Programa de Mestrado Profissional em Matemática
em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

Victor Emmanuel Dias Gomes

Solução Geral das Sequências Recorrentes

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

NITERÓI
Maio/2016

Victor Emmanuel Dias Gomes

Solução Geral das Sequências Recorrentes

Dissertação apresentada por **Victor Emmanuel Dias Gomes** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo

Niterói
2016

G633 Gomes, Victor Emmanuel Dias

Solução geral das sequências recorrentes / Victor Emmanuel Dias Gomes. – Niterói,. RJ : [s.n.], 2016.
91 f.

Orientador: Mitchael Alfonso Plaza Martelo.
Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, 2016.

1. Matemática discreta. 2. Recorrência (Matemática). 3. Fibonacci. 4. Indução matemática. I. Título.

CDD 515.35

Victor Emmanuel Dias Gomes

Solução Geral das Sequências Recorrentes

Dissertação apresentada por **Victor Emmanuel Dias Gomes** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.
Linha de Pesquisa: Matemática discreta.

Aprovada em:17/09/2016

Banca Examinadora

Prof. Mitchael Alfonso Plaza Martelo - Orientador
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Begoña Alarcón Cotillas - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

Prof. Carlos Gustavo Tamm de Araújo Moreira - Membro
Doutor - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada

Prof. Hernan Maycol Falla Luza - Membro
Doutor - Universidade Federal Fluminense

NITERÓI
2016

DEDICATÓRIAS

Dedico este trabalho ao meu amado filho Leônidas.

AGRADECIMENTOS

Ao meu filho Leônidas que apesar de seu pouco tempo de vida, me ensinou o que é o amor.

A minha esposa Monahr, por todo apoio, companheirismo, e paciência durantte a realização deste trabalho.

Aos meus pais, pela vida, incentivo e apoio que sempre me deram.

Ao meu professor orientador Mitchael, pela paciência, dedicação e todo conhecimento que me foi transmitido, por ser para mim um exemplo de professor com seu grande conhecimento e humildade maior ainda.

A todos os professores do PROFMAT.

Aos meus colegas de turma, pelas trocas de experiência e conhecimento e pelos momentos de confraternização.

Aos colegas de trabalho, por todo apoio e incentivo.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que contribuiram de forma direta ou indireta para que o objetivo fosse conquistado.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

RESUMO

O presente trabalho tem como objetivo central o estudo das sequências recorrentes. Expomos aqui definições, classificação, uma breve revisão sobre progressões aritméticas e geométricas e progressões aritméticas de ordem superior. Além disso, será provado a forma das soluções gerais das recorrências lineares com coeficientes constantes de ordens 1 e 2, e também a forma da solução do caso mais geral que são as de ordem k homogêneas, em seguida serão vistos alguns casos de recorrências não lineares. Serão abordados ao longo do texto alguns exemplos clássicos que recaem no tema, como a sequência de Fibonacci, além de aplicações que envolvem progressão aritmética de ordem superior e a relação entre os números de Fibonacci e a razão áurea. Por fim, são propostas duas atividades para serem aplicadas no ensino médio.

Palavras Chaves: Recorrência, Matemática Discreta, Fibonacci, Indução Matemática.

ABSTRACT

This work has as the main objective the study of recurring sequences. We exposed here definitions, classifications, a brief review of arithmetic and geometric progressions and arithmetic progressions of higher order. Furthermore, it will be proved the form of general solutions of linear recurrence with constant coefficients of orders 1 and 2, and also the form of the solution in the general case of the homogeneous order k, then will be seen some cases of non-linear recurrences. Some classic examples, which come to the subject, will be addressed in the text as the Fibonacci sequence plus explanations involving arithmetic progressions of higher order and the relationship between the Fibonacci numbers and the golden ratio. Finally, two activities will be proposed to be implemented in high school.

Keys words: Recurrence, Discrete Mathematics, Fibonacci, Mathematical Induction.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

A elaboração deste trabalho foi motivada pela escassez de materiais que abordam tópicos de sequências recorrentes. Dos poucos encontrados, alguns são muitos superficiais apresentando apenas os casos iniciais, outros sem demonstrações ou explicações apresentando apenas as fórmulas, e ainda há aqueles mais avançados que tratam apenas dos casos mais gerais e utilizam linguagem técnica de difícil entendimento. De forma geral, são incompletos no sentido de que não tratam do assunto como um todo, ou seja, dos casos mais simples até generalizá-los. Assim, o propósito final desta dissertação é de se tornar um material que possa servir de referência para alunos, professores ou qualquer pessoa que esteja interessada no tema, uma vez que este é construído de forma gradativa, desde as definições iniciais, passando pelos casos mais simples até os mais gerais, incluindo as respectivas deduções e demonstrações, com a constante preocupação de utilizar o mínimo de técnicas matemáticas e usar linguagem simples afim de facilitar o entendimento.

O capítulo 2 é iniciado com uma pesquisa sobre o que as leis educacionais nacionais dizem sobre a obrigatoriedade ou não, do ensino das recorrências nos dois níveis de ensino. Após isto, o texto segue com uma breve análise de alguns materiais em relação a como é e o que é abordado do tema, afim de mostrar a realidade dos recursos disponíveis e assim justificar a construção deste.

No capítulo 3, será vista toda a teoria iniciando a partir da definição de sequência, e antes de entrar nas sequências recorrentes de fato, será feita uma revisão sobre progressão aritmética (P.A.) e progressão geométrica (P.G.) que na maioria das vezes é o primeiro contato com o tema pois são vistas no ensino básico mas não levam este título, além de ser uma excelente forma de introduzir o assunto e familiarizar-se com as notações. Após esse estudo inicial a teoria é construída de forma encadeada, com uma sequência de definições, teoremas, lemas e exemplos, de modo a levar o leitor ao entendimento de como chegar na solução geral, dos casos mais simples que são as recorrências lineares homogêneas de primeira ordem, até os casos mais gerais que seriam as recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de ordem k. Nesta parte do texto, pode-se encontrar o resultado mais importante do trabalho, o teorema 3.7.11, que utiliza basicamente indução matemática e nos fornece a possibilidade de chegarmos na solução geral destas recorrências de ordem k. E para terminar o capítulo foram feitos alguns exemplos de sequências recorrentes não lineares.

No capítulo 4 encontram-se algumas aplicações, como nas progressões aritméticas de ordem superior, na relação entre a sequência recursiva de Fibonacci e a razão áurea, e o retângulo áureo com a concha do Náutilo. Já no capítulo 5 são apresentadas duas sugestões de atividades para serem aplicadas no ensino médio com suas respectivas metodologias e o relato da experiência obtida com a aplicação destas.

Por fim, há um tópico no apêndice sobre indução matemática pois esta foi amplamente utilizada ao longo do trabalho e para que não haja a necessidade de procurar informações sobre o assunto em outros textos. Há também outros dois tópicos, um com uma demonstração alternativa para o Teorema 3.7.11, e o outro com uma aplicação deste teorema que seria a prova da independência linear das soluções de uma equação diferencial ordinária de ordem k. Note que esta aplicação está no apêndice pois uma das preocupações na elaboração deste trabalho é que conseguisse atingir grande variedade de leitores, e caso estivesse fora poderia desencorajar o estudo daqueles que não conhecem o assunto.

Capítulo 2

O Ensino da Recorrência

No Brasil o estudo das sequências recorrentes pode aparecer no ensino médio e no ensino superior. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB), assim como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), não são específicos sobre a indicação ou obrigatoriedade do ensino deste conteúdo.

Analisando os PCN do ensino médio, podemos perceber que além de salientarem a importância da matemática como ciência e ferramenta necessária para o entendimento e desenvolvimento da tecnologia, apontam como uma das finalidades desta ciência, o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo deste nível de ensino. Além disso, o documento diz que a elaboração do currículo deve contemplar os conteúdos de maior contextualização e interdisciplinaridade, ou seja, que possam, potencialmente, permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou ainda, a relevância cultural do tema em relação as suas aplicações dentro ou fora da matemática. Esses conteúdos também devem contemplar a *Base Nacional Comum*, que por sua vez, recomenda a abordagem de sequências numéricas para apenas fazer uma associação com funções . No caso progressões aritmética e geométrica com funções afim e exponencial, respectivamente. Desta forma, a matemática do ensino médio fica sem o devido estudo sobre sequências pois aparece de forma muito sutil, deixando de explorar seu potencial, aplicabilidade e conexões.

No ensino superior, mais especificamente na graduação em matemática tanto na licenciatura quanto no bacharelado, segundo o *parecer CNE/CES número 1.302, de 6 de novembro de 2001*, sugere uma organização de um currículo comum que deve ser seguido pelas instituições de ensino superior, e contemplam conteúdos onde o estudo das sequências recorrentes não é obrigatório. Assim, fica a cargo de cada instituição oferecer ou não disciplinas que abordem o tema, a exemplo, o autor do presente trabalho não foi apresentado ao referido assunto em sua graduação.

Tendo em vista a análise feita sobre o ensino da recorrência e também sua importância, inevitavelmente obriga aos interessados em aprender mais sobre o assunto a ter que recorrer a materiais extra curriculares. Contudo, como já mencionado, ao procurar por estes materiais deparam-se com a escassez destes, e os poucos livros e artigos que são encontrados ou são muito sucintos e incompletos ou de difícil compreensão aos menos educados matematicamente. Assim a busca por um entendimeno maior sobre o assunto se torna mais difícil e passa a depender de terceiros, que também não é simples de encontrar, para elucidar dúvidas que certamente irão aparecer.

A seguir será feito uma breve descrição de alguns livros e um artigo que foram utilizados como referência, para mostrar a situação exposta e justisficar o propósito do presente trabalho.

2.1 Análise de Livros

Nesta seção iremos analisar alguns livros e um artigo que tratam deste assunto e como o abordam. Serão utilizados termos técnicos para realizar tal análise, e para aqueles que estão iniciando o estudo sobre o assunto podem encontrá-los no Capítulo 3.

2.1.1 Teoria e Problemas de Matemática Discreta

Ver [10], este livro da coleção *Schaum* aborda o assunto em seu apêndice. Introduz de forma intuitiva com alguns exemplos, e comenta que as progressões aritmética e geométrica, que já conhecidas pela maioria, se não todos os leitores, podem ser definidas recursivamente.

Ao definir as recorrências, trata apenas das lineares com coeficientes constantes, seguindo com vários exemplos. Porém não expõe solução.

Ao adentrar na seção de soluções, começa definindo recorrência linear homogênea de segunda ordem e associa imediatamente a equação característica. Enuncia dois teoremas de como obter a solução geral deste tipo de recorrência, o caso em que as raízes da equação característica são iguais e o caso em que são diferentes, porém não os prova e nem fornece explicações sobre o motivo das soluções possuírem tal forma, e segue a seção com exemplos. Ainda comenta o caso em que as raízes são complexas dizendo que o teorema também vale, mas que não seria abordado pois está além dos objetivos do livro.

Para encerrar o apêndice, define uma recorrência na forma mais geral, de ordem k, e também sem maiores explicações associa a equação característica. Faz duas observações, também sem provalá-las. A primeira diz que a combinação linear de duas soluções também é solução em recorrência homogêneas, e a segunda trata da forma das soluções quando uma raíz possui multiplicidade maior que 1, e finaliza afirmando que a combinação linear desta também é solução . E com mais exemplos, o livro encerra o assunto.

De forma geral, o texto trata muito superficialmente do assunto deixando a desejar para aqueles que buscam um melhor entendimento sobre o assunto, porém sua linguagem é de fácil entendimento. Isso se explica pois o livro não é voltado para o curso de matemática, mas para as engenharias e computação, e tem por finalidade nutrir a necessidade de alguns pré requisitos para outros tópicos.

2.1.2 Introduction to Combinatorial Mathematics

Ver [9], este livro introduz o assunto com exemplos, simples, mas que induz o leitor ao entendimento do que são sequências construídas recursivamente.

Define recorrência linear com coeficientes constantes de qualquer ordem e as chama de equação em diferença. Explica o que seria uma recorrência homogênea e prova que a soma das soluções da parte homogêna com uma solução particular também é solução . Além disso, demonstra, no apêndice do capítulo, que esta solução é unicamente determinada pelas condições iniciais.

Sugere sem maiores explicações a forma da solução de uma recorrência linear homogênea, $a_n = A\alpha_1^n$, chamando α_1 de *raiz característica*. A partir daí, deduz a equação característica. Afirma, dizendo ser de fácil verificação, que se as raízes características forem distintas, então a combinação linear das soluções também é solução .

Para o caso em que as raízes possuem multiplicidade maior que um, assim como o anterior, não fornece explicações sobre a forma da solução, apenas a apresenta e prova a afirmação.

Comenta o caso em que as raízes características são complexas. Explica que em função do conjugado aparecem em pares, e sugere escrevê-las na forma trigonométrica para então explicitar a forma da solução.

O texto também aborda recorrências não lineares, e apresenta técnicas para resolver algumas classes deste tipo de recorrência. Encerra o capítulo definindo e resolvendo exemplos de recorrência com dois índices.

Fazendo uma análise geral sobre como o livro apresenta o assunto, percebe-se que o autor preferiu uma abordagem geral, assim não recorrendo a casos mais simples que facilitariam o entendimento do leitor. Ou seja, caso uma pessoa menos educada matematicamente tivesse interesse sobre o assunto, este texto seria de difícil compreenssão. Porém o texto aborda muitos apectos relativos *à* recorrência, tornando-o assim um dos mais completos, mesmo sendo omitidos algumas demonstrações e explicações.

2.1.3 A Matemática do Ensino Médio - Volume 2

Ver [8], o texto começa definindo o que seriam sequências definidas recursivamente e passa uma seção inteira com exemplos.

Define recorrência linear de primeira ordem, e resolve diversos exemplos de forma intuitiva. Enuncia e prova um teorema que auxilia na solução de alguns casos de recorrências deste tipo.

Ao definir recorrência linear de segunda ordem, se concentra primeiramente nas homogêneas e já estabelece, sem explicações, a equação característica associada. Para tratar das soluções é fornecida a forma da solução geral para os casos em que as raízes possuem multiplicidade dois e um, também sem explicações, mas prova as afirmações e que são unicamente determinadas pelas condições iniciais. Comenta também, o caso em que as raízes da equação característica são complexas, e fornece a solução geral para este caso.

Para encerrar o assunto trata das recorrências lineares de segunda ordem não homogênea, onde enuncia e prova um teorema que garante a solução destas.

Para primeira leitura sobre o assunto este livro seria um dos mais indicados, pois a abordagem é gradativa e a linguagem é de fácil compreensão, sendo acessível não somente para estudantes de nível superior, mas também para os discentes de nível médio. Em contrapartida, caso o leitor queira aprofundar um pouco mais sobre o assunto apenas este livro já não será suficiente, pois não há, por exemplo, tópicos que tratem de recorrência de ordens maiores que dois.

2.1.4 Coleção Elementos da Matemática - Volume 3

Ver [5], é iniciado o assunto de forma direta, sem exemplos e classificando-as quanto a linearidade e grau.

Ainda de forma bastante direta define as recorrências lineares de primeira ordem, fazendo analogia com progressões aritmética e geométrica, além de enunciar e provar um teorema que trata da solução geral destas.

Em seguida, ao falar sobre recorrência linear de segunda ordem, começa com as homogêneas e prova a solução geral sem o auxílio da equação característica associada, e por não utilizá-la não houve a necessidade de falar sobre o caso em que suas raízes possuem multiplicidade, apenas nos coeficientes que neste texto é sempre constatnte. Após um exemplo, comenta sobre a existência e mostra a utilização da equação característica para encontrar a solução geral.

Posteriormente mostra como chegar na solução geral de uma recorrência linear de segunda ordem não homogênea.

E por fim é tratado das recorrêncais não lineares e faz diversos exemplos.

Como este livro é destinado para alunos do ensino médio que desejam se preparar para fazer concursos, a abordagem teórica é sucinta e sem muita preocupação com a formalidade nas demonstrações, dando uma maior ênfase nos exmplos e nos exercícios. Sendo assim o assunto é tratado de forma reduzida e com isso muitos tópicos importantes foram omitidos deixando a desejar neste quesito, o que é justificado pelo seu fim. Assim, este texto seria apenas para aqueles que necessitam apenas de noções mais básicas sobre o assunto.

2.1.5 Sequências Recorrentes

Ver [11], este artigo começa definindo recorrências lineares de ordem k, e mostrando alguns exemplos que recaem ou poderiam ser encarados como uma recorrência, mas sem pretenções de explicitar fórmulas ou técnicas para obtenção do termo geral. Termina a parte inicial do texto afirmando, sem demonstrar, que o conjunto solução se trata de um espaço vetorial.

Na seção seguinte, começa com o exemplo da sequência de *Fibonacci*, e induz, afim de obter o do termo geral da sequência, a idéia de uma progressão geométrica que satisfaça a recorrência. E assim chega na equação caracerística associada a recorrência, mas não atribui este nome, e determina o termo geral. E segue provando mais alguns resultados e fornece um exemplo de uma recorrência não linear.

Em seguida, mostra como associar a equação característica para recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de ordem k, e prova de duas maneiras diferentes a forma do seu termo geral. Termina o artigo resolvendo diversos exemplos.

De todos os textos utilizados como fonte de pesquisa deste trabalho, estas notas foram o material mais completo pois aborda a solução geral incluindo o caso das raízes complexas com multiplicidade maior que um da equação característica. Porém, por este texto se tratar de uma adaptação de um mini-curso minstrado pelo autor na *II Bienal da SBM*, ele aborda o assunto de maneira bem direta admitindo que o leitor já possua algum conhecimeno prévio sobre o assunto, familiaridade com os símbolos e notações matemáticas, que é largamente utilizado, e bastante habilidade em operar com estes pois há omissões de etapas nas demonstrações e resoluções dos exemplos. Além disso, não mostra os casos iniciais, como por exemplo, recorrência linear de primeira ordem, que facilitariam o entendimento do leitor. Por isso, este texto se torna pouco recomendável para aqueles que querem iniciar o estudo sobre o assunto, porém ideal para aqueles que querem aprofundá-lo.

Capítulo 3

Fundamentação Teórica

O pensamento recursivo é um artifício matemático muito utilizado, até mesmo intuitivamente por aqueles menos educados matematicamente, que pode definir entres outras coisas, as sequências.

Mas antes de começar o estudo vamos entender mais sobre sequência.

3.1 Sequência

Utilizaremos a definição que pode ser encontrada em [1].

Definição 3.1.1 : *Uma sequência de números reais é uma função* $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$*, que associa a cada número natural n um número real* x_n*, chamado n-ésimo termo da sequência. Onde* $\mathbb{N}$ *é o conjunto dos números naturais, e* $\mathbb{R}$ *o conjunto dos números reais.*

Escreve-se $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ ou $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) , para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é x_n.

É importante ter em mente que a sequência não é o mesmo que o conjunto formado pelos seus termos, por exemplo, a sequência (1,1,. . . ,1,. . .) não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$. Ou então, as sequências (0,1,0,1,. . .) e (0,0,1,0,0,1,. . .) são diferentes mas o conjunto dos seus termos é o mesmo, igual a $\{0, 1\}$.

Observação :

- Uma sequência é dita infinita quando todo termo desta possui um sucessor, ou seja, possui infinitos termos.
- Uma sequência é dita finita, se esta não é infinita, ou seja, há um termo que não possui sucessor e este será o último da sequência. Portanto, há uma quantidade finita de termos.

Exemplo 1 : $(1, 2, 3, 4, 6, 12)$ *é a sequência, finita, dos divisores inteiros positivos de 12 dispostos em ordem crescente.*

Exemplo 2 : $(2, 3, 5, 7, 11, \ldots)$ *é a sequência, infinita, dos números primos positivos.*

Exemplo 3 : $(2, 4, 6, 8, \ldots, 2x, \ldots)$ *é a sequência , infinita, dos múltiplos inteiros positivos de 2.*

3.2 Progressões

O estudo das sequências aparece timidamente no ensino médio travestidos de progressões aritméticas e geométricas. Então iremos fazer uma revisão sobre o assunto.

3.2.1 Aritmética

A seguir vamos usar a definição de progressão aritmética segundo [3] e [2].

Definição 3.2.1 : *Chama-se de progressão aritmética (P.A.) uma sequência definida por:*

$$a_n = a_{n-1} + r,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \ e\ r \in \mathbb{R}.\ \textit{Onde } r \textit{ é chamado de razão.}$$

Equivalentemente, poderíamos definir da seguinte forma:

É toda sequência em que a diferença entre um termo e seu antecessor é constante. Esta constante recebe o nome de razão (r).

Assim, uma P.A. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do anterior com uma constante r dada.

Exemplo 4 :

- $(1, 3, 5, 7, 9, \ldots)$, *em que* $a_1 = 1$ *e* $r = 2$. *Note que esta P.A.é infinita.*
- $(4, \frac{11}{3}, \frac{10}{3}, 3, \frac{8}{3})$, *em que* $a_1 = 4$ *e* $r = -\frac{1}{3}$. *Note que esta P.A.é finita.*
- $(0, -2, -4, -6, -8, \ldots)$, *em que* $a_1 = 0$ *e* $r = -2$. *Note que esta P.A.é infinita.*

Termo Geral

Em uma P.A. para avançar dois termos, a partir de um dado termo, basta somar 2 razões. Para avançar 3 termos basta somar 3 razões, e assim sucessivamente. Então, se dado a_1 e quisermos descobrir o a_n basta somar $n-1$ razões, logo, temos que $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$, onde a_1 é o primeiro termo, r é a razão e a_n é o n-ésimo termo da sequência.

Mas esta fórmula foi apenas deduzida intuitivamente, e portanto devemos prová-la.

Teorema 3.2.1 : *Numa P.A. se* a_1 *é o primeiro termo e* r *é a razão, então o n-ésimo termo é dado por:*

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r}.$$

Prova: Pelo princípio da indução finita;

1. Para n=1, temos: $a_1 = a_1 + (1 - 1).r$
2. Vamos admitir a validade da fórmula para algum $n \in \mathbb{N}$: $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$

Agora provaremos a validade do resultado para $n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + r \\ &= (a_1 + (n-1)\cdot r) + r \\ &= a_1 + [(n-1)+1]\cdot r \\ &= a_1 + [(n+1)-1]\cdot r \end{aligned}$$

Então pelo princípio da indução finita, $\mathbf{a_n = a_1 + (n-1)\cdot r}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exemplo 5 *: Em uma progressão aritmética o terceiro termo é 4, e a razão é -3. Determine o nono termo.*

Solução : Temos que $a_3 = a_1 + 2r$, pela fórmula do termo geral, e como $a_3 = 4$, $r = -3$ temos que $4 = a_1 + 2.(-3)$, de onde $a_1 = 10$, assim

$$\begin{aligned} a_9 &= a_1 + 8r \\ &= 10 - 24 \\ &= -14 \end{aligned}$$

Portanto o nono termo é -14.

Note que esta notação sugere que temos sempre que recorrer ao primeiro termo, e isso não é verdade. Podemos ser mais diretos e para isto basta utilizar a ideia de somar razões.

Então para descobrirmos o n-ésimo termo a partir de um p-ésimo dado, basta somar a este termos $n-p$ razões. Daí,

$$\mathbf{a_n = a_p + (n-p).r}$$

Refazendo o exemplo 5:

$$\begin{aligned} a_9 &= a_3 + (9-3)\cdot r \\ &= 4 + 6\cdot(-3) \\ &= -14 \end{aligned}$$

Este tipo de notação, como vimos, reduz a quantidade de contas.

Soma dos n Primeiros Termos de uma P.A.

Para chegarmos na fórmula que fornece a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética, utilizaremos dois teoremas preliminares.

Teorema 3.2.2 *: A soma dos n primeiros números naturais é* $\dfrac{n(n+1)}{2}$*. Ou seja,*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

.

Prova: Pelo princípio da indução finita.

1. Para n=1, temos: $1 = \dfrac{1\cdot(1+1)}{2}$
2. Suponha verdadeira a fórmula para para algum $n \in \mathbb{N}$: $1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

   Agora provaremos a validade do resultado para $n+1$:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\cdots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

   Então pelo princípio da indução finita, $\mathbf{1+2+3+\cdots+n} = \dfrac{\mathbf{n(n+1)}}{\mathbf{2}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

□

Teorema 3.2.3 *: Em toda P.A. tem-se :* $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}\cdot r$*, onde* S_n *é a soma dos n primeiros termos da P.A.*

Prova: Temos

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_1 + 2r \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 + (n-1)\cdot r, \end{aligned}$$

somando ambos os membros, tem-se

$$\begin{aligned} a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n &= \underbrace{a_1+a_1+\cdots+a_1}_{n\ vezes} + (r+2r+\cdots+(n-1)r) \\ &= na_1 + (1+2+\cdots+(n-1))\cdot r. \end{aligned}$$

Pelo teorema 3.2.2, temos $1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$, então:

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}\cdot r.$$

Portanto,

$$\mathbf{S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r}$$

□

Teorema 3.2.4 : *Em uma P.A. tem-se:* $S_n = \dfrac{n(a_1 + a_n)}{2}$.

Prova: Pelo teorema 3.2.3,

$$\begin{aligned} S_n &= na_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot r \\ &= \frac{2na_1 + n(n-1)r}{2} \\ &= \frac{n[2a_1 + (n-1)r]}{2} \\ &= \frac{n[a_1 + a_1 + (n-1)r]}{2}. \end{aligned}$$

Decorre do Teorema 3.2.1

$$\mathbf{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}}.$$

□

Exemplo 6 : *Determinar a soma dos n primeiros números ímpares.*

Temos, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \dfrac{(1 + 2n - 1)n}{2} = n^2$.

P.A. de Ordem Superior

Antes de definir progressão aritmética de ordem superior, iremos precisar de uma definição preliminar.

Definição 3.2.2 : *O operador diferença para sequências, denotado por* Δ*, é definido por*

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n.$$

Δa_n *é conhecido como* **primeira diferença**. *E assim temos que*

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_n &= \Delta(\Delta a_n) \\ &= \Delta(a_{n+1} - a_n) \\ &= \Delta a_{n+1} - \Delta a_n \\ &= a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n, \end{aligned}$$

é conhecido como **segunda diferença**, *e no caso mais geral*

$$\begin{aligned} \Delta^k a_n &= \Delta(\Delta^{k-1} a_n) \\ &= \Delta(\Delta^{k-2} a_{n+1} - \Delta^{k-2} a_n) \\ &= \Delta^{k-1} a_{n+1} - \Delta^{k-1} a_n \end{aligned}$$

que é conhecida como **diferença de ordem k.**

Observamos pela definição 3.2.2, que o operador diferença, Δ, é munido da propriedade da distributiva. Ou seja,

$$\Delta(\Delta^p a_n + \Delta^q b_n) = \Delta^{p+1} a_n + \Delta^{q+1} b_n,$$

onde $p, q \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências dadas.

Uma outra forma de definir que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética, seria se Δa_n for constante.

Definição 3.2.3 *: Uma progressão aritmética de ordem k é uma sequência tal que a diferença entre seus termos é uma progressão aritmética de ordem $k-1$.*

Para ilustrar melhor a definição acima, dizemos que uma P.A. é de segunda ordem se a diferença de cada termo com seu anterior formar uma nova progressão aritmética com razão não nula.

Exemplo 7 *: A sequência* $a_n = (1, 3, 6, 10, 15, 21, \ldots)$ *é uma P.A. de segunda ordem, pois* $(\Delta a_n) = (a_{n+1} - a_n) = (2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$*, é uma P.A. de razão* 1.

Exemplo 8 *: (Profmat - Exame de Qualificação 2012- Adaptada) Considere a sequência definida por:*

$a_1 = 1$
$a_2 = 1 + 2$
$a_3 = 2 + 3 + 4$
$a_4 = 4 + 5 + 6 + 7$
$\vdots$

Vemos, então, que

$$\begin{aligned} (a_n) &= (1, 3, 9, 22, 45, 81, \cdots) \\ (\Delta a_n) &= (2, 6, 13, 23, \cdots) \\ (\Delta^2 a_n) &= (4, 7, 10, 13, \cdots) \end{aligned}$$

Como $(\Delta^2 a_n)$ *é uma P.A. de razão* 3*, então* (a_n) *é uma P.A. de terceira ordem.*

3.2.2 Geométrica

A seguir vamos usar a definição de progressão geométrica segundo [3] e [2].

Definição 3.2.4 *: Chama-se de progressão geométrica (P.G.) uma sequência definida por:*

$a_n = a_{n-1} \cdot q$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ *e* $q \in \mathbb{R}$. *Onde* q *é chamado de razão.*

Equivalentemente, poderíamos definir da seguinte forma:

É toda sequência na qual é constante o quociente entre um termo e seu antecessor. Esta constante recebe o nome de razão (q).

Assim, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior com uma constante q dada.

Exemplo 9 *:*

- $(1, 2, 4, 8, 16, \ldots)$, *em que* $a_1 = 1$ *e* $q = 2$
- $(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots)$, *em que* $a_1 = 1$ *e* $r = \frac{1}{3}$
- $(2, -4, 8, -16, 32, \ldots)$, *em que* $a_1 = 2$ *e* $r = -2$

Termo Geral

Em uma P.G., para avançar dois termos a partir de um dado termo, basta multiplicar por 2 razões. Para avançar 3 termos basta multiplicar por 3 razões, e assim sucessivamente. Então, se dado a_1 quisermos descobrir o a_n, basta multiplicá-lo por $n-1$ razões, logo, temos que $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, onde a_1 é o primeiro termo, q é a razão e a_n é o n-ésimo termo da sequência.

Mas esta fórmula foi apenas deduzida intuitivamente, e portanto devemos prová-la.

Teorema 3.2.5 *: Numa P.G. se* a_1 *é o primeiro termo e* q *é a razão, então o n-ésimo termo é dado por:*

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Prova: Pelo princípio da indução finita,

1. Para n=1, temos: $a_1 = a_1 \cdot q^{1-1}$
2. Admitamos a validade da fórmula para algum $n \in \mathbb{N}$: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Agora provaremos a validade do resultado para $n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \cdot q \\ &= (a_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q \\ &= a_1 \cdot q^{(n-1)+1} \\ &= a_1 \cdot q^{(n+1)-1}. \end{aligned}$$

Então pelo princípio da indução finita, $\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}, \forall n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Exemplo 10 *: Em uma P.G. o quarto termo é* 1*, e a razão é* 3*. Determine o oitavo termo.*

Solução : Temos que $a_4 = a_1 q^3$, pela fórmula do termo geral, como $a_4 = 1$ e $q = 3$

$$\begin{aligned} 1 &= a_1 \cdot 3^3 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{27} \\ a_8 &= a_1 \cdot q^7 \\ a_8 &= \frac{1}{27} \cdot 2187 \\ a_8 &= 81 \end{aligned}$$

Portanto o oitavo termo é 81.

Perceba que com esta notação dá a impressão de que temos sempre que recorrer ao primeiro termo, e isso não é verdade. Podemos ser mais diretos e para isto basta utilizar a ideia de multiplicar razões.

Então para descobrirmos o n-ésimo termo a partir de um p-ésimo dado, basta multiplicá-lo por $n - p$ razões. Daí,

$$\mathbf{a_n = a_p \cdot q^{(n-p)}}.$$

Refazendo o exemplo 10:

$$\begin{aligned} a_8 &= a_4 \cdot q^{(8-4)} \\ a_8 &= 1 \cdot 3^4 \\ a_8 &= 81 \end{aligned}$$

Este tipo de notação, como vimos, agiliza as contas.

Observação: Uma P.G. é modelada por uma função exponencial, do tipo $y = a^{bx}$. De fato, a função exponencial é definida como sendo a única com essa propriedade.

Soma dos Termos de uma P.G. Finita

Dada uma progressão geométrica, chamaremos de S_n a soma dos seus n primeiros termos. Temos,

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \end{aligned}$$

mutiplicando ambos os membros pela razão, segue que

$$q.S_n = a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n.$$

Fazendo a diferença das equações ficamos com

$$\begin{aligned} qS_n - S_n &= a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n - (a_1 + a_1 \cdot q + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}) \\ S_n \cdot (q - 1) &= a_1 \cdot q^n - a_1, \end{aligned}$$

logo,

$$\mathbf{S_n} = \frac{\mathbf{a_1(q^n - 1)}}{\mathbf{q - 1}}, \ q \neq 1.$$

Mas esta fórmula foi apenas deduzida intuitivamente, e portanto devemos prová-la.

Prova: Pelo princípio da indução finita,

1. Para n=1, temos: $S_1 = \dfrac{a_1(q^1 - 1)}{q - 1} = a_1$.

2. Admitamos a validade da fórmula para algum $n \in \mathbb{N}$: $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Agora provaremos a validade do resultado para $n + 1$:

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= S_n + a_{n+1} \\ &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} + a_1 \cdot q^n \\ &= \frac{a_1 \cdot q^n - a_1 + a_1 \cdot q^{n+1} - a_1 q^n}{q - 1} \\ &= \frac{-a_1 + a_1 \cdot q^{n+1}}{q - 1} \\ &= \frac{a_1(q^{n+1} - 1)}{q - 1}. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio da indução finita, $\mathbf{S_n} = \dfrac{\mathbf{a_1(q^n - 1)}}{\mathbf{q - 1}}, \forall \mathbf{n} \in \mathbb{N}$.

$\square$

Note que para $q = 1$ temos uma progressão geométrica constante, o que significa que todos os seus termos são iguais, então dada uma P.G. com razão unitária, temos que

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + a_1 + \cdots + a_1 \\ &= n \cdot a_1. \end{aligned}$$

A prova desta fórmula será deixada a cargo do leitor.

Soma dos Termos de uma P.G. Infinita

Começaremos exemplificando:

Exemplo 11 *: Considere a P.G. infnita* $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots)$. *Qual é a soma dos termos?*

Solução : Formemos a sequência $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots)$ em que:

$$\begin{aligned}
S_1 &= \frac{1}{2} \\
S_2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\
S_3 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \\
&\vdots \\
S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

Esta última sequência converge para 1, pois:

$$\lim_{x \to +\infty} S_n = \lim_{x \to +\infty} (1 - \frac{1}{2^n}) = 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1.$$

Quer dizer que, quanto maior for o número de termos somados da P.G. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots)$, mais nos aproximamos de 1. Dizemos então, que a soma de seus infinitos termos é igual a 1.

Teorema 3.2.6 *: Se $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ é uma P.G. com razão q , $-1 < q < 1$, então:*

$$\mathbf{S_\infty = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \frac{a_1}{1 - q}}.$$

Prova: Temos,

$$\begin{aligned}
S_n - \frac{a_1}{1-q} &= \frac{a_1 - a_1 \cdot q^n}{1 - q} - \frac{a_1}{1-q} \\
&= -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n
\end{aligned}$$

observa-se que $-\dfrac{a_1}{1-q}$ é constante e para, $-1 < q < 1$, temos que $\lim_{x \to +\infty} q^n = 0$, assim

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} (S_n - \frac{a_1}{1-q}) &= \lim_{x \to +\infty} -\frac{a_1}{1-q} \cdot q^n \\
&= -\frac{a_1}{1-q} \cdot \lim_{x \to +\infty} q^n \\
&= -\frac{a_1}{1-q} \cdot 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Então,

$$\mathbf{S_\infty = \lim_{x \to +\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}}.$$

$\square$

Produto dos n Primeiros Termos de uma P.G.

Chamaremos de $\mathbf{P_n}$, o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, vamos deduzir a fórmula. Seja a sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma P.G. de razão q, observando que

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1 \\
a_2 &= a_1 \cdot q \\
a_3 &= a_1 \cdot q^2 \\
&\vdots \\
a_n &= a_1 \cdot q^{n-1},
\end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros das equações acima, temos

$$\begin{aligned}
a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_n &= \underbrace{(a_1 \cdot a_1 \cdot a_1 \cdots a_1)}_{n-fatores}(q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdots q^{n-1}) \\
&= (a_1)^n \cdot q^{1+2+3+\cdots+n-1}, \quad \textit{pelo teorema} \ \ (3.2.2) \\
&= (a_1)^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Temos, agora, que provar este resultado. Então, enunciaremos essa fórmula como um teorema.

Teorema 3.2.7 : *Em toda P.G. tem-se que:*

$$\mathbf{P_n = a_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}}.$$

Prova: Pelo princípio da indução finita. Será deixada a cargo do leitor a prova deste teorema.

3.3 Recorrência

Agora que já vimos as progressões, que são casos de sequências definidas recursivamente, e melhoramos o entendimento deste conceito, iremos generalizá-lo.

Definição 3.3.1 : *Uma sequência é dita recorrente, ou que é uma* **recorrência**, *quando a relação entre seus termos é dada por uma equação de recorrência, que é uma expressão matemática que relaciona um termo da sequência em função do(s) termo(s) anterior(es).*

Por exemplo, podemos definir uma sequência (a_n) de acordo com a equação de recorrência $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2, n \geq 3$. Neste caso, foi relacionado um termo com dois anteriores.

Vejamos alguns problemas que motivam o estudo e serão resolvidos a medida que a teoria for avançando.

Exemplo 12 *: Qual é o sexto termo da sequência de números reais definida por $x_{n+1} = x_n + 7$, com $x_1 = 2$?*

Exemplo 13 *:* **(Pizza de Steiner)** *Qual é o número máximo de pedaços em que uma pizza pode ser dividida por n cortes retilíneos? Equivalentemente, qual é o úmero máximo de regiões em que o plano pode ser dividido por n retas?*

Exemplo 14 *:* **(O problema da reprodução dos coelhos)** *Um homem pôs um par de filhotes de coelhos num lugar cercado de muro por todos os lados. Quantos pares de coelhos podem ser gerados a partir desse par em um ano se, supostamente, todo mês cada par dá a luz a um novo par, que é fértil a partir do segundo mês?*

3.4 Classificação das Recorrências

Vamos aqui diferenciar os tipos de recorrência.

3.4.1 Linearidade

Definição 3.4.1 *: Uma equação de recorrência é dita linear, se é da forma $x_n = f_{n-1}(n)x_{n-1} + f_{n-2}(n)x_{n-2} + \cdots + f_1(n)x_1 + h(n)$, onde $f_i(n)$ com $1 \leq i \leq n-1$ e $h(n)$, são funções em n. Ou seja, são aquelas em que o expoente dos $x_{n's}$ é igual a 1.*

Exemplo 15 *: $x_{n+1} = (n-2)x_n + 3^n$.*

Exemplo 16 *: $x_{n+2} = 3x_{n+1} - 2x_n$.*

Definição 3.4.2 *: As equações de recorrência são ditas não lineares, se não forem lineares, ou seja, se ao menos um expoente dos $x_{n's}$ for maior que 1.*

Exemplo 17 *: $x_{n+2}^4 = x_n^2$.*

Exemplo 18 *: $x_{n+1}^2 - 3x_n^2 = f(n)$.*

3.4.2 Homogêneas e Não Homogêneas

Definição 3.4.3 *: Recorrências homogêneas são aquelas que não possuem termos independentes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ou seja, depende exclusivamente dos termos anteriores.*

Exemplo 19 *: $x_n^3 - 3x_{n-1} = x_{n-2}$.*

Definição 3.4.4 *: Recorrências não homogêneas são aquelas que possuem termos independentes de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ou seja, além dos termos anteriores, esta recorrência depende de alguma outra função.*

Exemplo 20 *: $x_{n+1} = 4x_n + 4^n$.*

3.4.3 Ordem

Definição 3.4.5 *: A ordem de uma recorrência é determinada pela diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos que aparecem na a equação de recorrência.*

Exemplo 21 *:* $x_n = x_{n-2} + \dfrac{4}{x_{n-3}}, n \geq 4$, *esta recorrência é de terceira ordem pois* $n - (n-3) = 3$.

3.5 Recorrência Linear de Primeira Ordem

Segundo as definições 3.4.1 e 3.4.5, uma recorrência é dita linear de primeira ordem, se um termo pode ser expressado em função do termo imediatamente anterior. Ou seja, se podemos escrever x_{n+1} em função de x_n, então ela é do tipo $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$ onde $f(n)$ e $g(n)$ são funções em n.

Exemplo 22 *:* $x_{n+1} = 5x_n$.

Exemplo 23 *:* $x_{n+1} - nx_n = (n+1)!$.

Resolução das Homogêneas: Dada a recorrência $a_{n+1} = f(n)a_n$, temos

$$
\begin{array}{rcl}
a_2 & = & f(1) \cdot a_1 \\
a_3 & = & f(2) \cdot a_2 \\
a_4 & = & f(3) \cdot a_3 \\
 & \vdots & \\
a_{n+1} & = & f(n) \cdot a_n,
\end{array}
$$

multiplicando ambos os membros das igualdades

$$
\begin{array}{rcl}
a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots a_n \cdot a_{n+1} & = & f(1) \cdot a_1 \cdot f(2) \cdot a_2 \cdot f(3) \cdot a_3 \cdots f(n) \cdot a_n \\
a_{n+1} & = & a_1 \cdot f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(n) \\
a_{n+1} & = & a_1 \cdot \displaystyle\prod_{k=1}^{n} f(k), \quad com\ a_1 \in \mathbb{R}.
\end{array}
$$

Note que a_1 não foi dado, e por isso temos uma família de soluções, pois depende apenas desta constante real. Caso contrário, se a_1 fosse determinado, a solução seria única.

Chamaremos de solução fundamental o caso em que $a_1 = 1$, portanto, dada uma recorrência da forma $a_{n+1} = f(n)a_n$ sua solução fundamental é :

$$\mathbf{a_n} = \prod_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{f(k)}.$$

Perceba ainda que qualquer outra solução será um mútiplo da fundamental. Além disso, não há grandes dificuldades para resolver as recorrências homogêneas. Vejamos um exemplo:

Exemplo 24 *: $x_{n+1} = 5x_n$.*

Neste caso $f(n) = 5,\ \forall n$, e para resolvermos basta considerar:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5x_1 \\ x_3 &= 5x_2 \\ x_4 &= 5x_3 \\ &\vdots \\ x_n &= 5x_{n-1}. \end{aligned}$$

Se multiplicarmos os membros, temos $x_n = 5^{n-1}x_1$. Como não foi dado o valor inicial, ou seja o valor de x_1, a solução desta recorrência é uma família de soluções, $x_n = K.5^{n-1}$ com $K \in \mathbb{R}$.

De volta à P.G.

Vimos que uma recorrência linear de primeira ordem homogênea pode ser escrita da forma $a_{n+1} = f(n)a_n$. Se $f(n)$ for uma constante diferente de 1, digamos $f(n) = q$, então a recorrência fica da forma

$$a_{n+1} = q \cdot a_n,$$

e resolvendo esta recorrência, como acabamos de aprender, ficamos com

$$\mathbf{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}, n \geq 1},$$

que trata-se do termo geral de uma progressão geométrica de razão q.

Resolução das Não Homogêneas:

Primeiramente abordaremos o caso em que $f(n) = 1$, então a recorrência fica da forma $x_{n+1} = x_n + g(n)$. Vejamos:

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 + g(1) \\ x_3 &= x_2 + g(2) \\ x_4 &= x_3 + g(3) \\ &\vdots \\ x_n &= x_{n-1} + g(n-1), \end{aligned}$$

somando ambos os membros das igualdades

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 + \cdots + x_n &= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + g(1) + g(2) + \cdots + g(n-1) \\ x_n &= x_1 + g(1) + g(2) \cdots + g(n-1). \end{aligned}$$

Daí,

$$\mathbf{x_n = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} g(k)}, \quad \mathit{com}\ x_1 \in \mathbb{R}.$$

Note que x_1 não foi dado, e por isso temos uma famíia de soluções, pois depende apenas desta constante real. Caso contrário, se x_1 fosse determinado, a solução seria única.

Chamaremos de solução fundamental o caso em que $x_1 = 0$, portanto, dada uma recorrência da forma $x_{n+1} = x_n + g(n)$ sua solução fundamental é :

$$\mathbf{x_n} = \sum_{\mathbf{k=1}}^{\mathbf{n-1}} \mathbf{g(k)}.$$

Perceba ainda que qualquer outra solução será a fundamental, a menos de uma constante, ou seja, a fundamental mais uma constante.

Resolvendo o Exemplo 12: $x_{n+1} = x_n + 7, \ com \ x_1 = 2.$

Neste caso, o primeiro termo está determinado, e com isso deveremos achar uma solução única. Temos

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + 7 = 9 \\
x_3 &= x_2 + 7 = 16 \\
x_4 &= x_3 + 7 = 23 \\
x_5 &= x_4 + 7 = 30 \\
x_6 &= x_5 + 7 = 37.
\end{aligned}$$

Portanto, o sexto termo é 37.

Poderíamos utilizar a solução fundamental, ou seja $x_n = x_1 + 7 \cdot (n-1)$, que para $n = 6$, resulta em $x_6 = 37$.

Veja o Exemplo 13.

Obviamente $x_1 = 2$, então

$$\begin{aligned}
x_2 &= 4 \Rightarrow x_2 = x_1 + 2 \\
x_3 &= 7 \Rightarrow x_3 = x_2 + 3 \\
x_4 &= 11 \Rightarrow x_4 = x_3 + 4 \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + n
\end{aligned}$$

onde x_n representa a quantidade máxima de partes em que a pizza (plano) foi dividida por n retas. Resolvendo a recorrência

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_1 + 2 \\
x_3 &= x_2 + 3 \\
&\vdots \\
x_n &= x_{n-1} + n,
\end{aligned}$$

somando os membros das igualdades

$$\begin{aligned}
x_n &= x_1 + 2 + 3 + \cdots + n \\
&= x_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(k+1) \\
&= 2 + \sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\
&= 2 + \frac{n(n-1)}{2} + (n-1) \\
&= \frac{n(n-1) + 2 + 2n}{2} \\
&= \frac{n^2 + n + 2}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto n retas dividem a pizza, ou plano, em no máximo $\dfrac{n^2+n+2}{2}$ regiões.

De volta à P.A.

Vimos que uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea com $f(n) = 1$ pode ser escrita da forma $a_{n+1} = a_n + g(n)$. Note que se $g(n)$ for uma constante não nula, digamos $g(n) = r$, então a recorrência fica da forma

$$a_{n+1} = a_n + r,$$

e resolvendo esta recorrência ficamos com

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n-1) \cdot r, n \geq 2}$$

que trata-se do termo geral de uma progressão aritmética de razão r.

Vamos encontrar a solução de uma recorrência não homogênea no caso em que $f(n) \neq 1$. E para nos ajudar, há um teorema que nos faz recair em uma recorrência da forma $x_n = x_{n-1} + g(n)$, e o enunciaremos a seguir.

Teorema 3.5.1 : *Se a_n é uma solução não nula da recorrência $y_{n+1} = f(n)y_n$, e b_n é uma solução de $z_{n+1} = z_n + \dfrac{g(n)}{f(n)a_n}$, então $x_n = a_n \cdot b_n$ é uma solução de $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$.*

Prova: Por hipótese, $a_{n+1} = f(n)a_n$ e $b_{n+1} = b_n + \dfrac{g(n)}{f(n)a_n}$. Multiplicando a_{n+1} por b_{n+1}, temos:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} \cdot b_{n+1} &= f(n)a_n \cdot b_n + f(n)a_n \cdot \left(\frac{g(n)}{f(n)a_n}\right) \\
&= f(n)a_nb_n + g(n).
\end{aligned}$$

Assim, percebemos que $x_n = a_n \cdot b_n$ é solução de $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$.

$\square$

Já que sabemos determinar uma solução para a recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$, o próximo teorema nos permitirá encontrar a solução geral.

Teorema 3.5.2 : *Se x_n é uma solução da recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$, então qualquer outra solução h_n, será da forma $h_n = x_n + C \cdot F_n$, onde $C \in \mathbb{R}$ e F_n é a solução fundamental da recorrência $y_{n+1} = f(n)y_n$.*

Prova: Por hipótese

$$\begin{cases} x_{n+1} = f(n)x_n + g(n) \\ h_{n+1} = f(n)h_n + g(n) \end{cases}$$

assim,

$$h_{n+1} - x_{n+1} = f(n)(h_n - x_n)$$

que se trata de uma recorrência homogênea, e como visto anteriormente, sua solução é

$$h_n - x_n = (h_1 - x_1) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} f(k).$$

Sabemos que $(h_1 - x_1) \in \mathbb{R}$, ou seja é uma constante, chamaremos $C = (h_1 - x_1)$. Além disso $F_n = \prod_{k=1}^{n-1} f(k)$, então

$$h_n = x_n + C \cdot F_n$$

$\square$

Portanto, qualquer outra solução da recorrência $x_{n+1} = f(n)x_n + g(n)$, que já vimos como obter no Teorema 3.5.1, será a mesma a menos de um múltiplo da solução fundamental das recorrências do tipo $y_{n+1} = f(n)y_n$.

Exemplo 25 : *Resolver a recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$, $x_1 = 2$.*

Vamos, primeiramente, determinar uma solução a_n da parte homogênea da recorrência. Ou seja, determinar uma solução de $y_{n+1} = 3y_n$.

$$\begin{aligned} y_2 &= 3y_1 \\ y_3 &= 3y_2 \\ &\vdots \\ y_n &= 3y_{n-1}, \end{aligned}$$

multiplicando ambos os membros das equações, resulta em

$$\begin{aligned} y_2 \cdot y_3 \cdots y_n &= \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdots 3)}_{(n-1)\ fatores} \cdot y_1 \cdot y_2 \cdots y_{n-1} \\ y_n &= 3^{\overbrace{1 + \cdots + 1}^{(n-1)\ parcelas}} \cdot y_1 \\ &= 3^{n-1} \cdot y_1. \end{aligned}$$

Logo, $a_n = y_1 \cdot 3^{n-1}$, $y_1 \in \mathbb{R}$ é uma família de soluções da recorrência $y_{n+1} = 3y_n$. Agora determinaremos uma solução b_n de $z_{n+1} = z_n + \dfrac{3^n}{3 \cdot y_1 \cdot 3^{n-1}}$, perceba que $f(n) = 3$ e $g(n) = 3^n$, então a recorrência fica $z_{n+1} = z_n + \dfrac{1}{y_1}$. Temos

$$\begin{aligned} z_2 &= z_1 + \frac{1}{y_1} \\ z_3 &= z_2 + \frac{1}{y_1} \\ &\vdots \\ z_n &= z_{n-1} + \frac{1}{y_1}, \end{aligned}$$

somando ambos os membros das equações acima, ficamos com

$$\begin{aligned} z_2 + z_3 + \cdots + z_n &= z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} + \underbrace{\frac{1}{y_1} + \cdots + \frac{1}{y_1}}_{(n-1)\ parcelas} \\ z_n &= z_1 + (n-1) \cdot \frac{1}{y_1}. \end{aligned}$$

Logo $b_n = z_1 + (n-1) \cdot \dfrac{1}{y_1}$, $z_1 \in \mathbb{R}$, é uma família de soluções da recorrência $z_{n+1} = z_n + \dfrac{1}{y_1}$. Então a solução da recorrência $x_{n+1} = 3x_n + 3^n$ é :

$$\begin{aligned} x_n &= a_n \cdot b_n \\ &= (y_1 \cdot 3^{n-1}) \cdot (z_1 + \frac{n-1}{y_1}) \\ &= y_1 \cdot z_1 \cdot 3^{n-1} + n3^{n-1} - 3^{n-1}. \end{aligned}$$

Perceba que $y_1 \cdot z_1 \in \mathbb{R}$, ou seja, é uma constante. Chamaremos $C = y_1 \cdot z_2$, assim a família de soluções da recorrência será

$$x_n = (C-1) \cdot 3^{n-1} + n \cdot 3^{n-1}.$$

Como este problema possui valor inicial, $x_1 = 2$, sua solução é única. Vamos determinar o valor de C.

$$\begin{aligned} x_1 &= (C-1) \cdot 3^0 + 1 \cdot 3^0 \\ &= C - 1 + 1 \\ &= C, \end{aligned}$$

portanto $C = 2$, assim ficamos com

$$x_n = (n+1) \cdot 3^{n-1}.$$

3.6 Recorrência Linear de Segunda Ordem

Segundo as definições 3.4.1 e 3.4.5, uma recorrência é dita linear de segunda ordem, se um termo pode ser expressado em função de dois termos imediatamente anteriores, ou seja, se podemos escrever x_{n+2} em função de x_{n+1} e x_n. Assim, é do tipo $x_{n+2} = f(n) \cdot x_{n+1} + g(n) \cdot x_n + h(n)$.

Exemplo 26 *(Sequência de Fibonacci):* $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_1 = F_2 = 1.$

Exemplo 27 *:* $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = n + 3^n.$

Neste trabalho trataremos apenas das recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

Resolução das Homogêneas:

Como neste trabalho será tratado apenas dos casos em que os coeficientes são constantes, então dada a recorrência $x_{n+2} = f(n) \cdot x_{n+1} + g(n) \cdot x_n$, iremos tomar $f(n) = p$ e $g(n) = q$ com $p, q \in \mathbb{R}$. Logo a recorrência fica da forma

$$x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n. \tag{3.1}$$

O seguinte teorema pode ser encontrado em [4].

Teorema 3.6.1 *: Se a_n e b_n são soluções de $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, então para duas constantes arbitrárias C_1 e C_2, temos que $C_1 \cdot a_n + C_2 \cdot b_n$ também é solução.*

Prova: Por hipótese

$$\begin{cases} a_{n+2} = p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n \\ b_{n+2} = p \cdot b_{n+1} + q \cdot b_n \end{cases}$$

multiplicando por C_1 e C_2, respectivamente, as equações e somando-as, ficamos

$$C_1 \cdot a_{n+2} + C_2 \cdot b_{n+2} = p \cdot [C_1 \cdot a_{n+1} + C_2 \cdot b_{n+1}] + q \cdot [C_1 \cdot a_n + C_2 \cdot b_n]$$

Portanto, $C_1 \cdot a_n + C_2 \cdot b_n$ é solução de $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$.

$\square$

Observamos que o conjunto solução das recorrências do tipo $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, tem estrutura de espaço vetorial. Vamos verificar que este conjunto, que chamaremos daqui para frente de S_r, cumpre com as oito propriedades necessárias.

Dados $a_n, b_n, c_n \in S_r$ e k_1 *e* $k_2 \in \mathbb{R}$, temos:

1.

$$\begin{aligned} (a_n + b_n) + c_n &= p \cdot [a_{n-1} + b_{n-1}] + p \cdot c_{n-1} + q \cdot [a_{n-2} + b_{n-2}] + q \cdot c_{n-2} \\ &= p \cdot a_{n-1} + p \cdot [b_{n-1} + c_{n-1}] + q \cdot a_{n-2} + q \cdot [b_{n-2} + c_{n-2}] \\ &= a_n + (b_n + c_n). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2} + p \cdot b_{n-1} + q \cdot b_{n-2} \\ &= p \cdot b_{n-1} + q \cdot b_{n-2} + p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2} \\ &= b_n + a_n. \end{aligned}$$

3. Temos que $0 \in S_r$, pois $0 = p \cdot 0 + q \cdot 0$. Portanto,

$$a_n + 0 = a_n.$$

4. Por hipótese

$$a_n = p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}$$

multiplicando a equação por (-1), ficamos com

$$\begin{aligned} -a_n &= -(p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}) \\ &= -p \cdot a_{n-1} - q \cdot a_{n-2} \\ &= p \cdot (-a_{n-1}) + q \cdot (-a_{n-2}). \end{aligned}$$

Portanto, $-a_n \in S_r$. Além disso $a_n + (-a_n) = 0$.

5.

$$\begin{aligned} k_1(a_n + b_n) &= k_1(p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2} + p \cdot b_{n-1} + q \cdot b_{n-2}) \\ &= k_1 \cdot p \cdot a_{n-1} + k_1 \cdot q \cdot a_{n-2} + k_1 \cdot p \cdot b_{n-1} + k_1 \cdot q \cdot b_{n-2} \\ &= k_1(p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}) + k_1(p \cdot b_{n-1} + q \cdot b_{n-2}) \\ &= k_1 \cdot a_n + k_1 \cdot b_n. \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2)a_n &= (k_1 + k_2)(p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}) \\ &= k_1 \cdot p \cdot a_{n-1} + k_1 \cdot q \cdot a_{n-2} + k_2 \cdot p \cdot a_{n-1} + k_2 \cdot q \cdot a_{n-2} \\ &= k_1(p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}) + k_2(p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}) \\ &= k_1 \cdot a_n + k_2 \cdot a_n. \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} (k_1 \cdot k_2)a_n &= (k_1 \cdot k_2)(p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}) \\ &= k_1 \cdot k_2 \cdot p \cdot a_{n-1} + k_1 \cdot k_2 \cdot q \cdot a_{n-2} \\ &= k_1(k_2 \cdot p \cdot a_{n-1} + k_2 \cdot q \cdot a_{n-2}) \\ &= k_1(k_2 \cdot a_n). \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned} 1 \cdot a_n &= 1 \cdot (p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2}) \\ &= p \cdot a_{n-1} + q \cdot a_{n-2} \\ &= a_n. \end{aligned}$$

Estas oito propriedades satisfeitas caracterizam o conjunto S_r como um espaço vetorial. Apesar de seus elementos terem natureza diferente dos vetores no espaço, "comportam-se" como eles.

Vimos que o conjunto S_r é um espaço vetorial e portanto possui uma base vetorial. Provaremos que esta base possui dois elementos e consequentemente que S_r possui dimensão dois. Note que isso nos possibilitará determinar todos os elementos deste conjunto, ou seja, todas as soluções da recorrência.

Primeiramente devemos garantir a existência de soluções da recorrência com condições iniciais.

Teorema 3.6.2 *: Dada uma recorrência $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, e duas constantes r_1 e r_2, existe uma solução b_n tal que*

$$b_1 = r_1 \qquad e \qquad b_2 = r_2,$$

para todo n natural.

Prova: Queremos mostrar que as condições iniciais deixam b_n unicamente determinado para todo n natural. Pelo princípio da indução completa:

1. Para $n = 1$, temos:

$$\begin{aligned} b_3 &= p \cdot b_2 + q \cdot b_1 \\ &= p \cdot r_2 + q \cdot r_1. \end{aligned}$$

   Logo b_3 é unicamente determinado.

2. Suponha que b_k, b_{k+1}, para algum $k \in \mathbb{N}$, são unicamente determinados.

3. Temos,

$$b_{k+2} = p \cdot b_{k+1} + q \cdot b_k$$

   que, por indução , é unicamente determinado. Então existe solução com condições iniciais.

□

Definição 3.6.1 *: Duas soluções a_n e b_n, de uma recorrência dada, são ditas linearmente independentes se a equação*

$$K_1 \cdot a_n + K_2 \cdot b_n = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

onde K_1 e K_2 são constantes, implica em $K_1 = K_2 = 0$.

Teorema 3.6.3 *: Dada a recorrência $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, existem a_n e b_n soluções linearmente independentes.*

Prova: Pelo teorema 3.6.2, podemos escolher $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, tais que

$$a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0,$$

de forma que a_n e b_n sejam soluções da recorrência. Vamos provar que são linearmente independentes, para isso considere a equação:

$$K_1 \cdot a_n + K_2 \cdot b_n = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.2}$$

onde K_1 e K_2, são constantes. A equação (3.2) vale, em particular, para $n = 1$ e $n = 2$, então

$$\begin{cases} K_1 \cdot a_1 + K_2 \cdot b_1 = 0 \\ K_1 \cdot a_2 + K_2 \cdot b_2 = 0 \end{cases}$$

manipulando o sistema, chegamos em

$$\begin{cases} K_1(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1) = 0 \\ K_2(a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2) = 0 \end{cases}$$

Como $a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$, temos que $K_1 = K_2 = 0$. Portanto, as soluções a_n e b_n são linearmente independentes.

□

Provaremos a seguir que existem apenas duas soluções linearmente independentes.

Teorema 3.6.4 : *Para quaisquer três soluções da recorrência $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, digamos a_n, b_n, c_n, o conjunto $\{a_n, b_n, c_n\}$ é linearmente dependente.*

Prova: Basta verificar que existem $x, y, z \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos, tais que

$$x \cdot a_n + y \cdot b_n + z \cdot c_n = 0.$$

1. Suponha que a_n *e* b_n são soluções linearmente dependentes. Então existe $\lambda \neq 0$ talque $b_n = \lambda \cdot a_n$. Assim tomando $x = \lambda, y = -1, z = 0$, temos

   $$x \cdot a_n + y \cdot b_n + z \cdot c_n = 0.$$

   Assim, $\{a_n, b_n, c_n\}$ é linearmente dependente.

2. Suponha que a_n *e* b_n são soluções linearmente independentes. Tomando $z = -1$, vamos encontrar números reais x *e* y tais que

   $$\begin{cases} x \cdot a_1 + y \cdot b_1 = c_1 \\ x \cdot a_2 + y \cdot b_2 = c_2 \end{cases}$$

   resolvendo o sistema acima, encontramos:

   $$x = \frac{c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1}{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \qquad y = \frac{c_1 \cdot a_2 - c_2 \cdot a_1}{a_2 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_2}.$$

   Note que que os números reais x *e* y estão bem definidos pois como $\{a_n, b_n\}$ é linearmente independente , então

   $$det\left[\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\right] = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \neq 0$$

   e como $x \cdot a_n + y \cdot b_n + z \cdot c_n = 0$, prova o resultado.

□

Portanto, pelos Teoremas 3.6.2, 3.6.3 e 3.6.4 o conjunto S_r possui dimensão dois.

Este fato nos garante que qualquer solução da recorrência, ou elemento de S_r, pode ser escrito como combinação linear das soluções linearmente independentes. Agora determinaremos estas soluções que compõem S_r .

Dado que a solução de uma recorrência linear de primeira ordem homogênea com coeficientes constantes é do tipo $x_n = p^n$, vamos sugerir uma solução deste tipo para as recorrências lineares de segunda ordem com coeficientes constantes.

Suponha que $x_n = r^n$, com $r \neq 0$ pois estamos querendo a solução não trivial, seja solução de $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$. Substituindo na equação de recorrência temos

$$r^{n+2} = p \cdot r^{n+1} + q \cdot r^n$$

e como $r \neq 0$, dividindo a equação por r^n, ficamos com

$$\mathbf{r^2 = p \cdot r + q}. \tag{3.3}$$

A equação (3.3) é chamada de **equação característica** da recorrência $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$.

Teorema 3.6.5 *: Se r_1 é raiz da equação característica de $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, então r_1^n é solução da recorrência.*

Prova: Por hipótese

$$r_1^2 = p \cdot r_1 + q,$$

multiplicando a equação por r_1^n, temos

$$r_1^{n+2} = p \cdot r_1^{n+1} + q \cdot r_1^n.$$

Portanto r_1^n é solução da recorrência.

□

Repare que se r_1 e r_2 são as raízes da equação característica, o conjunto $\{r_1^n, r_2^n\}$ é a base vetorial de S_r, pois r_1^n e r_2^n são linearmente independentes desde que $r_1 \neq r_2$ (deixo a prova deste fato a cargo do leitor).

Teorema 3.6.6 *: Se a equação característica $r^2 = p \cdot r + q$ tiver raízes reais r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, então todas as soluções da recorrência $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, são da forma $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.*

Prova: Como $r_1 \neq r_2$, r_1^n *e* r_2^n são soluções linearmente independentes da recorrência. Logo todas as soluções são combinações lineares dos elementos da base vetorial $\{r_1^n, r_2^n\}$. Então todas as soluções são da forma $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$, *com* $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

□

Vejamos o exemplo 26:

Os números de Fibonacci, F_n, são dados por $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ com $F_1 = F_2 = 1$. A equação característica associada é $r^2 = r + 1$, e suas raízes são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, então

$$F_n = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Vamos determinar as constantes C_1 e C_2. Como $F_1 = F_2 = 1$, concluímos que $F_0 = 0$, logo

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ C_1 \cdot \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \cdot \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = 1 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, concluímos que $C_1 = -C_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Portanto,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Vejamos o exemplo 14, o problema da reprodução dos coelhos:

Inicialmente vamos construir uma tabela com os seis primeiros meses para nos ajudar a entender melhor o problema, e assim podermos ter uma idéia melhor do que acontecerá nos meses seguintes.

Meses(n)	Reprodução	Quantidade de casais (F_n)
1	C_1	1
2	C_1	1
3	$C_1 \to C_2$	2
4	$C_1 \to C_3$, C_2	3
5	$C_1 \to C_4$, $C_2 \to C_5$, C_3	5
6	$C_1 \to C_6$, $C_2 \to C_7$, $C_3 \to C_8$, C_4, C_5	8

Tabela 3.1: Reprodução dos coelhos.

De maneira análoga, podemos continuar com o processo até o n-ésimo mês. Note que este problema se trata de uma recorrência de segunda ordem, pois a partir do segundo mês, a quantidade de pares de coelhos é a soma das quantidades dos dois meses anteriores. Escrevendo essa recorrência, com F_n sendo a quantidade de casais no mês n, ficamos com

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad F_1 = F_2 = 1$$

Que é justamente a sequência de Fibonacci, assim a quantidade de pares de coelhos no decorrer dos meses será a sequência $(F_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots)$. Como o problema pergunta sobre a quantidade de casais em um ano, então $F_{12} = 144$.

Teorema 3.6.7 : *Se as raízes reais de $r^2 = p \cdot r + q$ são r_1 e r_2 com $r_1 = r_2$, dizemos que r_1 possui multiplicidade 2, então todas as soluções de $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$, são da forma $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot nr_1^n$ onde C_1 e C_2 são duas constantes arbitrárias.*

Prova: Para o caso em que $r_1 = r_2 \neq 0$, pois não queremos o caso trivial, note que $x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot r_2^n$ não são todas as soluções pois $r_1 = r_2$, e seria equivalente a $x_n = (C_1+C_2)r_1^n$, ou seja, r_1^n e r_2^n são linearmente dependentes, e como vimos, deveríamos ter duas soluções linearmente independentes. Utilizando soma e produto das raízes de uma equação do segundo grau, temos que $p = r_1 + r_2 = 2r_1$ *e* $q = -r_1 \cdot r_2 = -r_1^2$. Então, atrás de uma solução linearmente independente com r_1^n utilizaremos o método da variação de parâmetros.

Para isso vamos tentar uma solução para a recorrência da forma $y_n = t(n) \cdot r_1^n$, onde $t(n)$ é uma função em n, com $n \in \mathbb{N}$. Substituindo y_n na recorrência, fica

$$\begin{aligned}
y_{n+2} &= p \cdot y_{n+1} + q \cdot y_n \\
t(n+2) \cdot r_1^{n+2} &= p \cdot t(n+1) \cdot r_1^{n+1} + q \cdot t(n) \cdot r_1^n, \quad \textit{dividindo por } r_1^n \\
t(n+2) \cdot r_1^2 &= p \cdot t(n+1) \cdot r_1 + q \cdot t(n) \\
t(n+2) \cdot r_1^2 &= 2r_1 \cdot t(n+1) \cdot r_1 - r_1^2 \cdot t(n), \quad \textit{dividindo por } r_1^2 \\
t(n+2) &= 2t(n+1) - t(n) \\
t(n+2) - t(n+1) &= t(n+1) - t(n), \ \forall n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Percebemos que a função $t(n)$ representa uma progressão aritmética pois a diferença entre termos consecutivos é constante. Então pelo Teorema 3.2.1, $t(n) = t(1) + (n-1) \cdot r$, em que r é a razão. Ou seja t(n) é uma função afim, e portanto pode ser escrita como $t(n) = a \cdot n + b, \ a, b \in \mathbb{R}$. Então a tentativa de solução fica da forma $y_n = (a \cdot n + b) \cdot r_1^n$, e a escrevendo na solução geral ficamos com

$$x_n = K_1 \cdot r_1^n + K_2 \cdot (a \cdot n + b) \cdot r_1^n, \quad K_1, K_2 \textit{ constantes}.$$

Reagrupando, temos

$$x_n = (K_1 + K_2 \cdot b) r_1^n + K_2 \cdot a \cdot n \cdot r_1^n$$

e chamando $K_1 + K_2 \cdot b = C_1$ e $K_2 \cdot a = C_2$, temos que a solução fica da forma

$$\mathbf{x_n = C_1 \cdot r_1^n + C_2 \cdot n \cdot r_1^n}, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sem perda de generalidade, na solução $y_n = (a \cdot n + b) r_1^n$, podemos tomar $a = 1$ *e* $b = 0$, já que a solução geral, como vimos, não se altera. Logo, $y_n = n \cdot r_1^n$.

Basta mostrar, que $\{r_1^n, nr_1^n\}$ é linearmente independente. De fato, tomando $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ temos a seguinte equação :

$$\begin{aligned}
K_1 \cdot r_1^n + K_2 \cdot n \cdot r_1^n &= 0 \\
r_1^n (K_1 + K_2 \cdot n) &= 0
\end{aligned}$$

e por hipótese $r_1 \neq 0$, então $K_1 = K_2 = 0$, o que mostra que $\{r_1^n, nr_1^n\}$ é linearmente independente, e com isso provamos o teorema.

□

Exemplo 28 : *Resolver a recorrência* $x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n$.

Solução : *A equação característica associada é* $r^2 = 4r - 4$, *e suas raízes são* $r_1 = r_2 = 2$. *Como não foi dado valores iniciais sua solução fica,*

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n2^n, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

O Caso Complexo

Caso as raízes da equação característica da recorrência $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$ sejam complexas, é melhor que as escreva na forma trigonométrica para que não tenhamos que fazer cálculos longos e difíceis. Então dadas as raízes complexas,

$$r_1 = a + bi \qquad e \qquad r_2 = a - bi$$

chamando de ρ o módulo de r_1 e r_2, e se θ é o argumento de r_1 então $-\theta$ é o argumento de r_2 pois estes são simétricos em relação ao eixo real, e pela paridade das funções seno e cosseno podemos escrever estas raízes como

$$r_1 = \rho(cos\theta + isen\theta) \qquad e \qquad r_2 = \rho(cos\theta - isen\theta),$$

pelo teorema de *De Moivre* (ver em [7])

$$r_1^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \qquad e \qquad r_2^n = \rho^n(cos(n\theta) - isen(n\theta)).$$

Pelo teorema 3.6.1, temos que também são soluções

$$y_n = \frac{r_1^n + r_2^n}{2} = \rho^n cos(n\theta) \qquad e \qquad z_n = \frac{r_1^n - r_2^n}{2 \cdot i} = \rho^n sen(n\theta),$$

e ainda pelo Teorema 3.6.1, podemos tomar a solução

$$\begin{aligned} u_n &= K_1 \cdot y_n + K_2 \cdot z_n \\ &= K_1 \cdot \rho^n cos(n\theta) + K_2 \cdot \rho^n sen(n\theta) \end{aligned}$$

tal que $u_1 = \rho cos\theta \;\; e \;\; u_2 = \rho sen\theta$, e também a solução

$$\begin{aligned} v_n &= K_3 \cdot y_n + K_4 \cdot z_n \\ &= K_3 \cdot \rho^n cos(n\theta) + K_4 \cdot \rho^n sen(n\theta) \end{aligned}$$

tal que $v_1 = -\rho sen\theta \;\; e \;\; v_2 = \rho cos\theta$.

Note que existem $K_1, K_2 \in \mathbb{R}$ tais que $u_1 = \rho cos\theta \;\; e \;\; u_2 = \rho sen\theta$. Pois, se

$$\begin{cases} K_1 \cdot \rho cos\theta + K_2 \cdot \rho sen\theta = \rho cos\theta \\ K_1 \cdot \rho^2 cos(2\theta) + K_2 \cdot \rho^2 sen(2\theta) = \rho sen\theta \end{cases}$$

e como $\rho cos\theta = a$ e $\rho sen\theta = b$, com $b \neq 0$, pois as raízes são complexas, podemos reescrever o sistema como

$$\begin{cases} K_1 \cdot a + K_2 \cdot b = a \\ K_1 \cdot (a^2 - b^2) + K_2 \cdot 2ab = b \end{cases}$$

resolvendo, encontramos

$$K_1 = \frac{2a^2 - b}{a^2 + b^2} \qquad e \qquad K_2 = \frac{ab^2 + ab - a^3}{b(a^2 + b^2)}.$$

Como $b \neq 0$, temos que $a^2 + b^2 \neq 0$, e portanto K_1 e K_2 estão bem definidos. Analogamente, também existem $K_3, K_4 \in \mathbb{R}$ tais que $v_1 = -\rho sen\theta$ e $v_2 = \rho cos\theta$.

Vamos mostrar que u_n e v_n são linearmente independentes. Sejam $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, tais que $C_1 \cdot u_n + C_2 \cdot v_n = 0 \quad \forall n$. Em particular, a equação deve valer para $n = 1$ e $n = 2$, logo

$$\begin{cases} C_1 \cdot \rho cos\theta - C_2 \cdot \rho sen\theta = 0 \\ C_1 \cdot \rho sen\theta + C_2 \cdot \rho cos\theta = 0 \end{cases}$$

temos três casos a considerar:

1. Se $cos\theta = 0$, então $sen\theta \neq 0$. Logo, na primeira equação temos que $C_2 = 0$, e na segunda que $C_1 = 0$. Portanto, $C_1 = C_2 = 0$.

2. Se $sen\theta = 0$, então $cos\theta \neq 0$. Logo, na primeira temos que $C_1 = 0$, e na segunda que $C_2 = 0$. Portanto, $C_1 = C_2 = 0$.

3. Se $sen\theta \neq 0$ e $cos\theta \neq 0$. Então resolvendo o sistema, encontramos:

$$\begin{cases} C_1 \cdot \rho(sen^2\theta + cos^2\theta) = 0 \\ C_2 \cdot \rho(sen^2\theta + cos^2\theta) = 0 \end{cases}$$

   como $sen^2\theta + cos^2\theta = 1$, temos que $C_1 = C_2 = 0$. Logo, u_n e v_n são linearmente independentes.

Assim, concluímos que a solução geral é da forma

$$\begin{aligned} x_n &= \alpha_1 \cdot u_n + \alpha_2 \cdot v_n \\ &= \alpha_1(K_1 \cdot \rho^n cos(n\theta) + K_2 \cdot \rho^n sen(n\theta)) + \alpha_2(K_3 \cdot \rho^n cos(n\theta) + K_4 \cdot \rho^n sen(n\theta)) \\ &= \rho^n[(\alpha_1 \cdot K_1 + \alpha_2 \cdot K_3)cos(n\theta) + (\alpha_1 \cdot K_2 + \alpha_2 \cdot K_4)sen(n\theta)] \end{aligned}$$

chamando $C_1 = \alpha_1 \cdot K_1 + \alpha_2 \cdot K_3$ e $C_2 = \alpha_1 \cdot K_2 + \alpha_2 \cdot K_4$, temos

$$\mathbf{x_n = \rho^n[C_1 \cdot cos(n\theta) + C_2 \cdot sen(n\theta)]},$$

com $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \dfrac{b}{\rho}$.

Exemplo 29 : *Resolver a recorrência* $x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n$.

Solução : A equação característica é $r^2 = 2r - 2$, e suas raízes são

$$r_1 = 1 + i \qquad e \qquad r_2 = 1 - i.$$

Temos que $\rho = \sqrt{2}$ e $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$, assim $r_1 = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) + isen(\frac{\pi}{4}))$ e $r_2 = \sqrt{2}(cos(\frac{\pi}{4}) - isen(\frac{\pi}{4}))$. Então a solução é da forma

$$x_n = (\sqrt{2})^n[C_1 \cdot cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + C_2 \cdot sen\left(\frac{n\pi}{4}\right)], \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Caso fosse um problema com valor inicial, digamos com $x_1 = x_2 = 1$, devemos encontrar os valores das constantes C_1 e C_2. Para isto, devemos resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{2}[C_1 \cdot cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + C_2 \cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)] = 1 \\ (\sqrt{2})^2[C_1 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{4}\right) + C_2 \cdot sen\left(\frac{2\pi}{4}\right)] = 1 \end{cases}$$

simplificando, ficamos com

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot [C_1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + C_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}] = 1 \\ 2C_2 = 1 \end{cases}$$

concluímos que $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$. Portanto a solução seria

$$x_n = \frac{(\sqrt{2})^n}{2}[cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{n\pi}{4}\right)].$$

De volta à P.A.

Como vimos, em uma progressão aritmética a diferença entre termos consecutivos é sempre a mesma. Então podemos escrever

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= a_{n+1} - a_n \\ a_{n+2} &= 2a_{n+1} + a_n. \end{aligned}$$

Assim verificamos que toda progressão aritmética pode ser escrita como uma recorrência linear homogênea de segunda ordem.

Mais adiante neste trabalho veremos que este fato não é coincidência, na verdade, existe uma relação direta com P.A.'s de ordem superior e recorrências lineares.

Resolução das Não Homogêneas: São as do tipo $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n + h(n)$.

Para resolver este tipo de recorrência vamos enunciar uma definição e um teorema que serão de grande auxílio.

Definição 3.6.2 *: Dada a recorrência* $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n + h(n)$ *chamaremos* $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n$ *de recorrência homogênea associada.*

Teorema 3.6.8 *: Se* a_n *é uma solução particular da recorrência* $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n + h(n)$*, então a solução geral é da forma*

$$x_n = a_n + b_n$$

onde b_n é solução geral da recorrência homogênea associada.

Prova: Como a_n é solução particular e x_n a solução procurada, então ambas devem satisfazer a recorrência, logo

$$\begin{cases} x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n + h(n) \\ a_{n+2} = p \cdot a_{n+1} + q \cdot a_n + h(n), \end{cases}$$

subtraindo as equações acima, ficamos com

$$\begin{aligned} x_{n+2} - a_{n+2} &= p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n + h(n) - p \cdot a_{n+1} - q \cdot a_n \\ &= p \cdot (x_{n+1} - a_{n+1}) + q \cdot (x_n - a_n). \end{aligned}$$

Fazendo $x_n - a_n = b_n$, vemos que b_n satisfaz a recorrência homogênea associada, e pelos Teoremas 3.6.6 e 3.6.7, sabemos determinar sua solução geral. Portanto, $x_n = a_n + b_n$ é solução geral de $x_{n+2} = p \cdot x_{n+1} + q \cdot x_n + h(n)$.

□

Assim, vemos que a solução de uma recorrência não homogênea, será a soma das soluções de uma particular e da homogênea associada. Repare que a solução da homogênea associada já vimos como encontrar.

A dificuldade para resolver estes tipos de recorrência será em determinar a solução particular, já que para isto não há uma fórmula fechada. Então para determiná-las temos que fazer tentativas, e essas tentativas irão depender de como é o $h(n)$. Por exemplo, se este for uma função afim, tentaremos a solução particular também uma função afim, e assim por diante. Este procedimento também é conhecido como método de coeficientes a determinar. Abaixo veremos alguns exemplos.

Exemplo 30 *: Resolva a recorrência $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n + 2$, para $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.*

Solução : Sabemos que a equação característica da homogênea associada é $r^2 = 5r - 6$, portanto $r_1 = 2$ e $r_2 = 3$. Assim as soluções para a recorrência são da forma $x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + a_n$ com C_1 e C_2 constantes, e a_n uma solução particular. Como $h(n)$ é uma constante, vamos tentar determinar a_n sendo, $a_n = c$. Substituindo na recorrência não homogênea temos:

$$c = 5c - 6c + 2 \Rightarrow c = 1$$

Portanto a solução geral da recorrência é

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 1.$$

Para $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, temos

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = -1 \\ 4C_1 + 9C_2 = 1 \end{cases}$$

Assim, $C_1 = -2$ e $C_2 = 1$, então

$$x_n = -2^{n+1} + 3^n + 1$$

Exemplo 31 : *Resolva a recorrência* $x_{n+2} = -6x_{n+1} - 9x_n + 1 + 3 \cdot 4^n$.

Solução : Sabemos que a equação característica da homogênea associada é $r^2 = -6r - 9$, portanto $r_1 = r_2 = -3$. Assim as soluções para a recorrência são da forma $x_n = C_1 \cdot (-3)^n + C_2 \cdot n(-3)^n + a_n$ com C_1 e C_2 constantes, e a_n solução particular.

Como $h(n) = 1 + 3 \cdot 4^n$, vamos tentar determinar a_n sendo, $a_n = c + d \cdot 4^n$. Substituindo na recorrência não homogênea temos:

$$\begin{aligned} 1 + 3 \cdot 4^n &= c + d \cdot 4^{n+2} + 6(c + d \cdot 4^{n+1}) + 9(c + d \cdot 4^n) \\ &= 16c + 49d \cdot 4^n \end{aligned}$$

assim ficamos com

$$c = \frac{1}{16} \qquad e \qquad d = \frac{3}{49}$$

logo,

$$a_n = \frac{1}{16} + \left(\frac{3}{49}\right) \cdot 4^n.$$

Portanto,

$$x_n = C_1 \cdot (-3)^n + C_2 \cdot n(-3)^n + \frac{1}{16} + \left(\frac{3}{49}\right) \cdot 4^n, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 32 : *Resolva a recorrência* $x_{n+2} = -x_{n+1} + 6x_n + 2^n$.

Solução : Sabemos que a equação característica da homogênea associada é $r^2 = -r + 6$, portanto $r_1 = 2$ e $r_2 = -3$. Assim as soluções para a recorrência são da forma $x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n + a_n$ com C_1 e C_2 constantes, e a_n solução particular.

Seria natural tentar tomar $a_n = c + d \cdot 2^n$, mas isso não irá funcionar pois $d \cdot 2^n$ é solução da homogênea (deixo a cargo do leitor verificar este fato).

Então, como vimos no teorema 3.6.7, a tentativa será $a_n = c + d \cdot n2^n$. Substituindo na recorrência não homogênea temos:

$$\begin{aligned} 2^n &= c + d(n+2) \cdot 2^{n+2} + c + d(n+1) \cdot 2^{n+1} - 6c - 6dn \cdot 2^n \\ &= -4c + 10d \cdot 2^n \end{aligned}$$

assim, ficamos com

$$c = 0 \qquad e \qquad d = \frac{1}{10}$$

logo,

$$a_n = \frac{n}{10} \cdot 2^n$$

Portanto,

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-3)^n + \frac{n}{10} \cdot 2^n, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

3.7 Recorrência Linear de Ordem K

Segundo as definições 3.4.1 e 3.4.5, uma recorrência é dita linear de ordem k, se um termo pode ser expressado em função dos k termos imediatamente anteriores, ou seja, se podemos escrever x_{n+k} em função de $x_{n+(k-1)}, x_{n+(k-2)}, \cdots, x_n$. Então é do tipo

$$x_{n+k} = f_{n+(k-1)}(n) \cdot x_{n+(k-1)} + f_{n+(k-2)}(n) \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + f_n(n) \cdot x_n + h(n).$$

Neste trabalho, trataremos apenas das recorrências lineares de ordem k homogêneas com coeficientes constantes.

Portanto, $f_n(n), f_{n+1}(n), \cdots, f_{n+(k-1)}(n)$ são constantes e $h(n) = 0$. Assim, a recorrência fica da forma:

$$x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n \tag{3.4}$$

onde $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_k$ são constantes arbitrárias.

Teorema 3.7.1 *: Se $(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n$ são soluções da recorrência (3.4), então para as constantes arbitrárias $C_1, C_2, \ldots, C_k$, temos que $C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n$ também é solução.*

Prova: Por hipótese temos,

$$\begin{cases} (b_1)_{n+k} = a_1 \cdot (b_1)_{n+(k-1)} + a_2 \cdot (b_1)_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot (b_1)_n \\ (b_2)_{n+k} = a_1 \cdot (b_2)_{n+(k-1)} + a_2 \cdot (b_2)_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot (b_2)_n \\ \qquad \vdots \\ (b_k)_{n+k} = a_1 \cdot (b_k)_{n+(k-1)} + a_2 \cdot (b_k)_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot (b_k)_n \end{cases}$$

multiplicando as igualdades por $C_1, C_2, C_3, \cdots, C_k$, respectivamente, e somando-as

$$\begin{aligned} C_1 \cdot (b_1)_{n+k} + \cdots + C_k \cdot (b_k)_{n+k} \quad = \quad & a_1 \cdot [C_1 \cdot (b_1)_{n+(k-1)} + \cdots + C_k \cdot (b_k)_{n+(k-1)}] + \\ & a_2 \cdot [C_1 \cdot (b_1)_{n+(k-2)} + \cdots + C_k \cdot (b_k)_{n+(k-2)}] + \\ & \qquad \vdots \\ & a_k \cdot [C_1 \cdot (b_1)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n]. \end{aligned}$$

Logo, $C_1 \cdot (b_1)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n$ é solução de $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$.

□

Assim como vimos que o conjunto S_r, das soluções de uma recorrência linear homogênea de segunda ordem, possui estrutura de espaço vetorial, o conjunto de soluções de uma recorrência linear homogênea de ordem k, que chamaremos daqui por diante de S_k, também o tem. A verificação deste fato é similar ao feito para S_r.

Provaremos que a base de S_k possui k elementos, e portanto terá dimensão k. Para isso, começaremos provando que existe solução para k condições iniciais dadas.

Teorema 3.7.2 *: Dada a recorrência* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$ *e os números* $r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$*, existe uma solução* b_n *tal que*

$$b_1 = r_1, b_2 = r_2, \ldots, b_k = r_k.$$

Prova: Queremos mostrar que para todo n natural, b_n fica unicamente determinado para as k condições iniciais dadas.

Pelo princípio da indução completa:

1. Para p=1, temos:

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_1 \cdot b_k + a_2 \cdot b_{k-1} + \cdots + a_k \cdot b_1 \\ &= a_1 \cdot r_k + a_2 \cdot r_{k-1} + \cdots + a_k \cdot r_1, \end{aligned}$$

   logo b_{k+1} fica unicamente determinado.

2. Suponha que os termos $b_{k+1}, b_{k+2}, \ldots, b_{k+p}$ com $p \in \mathbb{N}$, são unicamente determinados, então

$$b_{k+p+1} = a_1 \cdot b_{k+p} + a_2 \cdot b_{k+p-1} + \cdots + a_k \cdot b_{p+1},$$

   que, por indução, é unicamente determinado.

$\square$

Agora que vimos que existe solução para uma recorrência de ordem k, vamos garantir que existem k soluções linearmente independentes.

Teorema 3.7.3 *: Dada a recorrência* $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$*, então existem* $(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n$ *soluções linearmente independentes.*

Prova: Pelo teorema (3.7.2), existe solução $(b_p)_n$ tal que

$$(b_p)_1 = 0, (b_p)_2 = 0, \ldots, (b_p)_{p-1} = 0, (b_p)_p = 1, (b_p)_{p+1} = 0, \ldots, (b_p)_k = 0, \ com\ 1 \leq p \leq k.$$

Ou seja, para cada uma das k soluções vamos associar a um vetor unitário de $\mathbb{R}^k$, então ficaria da seguinte forma

$$((b_p)_1, (b_p)_2, \ldots, (b_p)_{p-1}, (b_p)_p, (b_p)_{p+1}, \ldots, (b_p)_k) = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \tag{3.5}$$

com suas coordenadas iguais a zero, exceto, a p-ésima que será igual a um. Assim, existem k soluções distintas para a recorrência dada. Vamos verificar que são linearmente independentes.

Sejam $C_1, C_2, \ldots, C_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n = 0, \quad \forall n.$$

Em particular, se $n = p$, com $1 \leq p \leq k$, temos

$$C_1 \cdot (b_1)_p + C_2 \cdot (b_2)_p + \cdots + C_p \cdot (b_p)_p + \cdots + C_k \cdot (b_k)_p = 0,$$

por (3.5) concluímos que $C_p = 0$. E como $1 \leq p \leq k$, temos que

$$C_1 = C_2 = \cdots = C_k = 0.$$

Portanto, $(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n$ são soluções linearmente independentes.

$\square$

Provaremos a seguir que existem apenas k soluções linearmente independentes.

Teorema 3.7.4 *: Para quaisquer $k+1$ soluções de $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, digamos $(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n, (b_{k+1})_n$, o conjunto $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n, (b_{k+1})_n\}$ é linearmente dependente.*

Prova: Faremos em duas partes:

1. Suponha $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n\}$ linearmente dependente. Então existe $r \in \mathbb{N}$, com $1 \leq r \leq k$ tal que $C_r \neq 0$ e

$$C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n = 0,$$

tomando $C_{k+1} = 0$, ainda temos que,

$$C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n + C_{k+1} \cdot (b_{k+1})_n = 0$$

com $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1} \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos, pois $C_r \neq 0$ por hipótese. Assim, $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n, (b_{k+1})_n\}$ é linearmente dependente.

2. Suponha $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n\}$ linearmente independentes. Tomando $C_{k+1} = -1$, temos

$$C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n = (b_{k+1})_n,$$

e fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots, k$, ficaremos com o sistema

$$\begin{cases} C_1 \cdot (b_1)_1 + C_2 \cdot (b_2)_1 + \cdots + C_k \cdot (b_k)_1 = (b_{k+1})_1 \\ C_1 \cdot (b_1)_2 + C_2 \cdot (b_2)_2 + \cdots + C_k \cdot (b_k)_2 = (b_{k+1})_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ C_1 \cdot (b_1)_k + C_2 \cdot (b_2)_k + \cdots + C_k \cdot (b_k)_k = (b_{k+1})_k \end{cases}$$

que pode ser reescrito pela seguinte equação matricial,

$$\begin{pmatrix} (b_1)_1 & (b_2)_1 & \cdots & (b_k)_1 \\ (b_1)_2 & (b_2)_2 & \cdots & (b_k)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_1)_k & (b_2)_k & \cdots & (b_k)_k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b_{k+1})_1 \\ (b_{k+1})_2 \\ \vdots \\ (b_{k+1})_k \end{pmatrix}.$$

Por hipótese $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_k)_n\}$ é linearmente independente, $\forall n$. Daí, pensando em cada solução como um vetor de $\mathbb{R}^k$, como fizemos no Teorema 3.7.3, temos que

$$det \left[\begin{pmatrix} (b_1)_1 & (b_2)_1 & \cdots & (b_k)_1 \\ (b_1)_2 & (b_2)_2 & \cdots & (b_k)_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (b_1)_k & (b_2)_k & \cdots & (b_k)_k \end{pmatrix} \right] \neq 0,$$

assim o sistema possui solução, ou seja, $C_1, C_2, \ldots, C_k$ estão bem definidos.

Logo, existem $C_1, C_2, \ldots, C_k, C_{k+1} \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos, pois $C_{k+1} = -1$, tais que

$$C_1 \cdot (b_1)_n + C_2 \cdot (b_2)_n + \cdots + C_k \cdot (b_k)_n + C_{k+1} \cdot (b_{k+1})_n = 0,$$

e assim concluímos que $\{(b_1)_n, (b_2)_n, \ldots, (b_{k+1})_n\}$, é linearmente dependente.

Portanto o conjunto S_k possui dimensão k.

$\square$

Este Teorema 3.7.4, nos garante que qualquer solução de S_k é combinação linear dos elementos de sua base. Iremos, agora, tentar determinar os elementos desta base.

Como vimos nas recorrências lineares homogêneas com coeficientes constantes de primeira e segunda ordens, suas soluções eram do tipo $x_n = r^n$. Então é natural tentarmos uma solução deste tipo.

Supondo $x_n = r^n$ uma solução , com $r \neq 0$ pois estamos querendo a solução não trivial, e substituindo na recorrência ficamos com

$$r^{n+k} = a_1 \cdot r^{n+(k-1)} + a_2 \cdot r^{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot r^n$$

como $r \neq 0$, dividindo em ambos os membros da igualdade por r^n, teremos

$$\mathbf{r^k = a_1 \cdot r^{k-1} + a_2 \cdot r^{k-2} + \cdots + a_k}. \tag{3.6}$$

A equação (3.6) é chamada de equação característica da recorrência $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$.

Teorema 3.7.5 : *Se r_1 é raiz da equação característia da recorrência $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, então r_1^n é solução da recorrência.*

Prova: Por hipótese r_1 é raiz da equação $r^k = a_1 \cdot r^{k-1} + a_2 \cdot r^{k-2} + \cdots + a_k$, então temos que

$$r_1^k = a_1 \cdot r_1^{k-1} + a_2 \cdot r_1^{k-2} + \cdots + a_k.$$

Multiplicando a equação acima por r_1^n, ficamos com

$$r_1^{n+k} = a_1 \cdot r_1^{n+(k-1)} + a_2 \cdot r_1^{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot r_1^n,$$

portanto r_1^n é solução da recorrência.

$\square$

Teorema 3.7.6 : *Se $r_1 = a + bi$ é raiz complexa da equação característica de $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, então $\rho^n cos(n\theta)$ e $\rho^n sen(n\theta)$ são soluções da recorrência. Onde $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \dfrac{b}{\rho}$.*

Prova: Como r_1 é complexa, temos que o seu conjugado $\overline{r_1}$ também é raiz da equação característica, então pelo Teorema 3.7.5, r_1^n e $(\overline{r_1})^n$ são soluções da recorrência. Chamando de ρ o módulo dos números e de θ o argumento, podemos reescrevê-las na forma trigonométrica, temos

$$r_1 = \rho(cos\theta + isen\theta) \qquad e \qquad (\overline{r_1}) = \rho(cos\theta - isen\theta),$$

e pelo teorema de De Moivre (ver em [7])

$$r_1^n = \rho^n(cos(n\theta) + isen(n\theta)) \qquad e \qquad (\overline{r_1})^n = \rho^n(cos(n\theta) - isen(n\theta)).$$

Decorre do Teorema 3.7.1, temos que também são soluções da recorrência:

$$\frac{r_1^n + (\overline{r_1})^n}{2} = \rho^n cos(n\theta) \qquad e \qquad \frac{r_1^n - (\overline{r_1})^n}{2 \cdot i} = \rho^n sen(n\theta).$$

□

A seguir vamos enunciar um lema que nos fornece um algoritmo, que será de grande importância para criar soluções de recorrências que possuem equações características com raízes de multiplicidades maiores que um.

Lema 3.7.1 *: Dado o polinômio $q_0(r)$ de grau maior ou igual a m, podemos construir os polinômios $q_k(r)$:*

$$q_{k+1}(r) = r \cdot q_k'(r), \ para \quad 0 \leq k \leq m-1.$$

Onde $q_k'(r)$ é a derivada do polinômio $q_k(r)$. Se $r_1 \in \mathbb{C}$ é raiz de multiplicidade m do polinômio $q_0(r)$, então r_1 é raiz dos polinômios $q_k(r)$ $(0 \leq k \leq m-1)$.

Prova: Como r_1 tem multiplicidade m, temos que vale a igualdade:

$$q_0(r_1) = q_0'(r_1) = q_0''(r_1) = \cdots = q_0^{(m-1)}(r_1) = 0 \quad (ver[17]).$$

Por hipótese, $q_1(r) = r \cdot q_0'(r)$, e portanto $q_1(r_1) = 0$. Além disso, suas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} q_1'(r) &= q_0'(r) + rq_0''(r) \\ q_1''(r) &= 2q_0''(r) + rq_0'''(r) \\ &\vdots \\ q_1^{(k)}(r) &= kq_0^{(k)}(r) + rq_0^{(k+1)}(r) \end{aligned}$$

Logo,

$$q_1(r_1) = q_1'(r_1) = q_1''(r_1) = \cdots = q_1^{(m-2)}(r_1) = 0.$$

Repare que $q_1^{m-1}(r_1) \neq 0$, pois caso contrário, se $q_1^{m-1}(r_1) = (m-1)q_0^{(m-1)}(r_1) + rq_0^{(m)}(r_1) = 0$, implicaria em $q_0^{(m)}(r_1) = 0$, o que seria um absurdo, uma vez que r_1 possui multiplicidade m. (Observe que caso $r_1 = 0$, o lema é trivialmente satisfeito).

Novamente por hipótese, $q_2(r) = r \cdot q_1'(r)$, e portanto, $q_2(r_1) = 0$. Além disso, suas derivadas são dadas por:

$$\begin{aligned} q_2'(r) &= q_1'(r) + rq_1''(r) \\ q_2''(r) &= 2q_1''(r) + rq_1'''(r) \\ &\vdots \\ q_2^{(k)}(r) &= kq_1^{(k)}(r) + rq_1^{(k+1)}(r) \end{aligned}$$

Logo,

$$q_2(r_1) = q_2'(r_1) = q_2''(r_1) = \cdots = q_2^{(m-3)}(r_1) = 0.$$

Repetindo este processo de forma análoga, temos que

$$q_k(r_1) = q_k'(r_1) = q_k''(r_1) = \cdots = q_k^{(m-(k+1))}(r_1) = 0.$$

Como a quantidade de vezes que derivamos um polinômio deve ser maior ou igual a zero, temos que $m-(k+1) \geq 0$, logo $k \leq m-1$.

Assim, r_1 é raiz de $q_k(r)$, com $0 \leq k \leq m-1$.

□

Teorema 3.7.7 *: Se r_1 é raiz de multiplicidade m, $m \geq 2$, da equação característica de $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, então $r_1^n, nr_1^n, n^2r_1^n, \ldots, n^{m-1}r_1^n$ são soluções da recorrência.*

Prova: Definindo $q_{k+1}(r) = r \cdot q_k'(r)$ e $q_0(r) = a_1 \cdot r^{n+(k-1)} + a_2 \cdot r^{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot r^n - r^{n+k}$, o lema (3.7.1) garante que

$$q_0(r_1) = q_1(r_1) = q_2(r_1) = \cdots = q_{m-1}(r_1) = 0.$$

Note qua as raízes da equação característica da recorrência também são raízes de $q_0(r)$.

Temos a seguinte expressão para $q_1(r)$:

$$\begin{aligned} q_1(r) &= r \cdot q_0'(r) \\ &= a_1 \cdot (n+(k-1))r^{n+(k-1)} + \cdots + a_k \cdot nr^n - (n+k)r^{n+k} \end{aligned}$$

como $q_1(r_1) = 0$, e fazendo $r = r_1$, ficamos com

$$0 = a_1[(n+(k-1))r_1^{n+(k-1)}] + \cdots + a_k[nr_1^n] - (n+k)r_1^{n+k}$$

ou seja,

$$(n+k)r_1^{n+k} = a_1[(n+(k-1))r_1^{n+(k-1)}] + \cdots + a_k[nr_1^n].$$

Portanto nr_1^n é solução da recorrência.

Escrevendo a expressão de $q_2(r)$, temos

$$\begin{aligned} q_2(r) &= r \cdot q_1'(r) \\ &= a_1 \cdot (n+(k-1))^2 r^{n+(k-1)} + \cdots + a_k \cdot n^2 r^n - (n+k)^2 r^{n+k} \end{aligned}$$

como $q_2(r_1) = 0$, e fazendo $r = r_1$, ficamos com

$$0 = a_1[(n+(k-1))^2 r_1^{n+(k-1)}] + \cdots + a_k[n^2 r_1^n] - (n+k)^2 r_1^{n+k}$$

ou seja,

$$(n+k)^2 r_1^{n+k} = a_1[(n+(k-1))^2 r_1^{n+(k-1)}] + \cdots + a_k[n^2 r_1^n].$$

Portanto $n^2 r_1^n$ é solução da recorrência. De forma análoga, temos que

$$\begin{aligned} q_l(r) &= r \cdot q'_{l-1}(r) \\ &= a_1 \cdot (n+(k-1))^l r^{n+(k-1)} + \cdots + a_k \cdot n^l r^n - (n+k)^l r^{n+k} \end{aligned}$$

Pois, ao derivar cada monômio do polinômio seu expoente multiplica o coeficiente aumentando sua potência, e ao ser multiplicado por r o expoente de cada monômio volta a ser o mesmo. Agora, como $q_l(r_1) = 0$, para $0 \leq l \leq m-1$, temos que

$$0 = a_1[(n+(k-1))^l r_1^{n+(k-1)}] + \cdots + a_k[n^l r_1^n] - (n+k)^l r_1^{n+k}$$

ou seja,

$$(n+k)^l r_1^{n+k} = a_1[(n+(k-1))^l r_1^{n+(k-1)}] + \cdots + a_k[n^l r_1^n].$$

Portanto $n^l r_1^n$ é solução da recorrência, para $0 \leq l \leq m-1$.

□

Teorema 3.7.8 *: Se $r_1 = a + bi$ é raiz complexa com multiplicidade m da equação característica de $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, então $\rho^n cos(n\theta)$ e $\rho^n sen(n\theta)$, $n\rho^n cos(n\theta)$ e $n\rho^n sen(n\theta)$,..., $n^{m-1}\rho^n cos(n\theta)$ e $n^{m-1}\rho^n sen(n\theta)$ são soluções da recorrência. Onde $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $cos\theta = \dfrac{a}{\rho}$ e $sen\theta = \dfrac{b}{\rho}$.*

Prova: É consequência imediata dos Teoremas 3.7.6 e 3.7.7.

□

Observação: Dadas as sequências $\lambda^n, n\lambda^n, \ldots, n^{m-1}\lambda^n$, onde $\lambda \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$, então uma combinação linear delas pode ser escrita da forma:

$$P(n)\lambda^n$$

onde $P(n)$ é um polinômio em n, com grau menor ou igual a $m-1$.

A partir da observação acima, podemos reescrever os Teoremas 3.7.7 e 3.7.8, respectivamente, que ficam da seguinte forma:

Teorema 3.7.9 *: Se r_1 é raiz de multiplicidade m, $m \geq 2$, da equação característica de $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, então sua solução é da forma:*

$$x_n = P(n) \cdot r_1^n,$$

onde $P(n)$ é um polinômio em n, de grau menor ou igual a $m-1$.

Prova: O que nos garante que, de fato, se trata de uma solução são os Teoremas 3.7.1, 3.7.5 e 3.7.7.

Teorema 3.7.10 *: Se λ é raiz complexa com multiplicidade m da equação característica de $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, e podemos escrever $\lambda = \rho(cos\theta + isen\theta)$, então*

$$P(n) \cdot \rho^n cos(n\theta) \qquad e \qquad Q(n) \cdot \rho^n sen(n\theta)$$

são soluções da recorrência. Onde $P(n)$ e $Q(n)$ são polinômios em n, de grau menor ou igual a $m-1$.

Prova: Decorre imediatamente dos Teoremas 3.7.1, 3.7.6 e 3.7.8.

Os teoremas anteriores nos fornecem o caminho para encontrar k soluções de S_k. Para poder obter a solução geral da recorrência basta verificar que tais soluções são linearmente independentes, e para isto provaremos os seguintes lemas técnicos:

Lema 3.7.2 *: Se $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$ é um polinômio de grau m, e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então $\forall n \in \mathbb{N}$, temos*

$$\alpha P(n+1) - \beta P(n) = \sum_{k=0}^{m} \left[(\alpha - \beta)a_k + \alpha \cdot \sum_{p=k+1}^{m} a_p \cdot \binom{p}{p-k} \right] n^k$$

ou seja, $(\alpha - \beta)$ acompanha a_k, para $0 \leq k \leq m$.

Prova: Temos que $P(n+1) = a_0 + a_1(n+1) + a_2(n+2)^2 + \cdots + a_m(n+1)^m$. E todas as suas parcelas podem ser escritas através do binômio de Newton, então sua k-ésima parcela pode ser escrita como

$$\begin{aligned} a_k(n+1)^k &= a_k \left[\binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \cdots + \binom{k}{k-1} n + \binom{k}{k} \right] \\ &= a_k n^k + a_k \binom{k}{1} n^{k-1} + a_k \binom{k}{2} n^{k-2} + \cdots + a_k \binom{k}{k-1} n + a_k, \end{aligned}$$

com $0 \leq k \leq m$. Fazendo o k variar em seu intervalo, podemos reescrever $P(n+1)$ determinando os coeficientes de cada parcela pelos seus graus. Ficamos com

$$\begin{aligned} P(n+1) &= a_m \binom{m}{0} n^m + \left[a_{m-1} \binom{m-1}{0} + a_m \binom{m}{1} \right] n^{m-1} + \\ & \quad \vdots \\ & \left[a_k \binom{k}{0} + a_{k+1} \binom{k+1}{1} + \cdots + a_m \binom{m}{m-k} \right] n^k + \\ & \quad \vdots \\ & \left[a_1 \binom{1}{0} + a_2 \binom{2}{1} + \cdots + a_m \binom{m}{m-1} \right] n + \\ & a_0 \binom{0}{0} + a_1 \binom{1}{1} + \cdots + a_m \binom{m}{m}, \end{aligned}$$

e como $P(n) = a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0$, concluímos que

$$\begin{aligned}
\alpha P(n+1) - \beta P(n) &= (\alpha-\beta)a_m \cdot n^m + \left[(\alpha-\beta)a_{m-1} + \alpha \cdot a_m \binom{m}{1}\right] n^{m-1} + \\
&\qquad \vdots \\
&\quad \left[(\alpha-\beta)a_k + \alpha \cdot a_{k+1}\binom{k+1}{1} + \cdots + \alpha \cdot a_m \binom{m}{m-k}\right] n^k + \\
&\qquad \vdots \\
&\quad \left[(\alpha-\beta)a_1 + \alpha \cdot a_2 \binom{2}{1} + \cdots + \alpha \cdot a_m \binom{m}{m-1}\right] n + \\
&\quad (\alpha-\beta)a_0 + \alpha(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\left[(\alpha-\beta)a_k + \alpha \cdot \sum_{p=k+1}^{m} a_p \cdot \binom{p}{p-k}\right] n^k.
\end{aligned}$$

□

Lema 3.7.3 *: Dado o polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$, e $\alpha \neq \beta \in \mathbb{C}$. Se $\alpha P(n+1) - \beta P(n) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, então $P(x) \equiv 0$, isto é $a_k = 0$, para $0 \leq k \leq m$.*

Prova: Como

$$0 = \alpha P(n+1) - \beta P(n) = \sum_{k=0}^{m-1}\left[(\alpha-\beta)a_k + \alpha \cdot \sum_{p=k+1}^{m} a_p \cdot \binom{p}{p-k}\right] n^k + (\alpha-\beta)a_m \cdot n^m,$$

com $n \in \mathbb{N}$, necessariamente temos que $a_m = 0$. Como o coeficiente de n^{m-1} é $(\alpha - \beta)a_{m-1} + m a_m$, concluímos que $a_{m-1} = 0$. De forma análoga temos que $a_k = 0$ para $0 \leq k \leq m$, pois pelo Lema 3.7.2 o coeficiente do termo n^k é uma combinação linear de $(\alpha-\beta)a_k$ e os termos $a_{k+1}, \ldots, a_m$, os quais já sabemos que são nulos.

□

Teorema 3.7.11 *: Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^*$ diferentes entre si, se para qualquer polinômio $P_j(n)$, com $1 \leq j \leq k$, tivermos*

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

então $P_j(n)$ é identicamente nulo.

Prova: No apêndice há outra demonstração, elegante, para este Teorema tirada de [11].

Indução finita sobre k.

1. Se $k = 1$, ou seja, há apenas um número complexo $\lambda_1 \in \mathbb{C}^*$, tal que

$$P_1(n)\lambda_1^n = 0 \Rightarrow P_1(n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

   Logo $P_1(n)$ possui tantas raízes quantos os números naturais, o que implica que $P_1(n)$ é identicamente nulo ($P_1(n) \equiv 0$).

2. Suponhamos a validade para k, ou seja, para $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^*$ diferentes entre si, se
$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n = 0,$$
para qualquer polinômio $P_j(n),\ 1 \leq j \leq k$, implica que $P_j(n) \equiv 0$.

3. Para provar a validade de $k+1$, ou seja, dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} \in \mathbb{C}^*$, diferentes entre si, se para qualquer polinômio $P_i(n)$ com $1 \leq i \leq k+1$, tivermos
$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0$$
implica que $P_i(n) \equiv 0$. Vamos focar em $P_{k+1}(n)$ pois é o polinômio que acompanha λ_{k+1}^n. Suponha que este possa ser escrito da forma:
$$P_{k+1}(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m.$$
Vamos fazer indução sobre m.

   (a) Se $m = 0$, então $P_{k+1}(n) = b_0 \in \mathbb{C}$. Se
   $$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + b_0\lambda_{k+1}^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.7}$$
   logo a equação acima também deve valer para $n+1$. Reescrevendo-a, obtemos
   $$P_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + P_2(n+1)\lambda_2^{n+1} + \cdots + P_k(n+1)\lambda_k^{n+1} + b_0\lambda_{k+1}^{n+1} = 0. \tag{3.8}$$
   Multiplicando (3.7) por $-\lambda_{k+1}$ e somando com (3.8), temos
   $$[\lambda_1 P_1(n+1) - \lambda_{k+1}P_1(n)]\lambda_1^n + \cdots + [\lambda_k P_k(n+1) - \lambda_{k+1}P_k(n)]\lambda_k^n = 0.$$
   Pela hipótese de indução , cada polinômio $\lambda_j P_j(n+1) - \lambda_{k+1}P_j(n) \equiv 0$ com $1 \leq j \leq k$ e como $\lambda_j \neq \lambda_{k+1}$, pelo Lema 3.7.3, temos que $P_j(n) \equiv 0$ com $1 \leq j \leq k$. De onde $P_{k+1}(n) = b_0 = 0$.

   (b) Suponha a validade para algum número natural m, ou seja, para $P_{k+1}(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_m n^m$, se tivermos
   $$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0$$
   então $P_i(n) \equiv 0$ para $1 \leq i \leq k+1$.

   (c) Vamos verificar a validade para $m+1$. Escrevendo $P_{k+1}(n)$, da forma
   $$P_{k+1}(n) = b_0 + b_1 n + \cdots + b_{m+1}n^{m+1},$$
   se vale a equação
   $$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.9}$$
   esta também deve valer para $n+1$. Reescrevendo-a, obtemos
   $$P_1(n+1)\lambda_1^{n+1} + P_2(n+1)\lambda_2^{n+1} + \cdots + P_k(n+1)\lambda_k^{n+1} + P_{k+1}(n+1)\lambda_{k+1}^{n+1} = 0. \tag{3.10}$$

Multiplicando (3.9) por $-\lambda_{k+1}$ e somando com (3.10), temos

$$\begin{aligned} 0 &= [\lambda_1 P_1(n+1) - \lambda_{k+1} P_1(n)]\lambda_1^n + \cdots + \\ & [\lambda_k P_k(n+1) - \lambda_{k+1} P_k(n)]\lambda_k^n + \\ & [\lambda_{k+1} P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1} P_{k+1}(n)]\lambda_{k+1}^n. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.7.2, podemos escrever $\lambda_{k+1}P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1}P_{k+1}(n)$ como

$$\begin{aligned} \lambda_{k+1}P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1}P_{k+1}(n) &= (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})b_{m+1}n^{m+1} + \\ & [(\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})b_m + \lambda_{k+1}b_{m+1}]n^m + \cdots + \\ & (\lambda_{k+1} - \lambda_{k+1})b_0 + \lambda_{k+1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{m+1}), \end{aligned}$$

note que o coeficiente de n^{m+1} é zero, logo podemos escrever

$$\lambda_{k+1}P_{k+1}(n+1) - \lambda_{k+1}P_{k+1}(n) = \lambda_{k+1}b_{m+1}n^m + \cdots + \lambda_{k+1}(b_1 + b_2 + \cdots + b_{m+1}),$$

que é um polinômio de grau m. Pela hipótese de indução temos que

$$\lambda_i P_i(n+1) - \lambda_{k+1} P_i(n) \equiv 0, \quad com \quad 1 \le i \le k+1, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então pelo Lema 3.7.3, concluímos que $P_i(n) \equiv 0 \ \ para \ \ 1 \le i \le k$ (note que este Lema não vale para para $i = k+1$). Assim a equação

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n + P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0$$

se reduz a $P_{k+1}(n)\lambda_{k+1}^n = 0$, e como $\lambda_{k+1} \neq 0$, portanto

$$P_{k+1}(n) \equiv 0$$

□

Teorema 3.7.12 *: Se a equação característica de uma recorrência tiver* $r_1, r_2, \ldots, r_j$ *raízes reais com multiplicidades* $m_1, m_2, \ldots, m_j$*, respectivamente e,* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ *raízes complexas com multiplicidades* $M_1, M_2, \ldots, M_s$ *respectivamente, então*

$$r_x^n, \ldots, n^{m_x-1}r_x^n, \rho_y^n cos(n\theta_y), \ldots, n^{M_y-1}\rho_y^n cos(n\theta_y), \rho_y^n sen(n\theta_y), \ldots, n^{M_y-1}\rho_y^n sen(n\theta_y)$$

são linearmente independentes. Onde $1 \le x \le j$ *e* $\lambda_y = \rho_y(cos(\theta_y) + isen(\theta_y))$ *com* $1 \le y \le s$*.*

Prova: Podemos escrever

$$\rho_y^n cos(n\theta_y) = \frac{\lambda_y^n + (\overline{\lambda_y})^n}{2} \qquad e \qquad \rho_y^n sen(n\theta_y) = \frac{\lambda_y^n - (\overline{\lambda_y})^n}{2i}.$$

Para mostrar que todas as soluções são linearmente independentes, utilizaremos a observação anterior. Assumindo que:

$$\begin{aligned} 0 &= P_1(n)r_1^n + \cdots + P_j(n)r_j^n + \\ & Q_1(n)\left(\frac{\lambda_1^n + (\overline{\lambda_1})^n}{2}\right) + \cdots + Q_s(n)\left(\frac{\lambda_s^n + (\overline{\lambda_s})^n}{2}\right) + \\ & R_1(n)\left(\frac{\lambda_1^n - (\overline{\lambda_1})^n}{2i}\right) + \cdots + R_s(n)\left(\frac{\lambda_s^n - (\overline{\lambda_s})^n}{2i}\right), \end{aligned}$$

para todo n natural, podemos reescrever esta equação como

$$\begin{aligned} 0 &= P_1(n)r_1^n + \cdots + P_j(n)r_j^n + \\ &\left(\frac{Q_1(n)}{2} + \frac{R_1(n)}{2i}\right)\lambda_1^n + \left(\frac{Q_1(n)}{2} - \frac{R_1(n)}{2i}\right)(\overline{\lambda_1})^n + \cdots + \\ &\left(\frac{Q_s(n)}{2} + \frac{R_s(n)}{2i}\right)\lambda_s^n + \left(\frac{Q_s(n)}{2} - \frac{R_s(n)}{2i}\right)(\overline{\lambda_s})^n. \end{aligned}$$

Decorre do Teorema 3.7.11, que $P_x(n) \equiv 0$ com $1 \leq x \leq j$, e

$$\begin{cases} \dfrac{Q_y(n)}{2} + \dfrac{R_y(n)}{2i} \equiv 0 \\ \dfrac{Q_y(n)}{2} - \dfrac{R_y(n)}{2i} \equiv 0. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, concluímos que $Q_y(n) \equiv 0$ e $R_y(n) \equiv 0$, com $1 \leq y \leq s$. Onde $P_x(n)$, $Q_y(n)$, $R_y(n)$ são polinômios em n.

□

Agora que foi provada a independência linear das soluções, podemos enunciar o teorema que nos fornece a solução geral.

Teorema 3.7.13 : *Sejam $r_1, \ldots, r_j$ raízes reais de multiplicidades $m_1, \ldots, m_j$ respectivamente, e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ raízes complexas com multiplicidades $M_1, \ldots, M_s$,respectivamente, da equação característica da recorrência $x_{n+k} = a_1 \cdot x_{n+(k-1)} + a_2 \cdot x_{n+(k-2)} + \cdots + a_k \cdot x_n$, onde $m_1 + m_2 + \cdots + m_j + M_1 + M_2 + \cdots + M_s = k$, então a solução geral fica da forma*

$$\begin{aligned} x_n &= P_1(n)r_1^n + \cdots + P_j(n)r_j^n + \\ &Q_1(n)\rho_1^n cos(n\theta_1) + \cdots + Q_s(n)\rho_s^n cos(n\theta_s) + \\ &R_1(n)\rho_1^n sen(n\theta_1) + \cdots + R_s(n)\rho_s^n sen(n\theta_s), \end{aligned}$$

ou ainda

$$x_n = \sum_{t=1}^{j} P_t(n)r_t^n + \sum_{t=1}^{s} Q_t(n)\rho_t^n cos(n\theta_t) + \sum_{t=1}^{s} R_t(n)\rho_t^n sen(n\theta_t),$$

onde $\lambda_x = \rho_x(cos(\theta_x) + isen(\theta_x))$, com $1 \leq x \leq s$, e $P_1, \ldots, P_j(n)$, $Q_x(n), R_x(n)$ são polinômios em n.

Prova: É consequência imediata dos Teoremas 3.7.1 e 3.7.12.

□

Exemplo 33 : *Resolva a recorrência $x_{n+4} = 5x_{n+3} - 6x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n$.*

Solução : Temos que a equação caracerística associada é $r^4 = 5r^3 - 6r^2 - 4r + 8$, e suas raízes são $r_1 = r_2 = r_3 = 2$ e $r_4 = -1$.

Portanto a solução geral fica

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot n2^n + C_3 \cdot n^2 2^n + C_4 \cdot (-1)^n$$

ou ainda,

$$x_n = \underbrace{(C_1 + C_2 \cdot n + C_3 \cdot n^2)}_{P(n)} 2^n + C_4 \cdot (-1)^n$$

onde $P(n)$ é um polinômio em n, e $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$.

Exemplo 34 *: Resolva a recorrência* $x_{n+6} = 2x_{n+5} - x_{n+4} - 4x_{n+3} + 4x_{n+2} - 4x_n$.

Solução : Temos que a equação característica associada é

$$r^6 = 2r^5 - r^4 - 4r^3 + 4r^2 - 4$$

e suas raízes são: $r_1 = r_2 = 1 + i$, $r_3 = r_4 = 1 - i$ e $r_5 = r_6 = -1$.

Podemos escrever r_1, r_2, r_3 e r_4 na forma trigonométrica. Ficamos com

$$r_1 = r_2 = \sqrt{2} \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \qquad e \qquad r_3 = r_4 = \sqrt{2} \cdot \left(cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

Portanto a solução geral fica

$$\begin{aligned} x_n &= K_1(-1)^n + K_2 \cdot n(-1)^n + K_3(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + K_4 n(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \\ & K_5(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) + K_6 n(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right) + K_7(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + \\ & K_8 n(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + K_9(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{-n\pi}{4}\right) + K_{10} n(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{-n\pi}{4}\right), \end{aligned}$$

simplificando e reagrupando

$$\begin{aligned} x_n &= (K_1 + nK_2)(-1)^n + (K_3 + K_7 + (K_4 + K_8)n)(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \\ & (K_5 - K_9 + (K_6 - K_{10})n)(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Fazendo $P(n) = K_1 + nK_2$, $Q(n) = K_3 + K_7 + (K_4 + K_8)n$ e $R(n) = K_5 - K_9 + (K_6 - K_{10})n$, que são polinômios em n, podemos reescrever a solução geral como

$$x_n = P(n)(-1)^n + Q(n)(\sqrt{2})^n cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + R(n)(\sqrt{2})^n sen\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Note que cada polinômio de grau um nos fornece duas soluções linearmente independentes, por exemplo

$$P(n)(-1)^n = K_1(-1)^n + K_2 n(-1)^n.$$

O mesmo acontece com $Q(n)$ e $R(n)$. Assim, como era de se esperar, pois se trata de uma recorrência de ordem 6, temos seis soluções linearmente independentes.

De forma geral se P é um polinômio de grau n, temos $n + 1$ soluções linearmente independentes.

3.8 Recorrência Não Linear

Infelizmente não foi encontrado em nenhum livro ou material durante toda a pesquisa para a elaboração deste trabalho, um padrão ou uma fórmula fechada (assim como vimos nos casos das recorrência lineares), para quando a sequência possui uma equação de recorrência não linear. O que se faz é tentar encontrar padrões conhecidos, como uma P.A., P.G., recorrência linear, etc, manipulando as equações de recorrência fornecidas.

Vejamos alguns exemplos, que podem ser encontrados em [5], que tratam de recorrência não linear.

Exemplo 35 *: Determine em função de n o termo geral da sequência definida por:* $a_0 = 1, a_1 = 2, a_n = \dfrac{2a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$.

Solução: Podemos reescrever o termo geral da forma: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 2 \cdot \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$.

Definindo $u_n = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$, então $u_{n-1} = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ e $u_1 = \dfrac{a_1}{a_0} = 2$. Assim, escrevendo a recorrência em função de u_n, ficamos com

$$u_n = 2 \cdot u_{n-1}, \quad u_1 = 2$$

ou seja, trata-se uma P.G. de razão 2, logo seu termo geral é $u_n = u_1 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Voltando a substituição , temos $a_n = 2^n \cdot a_{n-1}$ que é uma recorrência linear de primeira ordem. Resolvendo-a, temos

$$\begin{array}{rcl} a_1 & = & 2a_0 \\ a_2 & = & 2a_1 \\ a_3 & = & 2a_2 \\ & \vdots & \\ a_n & = & 2a_{n-1} \end{array}$$

multiplicando ambos os membros, fica

$$\begin{array}{rcl} a_n & = & (2^{1+2+3+\cdots+n}) \cdot a_0 \\ & = & 2^{\frac{n(n+1)}{2}}. \end{array}$$

Exemplo 36 *: Uma sequência é definida por* $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^2}$*, e* $a_1 = 1$*. Mostre que* $a_{9000} > 30$.

Solução : Note que $a_2 = 2$. Além disso elevando ambos os membros da igualdade $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n^2}$ ao cubo, ficamos com

$$a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3 + \frac{3}{a_n^3} + \frac{1}{a_n^6}.$$

Note que $\dfrac{3}{a_n^3} > 0$ e $\dfrac{1}{a_n^6} > 0$, então temos que $a_{n+1}^3 - a_n^3 > 3$. Como $a_1 = 1$ e $a_2 = 2$, segue que $(a_2)^3 - (a_1)^3 = 7$, assim

$$\begin{array}{rcl}
(a_2)^3 - (a_1)^3 & = & 7 \\
(a_3)^3 - (a_2)^3 & > & 3 \\
(a_4)^3 - (a_3)^3 & > & 3 \\
& \vdots & \\
(a_n)^3 - (a_{n-1})^3 & > & 3 \\
(a_{n+1})^3 - (a_n)^3 & > & 3.
\end{array}$$

Se somarmos ambos os membros das igualdades, ficamos com $(a_{n+1})^3 > 3n + 4$ e assim $(a_{9000})^3 > 27001$, portanto $a_{9000} > 30$.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 De volta a P.A. de Ordem Superior

Como vimos na Definição 3.2.2,

$$\Delta a_n = a_{n+1} - a_n,$$

além disso vale a distributividade para o operador Δ,

$$\Delta(\Delta^p a_n + \Delta^q b_n) = \Delta^{p+1} a_n + \Delta^{q+1} b_n.$$

Se uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma progressão aritmética, sabemos que a diferença entre termos consecutivos é constante e podemos escrevê-la como

$$\begin{aligned} \Delta a_{n+1} &= \Delta a_n \\ a_{n+2} - a_{n+1} &= a_{n+1} - a_n \\ a_{n+2} &= 2a_{n+1} - a_n, \end{aligned}$$

ou ainda

$$a_{n+2} = \binom{2}{1} a_{n+1} - \binom{2}{2} a_n,$$

que é uma recorrência linear de segunda ordem. Caso $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fosse de segunda ordem, então teríamos

$$\begin{aligned} \Delta^2 a_{n+1} &= \Delta^2 a_n \\ \Delta(a_{n+2} - a_{n+1}) &= \Delta(a_{n+1} - a_n), \end{aligned}$$

essa equação seria o mesmo que

$$\begin{aligned} \Delta a_{n+2} &= 2\Delta a_{n+1} - \Delta a_n \\ a_{n+3} - a_{n+2} &= 2(a_{n+2} - a_{n+1}) - (a_{n+1} - a_n) \\ a_{n+3} &= 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n \end{aligned}$$

ou ainda,

$$a_{n+3} = \binom{3}{1} a_{n+2} - \binom{3}{2} a_{n+1} + \binom{3}{3} a_n.$$

Suponha que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma progressão aritmética de terceira ordem, então temos que

$$\begin{aligned}\Delta^3 a_{n+1} &= \Delta^3 a_n\\ \Delta^2(a_{n+2}-a_{n+1}) &= \Delta^2(a_{n+1}-a_n)\\ \Delta(\Delta(a_{n+2}-a_{n+1})) &= \Delta(\Delta(a_{n+1}-a_n)).\end{aligned}$$

Ou seja, ficamos com

$$\begin{aligned}\Delta a_{n+3} &= 3\Delta a_{n+2}-3\Delta a_{n+1}+\Delta a_n\\ a_{n+4}-a_{n+3} &= 3(a_{n+3}-a_{n+2})-3(a_{n+2}-a_{n+1})+a_{n+1}-a_n\\ a_{n+4} &= 4a_{n+3}-6a_{n+2}+4a_{n+1}-a_n\end{aligned}$$

e podemos escrever essa recorrência da seguinte forma

$$a_{n+4}=\binom{4}{1}a_{n+3}-\binom{4}{2}a_{n+2}+\binom{4}{3}a_{n+1}-\binom{4}{4}a_n.$$

Após vermos estes resultados, podemos generalizá-los para uma progressão aritmética de ordem k.

Teorema 4.1.1 *: Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma P.A. de ordem k, então esta pode ser representada por uma recorrência linear homogênea com coeficientes constantes de ordem $k+1$, onde*

$$a_{n+(k+1)}=\sum_{p=1}^{k+1}(-1)^{p+1}\binom{k+1}{p}a_{n+(k+1-p)}.$$

Prova: Indução finita sobre k.

1. Para $k=1$. Temos que se (a_n) é de ordem um, pode ser representada, como vimos, pela seguinte recorrência de ordem dois.

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n.$$

2. Suponha que para (a_n) de ordem k, podemos escrevê-la como

$$a_{n+(k+1)}=\binom{k+1}{1}a_{n+k}-\binom{k+1}{2}a_{n+(k-1)}+\cdots+(-1)^{k+2}\binom{k+1}{k+1}a_n.$$

3. Vamos verificar a validade para $k+1$. Temos,

$$\begin{aligned}\Delta a_{n+(k+1)} &= \Delta\left[\binom{k+1}{1}a_{n+k}+\cdots+(-1)^{k+2}\binom{k+1}{k+1}a_n\right]\\ \Delta a_{n+(k+1)} &= \Delta\binom{k+1}{1}a_{n+k}+\cdots+\Delta(-1)^{k+2}\binom{k+1}{k+1}a_n\\ a_{n+(k+2)} &= \binom{k+1}{1}a_{n+(k+1)}+a_{n+(k+1)}+\cdots+(-1)^{k+2}\binom{k+1}{k+1}(-a_n)\\ a_{n+(k+2)} &= \binom{k+2}{1}a_{n+(k+1)}+\cdots+(-1)^{k+3}\binom{k+2}{k+2}a_n\end{aligned}$$

Portanto (a_n) pode ser escrita por uma recorrência de ordem $k+2$, o que prova o teorema.

Note que

$$\begin{aligned}
\binom{k+1}{1}a_{n+(k+1)} + a_{n+(k+1)} &= \binom{k+1}{1}a_{n+(k+1)} + \binom{k+1}{k+1}a_{n+(k+1)}\\
&= \left[\binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{k+1}\right]a_{n+(k+1)}\\
&= \binom{k+2}{1}a_{n+(k+1)},
\end{aligned}$$

além disso

$$\begin{aligned}
\binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{k+1} &= \frac{(k+1)!}{1!k!} + \frac{(k+1)!}{(k+1)!0!}\\
&= k+1+1\\
&= k+2.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\binom{k+2}{1} &= \frac{(k+2)!}{1!(k+1)!}\\
&= k+2,
\end{aligned}$$

portanto, $\binom{k+1}{1} + \binom{k+1}{k+1} = \binom{k+2}{1}$. E assim podemos proceder, de forma análoga, com os demais coeficientes para mostrar suas igualdades.

□

Este teorema é de grande importância, pois nos permite transformar um problema de P.A. de ordem superior, que pode ser demasiadamente complicado, em um problema de recorrência que aprendemos como resolvê-los.

Vejamos o exemplo 13, o problema da pizza de Steiner, que anteriormente já foi abordado diretamente com uma recorrência linear de primeira ordem não homogênea, porém poderia ser encarado com uma progressão aritmética de ordem superior.

Temos,

$$\begin{aligned}
a_1 &= 2\\
a_2 &= 4\\
a_3 &= 7\\
a_4 &= 11\\
a_5 &= 16\\
a_6 &= 22\\
&\vdots
\end{aligned}$$

então,

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= 2 \\ a_3 - a_2 &= 3 \\ a_4 - a_3 &= 4 \\ a_5 - a_4 &= 5 \\ a_6 - a_5 &= 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

logo a sequência é uma progressão aritmética de segunda ordem. Pelo Teorema 4.1.1, podemos escrever a seguinte equação de recorrência,

$$a_{n+3} = \binom{3}{1} a_{n+2} - \binom{3}{2} a_{n+1} + \binom{3}{3} a_n$$

ou

$$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n. \tag{4.1}$$

A equação característica de (4.1) é $r^3 = 3r^2 - 3r + 1$ e sua raíz é $r = 1$ com multiplicidade 3. Logo a solução geral da recorrência, fica

$$a_n = C_1 \cdot 1^n + C_2 \cdot n \cdot 1^n + C_3 \cdot n^2 \cdot 1^n.$$

Impondo as condições de que $a_1 = 2,\ a_2 = 4$, e $a_3 = 7$, chegamos no seguinte sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 2 \\ C_1 + 2C_2 + 4C_3 = 4 \\ C_1 + 3C_2 + 9C_3 = 7 \end{cases}$$

e resolvendo-o, concluímos que $C_1 = 1$, e $C_2 = C_3 = \frac{1}{2}$. Logo, a solução do problema é da forma

$$a_n = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} = \frac{n^2 + n + 2}{2}$$

como já havíamos visto anteriormente.

Podemos melhorar o Teorema 4.1.1, dando um resultado mais direto.

Teorema 4.1.2 *: Se a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma P.A. de ordem k, então seu termo geral é da forma*

$$a_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \cdots + C_{k+1} n^k,$$

onde $C_1, C_2, \ldots, C_{k+1}$ são constantes.

Prova: Pelo Teorema 4.1.1, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pode ser reescrita como uma recorrência de ordem $k+1$, que possui a seguinte equação característica

$$r^{k+1} = \binom{k+1}{1} r^k - \binom{k+1}{2} r^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k+1},$$

e podemos escrevê-la como

$$\sum_{p=0}^{k+1}(-1)^{p+2}\binom{k+1}{p}r^{k+1-p}=0,$$

e pelo binômio de Newton, temos a igualdade

$$\sum_{p=0}^{k+1}(-1)^{p+2}\binom{k+1}{p}r^{k+1-p}=(r-1)^{k+1}=0.$$

Ou seja, 1 é raíz de multiplicidade $k+1$ da equação característica e pelos Teoremas 3.7.7 e 3.7.1, temos que a solução é da forma

$$\begin{aligned} a_n &= C_1\cdot 1^n + C_2 n\cdot 1^n + C_3 n^2\cdot 1^n + \cdots + C_{k+1}n^k\cdot 1^n \\ &= C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + \cdots + C_{k+1}n^k. \end{aligned}$$

□

Assim, fica provado que o termo geral de uma progressão aritmética de ordem k é um polinômio de grau k.

A saber, o exemplo 13 poderia ter sido resolvido de forma mais direta, pois já teríamos o polinômio do termo geral faltando apenas determinar seus coeficientes, que facilmente podem ser obtidos através de um sistema linear, deixo a cargo do leitor a resolução deste.

4.2 Revisitando a Sequência de Fibonacci

Como vimos anteriormente a sequência de Fibonacci é definida pela equação de recorrência:

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n,\quad com\ \ F_1=F_2=1,\ \ e\ n\in\mathbb{N},$$

e também podemos escrevê - la como $(1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,\ldots)$.

4.2.1 Retângulo Áureo

Um fato curioso da sequência dos quadrados dos números da sequência de Fibonacci, $(1,1,4,9,25,64,169,441,1156,3025,7921,\ldots)$, seria:

$$\begin{aligned} 1+1 &= 2=1\cdot 2 \\ 1+1+4 &= 6=2\cdot 3 \\ 1+1+4+9 &= 15=3\cdot 5 \\ 1+1+4+9+25 &= 40=5\cdot 8 \\ 1+1+4+9+25+64 &= 104=8\cdot 13, \end{aligned}$$

ou seja, a soma dos quadrados dos n primeiros números da sequência de Fibonacci é igual ao produto do n-ésimo e o $(n+1)$-ésimo números desta mesma sequência.

Proposição 4.2.1 *: Seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $F_1 = F_2 = 1$, a sequência dos números de Fibonacci. Então temos que vale a seguinte relação:*

$$(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_{n-1})^2 = F_{n-1} \cdot F_n, \ \forall n \geq 2.$$

Prova: Princípio da indução finita sobre n.

1. Para $n = 2$, temos que

$$\begin{aligned}(F_1)^2 &= 1^2 \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= F_1 \cdot F_2.\end{aligned}$$

2. Suponha válida para algum $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ a relação: $(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_{n-1})^2 = F_{n-1} \cdot F_n$.

3. Devemos mostrar que a relação vale para $n + 1$. Temos

$$\begin{aligned}(F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_{n-1})^2 + (F_{(n+1)-1})^2 &= (F_1)^2 + (F_2)^2 + \cdots + (F_{n-1})^2 + (F_n)^2 \\ &= F_{n-1} \cdot F_n + (F_n)^2 \\ &= F_n(F_{n-1} + F_n) \\ &= F_n \cdot F_{n+1},\end{aligned}$$

o que prova a proposição.

□

Esta propriedade possui um apelo geométrico forte, que trata da área de quadrados e retângulos. Vejamos:

Considere o quadrado n, de lado n e área n^2.

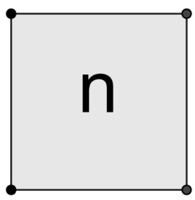

Figura 4.1: Quadrado de lado n.

Vamos ilustrar geometricamente a Proposição 4.2.1. Este algoritmo possibilita a construção do retângulo áureo.

- **Quadrado de lado 1:**

$$\mathbf{(F_1)^2 = 1^2 = 1}$$

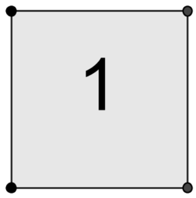

Figura 4.2: Quadrado de lado 1.

Note que podemos calcular a área deste quadrado como o produto de suas dimensões, ou seja, $1 \cdot 1 = F_1 \cdot F_2$. Logo $(F_1)^2 = F_1 \cdot F_2$.

- **Retângulo de dimensão 1 x 2:**

$$\mathbf{(F_1)^2 + (F_2)^2 = 1^2 + 1^2 = 2}$$

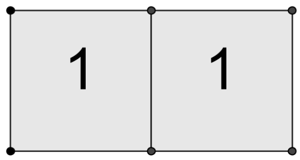

Figura 4.3: Retângulo de dimensão 1 x 2.

Note que a área deste retângulo pode ser calculada como o produto de suas dimensões, ou seja, $1 \cdot 2 = F_2 \cdot F_3$. Logo $(F_1)^2 + (F_2)^2 = F_2 \cdot F_3$.

- **Retângulo de dimensão 2 x 3:**

$$\mathbf{(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 = 1^2 + 1^2 + 2^2 = 6}$$

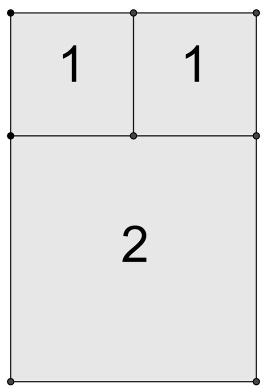

Figura 4.4: Retângulo de dimensão 2 x 3.

Note que a área deste retângulo pode ser calculada como o produto de suas dimensões, ou seja, $2 \cdot 3 = F_3 \cdot F_4$. Logo $(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 = F_3 \cdot F_4$.

- **Retângulo de dimensão 3 x 5:**

$$(\mathbf{F_1})^2 + (\mathbf{F_2})^2 + (\mathbf{F_3})^2 + (\mathbf{F_4})^2 = \mathbf{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 = 15}$$

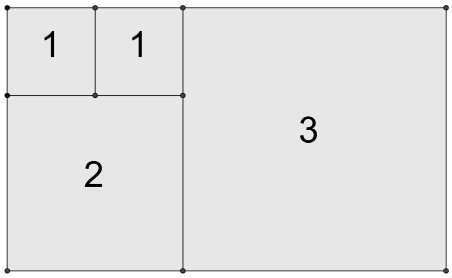

Figura 4.5: Retângulo de dimensão 3 x 5.

Note que a área deste retângulo pode ser calculada como o produto de suas dimensões, ou seja, $3 \cdot 5 = F_4 \cdot F_5$. Logo $(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + (F_4)^2 = F_4 \cdot F_5$.

- **Retângulo de dimensão** 3 **x** 5

$$(\mathbf{F_1})^2 + (\mathbf{F_2})^2 + (\mathbf{F_3})^2 + (\mathbf{F_4})^2 + (\mathbf{F_5})^2 = \mathbf{1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 = 40}$$

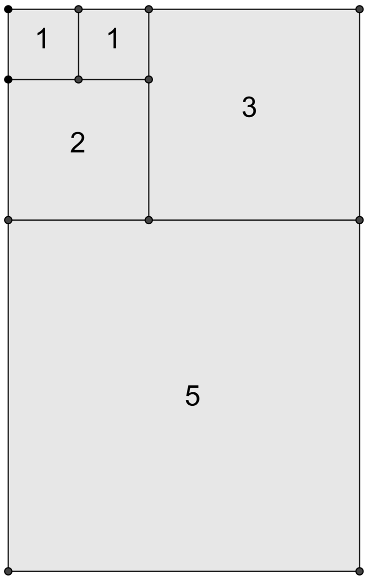

Figura 4.6: Retângulo de dimensão 3 x 5.

Note que a área deste retângulo pode ser calculada como o produto de suas dimensões, ou seja, $5 \cdot 8 = F_5 \cdot F_6$. Logo $(F_1)^2 + (F_2)^2 + (F_3)^2 + (F_4)^2 + (f_5)^2 = F_5 \cdot F_6$.

Podemos continuar com o processo indefinidamente, e a cada passo o retângulo obtido se proxima mais do retângulo áureo, ou seja, o quociente entre o comprimento e a largura tende a ser o número de ouro. Este número é denotado pela letra Φ, e vale:

$$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803399...$$

A tabela abaixo irá ajudar na compreensão deste fato.

Razão	Resultado
1/1	1
2/1	2
3/2	1,5
5/3	1,666...
8/5	1,6
13/8	1,625
21/13	1,61538462...
34/21	1,61904762...
55/34	1,61764706...
$\vdots$	$\vdots$

Tabela 4.1: Razões entre as dimensões dos retângulos.

Intuitivamente percebemos que quando a quantidade de passos tende ao infinito o retângulo obtido será o áureo, mas devemos provar este fato. Para isto, note que as dimensões dos retângulos obtidos a cada passo são os números consecutivos da sequência de Fibonacci. Chamando a razão entre o comprimento e a largura após infinitos passos de R, e de R_n a razão a cada passo, temos que

$$R_n = \frac{F_{n+1}}{F_n},$$

onde $F_n,\ n \in \mathbb{N}$, são os números da sequência de Fibonacci.

Então, realizando o algorítmo da construção do retângulo indefinidamente, temos

$$R = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

e por (3.6), podemos escrever

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}.$$

Simplificando o quociente, temos

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}\right)}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \cdot \left(1 - \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}\right)} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}\right).$$

Mas, $-1 < \frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} < 1$, logo

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n} = 0.$$

Assim temos que:

$$\begin{aligned} R &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1 \\ &= \Phi \end{aligned}$$

□

Assim, fica provado que se utilizarmos o algoritmo indefinidamente para a construção do retângulo, este tende a ser o áureo. Mais informações sobre número de ouro e retângulo áureo, podem ser encontradas em [18].

4.2.2 A Concha do Náutilo

Agora que já sabemos o algoritmo para a construção do retângulo, visto na Proposição 4.2.1, há um fato bastante curioso que pode ser obtido com base nesta construção .

Em cada quadrado construído, tomamos um de seus vértices como o centro de uma circunferência com raio igual ao lado do quadrado e traçamos um quarto desta circunferência como podemos ver na figura abaixo.

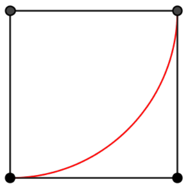

Figura 4.7: Um quarto de circunferência.

Justapondo estes quadrados de forma que as extremidades dos arcos de circunferência coincidam afim de se tornar uma curva, obtemos a espiral de Fibonacci, também chamada de espiral áurea ou ainda espiral logarítmica, como podemos ver na figura abaixo.

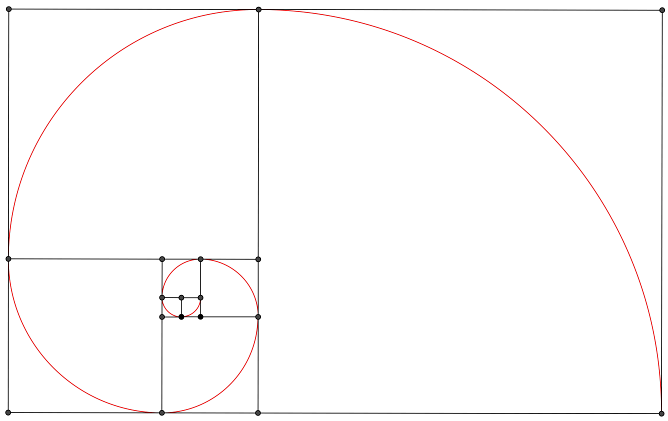

Figura 4.8: Espiral de Fibonacci.

Segundo [15], conforme o molusco Náutilo (*Natilius pompilius*) cresce no interior de sua concha, ele deve construir câmaras maiores para comportar seu novo tamanho e fecha as menores que não serão mais utilizadas. A medida que cresce o comprimento da curva da concha, o raio acompanha este crescimento proporcionalmente, e como tal molusco possui a característica da autossimilaridade, suas câmaras não mudam a forma. Estas câmaras estão relacionadas, aproximadamente, com a razão áurea.

Assim, o formato da curva da concha do Náutilos é aproximadamente a espiral de Fibonacci.

Figura 4.9: Concha do Náutilo.

Capítulo 5

Atividades

Serão apresentadas duas atividades que envolvem problemas aplicáveis em qualquer uma das três séries do ensino médio, uma vez que utiliza apenas conhecimentos básicos de matemática, e tem como objetivo despertar o interesse e a curiosidade sobre o tema.

Além disso, para alcançar o objetivo deve-se abordar o assunto de forma introdutória, desenvolvendo apenas as recorrências de primeira e segunda ordens. E se necessário for, omitir algumas demonstrações para não desmotivar o interesse por parte dos alunos.

É conveniente que os alunos tenham noções básicas sobre sequências, o que é comum no ensino médio pois nesta etapa da escolariadade são abordadas as progressões aritméticas e geométricas. Caso contrário, basta que o professor reserve alguns tempos de aula para introduzir estas noções.

5.1 Atividade 1: A torre de Hanói

Esta atividade foi inspirada em [19], que foi baseado em aula ministrada na IV Semana Olímpica, Salvador - BA, por Carlos Yuzo Shine - Colégio Etapa.

A torre de Hanói é um famoso jogo do tipo quebra-cabeças que é constituído de três hastes fixadas em uma base. Numa destas hastes há uma certa quantidade de discos com diâmetros distintos, organizados de forma que um disco sempre está sobre outro com diâmetro maior conforme a figura abaixo.

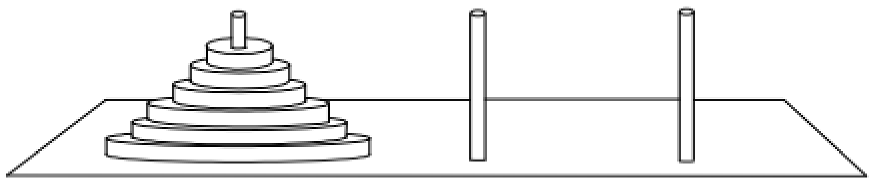

Figura 5.1: Torre de Hanói.

Qual é o número mínimo de movimentos para transferir todos os discos para outra haste, respeitando sempre a restrição de que um disco nunca seja colocado sobre outro com menor diâmetro?

Comentários

Esta atividade consiste na aplicação de um jogo onde o pensamento recursivo é contruído de forma natural, e assim possui uma boa aceitação por parte dos alunos. Em particular é uma excelente maneira de introduzir o conceito de recorrência linear de primeira ordem, pois sua algebrização é simples e de fácil compreensão.

É importante que se tenha em mãos o jogo, pois assim terá um impacto visual grande e certamente será mais atrativo que desenhos feitos em lousas.

Metodologia

Para um melhor entendimento é conveniente que o jogo comece com um disco, mesmo sendo o caso mais trivial. A quantidade de discos deve aumentar, um por vez, a cada passo anterior bem sucedido. Fica a critério do intermediador da atividade até quantos discos irá utilizar, pois isto dependerá do rendimento dos alunos e da disponibilidade de tempo reservado para a atividade. É muito importante que fique bem entendido a resolução do jogo com todas as quantidades de discos que foram utilizadas, para que se possa generalizar o problema e assim chegar na equação de recorrência que o modela.

Ao chegar na equação de recorrência, claramente, é uma conjectura e precisa ser provada. É recomendável que esta etapa seja pulada, ao menos inicialmente, com a finalidade de simplicar a resolução do problema.

Sugestão de resolução

Como o jogo não determina a quantidade de discos, suponha que há n discos em uma haste. Mas antes de resolver o problema de forma geral, vamos ver alguns casos particulares.

- Para $n = 1$:

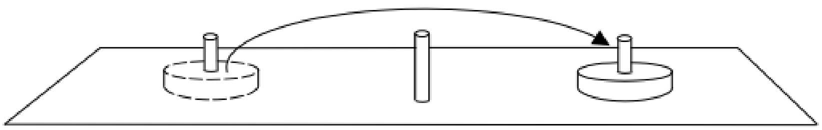

Figura 5.2: Solução com 1 disco.

Trivialmente será necessário apenas um único movimento.

- Para $n = 2$:

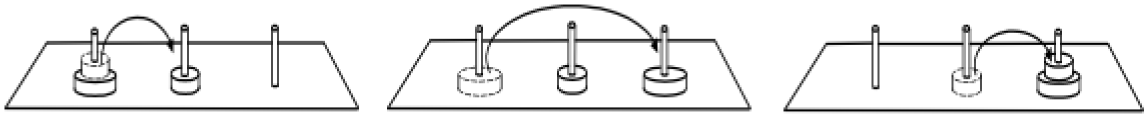

Figura 5.3: Solução com 2 discos.

Serão necessários 3 movimentos.

• Para $n = 3$:

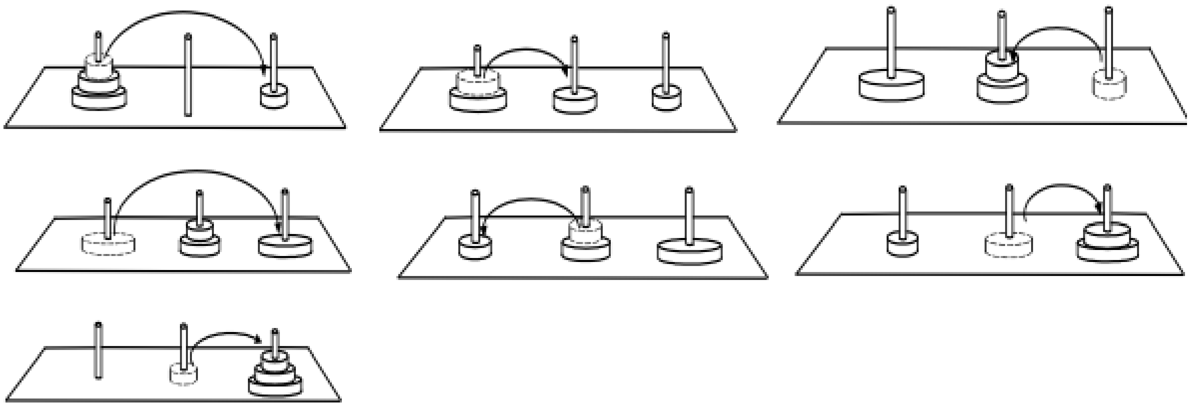

Figura 5.4: Solução com 3 discos.

Serão necessários 7 movimentos.

Inspirado nos casos particulares, para generalizar podemos utilizar a ideia de que um problema com n discos poderá ser reduzido para um problema de $n - 1$ discos. Ou seja, se é conhecida a quantidade mínima de passos para transferir $n - 1$ discos de uma haste para outra, então também é conhecida para n.

Note que para transferir os n discos, digamos da primeira haste para a terceira, precisamos transferir o disco da base (com maior diâmetro) para a terceira haste, mas antes é necessário colocar os $n - 1$ discos que estão acima para a segunda haste. Imaginando que conseguimos alocar os $n - 1$ discos superiores na segunda haste, removemos o disco de maior diâmetro para a terceira haste, e em seguida passamos a pilha com $n - 1$ discos para cima deste último, como podemos ver na figura abaixo. Repare que não foi infringida a regra do quebra-cabeças.

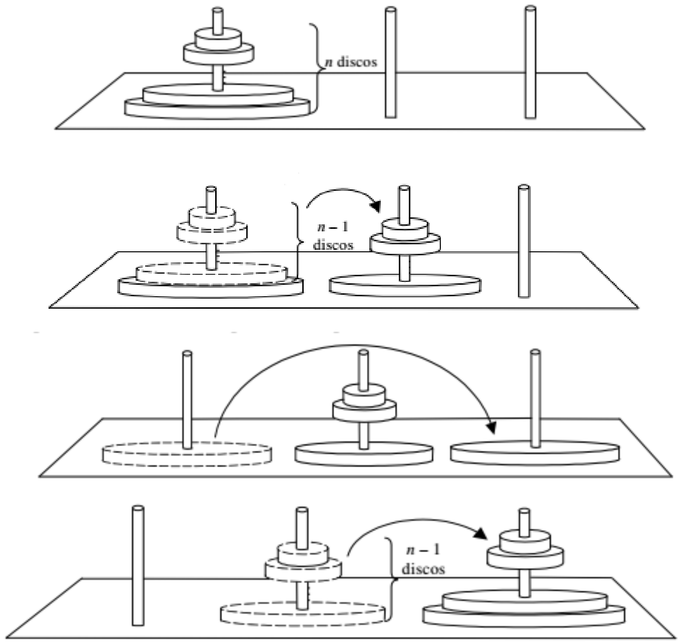

Figura 5.5: Solução com n discos.

Para algebrizar a solução, chamaremos de T_n o número mínimo de passos para mover os n discos, e T_{n-1} o número mínimo de passos para mover $n-1$ discos. Então com os passos descritos, chegamos na seguinte equação de recorrência

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + 1 + T_{n-1} \\ &= 2T_{n-1} + 1. \end{aligned}$$

Resolvendo a recorrência como fizemos nos exemplos da seção (3.5), chegamos na conjectura $T_n = 2^n - 1$. Utilizaremos indução finita para provar a veracidade desta equação . De fato, para $n = 1$ é válida pois $2^1 - 1 = 1 = T_1$. Supondo válida para algum $n \in \mathbb{N}$, então temos $T_{n+1} = 2T_n + 1 = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$, e assim temos a validade para $n + 1$. Logo, pelo princípio da indução finita $T_n = 2^n - 1$.

Portanto, $2^n - 1$ é a quantidade mínima de passos para transferir n discos de uma haste para outra.

5.2 Atividade 2: Dominós

Esta atividade foi inspirada em aula ministrada pelo professor Luciano Monteiro de Castro no Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio (PAPMEN) no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro - RJ.

De quantas maneiras distintas podemos guardar n dominós de dimensões 2 x 1 em uma caixa de dimensão 2 x n, supondo que todos os dominós são iguais, como se estivessem com a numeração para baixo, e sem levar em conta as expessuras desses e da caixa ?

Comentários

A ideia de recursão nesta atividade não é óbvia, pois esta assemelha-se com problemas corriqueiros de combinatória. Assim, temos a motivação para novamente utilizar o pensamento recursivo e avançá-lo, pois esta atividade introduz o conceito de recorrência linear de segunda ordem.

Para a realização desta atividade seria ideal ter em mãos os dominós para um maior apelo visual, porém apenas com desenhos na lousa também se mostra eficiente.

Metodologia

Com o objetivo de melhorar o entendimento é conveniente que as arrumações comecem com um dominó, depois aumente para dois, e de forma gradativa ir aumentando a quantidade sempre contando todas as possíveis arrumações. Fica a critério do intermediador da atividade até quantos dominós irá utilizar, pois isto dependerá do rendimento dos alunos e da disponibilidade de tempo reservado para atividade, mas é importante utilizar até pelo menos quatro dominós pois com menos parece se tratar de uma sequência óbvia, o que não é.

Após realizar todas as arrumações com todas as quantidades de dominós utilizadas, é imprescindível que o intermediador mostre a relação que há entre as quantidades de arrumações, pois é com este fato que iremos conseguir generalizar o problema e assim chegar *à* equação de recorrêcia que a modela.

Sugestão de resolução

Como sugerido na metodologia iremos começar com casos particulares mais simples. Seja D_n a quantidade de maneiras distintas de arrumar n dominós.

- Para $n = 1$:

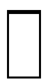

Figura 5.6: Arrumação com 1 dominó.

Trivialmente temos apenas uma forma arrumação, logo $D_1 = 1$.

- Para $n = 2$:

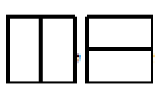

Figura 5.7: Arrumações com 2 dominós.

Logo $D_2 = 2$.

• Para $n = 3$.

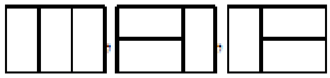

Figura 5.8: Arrumações com 3 dominós.

Logo $D_3 = 3$.

• Para $n = 4$.

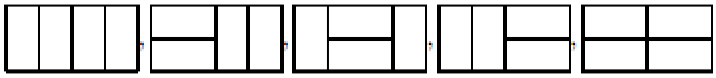

Figura 5.9: Arrumações com 4 dominós.

Logo $D_4 = 5$.

Como a idéia é utilizar o pensamento recursivo, observe a figura abaixo e perceba o que acontece se retirarmos os "fins"das arrumações para $n = 4$.

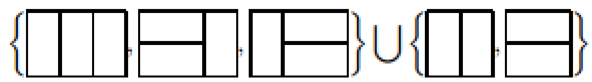

Figura 5.10: Arrumações com 4 dominós sem seus "fins".

Note que os "fins"possuem tamanhos 1 ou 2, e ao retirá-los de cada possibilidade, reduz-se ao caso anterior ou pré-anterior, de modo que $D_3 = D_2 + D_1$ e $D_4 = D_3 + D_2$. Então podemos generalizar e conjecturar a equação de recorrência $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$, e resolvendo esta recorrência de segunda ordem como vimos nos exemplos da seção (3.6), chegamos em $D_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$, que pode ser provada sem maiores dificuldades pelo princípio da indução.

Logo há $\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n+\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ modos de arrumar n dominós 2 x 1 em uma caixa 2 x n.

5.3 Relato da Experiência em Sala de Aula

As atividades sugeridas foram aplicadas para alunos do ensino médio que não tinham o conhecimento prévio sobre sequências. Como sugerido, foram reservados alguns tempos de aula para a introdução deste conceito e os casos particulares, progressões aritmética e geométrica. Porém não foi gasto muito tempo com esta parte, somente o necessário para um bom entendimento incial, pois o objetivo final é o ensino das recorrências lineares de primeira e segunda ordens, sendo esta última apenas as homogêneas.

Após ministrar as aulas introdutórias, o encontro seguinte foi a aplicação da primeira atividade, a torre de Hanói. A atividade prosseguiu como foi sugerido, ou seja, aumentando gradativamente o número de discos utilizados, e como havia o jogo em sala, os alunos puderam raciocinar ao mesmo tempo em que manuseavam as peças do quebra-cabeças, o que se mostrou uma excelente ferramenta facilitadora do entendimento pois antes de algebrizar o problema alguns alunos já conjecturavam a solução .

Após resolver o jogo para até quatro discos, foi modelado o problema e conseguimos chegar na equação de recorrência procurada. Assim, de forma lúdica e intuitiva, foi introduzido o conceito de recorrência linear de primeira ordem além de expor os métodos de solução, o que permitiu resolver a equação que serviu de motivação. Esses conceitos e métodos foram trabalhados na aula seguinte com problemas e exercícios que podemos encontrar na Seção 3.5. Foram omitidas as demonstrações das formas das soluções pois os alunos não tinham conhecimento prévio sobre indução matemática, e não havia tempo hábil para ministrar tal assunto.

Na aula subsequente foi aplicada a segunda atividade, dominós, que ao contrário da anterior, não foi utilizado material específico tendo como único suporte desenhos na lousa. Mesmo sem o apelo do manuseio dos objetos, como sugerido, a aula continuou apenas com desenhos e se mostrou bastante eficiente pois houve grande participação dos alunos que conseguiam imaginar as possíveis arrumações e relações com as quantidades anteriores afim de prever quantidades futuras.

Após contar as arrumações para até três dominós, como era de se esperar, os alunos conjecturaram o termo geral como se fosse uma recorrência linear de primeira ordem, mais especificamente, como uma progressão aritmética. Foram comunicados de que estavam errados, e foi sugerido que verificassem a quantidade de arrumações com quatro dominós para constatar o erro e tentar encontrar alguma relação com as quantidadaes anteriores. Feito este último caso, metade da turma conseguiu perceber a relação existente, porém após a explicação toda turma conseguiu entender. E assim se deu a introdução do conceito de recorrência linear homogênea de segunda ordem, talvez pela dificuldade que os alunos obtiveram em encontrar a equação de recorrência, se mostraram curiosos e empolgados com o tema.

Quanto ao método de solução, foi deduzida a equação característica e foi provado que suas raízes são soluções da equação de recorrência, mas somente com raízes reais pois a turma não tinha conhecimento de números complexos. Foi apresentado a forma da solução geral mas sem demonstração para não dificultar o entendimento, e assim conseguiram chegar na expressão do termo geral, novamente sem demonstrá-la pelos mesmos motivos vistos na aula de recorrência linear de primeira ordem. E para trabalhar o novo conceito e o método de solução foram aplicados e corrigidos os problemas e exercícios que podem ser encontrados na Seção 3.6.

De forma geral a experiência de ministrar este conteúdo foi satisfatória pois alcançamos os objetivos que eram despertar o interesse e a curiosidade sobre o tema. É claro que a forma de como irá se apresentar o conteúdo, até que ponto chegará na matéria, os detalhes e suas demontrações, irá variar de acordo com o professor, a receptividade dos alunos e os seus conhecimentos prévios além do tempo disponível. O que está no presente trabalho são apenas sugestões e o relato da aplicação delas, que pode servir de referência ou até mesmo inspiração para aqueles que também ambicionem o fazer.

Capítulo 6

Apêndice

6.1 O Método Da Indução

Ao nos depararmos com uma igualdade ou desigualdade que envolva certa propriedade dos números naturais, podemos testá-la atribuindo valores para dar credibilidade a esta propriedade, mas não conseguiremos garantir a veracidade para todos os naturais agindo desta forma e portanto não podemos prová-la. O método da indução serve para este tipo de caso, isto é, para mostrar se uma propriedade é verdadeira ou não para todos os números naturais. Podemos exemplificar este método pensando em uma fileira de dominós dispostos verticalmente de forma que quando um dominó cai o seguinte também cai, e se for garantido que o primeiro cai, então todos caem.

A seguir, enunciaremos o princípio da indução finita.

6.1.1 Princípio da Indução Finita

Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Suponhamos que:

1. *$P(1)$ é verdadeira.* *(Este item é conhecido como base de indução).*
2. *Para algum $n \in \mathbb{N}$ supor a validade de $P(n)$.* *(Este item é conhecido como hipótese de indução).*
3. *A validade de $P(n)$ implica a validade de $P(n+1)$.*

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 37 *: Mostrar que a igualdade é vedadeira*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solução : Para mostrar essa igualdade utilizaremos o princípio da indução finita.

1. Para $n = 1$. Temos : $1^2 = \dfrac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$ (Verdadeiro).
2. Para algum $n \in \mathbb{N}$, suponha que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ é verdadeiro.

3. Somando $(n+1)^2$ em ambos os lados da igualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 \\
&= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},
\end{aligned}$$

ou seja, a fórmula também é válida para $n+1$. Portanto, pelo princípio da indução finita, a fórmula é válida para todo n natural.

6.1.2 Princípio da Indução Completa

Teorema 6.1.1 *: Seja $P(n)$ uma propriedade relativa ao número natural n. Se:*

1. *$P(1)$ é verdadeira. (Este item é conhecido como base de indução).*
2. *Para algum $n \in \mathbb{N}$ supor a validade de $P(k)$, $\forall\ k \leq n$. (Este item é conhecido como hipótese de indução).*
3. *A validade de $P(k)$, $\forall\ k \leq n$ implica a validade de $P(n+1)$.*

Então, $P(n)$ é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Prova: A demonstração que será utilizada pode ser encontrada em [2].

Considere a sentença aberta $Q(n)$: $P(k)$ é válida, $\forall k \leq n$. Vamos aplicar o princípio da indução em $Q(n)$.

1. $Q(1)$ é verdadeira, pois por hipótese $P(1)$ também o é.
2. Suponhamos, para algum n, a validade de $Q(n)$. Logo $P(k)$ é válida $\forall\ k \leq n$.
3. Como $P(k)$ é válida $\forall\ k \leq n$, por hipótese, temos que $P(n+1)$ é verdadeiro, e isto implica que, $P(k)$ é válido $\forall\ k \leq n+1$. Então, $Q(n+1)$ é verdadeiro.

Portanto, pelo princípio da indução finita, $Q(n)$ é válida para todo n natural, o que implica na validade de $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Este princípio também é válido a partir de um número natural n_0, e não necessariamente, a partir do número 1. Neste caso, devemos alterar a hipótese de indução para: a validade de $P(k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ com $n_0 \leq k \leq n$.

Exemplo 38 *: (***Teorema Fundamental da Aritmética***) Todo número natural $n \geq 2$ é primo ou é um produto de números primos.*

Solução : A prova será feita pelo princípio da indução completa.

1. Para $n = 2$. Como 2 é primo, a base de indução é verdadeira.
2. Para algum n natural, suponhamos a validade da propiedade para todo natural k, tal que $2 \leq k \leq n$.
3. Se $n + 1$ for primo, está provado. Caso contrário, $n + 1$ pode ser expresso na forma $p \cdot q$, onde p e q são números naturais maiores que 1 e menores que $n+1$. Portanto, pela hipótese de indução, cada um dos números p e q é primo ou um produto de primos, o que mostra que $n + 1$ é um produto de primos. Logo, a propriedade também é válida para $n + 1$.

Portanto, pelo princípio da indução completa, a propriedade é válida para todo n natural.

□

6.2 EDO's de ordem k

Assim como no caso das recorrências, em geral na sala de aula, não se verifica a independência linear das soluções das equações diferenciais ordinárias (EDO) homogêneas de ordem k com coeficientes constantes muitas vezes pela notação extensa ou pelo fato do uso de determinantes (matriz de Vandermonde).

A seguir, apresentamos como a teoria das EDO's de ordem k, esta relacionada com as recorrências e como podemos aproveitar o Teorema 3.7.11.

Para resolver uma equação diferencial ordinária de ordem k, com coeficientes constantes:

$$y^{(n)} + a_{n+1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1y' + a_0y = 0, \tag{6.1}$$

onde $y^{(n)}$ representa a n-ésima derivada de y. Procuramos por soluções do tipo $y = e^{rx}$ com $x \in \mathbb{R}$, que ao ser substituída na equação acima, obtemos

$$(r^n + a_{n+1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0)e^{rx} = 0.$$

O polinômio $P(r) = r^n + a_{n+1}r^{n-1} + \cdots + a_1r + a_0$ é chamado Polinômio Característico, e suas raízes nos fornecem as soluções da EDO. De fato, podemos verificar que se r_1 é uma raiz de multiplicidade m de $P(r)$, então e^{r_1x}, xe^{r_1x}, $\ldots$, $x^{m-2}e^{r_1x}$ e $x^{m-1}e^{r_1x}$ satisfazem (6.1). Logo, de forma compacta podemos dizer que $Q(x)e^{r_1x}$ é solução da EDO, onde $Q(x)$ é um polinômio de grau menor ou igual a $m - 1$. Nosso objetivo é verificar a independência linear destas soluções .

Teorema 6.2.1 *: Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^*$ diferentes entre si, se para qualquer polinômio $P_j(x)$, com $1 \leq j \leq k$, tivermos*

$$P_1(x)e^{\lambda_1x} + P_2(x)e^{\lambda_2x} + \cdots + P_k(x)e^{\lambda_kx} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

então $P_j(x)$ é identicamente nulo.

Prova: Note que os Lemas 3.7.2 e 3.7.3, valem trocando $n \in \mathbb{N}$, para $x \in \mathbb{R}$. Além disso, o princípio básico da prova do Teorema 3.7.11 é satisfeito da seguinte maneira: Como a equação (6.2) vale para $\forall x \in \mathbb{R}$, tomando $x+1$ temos

$$P_1(x+1)e^{\lambda_1}e^{\lambda_1 x} + P_2(x+1)e^{\lambda_2}e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_k(x+1)e^{\lambda_k}e^{\lambda_k x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.3}$$

Multiplicando e^{λ_k} a equação (6.2) e subtraindo da equação (6.3), podemos fazer a demostração de forma análoga a prova do Teorema 3.7.11.

□

A seguir, apresentamos uma demonstração mais curta deste fato, na qual somente usamos derivada de polinômios e indução finita.

Prova: [**Versão 2**]. Faremos indução sobre k. O caso $k = 1$ é imediato, suponha que vale para k. Vejamos o caso $k+1$, isto é, suponha que

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + P_2(x)e^{\lambda_2 x} + \cdots + P_{k+1}(x)e^{\lambda_{k+1} x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{6.4}$$

Multiplicando $e^{-\lambda_1 x}$ pela equação (6.4), obtemos:

$$P_1(x) + P_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \cdots + P_{k+1}(x)e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Derivando esta equação m vezes, onde m é tal que $P_1^{(m)} \equiv 0$, e pela regra Leibniz (ver [20]) podemos escrever o l-ésimo termo como

$$\begin{aligned}
(P_l(x) \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x})^{(m)} &= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (e^{(\lambda_l-\lambda_1)x})^{(m-j)} \\
&= \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (\lambda_l - \lambda_1)^{m-j} \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x} \\
&= \left[\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (\lambda_l - \lambda_1)^{m-j}\right] \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x} \\
&= \widetilde{P}_{l-1}(x) \cdot e^{(\lambda_l-\lambda_1)x}.
\end{aligned}$$

De onde,

$$\widetilde{P}_1(x) \cdot e^{(\lambda_2-\lambda_1)x} + \widetilde{P}_2(x) \cdot e^{(\lambda_3-\lambda_1)x} + \cdots + \widetilde{P}_k(x) \cdot e^{(\lambda_{k+1}-\lambda_1)x} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Pela hipótese de indução, temos que

$$\sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \cdot P_l^{(j)}(x) \cdot (\lambda_l - \lambda_1)^{m-j} = \widetilde{P}_{l-1}(x) \equiv 0, \qquad 2 \leq l \leq k+1.$$

Se $P_l(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$. Como os λ_j são diferentes e o coeficiente de x^n de $\widetilde{P}_{l-1}(x)$ é $(\lambda_l - \lambda_1)^m \cdot a_n$ temos que $a_n = 0$. Por outro lado, o coeficiente de x^{n-1} de $\widetilde{P}_{l-1}(x)$ é

$$(\lambda_l - \lambda_1)^m \cdot a_{n-1} + m \cdot n \cdot (\lambda_l - \lambda_1)^{m-1} \cdot a_n$$

de onde, $a_{n-1} = 0$. De forma análoga temos que $a_k = 0$ para $0 \leq k \leq n$, pois o coeficiente do termo x^k de $\widetilde{P}_{l-1}(x)$ é uma combinação linear de a_k e os termos $a_{k+1}, \ldots, a_n$, os quais já sabemos que são nulos.

$\square$

6.3 Outra Demonstração para o Teorema 3.7.11

Vamos provar novamente o Teorema 3.7.11 como foi feito em [11].

Teorema: Dados $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}^*$ diferentes entre si, se para qualquer polinômio $P_j(n)$, com $1 \leq j \leq k$, tivermos

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

então $P_j(n)$ é identicamente nulo.

Prova: Para isto será necessário conhecer os seguintes resultados:

1. Se $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $|\lambda| < 1$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k\lambda^n = 0$, com $k \in \mathbb{Z}$. E se $|\lambda| = 1$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^k}\lambda^n = 0$, com $k \in \mathbb{N}$.
2. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$.
3. Se $\lambda \in \mathbb{C}^*$ e $\lambda \neq 1$, então $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda^k = \dfrac{\lambda^{n+1}-\lambda}{\lambda-1}$. E se $|\lambda| = 1$ temos que $\dfrac{|\lambda^{n+1}-\lambda|}{|\lambda-1|} < \dfrac{2}{|\lambda-1|}$, ou seja, é limitado.
4. Teorema do anulamento.

Suponha por absurdo que exista ao menos um dos polinômios $P_j(n)$, com $j \leq k$, não nulo e que satisfaça a equação

$$P_1(n)\lambda_1^n + P_2(n)\lambda_2^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Desconsiderando todos os polinômios nulos, vamos reorganizar os não nulos (que podem ser vários) de forma a colocar as parcelas que possuem os maiores $\lambda's$ em módulo (podem haver vários com mesmo módulo) nas primeiras posições da soma. Em seguida iremos reorganizar novamente as parcelas, que arrumamos anteriormente, colocando como primeiros termos da soma os polinômios que tivrem o maior grau. Ou seja, se uma parcela $P_r(n)\lambda_r^n$ está a esquerda de $P_m(n)\lambda_m^n$ então $|\lambda_r| \geq |\lambda_m|$, e se $|\lambda_r| = |\lambda_m|$ então $grau(P_r(n)) \geq grau(P_m(n))$ (note que podem existir polinômios de mesmo grau).

Para facilitar podemos reindexar a soma de forma que $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \ldots = |\lambda_s| = |\lambda_{s+1}| = \ldots = |\lambda_t| > |\lambda_j|$, com $t < j < k$, e seja $d = grau(P_1) = grau(P_2) = \ldots = grau(P_s) > grau(P_{s+1}), \ldots, grau(P_k)$.

Suponha que o coeficiente do monômio n^d de $P_h(n)$ é a_h, onde $h = 1, \ldots, s$. Podemos escrever a equação já reordenada da seguinte forma

$$P_1(n)\lambda_1^n + \cdots + P_s(n)\lambda_s^n + P_{s+1}(n)\lambda_{s+1}^n + \cdots + P_k(n)\lambda_k^n = 0, \tag{6.5}$$

dividindo (6.5) por $n^d\lambda_1^n$, temos

$$\frac{P_1(n)}{n^d} + \frac{P_2(n)}{n^d}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n + \cdots + \frac{P_s(n)}{n^d}\left(\frac{\lambda_s}{\lambda_1}\right)^n + \cdots + \frac{P_k(n)}{n^d}\left(\frac{\lambda_k}{\lambda_1}\right)^n = 0.$$

Tomando o limite quando n tende ao infinito em ambos os lados da equação, e por (1) obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{n\to\infty}\left(a_1 + \sum_{l=2}^{s} a_l\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\right)^n\right), \quad \textit{por } (2)\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left(a_1 + \sum_{l=2}^{n} a_l\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\right)^p\right)\\
&= \lim_{n\to\infty} a_1 + \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{l=2}^{s} a_l\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\right)^p\\
&= a_1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{l=2}^{s} a_l\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\right)^p\\
&= a_1 + \sum_{l=2}^{s} a_l\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\left(\frac{\lambda_l}{\lambda_1}\right)^p, \quad \textit{por } (3) \textit{ e } (4)\\
&= a_1,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição. Pois por hipótese a_1 é o coeficiente do monômio n^d de $P_1(n)$, e $grau(P_1) = d$.

$\square$

.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, E. L. **Análise Real volume 1 - Funções de uma variável**. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007

[2] MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática Discreta**. 1.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[3] IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da Matemática Elementar - Vol. 4**. 6.ed. São Paulo: Atual, 1993.

[4] VILENKIN, N. Ya.; **Combinatorial Mathematics For Recreations**. 1.ed. Moscow: MIR. PUBLISHERS, 1972.

[5] OLIVEIRA, M. R. **Coleção Elementos da Matemática - Vol. 3**. 1.ed. Fortaleza: VestSeller, 2010.

[6] BOLDRINI, J. L. **Álgebra Linear**. 3.ed. São Paulo: Harper e Row do Brasil, 1980.

[7] IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar - Vol. 6**. 6.ed. São Paulo: Atual, 1993.

[8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática do Ensino Médio**. 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[9] LIU, C. L. **Introduction to Combinatorial Mathematics**. 1.ed. USA: McGraw-Hill, 1968.

[10] Lipschutz, S.; Lipson, M. **Matemática discreta**. 2.ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

[11] MOREIRA, C. G. **Sequências Recorrentes**. Artigo disponível em http://www.bienasbm.ufba.br/M55.pdf - 03/12/2015.

[12] BRASIL. **CES + Câmara de Ensino Superior**. http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf - 03/11/2015.

[13] BRASIL. **PCN + Parâmetros Curriculares Nacionais**, Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, Orientações Educacionais Complementares. http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf - 02/11/2015.

[14] BRASIL. **LDB + Lei de Diretrizes e Bases**. http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf - 02/11/2015.

[15] CHAQUIAM, M.; JÚNIOR, E. L. B. O Segredo das Formas Harmônicas. **Traços: revista do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia** Belém, v.10, 2008. p.107-124.

[16] Boyce, W. E.; DiPrima, R. C. **Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera**. 4.ed. Balderas: Limusa, 2000.

[17] Garcia, A.; Lequain, Y. **Elementos de Álgebra**. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[18] Kaleff, A. M. M. R. **Novas tecnologias no ensino da matemática:** tópicos em ensino de geometria. Rio de Janeiro: MEC, 2008.

[19] Shine, C. Y. **A Torre de Hanoi**. Artigo disponível em http://www.feg.unesp.br/ anachiaradia/Material/FAM%20-%20torre%20de%20hanoi.pdf - 15/04/2016.

[20] Olver, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**. New York: Springer US, 1986.