desta fórmula. Podemos definir* $P(\epsilon, \delta)$*: "*$p \wedge D(\delta) \rightarrow E(\epsilon)$*", onde* $p$*: "*$x \in X$*",* $D(\delta)$*: "*$0 < |x - a| < \delta$*" e* $E(\epsilon)$*: "*$|f(x) - L| < \epsilon$*". Logo, a negação de* $P(\epsilon, \delta)$ *é dada por:*

$$\begin{aligned} \neg P(\epsilon, \delta) &\equiv \neg(p \wedge D(\delta) \rightarrow E(\epsilon)) \\ &\equiv \neg p \vee \neg(D(\delta) \rightarrow E(\epsilon)) \\ &\equiv \neg p \vee (D(\delta) \wedge \neg E(\epsilon)) \end{aligned}$$

*Ou seja,* $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq L$ *se define por*

$$\exists \epsilon \forall \delta [x \notin X \vee (0 < |x - a| < \delta \wedge |f(x) - L| \not< \epsilon)]$$

# 6 TÉCNICAS DEDUTIVAS

Após os Teoremas 4.6.5 (álgebra de proposições) e 4.6.11 (regras de inferência), foram tecidos comentários e exemplos gerais de que alguns de seus itens justificavam técnicas ou estratégias que poderiam ser utilizadas em demonstrações de teoremas matemáticos. Neste capítulo, tendo em mãos a linguagem do Cálculo Proposicional e do Cálculo de Predicados, será formalizada a noção de *demonstração* ou *prova* e ilustrado por meio de teoremas tirados das mais diversas áreas da Matemática estas técnicas ou estratégias de demonstração.

## 6.1 DEMONSTRAÇÃO DIRETA

**Definição 6.1.1** (Demostração)**.** *[9] Uma proposição $\gamma$ é* formalmente dedutível *(consequência) de certas proposições dadas $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ (premissas) se, e somente se, for possível formar uma sequência de fórmulas proposicionais $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$ de tal modo que:*

1. *$\phi_m$ é exatamente $\gamma$.*
2. *$\phi_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$ ou é uma premissa ou constitui a conclusão de uma argumento válido formado partir das fórmulas proposicionais que a precedem na sequência.*

*Sendo isso possível, dizemos que $\gamma$ é um* teorema *e a sequência $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_m$ sua* demonstração *ou* prova*.*

**Exemplo 6.1.1.** *[Demonstração direta] Dada a função $f : A \to B$ e $y \in f(X \cap Y)$, onde $X$, $Y$ são subconjuntos de $A$, provar que $y \in f(X) \cap f(Y)$.*

*Demonstração.* "Se $y \in f(X \cap Y)$ então existe $x \in X \cap Y$ tal que $f(x) = y$. Então $x \in X$ e portanto $y \in f(X)$. Também $x \in Y$ e portanto $y \in f(Y)$. Logo $y \in f(X) \cap f(Y)$". [18] □

Nesta curta demonstração apresentada por Elon L. Lima em [18, pág. 18], fica implícito o uso de algumas definições ou teoremas apresentados na obra, onde a aplicação é evidente para o autor. Uma demonstração, em última análise, pode ser decomposta ao ponto que mostre todas as regras de inferências lógicas e todos os teoremas e definições utilizados. Porém, além de se tornar extensa demais, seria um pedantismo desnecessário ao entendimento da mesma. Na prática, como o papel da prova é tornar óbvia uma afirmação que muitas das vezes não é tão trivial para um receptor [26], deve-se ter preocupação em mostrar a quantidade de passos suficientes a este entendimento.

Analisemos a demonstração do Exemplo 6.1.1 na tabela a seguir. Em **negrito** estão as linhas com as proposições omitidas.

| Análise do Exemplo 6.1.1 | | |
|---|---|---|
| Linha | Proposição | Justificativa |
| **a** | $y \in f(A) \leftrightarrow \exists x(x \in A \wedge f(x) = y)$ | Premissa. Imagem de uma função. |
| **b** | $x \in X \cap Y \leftrightarrow x \in X \wedge x \in Y$ | Premissa. Interseção de conjuntos. |
| 1 | $y \in f(X \cap Y)$ | Premissa. |
| 2 | Existe $x \in X \cap Y$ tal que $f(x) = y$ | Da linha 1 e da definição de *imagem de uma função* (linha **a**). |
| **3** | $x \in X \wedge x \in Y$ | Após I.E. na linha 2, simplificação (**SIMP**) e o uso da definição de *interseção de conjuntos* (linha **b**). |
| **4** | $f(x) = y$ | Após I.E. na linha 2, simplificação (**SIMP**). |
| 5 | $x \in X$ | Por simplificação (**SIMP**) na linha 3. |
| 6 | $y \in f(X)$ | Por conjunção (**CONJ.**) entre linha 4 e linha 5, G.E. e definição de *imagem de uma função* (linha **a**). |
| 7 | $x \in Y$ | Por simplificação (**SIMP**) na linha 3. |
| 8 | $y \in f(Y)$ | Por conjunção (**CONJ.**) entre linha 4 e linha 7, G.E. e definição de *imagem de uma função* (linha **a**). |
| **9** | $y \in f(X) \wedge y \in f(Y)$ | Por conjunção (**CONJ.**). Linha 6 e linha 8 |
| 10 | $y \in f(X) \cap f(Y)$ | Pela linha 9 e pela definição de *interseção de conjuntos* (linha **b**). |

## 6.2 DEMONSTRAÇÃO CONDICIONAL (D.C.)

Pode-se provar uma proposição condicional $\phi \to \psi$, a partir de um conjunto de premissas $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$, incluindo-se a fórmula $\phi$, que é o *antecedente*, no conjunto das premissas e a partir de $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n, \phi$, provar o *consequente* $\psi$. Após a inclusão de $\phi$ como premissa, ela passa a ser denominada *premissa presumida* (pp) ou *hipótese* para demonstração condicional. As linhas da prova que vão de $\phi$ (hipótese para D.C.) até $\psi$ são a *demonstração condicional.* Na linha imediatamente após, temos $\phi \to \psi$, que é a conclusão da D.C. e o descarte da hipótese. Esta técnica é justificada pelo Teorema 4.6.5 (12), *exportação-importação.*

**Exemplo 6.2.1.** *[Demonstração condicional] Sabendo-se que todo triângulo equilátero é acutângulo, provar que se um triângulo é retângulo, então ele não é equilátero.*

*Demonstração.* Suponha que um dado triângulo seja retângulo. Logo, não é acutângulo.

Segue-se disso e da premissa que ele não pode ser equilátero. Portanto, se um triângulo é retângulo, então ele não é equilátero. □

Podemos analisar esta demonstração formalizando as proposições do teorema no conjunto $T$=$\{x|\ x$ é um triângulo$\}$, onde definimos $E(x)$: "$x$ é equilátero", $A(x)$: "$x$ é acutângulo" e $R(x)$: "$x$ é retângulo". Deve-se observar também, que foi utilizada na demonstração uma premissa implícita de que um triângulo não pode ser ao mesmo tempo retângulo e acutângulo. Ou seja, $R(x) \to \neg A(x)$.

| Análise do Exemplo 6.2.1 | | |
|---|---|---|
| Linha | Proposição | Justificativa |
| 1 | $\forall x(E(x) \to A(x))$ | Premissa. |
| **2** | $R(x) \to \neg A(x)$ | Premissa. |
| **3** | $E(x) \to A(x)$ | Por I.U. na linha 1. |
| 4 | $R(x)$ | Hipótese para D.C. |
| 5 | $\neg A(x)$ | Por modus ponens (**MP**) entre linha 2 e 4. |
| 6 | $\neg E(x)$ | Por modus tollens (**MT**) entre linha 3 e linha 5. |
| 7 | $R(x) \to \neg E(x)$ | linha 4 até linha 6 (D.C.). |

## 6.3 DEMONSTRAÇÃO INDIRETA (D.I.)

Também denominada algumas vezes como *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo), esta técnica pode ser largamente usada quando é preciso provar uma proposição atômica ou uma fórmula negada [22]. Dadas as premissas $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$ pode-se provar uma fórmula atômica $\psi$ (ou uma fórmula negada $\neg\psi$) mostrando que se for incluído sua negação $\neg\psi$ (ou $\psi$ no caso da fórmula negada) no conjunto das premissas, surgirá uma contradição entre passos da demonstração. Ou seja, se de $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n, \neg\psi$ for possível concluir uma proposição na forma $\phi \wedge \neg\phi$ em alguma linha da demonstração, então provou-se $\psi$.

Após incluir a *negação* do que se deseja provar no conjunto das premissas , ela passa também a se chamar *premissa presumida* (pp) ou *hipótese* para demonstração indireta. As linhas que vão da hipótese para D.I. até a contradição $\phi \wedge \neg\phi$ é denominada *demonstração indireta*. Na linha imediatamente após, temos a *afirmação* do que se queria provar e o descarte da hipótese. Esta técnica é justificada pelo Teorema 4.6.5 (13), *redução ao absurdo.*

**Exemplo 6.3.1** (Demonstração indireta)**.** *Provar que o conjunto dos números primos é infinito.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que o conjunto dos números primos seja finito e possa ser representado por $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$. Considere também o número inteiro não nulo $a = p_1p_2...p_n + 1$. Como $a$ é maior que todos os primos, segue-se que $a \notin P$. Logo, deve ser divisível por algum dos primos $p_1, p_2, ..., p_n$. Porém, verifica-se que nenhum dos primos divide $a$, pois cada divisão apresenta sempre o resto 1. Então, como $a$ não apresenta divisores primos, temos que $a \in P$, um absurdo, pois $a$ é maior que todos os primos e o conjunto $P$ já contém todos eles. Portanto, o conjunto dos números primos é infinito. □

Podem ser encontradas várias demonstrações diferentes deste teorema da Aritmética, como podemos ver, por exemplo, em [27, Teorema 4.6] e [20, Teorema 18]. As diferentes demonstrações que se podem dar a um teorema estão ligadas a quais axiomas e teoremas anteriores o autor se baseou. Ou seja, todo teorema, provado anteriormente, axiomas, propriedades e definições apresentadas podem ser utilizados como premissas, quando possível.

| Análise do Exemplo 6.3.1 | | |
|---|---|---|
| Linha | Proposição | Justificativa |
| **a** | Todo número inteiro é primo ou possui um divisor primo | Premissa. Teorema Fundamental da Aritmética |
| 1 | O conjunto dos números primos é finito | Hipótse para D.I. |
| 2 | $P = \{p_1, p_2, ..., p_n\}$ | Linha 1. Representação do conjunto de todos os primos. |
| 3 | Considere $a = p_1p_2...p_n + 1$ | Por construção, com base na linha 2. |
| 4 | $(a > p_1) \wedge (a > p_2) \wedge ... \wedge (a > p_n)$ | Pela linha 3. |
| 5 | $a \notin P$ | Pela linha 4 e linha 2. |
| **6** | $a$ é primo ou possui um divisor primo. | Por I.U. na linha **a** |
| 7 | $a$ deve ser divisível por algum dos primos $p_1, p_2, ..., p_n$ | Silogismo disjuntivo (**SD**) entre linha 5 e linha 6 e o uso da hipótese para D.I. representada na linha 2. |
| 8 | Nenhum dos primos $p_1, p_2, ..., p_n$ divide $a$ | Aritmética. |
| 9 | $a \in P$ | Silogismo disjuntivo (**SD**) entre linha 6 e linha 8. |
| 10 | $(a \in P) \wedge (a \notin P)$ | Por conjunção (**CONJ.**) entre linha 5 e linha 9. |
| 11 | O conjunto dos números primos é infinito | Linha 1 até linha 10 (D.I.). |

### 6.3.1 CONTRAPOSITIVA

Se for difícil provar uma conjectura na forma condicional, $\phi \to \psi$, então pode-se tentar provar sua forma *contrapositiva*, $\neg\psi \to \neg\phi$.

**Exemplo 6.3.2.** *[Contrapositiva] Sejam $x$ e $y$ números inteiros. Provar que se o produto $xy$ é ímpar, então $x$ é ímpar ou $y$ é impar.*

*Demonstração.* Se $x$ é par e $y$ é par, então podem ser escritos na forma $x = 2k_1$ e $y = 2k_2$, com $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$. Daí, $xy = 2(2k_1k_2)$, com $2k_1k_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $xy$ é par. Portanto, se o produto $xy$ é ímpar, então $x$ é ímpar ou $y$ é ímpar. $\square$

É de se esperar neste tipo de demonstração condicional, que o aluno mostre que "se pegarmos qualquer número ímpar e multiplicarmos por outro, seja este outro par ou ímpar, o resultado será ímpar". Apesar disso ser verdade, o que se prova com este argumento é que "se $x$ é ímpar ou $y$ é impar, então o produto $xy$ é ímpar", isto é, a *recíproca* da conjectura. Como mostra a tabela abaixo, a recíproca de um condicional não é uma afirmação equivalente a este. A afirmação equivalente seria sua *contrapositiva*, segundo o Teorema 4.6.5 (11), *contaposição.*

| | | | | Condicional | Recíproca | Contrapositiva |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\phi$ | $\psi$ | $\neg\phi$ | $\neg\psi$ | $\phi \to \psi$ | $\psi \to \phi$ | $\neg\psi \to \neg\phi$ |
| V | V | F | F | V | V | V |
| V | F | F | V | F | V | F |
| F | V | V | F | V | F | V |
| F | F | V | V | V | V | V |

No entanto, o que pode causar estranheza na demonstração dada ao Exemplo 6.3.2 é que ela só se refere a números "pares", termo que não foi usado em momento nenhum na enunciado da conjectura. Isto se dá ao fato da contapositiva apresentar antecedente e consequente negados e negar que um número é ímpar é afirmar que ele é par.

Para uma análise da demonstração deste exemplo, segue-se a formulação em $\mathbb{Z}$ tal que $I(x)$:"$x$ é ímpar" e $\neg I(x)$:"$x$ é par". Logo, devemos provar a proposição "$I(xy) \to I(x) \vee I(y)$". Partindo da hipótese "$I(xy)$", não se consegue facilmente boas implicações. Por isso será considerada a contrapositiva "$\neg(I(x) \vee I(y)) \to \neg I(xy)$" onde, após aplicar De Morgan no antecedente, temos "$\neg I(x) \wedge \neg I(y) \to \neg I(xy)$" e partir de "$\neg I(x) \wedge \neg I(y)$" como hipótese é mais favorável.

| Análise do Exemplo 6.3.2 | | |
|---|---|---|
| Linha | Proposição | Justificativa |
| **a** | $\neg I(u) \leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}(u = 2k)$ | Premissa. Definição de par |
| **b** | $\forall u \in \mathbb{Z}, \forall v \in \mathbb{Z}(uv \in \mathbb{Z})$ | Premissa. Propriedade da multiplicação em $\mathbb{Z}$. |
| 1 | $\neg I(x) \wedge \neg I(y)$ | Hipótese para D.C. |
| **2** | $\neg I(x)$ | Por simplificação (**SIMP**) na linha 1. |
| **3** | $x = 2k_1$ | Aplicando a *definição de par* (linha **a**) na linha 2 e depois I.E. |
| **4** | $\neg I(y)$ | Por simplificação (**SIMP**) na linha 1. |
| **5** | $y = 2k_2$ | Aplicando a *definição de par* (linha **a**) na linha 4 e depois I.E. |
| 6 | $x = 2k_1 \wedge y = 2k_2$ | Por conjunção (**CONJ.**). Linhas 3 e 5. |
| **7** | $xy = 2(2k_1k_2)$. | Linha 6. Operação de multiplicação |
| **8** | $2k_1k_2 \in \mathbb{Z}$ | Por I.U. na linha **b**. |
| 9 | $xy = 2(2k_1k_2) \wedge 2k_1k_2 \in \mathbb{Z}$ | Por conjunção (**CONJ.**). linhas 7 e 8. |
| **10** | $\exists k \in \mathbb{Z}(xy = 2k)$ | Por G.E na linha 9. |
| 11 | $\neg I(xy)$ | Pela *definição de par* (linha **a**) na linha 10. |
| **12** | $\neg I(x) \wedge \neg I(y) \rightarrow \neg I(xy)$ | Linha 1 até linha 11 (D.C.). |
| **13** | $\neg(I(x) \vee I(y)) \rightarrow \neg I(xy)$ | Por De Morgan no antecedente da linha 12. |
| 14 | $I(xy) \rightarrow I(x) \vee I(y)$ | Por contraposição na linha 13. |

## 6.4 DEMONSTRAÇÃO BICONDICIONAL

Pelo Teorema 4.6.5 (14b), *equivalência bicondicional*, para provar uma conjectura na forma bicondicional, $\phi \leftrightarrow \psi$, devemos provar os condicionais $\phi \rightarrow \psi$ e $\psi \rightarrow \phi$, podendo-se usar em cada uma dessas provas intermediárias qualquer das técnica de prova condicional como D.C. e até *contrapositiva*, se necessário.

**Exemplo 6.4.1** (Demonstração bicondicional)**.** *Provar que* $|a| = 0$ *se, e somente se,* $a = 0$*.*

*Demonstração.* Se $a = 0$, $|a| = 0$. Se $a \neq 0$, então $-a \neq 0$ e, portanto, $|a| \neq 0$.[11, pág. 130] □

| Análise do Exemplo 6.4.1 | | |
|---|---|---|
| Linha | Proposição | Justificativa |
| **a** | $(a \geq 0 \to \|a\| = a) \wedge (a < 0 \to \|a\| = -a)$ | Premissa. Definição de módulo. |
| 1 | $a = 0$ | Hipótese para D.C. |
| 2 | $\|a\| = 0$ | Pela definição de módulo na linha 1. |
| 3 | $a = 0 \to \|a\| = 0$ | Linhas 1 e 2 (D.C.). |
| 4 | $a \neq 0$ | Hipótese para D.C. |
| 5 | $-a \neq 0$ | Linha 4, aritmética. |
| **6** | $a > 0 \vee a < 0$ | Linha 4, aritmética. |
| **7** | $a > 0$ | Hipótese para D.C. |
| **8** | $\|a\| = a \neq 0$ | Linha 7, definição, linha 4. |
| **9** | $a > 0 \to \|a\| \neq 0.$ | Linhas 7 e 8 (D.C.). |
| **10** | $a < 0$ | Hipótese para D.C. |
| **11** | $\|a\| = -a \neq 0$ | Linha 10, definição, linha 5. |
| **12** | $a < 0 \to \|a\| \neq 0.$ | Linhas 10 e 11 (D.C.). |
| 13 | $\|a\| \neq 0$ | Linhas 9 e 12, prova por casos (**PPC**) |
| **14** | $a \neq 0 \to \|a\| \neq 0$ | Linha 4 até linha 13 (D.C.). |
| **15** | $\|a\| = 0 \to a = 0$ | Por contraposição na linha 14. |
| **16** | $\|a\| = 0 \leftrightarrow a = 0$ | Linhas 3 e 15, *equivalência bicondicional.* |

As propriedades de *reflexão*, *simetria* e *transitividade* satisfeitas pelo conectivo bicondicional tornam possíveis demonstrar que várias proposições são equivalentes de maneira bem mais rápida. Por exemplo, é possível mostrar que as quatro proposições $\phi_1$, $\phi_2$, $\phi_3$ e $\phi_4$ são equivalentes sem mostrar que são equivalentes par a par, como $\phi_1 \leftrightarrow \phi_2$, $\phi_1 \leftrightarrow \phi_3$, etc. Basta apenas provar uma *cadeia fechada de condicionais* $\phi_1 \to \phi_2 \to \phi_3 \to \phi_4 \to \phi_1$. Tem-se, por exemplo, $\phi_3 \to \phi_4$ de forma direta, mas também obtêm-se $\phi_4 \to \phi_3$ através de $\phi_1$ e $\phi_2$ na cadeia fechada. Ou seja, através da dupla aplicação do silogismo hipotético (**SH**): "$\phi_4 \to \phi_1, \phi_1 \to \phi_2 \vdash \phi_4 \to \phi_2$" e "$\phi_4 \to \phi_2, \phi_2 \to \phi_3 \vdash \phi_4 \to \phi_3$". Em consequência disso é possível afirmar neste caso que $\phi_3 \leftrightarrow \phi_4$ e assim por diante.

## 6.5 TÉCNICAS AVULSAS

Após apresentar as técnicas dedutivas básicas, agora serão apresentadas algumas técnicas alternativas ou sugestões que podem servir de orientação na tentativa de estabelecer provas para alguns casos especiais de conjecturas.

### 6.5.1 Uso de teoremas

Um teorema, após ser provado, pode ser usado para provar teoremas posteriores, mas para isso deve-se fazer algumas observações quanto a sua relevância a esta aplicação. Um teorema, mesmo que não expressado desta forma, pode ser colocado como um condicional, onde no antecedente se encontram a conjunção das premissas que o justificam e no consequente a afirmação que o caracteriza. Este conjunto de premissas de um teorema na forma condicional é chamado muitas das vezes, no momento da demonstração, de "hipóteses", enquanto o consequente é chamado de "tese".

**Exemplo 6.5.1.** *Considere o teorema:*

*"Seja $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n$. Temos que $\gamma$".*

*Na forma condicional:*

$$\pi_1 \wedge \pi_2 \wedge ... \wedge \pi_n \to \gamma$$

O conjunto das hipóteses é $H = \{\pi_1, \pi_2, ..., \pi_n\}$ e a tese é $\gamma$.

Um teorema $\tau$ com hipóteses em $H_1$ é relevante para demonstração de uma proposição $\phi$ com hipóteses em $H_2$ se $H_1 \subset H_2$. De fato, para demonstrar a proposição $\phi$, deve-se fazer a suposição das premissas em $H_2$ e estando $H_1 \subset H_2$, todas as premissas de $\tau$ seriam colocadas como hipóteses da prova. Logo, por *modus ponens*, a tese do teorema $\tau$ poderia ser usada como passo da demonstração.

**Exemplo 6.5.2** (Uso de teoremas)**.** *Verificar se o Teorema do Valor Médio [18]*

*"Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f$ é derivável em (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$".*

*pode ser relevante para demonstrar a proposição $\phi$:*

*"Seja $a < b$. Seja $f$ uma função contínua no intervalo $a \leq x \leq b$ e derivável no intervalo $a < x < b$. Se $f'(x) > 0$ no intervalo $a < x < b$, então $f$ é estritamente crescente neste intervalo".*

*A tabela a seguir lista e compara o conjunto de hipóteses dos dois teoremas em colunas:*

| ***Hipóteses da proposição $\phi$*** | ***Hipóteses do Teorema do Valor Médio*** |
|---|---|
| $a < b$ | $a < b$ |
| *$f$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$* | *$f$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$* |
| *$f$ é derivável no intervalo $a < x < b$* | *$f$ é derivável no intervalo $a < x < b$* |
| $f'(x) > 0$ *no intervalo $a < x < b$* | ...................... |

*Como as hipóteses a serem feitas no Teorema do Valor Médio estão contidas no conjunto das hipóteses a serem feitas para a demonstração da proposição $\phi$, o Teorema do Valor Médio pode ser relevante para esta demonstração e usado, se necessário, como justificativa em algum dos passos.*

Quanto menos hipóteses a serem feitas em um teorema, *menos restrito* ele se torna. Já os teoremas com um número maior de hipóteses possuem maior número de restrições a serem consideradas. Um teorema mais restrito não pode ser usado para demonstrar uma proposição menos restrita. Por isso não seria possível, supondo já demonstrada, usar a proposição $\phi$ dada no exemplo anterior para provar o Teorema do Valor Médio.

Observa-se também que feita uma pequena modificação na proposição $\phi$ trocando a continuidade no intervalo $a \leq x \leq b$ pela continuidade no intervalo $a < x < b$, teríamos $\phi'$:

"Seja $a < b$. Seja $f$ uma função contínua no intervalo $a < x < b$ e derivável no intervalo $a < x < b$. Se $f'(x) > 0$ no intervalo $a < x < b$, então $f$ é estritamente crescente neste intervalo".

É possível ver na tabela a seguir que as hipóteses do Teorema do Valor Médio não estão mais contidas nas hipóteses de $\phi'$ e portanto ele se torna irrelevante para a demonstração do último.

| Hipóteses da proposição $\phi'$ | Hipóteses do Teorema do Valor Médio |
|---|---|
| $a < b$ | $a < b$ |
| $f$ é contínua no intervalo $a < x < b$ | ......................... |
| ......................... | $f$ é contínua no intervalo $a \leq x \leq b$ |
| $f$ é derivável no intervalo $a < x < b$ | $f$ é derivável no intervalo $a < x < b$ |
| $f'(x) > 0$ no intervalo $a < x < b$ | ......................... |

### 6.5.2 Trabalhar para trás

Uma boa estratégia que as vezes se permite útil para demonstrar uma proposição $\gamma$ é seguir os passos:

1. Supor $\gamma$ e tentar demonstrar algo já conhecido (um axioma, uma propriedade, um teorema já demonstrado, etc.).

2. Se em *todos* os passos da demonstração feita no item (1) foram usados *bicondicionais* ou *igualdade*, então inverter estes passos fazendo ir da proposição já conhecida até $\gamma$.

Obviamente, o item (1) é somente um rascunho onde se verifica a possibilidade de uso do método de "trabalhar para trás". Se, a partir de $\gamma$, for possível alcançar, somente com passos que usam bicondicionais ou igualdades (passos reversíveis), um teorema ou axioma, então a demonstração propriamente dita de $\gamma$ será dada pelo item (2) onde a sequência de passos será invertida e se escreverá a prova partindo do tal teorema até a conclusão $\gamma$.

**Exemplo 6.5.3** (Trabalhar para trás)**.** *Sejam $a$ e $b$ números inteiros tais que $0 \leq a < b$. Provar que $a^2 < b^2$.*

1. *Rascunho: É possível, partindo da tese $a^2 < b^2$, fazer passos lógicos até certo ponto, usando bicondicionais: $a^2 < b^2 \leftrightarrow a^2 - b^2 < 0 \leftrightarrow (a-b)(a+b) < 0$. Deve-se agora tentar partir das hipóteses e deduzir a última proposição "$(a-b)(a+b) < 0$" (teorema), de onde se fará o caminho inverso através dos bicondicionais até a tese. Temos duas conclusões através das hipóteses: $(a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq a < b) \rightarrow (0 \leq a \wedge 0 < b) \rightarrow (a+b > 0)$ e $(a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq a < b) \rightarrow (a < b) \rightarrow (a-b < 0)$. E essas conclusões nos levam a "$(a-b)(a+b) < 0$", pois $(a+b > 0) \wedge (a-b < 0) \rightarrow (a-b)(a+b) < 0$.*

2. *Demonstração: Sendo $a$ e $b$ inteiros e $0 \leq a < b$, então $0 \leq a$ e $0 < b$, de onde se deduz que $a+b > 0$. Por outro lado, também das hipóteses, temos $a < b$ e então $a - b < 0$. Destes dois casos deduz-se que $(a-b)(a+b) < 0$. Logo, $a^2 - b^2 < 0$ e, portanto, $a^2 < b^2$.*

### 6.5.3 Teoria dos Conjuntos

É possível fazer demonstrações de algumas proposições sobre conjuntos usando apenas a *álgebra de proposições* (Teorema 4.6.5). Isto é feito a partir do intercâmbio sucessivo entre a linguagem da Teoria dos Conjuntos e a do Cálculo Proposicional, dados pelas definições a seguir.

1. $x \in A \cup B \leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

2. $x \in A \cap B \leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

3. $x \in A - B \leftrightarrow x \in A \wedge \neg(x \in B)$.

4. $x \in U - A \leftrightarrow \neg(x \in A)$.

5. $A \subset B \leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$.

6. $A = B \leftrightarrow (x \in A \leftrightarrow x \in B)$.

**Exemplo 6.5.4** (Teoria dos Conjuntos)**.** *Dados os conjuntos $A$ e $B$. Provar que $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.*

*Demonstração.* A tabela abaixo mostra os passos desta demonstração.

| Linha | Proposição | Justificativa |
|---|---|---|
| 1 | $x \in A \cap (B \cup C)$ | Hipótese. |
| 2 | $x \in A \wedge x \in (B \cup C)$ | Linha 1, definição 2. |
| 3 | $x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$ | linha 2, definição 1. |
| 4 | $(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$ | Linha 3, Teorema 4.6.5 (4b) (*lei distributiva*). |
| 5 | $x \in A \cap B \vee x \in A \cap C$ | Linha 4, definição 2. |
| 6 | $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Linha 5, definição 1. |
| 7 | $x \in A \cap (B \cup C) \leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Linha 1 a linha 6, equivalência bicondicional. |
| 8 | $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | Linha 7, definição 6. |

$\square$

De fato, existe um *isomorfismo* entre a estrutura do Cálculo Proposicional, dada por $(\{V, F\}; \neg, \wedge, \vee)$, e a estrutura da Teoria dos Conjuntos, dada por $(\{\{\emptyset\}, \emptyset\}; U-, \cap, \cup)$ [19], onde podemos intercambiar os valores-verdade $V$ e $F$ pelos conjuntos $\{\emptyset\}$ e $\emptyset$ e os conectivos $\neg$, $\wedge$ e $\vee$ pelos operadores $U-$, $\cap$ e $\cup$, respectivamente e trocando as letras proposicionais por nomes de conjuntos. Desta forma, pode-se, pelo Teorema 4.6.5, obter as *leis idempotentes*, *leis associativas*, *leis comutativas*, *leis distributivas*, *leis de identidade*, *leis complementares* e *leis de De Morgan* para as operações entre conjuntos, tornando as demonstrações nesta área ainda mais diretas. [17].

# 7 PLANO DE CURSO

- **Público alvo**: Alunos nos períodos iniciais de graduação em Matemática. Em especial, cursos de licenciatura.

- **Justificativa**: Em geral, um curso introdutório de Lógica não é visto por alunos na graduação em Matemática, o que torna bem dificultoso a abordagem da Matemática no seu nível mais básico que é o raciocínio formal. Alunos que buscam a graduação em Matemática, inclusive os que buscam a licenciatura, podem chegar com falta de prática nos processos de justificação e elaboração sistemática do raciocínio, frutos de uma Educação Básica voltada somente à apresentação conteudista de informações e conhecimentos práticos e pouco voltadas ao método científico e às práticas de justificação e demonstração do conteúdo apresentado. Os futuros professores que não desenvolvem estes hábitos metódicos, acabam por manter este ciclo falho na educação, contribuindo para o mal desenvolvimento das ciências em geral, que dependem dos métodos matemáticos, além de não exercerem por completo sua cidadania, por falta de capacidade de pensamento e análise critica das informações e conhecimentos recebidos.

- **Objetivo geral**: Introduzir os alunos nos períodos iniciais da graduação em Matemática, especialmente os da licenciatura, aos métodos do raciocínio lógico e aplicações na disciplina escolhida, com o objetivo de formar melhores matemáticos e amenizar as falhas de abordagem metódica nas ciências em geral, impedindo um possível ciclo de educação falha nestes tópicos.

| Seção | Conteúdo | Número de aulas (50 min/aula) | Referências bibliográficas |
|---|---|---|---|
| Introdução | Capítulo 2 | 6 aulas | [26], [4], [22]. |
| | Capítulo 3 | 6 aulas | [4], [26], [21], [22]. |
| Cálculo Proposicional | Capítulo 4 | 30 aulas | [1], [9]. |
| Cálculo de Predicados | Capítulo 5 | 20 aulas | [1], [4], [6]. |
| Técnicas Dedutivas | Capítulo 6 | 10 aulas | [11], [23], [12]. |
| Total | | 72 aulas (60 h) | |

A instrução acadêmica ou escolar é, sem dúvida, de fundamental importância para transmissão do conhecimento e desenvolvimento de bases cognitivas para interpretação do mundo. A Lógica, como uma disciplina propedêutica, não pode ser menosprezada neste aspecto. Em todas as ciências ou ramos de conhecimento é necessário justificar e "provar". Mesmo sendo perfeitamente possível viver sem provas ou justificativas, a evolução social e científica ocorre por caminhos que seguem uma constante revolução de métodos, posturas e "verdades" e o valor dado ao estudo da Lógica pelas instituições de ensino é um grande auxílio para que mais pessoas possam seguir neste caminho crítico de mudança do mundo.

## REFERÊNCIAS


[1] ALENCAR FILHO, Edgard de. *Iniciação a Lógica Matemática*. São Paulo: Nobel, 2002.

[2] ARISTÓTRLES. *Órganon*. Trad. Edson Bini. 2 ed. São Paulo: Edipro, 2010.

[3] ARISTÓTRLES. *Metafísica*. Trad. Edson Bini. 2 ed. São Paulo: Edipro, 2012.

[4] BARONETT, Stan. *Lógica: uma introdução voltada para as ciências*. Porto Alegre: Bookman, 2009.

[5] EUCLIDES. *Os Elementos*. Trad. e intro. de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

[6] BOOLOS, George S.; BURGESS, John P.; JEFFREY, Richard C.. *Computabilidade e Lógica*. São Paulo: Editora UNESP, 2012.

[7] BOYER, Carl B.. *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Edgar Blücher, 2009.

[8] Da COSTA, Newton C. A.. *Sistemas Formais Inconsistentes*. Curitiba: Editora UFPR, 1993.

[9] DAGHLIAN, Jacob. *Lógica e Álgebra de Boole*. 4 ed. São Paulo: Atlas, 1995.

[10] FERNANDO, J. C.; GREGORI, Valentín. *Matemática Discreta*. 2 ed. Barcelona: Editorial Reverté, 1995.

[11] FOSSA, John. *Introdução às Técnicas de Demonstração na Matemática*. 2 ed. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

[12] GARBI, Gilbeto G.. *C.Q.D.: explicações e demonstrações sobre conceitos, teoremas e fórmulas essenciais da Geometria*. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

[13] GRUBER, H. E.; BÖDEKE, Katja. *Creativity, Psychology and the History of Science*. New York: Springer Science & Business Media, 2005.

[14] HAACK, Suzan. *Filosofia das Lógicas*. São Paulo: Editora UNESP, 2002.

[15] HEFEZ, Abramo. *Aritmética*. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

[16] HEGENBERG, Leônidas. *Lógica-Exercícios-IV: Dedução no Cálculo de Predicados*. São Paulo: E,P.U: Ed. da Universidade de São Paulo, 1978.

[17] LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria dos Conjuntos*. São Paulo: McGraw-Hill, 1974. Cap. 14, 15 e 17.

[18] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. 11 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006. v.1. Projeto Euclides.

[19] MENDELSON, Elliott. *Álgebra Booleana e Circuitos de Chaveamento*. São Paulo: McGraw-Hill, 1977. Cap. 1.

[20] MONTEIRO, L. H. Jacy. *Elementos de Álgebra*. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A., 1971.

[21] NAGEL, Ernest; NEWMAN, James R.. *A Prova de Gödel*. São Paulo: Perspectiva, 2012.

[22] NOLT, John; ROHATYN, Dennis. *Lógica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1991.

[23] POLYA, G..*A Arte de Resolver Problemas*. Rio de janeiro: Interciência, 2006.

[24] POPPER, Karl R..*A Lógica da Pesquisa Científica*. 2 ed. São Paulo: Cultrix, 2013.

[25] RUSSELL, Bertrand. *Introdução a Filosofia Matemática*. Rio de janeiro: Jorge Zahar Ed., 2007.

[26] SALMON, Wesley C.. *Lógica*. 3 ed. Rio de janeiro: LTC: Livros Técnicos e Científicos, 2002.

[27] VIDIGAL, Angela... [et al.]. *Fundamentos de Álgebra*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005.

# APÊNDICE A – Fundamentação Lógica da Indução Matemática

Existem dois tipos importantes de argumentos: os dedutivos e os indutivos. No primeiro caso, as premissas são suficientes para assegurar a conclusão, já no segundo, as premissas tornam somente a conclusão mais provável. Apesar disso, quando falamos em "indução matemática" estamos nos referindo a um tipo de *argumento dedutivo* muito útil e poderoso, utilizado em demonstrações no conjunto dos números naturais. [11]

Basicamente, o que se pode provar com a *indução matemática* é que um determinado predicado é verdadeiro para todo os elementos de um conjunto com mesma cardinalidade que os naturais [17], isto é, cujos elementos podem ser indexados em sequência por números naturais. Por exemplo, dada a sentença qualquer $P(x)$ no conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais, provar

$$\forall x \in \mathbb{N}, P(x).$$

A prova consiste em dois passos: (1) Provar que o predicado é verdadeiro para o *primeiro* número natural; (2) Provar que **se** o predicado é verdadeiro para *qualquer* número natural especificado, **então** vale para o sucessor deste determinado número. [22]

1. $P(0)$
2. $\forall x(P(x) \to P(x+1))$

O item (2) é uma proposição universal e representa a cadeia infinita de condicionais:

$$\begin{gathered} P(0) \to P(1) \\ P(1) \to P(2) \\ P(2) \to P(3) \\ \vdots \end{gathered}$$

Onde podemos observar que **caso** a proposição $P(0)$ seja verdadeira, então a proposição $P(1)$ também será e, sendo assim, a proposição $P(2)$ também será verdadeira, assim por diante, abrangendo *todos* os números naturais. A questão principal agora é responder a condição "$P(0)$ é verdadeira?". Isso pode ser feito com uma verificação. Logo, pela aplicação sucessiva da regra *modus ponens*, tendo $P(0)$ e $P(0) \to P(1)$, temos $P(1)$; de $P(1)$ e $P(1) \to P(2)$, temos $P(2)$; de $P(2)$ e $P(2) \to P(3)$, temos $P(3)$, assim por diante. Ou seja, a conjunção das proposições nos passos (1) e (2) implica em "$\forall x P(x)$".

Vimos que a verdade de $P(0)$ pode ser encontrada por simples inspeção. Porém, para demonstrar o item (2), que é uma proposição universal, devemos fazer uma *instanciação universal* e usar uma representação arbitrária da proposição condicional

$$P(n) \to P(n+1)$$

Onde $n$ é um número natural qualquer, inclusive o 0. Observa-se que, o que se deseja provar é um **condicional** e não que "$P(n+1)$ é verdadeira", como é comum pensar os iniciantes no método. Logo, para *demonstração condicional*, devemos supor que $P(n)$ é verdadeira (hipótese para D.C.) e, com isso, deduzir $P(n+1)$, tendo portanto, uma prova para "$P(n) \to P(n+1)$". Após aplicação de *generalização universal*, concluímos que $\forall x(P(x) \to P(x+1))$, o item (2).

É possível resumir estas informações no esquema geral abaixo:

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $P(0)$ | Base da indução. |
| 2 | $P(n)$, com $n \geq 0$ | Hipótese de indução. |
| $\vdots$ | $\vdots$ | Técnicas dedutivas. |
| k | $P(n+1)$ | |
| k+1 | $P(n) \to P(n+1)$ | 2 a k, D.C. |
| k+2 | $\forall x(P(x) \to P(x+1))$ | k+1, G.U. |
| k+3 | $\forall x P(x)$ | 1, k+2, Indução matemática. |

**Exemplo A.0.1** (Prova por indução matemática)**.** *Dado $x \in \mathbb{N}$. Provar a generalização da lei de De Morgan,*

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_x) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_x$$

*para todo $x \geq 2$.*

*Demonstração.* A linhas a seguir mostram a estrutura de uma possível demonstração com base nas equivalências da *álgebra de proposições*, Teorema 4.6.5, onde temos:

$$P(n) : \neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_n$$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(p_1 \vee p_2) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2$ | Base da indução. *De Morgan.* |
| 2 | $\neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_n$, com $n \geq 2$ | Hipótese de indução. |
| 3 | $\neg[p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n \vee p_{n+1}]$ | Por construção. |
| 4 | $\neg[(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \vee p_{n+1}]$ | 3, *Leis associativas.* |
| 5 | $\neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \wedge \neg p_{n+1}$ | 4, *De Morgan.* |
| 6 | $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_n \wedge \neg p_{n+1}$ | 5, 2, pela hipótese de indução. |
| 7 | $\neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n \vee p_{n+1}) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_n \wedge \neg p_{n+1}$ | 3, 6, equivalência. |
| 8 | $P(n) \to P(n+1)$ | 2 a 7, D.C. |
| 9 | $\forall x \geq 2, P(x) \to P(x+1)$ | 8, G.U. |
| 10 | $\forall x \geq 2, \neg(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_x) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge ... \wedge \neg p_x$ | 1, 9, Indução matemática. |

$\square$

De modo análogo, trocando os conectivos "$\vee$" por "$\wedge$", podemos também provar a equivalência

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge ... \wedge p_x) \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee ... \vee \neg p_x$$

para todo $x \geq 2$.