UNIVERSIDADE FEDERAL DO OESTE DO PARÁ – UFOPA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA – PROFMAT

Leônidas Carneiro da Ponte

JUROS: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE AULAS COM BASE NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Santarém (PA)
Março de 2013

LEÔNIDAS CARNEIRO DA PONTE

JUROS: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE AULAS COM BASE NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática – Profmat. Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará – Ufopa, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz

Santarém (PA)

2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema Integrado de Gestão da Informação – SIGI/UFOPA

P813j Ponte, Leônidas Carneiro da

Juros: uma análise de livros didáticos e uma proposta de sequência de aulas com base na teoria antropológica do didático / Leônidas Carneiro da Ponte. – Santarém, 2013.

89 f.

Orientador Hugo Alex Carneiro Diniz.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Oeste do Pará, Instituto de Ciências da Educação, Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática. Santarém, 2013.

1. Matemática financeira. 2. Didática da matemática. 3. Teoria antropológica do didático. 4. Livro didático. I. Diniz, Hugo Alex Carneiro, *orient*. II. Título.

CDD: 23 ed. 513.9

Bibliotecário - Documentalista: Mayco Ferreira Chaves – CRB/2 1357

LEÔNIDAS CARNEIRO DA PONTE

**JUROS: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS
E UMA PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE AULAS
COM BASE NA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Matemática em Rede Nacional, Mestrado Profissional em Matemática – Profmat. Instituto de Ciências da Educação da Universidade Federal do Oeste do Pará – Ufopa, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Hugo Alex Carneiro Diniz
Orientador – Ufopa

Prof. Dr. Sebastian Mancuso
Examinador – Ufopa

Prof.ª Dr.ª Cristina Lúcia Dias Vaz
Examinadora – UFPA

Santarém (PA)
2013

DEDICATÓRIA

Ao meu irmão **Leonardo Carneiro da Ponte** (*in memoriam*), que me incentivou aos estudos e que queria um Doutor na família (o primeiro passo foi dado!).

Ao meu pai, **Luiz Ferreira da Ponte** (*in memoriam*), que me ensinou os valores do trabalho e da honestidade.

À minha irmã **Rosilene Carneiro da Ponte** (*in memoriam*), que me ensinou o valor da disciplina.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me dado forças para conseguir esse almejado objetivo.

À minha esposa, Elba Charlem, que teve bastante paciência nas ausências para os estudos.

À minha mãe e aos meus irmãos, pelo incentivo dado.

Ao meu orientador, Dr. Hugo Diniz, pela sinceridade, pelas contribuições, pelo trabalho nas férias e por navegar neste “limbo” entre a Matemática Pura e a Educação Matemática, que é o Profmat.

Ao meu amigo Solano Lira, pelas contribuições dadas.

Aos meus amigos e colegas da turma do Profmat/Ufopa 2011 pelos momentos de aprendizagem nos grupos de estudos.

Aos meus colegas Elizângelo Lopes, da turma do Profmat/Ufal 2011, e Xavier, da turma do Profmat/UFABC 2011, que, mesmo distantes, ajudaram-me muito, postando no *blog* do Profmat as resoluções de Aritmética I e Fundamentos de Cálculo.

Ouvi dizer que o governo iria cobrar impostos mais caros dos ignorantes em Matemática. Engraçado! Eu pensei que a loteria era justamente isso!

Gallagher

RESUMO

A Matemática Financeira estuda o comportamento do dinheiro no tempo. Juros é o principal assunto desse saber, previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Com base na experiência docente, identificou-se que alunos e até professores não sabem ao certo aplicar juros simples e compostos no cotidiano, mesmo consultando livro didático. A Teoria Antropológica do Didático – TAD, desenvolvida por Chevallard, fornece recursos para analisar uma obra didática, propondo seis momentos de estudo. A TAD situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais, admitindo um modelo, uma *praxeologia*. Esta possui duas partes dependentes: a *prática*, na qual estão as tarefas e as técnicas, e o *logos*, no qual estão as tecnologias e as teorias. O capítulo central analisa dois livros didáticos utilizados em escolas públicas estaduais na cidade de Santarém (PA) sob a ótica da TAD para fundamentar esta pesquisa. O capítulo final propõe uma sequência de aulas que procura melhorar as limitações encontradas nas duas obras e utiliza recursos, como a calculadora científica, a planilha eletrônica, *software* de construção gráfica, questões regionais de processos seletivos e o próprio livro didático. As duas obras apresentam quantidade reduzida de tarefas resolvidas e nível de dificuldade aquém em relação aos das tarefas propostas, de modo que não passam pelo momento do trabalho da técnica de forma satisfatória. Os dois autores mostram rapidamente as fórmulas, fazendo que o momento da institucionalização surja prematuramente. O segundo livro destaca-se por trabalhar a noção de equivalência de capitais e pela inclusão da Seção “Autoavaliação”, que remete muito bem ao sexto momento proposto por Chevallard. Em relação à aplicabilidade de juros, as duas obras não apresentam sequer um comentário ou uma tarefa resolvida sobre a aplicação de juros simples no cotidiano. Foi necessário realizar pesquisa em instituições financeiras e em livros específicos de Matemática Financeira para mostrar que, de forma geral, juros simples se aplicam em pequenos atrasos de contas e em desconto de recebíveis.

Palavras-chave: antropológica, Chevallard, didático, juros, livro.

ABSTRACT

The Financial Mathematics studies the behavior of money over time. Interest is the main subject of this knowledge, set out in the National Curriculum for Secondary Education. Based on teaching experience, we found that students and even teachers are not sure sure how to use simple and compound interest in everyday, even referring textbook. The Anthropological Theory of Didactics - ATD, developed by Chevallard, provides resources to analyze didactic work, proposing six moments of study. The ATD locate the mathematical activity in all human activities and social institutions, assuming a model, a praxeology. This has two dependent parts: practice, which are the tasks and techniques, and logos, which are the technologies and theories. The central chapter examines two textbooks used in public schools in the city of Santarém (PA) from the perspective of ATD to support this research. The final chapter proposes a sequence of lessons that seeks to improve the limitations found in both works and uses resources such as scientific calculator, a spreadsheet, graphics software building, regional issues of selection processes and the actual textbook. Both works feature reduced amount of resolved tasks and difficulty level below in relation to the proposed tasks, so do not go through the time of the technical work satisfactorily. The two authors show the formulas quickly, making the time of institutionalization emerge prematurely. The second book is distinguished by working the notion of equivalence of capital allocated to equity and inclusion of section self evaluation, which refers to the sixth well currently proposed by Chevallard. Regarding the applicability of interest, the two works do not even have a comment or a task solved applying simple interest in the everyday. It was necessary to conduct research on financial institutions and on specific books of financial mathematics to show that simple interest apply in small delays of bills and delays in discounting receivables.

Keywords: anthropological, Chevallard, educational, interest, book.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática Financeira estuda o comportamento do dinheiro no tempo. É um dos ramos da Matemática mais presentes no cotidiano. Juros é o principal assunto desse saber, previsto nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio – PCNEM de 2002.

O que motivou esta pesquisa foi a minha experiência em sala de aula. Trabalho há quinze anos em cursinhos pré-vestibulares e há dez anos no ensino médio e, ao iniciar o tema *juros*, faço, entre outros, o seguinte questionamento: No dia a dia, como aplicar juros simples e compostos?

Simplesmente ninguém consegue apresentar uma resposta razoável, nem mesmo aquele "bom" aluno que já estudou o assunto outras vezes. Para a pesquisa, consultam-se também alguns professores de Matemática acerca desse questionamento e, para a minha surpresa, a maioria deles não sabia a aplicação correta, principalmente no que se refere a juros simples. Assim, surge a pergunta: Por que os alunos e até alguns professores de Matemática não têm certeza de como aplicar juros simples e compostos no dia a dia, mesmo consultando um livro didático?

Acredita-se que os livros didáticos utilizados no ensino médio nas escolas de Santarém se mostram deficitários no conjunto das suas *praxeologias,* no que se refere ao assunto *juros* e não conseguem propor/resolver satisfatoriamente tarefas cotidianas, principalmente quando se trata do regime de capitalização simples. Essa dificuldade contamina até alguns professores de Matemática que não sabem com certeza como efetuar essa aplicação.

Chevallard nos diz que "obra é uma resposta a uma pergunta ou conjunto de perguntas, de questões" (2001, p. 98). Logo, as obras têm a obrigação de responder ao questionamento, uma vez que “o livro didático ainda é o recurso mais utilizado para o ensino da matemática no município de Santarém” (SANTOS, 2010, p. 13). Os PCNEM (2002) preveem “ênfase na resolução de problemas, na exploração da Matemática a partir dos problemas vividos no cotidiano e encontrados nas várias disciplinas”.

Com o objetivo de solucionar o problema apresentado, faz-se uma reflexão desde a origem da Didática da Matemática até a Teoria Antropológica do Didático – TAD, proposta pelo matemático francês Yves Chevallard, pois essa teoria fornece recursos para analisar livros didáticos.

Em seguida, analisam-se capítulos que tratam de juros nos dois livros didáticos utilizados em escolas estaduais do ensino médio na cidade de Santarém. Um dos livros é o mais usado. O outro – escolhido entre os demais menos usados – é o da escola na qual trabalho. A análise é realizada sob a ótica da TAD em relação às suas *praxeologias* (teorias, tecnologias, técnicas e tarefas) e aos momentos de estudo propostos por Chevallard.

No último capítulo, com base nas análises e nas pesquisas em livros específicos de Matemática Financeira, há uma sequência de aulas atualizadas sobre a aplicabilidade de juros no cotidiano, as quais procuram utilizar recursos, como calculadora, planilha eletrônica, *software* de construção de gráficos e o próprio livro didático.

1 A DIDÁTICA MATEMÁTICA E A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

1.1 CONCEITOS INICIAIS E A DIDÁTICA DA MATEMÁTICA

Didático (a), como adjetivo, vem do grego “didaktickós”, derivado de “didásko”, que significa arte ou técnica de ensinar. Hoje, utilizando uma acepção mais ampla, representa tudo aquilo que está relacionado com o estudo e com a ajuda para o estudo.

Estudo, em um sentido mais geral, é o caminho para a aquisição do saber. Não se refere somente às atividades que uma pessoa realize sozinha, fora da sala de aula, como nas expressões “*estudei* para a prova” e “*estudei* para o concurso”.

Ensino é considerado um meio para o estudo.

A **aprendizagem** é o efeito perseguido pelo estudo. Porém, não é produzida somente quando há ensino nem unicamente durante o ensino.

O estudo, ou **processo didático**, é, portanto, um processo mais amplo e não se restringe ao “processo de ensino e aprendizagem”, mas o engloba. Esquematicamente, tem-se:

Estudo (Processo didático)

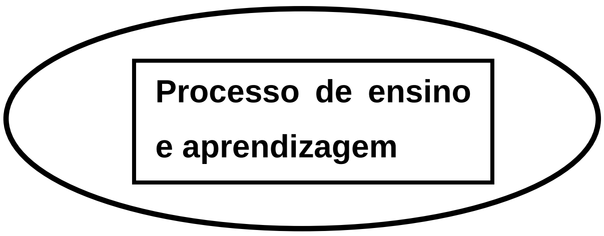


Figura 1: Estudo (Processo didático)

Pensando no ensino de Matemática, nas relações estreitas que existem entre metodologias de ensino e nas características específicas dos conteúdos abordados, a busca pelo estudo dessas relações nos conduz à **Didática da Matemática**, ou didática fundamental, proposta por Brousseau.

> De fato, o novo paradigma da Didática da Matemática, a didática fundamental, nasceu precisamente quando o pesquisador francês Guy Brousseau vislumbrou pela primeira vez (no início dos anos 70), a necessidade de a didática utilizar um modelo próprio da atividade

> Matemática, visto que os modelos epistemológicos usuais não haviam sido construídos para responder aos mesmos problemas que a didática coloca. (CHEVALLARD et al., 2001, p. 77)

Dentre os estudos desenvolvidos pela Didática da Matemática, destacam-se a **Teoria das Situações Didáticas – TSD**, desenvolvida por Brousseau; e a reflexão sobre **Transposição Didática – TD**, proposta por Chevallard. Nas duas próximas seções, tratar-se-á dessas duas teorias.

Figura 2: Guy Brousseau

Guy Brousseau nasceu em 4 de fevereiro de 1933, em Taza, Marrocos, e aposentou-se pela Universidade de Bordeaux, na França, onde foi diretor do Laboratório de Didática das Ciências e das Tecnologias.

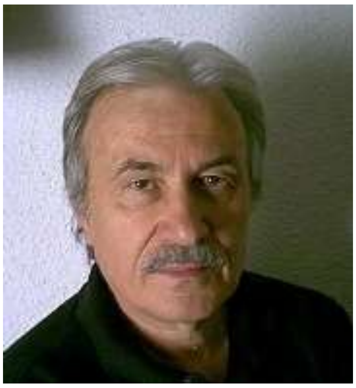


Figura 3: Yves Chevallard

Yves Chevallard é um educador francês do campo do ensino da Matemática, o qual leciona atualmente no *Institut Universitaire de Formation des Maîtres del'Académie d'Aix-Marseille.*

1.2 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

A TSD foi proposta pelo francês Guy Brousseau, no intuito de compreender as relações existentes entre alunos, professores e o meio onde acontece o aprendizado (sala de aula). Brousseau diz que cada conhecimento está ligado a um tipo de situação, por meio da interação entre duas ou mais pessoas.

A **situação didática** é o objeto de estudo da Didática da Matemática e é definida como:

> Um conjunto de relações estabelecidas explícita e (ou) implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, um determinado meio (que abrange eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (representado pelo professor), com a finalidade de conseguir que estes alunos apropriem-se de um saber constituído ou em via de constituição. (BROUSSEAU apud SANTOS, 2010, p. 15).

Brousseau expõe a necessidade de, como ideia básica da TSD, aproximar o trabalho do aluno ao trabalho de um pesquisador, pois esse testa conjecturas, formula hipóteses, constrói modelos e conceitos, estabelece teorias, socializa os resultados e exerce o principal: participa ativamente no processo de aprendizagem. Esse trabalho devera ser feito com o devido auxílio do professor, que deverá providenciar situações favoráveis para que o aluno aja sobre o saber, transformando-o em conhecimento.

A consequência desse fato é que esse saber não pode ser considerado algo inquestionável, e que as pesquisas em Didática da Matemática serão condicionadas pelo tipo de modelização escolhida.

A TSD se apresenta atualmente como instrumento científico que tende a unificar e a integrar as contribuições das outras disciplinas na perspectiva de fornecer melhor compreensão das possibilidades de melhoramento e de regulamentação do ensino de Matemática.

O espaço da sala de aula é caracterizado, de acordo com a TSD, pela tríade: professor, aluno e o saber. Esses três elementos são os componentes principais de um sistema didático. A articulação dessa tríade constitui uma relação triangular, que é denominada por Guy Brousseau como Triângulo das Situações Didáticas.

1.3 A TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Para entender o que é a Transposição Didática – TD, inicialmente, são introduzidos mais alguns conceitos apresentados segundo Pais (2008, p. 12-13):

> **Conhecimento** diz respeito ao contexto mais individual e subjetivo, revelando aspectos com os quais o sujeito tem uma experiência mais direta e pessoal, pode estar mais associado ao caráter experimental, que envolve algum tipo de ação com a qual o sujeito tenha um contato mais pessoal [...] **saber** é, quase sempre, caracterizado por ser relativamente descontextualizado, despersonalizado e mais associado a um contexto científico, histórico e cultural. Aparece associado ao problema da validação do conhecimento, que, no caso da Matemática, trata-se do raciocínio lógico-dedutivo. [grifo nosso]

Esse saber, de acordo com a sua posição na trajetória dentro da TD, possui três formas:

a) Saber sábio é o saber produzido pelos cientistas.

b) Saber a ensinar é o saber previsto no currículo escolar;

c) Saber ensinado é o saber apresentado ao aluno.

O saber, que está presente nos programas escolares, sofre influências da ***noosfera***:

> Lá se encontam aqueles que ocupam posições-chave do sistema didático, enfrentam os problemas de diálogo com a sociedade e os seus conflitos de demandas desenvolvidas, conduzem as negociações e amadurecem soluções. (...) Em suma, estamos no lugar onde se pensa, talvez de formas muito diferentes, sobre o desempenho docente. Para este ente, eu sugeri o nome-paródia de **noosfera**. (CHEVALLARD apud TRAVASSOS, 2008, p. 38, tradução nossa) [grifo nosso]

Assim, *noosfera* é o conjunto das fontes de influências atuantes na seleção dos conteúdos que deverão compor os programas escolares (cientistas, professores, especialistas, políticos, autores de livros e outros agentes da educação). É na noosfera que se selecionam elementos do saber sábio designados como saber a ensinar.

Dessa forma:

> Um conteúdo do conhecimento, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar, faz um objeto de ensino, é chamado de **Transposição Didática**. (CHEVALLARD apud SANTOS, 2010, p. 18)

A TD é o conjunto de ações que transformam o saber sábio em saber ensinado. O trabalho da TD é iniciado na *noosfera* e concluído pelo professor em sala de aula, e o livro didático, na maioria das vezes, está no meio desse processo.

A Figura 4, proposta por Matos Filho, fornece-nos uma excelente visão da trajetória do saber dentro da TD.

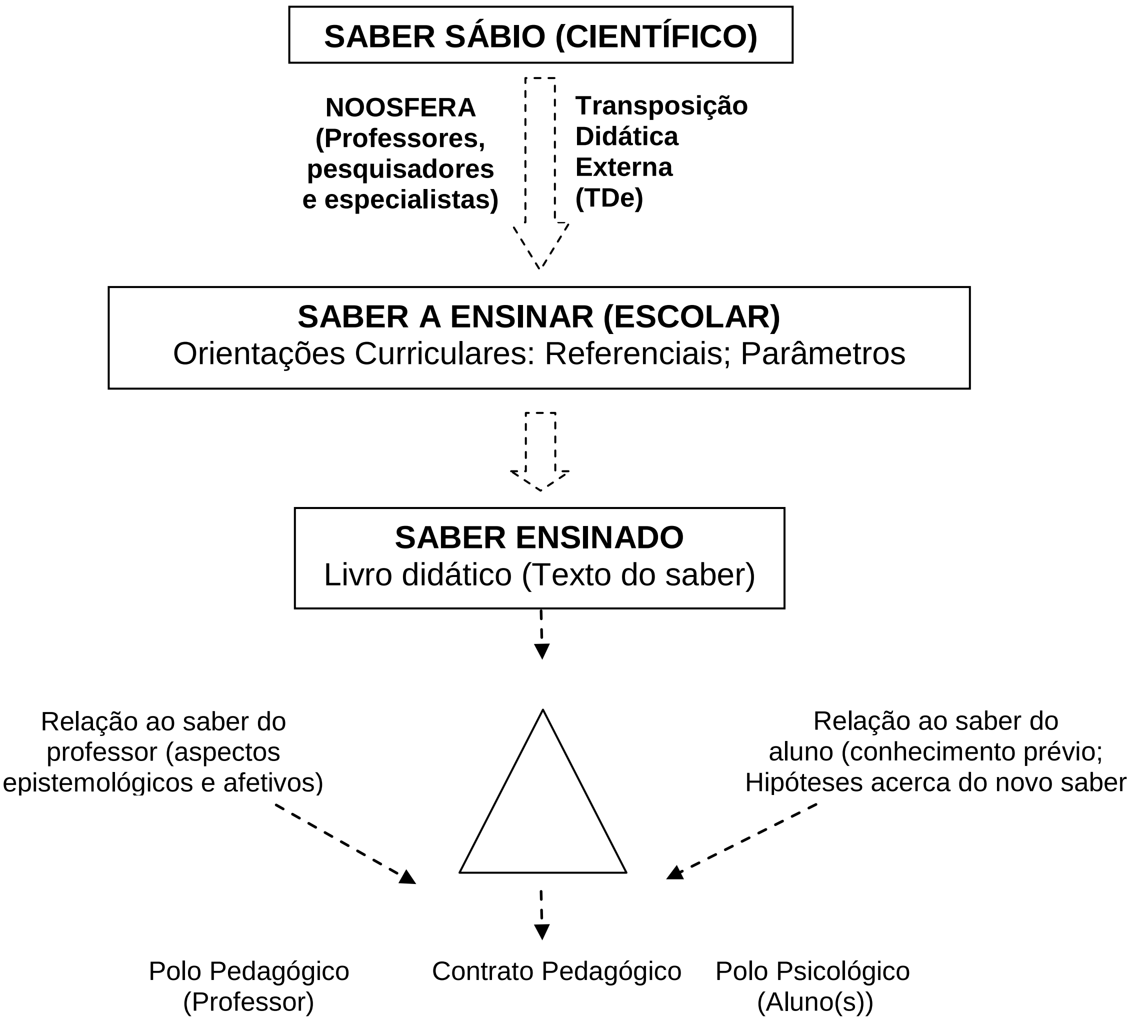


Figura 4: Esquema da trajetória do saber na TD

1.4 A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A TAD desenvolvida por Yves Chevallard na década de 1990 situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. Chevallard propõe um postulado básico para essa teoria, admitindo que toda atividade humana pode ser submetida a um modelo único, ou seja, a uma ***praxeologia***.

1.4.1 Praxeologia

Segundo Chevallard et al. (2001, p. 251), a atividade humana, que inclui a atividade matemática, possui duas partes que são dependentes uma da outra. A primeira é a prática, que vem do grego *práxis*, onde estão as tarefas e as técnicas, ou seja, o saber fazer. A segunda é o *logos* – termo grego –, onde estão as tecnologias e as teorias, ou seja, o saber, a justificativa e o entendimento do saber fazer.

Quando se juntam as palavras gregas *práxis* e *logos*, tem-se por resultado a palavra *praxeologia*, que, segundo Chevallard, é o modelo da atividade humana na TAD.

Em relação à ***praxeologia matemática***, Travassos (2008, p. 40) nos diz que

> na atividade matemática, a construção de uma *praxeologia* consiste em construir um modelo matemático da realidade que queremos estudar, de tal modo que possamos interpretar os resultados obtidos para responder às questões inicialmente apresentadas.

Na próxima seção, explica-se um pouco mais os elementos já citados anteriormente, que constituem a *praxeologia matemática*.

1.4.2 Teoria, Técnica, Tecnologia e Tarefa

Formatar um texto, limpar um quintal, encontrar a raiz de uma equação, racionalizar uma fração, resolver um sistema, calcular os juros são exemplos de atividades humanas, ou seja, de ***tarefas*** que devem ser realizadas.

O “como resolver a tarefa” é o motor gerador de uma *praxeologia*: é preciso ter (ou construir) uma ***técnica***, que deve ser justificada por uma ***tecnologia***, a qual, por sua vez, precisa ser justificada por uma ***teoria***.

A palavra *técnica* será utilizada como processo estruturado e metódico, às vezes algorítmico, que é um caso muito particular de técnica.

Para melhor compreensão da *praxeologia* (quarteto teoria, técnica, tecnologia e tarefa), serão utilizados os exemplos adaptados de Santos (2010) sobre sistemas lineares e será atribuída uma letra minúscula grega para melhor identificação no próximo capítulo:

Teorias (α): definição de equação linear, de solução de equação linear, de sistemas de equações lineares e de solução de um sistema de equações lineares.

Tecnologias (β): interpretação geométrica de um par ordenado, classificação de um sistema linear, sistema linear escalonado, sistemas lineares equivalentes e grau de indeterminação de um sistema.

Técnicas (χ): substituir as *n-uplas* dadas na(s) equação(ões) linear(es), processo de escalonamento, método de resolução de sistemas por meio de adição de equações e calcular o determinante da matriz dos coeficientes.

Tarefas (δ): identificar uma equação linear, verificar se a *n-upla* é solução da equação linear e resolver o sistema 2x2 usando o método da adição.

1.4.3 Momentos de Estudo

Dentro do processo de estudo, há situações que estão necessariamente presentes. Chevallard denomina essas situações de momentos de estudo ou momentos didáticos.

> A noção de momento, não só no aspecto, refere-se à estrutura temporal do processo de estudo. Um momento no sentido dado da palavra é principalmente uma dimensão em um espaço multidimensional, um fator multifatorial. (...) Esse ponto de vista indica que a situação proposta, depois de aprender sobre diferentes momentos, é amplamente arbitrária, pois nos momentos se aprende uma realidade funcional do estudo, antes de ser uma realidade cronológica. (CHEVALLARD apud TRAVASSOS, 2008, p. 48, tradução nossa)

Chevallard propõe seis momentos distintos, não necessariamente cronológicos, que serão apresentados a seguir:

a) O **primeiro momento** de estudo é o do primeiro encontro com uma organização matemática, ocasião em que os alunos se deparam com um novo tipo de problema. Esse “primeiro encontro” pode ocorrer várias vezes, não havendo imposição sobre eles de uma ordem cronológica.

b) O **segundo momento** é o da exploração do tipo de tarefa e da elaboração de técnica relativa a este tipo de tarefa.

c) O **terceiro momento** é o da construção do entorno tecnológico-teórico relativo à técnica ou ao conjunto de técnicas associadas ao tipo de tarefa, uma espécie de construção da(s) justificativa(s) da(s) técnica(s).

d) O **quarto momento** é o do trabalho da técnica, que tem por objetivo melhorá-la, tornando-a mais eficaz e confiável.

e) O **quinto momento** é o da institucionalização, que diz respeito à organização matemática em seu conjunto e em toda a sua complexidade, à *praxeologia* matemática. Esse momento exige um pouco mais de detalhamento para melhor compreensão.

Supondo, por exemplo, que, em uma aula, um professor inicie ensinando a encontrar o montante de juros compostos, calculando os juros período a período sobre o montante anterior. Apesar de correta, essa técnica pode tornar-se muito trabalhosa se o número de períodos for muito grande. Assim, o professor precisa fornecer uma tecnologia nova (fórmula) e, consequentemente, uma técnica nova (substituir as informações na fórmula). Esse exato instante pode ser considerado como o quinto momento, o da institucionalização. É o momento em que o professor diz: “Bem, agora vocês já não precisam fazer mais assim. Isso era no início. Agora é necessário ir mais rápido, fazer diretamente.” (CHEVALLARD et al., 2001, p. 266).

f) O **sexto momento** – e último – é o da avaliação, que se articula com o da institucionalização, sendo o momento em que se põe à prova o domínio sobre organização matemática.

1.4.4 Obra Matemática

Segundo Chevallard et al. (2001, p. 126):

> Uma obra matemática nasce como uma resposta para um tipo de questões ou tarefas problemáticas e é formada por elementos técnicos, tecnológicos e teóricos. Nós podemos concebê-las como uma organização estática e determinada de antemão. Teremos, assim, uma visão da Matemática como um conjunto de obras fechadas. Mas é preferível interpretá-la de maneira dinâmica: as técnicas geram novos problemas e apelam para novos resultados tecnológicos, que, por sua vez, permitem desenvolver técnicas já estabelecidas, assim como abordar e propor novas questões.

De acordo com entendimento de Travassos (2008, p. 46):

> Os componentes principais de uma obra matemática são os elementos construtores de uma *praxeologia* matemática: tipo de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Porém, a dinâmica da *praxeologia* parece se perder, uma vez que a obra matemática é representada por manuais, livros didáticos, livros clássicos de Matemática e outros.

Nota-se então que a TAD fornece recursos para analisar livros didáticos. Por essa razão, este trabalho baseou-se na noção de organização matemática para analisar, nos livros didáticos do ensino médio, o capítulo referente ao tema *juros*.

Tomam-se por referência essas propostas de Chevallard para avaliar tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Dessa forma, na avaliação do tipo de tarefa, pretendeu-se observar se ela é adequada a alunos do ano a que se destina e se fornece uma visão das situações matemáticas mais utilizadas; na avaliação da técnica, se ela é disponibilizada de maneira completa, ou seja, passo a passo, ou somente esboçada; e, na avaliação do bloco tecnologia/teoria, como são dadas as justificativas tecnológicas.

2 O SABER JUROS E O LIVRO DIDÁTICO

2.1 A CONTEXTUALIZAÇÃO DE JUROS

Apresentou-se, na Introdução, a justificativa da escolha do saber *juros*. Aqui, são feitas algumas considerações complementares, direcionando para a contextualização desse saber.

Os PCNEM (2002, p. 41) preveem que é preciso

> Desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto às de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de **interpretação da própria realidade**. [grifo nosso]

Porém, nesse contexto, há duas significações. De um lado, não se pode pregar a "síndrome da contextualização", tal qual aparecem em livros didáticos e em questões de processos seletivos, como a da Fundação Getúlio Vargas (2005):

> Admita que o centro do plano complexo Argand-Gauss coincida com o centro de um relógio de ponteiros, como indica a figura [...]. Se o ponteiro dos minutos tem 2 unidades de comprimento, às 11h55 sua ponta estará sobre o número complexo: a) $-1 + \sqrt{3}i$ [...].

De outro lado, é inadmissível que assuntos como juros sejam contextualizados inadequadamente, como na questão a seguir, de processo seletivo da Universidade Estadual do Pará – Uepa (2008):

> Visando à abertura do programa de aquisição da casa própria do Governo Federal, um funcionário público dividiu suas reservas em duas partes e aplicou-as, a **juros simples**, em dois bancos. Aplicou a primeira parte dessa reserva no banco A, que remunera a 2% ao mês e, no mesmo dia, a segunda parte no banco B, que remunera a 1,5% ao mês, recebendo no final de um mês o total de R$123,00 de juros [...] [grifo nosso].

Aplicações bancárias dessa forma não são regidas por juros simples. Estes são aplicados em outros tipos de situações que serão detalhadas posteriormente.

Assim, nem todos os saberes da Matemática são aplicáveis ao cotidiano vivido pelo aluno hoje. Esses saberes devem ser estudados de forma teórica para que sirvam em uma aplicação futura, dependendo da carreira que o aluno deseja seguir.

É importante reforçar, contudo, que assuntos aplicados ao dia a dia não podem utilizar situações absurdas, como se estas acontecessem realmente.

2.2 A MATEMÁTICA FINANCEIRA NOS PLANOS DE ENSINO

Não há uma definição na legislação brasileira sobre em que ano estudar cada assunto. É claro que os assuntos tradicionais já possuem os seus lugares como conjuntos e funções no 1º ano.

O assunto matemática financeira, no entanto, é variável, pois diversos autores do ensino médio apresentam em anos diferentes, como: Iezzi et al. (2010) situam no 1º; Souza (2010), no 2º; e Barroso (2010), no 3º ano.

Assim, parece lícito afirmar que o Ministério da Educação deveria definir em qual ano o aluno deveria estudar cada assunto previsto nos PCNEM (2002).

Para situar a Matemática Financeira e, consequentemente, o saber *juros* na cidade de Santarém, consultou-se a 5ª Unidade Regional de Educação do Estado do Pará – 5ª URE, que reúne, em períodos não fixados, os professores de cada disciplina, com o objetivo de selecionar e sequenciar os assuntos que devem fazer parte do Plano de Curso de cada disciplina.

A última reunião pedagógica para essa finalidade ocorreu em março de 2010. Nessa reunião, definiu-se que o saber *juros* pertenceria ao currículo do 1º ano do ensino médio para aquelas escolas que não escolheram Matemática Financeira como optativa (minoria das escolas) e pertenceria à optativa Matemática Financeira para as escolas que incluíssem esse componente no currículo, podendo ser no 2º ou 3º ano (maioria das escolas).

A questão é que, em 2011, todas as optativas foram eliminadas do currículo, e a maioria das escolas teve de migrar para o 1º ano.

Em 2012, todavia, as optativas retornaram (inclusive Matemática Financeira) com a opção de inserir no 1º ou 2º ano.

Assim, mesmo sem reuniões em 2011 e 2012, ficou tácito que o saber *juros* pertence (i) ao currículo do 1º ano do ensino médio para aquelas escolas que não escolheram Matemática Financeira como optativa (minoria das escolas); e (ii) ao currículo no 1º ou 2º ano da optativa Matemática Financeira para as escolas que incluíssem esse componente no currículo (maioria das escolas)

2.3 O PROFESSOR E O LIVRO DIDÁTICO

Segundo Santos (2010): “na maioria dos relatos de professores, estava presente um modelo tradicional de aulas, no qual a maioria dos professores da educação básica utilizava como recursos didáticos apenas o livro didático, pincel e quadro branco”.

O livro didático, portanto, é um instrumento de grande importância para a aprendizagem formal, principalmente nas escolas públicas. Ele é um dos poucos dispositivos que tanto o professor como o aluno da escola pública têm disponível para pesquisa e aprofundamento dos assuntos estudados.

O descaso com o sistema público de ensino, especificamente com o estadual, em que a maioria das escolas não oferece outro suporte às aulas formais, como laboratórios de informática, biblioteca com acervo disponível para empréstimo e (ou) consulta e laboratórios de ensino de Matemática, propicia aos professores o uso de livro didático como instrumento determinante na elaboração de estratégias e conteúdos.

Para Lajolo (1996, p. 4):

> Didático, então, é o livro que vai ser utilizado em aulas e cursos, que provavelmente foi escrito, editado, vendido e comprado, tendo em vista essa utilização escolar e sistemática. Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o *que* se ensina e *como* se ensina o que se ensina. [...] Muito embora não seja o único material de que professores e alunos vão valer-se no processo de ensino e aprendizagem, ele pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares.

A qualidade dos livros didáticos, sem dúvida nenhuma, deve ser considerada nos processos de sua escolha e adoção.

De acordo com os PCNEM (2002), os recursos didáticos não podem ser resumidos às aulas e livros, considerando a enorme diversidade de meios facilitadores de aprendizado para o ensino das Ciências e da Matemática. As novas tecnologias devem ser utilizadas por meio de tabelas, gráficos, desenhos, fotos, computadores. Os professores, hoje, precisam também de se motivar a dominar esses recursos para não se tornar um “excluído” da sociedade tecnológica atual.

2.4 A ESCOLHA DOS LIVROS DIDÁTICOS

Os livros didáticos escolhidos foram aprovados no Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio – PNLEM 2012 (PNLD 2012-2014). O PNLEM é uma iniciativa do Ministério da Educação que, por meio da Resolução nº 38, de 15 de outubro de 2003, instituiu esse programa com o objetivo de distribuir gratuitamente livros didáticos aos alunos do ensino médio de escolas públicas. Inicialmente, a distribuição contemplava apenas livros de Português e Matemática. Hoje, contempla todas as disciplinas estudadas no ensino médio, permitindo, assim, a universalização do livro didático nesse nível de ensino.

Sobre os livros aprovados no PNLEM 2012, consultou-se a 5ª URE para indagar sobre os livros de ensino médio distribuídos nas escolas estaduais no município de Santarém. A servidora técnica responsável pela distribuição informou que a 5ª URE não possui esse levantamento, haja vista que é uma decisão dos professores de cada escola e que, quando os livros didáticos chegam à cidade de Santarém, seguem direto para cada escola.

Foram consultados vinte professores de Matemática que, juntos, lecionam em quase todas as escolas estaduais na cidade de Santarém. A conclusão é de que o livro 1 (doravante L1) é o mais utilizado. Todos os demais livros são utilizados na minoria das escolas. Optou-se, então, para o livro 2 (doravante L2), por utilizar o da escola na qual trabalho, a Escola Estadual de Ensino Médio Professor Álvaro Adolfo da Silveira. Os livros escolhidos foram:

a) L1 – IEZZI, Gelson et al. ***Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio***. 6. ed. São Paulo: Saraiva, 2010; e

b) L2 – BARROSO, Juliane (Org.). ***Conexões com a Matemática, 3***. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

Após a escolha dos dois livros didáticos, foram consultados também os demais utilizados pelas escolas públicas e livros específicos de Matemática Financeira, para fazer o aprofundamento teórico do tema *juros* e utilizar a TAD.

3 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS

3.1 PRAXEOLOGIAS ENCONTRADAS NOS DOIS LIVROS

As Tabelas 1 a 5 representam, na sequência, os tipos de teorias, tecnologias, técnicas, tarefas resolvidas e tarefas propostas encontradas em L1 e L2.

Foi analisado o capítulo que continha Matemática Financeira, a partir da Seção Juros, que é a proposta de nosso trabalho.

O "X" indica em qual livro didático a parte da *praxeologia* estava presente.

3.1.1 Teorias

Tabela 1
Relação das teorias encontradas em L1 e L2

Teorias	Descrição	L1	L2
α_1	Aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros	X	X
α_2	Juros simples	X	X
α_3	Juros compostos	X	X
α_4	Taxas variáveis	X	*
α_5	Atualização financeira		X
α_6	Propriedades dos logaritmos		X

* Apresentou antes do saber *juros* com o nome "aumentos e descontos sucessivos"

3.1.2 Tecnologias

Tabela 2
Relação das tecnologias encontradas em L1 e L2

Tecnologias	Descrição	L1	L2
β_1	Relação entre montante, capital e juros (M = C + j)	X	X
β_2	Fórmula para juros simples (j = Cin)	X	X
β_3	Fórmula para montante simples (M = C.(1+ in))	X	X
β_4	Fórmula para montante de juros compostos ($M = C.(1 + i)^n$)	X	X
β_5	Associação entre juros simples e progressões aritméticas	X	X
β_6	Associação entre juros compostos e progressões geométricas	X	X
β_7	Associação entre juros simples e função afim	X	
β_8	Associação entre juros compostos e função exponencial	X	
β_9	Fórmula para valor presente		X

3.1.3 Técnicas

Tabela 3
Relação das técnicas encontradas em L1 e L2

Técnicas	Descrição	L1	L2
χ_1	Calcular os juros em um período e multiplicar pelo número de períodos	X	
χ_2	Utilizar a proporcionalidade para encontrar a taxa equivalente em juros simples		X
χ_3	Substituir as informações na fórmula de juros simples e efetuar os cálculos	X	X
χ_4	Substituir as informações na fórmula de montante simples e efetuar os cálculos	X	
χ_5	Substituir as informações na fórmula de juros simples, efetuar os cálculos e encontrar o montante, somando com o capital		X
χ_6	Substituir as informações na fórmula de montante simples e resolver a equação de primeiro grau	X	
χ_7	Calcular a taxa de juros simples total e dividir pelo número de períodos	X	
χ_8	Calcular os juros, período a período, sobre o montante anterior	X	X
χ_9	Substituir informações na fórmula de juros compostos e efetuar os cálculos	X	X
χ_{10}	Substituir informações na fórmula de juros compostos e resolver a equação exponencial com o auxílio de logaritmos	X	X
χ_{11}	Substituir informações na fórmula de juros compostos e resolver a equação de grau **n**	X	
χ_{12}	Substituir as informações na fórmula de juros compostos duas vezes, igualando-as para encontrar a taxa equivalente		X
χ_{13}	Substituir informações na fórmula de juros compostos e resolver a equação de primeiro grau		X
χ_{14}	Fazer a equivalência de capitais, substituindo as informações de cada período na fórmula do valor presente, e resolver a equação do segundo grau		X
χ_{15}	Fazer a equivalência de capitais, substituindo as informações de cada período na fórmula do valor presente, e resolver a equação de primeiro grau		X

3.1.4 Tarefas

Tabela 4
Relação das tarefas resolvidas encontradas em L1 e L2

Tarefas	Descrição (Tarefas resolvidas)	L1	L2
δ_1	Encontrar o montante simples, dados: capital, taxa e período	X	X
δ_2	Calcular os juros simples, dados: capital, taxa e período	X	X
δ_3	Calcular a taxa simples, dados: capital, montante e período	X	
δ_4	Encontrar a taxa equivalente de juros simples		X
δ_5	Encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período	X	X
δ_6	Encontrar a taxa equivalente de juros compostos		X
δ_7	Encontrar o tempo de aplicação de juros compostos, dados: capital, montante e taxa	X	X
δ_8	Calcular a taxa composta, dados: capital, montante e período	X	
δ_9	Encontrar a taxa interna de retorno de fluxo de capitais, dados: valor atual, valor da parcela e período.		X
δ_{10}	Encontrar o valor da parcela de fluxo de capitais, dados: valor atual, taxa e período		X

Tabela 5
Relação das tarefas propostas encontradas em L1 e L2

Tarefas	Descrição (Tarefas propostas)	L1	L2
δ_1	Encontrar o montante simples, dados: capital, taxa e período	X	X
δ_2	Calcular os juros simples, dados: capital, taxa e período	X	X
δ_3	Calcular a taxa simples, dados: capital, montante e período	X	X
δ_4	Encontrar a taxa equivalente de juros simples		X
δ_5	Encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período	X	X
δ_6	Encontrar a taxa equivalente de juros compostos		X
δ_7	Encontrar o tempo de aplicação de juros compostos, dados: capital, montante e taxa	X	X
δ_8	Calcular a taxa composta, dados: capital, montante e período	X	X
δ_9	Encontrar a taxa interna de retorno de fluxo de capitais, dados: valor atual, valor da parcela e período.		X
δ_{10}	Encontrar o valor da parcela de fluxo de capitais, dados: valor atual, taxa e período		X
δ_{11}	Encontrar o tempo de aplicação de juros simples, dados: capital, montante e taxa	X	X
δ_{12}	Encontrar os juros compostos, dados: capital, taxa e período	X	X
δ_{13}	Encontrar o capital de uma aplicação de juros compostos, dados: taxa, tempo e montante	X	X
δ_{14}	Encontrar o capital de uma aplicação de juros simples, dados: taxa, tempo e montante		X
δ_{15}	Encontrar o valor atual de fluxo de capitais, dados: valor da parcela, taxa e período		X

3.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O L1

O livro analisado apresenta um capítulo denominado Matemática Comercial e Financeira, que se encontra após o Capítulo Progressões. O saber *juros* vem precedido de revisão de porcentagem, uma teoria sobre aumentos, descontos e variação percentual.

A Seção Juros indica inicialmente que o tema é bem familiar no cotidiano dos alunos e apresenta quatro situações do dia a dia nas quais aparecem juros. Pode-se dizer que é o **primeiro momento**, o do primeiro encontro da TAD. Esse momento ficaria mais bem caracterizado se pelo menos um dos quatro exemplos fosse resolvido.

Posteriormente, é apresentada a **teoria α_1** (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e a **tecnologia β_1** (relação entre montante, capital e juros).

A seção seguinte, Juros simples, é introduzida com a **teoria α_2** (juros simples) e, imediatamente, já são mostradas as **tecnologias β_2** (fórmula para juros simples) e **β_3** (fórmula para montante simples). O livro está no **terceiro momento**, o da construção do entorno tecnológico-teórico. Aqui, apesar da falta da tarefa resolvida, há um indício do **quinto momento**, o da institucionalização.

O autor deveria ter explicado as situações às quais se aplicam juros simples no dia a dia, que é o principal problema objeto desta pesquisa.

Após essa apresentação, são disponibilizadas quatro tarefas resolvidas, como exposto nos Quadros 1 a 4.

Para facilitar a compreensão deste trabalho, todas as tarefas resolvidas foram colocadas dentro de quadros que totalizam dezenove.

O leitor notará que os momentos 1°, 2° e 5° e o momento 4° aparecem várias vezes, o que é natural e recomendável para uma obra que trata de matemática.

Quadro 1: Exemplo 5 da página 229, com duas resoluções distintas

Tarefa δ_1: encontrar o montante simples, dados: capital, taxa e período.

Momentos de estudo: 1º, 2º e 5º

1º modo:

Técnica: χ_1 (calcular os juros em um período e multiplicar pelo número de períodos).
Tecnologias: β_1 (relação entre montante, capital e juros) e indiretamente β_2 (fórmula para juros simples).
Teorias: α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros).

2º modo:

Técnica: χ_4 (substituir as informações na fórmula de montante simples e efetuar os cálculos).
Tecnologia: β_3 (fórmula para montante simples).
Teorias: α_1 e α_2.

Na tarefa acima, surge o primeiro momento, o do primeiro encontro, pois há contato com uma tarefa nova (é a primeira resolvida em verdade); e o **segundo momento**, o da exploração do tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica para a resolução.

Quando o autor resolve do segundo modo, está no quinto momento, o da institucionalização, pois o discurso que ele quer transmitir seria mais ou menos do tipo "não precisa mais resolver assim, calculando o juro em um período, multiplicando pelo número de períodos e depois somando com o capital para encontrar o montante. Agora, basta substituir na fórmula de montante simples".

Quadro 2: Exercício resolvido 4 da página 229, com duas resoluções distintas

Tarefa δ_2: calcular os juros simples, dados: capital, taxa e período.

Momentos de estudo: 1º, 2º, 4º e 5º.

1º modo:

Técnica: χ_1 (calcular os juros em um período e multiplicar pelo número de períodos).
Tecnologia: indiretamente β_2 (fórmula para juros simples).
Teorias: α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples).

2º modo:

Técnica: χ_3 (substituir as informações na fórmula de juros simples e efetuar os cálculos).
Tecnologia: β_2 (fórmula para juros simples).

Teorias: α_1 e α_2.

No primeiro modo de resolução, a técnica χ_1 se repetiu, portanto é o **quarto momento**, o do trabalho da técnica, que tem por objetivo melhorá-la, tornando-a mais eficaz e confiável.

Aqui, o autor deveria ter justificado a frase “a taxa deve ser compatível com a unidade de tempo”. Deveria também ter fornecido mais teoria e tecnologia que explicassem o conceito de taxas proporcionais e equivalentes e que, em juros simples, elas coincidem.

Ainda sobre essa tarefa, na prática, não há instituição na qual uma pessoa possa aplicar recursos em regime de juros simples. Juros simples se aplicam em situações de atraso de contas e de desconto de recebíveis. Na Seção 4.1, detalha-se melhor essa questão.

O parágrafo acima se aplica a todas as tarefas resolvidas seguintes da seção de juros simples do L1. Há apenas uma única tarefa proposta que mostra a aplicação verdadeira de juros simples no cotidiano.

Quadro 3: Exercício resolvido 5 da página 229, com duas resoluções distintas

Tarefa δ_3: calcular a taxa simples, dados: capital, montante e período. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º. *1º modo:* **Técnica:** χ_6 (substituir as informações na fórmula de montante simples e resolver a equação de primeiro grau). **Tecnologia:** β_3 (fórmula para montante simples). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples). *2º modo:* **Técnica:** χ_7 (calcular a taxa de juros simples total e dividir pelo número de períodos). **Tecnologias:** β_1 (relação entre montante, capital e juros) e indiretamente β_2 (fórmula para juros simples). **Teorias:** α_1 e α_2.

Quadro 4: Exercício resolvido 6 da página 230

Tarefa δ_3: calcular a taxa simples, dados: capital, montante e período. **Momento de estudo:** 4º. **Técnica:** χ_6 (substituir as informações na fórmula de montante simples e resolver a equação de primeiro grau). **Tecnologia:** β_3 (fórmula para montante simples). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples).

Nessa tarefa, a *praxeologia* completa se repetiu, portanto é o quarto momento, o do trabalho da técnica.

A seguir, nas páginas 230 e 231, há uma lista com dez exercícios (28 a 37), cujos objetivos são:

a) passar novamente pelos momentos 1, 2 e 5, pois há uma nova tarefa δ_{11} (encontrar o tempo de aplicação de juros simples, dados: capital, montante e taxa).

b) enfatizar o quarto momento, o do trabalho da técnica, com algumas variações.

c) fazer surgir, a critério do professor e até do próprio aluno, o **sexto momento,** que é o da avaliação.

A próxima seção, Juros compostos, apresenta inicialmente uma tarefa não resolvida sobre aplicação em caderneta de poupança, que caracteriza o primeiro momento, o do primeiro encontro.

Posteriormente, apresenta a teoria α_3 (juros compostos) e, imediatamente, a tecnologia β_4 (fórmula para montante de juros compostos). É nesse momento que o autor faz a construção do entorno tecnológico-teórico relativo ao conjunto de técnicas associadas ao saber *juros compostos*, que é terceiro momento de estudo. Aqui, novamente, apesar da falta da tarefa resolvida, há um indício do quinto momento, o da institucionalização.

Novamente, quando o autor afirma que “O regime de juros compostos é o mais utilizado nas transações comerciais atualmente”, faltou ter fornecido mais teoria que explicasse as situações às quais se aplicam juros compostos no dia a dia, que é o principal problema objeto desta pesquisa.

A seguir, são apresentadas quatro tarefas resolvidas, como exposto nos Quadros 5 a 8:

Quadro 5: Exemplo 6 da página 232, com duas resoluções distintas

Tarefa δ_5: encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período.
Momentos de estudo: 1º, 2º e 5º.
1º modo:
Técnica: χ_8 (calcular os juros, período a período, sobre o montante anterior).
Tecnologia: indiretamente β_4 (fórmula para montante de juros compostos).
Teorias: α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).
2º modo:
Técnica: χ_9 (substituir informações na fórmula de juros compostos e efetuar os cálculos).
Tecnologia: β_4 (fórmula para montante de juros compostos).
Teorias: α_1 e α_3.

Quadro 6: Exemplo 7 da página 232

Tarefa δ_5: encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período.
Momento de estudo: 4º.
Técnica: χ_9 (substituir informações na fórmula de juros compostos e efetuar os cálculos).
Tecnologia: β_4 (fórmula para montante de juros compostos).
Teorias: α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).

Essa é a tarefa proposta no início desta seção sobre aplicação em caderneta de poupança. Na época em que o livro foi publicado, a caderneta de poupança rendia entre 0,5% e 0,6407% (Anexo) e, apesar de o valor de 0,8% proposto pelo autor ser considerado alto, considera-se este exemplo de grande importância para o aluno.

O autor também foi feliz ao propor um exemplo no início e, posteriormente, resolvê-lo. Parece uma atitude simples, mas algumas obras cometem o erro de não resolver o exemplo depois.

Só mais uma observação: hoje, com as novas regras aplicadas à poupança, o rendimento gira entre 0,4134% a 0,5275% (Anexo).

O diferencial dessa questão em relação à anterior é a necessidade da utilização da calculadora para encontrar o valor de $1{,}008^{96}$ a que o autor faz menção. Este recurso é obrigatório para cálculos de valores considerados altos, como o anterior.

Quadro 7: Exercício resolvido 7 da página 232

Tarefa δ_7: encontrar o tempo de aplicação de juros compostos, dados: capital, montante e taxa. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_{10} (substituir informações na fórmula de juros compostos e resolver a equação exponencial com o auxílio de logaritmos). **Tecnologia:** β_4 (fórmula para montante de juros compostos). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).

Quadro 8: Exercício resolvido 8 da página 233

Tarefa δ_8: calcular a taxa composta, dados: capital, montante e período. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_{11} (substituir informações na fórmula de juros compostos e resolver a equação de grau **n**). **Tecnologia:** β_4 (fórmula para montante de juros compostos). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).

Novamente, o autor faz uso da calculadora para encontrar o valor de $\sqrt[4]{1{,}6}$. Porém, desta vez, por meio do Quadro “Pense nisto:”, explica com mais informações como fazer esse cálculo na calculadora científica. Deveria ter realizado isso também na questão anterior, que precisou do uso desse recurso.

A subseção posterior, Juros compostos com taxas de juros variáveis, apresenta inicialmente a teoria α_4 (taxas variáveis) e uma tarefa resolvida, que é detalhada no Quadro 9.

Quadro 9: Exemplo 8 da página 233

Tarefa δ_5: encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período. **Momento de estudo:** 4º. **Técnica:** χ_8 (calcular os juros, período a período, sobre o montante anterior). **Tecnologia:** indiretamente β_4 (fórmula para montante de juros compostos). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros), α_3 (juros compostos) e α_4 (taxas variáveis).

No Quadro "Pense nisto", o autor apresenta uma observação importante com base na tarefa, mostrando que elevar 30% e depois 20% gera um aumento total de 56%, e não de 50%, como alguns pensam.

Posteriormente, nas páginas 233 e 234, há uma lista com doze exercícios (38 a 49), cujos objetivos são:

a) passar novamente pelos momentos 1, 2 e 5, pois há duas novas tarefas: δ_{12} (encontrar os juros compostos, dados: capital, taxa e período) e δ_{13} (encontrar o capital de uma aplicação de juros compostos, dados: taxa, tempo e montante)

b) enfatizar o quarto momento, o do trabalho da técnica com algumas variações.

c) fazer surgir, a critério do professor e até do próprio aluno, o sexto momento, o da avaliação.

Após os exercícios, há uma parte separada, como se fosse um apêndice, denominada "Aplicações: compras à vista ou a prazo (I)", na qual fornece uma noção de equivalência de capitais. Esta importante seção poderia ter acompanhado a teoria inicial, pois, como o tempo em sala de aula é considerando reduzido, a maioria dos professores ignora essa parte.

A última seção, Juros e funções, apresenta as tecnologias β_5 (associação entre juros simples e progressões aritméticas), β_6 (associação entre juros compostos e progressões geométricas), β_7 (associação entre juros simples e função afim) e β_8 (associação entre juros compostos e função exponencial). O autor deveria também tê-las mostrado com a teoria inicial, e não no fim do capítulo.

Para concluir a explanação, novamente a seção “Aplicações: compras à vista ou a prazo (II)”, na qual acrescenta noções de equivalência de capitais.

Por fim, há uma lista de exercícios complementares com vinte e uma questões – com algumas de processos seletivos – que tratam de todo o conteúdo desde o início do capítulo, com o objetivo de:

a) enfatizar o quarto momento, o do trabalho da técnica, com algumas variações;

b) fazer surgir, a critério do professor e até do próprio aluno, o sexto momento, o da avaliação.

3.3 CONSIDERAÇÕES SOBRE O L2

O livro analisado apresenta um capítulo denominado Matemática Financeira, que é o primeiro do 3º volume do L2. O saber *juros* vem precedido de revisão sobre taxa percentual, lucro e prejuízo.

A Seção Juro simples apresenta inicialmente a teoria α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples). Em seguida, apresenta a tarefa δ_1 (encontrar o montante simples, dados: capital, taxa e período) resolvida pela técnica χ_1 (calcular os juros em um período e multiplicar pelo número de períodos), utilizando indiretamente a tecnologia β_1 (fórmula para juros simples).

Pode-se dizer que se está no primeiro momento, o do primeiro encontro; no segundo momento, o da exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica; e no terceiro momento, o da construção do entorno tecnológico-teórico da TAD.

Novamente, o autor deveria ter explicado as situações às quais se aplicam juros simples no dia a dia, que é o principal problema objeto desta pesquisa.

A seguir, são deduzidas, nesta ordem, as tecnologias β_2 (fórmula para juros simples), β_1 (relação entre montante, capital e juros) e β_3 (fórmula para montante simples). Aqui há um indicativo do quinto momento, o da institucionalização.

Ao lado, há o Quadro “Reflita”, que apresenta a tecnologia β_5 (associação entre juros simples e progressões aritméticas) e questiona qual é a razão da progressão aritmética. Essa relação é importante, porém o autor deveria ter também explorado graficamente com a função afim.

Posteriormente, são mostradas cinco tarefas, como exposto nos Quadros 10 a 13:

Novamente, o leitor notará que os momentos 1°, 2° e 5° e o momento 4° aparecem várias vezes, o que é natural e recomendável para uma obra que trata de matemática.

Quadro 10: Exercícios resolvidos R6 (1ª parte) da página 16

Tarefa δ_6: encontrar a taxa equivalente de juros compostos. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_2 (utilizar a proporcionalidade para encontrar a taxa equivalente em juros simples). **Tecnologia:** indiretamente β_2 (fórmula para juros simples). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples).

Quadro 11: Exercícios resolvidos R6 (2ª parte) da página 16

Tarefa δ_2 (duas vezes): calcular os juros simples, dados: capital, taxa e período. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º (primeira resolução). **Momento de estudo:** 4º (segunda resolução). **Técnica:** χ_3 (substituir as informações na fórmula de juros simples e efetuar os cálculos). **Tecnologia:** β_2 (fórmula para juros simples). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples).

Nesse exemplo, é importante ressaltar o surgimento do quarto momento, o do trabalho da técnica, ao resolver a mesma tarefa.

Quadro 12: Exercícios resolvidos R6 (3ª parte) da página 16

Tarefa δ_1: encontrar o montante simples, dados: capital, taxa e período.
Momentos de estudo: 1º, 2º e 5º.
Técnica: χ_5 (substituir as informações na fórmula de juros simples, efetuar os cálculos e encontrar o montante, somando com o capital).
Tecnologias: β_1 (relação entre montante, capital e juros) e β_2 (fórmula para juros simples).
Teorias: α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples).

Ao lado dessa tarefa, o autor fornece o Quadro "Observação", que explica os termos "ao ano", "ao mês" e "ao dia" e a relação entre eles. O autor, contudo, deveria também ter fornecido mais teoria e tecnologia que explicassem o conceito de taxas proporcionais, taxas equivalentes e que, em juros simples, elas coincidem.

Como já citado na seção anterior, na prática, não há instituição na qual uma pessoa possa aplicar recursos em regime de juros simples. Juros simples se aplicam em situações de atraso de contas e de desconto de recebíveis. Isso será visto mais detalhadamente na Seção 4.1.

O parágrafo acima se aplica a todas as tarefas seguintes (exercícios resolvidos e propostos) da seção de juros simples do L2.

Quadro 13: Exercícios resolvidos R7 da página 17

Tarefa δ_2: calcular os juros simples, dados: capital, taxa e período.
Momento de estudo: 4º.
Técnica: χ_3 (substituir as informações na fórmula de juros simples e efetuar os cálculos).
Tecnologia: β_2 (fórmula para juros simples).
Teorias: α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_2 (juros simples).

A seguir, na página 17, há uma lista com nove exercícios (30 a 38), cujos objetivos são:

a) passar novamente pelos momentos 1, 2 e 5, pois há duas novas tarefas: δ_3 (calcular a taxa simples, dados: capital, montante e período) e δ_{11} (encontrar o tempo de aplicação de juros simples, dados: capital, montante e taxa);

b) enfatizar o quarto momento, o do trabalho da técnica, com algumas variações;

c) fazer surgir, a critério do professor e até do próprio aluno, o sexto momento, o da avaliação.

A próxima seção, Juros compostos, apresenta inicialmente a teoria α_3 (juros compostos). Quando o autor afirma que: "Essa é a modalidade mais empregada pelas instituições financeiras", deveria ter fornecido mais teoria que explicasse as situações às quais se aplicam juros compostos no dia a dia, que é o principal problema objeto desta pesquisa.

A seguir, o autor resolve duas tarefas: δ_1 (encontrar o montante simples, dados: capital, taxa e período) e δ_5 (encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período) por meio das técnicas χ_4 (substituir as informações na fórmula de montante simples e efetuar os cálculos) e χ_8 (calcular os juros, período a período, sobre o montante anterior) e das tecnologias β_3 (fórmula para montante simples) e indiretamente β_4 (fórmula para montante de juros compostos), respectivamente.

A parte da resolução referente a juros compostos caracteriza o primeiro momento, o do primeiro encontro. O segundo momento também aparece quando explora o tipo de tarefa e elabora uma técnica para resolvê-la.

Essas duas tarefas são apresentadas em um quadro que compara a evolução dos dois regimes de capitalização (simples e compostos) por períodos inteiros de zero a cinco meses e generaliza para **t** meses.

Faço isso nas minhas aulas em cursinho preparatório para processos seletivos e no ensino médio. Minha experiência mostra que é uma ação eficaz, pois ajuda substancialmente os alunos no entendimento da diferença entre os dois regimes de capitalização. Lima et al. (2001) também recomendam esse tipo de comparação para tomada de decisão.

Posteriormente, o autor deduz a tecnologia β_4 (fórmula para montante de juros compostos). Do início da seção até agora, é realizada a construção do entorno tecnológico-teórico relativo ao conjunto de técnicas associadas ao saber *Juros compostos*, que é terceiro momento de estudo. O quinto momento (institucionalização) também está presente aqui.

Ao lado, novamente há o Quadro “Reflita”, que apresenta a tecnologia β_6 (associação entre juros compostos e progressões geométricas) e questiona qual é a razão da Progressão Geométrica. Posteriormente, fornece a resposta por meio de exemplo. É importante estabelecer essa relação, porém o autor deveria ter relacionado também com a função exponencial graficamente.

A seguir são apresentadas quatro tarefas como exposto nos Quadros 14, a 17:

Quadro 14: Exercícios resolvidos R8 da página 19

Tarefa δ_5: encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período. **Momento de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_9 (substituir informações na fórmula de juros compostos e efetuar os cálculos). **Tecnologia:** β_4 (fórmula para montante de juros compostos). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).

Quadro 15: Exercícios resolvidos R9 da página 19

Tarefa δ_6: encontrar a taxa equivalente de juros compostos. **Momento de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_{12} (substituir as informações na fórmula de juros compostos duas vezes, igualando-as para encontrar a taxa equivalente). **Tecnologia:** β_4 (fórmula para montante de juros compostos). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).

Novamente, o autor deveria também ter fornecido mais teoria e tecnologia que explicassem o conceito de taxas proporcionais e equivalentes, que em juros simples elas coincidem e que, em juros compostos, são coisas distintas.

Quadro 16: Exercícios resolvidos R10 da página 19

Tarefa δ_5: encontrar o montante composto, dados: capital, taxa e período. **Momento de estudo:** 4º. **Técnica:** χ_9 (substituir informações na fórmula de juros compostos e efetuar os cálculos). **Tecnologia:** β_4 (fórmula para montante de juros compostos). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).

Esse exemplo é de grande importância por questionar o aluno sobre duas opções para tomada de decisão. Porém, os valores e prazo utilizados não foram eficientes, pois entre as opções de pagar à vista com desconto de 3% ou pagar após um mês, aplicando o dinheiro em uma instituição financeira que rende 0,8% ao mês, é óbvio que a primeira opção é mais vantajosa, dispensando tantos cálculos feitos pelo autor.

Quadro 17: Exercícios resolvidos R11 da página 19

Tarefa δ_7: encontrar o tempo de aplicação de juros compostos, dados: capital, montante e taxa. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_{10} (substituir informações na fórmula de juros compostos e resolver a equação exponencial com o auxílio de logaritmos). **Tecnologia:** β_4 (fórmula para montante de juros compostos). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros) e α_3 (juros compostos).

O autor fornece o Quadro "Observação", ao lado da resolução dessa tarefa, caracterizando a teoria α_6 (propriedades dos logaritmos).

A seguir, na página 20, há uma lista com treze exercícios (39 a 51), cujos objetivos são:

a) passar novamente pelos momentos 1, 2 e 5, pois há três novas tarefas: δ_8 (calcular a taxa composta, dados: capital, montante e tempo), δ_{12} (encontrar os juros compostos, dados: capital, taxa e período) e δ_{13} (encontrar o capital de uma aplicação de juros compostos, dados: taxa, tempo e montante)

b) enfatizar o quarto momento, o do trabalho da técnica, com algumas variações.

c) fazer surgir, a critério do professor e até do próprio aluno, o sexto momento, o da avaliação.

A última seção, denominada “Atualização Financeira”, teoria α_5, apresenta questionamento sobre como calcular o capital atual por meio da tarefa δ_{13} (encontrar o capital de uma aplicação de juros compostos, dados: taxa, tempo e montante), resolvida pela técnica χ_{13} (substituir informações na fórmula de juros compostos e resolver a equação de primeiro grau), utilizando a tecnologia β_4 (fórmula para montante de juros compostos).

Em seguida, deduz a tecnologia β_9 (fórmula para valor presente).

Passa-se aqui, mais uma vez, pelos momentos: do primeiro encontro, da exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica, da construção do entorno tecnológico-teórico e, de certa forma, da institucionalização.

O autor, em verdade, está fornecendo introdução ao assunto equivalência de capitais, que é uma importante consequência do saber *juros*, pois fornece uma noção aos alunos para a compreensão de como funcionam as compras e empréstimos parcelados e também sobre a questão da taxa interna de retorno de fluxo de capitais. Esta seção está tão bem exposta que será utilizada integralmente na proposta de sequência de aulas no último capítulo.

Para a conclusão de exercícios resolvidos, seguem duas tarefas, como exposto nos Quadros 24 e 25:

Quadro 18: Exercícios resolvidos R12 da página 21

Tarefa δ_9: encontrar a taxa interna de retorno de fluxo de capitais, dados: valor atual, valor da parcela e período. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_{14} (fazer a equivalência de capitais, substituindo as informações de cada período na fórmula do valor presente, e resolver a equação do segundo grau). **Tecnologia:** β_9 (fórmula para valor presente).

Teorias: α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros), α_3 (juros compostos) e α_5 (atualização financeira).

Quadro 19: Exercícios resolvidos R13 da página 22

Tarefa δ_{10}: encontrar o valor da parcela de fluxo de capitais, dados: valor atual, taxa e período. **Momentos de estudo:** 1º, 2º e 5º. **Técnica:** χ_{15} (fazer a equivalência de capitais, substituindo as informações de cada período na fórmula do valor presente, e resolver a equação de primeiro grau). **Tecnologia:** β_9 (fórmula para valor presente). **Teorias:** α_1 (aspectos iniciais da Matemática Financeira: juros, unidade de tempo, unidade monetária, capital, montante e taxa de juros), α_3 (juros compostos) e α_5 (atualização financeira).

É interessante notar que o autor utiliza o diagrama de setas para resolver as duas tarefas anteriores, que é um tipo de abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira. Novaes (2009) acredita

> que este método é fértil por essência, pois dá autonomia ao aluno, possibilitando a diversidade de resolução de um mesmo problema, auxiliando e estimulando o aluno na criação de sua própria técnica, permitindo que o pensamento aconteça livremente, eliminando fórmulas e regras sem sentido.

Na mesma página 22, há uma lista com oito exercícios propostos (52 a 59), cujos objetivos são:

a) passar novamente pelos momentos 1, 2 e 5, pois há uma nova tarefa δ_{15} (encontrar o valor atual de fluxo de capitais, dados: valor da parcela, taxa e período).

b) enfatizar o quarto momento, o do trabalho da técnica, com algumas variações.

c) fazer surgir, a critério do professor e até do próprio aluno, o sexto momento, o da avaliação.

A seguir, nas páginas 23 a 25, há uma lista com trinta e sete exercícios propostos (60 a 96), que se subdividem em: aplicação, aprofundamento e desafios, cujos objetivos são:

a) enfatizar novamente o quarto momento, o do trabalho da técnica, com mais algumas variações.

b) fazer surgir, a critério do professor e até do próprio aluno, o sexto momento, o da avaliação.

É interessante chamar a atenção sobre o primeiro exercício de aprofundamento (Número 88), que mostra os gráficos de aplicação de R$ 300,00 em juros simples e compostos durante três meses. Nele, o autor faz o questionamento sobre em que período é menos vantajoso aplicar em juros simples. Teria sido muito melhor se ele tivesse feito essa discussão com a teoria e utilizado a tarefa como resolvida, e não proposta. A Seção 4.1 mostrará que isso justifica a aplicabilidade de juros simples.

Na página 26, há um útil resumo do capítulo, porém há aspectos nele que deveriam ter sido explicados na teoria.

Posteriormente, na página 27, há uma seção denominada "Autoavaliação", da qual constam dez questões sobre todo o capítulo. O principal objetivo aqui é chegar ao sexto momento, o da avaliação, pois, além do título sugestivo, possui um quadro para retomada dos conceitos, caso o aluno tenha errado alguma questão.

Para concluir o capítulo, há ainda uma parte chamada "Resolução comentada", na qual o autor resolve outra tarefa de três formas diferentes:

a) "tradicional";

b) por meio de estimativa;

c) com o auxílio da planilha eletrônica.

Posteriormente, propõe duas variações do problema.

3.4 CONSIDERAÇÕES ADICIONAIS

Observando as Tabelas 1 a 5 da Seção 3.1, nota-se que as duas obras analisadas assemelham-se no que tange ao conjunto das *praxeologias*. Porém, chama-se a atenção a seguir para algumas diferenças e semelhanças consideradas mais importantes.

Apesar de os momentos de estudo propostos pela TAD não obedecerem necessariamente a uma ordem cronológica, acredita-se que os dois livros didáticos apresentaram muito rapidamente as fórmulas para juros simples e compostos. Os autores deveriam ter resolvido no mínimo duas tarefas de cada regime, encontrando os juros e o montante sem o uso das fórmulas, ou seja, apenas com o uso da definição. O quinto momento, o da institucionalização, surgiu muito rápido, sem que o aluno tivesse passado de forma satisfatória pelos momentos anteriores.

Os dois autores trataram sobre aumentos e descontos sucessivos. O L2 com este nome, e o L1, depois da Seção Juros, com o nome de "Juros compostos com taxa variáveis". É importante esse entorno tecnológico-teórico, pois é um desdobramento importante de juros.

As duas obras também apresentaram a tecnologia de relacionar juros simples e compostos com progressões aritméticas e geométricas, respectivamente. Lima et al. (2001) concordam com essa postura e recomendam que o capítulo de Matemática Financeira conste depois do capítulo de progressões, como fez o L1, pois possibilita que as fórmulas surjam naturalmente.

O autor do L1, apesar de no fim do capítulo, relacionou juros simples e compostos com funções afim e exponencial, respectivamente, tecnologia que se considera de grande importância, não apresentada no L2.

O autor do L2 tratou sobre equivalência de capitais em seção própria e, o autor do L1, em "Aplicações", no fim do capítulo. Porém, não aprofundaram um dos focos mais importante da Matemática Financeira que é, de fato, o comportamento do dinheiro no tempo. Teoria esta que Morgado et al. (2005) denominam de "erros comuns em raciocínios financeiros". Esses autores explicam isso muito bem no início do capítulo de Matemática Financeira, sem necessariamente terem-se aprofundado no assunto, mostrando que não se pode comparar o dinheiro em tempos diferentes sem levar em consideração a taxa de juros envolvida:

> R$ 110,00 valem mais que R$ 100,00, se referidos à mesma época. Referidos a épocas diferentes, R$ 110,00 podem ter o mesmo valor que R$ 100,00 [...] ou até mesmo um valor inferior [...].
>
> Todos nós preferimos receber R$ 100,00 agora a R$ 110,00 daqui a sete anos. [...]
>
> R$ 100,00 hoje valem mais que R$ 100,00 daqui a um ano. [...]
>
> Não podemos somar quantias referidas a épocas diferentes. (MORGADO et al., 2005, p. 44-45)

Todos os autores e professores, quando tratam de Matemática Financeira, não podem deixar de fazer essa importante reflexão.

Em relação às tarefas, tem-se a impressão de que os autores analisados escreveram o livro didático para o professor, e não para o aluno, pois a quantidade de tarefas resolvidas é considerada reduzida para que o aluno consiga passar pelo quarto momento (trabalho da técnica) de forma satisfatória. Além disso, o nível de dificuldade das tarefas resolvidas está aquém em relação aos das tarefas propostas.

Em se tratando de tarefas propostas, a quantidade delas no L1 fica em déficit em relação ao L2.

O L2, além da quantidade suficiente de exercícios propostos, inclui a Seção “Autoavaliação”, que remete satisfatoriamente ao sexto momento, o da avaliação.

Outro aspecto é que os autores não explicaram o conceito de taxa nominal e efetiva. Esse saber é de utilidade no cotidiano.

4 PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DE AULAS SOBRE JUROS

4.1 A APLICABILIDADE DE JUROS SIMPLES

Como indicado anteriormente, esta seção aprofunda a análise sobre a aplicação real de juros simples no cotidiano. Na prática, não há instituição na qual uma pessoa possa aplicar recursos em regime de juros simples.

A primeira aplicação é para atraso no pagamento de contas, como energia, água, telefone, mensalidade escolar, aluguéis, empréstimos, financiamentos, consórcios etc. Os boletos dessas contas, além dos juros, geralmente são acrescidos de multa e, algumas vezes, de atualização monetária. Os atrasos são, em geral, de até 30 dias, pois, em sua maioria, não admitem pagamento se o prazo for superior.

Além dos dois autores analisados, consultou-se também Smole (2010) e Souza (2010), e nenhum dos quatro mostrou sequer uma única tarefa resolvida sobre a aplicação de juros simples no dia a dia. Todas essas tarefas, sem exceção, são hipotéticas, que até ajudam a compreender a teoria, porém são totalmente inúteis do ponto de vista da aplicação no cotidiano, pois dificilmente alguém se deparará com uma situação semelhante às mostradas pelos autores.

O autor do L1 mostra uma única tarefa proposta – a última da seção juros simples, por sinal – dessa aplicação real de juros simples no cotidiano.

É importante frisar que é salutar a utilização de uma ou outra tarefa puramente teórica para compreender melhor a teoria e trabalhar a técnica. Porém, nenhuma delas condizerem com a realidade é uma contradição para um livro didático que se propõe a seguir os PCNEM (2002).

O mais grave é que o problema da contextualização de juros simples não acaba nos livros didáticos, estende-se também por todas as questões de processos seletivos desses quatro livros e por todas as outras questões que tenho conhecimento.

Costumo dizer em sala de aula que, se a questão de processo seletivo disser expressamente que são juros simples ou compostos, não há o que discutir com o comando. Deve-se apenas seguir a orientação, por mais absurda que pareça.

Porém, se a questão de processo seletivo não disser nada? O que fazer? Contextualizar para ver se é simples ou composto! Resolver de qualquer maneira, pois as duas resoluções serão consideradas corretas!

A resposta é nenhuma das duas anteriores. A minha experiência orienta no sentido de que, quando uma questão de processos seletivos não disser de que regime de capitalização se trata, deve-se sempre resolver por juros compostos!

Afinal, quem contaminou quem em relação à não aplicabilidade de juros simples? As questões de processos seletivos contaminaram os autores de livros didáticos ou vice-versa? Sinceramente, não se arrisca a fornecer uma resposta nesta pesquisa.

Tem-se ainda outro questionamento importante: Por que, no cotidiano, juros simples são aplicados para atraso de contas, ou seja, geralmente para períodos menores que trinta dias ou para períodos fracionários de mês?

Primeiramente, no Brasil, a unidade mais usada para taxa de juros é a mensal. Se fizermos um gráfico de montante (R$) x período (mês), semelhante ao do L1, na página 236, ou ao do L2, na página 24, considerando o mesmo capital, a mesma taxa para os dois regimes de capitalização, notar-se-á que, para os períodos 0 (zero) e 1 (um), os montantes coincidem. Para período maior que 1 (um), o montante composto supera o montante simples e, para período entre 0 (zero) e 1 (um), o montante simples supera o montante composto.

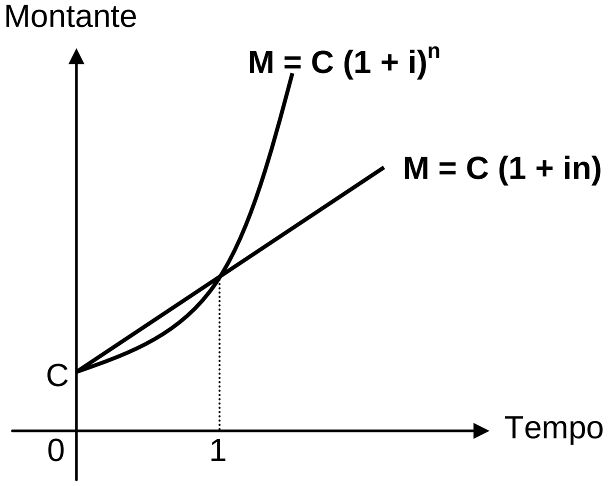


Figura 5: Gráficos de juros simples e compostos

Aí está o principal motivo que justifica o ditado popular: “Bancos nunca perdem”. Morgado et al. (2005, p. 56) dizem que o humorista já definiu como a “regra do ouro” da Matemática Financeira – e também da vida: “Na vida, quem tem o ouro é quem faz as regras”.

Para as instituições financeiras, “donas do ouro”, tendo em vista que a taxa mensal é considerada como “padrão”, é mais vantajoso utilizar juros simples para períodos menores que um mês (trinta dias), pois o montante recebido será maior.

Apesar de os cálculos serem feitos eletronicamente, é bom lembrar que calcular juros compostos para período menor que 1 (um) é bem mais complicado do que calcular juros simples, pois a primeira envolve potência com expoente racional, e a segunda um simples produto.

A segunda aplicação de juros simples no cotidiano é em desconto de recebíveis, ou seja, em duplicata, cheque ou cartão.

Morgado et al. (2005, p.58) nos dizem que o banco recebe do cliente a promissória[1] de valor de face ou nominal **F** e entrega ao cliente uma quantia **A**, que é menor que **F**, obviamente. A diferença, **F – A = d**, é chamada de desconto. Os bancos efetuam o desconto de acordo com a fórmula A = F(1 – dt), onde **d** é a taxa de desconto simples bancário (por fora), e **t** é o prazo de antecipação medido na unidade da taxa.

Rodrigues (2010) confirmou essa aplicação:

> A operação de desconto bancário é *sui generis*. Enquanto na maioria das operações bancárias os juros incidem sobre o valor presente, na operação de desconto a taxa incide sobre o valor futuro ou valor de face. Ou seja, sobre o valor que o título vale no vencimento. A taxa de desconto é expressa na forma de percentual ao mês, p.e., 3,00% ao mês e **é calculada proporcional ao prazo restante** até o vencimento do título. [grifo nosso]

Rodrigues (2010), em seu exemplo resolvido, utiliza a mesma fórmula sugerida por Morgado et al. (2005) acrescida de encargos e tributos.

Não é o objetivo desta pesquisa aprofundar, mas há quatro tipos de descontos: simples por fora, simples por dentro, composto por fora e composto por dentro. Adivinhe qual deles é mais vantajoso para a instituição financeira?

Utilizando a “regra do ouro”, a resposta é o “simples por fora”, como indicado pelos dois autores acima.

---

[1] Hoje, a nota promissória quase não é utilizada pelas instituições financeiras. Estas trabalham basicamente com a duplicata, o cheque e o cartão.

Como a instituição financeira vai pagar e não receber, é mais interessante para ela que seja o menor valor. Os gráficos da Figura 6 foram construídos pelo *software* Geogebra levando em consideração um capital de R$ 10,00 e uma taxa de juros/desconto de 10% ao mês.

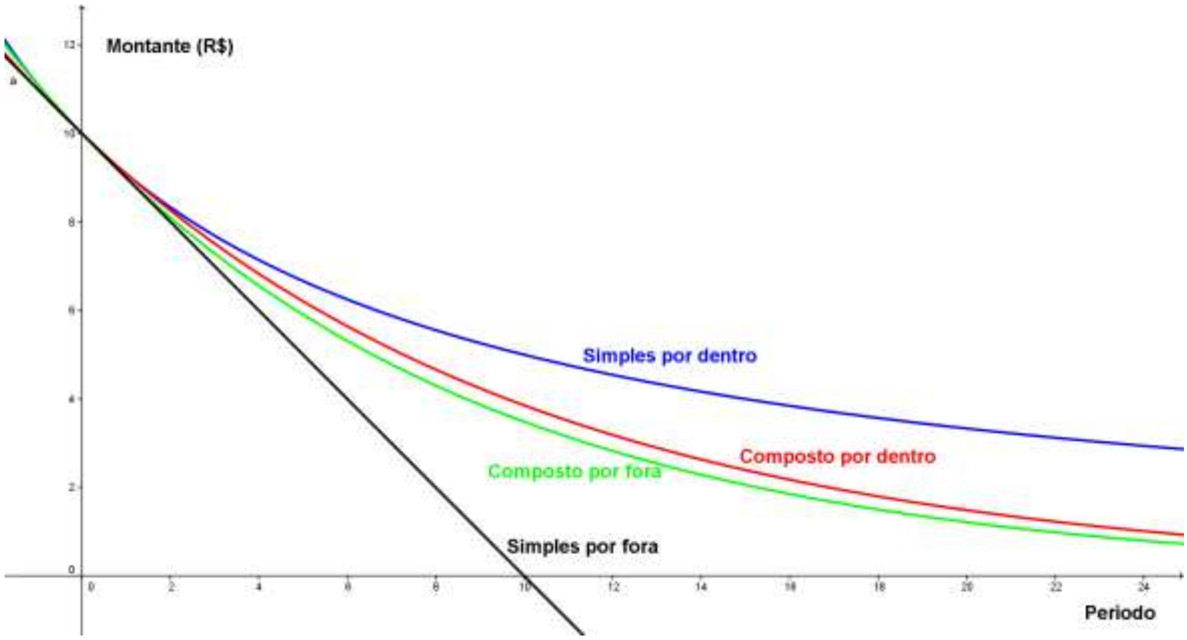


Figura 6: Gráficos dos quatro tipos de descontos

4.2 ASPECTOS GERAIS COMUNS DAS AULAS

Poder-se-ia realizar uma única aula de autoria própria, porém não contemplaria a minha proposta inicial. Optou-se então pelo subtipo *sequência de aulas* sobre o saber *juros*, com muitos elementos de autoria própria, porém utilizando partes dos livros didáticos.

O termo *aula*, nesta obra, refere-se ao conjunto de duas aulas nas escolas que possuem de 80 a 100 minutos no total.

Sugere-se que as partes dentro dos retângulos de cada aula, dependendo do recurso disponível, sejam postas no quadro ou em uma apostila, ou ainda, que sejam projetadas em uma tela.

Alguns dos aspectos mínimos obrigatórios estão a seguir. Outros – materiais e tecnologias, recomendações metodológicas, dificuldades previstas e descrição geral – estão descritos em cada aula. Possíveis continuações ou desdobramentos estão na última seção deste capítulo.

4.2.1 Objetivos

4.2.1.1 Geral

Fazer o aluno entender em quais situações do cotidiano se utilizam efetivamente juros simples e compostos, e o motivo de isso ocorrer, haja vista que os livros didáticos não desempenham satisfatoriamente esse papel.

4.2.1.2 Específicos

a) Propor uma *praxeologia*, como pensado por Chevallard, sobre juros, unindo adequadamente a prática, onde estão as tarefas e técnicas (saber fazer), e o *logos*, onde estão as tecnologias e as teorias (saber), construindo um modelo matemático da realidade que se quer estudar, de tal modo que se possa interpretar os resultados obtidos para responder às questões inicialmente apresentadas;

b) Incentivar o uso de recursos tecnológicos para efetuar cálculos, como a calculadora científica, o celular, a planilha eletrônica, os *softwares* de construção gráfica e a internet;

c) Propor uma sequência cronológica de aulas sobre juros, procurando seguir os momentos de estudos propostos por Chevallard;

d) Explicar o conceito de taxas proporcionais e equivalentes, que em juros simples elas coincidem, e em juros compostos não;

e) Possibilitar ao aluno entender que o dinheiro em tempos diferentes possui poderes de compras distintos;

f) Realizar uma avaliação adequada, que é o sexto momento de estudo proposto por Chevallard;

g) Explicar o conceito de taxas nominais e efetivas;

h) Utilizar o livro didático como recurso acessório, e não como o principal.

4.2.2 Público-Alvo

a) Professores que ministram aula no 1º ano do ensino médio das escolas particulares, Instituições Federais de Ensino e escolas públicas estaduais que não decidiram pelo componente curricular optativo Matemática Financeira;

b) Professores ministrantes do componente curricular optativo Matemática Financeira nas escolas públicas estaduais que fizeram esta opção, podendo ser no 1º ou 2º ano do ensino médio.

4.2.3 Pré-Requisitos

Ter ministrado para os alunos anteriormente: progressões, funções e uma revisão sobre razão/proporção e porcentagem.

4.3 AULA 1 – JUROS

4.3.1 Materiais e Tecnologias

Os previstos em uma sala de aula tradicional (quadro, apagador, pincel ou giz), calculadora científica e extrato de conta a pagar (energia, água, telefone etc.).

4.3.2 Recomendações Metodológicas

Organizar o espaço físico em forma de fileiras ou circular e pedir que alunos tragam calculadora científica nas aulas seguintes.

4.3.3 Dificuldades Previstas

O professor terá de trabalhar com taxas decimais. Por exemplo, a taxa de juros do talão de energia a que se teve acesso é de 0,0333% ao dia, e a taxa de juros da poupança utilizada no exemplo é 0,5% ao mês. Recomenda-se efetuar todos os cálculos da aula antecipadamente no papel e (ou) na calculadora.

Também poderão ocorrer dificuldades com arredondamentos. No instante em que aparecer, sugere-se realizar revisão breve sobre as regras de arredondamentos.

4.3.4 Descrição Geral

Recomenda-se iniciar a aula com o quadro a seguir. O tipo de conta, o valor e as datas podem ser modificados a critério do professor ou podem coincidir com a que foi trazida de casa.

Juros
Tarefa 1 – Possuo um talão de energia que vence dia 14/1 no valor de R$ 200,00. A multa por atraso é de 2%, e a taxa de juros de 0,0333% ao dia. Se efetuasse o pagamento da fatura no dia 24/1, quanto pagaria de multa? E de juros? **Tarefa 2 –** Apliquei R$ 20.000,00 na poupança que rende a taxa média de juros de 0,5% ao mês. Quanto possuirei daqui a três meses?

Observações a fazer:

a) Dependendo da conta a pagar, a multa e os juros poderão ser cobrados imediatamente no momento do pagamento ou na próxima fatura.

b) Tomando por referência o ano de 2012, antes das novas regras aplicáveis à poupança, o rendimento gira entre 0,5% e 0,6407% ao mês. Para quem está sujeito às novas regras, o rendimento médio gira em torno de 0,4134% a 0,5275% (Anexo).

c) Há outras situações nas quais aparecem juros: empréstimos, financiamentos etc.

A seguir, explicar os aspectos iniciais da Matemática Financeira do quadro seguinte, fazendo analogia com as duas tarefas acima.

Capital (C): é valor inicial de uma operação que envolve empréstimo, dívida, investimento, título etc. **Taxa de juros (i)**: é a razão, geralmente percentual, que leva em consideração a unidade de tempo da operação. **Juros (j)**: é a remuneração atribuída ao capital devido no decorrer de um tempo, uma espécie de “aluguel” do dinheiro. **Período (n)**: é o tempo decorrido para a operação.

Montante (M): é o valor final total recebido/pago na operação, ou seja, após o recebimento/pagamento dos juros. Tem-se então que:

M = C + j

Capitalização: é o processo de aplicação de uma importância a uma determinada taxa de juros e de crescimento por força da incorporação desses mesmos juros à quantia inicialmente aplicada.

Parte-se então para as resoluções:

<u>Resolução sugerida para a tarefa 1.</u>

Cálculo da multa:

200 X 2% = 4

Multa a pagar: R$ 4,00

Cálculo dos juros em um dia:

200,00 X 0,0333% = R$ 0,0666 por dia.

Reforçar que cada dia de atraso gera esse aumento constante e fazer a analogia com razão da PA.

Multiplicar então pela quantidade de dias.

Note que se está utilizando o raciocínio de juros simples. Se um aluno questionar essa maneira de resolução, sugerindo juros compostos, diga que essa é a resolução para esse tipo de problema e que na próxima questão se tratará sobre isso.

0,0666 X 10 dias = 0,666, ou seja,

Juros a pagar ≈ R$ 0,67

<u>Resolução sugerida para a tarefa 2.</u>

Cálculo dos juros após um mês:

20.000 X 0,5% = 100

Reforçar que esse é o juro no primeiro mês.

Questionar os alunos: O que ocorrerá agora? Semelhante à resolução anterior, multiplica-se pelo número de períodos, por três neste caso? A taxa de 0,5% incidirá sempre sobre os 20.000?

A maioria dos alunos provavelmente dirá que sim. Então faça outra pergunta para que eles iniciem a mudança de opinião.

Se outra pessoa depositar (pode utilizar um aluno da sala) R$ 20.100,00 no mesmo dia nesse banco, após um mês, 0,5% incidirá sobre o R$ 20.000,00 ou sobre R$ 20.100,00?

Haverá um pouco de alvoroço, mas a maioria provavelmente dirá que será sobre R$ 20.100,00.

Faça então outra pergunta. Após um mês, terei R$ 20.100,00. Se eu sacar o dinheiro e aplicar em outro banco no mesmo dia, após mais um mês, a taxa de 0,5% incidirá sobre o R$ 20.000,00 ou sobre R$ 20.100,00?

Agora, haverá muito alvoroço, mas a maioria provavelmente dirá que será sobre R$ 20.100,00. Dê a “cartada final”, como Sócrates, fazendo uma última pergunta:

Por que então, se eu sou cliente do banco e deixo o dinheiro nele, receberia menos que outra pessoa que depositasse a mesma quantia no mesmo dia? Ou, receberia menos do que se sacasse e aplicasse o mesmo dinheiro em outro banco?

A reação será provavelmente de silêncio ou de pequenos cochichos.

Diga que vai terminar a questão utilizando o que considera justo (fazendo a isonomia), que explicará melhor o motivo dessa diferença de resolução em seguida.

Continuando...

Após o primeiro mês:

20.000 + 100 = 20.100

Após o segundo mês:

20.100 X 0,5% = 100,50

Algum “brincalhão” provavelmente dirá que se estava brigando por causa de R$ 0,50. Se ninguém falar, pode ser o professor mesmo. Reforce que “efeito cascata” ao longo de um tempo bem maior nos dará uma diferença expressiva e que se mostrará um exemplo nas próximas aulas.

20.100 + 100,50 = 20.200,50

Após o terceiro mês:

20.200,50 X 0,5% = 101,0025 ≈ R$ 101,00

20.200,50 + 101,00 = 20.301,50

Possuirei daqui a três meses R$ 20.301,50

A seguir, explique a teoria sobre juros simples e compostos, fazendo referência às duas resoluções anteriores.

Juros simples: é o regime de capitalização no qual a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial.

Juros compostos: é o regime de capitalização no qual a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior.

Para concluir a aula, apresente mais duas tarefas propostas que, dependendo do tempo, poderão ser corrigidas na mesma aula.

Deixe também o seguinte questionamento para ser respondido na próxima aula: Por que em uma situação são utilizados juros simples, e na outra juros compostos?

Tarefa proposta 1 – Você possui uma conta de telefone que vence dia 1º/2 no valor de R$ 50,00. A multa por atraso é de 2%, e a taxa de juros de 0,0333% ao dia. Se efetuasse o pagamento da fatura no dia 21/2, quanto pagaria de multa? E de juros?

Tarefa proposta 2 – Você tomou emprestado R$ 5.000,00 a uma financeira – que lhe cobra uma taxa de juros de 10% ao mês – para pagar em uma única parcela daqui a quatro meses. Desconsiderando tributos e multas, quanto terá de pagar?

4.4 AULAS 2 E 3 – FÓRMULAS E APLICABILIDADE DE JUROS

4.4.1 Materiais e Tecnologias

Materiais tradicionais, calculadora científica, livro didático e, caso haja laboratório na escola, planilha eletrônica e *software* de construção gráfica.

Também podem ser utilizados recursos que funcionam diretamente na internet ou em aplicativos de celulares.

4.4.2 Recomendações Metodológicas

Se houver laboratório na escola, levar os alunos para aquele espaço, utilizar a planilha eletrônica, a fim de preencher a tabela da tarefa e fazer o gráfico com o auxílio de um *software*. Caso não haja, utilizar a calculadora científica para preencher a tabela e fazer o gráfico manualmente com o auxílio dos conhecimentos de função afim e exponencial.

Independente de estar em laboratório ou não, reunir os alunos em dupla e realizar a tarefa em conjunto com eles.

Recomendar aos alunos que tragam calculadora científica nas próximas aulas.

Optou-se por não delimitar exatamente o instante de encerrar a 2ª aula e iniciar a 3ª, pois depende muito do local escolhido (sala ou laboratório) e do conhecimento prévio dos alunos a respeito dos recursos utilizados.

4.4.3 Dificuldades Previstas

Os alunos poderão não saber utilizar a calculadora científica, a planilha eletrônica e o *software* de construção de gráfico. Nesse caso, é necessário que se faça orientação prévia ou durante a resolução.

4.4.4 Descrição Geral

As aulas têm por principal foco associar juros simples e compostos com progressões aritméticas e geométricas e ainda com função afim e exponencial, respectivamente, mostrando as fórmulas envolvidas. Também se responderá ao questionamento feito no final da aula anterior, explicando o motivo de utilizar juros simples em situações de atraso de contas e em desconto de recebíveis.

Raciocínio para a fórmula para juros simples (não é demonstração)

Observou-se, nos exemplos da última aula, que, dado um capital **C** (C > 0) e uma taxa **i** (i > 0), o juro em cada período indicado por **C.i**.

Que é a razão da PA das sequências dos montantes de primeiro termo **C** (em verdade, é o *zerésimo* termo).

Como os juros são constantes em cada período, ao final de **n** períodos ($n \geq 0$), de mesma unidade da taxa, tem-se que o juro total vale:

$$\mathbf{J = C.i.n}$$

Como

$M = C + j$

Tem-se que

$M = C + C.i.n$

Ou seja, colocando o C em evidência, tem-se que o montante simples será:

$$\mathbf{M = C(1 + in)}$$

Note que o gráfico construído a partir da fórmula acima no plano cartesiano **M x n** é uma função de primeiro grau, ou seja, o gráfico é uma reta crescente com início em **C**.

Pode-se associar com a fórmula do termo geral da PA, pois

$a_n = a_1 + r.(n – 1)$. Pondo $\mathbf{a_0}$ no lugar do $\mathbf{a_1}$, tem-se

$a_n = a_0 + r.(n – 0)$, ou melhor,

$a_n = a_0 + r.n$, logo:

$a_n = a_0 + r.n \Leftrightarrow M = C + C.i.n$

onde:

n é o número de períodos que inicia no zero

$\mathbf{a_n}$ é o montante **M** após **n** períodos

$\mathbf{a_0}$ é o capital **C** (no período zero), *zerésimo* termo da PA.

r é a razão **C.i** da PA

Raciocínio para a fórmula para juros compostos (não é demonstração)

Observou-se, nos exemplos da última aula, que:

$M_1 = C + C.i = C (1 + i)$

$M_2 = M_1 + M_1.i = M_1 (1 + i) = C (1 + i) . (1 + i) = M_2 = C (1 + i)^2$

Ou seja, M é uma progressão geométrica de razão (1 + i). Tem-se então que:

$$M = C (1 + i)^n$$

(Pode-se fazer a mesma associação realizada anteriormente, porém agora com a fórmula da PG).

Note que o gráfico construído a partir da fórmula acima no plano cartesiano **M x n** é uma função exponencial, ou seja, o gráfico é uma curva exponencial crescente com início em **C**.

A seguir, resolva a tarefa:

Tarefa 1 – Com o auxílio da calculadora científica, utilizando as fórmulas dadas e considerando o capital inicial de R$ 100,00 e a taxa de juros de 15% ao mês:

a) calcule os montantes simples e compostos de cada período, preenchendo as duas tabelas a seguir.

b) faça um esboço em conjunto dos gráficos.

c) responda em que período o montante simples supera o composto.

Período (meses)	Montante simples	Montante composto
0	100,00	100,00
1		
2		
3		

Período (dias)	Montante simples	Montante composto
0	100,00	100,00
10		
15		
20		

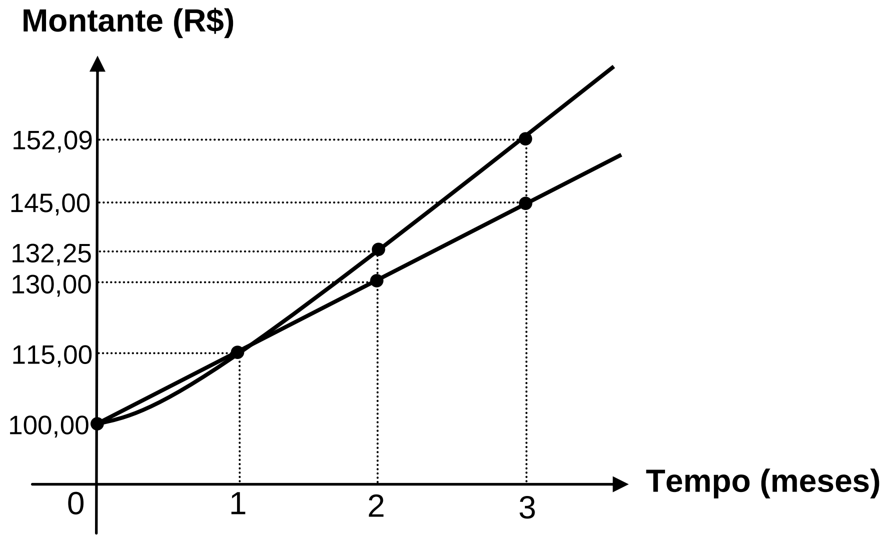
<u>Respostas:</u>

a) Tabelas

Período (meses)	Montante simples	Montante composto
0	100,00	100,00
1	115,00	115,00
2	130,00	132,25
3	145,00	152,09

Período (dias)	Montante simples	Montante composto
0	100,00	100,00
10	105,00	104,77
15	107,50	107,24
20	110,00	109,77

b) Gráficos



c) Entre 0 (zero) e 1 (um)

Este é o momento de fazer a explicação sobre a questão do ditado popular de que "bancos nunca perdem", sobre a citação de Morgado et al. (2005, p. 56) em relação à "regra do ouro", que se fez na Seção 4.1.

É importante lembrar os alunos de que juro composto é o "natural", conforme dizem Morgado et al. (2005, p.45).

Explicar aos alunos que em processos seletivos, infelizmente, a regra é a seguinte:

"A questão só será de juros simples se o comando disser expressamente". Ou seja, se não disser nada, resolve-se por juros compostos. Veja discussão sobre isso também na Seção 4.1.

Proponha a tarefa a seguir para mostrar isso.

Tarefa 2 – (Uepa 2007 - adaptada) Um carro flex de R$ 30.000,00 foi vendido da seguinte forma: 60% de entrada e o restante em 5 prestações mensais iguais com juro simples de 2% ao mês. O valor de cada prestação será de:

a) R$ 2.400,00 b) R$ 2.500,00 c) R$ 2.640,00 d) R$ 2.860,00 e) R$ 3.960,00

A questão é totalmente sem aplicação no cotidiano. Primeiro, que, como discutido, juros simples se aplicam em situações de atraso de contas e de desconto de recebíveis. Segundo, que essa forma de cálculo de parcelamento, que se fará a seguir, não faz sentido algum.

<u>Resolução 1 (para coincidir com o gabarito)</u>

Entrada: 30.000 X 60% = 18.000

Restante a pagar = 30.000 – 18.000 = 12.000 (Capital)

Restante a pagar com juros (montante):

$$M = C(1 + in)$$

$$M = 12000 \times (1 + 0{,}02 \times 5)$$

$$M = 12000 \times (1 + 0{,}1)$$

$$M = 12000 \times 1{,}1$$

$$M = 13200$$

Valor de cada parcela; 13200/5 = **R$ 2.640,00**

Resposta: letra **C**, de acordo com o gabarito oficial.

Pela resolução mostrada, para coincidir com o gabarito oficial, incidiram R$ 240,00 de juros sobre a primeira parcela com vencimento em um mês, os mesmos R$ 240,00 sobre a segunda e sobre todas as outras parcelas que possuem prazos de vencimento diferentes.

O cálculo do parcelamento não é realizado por meio de juros simples, muito menos por juros iguais para parcelas que vencem em períodos diferentes.

As duas outras resoluções possíveis estão no Apêndice.

Não se têm duvidas de que é necessário ensinar para a vida, mas a vida geralmente exige submissão a processos seletivos e, nesse sentido, tem-se de preparar os alunos para tais processos.

O mais grave é que, como já mostrado, os livros didáticos seguem a mesma linha de raciocínio das questões de processos seletivos em relação à aplicação de juros simples.

Tarefa 3 – Apliquei R$ 20.000,00 na poupança que rende a taxa média de juros de 0,45% ao mês.

a) Quanto possuirei daqui a dezoito anos?

b) Se o regime de capitalização fosse de juros simples, quanto iria possuir?

Respostas:

a) M = R$ 52.749,37

b) M = R$ 39.440,00

Aqui é o momento de observar que, mesmo a uma taxa de juros baixíssima, o “efeito cascata” do crescimento exponencial faz a diferença. Imagine agora com uma taxa mais alta!

Após essas resoluções e discussões, sugere-se resolver tarefas de juros simples e compostos do livro didático e selecionar algumas para que os alunos resolvam em casa. As tarefas ainda não podem envolver taxas proporcionais e equivalentes, pois será a teoria da próxima aula.

4.5 AULA 4 – TAXAS DE JUROS

4.5.1 Materiais e Tecnologias

Materiais tradicionais, calculadora científica, livro didático, livro específico de Matemática Financeira e algum extrato de conta corrente ou de fatura de cartão de crédito.

4.5.2 Recomendações Metodológicas

Recomenda-se não aprofundar muito esse assunto. Também, sugere-se levar extrato de conta corrente ou fatura de cartão de crédito e mostrar aos alunos a questão da taxa efetiva mensal e anual, informando que se aprenderá a fazer esse cálculo para despertar um pouco mais o interesse.

4.5.3 Dificuldades Previstas

Apesar de ainda ser um assunto aplicado ao cotidiano, esta aula será considerada um pouco mais desinteressante pelos alunos, pois haverá mais cálculos aparentemente menos aplicados. A utilização de extrato de conta corrente ou de fatura de cartão poderá minimizar isso.

4.5.4 Descrição Geral

A aula aborda a teoria de taxas, assunto ausente na maioria dos livros didáticos. Após o uso do extrato ou da fatura, utilizar a sequência a seguir:

Taxas proporcionais: são aquelas em que a razão entre elas é igual à razão dos períodos aos quais elas se referem.

Exemplos:

a) As taxas de juros de 2% ao mês, 4% ao bimestre e 24% ao ano são taxas proporcionais.

b) As taxas de juros de 0,1% ao dia e 3% ao mês são taxas proporcionais.

Taxas equivalentes: são aquelas que, utilizando o mesmo capital e o mesmo período, rendem o mesmo juro.

Teorema 1 – Em regime de juros simples, taxas equivalentes são proporcionais e vice-versa.

É trivial demonstrar isso. Mostraremos a ida, a volta fica a cargo do leitor.

Considere que as taxas $\mathbf{i_1}$, referente ao período $\mathbf{n_1}$, e $\mathbf{i_2}$, referente ao período $\mathbf{n_2}$, sejam equivalentes em juros simples, tem-se então que:

$$j_1 = j_2$$

$$C_1 i_1 n_1 = C_2 i_2 n_2$$

Como $\mathbf{C_1} = \mathbf{C_2}$, tem-se que:

$$i_1 n_1 = i_2 n_2$$

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

Ou seja, as taxas $\mathbf{i_1}$ e $\mathbf{i_2}$ são proporcionais.

Por esse motivo que, em questões de juros simples, pode-se trabalhar com taxas proporcionais livremente como equivalentes.

É fácil notar que, em juros compostos, isso não ocorre.

O Teorema seguinte nos mostra como encontrar taxa equivalente (em juros compostos).

Teorema 2 – Se a taxa de juros relativamente a um determinado período de tempo é igual a **i**, a taxa de juros relativamente a **n** períodos de tempo é **I**, tal que

$$\mathbf{1 + I = (1 + i)^n}$$

Utilizando a fórmula de montante para juros compostos, a demonstração é análoga à anterior.

Tarefa 1 – Dada uma taxa, encontre a taxa proporcional e, com o auxílio da calculadora científica, a taxa equivalente em cada caso:

a) a bimestral referente a 1% ao mês.

b) a anual referente a 4% ao mês.

c) a mensal referente a 18% ao ano.

Convém destacar para os alunos, como observação, a importante citação seguinte, de Morgado et al. (2005, p. 50):

> Um (péssimo) hábito em Matemática Financeira é o de anunciar taxas proporcionais como se fossem equivalentes. Uma expressão com “12% ao ano com capitalização mensal” significa que a taxa usada na operação não é a taxa de 12% anunciada, e sim a taxa mensal que lhe é proporcional. Assim, a tradução da frase “12% ao ano com capitalização mensal” é “1% ao mês”.

A (falsa) taxa de 12% acima é dita **taxa nominal**. A taxa verdadeira de 1% é a **taxa efetiva**.

Tarefa 2 – Com o auxílio da calculadora científica, encontre a taxa efetiva anual para cada caso:

a) taxa de 12% ao ano com capitalização mensal;

b) taxa de 60% ao ano com capitalização mensal.

Por fim, resolver/propor as poucas questões do livro didático que envolvam esse tipo de taxa. Caso necessite de mais questões, recomenda-se utilizar um livro específico de Matemática Financeira, como o do Crespo (2009).

Lembre-se que o assunto *taxas* não foi esgotado. Faltou tratar sobre o efeito da inflação, quando surge a taxa real e a aparente. Para compreensão, siga a recomendação do parágrafo anterior. Acredita-se que o cálculo que envolve esse tipo de taxa não é o enfoque do ensino médio. Deve-se fazer apenas um pequeno comentário.

4.6 AULA 5 – NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA DE CAPITAIS

Utilizou-se integralmente a Seção 4.2, Atualização financeira, páginas 21 e 22 do livro didático organizado por Juliane Matsubara Barroso (2010), o L2 analisado.

4.6.1 Materiais e Tecnologias

Materiais tradicionais, calculadora científica, páginas 21 e 22 do livro didático organizado por Barroso (2010) e planilha eletrônica.

4.6.2 Recomendações Metodológicas

Utilizar integralmente as páginas 21 e 22 do livro didático organizado por Barroso (2010). Como há duas tarefas resolvidas e oito propostas, sugere-se equilibrar, ou seja, resolver mais duas das tarefas das propostas em sala de aula. Assim, têm-se quatro tarefas resolvidas e seis tarefas propostas para escolher quatro, por exemplo. Enfatize o uso do diagrama de setas. Recomenda-se utilizar a planilha eletrônica como recurso complementar.

Introduzir o assunto e falar sobre o efeito do dinheiro no tempo, tema bem tratado por Morgado et al. (2005, p. 44-45). Veja a Seção 3.4.

Lembrar que na próxima aula será realizada avaliação e que os alunos poderão usar a calculadora científica.

4.6.3 Dificuldades Previstas

Os alunos terão dificuldades em fazer a mudança de variável para resolver a equação do segundo grau e para isolar o **x** na equação de primeiro grau. Aqui não há segredo, é ter paciência e explicar passo a passo.

4.6.4 Descrição Geral

Introduzir o assunto e falar sobre o efeito do dinheiro no tempo – veja citação de Morgado et al. (2005, p. 44-45) na Seção 3.4 –; explicar que a fórmula do valor presente deriva da fórmula de montante composto; explicar os dois exercícios resolvidos e mais dois dos exercícios propostos; e selecionar quatro dos exercícios propostos como tarefa para os alunos.

4.7 AULA 6 – AVALIAÇÃO

4.7.1 Materiais e Tecnologias

Questionário de avaliação e calculadora científica.

4.7.2 Recomendações Metodológicas

Reproduzir o questionário de avaliação com antecedência e com quantidade suficiente para os alunos. Essa avaliação deverá ser individual, sem consulta e sem o uso do borrão. O único recurso que deve ser utilizado é a calculadora científica.

Os alunos devem ser dispostos em fileiras com espaçamento de forma que dificulte a troca de informações.

O objetivo principal é fazer a avaliação, sexto momento proposto por Chevallard, ou seja, momento em que se coloca à prova o domínio sobre organização matemática. O objetivo aqui não é atribuir uma nota, porém o professor poderá fazê-lo, a seu critério.

4.7.3 Dificuldades Previstas

Alguns alunos poderão ter dificuldades com a interpretação de algumas questões. Sugere-se que o professor faça o esclarecimento caso seja necessário.

4.7.4 Descrição Geral

AUTOAVALIAÇÃO

Leia atentamente as dez questões a seguir e assinale a única alternativa possível em cada uma delas.

1. Sobre os juros simples, assinale a opção correta.
a) são o regime de capitalização no qual a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior.
b) são o regime de capitalização no qual a taxa de juros incide sempre sobre o capital inicial.
c) são aplicados no rendimento da poupança.
d) são aplicados para calcular empréstimos.
e) são aplicados para calcular financiamentos.

2. Ainda sobre os juros simples, assinale a opção correta.
a) o montante cresce em progressão geométrica.
b) o montante cresce exponencialmente.
c) são utilizados em casos de atrasos pequenos no pagamento de contas.
d) são utilizados na renegociação de empréstimos.
e) são utilizados no parcelamento (com juros) em uma loja.

3. Sobre os juros compostos, indique a alternativa correta.

a) são o regime de capitalização natural, no qual a taxa de juros incide sobre o montante do período anterior.

b) são proibidos e não são utilizados no Brasil.

c) são utilizados para calcular empréstimos e financiamentos e para o pagamento de seus pequenos atrasos.

d) são utilizados para o pagamento de pequenos atrasos de contas, pois, como o crescimento é exponencial, e bancos nunca perdem, o montante sempre será superior ao dos juros simples.

e) o montante cresce em progressão aritmética.

4. Você possui uma conta de água que vence dia 11/3 no valor de R$ 45,00. A multa por atraso é de 2%, e a taxa de juros (simples) de 1% ao mês. Se efetuar o pagamento da fatura no dia 31/3, pagará de multa:

a) R$ 0,30

b) R$ 0,45

c) R$ 0,90

d) R$ 1,20

e) R$ 1,35

5. Na questão anterior, pagará de juros:

a) R$ 0,30

b) R$ 0,45

c) R$ 0,90

d) R$ 1,20

e) R$ 1,35

6. Você tomou emprestado R$ 800,00 a uma financeira que lhe cobra uma taxa de juros de 6% ao mês para pagar em uma única parcela daqui a cinco meses. Desconsiderando tributos e multas, terá de pagar aproximadamente o total de:

a) R$ 848,00

b) R$ 240,00

c) R$ 1.040,00

d) R$ 1.070,00

e) R$ 270,00

7. A taxa proporcional relativa à taxa de 30% ao ano é:
a) 15% ao bimestre
b) 6% ao bimestre
c) 3% ao mês
d) 5% ao trimestre
e) 2,5% ao mês

8. Uma instituição financeira propõe empréstimo a uma taxa de 48% ao ano capitalizado mensalmente. A taxa efetiva anual que essa instituição cobra é:
a) 4%
b) 48%
c) 75,52%
d) 60,1%
e) 110,44%

9. João antecipou seu décimo terceiro salário tomando emprestado a um banco R$ 3.000,00 no dia 2/1 para pagar onze meses depois, ou seja, no dia 2/12. O banco cobra uma taxa de juros de 1% ao mês. No dia da data prevista, João não havia recebido ainda a sua gratificação natalina; consultou o banco que informou ser cobrada multa de 2% e juros pelos dias de atraso. Sabe-se que, na prática, instituições financeiras utilizam: juros compostos para empréstimos e juros simples com taxa proporcional diária para pequenos atrasos. Dessa forma, se João pagar a dívida no dia 12/12, desconsiderando os tributos, o valor total que ele desembolsará será:
a) R$ 3.347,00
b) R$ 3.425,10
c) R$ 3.413,94
d) R$ 3.358,16
e) R$ 3.435,06

10. Maria comprou uma moto sem entrada e em três parcelas mensais iguais de R$ 2.000,00 cada. Sabendo que a empresa pratica uma taxa de juros de 2% ao mês, por quanto sairia o preço da moto à vista?

a) R$ 6.000,00

b) R$ 5.640,00

c) R$ 5.883,12

d) R$ 5.770,65

e) R$ 5.767,77

GABARITO

QUESTÃO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
LETRA	B	C	A	C	A	D	E	D	B	E

4.8 POSSÍVEIS CONTINUAÇÕES OU DESDOBRAMENTOS

O primeiro desdobramento, e talvez o mais importante, seria que alunos da turma do Profmat da Ufopa ou de outros polos de 2012 utilizassem esta proposta para a Modalidade 2 do Banco Indutor de Trabalho de Conclusão de Curso – BIT, que é a “Aplicação de atividades em sala de aula e avaliação de resultados”. Isso não impede que um professor não vinculado ao Profmat possa fazer essa avaliação e relatar se ajudou ou não no cumprimento dos objetivos.

Para as escolas particulares ou para as escolas públicas estaduais que não decidiram pelo componente curricular optativo Matemática Financeira, a teoria sobre juros prevista nos PCNEM (2002) está esgotada. Porém, dependendo do tempo disponível, é recomendável elaborar mais listas de exemplos e exercícios de processos seletivos para possibilitar melhor trabalho da técnica e mostrar que as questões de juros simples são diferentes do que ocorre no cotidiano.

Para as escolas públicas estaduais que decidiram pelo componente curricular optativo Matemática Financeira ou para os demais cursos de Matemática Financeira, pode-se estender a TAD proposta por Chevallard para os assuntos seguintes: inflação, taxas real e aparente, descontos, equivalência de capitais, anuidades e sistemas de amortização.

CONCLUSÃO

A TAD de Yves Chevallard mostrou-se um útil aporte para a análise de livros didáticos, no que diz respeito à organização matemática.

De modo geral, as duas obras analisadas assemelharam-se no conjunto das *praxeologias* (teorias, tecnologias, tarefas e técnicas). Porém, apresentaram quantidade reduzida de tarefas resolvidas e nível de dificuldade aquém em relação aos das tarefas propostas, de modo que o aluno não passa pelo momento do trabalho da técnica de forma satisfatória. Tem-se a impressão de que os livros didáticos analisados foram escritos para o professor, e não para o aluno.

Os dois autores analisados apresentaram rapidamente as fórmulas de modo que o momento da institucionalização surgiu prematuramente. Não explicaram claramente o conceito de taxas proporcionais, equivalentes, nominais e efetivas.

Boas práticas, entretanto, foram usadas pelas duas obras, como relacionar juros simples e compostos com progressões aritméticas e geométricas, respectivamente. O L1 ainda fez a analogia com função afim e exponencial, respectivamente.

O L2 destacou-se pela quantidade alta de exercícios propostos, pela noção de equivalência de capitais e pela inclusão da Seção “Autoavaliação”, que remete muito bem ao sexto momento proposto por Chevallard.

Em relação à aplicabilidade de juros, principal questão levantada por esta pesquisa, infelizmente as duas obras não mostraram sequer um comentário ou uma tarefa resolvida sobre a aplicação de juros simples no cotidiano, que são em situações de atraso de contas e de desconto de recebíveis. Isso justifica o desconhecimento dos alunos e de muitos professores de Matemática. Diante dessa situação, foi necessário realizar trabalhosa pesquisa em instituições financeiras, na internet e em livros específicos de Matemática Financeira para obter uma resposta.

As questões de processos seletivos seguem a mesma linha de raciocínio em relação a essa aplicação de juros simples. O desdobramento para trabalhos posteriores será descobrir por que esse ciclo vicioso ocorre.

Acredita-se que esta dissertação, principalmente a proposta de sequência de aulas, está de acordo com o que foi pensado para o Profmat. Com o auxílio de recursos tecnológicos, procurou-se melhorar as limitações encontradas nas duas obras, porém sem deixá-las de lado, as quais foram utilizadas como recurso complementar nas boas práticas. Outro desdobramento importante é a aplicação dessas aulas e a avaliação dos resultados dessa experiência.

Espera-se que, após a leitura deste trabalho, voltado principalmente para professores, estudantes de Matemática e interessados por Matemática Financeira, não restem dúvida sobre a aplicação de juros no cotidiano e o motivo de isso ocorrer. Que os professores utilizem a proposta e que os alunos gostem e aprendam com as aulas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARROSO, Juliane (Org.). ***Conexões com a Matemática, 3***. 1.ed. São Paulo: Moderna, 2010.

BRASIL. MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. FUNDO NACIONAL DE DESENVOLVIMENTO DA EDUCAÇÃO. CONSELHO DELIBERATIVO. ***Resolução nº 038 de 15 de outubro de 2003***. Disponível em: <ftp://ftp.fnde.gov.br/web/resolucoes_2003/res038_15102003.pdf>. Acesso em: 21 out. 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. ***Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino médio): Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias***. Brasília: MEC, 2002.

CHEVALLARD, Yves et al. **Estudar Matemáticas, o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. MORAES, Daisy Vaz. Porto Alegre: Artmed Editora Ltda, 2001.

CRESPO, Antônio Arnot. ***Matemática Financeira Fácil.*** 14.ed. São Paulo: Saraiva, 2009.

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS. ***PROCESSO SELETIVO 2005 – 1ª FASE – PROVA ECONOMIA***. Disponível em: < http://angloresolve.cursoanglo.com.br/inc/Download.asp?NomeArq=GV2005_1fase_Prova2_Economia.pdf >. Acesso em: 10 jan. 2013.

IEZZI, Gelson et al. ***Matemática: ciência e aplicações, 1: ensino médio***. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

LAJOLO, Marisa. ***LIVRO DIDÁTICO: um (quase) manual de usuário***. Brasília, ano 16, n. 69, p. 4, jan/mar 1996. Disponível em: <http://www.emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1033/935>. Acesso em: 20 out. 2012.

LIMA, Elon Lages et al. ***Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o ensino médio, posfácio.*** Rio de Janeiro: 2001.

NOVAES, Rosa Cordelia Novellino de. ***Uma abordagem visual para o ensino de Matemática Financeira no ensino médio***. 2009. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2009.

PAIS, Transposição didática. In: MACHADO, Silvia D. A. et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2008, p. 12-13. (Série Trilhas).

RODRIGUES, GIL. ***Desconto de Recebíveis – Duplicata, Cheque ou Cartão***. Belo Horizonte: 2010. Disponível em: < http://deptofinanceiro.blogspot.com/2010/08/desconto-de-recebiveis-duplicata-cheque.html >. Acesso em: 19 jan. 2013.

SANTOS, Vanessa Pires. ***Sistemas de Equações Lineares: Uma Análise de livros didáticos considerando as ideias da Teoria antropológica do didático.*** 2010. Monografia apresentada com pré-requisito para conclusão do Curso de Especialização em Educação Matemática, Universidade Federal do Oeste do Pará, Programa de Matemática. Santarém, 2010.

SMOLE, Kátia; DINIZ, Maria. ***Matemática: ensino médio, volume 3***. 6.ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

SOUZA, Joamir. ***Novo olhar Matemática, 2***. 1.ed. São Paulo: FTD, 2010.

TRAVASSOS, Iza Helena Silva. ***A educação a distância no processo de (trans)formação de professores de Matemática.*** 2008. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Universidade Federal do Pará. Belém, 2008.

MATOS FILHO, Maurício et al. Saraiva. ***A Transposição didática em Chevallard: as deformações/transformações sofridas pelo conceito de função em sala de aula.***

MORGADO, Augusto; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila. ***Progressões e Matemática Financeira.*** 5.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA. RODRIGUES, Claudina; COSTA, Sueli; GIRALDO, Victor (Org.). ***Banco indutor de trabalho de conclusão de curso***. 2011.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO PARÁ – PROGRAD - DAA. ***PRISE I – SUBPROGRAMA XI – BOLETIM DE QUESTÕES – PROVA TIPO I***. Belém, 2007.

OBRAS CONSULTADAS

CRESPO, Antônio Arnot. ***Matemática Comercial e Financeira.*** 13.ed. São Paulo: Saraiva, 2000.

ELKRAS. ***RENDIMENTO POUPANÇA 2012 – HOJE, MENSAL E ANUAL – JUROS DA POUPANÇA 2012***. Disponível em: < http://www.portalbrasil.net/2012/economia/indices_poupanca_diaria.htm >. Acesso em: 10 jan. 2013.

FURASTÉ, Pedro Augusto. ***Normas Técnicas para o trabalho Cientifico:*** Elaboração e Formatação. Explicitação das Normas da ABNT. 14.ed. - Porto Alegre: s.n., 2008.

IEZZI, Gelson; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. ***Fundamentos de Matemática Elementar, 11:*** Matemática comercial, Matemática Financeira, estatística descritiva. São Paulo: Atual, 2004.

MATHIAS, Washington Franco; GOMES, José Maria. ***Matemática Financeira.*** São Paulo: Atlas, 2002.

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL. ***Resolução no 02/2010 - Conselho Gestor:*** Normas Acadêmicas do Profmat. Disponível em: <http://www.profmat-sbm.org.br/docs/Res02_Normas_Academicas.pdf>. Acesso em: 28 abr. 2012.

APÊNDICE

Outras duas resoluções possíveis da tarefa 2 (Uepa 2007) das aulas 2 e 3

Resolução 2: Seguindo o comando, ou seja, resolvendo por juros simples e fazendo a equivalência de capitais na **data zero** de comparação.

Com o auxílio do diagrama de setas na Figura 7. Partindo da fórmula de montante simples, tem-se:

$$\mathrm{M} = \mathrm{C}(1 + \mathrm{in}) \Leftrightarrow \mathrm{C} = \frac{\mathrm{M}}{1 + \mathrm{in}}$$

O valor de cada prestação **X** é o valor futuro, ou seja, o montante $\mathbf{M_n}$, onde **n** é o período ao qual ele se refere. Trazendo as cinco parcelas **X** para a data zero e fazendo-se uso dessa fórmula, a soma dos cinco valores atuais $\mathbf{C_n}$ será de 12.000.

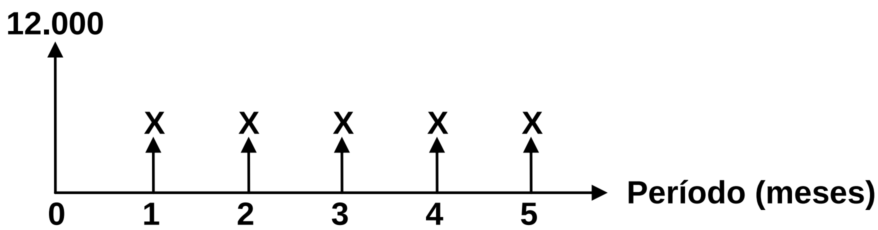


Figura 7: Diagrama de setas

Ou seja:

$$12000 = \mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 + \mathrm{C}_4 + \mathrm{C}_5$$

$$12000 = \frac{M_1}{1+in_1} + \frac{M_2}{1+in_2} + \frac{M_3}{1+in_3} + \frac{M_4}{1+in_4} + \frac{M_5}{1+in_5}$$

$$12000 = \frac{X}{1+0{,}02\cdot 1} + \frac{X}{1+0{,}02\cdot 2} + \frac{X}{1+0{,}02\cdot 3} + \frac{X}{1+0{,}02\cdot 3} + \frac{X}{1+0{,}02\cdot 5}$$

$$12000 = \frac{X}{1{,}02} + \frac{X}{1{,}04} + \frac{X}{1{,}06} + \frac{X}{1{,}08} + \frac{X}{1{,}1}$$

$$12000 = X\cdot\left(\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}06} + \frac{1}{1{,}08} + \frac{1}{1{,}1}\right)$$

$$X = \frac{12000}{\frac{1}{1{,}02} + \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}06} + \frac{1}{1{,}08} + \frac{1}{1{,}1}}$$

$$\mathbf{X = 2.542{,}19}$$

Essa é a resposta caso seja feita a equivalência de capitais simples na **data zero** de comparação.

Fazendo os cinco cálculos nas Datas 1 a 5, tem-se a Tabela 6:

Tabela 6
Valor a parcela nas datas de zero a cinco

Data	Valor da parcela
0	R$ 2.542,19
1	R$ 2.544,04
2	R$ 2.544,17
3	R$ 2.543,02
4	R$ 2.540,98
5	R$ 2.538,46

Note que para datas de comparações diferentes, têm-se resultados diferentes. Crespo (2009, p. 108) diz que:

> No regime de juros simples, essa data de comparação deve ser a data zero, isto é, a data em que a dívida foi contraída; isto porque, neste regime, não podemos fracionar o prazo de aplicação, já que o juro é admitido como formado no fim do período de aplicação.

No caso acima, discorda-se da opinião de Crespo. Utilizando justificativa questionável, ele quis fazer uma convenção para evitar complicação com resultados diferentes para datas de comparações diferentes. Na prática, a verdade é que não há sentido algum fazer equivalência de capitais simples.

Em juros compostos, a data de comparação pode ser qualquer uma (CRESPO, 2009, p. 144), pois o resultado será sempre o mesmo. A seguir, há a resolução que utiliza a data zero por ser mais prática.

Resolução 3: Resolvendo por juros compostos (cotidiano), porém contrariando o comando.

Utilizaram-se as mesmas ideias e a Figura 7! O que mudará será a fórmula (e o resultado final é claro).

$$M = C(1+i)^n \Leftrightarrow C = \frac{M}{(1+i)^n}$$

$$12000 = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$$

$$12000 = \frac{M_1}{(1+i)^{n_1}} + \frac{M_2}{(1+i)^{n_2}} + \frac{M_3}{(1+i)^{n_3}} + \frac{M_4}{(1+i)^{n_4}} + \frac{M_5}{(1+i)^{n_5}}$$

$$12000 = \frac{X}{(1+0{,}02)^1} + \frac{X}{(1+0{,}02)^2} + \frac{X}{(1+0{,}02)^3} + \frac{X}{(1+0{,}02)^4} + \frac{X}{(1+0{,}02)^5}$$

$$12000 = \frac{X}{(1{,}02)^1} + \frac{X}{(1{,}02)^2} + \frac{X}{(1{,}02)^3} + \frac{X}{(1{,}02)^4} + \frac{X}{(1{,}02)^5}$$

$$X = \frac{12000}{\frac{1}{(1{,}02)^1} + \frac{1}{(1{,}02)^2} + \frac{1}{(1{,}02)^3} + \frac{1}{(1{,}02)^4} + \frac{1}{(1{,}02)^5}}$$

$$\mathbf{X = 2.545{,}90}$$

O cálculo acima poderia ser realizado rapidamente por uma calculadora financeira. Poder-se-ia também ter utilizado progressão geométrica ou fórmulas próprias de série de pagamentos.

A diferença pequena se deve ao fato de o período e a taxa de juros serem pequenos.

ANEXO – ÍNDICES DA POUPANÇA 2012

(*) "Nova poupança" (Medida provisória nº 567/12 de 03.05.2012)

	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUN*	JUL	JUL*	AGO	AGO*	SET	SET*	OUT	OUT*	NOV	NOV*	DEZ	DEZ*
01	0,5942	0,5868	0,5000	0,6073	0,5228	0,5470	-	0,5000	0,4828	0,5145	0,4973	0,5124	0,4675	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
02	0,5604	0,6407	0,5228	0,5622	0,5284	0,5868	-	0,5000	0,4828	0,5488	0,5316	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
03	0,5710	0,6269	0,5259	0,5631	0,5159	0,5539	-	0,5000	0,4828	0,5049	0,4877	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
04	0,6007	0,6161	0,5018	0,5895	0,5096	0,5146	0,5146	0,5101	0,4929	0,5562	0,5390	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
05	0,6329	0,5979	0,5018	0,6169	0,5106	0,5140	0,5140	0,5000	0,4828	0,5000	0,4828	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
06	0,6383	0,5570	0,5225	0,6273	0,5000	0,5357	0,5357	0,5000	0,4828	0,5000	0,4828	0,5237	0,4788	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
07	0,6274	0,5696	0,5032	0,5936	0,5000	0,5558	0,5558	0,5000	0,4828	0,5000	0,4828	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
08	0,6000	0,5887	0,5012	0,5585	0,5160	0,5381	0,5381	0,5000	0,4828	0,5034	0,4862	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
09	0,5690	0,6319	0,5280	0,5396	0,5561	0,5492	0,5492	0,5000	0,4828	0,5172	0,5000	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
10	0,5612	0,6365	0,5087	0,5291	0,5264	0,5000	0,5000	0,5076	0,4904	0,5213	0,5041	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134
11	0,5899	0,6084	0,5000	0,5537	0,5459	0,5083	0,5083	0,5447	0,5275	0,5144	0,4972	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
12	0,6393	0,5858	0,5000	0,5767	0,5228	0,5000	0,5000	0,5128	0,4956	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
13	0,6286	0,5823	0,5090	0,5882	0,5018	0,5221	0,5221	0,5195	0,5023	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
14	0,6302	0,5488	0,5215	0,5995	0,5000	0,5240	0,5240	0,5067	0,4895	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
15	0,6095	0,5770	0,5311	0,5522	0,5005	0,5222	0,5222	0,5000	0,4828	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
16	0,5654	0,6123	0,5070	0,5330	0,5218	0,5266	0,5266	0,5000	0,4828	0,5177	0,4728	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
17	0,5687	0,6264	0,5170	0,5494	0,5335	0,5120	0,5120	0,5000	0,4828	0,5016	0,4567	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
18	0,5877	0,6293	0,5000	0,5750	0,5232	0,5000	0,5000	0,5233	0,5061	0,5009	0,4560	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
19	0,6095	0,6152	0,5000	0,5888	0,5143	0,5000	0,5000	0,5123	0,4951	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
20	0,6327	0,5720	0,5247	0,5885	0,5000	0,5173	0,5173	0,5125	0,4953	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
21	0,6055	0,5252	0,5509	0,5914	0,5000	0,5464	0,5464	0,5000	0,4828	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
22	0,5937	0,5252	0,5735	0,5569	0,5000	0,5053	0,5053	0,5000	0,4828	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
23	0,5627	0,5752	0,5556	0,5284	0,5201	0,5318	0,5318	0,5000	0,4828	0,5216	0,4767	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
24	0,5708	0,5822	0,5862	0,5337	0,5173	0,5000	0,5000	0,5000	0,4828	0,5182	0,4733	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
25	0,6003	0,5576	0,5575	0,5584	0,5346	0,5000	0,5000	0,5226	0,5054	0,5233	0,4784	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
26	0,6287	0,5365	0,5575	0,5889	0,5141	0,5000	0,5000	0,5161	0,4989	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
27	0,6261	0,5087	0,5836	0,5810	0,5197	0,5059	0,5059	0,5000	0,4828	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
28	0,6292	0,5223	0,5819	0,6112	0,5000	0,5230	0,5230	0,5000	0,4828	0,5000	0,4551	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
29	0,5868	0,5000	0,6073	0,5228	0,5470	0,5000	0,4828	0,5145	0,4973	0,5124	0,4675	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
30	0,5868		0,6073	0,5228	0,5470	0,5000	0,4828	0,5145	0,4973	0,5124	0,4675	0,5000	0,4551	0,5000	0,4273	0,5000	0,4134	0,5000	0,4134
31	0,5868		0,6073		0,5470			0,5145	0,4973	0,5124	0,4675			0,5000	0,4273			0,5000	0,4134

FONTE: http://www4.bcb.gov.br/pec/poupanca/poupanca.asp