2016: DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM

Problemas interessantes e o número de Euler

Luiz Gustavo Martins Dos Santos [1]
Gilcélia Regiâne de Souza[2]

Resumo:

Podemos observar diversas aplicações interessantes do número de Euler em vários campos da matemática. Nesta perspectiva, o presente texto trás a resolução de três problemas onde inicialmente não se esperava que a solução estaria relacionada ao número de Euler. Um desses problemas é o "Problema dos Casais no Cinema", cuja solução converge para o seguinte número $1/e^2$. As Permutações Caóticas e a Probabilidade serão utilizadas para a solução do problema "O Porteiro e os Chapéus"cujo resultado também se apresenta como uma função de e. E finalmente mostraremos uma prática docente onde os estudantes do ensino médio tiveram a oportunidade de trabalhar com o número de Euler em uma aplicação da Matemática Financeira.

Palavras-chave: Número de Euler, Problema da Secretária, Permutações Caóticas, Capitalização Contínua.

1 Introdução

Dois números racionais são de extrema relevância no estudo da matemática, o número π e o número de Euler e. O número π aparece com maior frequência no ensino básico em diversas situações principalmente na geometria todavia o número de Euler se mostra distante dos estudantes, sendo que muitos deles formam no ensino médio sem saber da sua existência ou meramente tem uma breve introdução no estudo das funções exponenciais.

O trabalho que desenvolvemos aqui não trata apenas de demonstrações ou de uma análise mais formal do número de Euler, na verdade a proposta é solucionar vários problemas interessantes em que a ocorrência do número de Euler se faz presente.

Inicialmente apresentamos o número de Euler, dados históricos e sua definição além da demonstração de alguns teoremas de extrema importância para a resolução dos nossos problemas. Logo depois mostramos o número de Euler na Probabilidade com a resolução do Problema do Porteiro e os Chapéus. Outro exemplo é o problema dos casais no cinema, com uma solução surpreendente. O último problema e não menos interessante é o Problema da Secretária que aborda a teoria de decisão e cujo resultado converge para o número $1/e$. Finalmente o último capítulo mostra a aplicação do número de Euler no ensino médio através da capitalização contínua.

[1]Aluno de Mestrado do PROFMAT, Turma 2014, Universidade Federal de São João Del-Rei - UFSJ, lgmatbh@yahoo.com.br

[2]Professor orientador, Departamento de Física e Matemática - DEFIM, UFSJ, gilcelia@ufsj.edu.br

2 Conceitos básicos

Nesta seção definiremos os principais conceitos necessários para o desenvolvimento do nosso estudo. Neste textos vamos usar a notação $|A|$ para referir ao número de elementos do conjunto A ou seja, sua cardinalidade. Em muitos textos a notação utilizada para cardinalidade é # todavia por comodidade usaremos a notação citada acima.

Definição 2.1 *O número de maneiras de permutar ou ordenar n elementos de um conjunto com n elementos será denotado por:*

$$P_n = n! \tag{1}$$

Definição 2.2 *O número de maneiras de escolher j elementos de um conjunto com n elementos será denotado por:*

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!j!} \tag{2}$$

Diversos problemas no ramo da combinatória necessitam da cardinalidade da união de conjuntos. Vamos inicialmente supor que estamos interessados na união de dois conjuntos não disjuntos A e B. É fácil verificar que sua cardinalidade será dada por:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Muitas vezes é de interesse saber a cardinalidade da união de um número finito de conjuntos, como é o caso aqui. Portanto exibir uma fórmula para a cardinalidade da união de um número finito de conjuntos finitos é de extrema importância para o desenvolvimento desse texto. Ou seja, estamos interessados no Princípio da Inclusão e Exclusão enunciado e demonstrado abaixo, com $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq n$.

Teorema 2.1 *(Princípio da Inclusão e Exclusão): O número de elementos na união de n conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ é dado por:*

$$\sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n| \tag{3}$$

Demonstração: Basta mostrar que, dado $p = 1, 2, 3, \ldots, n$, temos cada elemento pertencente a p conjuntos $A_i's$ o qual é contado exatamente uma vez na soma acima. De fato, pertencendo a p conjuntos $A_i's$ ele será contado:

$$\begin{array}{lll}
\binom{p}{1} & \text{termos de} & \displaystyle\sum_{1\leq i_1\leq n} |A_{i_1}| \\
\binom{p}{2} & \text{termos de} & \displaystyle\sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}| \\
\binom{p}{3} & \text{termos de} & \displaystyle\sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}| \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\binom{p}{p} & \text{termos de} & \displaystyle\sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_p\leq n} |A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}\cap\ldots\cap A_{i_n}|
\end{array}$$

É claro que a interseção de mais que p conjuntos não fornecerá nenhuma contribuição, uma vez que o elemento em questão pertence a exatamente p conjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Somando todas as contribuições acima com seus respectivos sinais, obtemos:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p}$$

Queremos provar que a soma acima é igual a um. Para tanto vamos demonstrar primeiramente a seguinte igualdade:

$$\binom{p}{0} - \binom{p}{1} + \binom{p}{2} - \binom{p}{3} + \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} = 0$$

Temos pelo Binômio de Newton que:

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}(-1)^{p-i} = (-1-1)^p = 0$$

Desta forma:

$$\binom{p}{1} - \binom{p}{2} + \binom{p}{3} - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p} = 0 + \binom{p}{0} = 1$$

□

Definição 2.3 *O cálculo da probabilidade da ocorrência de um evento A será igual á razão entre o número de elementos do conjunto A (isto é, $|A|$) casos favoráveis e o número de elementos no conjunto Ω (isto é, $|\Omega|$) casos possíveis de ocorrer. Ou seja:*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \tag{4}$$

Definição 2.4 *Definimos como uma Progressão Geométrica (PG) a sequência com os seguintes termos* $(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots a_n)$ *em que sua razão* q *sempre será dada por:*

$$q = \frac{a_i}{a_{i-1}} \tag{5}$$

Teorema 2.2 *O termo geral de uma PG de* n *termos cujo primeiro termo é* a_1 *e cujo razão é* q *é:*

$$a_n = a_1 q^{n-1} \tag{6}$$

Demonstração: Vamos proceder a demonstração utilizando o Princípio da indução. É certo que é válido para $n = 1$, pois $a_1 = a_1 q^{1-1} = a_1$.

Suponha que é válido para $n = k$ ou seja:

$$a_k = a_1 q^{k-1}$$

Precisamos mostrar que a seguinte preposição é valida para $n = k + 1$, pela definição temos:

$$q = \frac{a_{k+1}}{a_k}, \text{ isto é, } a_{k+1} = a_k q$$

$$a_{k+1} = a_1 q^{k-1} q, \text{ ou seja, } a_{k+1} = a_1\ q^k$$

□

Definição 2.5 *Definimos como Série Geométrica a seguinte PG infinita:*

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$$

Teorema 2.3 *A Série Geométrica:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \ldots$$

é convergente se $|q| < 1$ *e sua soma é:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}$$

Se $|q| > 1$ *a série diverge.*

Demonstração: Seja $S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, fazendo qS_n:

$$\begin{cases} qS_n &= a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_nq^{n-1} + a_nq^n \\ S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_nq^{n-1} \end{cases}$$

Fazendo $qS_n - S_n$ temos:

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

Colocando S_n e a_1 em evidência temos:

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$

Isolando S_n:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Sabemos pela teoria dos limites que quando $|q| < 1$ temos:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$$

Desta forma para $|q| < 1$:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{a}{1 - q}$$

Todavia para $|q| > 1$ temos:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \infty$$

Desta forma para $|q| > 1$ a série diverge.

$\square$

Definição 2.6 *Uma sequência pode ser pensada como uma lista de números escritos em uma ordem definida:*

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$$

Uma sequência associa cada inteiro positivo n a um número correspondente a_n e, dessa maneira uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto dos inteiros positivos.

Definição 2.7 *A soma dos termos de uma sequência a_n é denominado de séries de termo geral a_n ou simplesmente série infinita, denotado pelo símbolo:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

3 O número de Euler

A história do número de Euler começa com John Napier (1550-1617) foi um lorde escocês considerado um dos maiores matemáticos da sua época. Inicialmente ele buscava um sistema que facilitasse a multiplicação de senos, que posteriormente seria usado para quaisquer números. Sua primeira obra foi publicada em 1614 o "Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio" (Descrição da Maravilhosa Regra dos Logaritmos). Em seus trabalhos Napier ainda não trazia o nome da constante propriamente dita, mas já existia uma lista de logaritmos naturais cuja base se aproximava muito do número de Euler. A palavra "logaritmo", criada por Napier, formada de lógos (evolução) e arithmos (números), significava, assim, evolução dos números. Mas provavelmente o seu primeiro contato com o número de Euler se deu com a matemática financeira através da análise de casos de juros compostos onde Napier percebeu que, ao aumentarmos os períodos de capitalização, obtínhamos valores cada vez maiores o que seria o fundamento para a capitalização contínua que estudaremos no ultimo capítulo desse texto. Mas de certo que a maiores descobertas sobre o número de Euler foi feita por Leonhard Euler (pronuncia-se "Óiler"), o mesmo nasceu na Basiléia suíça em Abril de 1707. Nessa época estava se desenvolvendo o cálculo infinitesimal e este assunto se tornou foco principal dos estudos de Euler que começou a usar a letra e para a constante em 1727 ou 1728, em um artigo Euler Mechanica.

O número e é um número irracional e transcendente (como o π). A irracionalidade de e foi demonstrada por Lambert em 1761 e mais tarde por Euler. A prova da transcendência de e foi estabelecida por Hermite em 1873.

Denominamos como e o resultado da seguinte série infinita:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

Vamos agora demonstrar alguns teoremas de extrema importância para nosso estudo sobre o número de Euler e suas aplicações. Mas antes precisamos de alguns conceitos [7]:

Série Convergente: Dada uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$, denote por s_n sua n-ésima soma parcial:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Se a sequência s_n for convergente e $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = s$ existir como um número real, então a série $\sum a_n$ é chamada convergente e escrevemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$$

Se a sequência s_n for divergente, então a série é chamada divergente.

Teste da comparação para séries: Suponha que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ sejam séries com termos positivos. Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ for convergente e $a_n < b_n$ para todo n, então $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, também será convergente.

Teorema 3.1 *A série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$ *converge:*

Demonstração: Observe a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots$$

É conveniente reescrevermos a série de Euler da seguinte maneira : $e = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$. Temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ podemos ver isso analisando os termos correspondentes das duas séries:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} \ldots < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots.$$

Sabemos que a série geométrica converge então pelo teste da comparação a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ também converge, o que torna imediato a convergência de $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ a qual é denotado por e. $\square$

Corolário 3.1 *O número irracional e é um número limitado onde* $2 < e < 3$

Demonstração: É fácil verificar que ela é limitada inferiormente por 2.

$$e = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots. > 2.$$

Vamos agora mostrar que ela é limitada superiormente por 3. Da demonstração anterior temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Adicionando 1 em cada lado:

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} < 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Desenvolvendo:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \ldots$$

Pela soma da série geométrica $\sum \frac{1}{2^n} = 1$ temos:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots < 1 + 1 + 1 = 3$$

Onde concluímos que $2 < e < 3$. $\square$

Teorema 3.2 *O resultado dessa série é um número irracional.*

Demonstração: Como foi citado acima o número de Euler pode ser obtido através da série:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \tag{7}$$

Vamos mostrar a irracionalidade do número de Euler usando uma demonstração por absurdo. Dessa forma supondo que o número e seja racional, ou seja, que pode ser escrito na forma: $e = \dfrac{p}{q}$, onde p e q são inteiros não nulos e $q \neq 1$, pois o número de Euler não é inteiro como já comprovamos. Assim:

$$e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!} = \sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{8}$$

Do resultado de (8) podemos montar a seguinte desigualdade para $n \leqslant q + 1$:

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{(q+1)\ldots n} \leqslant \frac{1}{q!} \cdot \frac{1}{(q+1)^{n-q}}$$

O que implica:

$$\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{q!} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^k} = \frac{1}{q!}\frac{1}{q} \tag{9}$$

A última igualdade decorre da fórmula para a soma da série geométrica. De (8) e (9), segue que:

$$0 \leqslant (e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}) \leqslant \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

Assim:

$$0 \leqslant q!(e - \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}) \leqslant \frac{1}{q} < 1$$

Observe que o termo central $q!(e - \sum\limits_{n=0}^{q} \frac{1}{n!})$ é inteiro pois todos os denominadores da expressão simplificam com $q!$, como podemos verificar ao substituir $e = \frac{p}{q}$ e expandir a soma $\sum\limits_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}$:

$$0 \leqslant q!\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \ldots - \frac{1}{q!}\right) \leqslant \frac{1}{q} < 1$$

Mas isso é um absurdo pois não existe inteiro entre 0 e 1. Logo e é irracional. $\square$

Teorema 3.3 $e = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Demonstração: Sabemos o seguinte desenvolvimento do Binômino de newton:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 \cdots + \binom{n}{0} a^0 b^n$$

Temos então:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} 1^n \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} 1^{n-1} \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \binom{n}{3} 1^{n-3} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \binom{n}{n} 1^0 \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Desenvolvendo as combinações temos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

Desenvolvendo as potências:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{n^2} + \frac{1}{3!}\frac{n(n-1)(n-2)}{n^3} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

Simplificando as frações:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2}\frac{(n-1)}{n} + \frac{1}{3!}\frac{(n-1)}{n}\frac{(n-2)}{n} + \cdots + \frac{1}{n^n}$$

Agora é conveniente separar os termos do numerador:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(\frac{n}{n} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n} - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n^n}\right)$$

E finalmente:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^n}\right)$$

Sabemos que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$. Dessa forma concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2}(1-0)+\frac{1}{3!}(1-0)(1-0)+\ldots = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots = 2,718281828\ldots$$

$\square$

Para o desenvolvimento do nosso trabalho também será importante saber escrever através da série de Maclaurin uma expansão para $f(x)=e^x$. Sabemos que a série de Maclaurin é dada por:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots$$

Desenvolvendo a série para a função $f(x)=e^x$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$$

O número de Euler também pode ter uma **interpretação geométrica** como sendo o número K tal que a área abaixo do gráfico da função $f(x)=\frac{1}{x}$ é igual a 1.

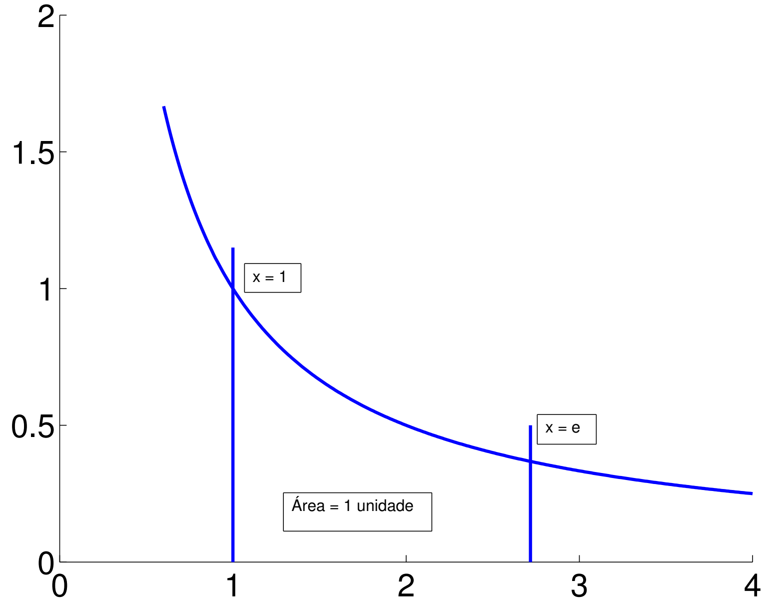

Figura 1: Área da região que está sob o gráfico da função $1/x$, limitada pelas retas $x = 1$ e $x = e$ e pelo eixo x.

Assim o número de Euler pode ser definido como o único número K tal que:

$$1 = \int_1^k \frac{1}{t}\, dt = lnk$$

4 O número de Euler e a probabilidade

Uma interessante aplicação de probabilidade cujo resultado envolve o número de Euler está presente no seguinte problema O Porteiro e os Chapéus, a saber:

Suponha que n cavalheiros foram a uma festa e deixaram seus chapéus com o porteiro. O porteiro colocou papeizinhos com os nomes dos cavalheiros para identificar o chapéu e seu respectivo dono. Um forte vento tirou todos os papeis de lugar e o porteiro agora vai tentar aleatoriamente colocar os papeizinhos em seu lugar original. Qual a probabilidade na reorganização dos papeizinhos o porteiro errar a posição de todos eles, ou seja nenhum deles voltar a posição original?

4.1 Exemplos introdutórios

Antes de pensar na solução para este problema vamos pensar em um exemplo mais simples desse caso:
Exemplo 1: Suponha que n cavalheiros foram a uma festa e deixaram seus chapéus com o porteiro. Como o porteiro estava muito distraído, trocou alguns chapéus de lugar.

(a) De quantas maneiras distintas os chapéus podem estar dispostos de modo que o chapéu do primeiro ou do segundo cavalheiro estejam na posição correta?
Sejam A_1 o conjunto de todas as permutações em que o chapéu do primeiro cavalheiro esteja na posição correta e A_2 o conjunto de todas as permutações onde o chapéu do segundo cavalheiro esteja na posição correta. Assim temos:
$|A_1| = |A_2| = (n-1)!$, pois para $i = 1, 2$, fixando o chapéu do i-ésimo cavalheiro na posição correta, precisamos apenas permutar os $n-1$ restantes.
$|A_1 \cap A_2| = (n-2)!$, pois fixando simultaneamente os chapéus do primeiro e do segundo cavaleiros nas posições corretas, precisamos apenas permutar os restantes.
Desta forma utilizando do principio da inclusão e exclusão temos:

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2| &= |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| \\ &= 2(n-1)! - (n-2)! \\ &= 2(n-1)(n-2)! - (n-2)! = (2n-3)(n-2)! \end{aligned}$$

(b) De quantas maneiras distintas os chapéus podem estar dispostos de modo que o chapéu do primeiro e do segundo cavalheiro estejam na posição incorreta?

O total de maneiras em que os chapéus estão dispostos é dado por $n!$, assim a solução procurada será:

$$n! - |A_1 \cup A_2| = n! - (2n-3)(n-2)!$$

4.2 Permutações Caótica

A solução do problema proposto nesta seção consiste em determinar o número de maneiras em que nenhum dos papeizinhos estejam na posição correta, ou seja, todas as permutações onde nenhum dos seus termos se encontra na posição original. Essas permutações são conhecidas como permutações caótica ou desarranjos.

Definição 4.1 *Uma permutação de $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ é dita caótica quando nenhum dos seus $a_i's$ se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição.*

Considere A_i como o conjunto de todas as permutações de $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, tendo a_i na posição correta. Assim, a fim de obter o número de permutações caóticas, basta calcular o complementar de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, ou seja, devemos calcular o número de elementos que não pertencem a nenhum dos $A_i's$. Denotando por D_n o número de permutações caóticas a serem calculadas, temos:

$$\begin{aligned} D_n &= [A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n]^C \\ D_n &= n! - \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| - \ldots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n| \end{aligned}$$

Claramente temos:

$$\begin{aligned} |A_{i_1}| &= (n-1)!, \text{ para} 1 \leq i_1 \leq n \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2}| &= (n-2)!, \text{ para } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n \\ |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap Ai_3| &= (n-3)!, \text{para } 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n \\ &\vdots \\ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n| &= 1 \end{aligned}$$

E, como existem,

$$\begin{array}{ccc} \binom{n}{1} & \text{termos de} & \sum_{1 \leq i_1 \leq n} |A_{i_1}| \\ \binom{n}{2} & \text{termos de} & \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n}{n} & \text{termos de} & |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n| \end{array}$$

Concluímos:

$$D_n = n! - (n-1)!\binom{n}{1} + (n-2)!\binom{n}{2} - (n-3)!\binom{n}{3} + \ldots + (-1)^n$$

Fazendo simplificações:

$$D_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

Finalmente colocando n! em evidência obtemos que o número de permutações caóticas de n elementos é dado por:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) \tag{10}$$

4.3 O Porteiro e os Chapéus

Após obter o número de permutações caóticas fica fácil verificar a solução para o problema, "O porteiro e os chapéus". Ou seja estamos interessados em calcular a probabilidade de todos os papelzinhos estarem fora da sua posição original chamando de A o conjunto em que todos elementos tem essa propriedade, teremos: $|A| = D_n$. O espaço amostral é o conjunto Ω de todas as permutações possíveis, sua cardinalidade será dada por $|\Omega| = n!$.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)}{n!}$$

Simplificando:

$$P(A) = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

Sabemos que:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots$$

Assim a solução para o problema "O Porteiro e os Chapeus" quando n tende ao infinito será:

$$P(A) = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

5 O problemas dos casais

Imagine que há um filme novo estreando no cinema, uma comédia romântica, e centenas de casais (muitos mais que a capacidade do cinema). Estão enfileirados na bilheteria, desesperados para entrar. Assim que um casal de sorte consegue um ingresso, entra e escolhe dois lugares, lado a lado. Para simplificar, vamos supor que os casais escolham as poltronas ao acaso, apenas por estarem vagas, em outras palavras, eles não se importam se estão sentados perto ou longe da tela, no corredor ou no meio, desde que estejam juntos, lado a lado, estão felizes. Além disso, vamos supor que nenhum casal se desloque para abrir espaço para o outro. Assim que se sentam, não saem mais do lugar. Não há gentilezas. Sabendo disso a bilheteria deixa de vender ingressos quanto percebe que só há lugares únicos sobrando. Caso contrário, haverá brigas. A princípio enquanto o cinema está bem vazio não a problema. Todos os casais conseguem encontrar lugares lado a lado. Mais depois de algum tempo os únicos lugares vagos são isolados, poltronas solitárias e inutilizáveis, que os casais não podem ocupar. Na vida real as pessoas geralmente criam essas lacunas intencionalmente seja para alocar casacos e sacolas ou para impedir que o descanso de braço seja compartilhado com estranho repulsivo. Neste modelo, contudo, os lugares vazios só acontecem ao acaso. A questão é: Quando não há lugar vago para casais que fração dos lugares do cinema permanece vazia.

Vamos considerar que o cinema tem n lugares. Nosso objetivo é calcular a fração esperada de lugares isolados. Definimos S_n como o valor esperado de lugares isolados neste cinema. Obviamente:

Para $n = 0$ o valor esperado $S_0 = 0$.
Para $n = 1$ o valor esperado $S_1 = 1$.
Para $n = 2$ o valor esperado $S_2 = 0$.
Para $n = 3$ o valor esperado $S_3 = 1$.

No caso $n = 4$ para obter o valor esperado utilizamos a seguinte estratégia, se o primeiro casal se sentar nas primeiras poltronas (Figura 2), vão sobrar dois lugares adjacentes cujo o valor esperado de lugares isolados é de S_2.

Figura 2: Casais no cinema

Se o primeiro casal se sentar na segunda e terceira poltronas (Figura 3), vamos ter duas vezes o valor esperado de lugares vazios para uma poltrona ou seja $2S_1$. Por fim, se o primeiro casal se sentar nas duas últimas poltronas (Figura 4), vão sobrar dois lugares adjacentes, agora no início, cujo o valor esperado de lugares isolados é de S_2.

Figura 3: Casais no cinema

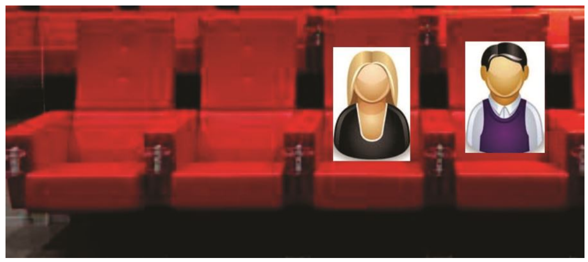

Figura 4: Casais no cinema

Desta forma o valor esperado para lugares isolados quando consideramos apenas 4 lugares no cinema é obtido por:

$$S_4 = \frac{2S_1 + 2S_2}{3}$$

Para cinco lugares utilizaremos a mesma estratégia, se o primeiro casal se sentar nas primeiras duas cadeiras o valor esperado de lugares isolados é dado por S_3 (Figura 5). Mas se o primeiro casal se sentar na segunda ou terceira poltrona o valor esperado de lugares isolados é de $S_1 + S_2$ (Figura 6). No caso em que o primeiro casal se sentar no terceiro e quarto lugares teremos novamente como valor esperado de lugares isolados $S_1 + S_2$ (Figura 7). E por fim, se o casal se sentar no quarto e quinto lugares, teremos como o valor esperado para lugares isolados S_3 (Figura 8):

Figura 5: Casais no cinema

Figura 6: Casais no cinema

Figura 7: Casais no cinema

Logo:

$$S_5 = \frac{2S_1 + 2S_2 + 2S_3}{4}$$

Para n lugares a estratégia também é válida. De fato, quando o primeiro casal se sentar nas duas primeiras poltronas o valor esperado de valores isolados é S_{n-2} caso o casal ocupasse as duas ultimas posições o valor esperado de lugares isolados também séria S_{n-2}. Se eles ocupassem a segunda e terceira poltrona o valor esperado de lugares isolados séria $S_{n-3} + S_1$ valor que se repete quando o casal ocupa a penúltima e antepenúltima poltrona. Agora vamos analisar a situação em que os casais estão nas posições centrais desse cinema, para isso vamos dividir em dois casos:

Quando n é par: neste caso temos dois lugares centrais o lugar $\frac{n}{2}$ e o lugar $\frac{n}{2} + 1$ e quando o primeiro casal ocupar essas posições teremos o seguinte valor esperado de lugares isolados $S_{\frac{n}{2}-1} + S_{\frac{n}{2}-1}$ e então finalmente:

$$2S_1 + 2S_2 + ... + 2S_{\frac{n}{2}-1} + ... + 2S_{n-2}$$

Quando n é ímpar: neste caso temos um lugar central, então vamos supor que o primeiro casal ocupasse o lugar antes do lugar central e o lugar central ou seja $\frac{n+1}{2} - 1$ e $\frac{n+1}{2}$ dessa forma o número de lugares isolados séria $S_{\frac{n+1}{2}-2} + S_{\frac{n+1}{2}-1}$, caso o primeiro casal ocupasse o lugar central e o lugar posterior ou seja $\frac{n+1}{2}$ e $\frac{n+1}{2} + 1$ o número de lugares isolados séria $S_{\frac{n+1}{2}-1} + S_{\frac{n+1}{2}-2}$ e então finalmente:

$$2S_1 + 2S_2 + ... + 2S_{\frac{n+1}{2}-2} + 2S_{\frac{n+1}{2}-1} + ... + 2S_{n-2}$$

Em ambos os casos teríamos $2S_1 + 2S_2 + ... + 2S_{n-2}$. Observe que em um cinema de n lugares temos $n-1$ maneiras de escolher dois lugares consecutivos, portanto o valor esperado S_n será:

$$S_n = \frac{2}{n-1}(S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2}) \tag{11}$$

Vamos montar um sistema com as seguintes equações $(n-1)S_n$ e $(n-2)S_{n-1}$:

$$\begin{cases} (n-1)S_n & = & (n-1)\dfrac{2}{n-1}(S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-2}) \\ \\ (n-2)S_{n-1} & = & (n-2)\dfrac{2}{n-2}(S_1 + S_2 + \ldots + S_{n-3}) \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação do sistema pela segunda equação teremos:

$$(n-1)S_n - (n-2)S_{n-1} = 2S_{n-2} \tag{12}$$

Definindo:

$$\Delta_n = S_n - S_{n-1} \tag{13}$$

E assim montaremos outro sistema entre (12) e (13)

$$\begin{cases} (n-1)S_n - (n-2)S_{n-1} & = & 2S_{n-2} \\ S_n - S_{n-1} & = & \Delta_n \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação do sistema acima por $(n-1)$:

$$\begin{cases} (n-1)S_n - (n-2)S_{n-1} & = & 2S_{n-2} \\ (n-1)S_n - (n-1)S_{n-1} & = & \Delta_n(n-1) \end{cases}$$

No sistema acima podemos subtrair a primeira equação da segunda e obter:

$$(n-1)S_{n-1} - (n-2)S_{n-1} = 2S_{n-2} - \Delta_n(n-1) \tag{14}$$

Desenvolvendo (14):

$$nS_{n-1} - S_{n-1} - nS_{n-1} + 2S_{n-1} = 2S_{n-2} - \Delta_n(n-1)$$

$$S_{n-1} = 2S_{n-2} - \Delta_n(n-1) \tag{15}$$

Reorganizando de maneira conveniente (15):

$$S_{n-1} - S_{n-2} - S_{n-2} = -\Delta_n(n-1) \tag{16}$$

Mas sabemos que $S_{n-1} - S_{n-2} = \Delta_{n-1}$ logo:

$$\Delta_{n-1} - S_{n-2} = -\Delta_n(n-1) \tag{17}$$

E finalmente:

$$(n-1)\Delta_n = S_{n-2} - \Delta_{n-1} \tag{18}$$

Subtraindo de (18) a expressão: $(n-2)\Delta_{n-1} = S_{n-3} - \Delta_{n-2}$ temos:

$$(n-1)\Delta_n - (n-2)\Delta_{n-1} = S_{n-2} - S_{n-3} - \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

Substituindo $S_{n-2} - S_{n-3}$ por Δ_{n-2} teremos:

$$(n-1)\Delta_n - (n-2)\Delta_{n-1} = \Delta_{n-2} - \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2} \tag{19}$$

Simplificando:

$$(n-1)(\Delta_n - \Delta_{n-1}) = 2(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-1})$$

Isolando: $\Delta_n - \Delta_{n-1}$:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{-2(\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2})}{n-1} \tag{20}$$

E por conseguinte:

$$\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = \frac{-2(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3})}{n-2} \tag{21}$$

Substituindo (21) em (20) temos:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{-2\dfrac{-2(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3})}{n-2}}{n-1}$$

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{(-2)^2(\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3})}{(n-1)(n-2)} \tag{22}$$

E:

$$
\begin{aligned}
\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} &= \frac{-2(\Delta_{n-3} - \Delta_{n-3})}{n-4} \\
\Delta_{n-3} - \Delta_{n-4} &= \frac{-2(\Delta_{n-4} - \Delta_{n-4})}{n-5} \\
&\vdots \\
\Delta_2 - \Delta_1 &= \frac{-2(\Delta_1 - \Delta_0)}{1}
\end{aligned}
$$

Fazendo sucessivas substituições das equações acima em (22) chegamos que:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{(-2)^{n-1}(\Delta_1 - \Delta_0)}{(n-1)!} \tag{23}$$

Na intenção de determinar o valor de $\Delta_1 - \Delta_0$ usando o fato que :

$$\Delta_2 - \Delta_1 = S_2 - S_1 - (S_1 - S0) = S_2 - 2S_1 - S_0 = -2$$

E que $\Delta_2 - \Delta_1 = -2(\Delta_1 - \Delta_0)$ assim:

$$-2(\Delta_1 - \Delta_0) = -2$$

Logo:

$$\Delta_1 - \Delta_0 = 1$$

Assim, podemos rescrever a equação (23), ou seja:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{24}$$

Ou seja:

$$\left(1 - \frac{2}{1!} + \ldots + \frac{(-2)^{n-1}}{n-1}\right) - \left(1 - \frac{2}{1!} + \ldots + \frac{(-2)^{n-2}}{n-1}\right) = \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Finalmente podemos dizer que:

$$\Delta_n = 1 - \frac{2}{1!} + \ldots + \frac{(-2)^{n-1}}{n+1}$$

Sabemos que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{25}$$

Dessa forma substituindo $x = 2$:

$$e^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!} = 1 - \frac{2}{1!} + \frac{(-2)^2}{2!} + \ldots + \frac{(-2)^{n-1}}{(n-1!} + \ldots \tag{26}$$

E podemos concluir no caso de n tender a infinito que:

$$\Delta_n = \frac{1}{e^2} \tag{27}$$

No caso em que n tende a infinito fica imediato que:

$$\Delta_{n-1} = \frac{1}{e^2} \tag{28}$$

Da equação (18):

$$(n-1)\Delta_n = S_{n-2} - \Delta_{n-1}$$

Temos:

$$(n-1)\frac{1}{e^2} = S_{n-2} - \frac{1}{e^2}$$

Logo:

$$S_{n-2} = \frac{n}{e^2}$$

Utilizando novamente o fato de n ser suficientemente grande, segue que:

$$S_n = \frac{n}{e^2}$$

Dessa forma o valor esperado de lugares vazios no cinema converge para $\frac{n}{e^2}$ logo a fração dos lugares do cinema que permanece vazia é de:

$$\frac{n/e^2}{n} = \frac{1}{e^2} = 0,135\ldots$$

De modo que aproximadamente $13,5\%$ dos lugares ficam vazios.

6 O problema da secretária

São apresentadas n candidatas interessadas em ocupar uma única vaga de secretária e um administrador deverá escolher uma delas. São realizadas entrevistas com as candidatas, seguindo-se uma ordem aleatória, porém, imediatamente após cada entrevista, decidisse por aceitar ou rejeitar a candidata. Ao decidir rejeitar uma candidata, o administrador não pode mais aceitá-la posteriormente e, uma vez aceita, todas as outras são rejeitadas. E, se as $n-1$ primeiras candidatas foram rejeitadas, automaticamente deverá ser aceita a n-ésima candidata. Durante a entrevista, o administrador pode classificar as candidatas entre todos as candidatas entrevistadas até agora, mas não tem conhecimento da qualidade das candidatas que ainda serão entrevistadas. Apresentado o problema, surge a necessidade de responder à seguinte questão: Que estratégia deve ser adotada visando maximizar a probabilidade de contratar a melhor candidata? E qual é o valor dessa probabilidade.

Solução: É certo que para resolver esse problema precisamos achar o chamado ponto de parada ideal. Vamos supor que o administrador rejeita as r primeiras candidatas (vamos considerar que entre elas o administrador sabe qual foi a candidata de melhor desempenho, que para exemplificar podemos chamar de candidata m observando que m pode ser qualquer uma dentre as r primeiras candidatas ou seja $m \leqslant r$:

$$(1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, r)$$

E a partir daí ele seleciona a primeira candidata que seja melhor que m. Nessa perspectiva queremos calcular a probabilidade de r ser o ponto de parada ideal $P(r)$ e o valor de r.

1) Vamos supor que a candidata $r+1$ seja a candidata selecionada considerando r como nosso ponto de parada.

$$(1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, r, r+1)$$

Pela estratégia adotada a probabilidade de $r+1$ ser a melhor candidata é dado por:

$P(r+1$ é a melhor candidata de todas a serem escolhida $\cap$ considerando das r primeiras candidatas a melhor delas é a candidata $m)$.

Observe que a probabilidade de $r+1$ ser a melhor candidata de todas é dado por $1/n$ e a probabilidade de m ser a melhor candidata das r primeiras candidatas é de 100%, pois definimos dessa forma. Logo:

$P(r+1$ é a melhor candidata de todas $\cap$ considerando das r primeiras candidatas a melhor delas é a candidata $m) = \dfrac{1}{n}$

Vamos supor que $r+2$ seja a candidata selecionada considerando r como nosso ponto de parada.

$$(1, 2, 3, \ldots, m, \ldots, r, r+1, r+2)$$

Pela estratégia adotada a probabilidade de $r+2$ ser a melhor candidata é dado por:

$P(r+2$ é a melhor candidata dentre todas $\cap$ considerando das $r+1$ primeiras candidatas a melhor delas é a candidata $m)$

Observe que a probabilidade de $r+2$ ser a melhor candidata de todas é dado por $1/n$ e a probabilidade de m ser a melhor candidata das $r+1$ primeiras candidatas é de $r/(r+1)$ uma vez que m é qualquer uma das r primeiras candidatas e o espaço amostral considerado é de $r+1$ candidatas. Logo:

$P(r+2$ é a melhor candidata dentre todas $\cap$ considerando das $r+1$ primeiras candidatas a melhor delas é a candidata $m) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{r}{r+1}$

Procedemos sucessivamente dessa forma vamos supor que a candidata n seja a candidata selecionada considerando r como nosso ponto de parada. Pela estratégia adotada a probabilidade de n ser a melhor candidata é dado por:

$P(n$ é a melhor candidata dentre todas $\cap$ considerando das $n-1$ primeiras candidatas a melhor delas é a candidata $m)$

Observe que a probabilidade de n ser a melhor candidata de todas é dado por $1/n$. Já a probabilidade de m ser a melhor candidata das $n-1$ primeiras candidatas é de $r/(n-1)$ uma vez que m é qualquer uma das r primeiras candidatas e o espaço amostral considerado é de $n-1$ candidatas. Logo:

$P(n$ é a melhor candidata dentre todas $\cap$ considerando as $n-1$ primeiras candidatas a melhor delas é a candidata $m) = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{r}{n-1}$

Assim $P(r)$ será dado pela seguinte função:

$$P(r) = \frac{1}{n} \cdot 1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+2} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n-1}$$

É conveniente fazer $\dfrac{1}{n} \cdot 1 = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{r}{r}$, assim teremos:

$$P(r) = \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r} + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{r+2} + \ldots + \frac{1}{n} \cdot \frac{r}{n-1}$$

Finalmente:

$$P(r) = \frac{r}{n}\Big(\frac{1}{r} + \frac{1}{r+1} + \frac{1}{r+2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\Big) = \frac{r}{n} \sum_{i=r}^{n-1} \frac{1}{i}$$

A soma obtida calcula a probabilidade considerando que i é o melhor candidata sendo que ela será escolhido considerando que nenhuma das $i-1$ candidatas era melhor que m. Escrevendo $x = r$, por comodidade, considerando t variando de $[x, 1]$ e fazendo n tender ao infinito, a soma

$$P(x) = x \sum_{i=x}^{n-1} \frac{1}{i} \frac{1}{n}$$

Poder ser vista como a integral:

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt$$

A solução da integral é facilmente calculada:

$$P(x) = x \int_x^1 \frac{1}{t}\, dt = -xlnx$$

Nosso objetivo é achar um valor de r que maximize essa função, ou seja, qual deverá ser r que dará a melhor probabilidade de achar a melhor candidata? Para achar a solução basta fazer: $P'(x) = 0$. Ou seja:

$$-lnx - 1 = 0$$

Assim:

$$x = \frac{1}{e}$$

Fazendo o estudo de sinal da função da derivada primeira verificamos que o ponto onde $x = \dfrac{1}{e}$ é o máximo da função. Substituindo temos:

$$P\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} ln\left(e^{-1}\right) = \frac{1}{e}$$

Como pode ser visto pelo gráfico

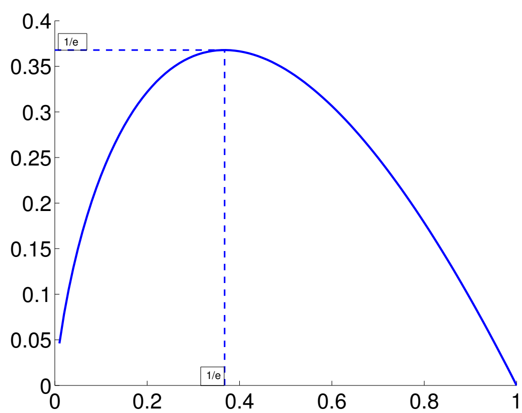

Figura 8: Gráfico $x \ln x$

Note que colocamos n tendendo ao infinito para fazermos o cálculo da probabilidade. Considerando uma quantidade finita de candidatos igual a n temos que o nosso ponto de parada ideal será $r = \frac{n}{e}$, e utilizando dessa estratégia a probabilidade de se escolher a melhor secretária é de:

$$P = \frac{1}{e}$$

Nossa estratégia ideal aproximada é de rejeitar os 37% das candidatas e, em seguida, selecionar a primeira candidata (se ela aparecer), que é melhor do que todos os candidatos anteriores. Nossa probabilidade de encontrar o melhor candidato é de cerca de 37%.

7 Aplicação no Ensino médio

Algumas matérias do ensino médio possibilitam que o estudante entre em contato com conteúdos no ensino superior. Durante uma aula sobre Progressão Geométrica, no primeiro ano do ensino médio no CEDAF da UFV Florestal, foi abordada a ideia intuitiva de limite no infinito para determinar a soma de uma progressão geométrica infinita. Logo após essa aula, alguns alunos ficaram muito motivados e fizeram algumas pesquisas sobre limites. Analisando a motivação dos estudantes eu e a professora Eliane resolvemos orientá-los em um trabalho sobre capitalização contínua, tema que irá abordar a ideia de limite e o número de Euler.

7.1 Aula motivacional

No primeiro ano do ensino médio estudamos que o termo geral de uma PG de n termos cujo primeiro termo é a_1 e cujo razão é q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Na intenção de estudar a soma de um PG infinita vamos determinar inicialmente a soma de uma PG finita. Seja a PG cujos termos são $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ S_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \ldots + a_n \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Multiplicando S_n por q obtemos:

$$\begin{cases} qS_n = a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_nq^{n-1} + a_nq^n \\ S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_nq^{n-1} \end{cases}$$

Fazendo $qS_n - S_n$ temos:

$$qS_n - S_n = a_1q^n - a_1$$

Colocando S_n e a_1 em evidência temos:

$$S_n(q-1) = a_1(q^n - 1)$$

Isolando S_n:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Com a fórmula da soma dos n termos de um PG finita, podemos pensar no seu comportamento quando n tende ao infinito:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Sabemos que o limite converge para $|q| < 1$, na abordagem para alunos do ensino médio que não detém o conhecimento teórico sobre limite, a análise gráfica dos casos se faz necessária. Analisando o caso em que $q > 1$, vamos utilizar a função real $f(x) = q^x$ pois apesar do domínio da função ser real, sua interpretação é útil para o nosso caso.

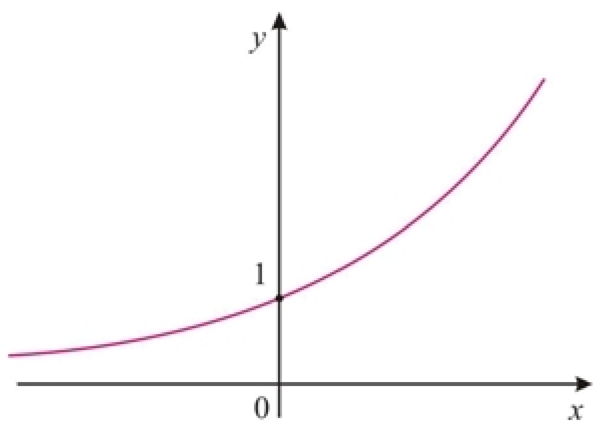

Figura 9: Exponencial com $q > 1$

Observe que o limite da função fica suficientemente grande quando x está suficientemente grande ou seja o gráfico nos dá a ideia que:

$$\lim_{x \to +\infty} q^x = \infty$$

Assim para $q > 1$ a nossa soma diverge.

Vamos analisar o caso em que $0 < q < 1$ vamos utilizar a função real $f(x) = q^x$. Observe que o limite da função se aproxima de zero quando x está suficientemente grande

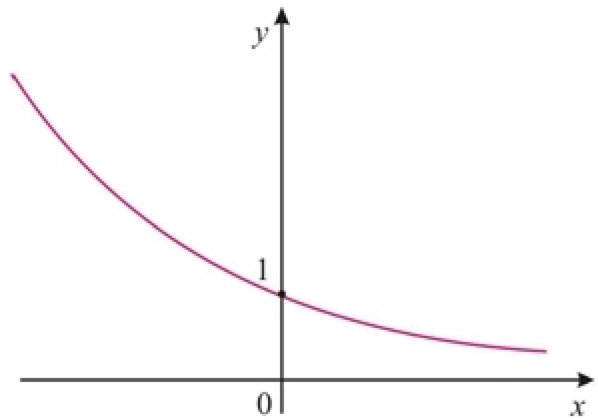

Figura 10: Exponencial com $0 < q < 1$.

ou seja, o gráfico nos dá a ideia que:

$$\lim_{x \to +\infty} q^x = 0$$

Assim para $0 < q < 1$ a nossa soma converge.

Para $q > -1$ podemos ter uma noção sobre o comportamento de q^n com $n \in \mathbb{N}$. Para valores pares de n suficientemente grande a função tende para uma valor suficientemente grande e positivo, já para valores ímpares de n, suficientemente grande, a função tende para uma valor suficientemente grande e negativo. De toda forma a soma diverge neste caso.

Podemos pensar também no caso em que $-1 < q < 0$ podemos ter uma noção sobre o comportamento de q^n com $n \in \mathbb{N}$. Para valores pares de n suficientemente grande a função tende para zero se aproximando através de valores positivos a direita de zero, já para valores ímpares de n suficientemente grande a função tende para zero se aproximando através de valores negativos a esquerda de zero. De toda forma a soma converge para 0 neste caso.

7.2 Capitalização Composta

A maioria dos investimentos do mercado financeiro está relacionada com capitalização discreta principalmente com a capitalização composta. Neste regime, os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para cálculo dos juros no período seguinte. Desta forma o rendimento gerado pela aplicação é incorporado a ela, participando da geração de rendimentos no período seguinte (juros sobre juros). Vamos calcular o montante de um capital C aplicado a uma taxa de juros compostos i durante três períodos :

Término do primeiro período : $M = C(1 + i)$
Término no segundo período : $M = C(1 + i)(1 + i)$
Término do primeiro período : $M = C(1 + i)(1 + i)(1 + i)$

Generalizando para n períodos temos:

$$M = C(1 + i)^n$$

7.3 Taxa Nominal x Taxa Efetiva

Uma questão importante da capitalização está na taxa de juros que pode ser classificada como efetiva ou nominal. A chamada taxa nominal ocorre quando o período de capitalização é diferente do período a que a taxa se refere e logicamente não se refere a taxa efetivamente cobrada naquele período. Vamos analisar o seguinte exemplo:

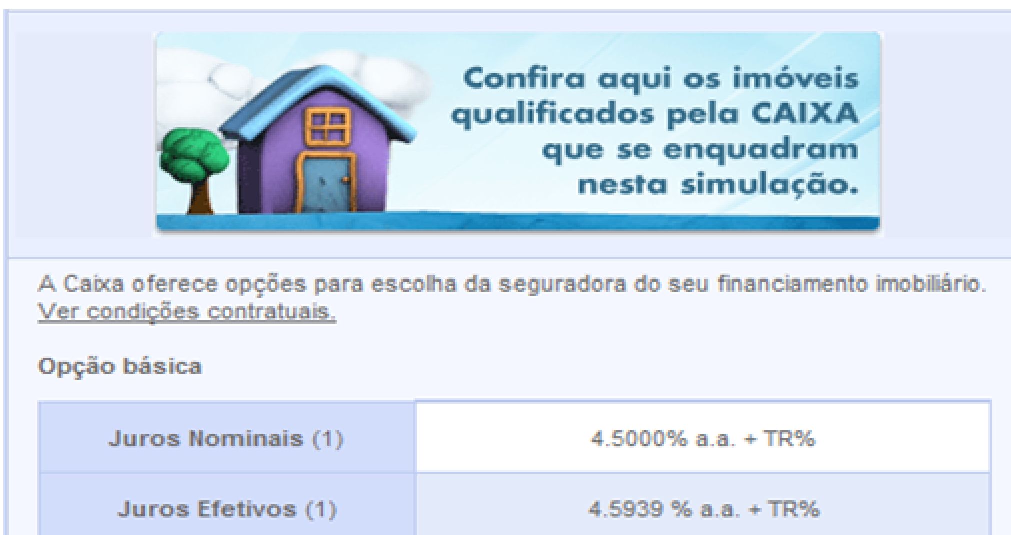

Figura 11: Taxa Nominal x Efetiva. Fonte: www.caixa.gov.br

Como será que através da taxa nominal, foi calculada a taxa efetiva? Observe que a taxa nominal era de 4,5% a.a capitalizada mensalmente, a taxa nominal é uma taxa declarada ou taxa cotada que não incorpora capitalizações sendo necessário calcular a taxa efetiva equivalente nos problemas de juros compostos. Assim:

$$\text{taxa nominal anual} = 4,5\ \%\, a.a.$$

$$\text{taxa efetiva mensal } = \frac{4,5\%}{12} = 0,375\ \%\, a.m.$$

$$\text{taxa efetiva anual } = \left(1+\frac{0,045}{12}\right)^{12} - 1 = (1+0,00375)^{12} - 1 = 0,045939 = 4,5939\ \%\, a.a.$$

7.4 Capitalização Contínua

Nos regimes de capitalização simples e composta, os juros são pagos ou recebidos ao final de cada período. O valor, aplicado ou emprestado, é capitalizado e tem aumento a cada intervalo de tempo considerado, sendo este discreto. Já no regime de capitalização contínua o pagamento de juros é feito a cada período infinitesimal de tempo. Dessa forma o capital cresce de forma continua no tempo através de uma taxa instantânea.

Segundo Samanez [5] a capitalização contínua é uma ferramenta muito utilizada na avaliação de opções, derivativos, projetos de investimentos, geração de lucros da empresa, desgastes de equipamento e outras situações em que os fluxos monetários se encontram uniformemente distribuídos no tempo. Na prática, muitas situações exigem o uso de capitalização contínua. As empresas fazem e recebem pagamentos muitas vezes durante um dia, padrão que está mais próximo da suposição de fluxos contínuos uniformemente distribuídos do que de fluxo discretos no fim de período.

Para trabalhar de forma simples com esses conceitos propormos aos alunos o seguinte problema: Suponha que um investidor fará uma aplicação de R$ 1000,00 pelo período de um ano à taxa de 12% ao ano, no regime de juros compostos, todavia vamos avaliar o rendimento desse investidor em diferentes períodos de capitalização.
Caso 1: 12% a.a capitalizado anualmente:

$$M = 1000(1,12) = 1120$$

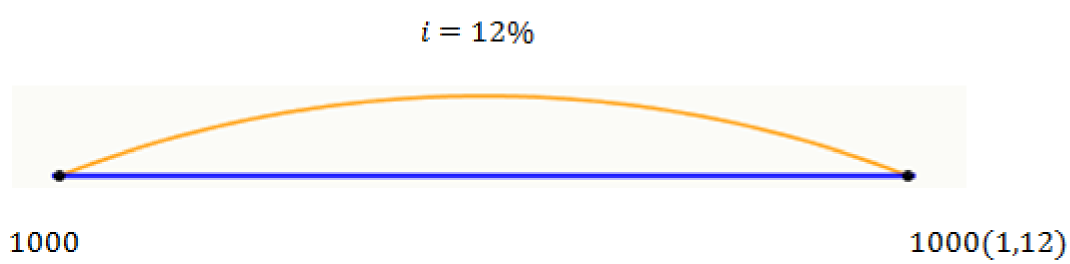

Figura 12: 12%a.a capitalizado anualmente

Caso 2: 12% a.a capitalizado semestralmente, note que se trata de uma taxa nominal e que o calculo de montante será dado por:

$$M = 1000\left(1 + \frac{0,12}{2}\right)^2 = 1123,60$$

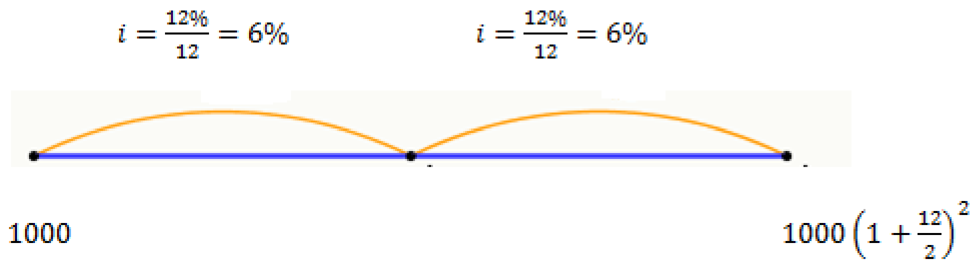

Figura 13: 12%a.a capitalizado semestralmente

Observe que o montante acumulado na capitalização semestral comparada com a anual, essa diferença aumenta se pensarmos na capitalização quadrimestral.

Caso 3: 12% a.a capitalizado quadrimestralmente, note que se trata de uma taxa nominal e que o montante será dado por:

$$M = 1000\left(1 + \frac{0,12}{3}\right)^3 = 1124,86$$

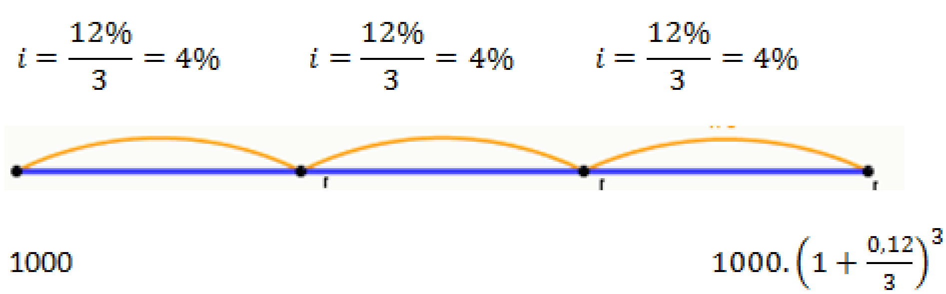

Figura 14: 12%a.a capitalizado quadrimestral

Desse fato surge uma pergunta. O que irá acontecer quando considerarmos períodos de capitalização cada vez menor? Ou seja se esse investidor tiver a opção de aplicar o mesmo valor por n vezes durante períodos que durem $1/n$ do ano à taxa de $12/n$ % ao período e tomar esse n cada vez maior, o valor do montante crescerá indefinidamente e esse investidor ficará rico? Para responder essa pergunta precisamos calcular:

$$M = \lim_{n \to +\infty} 1000\left(1 + \frac{0,12}{n}\right)^n$$

Tomando $n = 0,12K$ essa substituição é possível pois $k \to +\infty$ se e somente se $n \to +\infty$

$$M = \lim_{k \to +\infty} \left[1000\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{0,12}$$

Observando que os alunos tem apenas a ideia intuitiva de limites, sugerimos que os mesmos utilizassem recursos computacionais e montassem uma tabela no Excel para valores grades de n e avaliassem o resultado da expressão $1000\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$:

K	(1+1/k)^k
200	2,711517123
2000	2,717602569
20000	2,718213875
200000	2,718275033
200000	2,718275033
20000000	2,718281754

Os alunos se surpreenderam com o fato que quanto maior os valores assumidos por k a expressão $1000\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$ se aproximava cada vez mais do número do número de Euler. Desta feita:

$$\lim_{k \to +\infty} 1000\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = e$$

Voltando ao problema proposto, agora sabemos que o cálculo do montante acumulado pelo investidor será:

$$M = \lim_{k \to +\infty} \left[1000\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{0,12} = 1000e^{0,12}$$

$$M = \lim_{k \to +\infty} \left[1000\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right]^{0,12} = 1000e^{0,12} = 1127,50$$

Note que agora podemos generalizar uma fórmula de montante para capitalização contínua. Suponha que um capital C será aplicado por um período de duração t a uma taxa decimal de i ao período. Vamos supor ainda que durante o tempo t o capital é capitalizado

n vezes admitindo que a capitalização seja infinitamente grande, ou seja, em intervalos infinitesimais tendendo ao infinito, desta forma:

$$M = C.e^{it}$$

A composição contínua envolve a capitalização a cada microssegundo – o menor período de tempo imaginável. Apesar da grande quantidade de capitalização e que inevitavelmente quanto maior a quantidade de capitalização maior o montante este não será levado a valores infinitos, pois ele está limitado pelo número de Euler.

Após o estudo da capitalização contínua os estudantes tiveram a oportunidade de relacionar a noção intuitiva de limite no estudo da matemática financeira. Este estudo proporcionou a participação deles na Terceira Semana Acadêmica da Matemática, com a apresentação do pôster: ‘Limites do Ensino Médio”no período de 30/09/2015 a 01/09/2015.

8 Considerações Finais

Neste trabalho exploramos o número de Euler através de problemas cuja soluções são dadas em função dele. Vários assuntos relevantes foram tratados, dos quais se destacam a irracionalidade do número de Euler e sua apresentação como uma série de Maclaurin além do estudo de probabilidade e combinatória onde se destacam as permutações caóticas e a interseção de probabilidades no problemas do Porteiro e o Chapéu e no Problema da Secretária respectivamente.

Vale ressaltar nosso desejo com a elaboração desse trabalho em ajudar na prática docente de diversos professores, pois os problemas resolvidos aqui são facilmente adaptados para serem utilizados no ensino básico como foi o caso da capitalização contínua, alvo de estudos de estudantes do ensino médio no CEDAF. E dessa forma o texto cumpre sua proposta de incentivar a maior inserção do número de Euler na formação básica.

Acreditamos que resolução de problemas é uma estratégia didática importante e fundamental para o desenvolvimento intelectual do aluno e para o ensino da matemática, dessa forma o presente texto cumpre o seu papel de motivar e incentivar o estudo da matemática por meio de interessantes soluções para os mesmos.

9 Agradecimentos

À Deus por toda força dada diante das dificuldades.

À minha família, minha Esposa Kelly meus filhos Victor Hugo e João Henrique obrigado pela paciência e apoio e principalmente pela compreensão da minha ausência em alguns momentos para me dedicar a esse texto. Agradeço também a minha mãe Maria Lúcia meu pai Luiz Carlos e minha irmã Aline obrigado por todo apoio a mim dispensado.

À professora Eliane Alves de Jesus e aos estudantes: Gabriel Lopes Machado, Heuller Augusto da Silva, Jean Carlos Santos Serafini de Sousa, Vinícius Gabriel de Jesus Almeida, pela nossa participação na III SEMANA ACADÊMICA DA MATEMÁTICA cujo o assunto abordado foi de extrema importância para o desenvolvimento desse texto.

Em especial à professora Gilcélia, minha orientadora, por toda sua dedicação, profissionalismo, paciência e pela imensa contribuição para meu aprendizado não só na elaboração desse texto mas em todas as matérias por ela lecionada nesse mestrado.

Enfim a todos os meus colegas de classe e todas as pessoas que de alguma maneira me ajudaram na realização deste trabalho.

Referências

[1] Ferguson, Thomas S. *Who Solved the Secretary Problem?*. Institute of Mathematical Statistics, 1989.

[2] Flory, Paul J. *Intramolecular Reaction between Neighboring Substituents of Vinyl Polymers*. UNIVERSITY OF CINCINNATI, Ohio, 1939.

[3] Morgado, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto, FERNANDEZ, Pedro. *Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios. Coleção do Professor de Matemática. Nona edição*. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2006.

[4] Pommer, Wagner M. *O número de Euler: Possíveis abordagens no ensino básico.* FEUSP, São Paulo, 2010.

[5] Samanez, Carlos Patrício. *Matemática Financeira: aplicações à análise de investimentos.5a ed.*. Prentice-Hall, São Paulo, 2010.

[6] Santos, José Plínio Oliveira; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. *Introdução à Análise Combinatória.*,Editora Ciência Moderna Ltda. Rio de Janeiro, 2007.

[7] Stewart, James. *Cálculo - Volume II.* Cengage Learning, São Paulo, 2010.

[8] Strogatz, Steven *Matemática do Dia a Dia*, Cornell University, 2013.