

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Daniela Roberta de Sousa Oliveira Jesus

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana

Agosto de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS EXATAS

PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

LOGARITMOS: UMA ABORDAGEM GEOMÉTRICA

Daniela Roberta de Sousa Oliveira Jesus

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Jean Fernandes Barros

Feira de Santana
05 de Agosto de 2016

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado

J561 Jesus, Daniela Roberta de Sousa Oliveira
Logaritmos: uma abordagem geométrica. / Daniela Roberta
de Sousa Oliveira Jesus. - Feira de Santana, 2016.
44 f.: il.

Orientador: Jean Fernandes Barros.

Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de
Feira de Santana, Departamento de Ciências Exatas, 2016

1. Função logaritmica 2. Função exponencial. 3. Logaritmo natural. 4.
Número de Euler. I. Barros, Jean Fernandes. II. Universidade
Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:518



ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA DISCENTE DANIELA ROBERTA DE SOUSA OLIVEIRA JESUS DO PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Aos dezoito dias do mês de agosto de dois mil e dezesseis às 9:00 horas no MT67 - Módulo 6, UEFS, ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título "Logaritmos: uma abordagem geométrica", da discente Daniela Roberta de Sousa Oliveira Jesus, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Jean Fernandes Barros (Orientador, UEFS), Jarbas Alves Fernandes (UFRB) (participação não presencial conforme Resolução CONSEPE 058/2015) e Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS). A sessão de defesa teve início com apresentação do trabalho pela discente. Em seguida, foi realizada a leitura do parecer do Prof. Jarbas Alves Fernandes e as arguições dos demais examinadores. Prosseguindo com os trabalhos, os professores Jean Fernandes Barros e Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas se reuniram em sessão secreta para julgamento final do trabalho e levando em consideração o parecer do Prof. Jarbas Alves Fernandes, que foi conclusivo pela aprovação da dissertação, atribuíram o conceito APROVADO. Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 18 de agosto de 2016.

Prof. Dr. Jean Fernandes Barros (UEFS)
Orientador

Prof. Me. Jarbas Alves Fernandes (UFRB)

Prof. Me. Cristiano Henrique de Oliveira Mascarenhas (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Mauricio de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente e imensamente, a Deus por tornar possível esse sonho, e por ter sido meu sustentáculo em todos os momentos de adversidade, principalmente, durante a escrita desse trabalho.

À minha família, em especial a minha mãe por todas as orações, carinho, cuidado e por desempenhar de forma brilhante sua função de avó. Ao meu amado, por todo apoio, incentivo e palavras de carinho. Às minhas filhas, Lorena e Samantha, que vinheram ao mundo cinco meses antes da aprovação na seleção do mestrado, e que hoje são: o brilho dos meus olhos, minha alegria de viver, meu incentivo pra continuar progredindo e a minha fonte inesgotável de carinho e amor.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Jean Fernandes Barros, pela paciência, disponibilidade, compreensão, palavras de incentivo e por me fazer acreditar que eu seria capaz. Obrigada por me permitir enxergar o quão bonito é o seu lado humano, acima de títulos e posição que ocupas, já era admiradora do seu trabalho desde o ensino médio, ocasião em que fostes meu professor. Que Deus o abençoe sempre.

A CAPES pelo apoio financeiro.

A todo corpo docente do PROFMAT - UEFS, pela dedicação nas aulas, empenho para sanar dúvidas e palavras de incentivo.

Aos colegas de Mestrado, em especial, a meus companheiros de estudo aos domingos, Carolina Oliveira, minha irmã e amiga, Joseane Sousa, minha companheira desde a graduação, e Ernesto Neiva, sem vocês o meu desempenho não seria o mesmo.

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre logaritmos de um ponto de vista geométrico. Iniciamos com uma breve abordagem histórica dos logaritmos e sua importância nos dias atuais. Na sequência, definimos a função logarítmica, e mostramos sua bijetividade. A partir disto, mostramos e caracterizamos sua inversa, a função exponencial. Depois, estudamos a área da faixa de uma hipérbole, utilizando aproximações por falta, por aproximação feita através de polígonos retangulares inscritos e de trapézios tangentes, e além de aproximações por excesso, feita através de trapézios secantes. Em seguida, definimos a função logarítmica natural, que tem por base o número de Euler, como a área de uma faixa de hipérbole. Também, nós nos preocupamos em definir o número de Euler de forma clássica. Para finalizar, destacamos algumas aplicações tradicionais das funções logarítmicas.

Palavras-chave: Função logarítmica, função exponencial, logaritmo natural, número de Euler.

Abstract

In this work, we study logarithms from a geometric point of view. We begin with a short historical approach of logarithms and its importance nowadays. After, we define the logarithmic function, and we show that it is a bijection. So, we define and characterize its inverse function, i.e., the exponential function. Next, we measure the area of the region $\mathcal{H}_a^b = \left\{ (x, y) : x > 0 \text{ and } 0 \leq y \leq \frac{1}{x} \right\}$, where $0 < a < b$, using approximations for failure, it made by subscribers rectangular polygons and tangents trapezoids, and beyond approximations by excess, it made by secant trapezoids. And then, we define the natural logarithm of $x > 0$, whose base is the number of Euler, as area of the set \mathcal{H}_1^x . Too, we show the classical definition of the number of Euler. Finally, we emphasize some traditional applications of logarithmic functions.

Keywords: logarithmic function, exponential function, natural logarithm, Euler number.

Sumário

Agradecimentos	iii
Resumo	iv
Abstract	v
Sumário	vi
Introdução	1
1 Abordagem histórica	3
2 Função logarítmica e função exponencial	6
3 Área de uma Faixa de Hipérbole	14
3.1 Aproximação por Retângulos Inscritos	14
3.2 Aproximação por trapézios	19
4 O Logaritmo Natural	24
4.1 A Inversa	27
4.2 Novamente, o número de Euler	28
5 Aplicações	31
6 Considerações Finais	36
Referências Bibliográficas	37

Introdução

Este trabalho, propõe fazer um estudo sobre logaritmos de uma maneira diferenciada, da que habitualmente encontramos na literatura. O que propomos é abordar os logaritmos de um ponto de vista geométrico.

No primeiro capítulo, apresentamos um breve histórico dos logaritmos, expondo seus principais precursores, a importância da descoberta e a divulgação do estudo para o mundo, como uma ferramenta facilitadora de cálculos exaustivos e complexos. Também, neste ponto evidenciamos a sua importância e aplicabilidade nos dias atuais.

No segundo capítulo, definimos o que seja uma função logarítmica. A partir desta definição, mostramos que uma função logarítmica é bijetiva. Além disso, mostramos que duas funções logarítmicas diferem por um factor constante positivo. Isto, mostra-nos que, para estudar logaritmo, basta-nos escolher uma base conveniente. E, explicitamente, dispomos de uma fórmula de mudança de base. Da bijetividade da função logarítmica, definimos a função exponencial como sua inversa. E então, caracterizamos a função exponencial como uma função crescente que transforma adição em multiplicação.

No terceiro capítulo, definimos a área de uma faixa de hipérbole no intervalo $[a, b]$, com $0 < a < b$, indicada por \mathcal{H}_a^b , utilizando aproximações por falta do polígono retangular inscrito associado a uma dada partição de $[a, b]$. Observamos que uma tal aproximação é tanto melhor quanto mais fina é a partição utilizada, o que torna o erro cometido cada vez menor. Na sequência, mostramos que é possível, também, utilizar trapézios tangentes ou trapézios secantes para calcular aproximações, respectivamente, por falta e por excesso, da área de uma faixa de hipérbole. E mostramos que a aproximação trapezoidal tangente é melhor do que a aproximação trapezoidal secante. Finalizamos o capítulo, demonstrando que, dado $k > 0$, a área de \mathcal{H}_a^b é igual a de \mathcal{H}_{ka}^{kb} . Disto, segue-se que a área de $\mathcal{H}_1^{\frac{b}{a}}$ é igual a área de \mathcal{H}_a^b .

No penúltimo capítulo, definimos a função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, onde \mathbb{R}^+ indica o conjunto dos números reais positivos, por $\ln x = \mathcal{A}_1^x$, em que \mathcal{A}_1^x denota a área de \mathcal{H}_1^x . Para tanto, convencionamos que $\mathcal{A}_a^a = 0$ e $\mathcal{A}_a^b = \mathcal{A}_b^a$. A partir daí, mostramos que \ln é uma função logarítmica, denominada de logaritmo natural, cuja base é denotado por e , e denominado o número de Euler. Além disso, mostramos que \ln é contínua e côncava. E assim, ob-

temos informações suficientes para descrever o gráfico de \ln . A sua inversa, uma função exponencial, cujo valor em um número real x é denotado por e^x . No final do capítulo, estabelecemos a definição clássica do número de Euler.

No último capítulo, abordamos as situações clássicas, presentes em diversas áreas do conhecimento, nas quais é essencial a aplicação dos logaritmos em suas resoluções, fazendo assim uma ponte entre a teoria e a prática.

Capítulo 1

Abordagem histórica

Para este capítulo, usamos como referência os livros [1, 2].

Os logaritmos surgiram no início do século XVII, como uma das mais notáveis contribuições deixadas por John Napier (1550-1617). Em [1], afirma-se que, “Napier conta que trabalhou em sua invenção dos logaritmos durante vinte anos antes de publicar seus resultados”, e anunciou sua abordagem dos logaritmos em 1614 num texto que tem por título *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos), que continha uma tábua que dá os logaritmos dos senos de ângulos para minutos sucessivos de arcos. Sua descrição provocou interesse imediato em Henry Briggs (1561-1631), professor de Geometria do Gresham College de Londres, e posteriormente professor de Oxford, que em visita a Napier definiram que as tábuas seriam mais úteis se o logaritmo de 1 fosse 0 e o logaritmo de 10 fosse uma potência conveniente de 10, nascendo assim os logaritmos dos dias de hoje. A princípio, Napier utilizou como expressão para os logaritmos o termo *número artificial*, mas, depois resolveu utilizar a palavra *logaritmo* que significa “número de razão”. Sua maravilhosa invenção foi de imediato adotada por toda Europa, pois, permitia reduzir os extensos e trabalhosos cálculos aritméticos da Astronomia e Navegação, o que se verifica na fala de Laplace ao afirmar que a invenção dos logaritmos “ao diminuir o trabalho, aumentou a vida dos astrônomos”.



Figura 1.1: John Napier e Henry Briggs

Figuras disponíveis em Funções Exponenciais e Logarítmicas. INMA/UFMS



Figura 1.2: Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio

No ano de 1620 Jobst Bürgi (1552-1632), um construtor de instrumentos, construiu uma tábua de logaritmos e publicou sua descoberta ao mundo. O diferencial entre a divulgação feita pelos dois era que, enquanto a tábua de Napier tinha aplicabilidade geométrica, a dele era de aplicabilidade algébrica. Inicialmente, as tábuas logarítmicas foram criadas com o objetivo de reduzir operações mais complexas em operações mais acessíveis. De acordo com [2], “o poder ds logaritmos como instrumento de cálculo repousa no fato de que eles reduzem multiplicações e divisões a simples operações de adição e subtração”. As tábuas consistiam em uma tabela com duas colunas, onde cada número a esquerda correspondia a seu logaritmo na coluna da direita. A essa correspondência, damos, hoje em dia, o nome de função, que é um conceito posterior a invenção dos logaritmos. Essa descoberta foi de fundamental importância para o desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia. Após a criação das calculadoras, a tábua de logaritmos, assim como diversas outras tabelas matemáticas, perderam seu interesse, porém, o estudo dos logaritmos ainda mantém sua substancial relevância. De acordo com [5], “é através da função logarítmica e sua inversa, a função exponencial, que podemos determinar a evolução de uma grandeza cujas taxas de crescimento (decréscimo), são proporcionais à quantidade daquela grandeza existente num dado momento”.



Figura 1.3: Jobst Bürgi

NÚMEROS	LOGARITMOS
...	...
36	1,5563
37	1,5682
38	1,5798
...	...
64	1,8062
65	1,8129
66	1,8195
...	...
2404	3,3809
2405	3,3811
2406	3,3813

Figura 1.4: Parte de uma tabela de logaritmos

Ainda hoje, vemos a importância da utilização dos logaritmos em diversas áreas de estudo, tais como:

- Matemática Financeira - cálculos de juros bancários;
- Geografia - taxa de crescimento populacional;
- Biologia - cultura de bacilos;
- Sismos - magnitude dum tremor de terra;
- Química - tempo de desintegração de uma substância radioativa, entre outras.

Por uma aplicabilidade tão ampla, ainda se faz necessário, desde o ensino médio, o estudo dos logaritmos. Assim sendo, nos próximos capítulos iremos descrever uma forma, diferente da tradicionalmente utilizada, de abordá-los, como um novo incentivo para o seu ensino-aprendizagem.

Capítulo 2

Função logarítmica e função exponencial

Neste capítulo, faremos uma abordagem sobre a função logarítmica e sua inversa, a função exponencial. Para este capítulo utilizamos como referências [5, 6, 7].

Preliminarmente, lembremos o seguinte axioma:

Axioma 2.1. A menos de isomorfismo, existe um único corpo ordenado completo, denominado de o Corpo dos Números Reais, \mathbb{R} .

Sabe-se que todo corpo ordenado completo é *arquimediano*, observe a definição a seguir,

Definição 2.2. Um corpo ordenado \mathbb{K} é arquimediano se, uma das seguintes condições é satisfeita:

- o conjunto dos números naturais, \mathbb{N} , é ilimitado superiormente em \mathbb{K} ;
- dados $a, b \in \mathbb{K}$, com $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot a > b$;
- dado qualquer $a > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < \frac{1}{n} < a.$$

A seguir, várias passagens serão justificadas por estas considerações.

Definição 2.3. Uma função $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, onde \mathbb{R}^+ indica o conjunto dos números reais positivos, é dita uma função logarítmica se,

1. L é uma função crescente, isto é, se $x < y$, então $L(x) < L(y)$;
2. $L(xy) = L(x) + L(y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Para o que se segue, dado $x \in \mathbb{R}^+$, denominamos $L(x)$ de o logaritmo de x . A seguir, vejamos as principais consequências da definição anterior.

Proposição 2.4. *Uma função logarítmica $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é sempre injetiva, isto é, números positivos diferentes têm logaritmos diferentes.*

Demonstração. Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$, para $x \neq y$, digamos, $x < y$, por (1), temos que

$$L(x) < L(y).$$

Logo, L é injetiva. □

Proposição 2.5. *O logaritmo de 1 é zero.*

Demonstração. Por (2), temos que $L(1) = L(1 \cdot 1) = L(1) + L(1)$. Desta forma,

$$L(1) = 0.$$

□

Proposição 2.6. *Os números maiores do que 1 têm logaritmos positivos e os números positivos menores do que 1 têm logaritmos negativos.*

Demonstração. Inicialmente, consideremos $x > 1$. Então, por (1), temos que $L(x) > L(1) = 0$. Logo, para $L(x) > 0$, para todo $x > 1$. Agora, para $0 < x < 1$, novamente por (1), temos que $L(x) < L(1) = 0$. □

Proposição 2.7. *Para todo $x > 0$, tem-se que*

$$L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x).$$

Demonstração. Dado $x \in \mathbb{R}^+$, por (2), temos que

$$0 = L(1) = L\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{x}\right).$$

Disto, segue-se que $L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x)$. □

Proposição 2.8. *Dados $x, y \in \mathbb{R}^+$,*

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

Demonstração. Por (2) e proposição 2.7, temos que

$$L\left(\frac{x}{y}\right) = L\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = L(x) + L\left(\frac{1}{y}\right) = L(x) - L(y).$$

□

Proposição 2.9. Para todo $x \in \mathbb{R}^+$ e para todo número racional r , tem-se que

$$L(x^r) = r \cdot L(x).$$

Demonstração. Inicialmente, mostremos que $L(x^n) = n \cdot L(x)$, para todo número natural n . Mostremos por indução sobre n . Se $n = 1$, é imediato. Suponhamos, por hipótese de indução, que $L(x^n) = n \cdot L(x)$. Agora, por (2),

$$L(x^{n+1}) = L(x^n \cdot x) = L(x^n) + L(x) = n \cdot L(x) + L(x) = (n+1)L(x).$$

Sendo assim, mostramos que $L(x^n) = n \cdot L(x)$, para todo número natural n . A seguir, mostremos que $L(x^p) = p \cdot L(x)$, para todo número inteiro não positivo p . Bem, se $p = 0$, temos que $L(x^0) = L(1) = 0 = 0 \cdot L(x)$. Para $p < 0$, pela proposição 2.7, e usando o resultado para números naturais, temos que

$$L(x^p) = L\left(\frac{1}{x^{-p}}\right) = -L(x^{-p}) = -[(-p) \cdot L(x)] = [-(-p)] \cdot L(x) = p \cdot L(x).$$

Finalmente, mostraremos o resultado para um número racional qualquer r , digamos, $r = \frac{p}{q}$, para p e q números inteiros, com $q \neq 0$. Vejamos,

$$p \cdot L(x) = L(x^p) = L([x^{\frac{p}{q}}]^q) = q \cdot L(x^{\frac{p}{q}}) = q \cdot L(x^r).$$

Logo,

$$L(x^r) = \frac{p}{q} \cdot L(x) = r \cdot L(x),$$

como queríamos □

Proposição 2.10. Uma função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é ilimitada, superior e inferiormente.

Demonstração. Inicialmente, mostremos que L é ilimitada superiormente. Dado $\beta \in \mathbb{R}$, devemos mostrar que existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > \beta$. Pela propriedade arquimediana dos números reais, existe um número natural n tal que $n > \frac{\beta}{L(2)}$. Sendo assim, tomando $x = 2^n$, temos que

$$L(2^n) = n \cdot L(2) > \beta.$$

Agora, mostremos que L é ilimitada inferiormente. Vejamos, dado $\alpha \in \mathbb{R}$, pela primeira parte, existe $x \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(x) > -\alpha$. Sendo assim, tomando $y = \frac{1}{x}$, temos que

$$L(y) = L\left(\frac{1}{x}\right) = -L(x) < \alpha.$$

Logo, L é ilimitada inferiormente. □

Observação 2.11. Uma função logarítmica L não pode ser definida para $x = 0$, pois, isto é contrário à injetividade de L . De fato, usando (1), para todo $x \geq 0$, temos que

$$L(0) = L(x \cdot 0) = L(x) + L(0).$$

Logo, $L(x) = 0$, para todo $x \geq 0$.

É imediato que se $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função logarítmica, dado $c \in \mathbb{R}^+$, temos que a função $M = c \cdot L$ é, também, uma função logarítmica. O próximo resultado, diz-nos que, dadas duas funções logarítmicas, uma é um múltiplo escalar positivo da outra. Mais precisamente,

Teorema 2.12. *Sejam L e M duas funções logarítmicas. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que $M = c \cdot L$.*

Demonstração. Inicialmente, suponhamos que exista $a > 1$ tal que $L(a) = M(a)$. Neste caso, mostraremos que $L = M$. Vejamos, dado r número racional, temos que

$$L(a^r) = r \cdot L(a) = r \cdot M(a) = M(a^r).$$

Agora, por absurdo, suponhamos que existe $b > 0$ tal que $L(b) \neq M(b)$. Sem perda de generalidade, consideremos que $L(b) < M(b)$. Pela propriedade arquimediana, existe um número natural n tal que

$$n > \frac{L(a)}{M(b) - L(b)}.$$

Lembremos que, como $a > 1$, $L(a) > L(1) = 0$. Sendo assim,

$$L(a^{\frac{1}{n}}) = \frac{1}{n} \cdot L(a) < M(b) - L(b).$$

Considerando $c = L(a^{\frac{1}{n}}) = M(a^{\frac{1}{n}}) > 0$, podemos particionar \mathbb{R}^+ em intervalos de comprimento c . Bem, como $c < M(b) - L(b)$, existe um número natural m tal que $m \cdot c \in (L(b), M(b))$, pois, caso contrário, para todo m , temos que $(L(b), M(b)) \subset [m \cdot c, (m+1) \cdot c]$. E assim,

$$c = (m+1) \cdot c - m \cdot c \geq M(b) - L(b),$$

absurdo! Logo,

$$L(b) < m \cdot L(a^{\frac{1}{n}}) = L(a^{\frac{m}{n}}) = M(a^{\frac{m}{n}}) = m \cdot M(a^{\frac{1}{n}}) < M(b).$$

Pelo fato de L ser crescente, da desigualdade $L(b) < L(a^{\frac{m}{n}})$, tem-se que $b < a^{\frac{m}{n}}$. Da desigualdade $M(a^{\frac{m}{n}}) < M(b)$, usando o fato de M ser crescente, tem-se que $a^{\frac{m}{n}} < b$, o que é uma contradição. Esta contradição mostra que $M = L$.

Passemos a mostrar o caso geral. Observemos que $L(2) > 0$ e $M(2) > 0$. Sendo assim, definindo $c = \frac{M(2)}{L(2)} > 0$, e considerando a função logarítmica $N = c \cdot L$, temos que $N(2) = c \cdot L(2) = M(2)$. Pela primeira parte, concluímos que $N = M$, isto é, $M = c \cdot L$. \square

O próximo teorema mostra-nos que toda função logarítmica admite inversa. Mais precisamente,

Teorema 2.13. *Toda função logarítmica é sobrejetiva.*

Demonstração. Preliminarmente, mostraremos o seguinte resultado

Lema 2.14. *Seja $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função logarítmica. Dados arbitrariamente dois números reais $u < v$, existe $x > 0$ tal que $u < L(x) < v$.*

Demonstração. Pela propriedade arquimediana dos reais, existe um número natural n tal que $n > \frac{v-u}{L(2)}$. Consideremos $c = \frac{L(2)}{n} > 0$. Sendo assim, podemos particionar \mathbb{R}^+ em intervalos de comprimentos c . Como vimos acima, existe um número natural m tal que $m \cdot c \in (u, v)$. Desta forma, tomando $x = 2^{\frac{m}{n}}$, temos que

$$u < m \cdot c = m \cdot \frac{L(2)}{n} = \frac{m}{n} \cdot L(2) = L(2^{\frac{m}{n}}) = L(x) < v.$$

□

Nesta altura, lembramos que todo número real α admite uma representação decimal, digamos,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n \cdots = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n} + \cdots,$$

onde α_0 é um número inteiro e os α_n 's variam em $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$.

Para cada $n \geq 0$, consideremos

$$\alpha_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{10^n}.$$

Sendo assim, $0 < \alpha - \alpha_n < \frac{1}{10^n}$, para todo $n \geq 0$. Agora, observemos que se um número real x é menor do que α , então existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $x < \alpha_n$. Mostremos isto, como $x < \alpha$, pela propriedade arquimediana dos reais, em uma formulação equivalente àquela que vimos trabalhando, que o conjunto dos números naturais é ilimitado superiormente no conjunto dos números reais, existe um natural n tal que $\frac{1}{10^n} < \alpha - x$. Desta forma,

$$\alpha - \alpha_n = \frac{\alpha_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{\alpha_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots < \frac{1}{10^n} < \alpha - x.$$

Disto, segue-se que $x < \alpha_n$. Finalmente, mostremos que, dada uma função logarítmica, digamos, L , ela é sobrejetiva, isto é, dado $b \in \mathbb{R}$, existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que $L(\alpha) = b$. Para obtermos α , determinaremos cada um dos elementos de sua representação decimal. Este método é a versão moderna do “Método do Elemento Celestial”. Para estabelecermos a parte inteira α_0 , usamos o fato de L ser ilimitada superiormente. Com isso, dado um número real b , devem existir inteiros m tais que $L(m) > b$. Seja $\alpha_0 + 1$ o menor inteiro

positivo, tal que $L(\alpha_0 + 1) > b$, assim $L(\alpha_0) \leq b$. Observando que $L(\alpha_0) \leq b < L(\alpha_0 + 1)$, temos que existe um elemento α_1 em $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tal que

$$L\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10}\right) \leq b < L\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1 + 1}{10}\right).$$

Da mesma forma, existe um elemento α_2 em $\{0, 1, 2, \dots, 9\}$ tal que

$$L\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2}\right) \leq b < L\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2 + 1}{10^2}\right).$$

Procedendo desta forma, chegamos a um número real positivo α , cuja representação decimal é

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots,$$

tal que

$$L\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n}\right) \leq b < L\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}\right).$$

Afirmamos que $L(\alpha) = b$. Vejamos, suponhamos por absurdo, que $L(\alpha) < b$. O lema acima, mostra que existe $x > 0$ tal que $L(\alpha) < L(x) < b$. Como L é crescente, segue-se que $\alpha < x$. Da propriedade arquimediana, existe um número natural n tal que

$$\frac{1}{10^n} < x - \alpha.$$

Logo,

$$A_n + \frac{1}{10^n} \leq \alpha + \frac{1}{10^n} < x,$$

onde

$$A_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Como L é crescente, e da construção dos α_n 's, temos que

$$L(x) > L\left(A_n + \frac{1}{10^n}\right) > b,$$

o que contraria a hipótese de que $L(x) < b$. O outro caso, em que $L(\alpha) > b$, leva-nos a uma contradição. Bem, novamente, pelo lema, existe $x > 0$ tal que

$$b < L(x) < L(\alpha).$$

Do fato de L ser crescente, temos que $x < \alpha$. Isto implica que existe um número natural n tal que $x < A_n$. Donde, como antes,

$$L(x) < L(A_n) < b,$$

absurdo. Portanto, $L(\alpha) = b$, como queríamos demonstrar. \square

Como anunciamos acima, o teorema que acabamos de demonstrar, mostra que toda função logarítmica admite inversa. Segue o seguinte corolário,

Corolário 2.15. *Toda função logarítmica $L : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência biunívoca (bijeção) entre \mathbb{R}^+ e \mathbb{R} .*

Do corolário, segue-se que, dada uma função logarítmica L , existe um único número real positivo a tal que $L(a) = 1$. O número a é dito *a base do sistema de logaritmos L* . Para deixar a base explícita podemos, ao invés de escrever $L(x)$, escrever $L_a(x)$.

Observação 2.16. Nos livros didáticos, quando se define o logaritmo de x na base a , impõem-se as condições $x > 0$ e $0 < a \neq 1$. Bem, pelo visto até aqui, o fato de que $L(1) = 0$, independente da base, torna desnecessário supor que $a \neq 1$.

Dessa forma, dadas duas funções logarítmicas, digamos, L_a e L_b , de bases a e b , respectivamente. O teorema 2.12, mostra-nos que existe uma constante $c > 0$ tal que $L_b = c \cdot L_a$. Tomando $x = a$, temos que $L_b(a) = c \cdot L_a(a) = c$. Isto leva-nos à *Fórmula de Mudança de Base de Logaritmos*, qual seja,

$$L_b = L_b(a) \cdot L_a.$$

Definição 2.17. A bijeção $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é dita uma função exponencial se, sua inversa é uma função logarítmica.

A proposição abaixo, caracteriza uma função exponencial.

Teorema 2.18. *A bijeção $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função exponencial se, e somente se, satisfaz as seguintes propriedades:*

- i) E é crescente;*
- ii) Para todos os números reais x e y , $E(x + y) = E(x) \cdot E(y)$.*

Antes de passarmos à demonstração do teorema acima, mostremos uma importante consequência da propriedade ii) acima.

Proposição 2.19. *Seja $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a propriedade ii) acima. Se existe um número real b tal que $E(b) = 0$, então $E \equiv 0$. E mais, se $E \not\equiv 0$, então $E > 0$.*

Demonstração. Para a primeira parte, se existe um número real b tal que $E(b) = 0$, então, para todo número real x , temos que

$$E(x) = E(b + (x - b)) = E(b) \cdot E(x - b) = 0 \cdot E(x - b) = 0.$$

Logo, $E \equiv 0$.

Para a segunda parte, suponhamos que E não seja identicamente nula. Observemos que, dado um número real x ,

$$E(x) = E\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[E\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0.$$

Como E não é identicamente nula, pela primeira parte, $E(x) \neq 0$, para todo número real x . Logo, $E(x) > 0$, para todo número real x , isto é, $E > 0$. □

Observação 2.20. A demonstração da proposição, mostra-nos que se uma função $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a segunda propriedade, temos que sua imagem está contida em \mathbb{R}^+ .

Agora, passemos a demonstração do teorema. Vejamos, que as condições são necessárias. Suponhamos que E seja uma função exponencial, cuja inversa é a função logarítmica L . Para a propriedade i), dados os números reais x e y , com $x < y$, devemos mostrar que $E(x) < E(y)$. Da sobrejetividade de L , existem os números reais positivos u e v tais que $L(u) = x$ e $L(v) = y$. Como L é crescente, temos que $u < v$. Logo,

$$E(x) = E(L(u)) = u < v = E(L(v)) = E(y).$$

Portanto, E é crescente.

Para a segunda propriedade, sejam x , y , u e v como acima. Então,

$$E(x + y) = E(L(u) + L(v)) = E(L(u \cdot v)) = u \cdot v = E(x) \cdot E(y).$$

Logo, E satisfaz as propriedades acima. Portanto, são necessárias. Mostremos que tais propriedades são suficientes. Seja L a inversa de E . Primeiramente, afirmamos que L é crescente. Dados os números reais positivos u e v , com $u < v$, da sobrejetividade de E , existem números reais x e y tais que $E(x) = u$ e $E(y) = v$. Como E é crescente e $u < v$, temos que $x < y$. Logo,

$$L(u) = L(E(x)) = x < y = L(E(y)) = L(v).$$

Portanto, L é crescente, que é a primeira condição para que uma função seja logarítmica.

Para a segunda condição da definição de uma função logarítmica, sejam u , v , x e y como acima. Então,

$$L(u \cdot v) = L(E(x) \cdot E(y)) = L(E(x + y)) = x + y = L(u) + L(v).$$

E assim, L é uma função logarítmica, cuja inversa é E . Portanto, E é uma função exponencial, como queríamos demonstrar.

Observação 2.21. Na realidade, como acima, podemos mostrar que a inversa de uma função monótona é uma função monótona de mesmo tipo. Por exemplo, acima, mostramos que a inversa de uma função crescente é crescente.

Capítulo 3

Área de uma Faixa de Hipérbole

A partir deste momento, a intenção é definir o logaritmo do ponto de vista geométrico. Para tanto, utilizamos como referências [4, 5, 6].

3.1 Aproximação por Retângulos Inscritos

Partimos de um sistema retangular, ou cartesiano, de coordenadas no plano. Sendo assim, cada ponto do plano pode ser indicado pelo par ordenado (x, y) de números reais, onde a coordenada x é dita a *abscissa* do ponto (x, y) , e a coordenada y é dita a *ordenada* do ponto (x, y) .

Seja a função $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$. Observemos que de acordo com [4], “uma função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in \mathbb{X} \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0; x \in \mathbb{X}, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$ ”. Daí,

Proposição 3.1. *A função f é uma função contínua.*

Demonstração. Dados $x_0 > 0$ e $\epsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, tem-se que

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \epsilon.$$

Basta tomarmos $\delta = \min \left\{ \frac{x_0}{2}, \frac{x_0^2}{2} \cdot \epsilon \right\}$. De fato,

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0} < \frac{2}{x_0^2} \delta \leq \frac{2}{x_0^2} \cdot \frac{x_0^2}{2} \cdot \epsilon = \epsilon.$$

Logo, f é contínua em x_0 . Portanto, f é contínua. □

Considerando \mathcal{H} como o gráfico da função f , isto é, \mathcal{H} é o conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y = \frac{1}{x} \right\}.$$

Geometricamente, \mathcal{H} é o ramo positivo da hipérbole $xy = 1$.

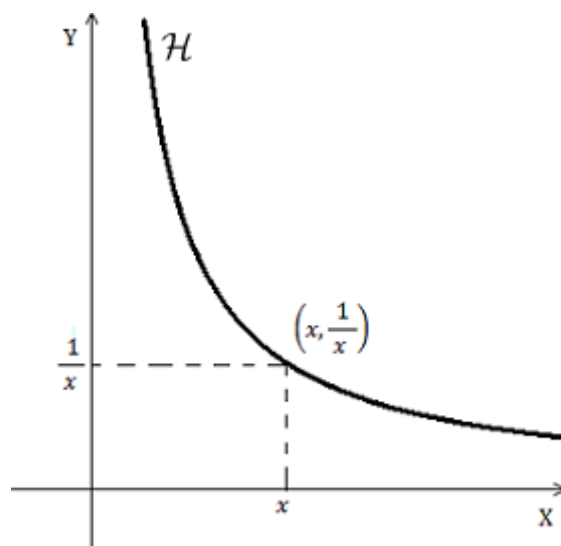


Figura 3.1: Gráfico 1

Observação 3.2. Observando que, dados a e x números reais positivos, temos que

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right) \cdot \frac{1}{x-a} = \left(\frac{a-x}{ax}\right) \cdot \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{ax}.$$

Fazendo x aproximar-se de a tanto quanto se queira, e usando a continuidade de f , concluímos que as retas secantes ao gráfico de f nos pontos $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ e $\left(x, \frac{1}{x}\right)$ tendem à reta tangente ao gráfico de f que passa pelo ponto $\left(a, \frac{1}{a}\right)$, de coeficiente angular $-\frac{1}{a^2}$. Sendo assim, dado $a > 0$, a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ tem equação

$$y = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}.$$

A seguir, apresentamos a definição

Definição 3.3. Uma faixa de hipérbole entre a e b , indicada por \mathcal{H}_a^b , com $0 < a < b$, é a região planar limitada pelas retas verticais, $x = a$ e $x = b$, a reta horizontal $y = 0$, o eixo das abscissas, e o conjunto \mathcal{H} .

Vejamos, como definir a área de uma faixa de hipérbole, veja a figura 3.2. Para tanto, precisamos da seguinte definição:

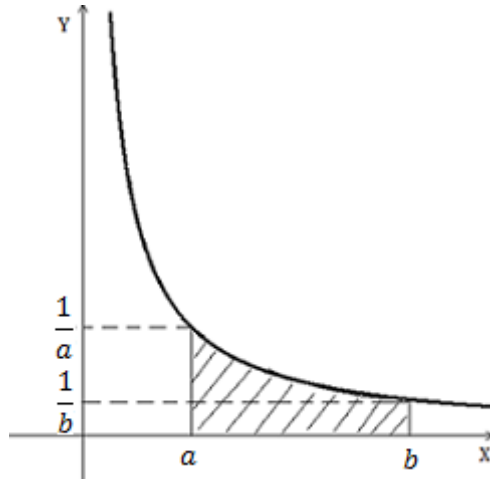


Figura 3.2: Faixa \mathcal{H}_a^b

Definição 3.4. Uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$ é um conjunto finito de pontos do intervalo $[a, b]$, digamos, $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$, onde $t_0 = a$ e $t_n = b$. Neste caso, denotamos a partição \mathcal{P} por

$$\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Dada a partição $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$, consideramos o retângulo cuja base é o i -ésimo intervalo da partição \mathcal{P} , $[t_{i-1}, t_i]$, e de altura $\frac{1}{t_i}$, que denominamos de o i -ésimo retângulo inscrito na faixa \mathcal{H}_a^b , veja a figura 3.3. A união destes retângulos inscritos é o que denominamos de o *polígono retangular inscrito associado à \mathcal{P}* da faixa de hipérbole \mathcal{H}_a^b , e a sua área, denotada por $s(f, \mathcal{P})$, é uma aproximação por falta da área da faixa. Explicitamente,

$$s(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{t_1} \cdot (t_1 - a) + \frac{1}{t_2} \cdot (t_2 - t_1) + \dots + \frac{1}{t_n} \cdot (b - t_{n-1}).$$

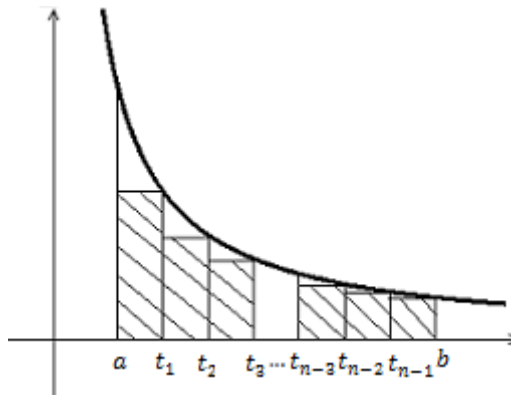


Figura 3.3: Polígono retangular inscrito na faixa \mathcal{H}_a^b

O exemplo abaixo, mostra-nos como calcular a área de um polígono retangular inscrito.

Exemplo 3.5. Consideramos a decomposição do intervalo $[2, 3]$, em cinco partes iguais. E então, calculemos uma aproximação por falta da área da faixa de hipérbole \mathcal{H}_2^3 . A decomposição corresponde à partição

$$\mathcal{P} : t_0 = 2 < t_1 = \frac{11}{5} < t_2 = \frac{12}{5} < t_3 = \frac{13}{5} < t_4 = \frac{14}{5} < t_6 = 3.$$

A área do polígono retangular inscrito associado à \mathcal{P} é igual a

$$s(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{11} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{12} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{14} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{23379}{60060}.$$

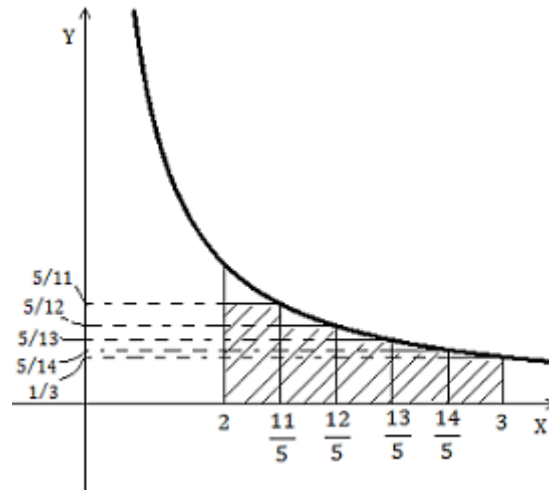


Figura 3.4: Aproximação para a área \mathcal{H}_2^3

Observemos que a função f é decrescente, pois, se $0 < x < y$, então

$$f(x) = \frac{1}{x} > \frac{1}{y} = f(y).$$

Para o que se segue, dadas duas partições, digamos, \mathcal{P} e \mathcal{Q} , dizemos que \mathcal{Q} refina \mathcal{P} se, $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Proposição 3.6. Se \mathcal{Q} refina \mathcal{P} , então a área do polígono retangular inscrito associado à \mathcal{Q} não é menor do que a área do polígono retangular inscrito associado à \mathcal{P} .

Demonstração. Seja $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{r\}$, onde $t_{j-1} \leq r \leq t_j$, para um certo $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. De fato, pela transitividade, se \mathcal{R} refina \mathcal{Q} e \mathcal{Q} refina \mathcal{P} , temos que \mathcal{R} refina \mathcal{P} . E também, pelo fato de que \mathcal{Q} é obtida de \mathcal{P} pela adição de um número finito de pontos. Sendo assim,

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{Q}) - s(f, \mathcal{P}) &= \frac{1}{t_j} \cdot (t_j - r) + \frac{1}{r} \cdot (r - t_{j-1}) - \frac{1}{t_j} \cdot (t_j - t_{j-1}) \\ &= \frac{1}{t_j} \cdot (t_{j-1} - r) + \frac{1}{r} \cdot (r - t_{j-1}) \\ &= \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{t_j} \right) \cdot (r - t_{j-1}) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Considerando a partição $\mathcal{P} : t_0 = a < t_1 = b$, temos que, qualquer que seja a partição \mathcal{Q} , temos que $s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{Q})$. Isto significa que $1 - \frac{a}{b} \leq s(f, \mathcal{Q})$.

Observação 3.7. Considerando o gráfico da função f restrita ao intervalo $[a, b]$, com $0 < a < b$, a reta que passa pelos pontos $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ e $\left(b, \frac{1}{b}\right)$ tem como equação

$$y = -\frac{1}{ab} \cdot [x - (a + b)].$$

Estes são os únicos pontos do gráfico de f , em $[a, b]$, em que a reta toca. Desta forma, dada uma partição \mathcal{Q} de $[a, b]$, temos que

$$1 - \frac{a}{b} \leq s(f, \mathcal{Q}) < \frac{b^2 - a^2}{2ab}.$$

Da observação, segue-se que o conjunto $\{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é uma partição de } [a, b]\}$ é um conjunto de números reais positivos limitado superiormente. Pela fato de \mathbb{R} ser completo, este conjunto tem supremo. Sendo assim, definimos a *área de \mathcal{H}_a^b* , denotada por \mathcal{A}_a^b , como sendo este supremo. Isto significa que

- dada \mathcal{P} uma partição de $[a, b]$, tem-se que $\mathcal{A}_a^b \geq s(f, \mathcal{P})$;
- dado $\alpha < \mathcal{A}_a^b$, existe \mathcal{P} partição de $[a, b]$ tal que $\alpha < s(f, \mathcal{P}) \leq \mathcal{A}_a^b$.

Observação 3.8. Em \mathcal{A}_a^b , tomamos o supremo sobre todas as partições possíveis de $[a, b]$. Na realidade, não precisamos de todas estas, basta tomarmos aquelas que refinam uma dada partição, digamos, \mathcal{P}_0 . Vejamos, consideremos $A_0 = \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P}_0 \subset \mathcal{P}\}$ e $A = \{s(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ é uma partição de } [a, b]\}$. É imediato que $A_0 \subset A$. E assim, $\sup A_0 \leq \mathcal{A}_a^b$. Agora, dado \mathcal{P} partição de $[a, b]$, temos que $\mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P} \in A_0$ e refina \mathcal{P} . Pela proposição acima, segue-se que $s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}_0 \cup \mathcal{P}) \leq \sup A_0$. E então, $\mathcal{A}_a^b \leq \sup A_0$. Logo, $\mathcal{A}_a^b = \sup A_0$, como queríamos demonstrar.

Passamos a avaliar o erro que cometemos quando aproximamos a área da faixa de hipérbole \mathcal{H}_a^b pela área do polígono retangular inscrito associado à partição \mathcal{P} , ou seja, consideramos o número

$$\mathcal{E} = \mathcal{A}_a^b - s(f, \mathcal{P}).$$

Proposição 3.9. $\mathcal{E} < \frac{\Delta}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$, onde $\Delta = \max\{t_1 - a, t_2 - t_1, \dots, b - t_{n-1}\}$.

Demonstração. Consideremos a partição $\mathcal{P} : t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < b = t_n$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, a diferença entre a área da faixa de hipérbole $\mathcal{H}_{t_{i-1}}^{t_i}$ e a do retângulo inscrito correspondente é menor do que a área do triângulo retângulo de catetos $t_i - t_{i-1}$ e $\frac{1}{t_{i-1}} - \frac{1}{t_i}$. Disto, segue-se que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t_1}\right) \cdot (t_1 - a) + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) \cdot (t_2 - t_1) + \dots + \left(\frac{1}{t_{n-1}} - \frac{1}{b}\right) \cdot (b - t_{n-1}) \right] \\ &< \frac{\Delta}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{t_1}\right) + \left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{t_{n-1}} - \frac{1}{b}\right) \right] = \frac{\Delta}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

□

Da proposição acima, dado $\epsilon > 0$, escolhendo uma partição \mathcal{P} tal que $\Delta < a \cdot \epsilon$, segue-se que $\mathcal{E} < \epsilon$, pois,

$$\mathcal{E} < \frac{\Delta}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) < \frac{\Delta}{a} < \epsilon.$$

Em particular, para $a = 1$, temos que $\mathcal{E} < \Delta$.

Usando os argumentos da observação 3.7, finalizamos esta seção, demonstrando que a função f é convexa, isto é, dados $0 < a < b$, tem-se que, para todo $x \in (a, b)$,

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a).$$

De fato, basta observar que

$$-\frac{1}{ab} \cdot [x - (a + b)] - \frac{1}{x} = -\frac{x^2 - (a + b) \cdot x + ab}{abx}.$$

3.2 Aproximação por trapézios

Nesta seção, ao invés de trabalharmos com polígonos retangulares inscritos, podemos utilizar a aproximação por trapézios para calcular a área de uma faixa \mathcal{H}_a^b . A aproximação pode se dar de duas maneiras:

1. Aproximação por polígono trapezoidal secante;
2. Aproximação por polígono trapezoidal tangente.

Para o primeiro caso, consideremos a partição $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Da convexidade de f , segue-se que uma aproximação por excesso da área da faixa de hipérbole \mathcal{H}_a^b , por trapézios secantes, indicada por $S(f, \mathcal{P})$, é dada por

$$S(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{t_1} \right) \cdot (t_1 - a) + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} \right) \cdot (t_2 - t_1) + \dots + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{t_{n-1}} + \frac{1}{b} \right) \cdot (b - t_{n-1}),$$

que é a soma das áreas dos trapézios secantes correspondentes à partição \mathcal{P} .

Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, e cada $x \in (t_{i-1}, t_i)$, observamos que

$$-\frac{1}{t_{i-1}t_i} \cdot [x - (t_{i-1} + t_i)] - \frac{1}{x} > \frac{1}{x} - \frac{1}{t_i}.$$

Desta forma, concluímos que as aproximações por excesso, usando trapézios secantes, tem erro menor do que as aproximações por falta, relativas à área da faixa de hipérbole $\mathcal{H}_{t_{i-1}}^{t_i}$.

Ilustremos a aproximação por polígono trapezoidal secante, calculando a área por excesso da faixa de hipérbole \mathcal{H}_1^3 , associada à partição

$$\mathcal{P} : 1 < \frac{5}{4} < \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} < \frac{9}{4} < \frac{10}{4} < \frac{11}{4} < 3.$$

Vejamos,

$$S(f, \mathcal{P}) = \frac{1}{8} \cdot \left(1 + \frac{4}{5}\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{4}{5} + \frac{4}{6}\right) + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{4}{6} + \frac{4}{7}\right) + \dots + \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{4}{10} + \frac{4}{11}\right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{61162}{6930} \approx 1,1032.$$

De forma análoga, ao que fizemos para a aproximação por falta por retângulos inscritos, conforme proposição 3.6, podemos demonstrar que

Proposição 3.10. *Dadas as partições \mathcal{P} e \mathcal{Q} de $[a, b]$ tais que $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$, então $S(f, \mathcal{Q}) \leq S(f, \mathcal{P})$, ou seja, quando se refina uma partição a área por trapézios secantes não aumenta.*

Tomando a partição $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 = b$, dada qualquer partição \mathcal{Q} de $[a, b]$, temos que

$$\mathcal{A}_a^b \leq S(f, \mathcal{Q}) < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \cdot (b - a).$$

Além disso, usando a continuidade uniforme de f sobre os intervalos fechados, temos que $\mathcal{A}_a^b = \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b]\}$. E mais, como na observação 3.8, não precisamos, em \mathcal{A}_a^b , tomar todas as partições possíveis, somente aquelas que refinam uma dada partição, digamos \mathcal{P}_0 . E então,

$$\mathcal{A}_a^b = \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}) : \mathcal{P} \subset \mathcal{P}_0\}.$$

Para o segundo caso, consideremos a partição $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$. Para cada $i = 1, 2, \dots, n$, traçemos a tangente ao gráfico de f pelo ponto de abscissa $\frac{t_{i-1} + t_i}{2}$. Com isso, formamos um trapézio, que denominamos trapézio tangente, correspondente ao intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, cuja área é dada por

$$2 \cdot \frac{t_i - t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}}.$$

Aqui, observamos que a tangente à hipérbole em um dado ponto de abscissa $x = x_0 > 0$ deixa a hipérbole de um mesmo lado, já que, para todo $x > 0$,

$$\frac{1}{x} - \left(-\frac{1}{x_0^2}x + \frac{2}{x_0}\right) = \frac{(x - x_0)^2}{x_0^2 x} \geq 0.$$

E assim, as somas das áreas dos trapézios tangentes associados à partição \mathcal{P} , indicada por $s_t(f, \mathcal{P})$, dá-nos uma aproximação por falta, aproximação por polígono trapezoidal tangente, da área da faixa de hipérbole \mathcal{H}_a^b . Explicitamente,

$$s_t(f, \mathcal{P}) = 2 \left[\frac{t_1 - a}{t_1 + a} + \frac{t_2 - t_1}{t_2 + t_1} + \dots + \frac{b - t_{n-1}}{b + t_{n-1}} \right].$$

Calculando a aproximação por polígono trapezoidal tangente para a faixa de hipérbole \mathcal{H}_1^3 associada à partição

$$\mathcal{P} : 1 < \frac{5}{4} < \frac{6}{4} < \frac{7}{4} < \frac{8}{4} < \frac{9}{4} < \frac{10}{4} < \frac{11}{4} < 3,$$

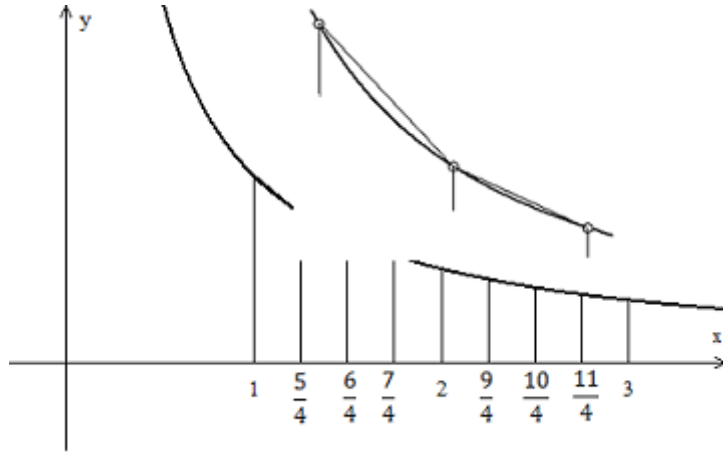


Figura 3.5: Aproximação de H_1^3 por trapézios secantes

obtemos

$$\begin{aligned}
 s_t(f, \mathcal{P}) &= 2 \cdot \left[\frac{\frac{5}{4} - 1}{\frac{5}{4} + 1} + \frac{\frac{6}{4} - \frac{5}{4}}{\frac{6}{4} + \frac{5}{4}} + \frac{\frac{7}{4} - \frac{6}{4}}{\frac{7}{4} + \frac{6}{4}} + \frac{2 - \frac{7}{4}}{2 + \frac{7}{4}} + \frac{\frac{9}{4} - 2}{\frac{9}{4} + 2} + \frac{\frac{10}{4} - \frac{9}{4}}{\frac{10}{4} + \frac{9}{4}} + \frac{\frac{11}{4} - \frac{10}{4}}{\frac{11}{4} + \frac{10}{4}} + \frac{3 - \frac{11}{4}}{3 + \frac{11}{4}} \right] \\
 &= 2 \cdot \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{23} \right) \approx 1,0963.
 \end{aligned}$$

A seguir, mostraremos que

Proposição 3.11. *A aproximação por polígono trapezoidal tangente é melhor do que a aproximação por polígono trapezoidal secante.*

Demonstração. Dada uma partição de $[a, b]$, digamos, $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < b = t_n$, devemos mostrar que

$$|s_t(f, \mathcal{P}) - \mathcal{A}_a^b| < |S(f, \mathcal{P}) - \mathcal{A}_a^b|.$$

Na realidade, basta mostrarmos que a relação verifica-se em cada subintervalo da partição \mathcal{P} , digamos, em $[t_{i-1}, t_i]$. E então, o resultado segue do seguinte

Lema 3.12. *Seja um quadrilátero $(ABCD)$ cujos lados AB e CD são paralelos. Se E é um ponto do lado BC tal que os triângulos (ABE) e (ECD) têm a mesma altura relativas aos lados AB e CD , respectivamente, então a soma das áreas dos triângulos (ABE) e (ECD) é igual à área do triângulo (AED) .*

Demonstração. Sejam F e G pontos nas retas suportes dos lados AB e CD , que são os pés das perpendiculares baixadas de E . Por hipótese, temos que as alturas EF e EG têm o mesmo comprimento, digamos, h . Pelo caso *ALA*, temos que os triângulos (EBF) e (ECG) são congruentes. Segue-se que os lados BF e CG têm a mesma medida. Consideremos H o ponto sobre o lado AD do quadrilátero tal que EH é paralelo ao lado AB . Observemos que os triângulos (AEH) e (HED) têm a mesma área, que é

$\frac{1}{2} \cdot |EH| \cdot h$, onde $|EH|$ é o comprimento do segmento EH . A seguir, denotaremos a área de um triângulo (XYZ) por $m(XYZ)$. Bem,

$$\begin{aligned} m(ABE) + m(ECD) &= \frac{1}{2} \cdot (|AB| + |CD|) \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot [|AB| + (|CG| + |GD|)] \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(|AB| + |BF|) + |GD|] \cdot h \\ &= \frac{1}{2} \cdot (|AF| + |GD|) \cdot h \end{aligned}$$

Nós sabemos que a base média do trapézio $(AFGD)$, isto é, EH , tem comprimento

$$|EH| = \frac{1}{2} \cdot (|AF| + |GD|).$$

Logo,

$$m(ABE) + m(ECD) = |EH| \cdot h = m(AED),$$

como queríamos. □

Considerando a faixa de hipérbole $\mathcal{H}_{t_{i-1}}^{t_i}$, geramos o quadrilátero $(ABCD)$, onde os pontos A e D são secantes à hipérbole, e pontos B e C são aqueles em que a tangente à hipérbole, pelo ponto de abcissa $x^* = \frac{t_{i-1} + t_i}{2}$, intersecta as verticais $x = t_{i-1}$ e $x = t_i$. Seja E o ponto da hipérbole cuja abcissa é x^* . Neste caso, os triângulos (ABE) e (ECG) têm altura igual a $\frac{t_i - t_{i-1}}{2}$. E assim, aplicando o lema, chegamos a

$$\mathcal{A}_{t_{i-1}}^{t_i} - 2 \cdot \frac{t_i - t_{i-1}}{t_i + t_{i-1}} < m(ABE) + m(ECD) = m(AED) < \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{t_{i-1}} + \frac{1}{t_i} \right) \cdot (t_i - t_{i-1}) - \mathcal{A}_{t_{i-1}}^{t_i}.$$

□

Finalizamos o capítulo com um resultado que será crucial para a definição de logaritmo natural. Dado um intervalo $[\alpha, \beta]$, com $0 < \alpha < \beta$, consideremos a faixa de hipérbole \mathcal{H}_α^β . A área do retângulo inscrito à \mathcal{H}_α^β é $\frac{1}{\beta} \cdot (\beta - \alpha)$. Dado $k > 0$, e observando que

$$\frac{1}{\beta} \cdot (\beta - \alpha) = \frac{1}{k\beta} \cdot [k(\beta - \alpha)] = \frac{1}{k\beta} \cdot (k\beta - k\alpha),$$

temos que os retângulos inscritos às faixas de hipérbole \mathcal{H}_α^β e $\mathcal{H}_{k\alpha}^{k\beta}$ têm a mesma área.

Seja $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ uma partição de $[a, b]$. Sendo assim, para cada $k > 0$, $k\mathcal{P} : ka = kt_0 < kt_1 < \dots < kt_n = kb$ é um partição de $[ka, kb]$. Pelo que vimos acima, concluímos que $s(f, \mathcal{P}) = s(f, k\mathcal{P})$. Analogamente, dada uma partição $\mathcal{Q} : ka = t_0 < t_1 < \dots < t_n = kb$ de $[ka, kb]$, temos que

$$\frac{1}{k}\mathcal{Q} : a = \frac{1}{k}t_0 < \frac{1}{k}t_1 < \dots < \frac{1}{k}t_n = b$$

é uma partição de $[a, b]$. Então, do mesmo modo, concluímos que $s(f, \mathcal{Q}) = s\left(f, \frac{1}{k}\mathcal{Q}\right)$. Disto, segue-se que a aproximação por falta dos polígonos retangulares inscritos da área da faixa de hipérbole \mathcal{H}_a^b é a mesma aproximação por falta dos polígonos retangulares inscritos da área da faixa de hipérbole \mathcal{H}_{ka}^{kb} . Isto, significa que $\mathcal{A}_a^b = \mathcal{A}_{ka}^{kb}$. Com isso, demonstramos a seguinte proposição

Proposição 3.13. *Dado $k > 0$, tem-se que $\mathcal{A}_a^b = \mathcal{A}_{ka}^{kb}$.*

Como consequência desta proposição, dados $0 < a < b$, para o cálculo da área da faixa de hipérbole \mathcal{H}_a^b , podemos nos restringir às faixas da forma $\mathcal{H}_1^{\frac{b}{a}}$.

A próxima proposição, mostra-nos uma fórmula bastante útil. Para sua validade, adotamos as seguintes convenções: $\mathcal{A}_a^a = 0$ e $\mathcal{A}_a^b = -\mathcal{A}_b^a$, para todos a, b e c reais positivos.

Proposição 3.14. *Dados a, b e c reais positivos, tem-se que $\mathcal{A}_a^b + \mathcal{A}_b^c = \mathcal{A}_a^c$.*

Demonstração. Primeiramente, consideremos o caso em que $0 < a < b < c$. Sejam $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ e $\mathcal{Q} : b = s_0 < s_1 < \dots < s_m = c$. Observemos que $\mathcal{P} \cup \mathcal{Q}$ é uma partição de $[a, c]$ tal que $s(f, \mathcal{P}) + s(f, \mathcal{Q}) = s(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q})$. E assim, $s(f, \mathcal{P}) + s(f, \mathcal{Q}) \leq \mathcal{A}_a^c$. Isto, mostra-nos que

$$\mathcal{A}_a^b + \mathcal{A}_b^c \leq \mathcal{A}_a^c.$$

Seja $\mathcal{R} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_p = c$. Como $b \in (a, c)$, existe $i_0 \in \{1, 2, \dots, p\}$ tal que $t_{i_0-1} \leq b < t_{i_0}$. Se $b = t_{i_0-1}$, podemos considerar as partições $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i_0-1} = b$ e $\mathcal{Q} : b = t_{i_0-1} < t_{i_0} < \dots < t_p = c$. E assim, $s(f, \mathcal{P}) + s(f, \mathcal{Q}) = s(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}) = s(f, \mathcal{R})$. Agora, se $t_{i_0-1} < b < t_{i_0}$, podemos considerar as partições $\mathcal{P} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i_0-1} < b$ e $\mathcal{Q} : b < t_{i_0} < \dots < t_p = c$. Desta forma,

$$s(f, \mathcal{R}) \leq s(f, \mathcal{P}) + s(f, \mathcal{Q}) = s(f, \mathcal{P} \cup \mathcal{Q}).$$

De qualquer forma,

$$s(f, \mathcal{R}) \leq s(f, \mathcal{P}) + s(f, \mathcal{Q}) \leq \mathcal{A}_a^b + \mathcal{A}_b^c.$$

Logo,

$$\mathcal{A}_a^c \leq s(f, \mathcal{P}) + s(f, \mathcal{Q}) \leq \mathcal{A}_a^b + \mathcal{A}_b^c.$$

Sendo assim, para o caso em que $0 < a < b < c$, temos que a fórmula é válida. O próximo passo é demonstrar a validade da fórmula para o caso em que $0 < a < c < b$. Vejamos, pela primeira parte, e pelo fato de que $\mathcal{A}_b^c = -\mathcal{A}_c^b$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a^c &= \mathcal{A}_a^b - \mathcal{A}_c^b \\ &= \mathcal{A}_a^b + \mathcal{A}_b^c. \end{aligned}$$

Os demais casos, são análogos, inclusive os casos em que dois, dos três números, são iguais, pois, aqui, $\mathcal{A}_x^x = 0$, para todo real positivo x . Portanto, dados a, b e c reais positivos, vale a fórmula $\mathcal{A}_a^b + \mathcal{A}_b^c = \mathcal{A}_a^c$. \square

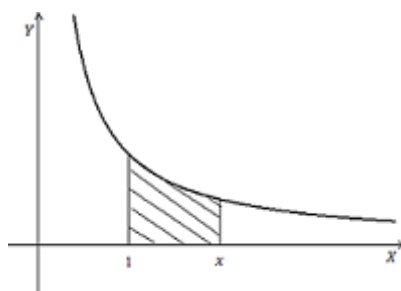
Capítulo 4

O Logaritmo Natural

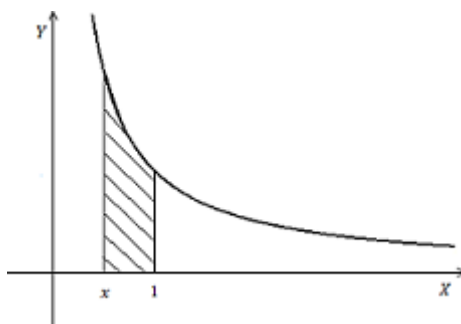
Para este capítulo utilizamos como referências [4, 5].

Consideremos a função $\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\ln x = \mathcal{A}_1^x$, denominada de *logaritmo natural*. Sendo assim,

1. $\ln 1 = \mathcal{A}_1^1 = 0$;
2. se $x > 1$, $\ln x = \mathcal{A}_1^x > 0$;



3. se $0 < x < 1$, $\ln x = \mathcal{A}_1^x = -\mathcal{A}_x^1 < 0$.



Nosso objetivo é demonstrar que \ln é uma função logarítmica. O primeiro passo é mostrar que

Proposição 4.1. *Dados x e y números reais positivos, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.*

De fato, Vejamos,

$$\ln(xy) = \mathcal{A}_1^{xy} = \mathcal{A}_1^x + \mathcal{A}_x^{xy} = \mathcal{A}_1^x + \mathcal{A}_1^y = \ln x + \ln y.$$

O último passo é mostrar que \ln é crescente. Vejamos, suponhamos que $0 < x < y$. Sendo assim,

$$\ln y = \ln\left(\frac{y}{x} \cdot x\right) = \ln \frac{y}{x} + \ln x > \ln x,$$

já que $\frac{y}{x} > 1$. Deste último fato, e da proposição 4.1, segue-se que \ln é uma função logarítmica. E então, \ln satisfaz todas as propriedades do capítulo 2. Por exemplo, \ln é uma bijeção, ilimitada superior e inferiormente.

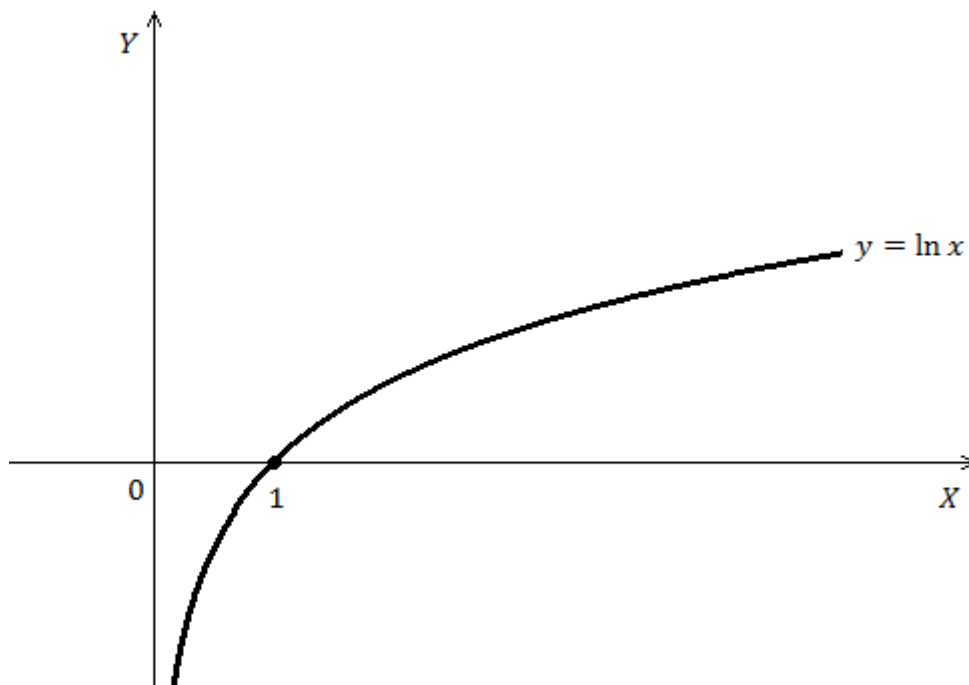


Figura 4.1: $y = \ln x$

Até o momento, concluímos que o gráfico da função \ln está localizada no interior do semiplano à direita, e toca no eixo das abscissas no ponto $(1, 0)$, veja figura 4.1. Um fato interessante é que, ao longo do eixo das abscissas, o ângulo das retas secantes ao gráfico de \ln vai diminuindo, isto é, dados $0 < a \leq x \leq b$, temos que

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} \leq \frac{\ln x - \ln a}{x - a}.$$

De fato, observando que

$$\ln b - \ln x = \mathcal{A}_x^b \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{b}\right) \cdot (b - x) \leq \frac{1}{x}(b - x) \text{ e } \ln x - \ln a = \mathcal{A}_a^x \geq \frac{1}{x} \cdot (x - a),$$

onde os segundos membros são as áreas do trapézio secante e do retângulo inscrito às faixas de hipérbole \mathcal{H}_x^b e \mathcal{H}_a^x , respectivamente, obtemos

$$\frac{\ln b - \ln a}{\ln x - \ln a} \leq \frac{\ln b - \ln x}{\ln x - \ln a} + 1 \leq \frac{b-x}{x-a} + \frac{x-a}{x-a} = \frac{b-a}{x-a}.$$

Uma consequência imediata disto, que nos ajuda a entender melhor o gráfico de \ln , é a seguinte

Proposição 4.2. *\ln é uma função côncava, isto é, dados a, b e x números reais positivos tais que $a \leq x \leq b$, tem-se que*

$$\ln x \geq \ln a + \frac{\ln b - \ln a}{b-a}(x-a).$$

Geometricamente, a condição para que \ln seja côncava é que toda reta secante ao gráfico de \ln deixa a parte do gráfico correspondente no semiplano superior à reta. Observe a figura 4.2 a seguir.

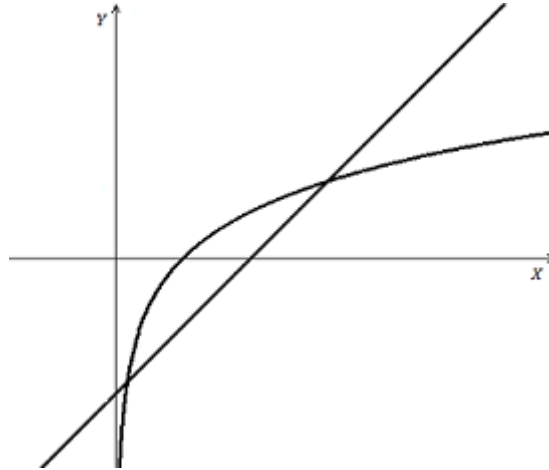


Figura 4.2: $y = x - 2$, secante a $\ln x$

Finalizando, mostremos a seguinte proposição:

Proposição 4.3. *\ln é contínua.*

Demonstração. Inicialmente, dado $a > 0$, mostremos que \ln é contínua à direita em a , isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\ln x - \ln a < \epsilon$, para todo $x \in (a, a + \delta)$. Mostremos isto. Dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = a \cdot \epsilon$, temos que

$$\ln x - \ln a < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right) (x-a) < \frac{1}{a} \cdot (a\epsilon) = \epsilon,$$

para todo $x \in (a, a + \delta)$. Por outro lado, dado $a > 0$, mostremos que \ln é contínua à esquerda de a , isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|\ln x - \ln a| < \epsilon$, para todo $x \in (a - \delta, a)$. Vejamos, dado $\epsilon > 0$, tomando $\delta = \min \left\{ \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\epsilon \right\}$, temos que

$$|\ln x - \ln a| = \ln a - \ln x < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a} \right) (a-x) < \frac{1}{x} (a-x) < \frac{2}{a} \cdot \frac{a\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $x \in (a - \delta, a)$. Disto, segue-se que \ln é contínua em a , para todo $a > 0$. Portanto, \ln é contínua. \square

Já mostramos que, dados x número real positivo e r número racional, $\ln x^r = r \cdot \ln x$. A continuidade de \ln , e a densidade do conjunto dos números racionais nos reais, mostra-nos que, dados x e α números reais, com $x > 0$, $\ln x^\alpha = \alpha \cdot \ln x$.

4.1 A Inversa

Seja $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ a função exponencial correspondente a \ln , isto é, dado $y > 0$,

$$\ln y = x \text{ se, e somente se, } \exp x = y.$$

Da bijetividade de \ln , sabemos que existe um único $x_0 > 0$ tal que $\ln x_0 = 1$. Isto significa que x_0 é a base da função logarítmica \ln , que denotaremos por $x_0 = e$, denominado de *o número de Euler*. Do final da seção anterior, segue-se que, dado x número real, e^x é o único número positivo cujo logaritmo natural é x , pois, $\ln e^x = x \cdot \ln e = x$, ou seja, $\exp(x) = e^x$. Por definição, $e^0 = 1$. Geometricamente, dado $x > 0$, $\mathcal{A}_1^{\exp(x)} = \mathcal{A}_1^{e^x} = x$, ou seja, a faixa de hipérbole $\mathcal{H}_1^{e^x}$ tem área x . Aqui, adotamos a convenção $\mathcal{A}_a^b = -\mathcal{A}_b^a$.

Já sabemos, pela caracterização de uma função exponencial, que \exp é crescente e $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, para todos os números reais x e y . Do fato de que \exp é crescente, segue-se que

- se $x > 0$, $e^x > e^0 = 1$;
- se $x < 0$, $e^x < e^0 = 1$.

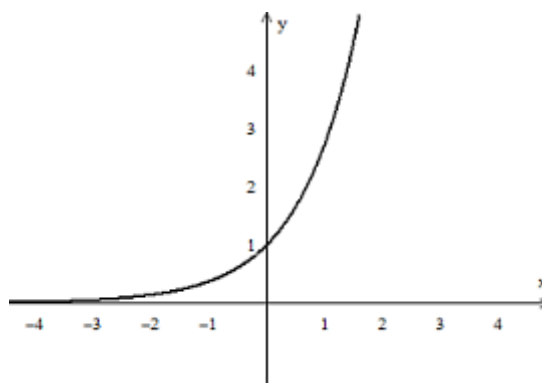


Figura 4.3: Gráfico de e^x

Proposição 4.4. *A diagonal $y = x$ deixa o gráfico da função \ln no semiplano inferior à diagonal.*

Demonstração. Já sabemos que, dado $x > 0$, a área da faixa de hipérbole $\mathcal{H}_1^{e^x}$ tem medida x . Agora, considerando o retângulo $[1, e^x] \times [0, 1]$, que contém a faixa $\mathcal{H}_1^{e^x}$, temos que $x < e^x - 1$. E assim, $e^x > 1 + x > x$, para todo $x > 0$. Sendo assim, $\frac{e^x}{x} > 1$, para todo $x > 0$. Logo,

$$x - \ln x = \ln e^x - \ln x = \ln \frac{e^x}{x} > 0.$$

Isto, diz-nos que $x > \ln x$, para todo $x > 0$. Portanto, a reta $y = x$ está acima do gráfico de \ln , como queríamos demonstrar. Lembremos que o gráfico de \ln está localizado no interior do semiplano à direita do eixo das ordenadas. \square

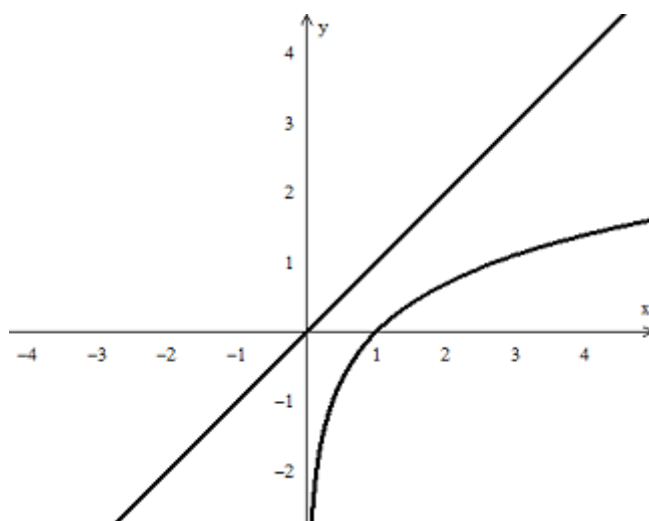


Figura 4.4: Gráficos $y = x$ e $y = \ln x$

Um fato geométrico importante, que nos ajuda a descrever o gráfico da inversa de uma bijeção, é que o gráfico da inversa é simétrico ao da bijeção em relação à diagonal, $y = x$. De fato, se (x, y) pertence ao gráfico de uma bijeção F , isto é, $F(x) = y$, então, $G(y) = x$, onde G é a inversa de F , isto é, (y, x) pertence ao gráfico de G , e vice-versa.

4.2 Novamente, o número de Euler

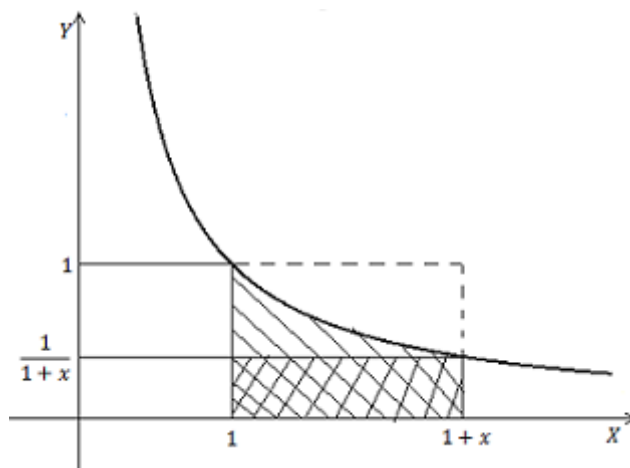
Tradicionalmente, o número de Euler é definido por

$$e = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u.$$

Equivalentemente, fazendo a mudança de variável $x = \frac{1}{u}$, temos que

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}.$$

Mostremos isto. Inicialmente, consideremos $x > 0$. Por definição, $\ln(1 + x) = \mathcal{A}_1^{1+x}$. Observando que a faixa de hipérbole \mathcal{H}_1^{1+x} está contida no retângulo $[1, 1 + x] \times [0, 1]$.



Desta forma,

$$\ln(1+x) < x,$$

para todo $x > 0$. Segue-se que

$$\frac{1}{x} \cdot \ln(1+x) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} < 1,$$

para todo $x > 0$. Isto equivale a

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} < e,$$

para todo $x > 0$. Também, sabemos que a faixa de hipérbole \mathcal{H}_1^{1+x} contém o retângulo inscrito $[1, 1+x] \times \left[0, \frac{1}{1+x}\right]$. Sendo assim,

$$x \cdot \frac{1}{1+x} < \ln(1+x),$$

para todo $x > 0$. E então,

$$e^{\frac{1}{1+x}} < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e,$$

para todo $x > 0$. Fazendo x aproximar-se de zero por valores positivos, temos que

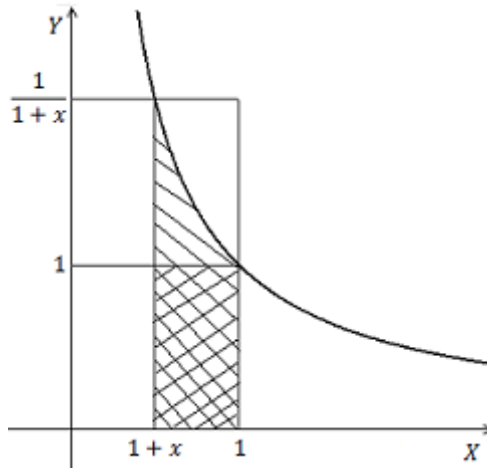
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Para o que se segue, suponhamos que $x < 0$. Já que a definição de limite é local, podemos supor que $-1 < x < 0$. Sendo assim, $0 < 1+x < 1$, e então, $\ln(1+x) = -\mathcal{A}_{1+x}^1$. Observemos que a faixa de hipérbole \mathcal{H}_{1+x}^1 contém o retângulo inscrito $[1+x, 1] \times [0, 1]$, e está contido no retângulo $[1+x, 1] \times \left[0, \frac{1}{1+x}\right]$. Desta forma,

$$-x < -\ln(1+x) < -\frac{x}{1+x}.$$

Isto equivale a

$$e < (1+x)^{\frac{1}{x}} < e^{\frac{1}{x+1}}.$$



Disto, segue-se que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Uma consequência disto é que

Proposição 4.5. *A reta tangente ao gráfico de \ln no ponto $(a, \ln a)$ tem equação*

$$y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1.$$

Demonstração. Seja a um número real positivo. Sendo assim, a reta secante que passa pelos pontos $(a, \ln a)$ e $(a+h, \ln(a+h))$ tem coeficiente angular

$$\frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \ln \left(\frac{a+h}{a} \right)^{\frac{1}{h}} = \frac{1}{a} \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right)^{\frac{a}{h}}.$$

Considerando a mudança de variável $x = \frac{h}{a}$, usando a continuidade de \ln , e fazendo $h \rightarrow 0$, temos que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \frac{1}{a} \ln \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \frac{1}{a} \ln e = \frac{1}{a}.$$

Ou seja, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de \ln no ponto $(a, \ln a)$ é igual a $\frac{1}{a}$. Sendo assim, a equação da reta tangente ao gráfico de \ln no ponto $(a, \ln a)$ tem equação

$$y = \frac{1}{a}x + \ln a - 1.$$

□

Capítulo 5

Aplicações

Nesse capítulo, iremos nos dedicar a mostrar algumas aplicações dos logaritmos. Para tanto, utilizamos como referências [9, 10].

- **Sismos**

A escala Richter é uma escala logarítmica arbitrária, de base 10, utilizada para determinar a magnitude de um sismo, que foi desenvolvida no ano de 1935 por Charles Francis Richter, com a colaboração de Beno Gutenberg, e tinha como propósito diferenciar sismos pequenos de grandes.

Foram utilizados, a princípio, sismógrafos de torção do tipo Wood-Anderson, e com objetivo de estudar sismos que aconteciam no sul da Califórnia. Para o que segue, observamos que $\log x = \frac{1}{\ln 10} \cdot \ln x$.

De acordo com [12], temos:

Magnitude (graus)	Possíveis Efeitos
menor que 3,0	Tremores pequenos, geralmente não perceptíveis, mas registrados por equipamentos apropriados.
3,0 a 5,9	Abalos perceptíveis sem a utilização de equipamentos, mas pouco destruidores. Pode derrubar objetos da mobília e trincar paredes.
6,0 a 8,9	Terremoto destrutivo que pode acarretar severos danos às construções e provocar grandes rachaduras do solo.
9,0 ou maior	Tremores muito fortes, causa destruição quase que total.

Exemplo 5.1. Em janeiro de 2010, foi registrado, no Haiti, um terremoto de 7,0 graus na escala Richter, deixando muitos mortos e feridos. Sabendo-se que a magnitude y de um terremoto na escala Richter pode ser expressa pela função $y = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right)$, na qual x representa a energia liberada em quilowatts-hora, pelo terremoto, determine a energia liberada pelo terremoto ocorrido no Haiti. (Texto adaptado de [12])

Solução

$$\begin{aligned}y &= \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\7,0 &= \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\ \frac{7,0 \cdot 3,0}{2} &= \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\ \frac{21,0}{2} &= \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\ 10,5 &= \log\left(\frac{x}{7 \cdot 10^{-3}}\right) \\ \frac{x}{7 \cdot 10^{-3}} &= 10^{10,5} \\ x &= 7 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{10,5} \\ x &= 7 \cdot 10^{7,5} kWh\end{aligned}$$

• **Matemática Financeira**

De acordo com [11] a aplicação de logaritmos na Matemática Financeira serve para o cálculo do tempo que se deve aplicar um capital, a juros compostos, com o objetivo de obter um montante desejado que é dado pelo seguinte modelo:

$$M = C \cdot (1 + i)^t,$$

onde M é o montante gerado por um capital C a uma taxa de juros compostos i num determinado prazo t .

Exemplo 5.2. Ao fazer uso do limite de crédito da conta-corrente, o correntista está utilizando um empréstimo disponibilizado pelo banco que normalmente cobra juros altos por esse serviço. Supondo que um banco cobre juros de 8% ao mês, se um cliente utilizar R\$ 700,00 do limite de crédito, em quantos meses aproximadamente a dívida será de R\$ 1200,00? (Dados: $\log\left(\frac{12}{7}\right) = 0,234$ e $\log 1,08 = 0,033$)(Exemplo extraído de [12])

Solução

$$\begin{aligned}
M &= C \cdot (1 + i)^t \\
1.200,00 &= 700,00 \cdot (1 + 0,08)^t \\
\frac{1200}{700} &= (1,08)^t \\
\frac{12}{7} &= (1,08)^t \\
\log \frac{12}{7} &= \log(1,08)^t \\
0,234 &= t \cdot \log 1,08 \\
0,234 &= t \cdot 0,033 \\
t &= \frac{0,234}{0,033} \approx 7 \text{ meses}
\end{aligned}$$

• Desintegração Radioativa

Os processos radioativos seguem uma lei de desintegração exponencial, ao se desintegrarem trocam partículas radioativas por não-radioativas. Cada substância possui uma constante de desintegração própria, e para calcularmos sua massa, após a passagem de um determinado tempo, utilizamos a expressão:

$$M(t) = M_0 \cdot e^{-\alpha \cdot t},$$

onde $M(t)$ é massa no tempo t , M_0 é a massa inicial e α é a constante de desintegração.

Segue de [3] que “o tempo necessário para que uma substância reduza a sua massa pela metade é chamado *meia-vida*”, denotada por m_v , e pode ser determinado por

$$m_v = \frac{\ln 2}{\alpha}.$$

Exemplo 5.3. Uma amostra de tório reduz-se a $\frac{3}{4}$ de sua quantidade inicial depois de 33.600 anos. Qual é a meia-vida do tório?(Exemplo extraído de [5])

Solução

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4} &= x \cdot e^{-\alpha \cdot 33600} \\
e^{-\alpha \cdot 33600} &= \frac{1}{4} \\
\ln e^{-\alpha \cdot 33600} &= \ln \frac{1}{4} \\
-\alpha \cdot 33600 &= \ln 0,25 \\
\alpha &= -\frac{\ln 0,25}{33600}
\end{aligned}$$

Daí, temos:

$$\begin{aligned}m_v &= \frac{\ln 2}{-\frac{\ln 0,25}{33600}} \\m_v &= -33600 \cdot \frac{\ln 2}{\ln 0,25} \\m_v &= 16.800 \text{ anos}\end{aligned}$$

• **Lei do Resfriamento de Newton**

Aplicável quando um objeto aquecido é colocado num meio mais frio, tem uma situação semelhante a desintegração radioativa e pode ser determinada por:

$$D(t) = D_0 \cdot e^{-\alpha t},$$

onde $D(t)$ é a diferença de temperatura entre o objeto e o meio no qual está inserido, D_0 é a diferença de temperatura no tempo inicial, α é a constante que depende do material do qual o objeto é constituído e t é o tempo decorrido.

Exemplo 5.4. O corpo de uma vítima de assassinato foi descoberto às 23 horas. O médico da polícia chegou às 23:30 e imediatamente tomou a temperatura do cadáver, que era de $34,8^\circ$. Uma hora mais tarde ele tomou a temperatura outra vez e encontrou $34,1^\circ$. A temperatura do quarto era mantida constante a 20° . Use a lei do resfriamento de Newton para estimar a hora em que se deu a morte. Admita que a temperatura normal de uma pessoa viva é $36,5^\circ$. (Exemplo extraído de [5])

Solução

Inicialmente, observamos que $D_0 = 34,8^\circ - 20^\circ = 14,8^\circ$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}D(1) &= 14,8^\circ \cdot e^{-\alpha} \\14,1^\circ &= 14,8^\circ \cdot e^{-\alpha} \\e^{-\alpha} &= \frac{14,1^\circ}{14,8^\circ} \\\ln e^{-\alpha} &= \ln \frac{14,1^\circ}{14,8^\circ} \\-\alpha &= \ln \frac{14,1^\circ}{14,8^\circ} \approx -0,04845\end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}14,8^\circ \cdot e^{0,04845 \cdot t} &= 16,5^\circ \\e^{0,04845 \cdot t} &= \frac{16,5^\circ}{14,8^\circ} \\\ln e^{0,04845 \cdot t} &= \ln \frac{16,5^\circ}{14,8^\circ} \\0,04845 \cdot t &= \ln \frac{16,5^\circ}{14,8^\circ} \\t &= \frac{0,10873}{0,04845}\end{aligned}$$

Portanto, $t \approx 2\text{h}15\text{min}$.

• Datação do Carbono Radioativo

Este procedimento desenvolvido pelo químico americano Willard Libby (1908 - 1980), na década de 40, é uma importante ferramenta em pesquisa arqueológica que determina a idade de objetos, tais como: restos de madeiras e plantas, fósseis ou materiais que contiveram carbono em alguma de suas formas.

Sabendo que a meia-vida do carbono é de aproximadamente 5570 anos, então, é possível aplicar a técnica de datação do carbono 14 (C^{14}) em objetos com até 50 mil anos. Seu cálculo se dá utilizando a mesma “fórmula” da desintegração radioativa, pois, C^{14} é um isótopo radiativo de carbono.

Exemplo 5.5. Um osso de animal pré-histórico apresenta $\frac{1}{10}$ da quantidade de C^{14} de um osso atual. Quando morreu aquele animal? (Exemplo extraído de [5])

Solução

$$\begin{aligned}m_v &= \frac{\ln 2}{\alpha} \\5570 &= \frac{\ln 2}{\alpha} \\ \alpha &= 1,25 \cdot 10^{-4}\end{aligned}$$

Daí, temos que

$$\begin{aligned}\frac{x}{10} &= x \cdot e^{-1,25 \cdot 10^{-4} \cdot t} \\ \frac{1}{10} &= e^{-1,25 \cdot 10^{-4} \cdot t} \\ 10^{-1} &= e^{-1,25 \cdot 10^{-4} \cdot t} \\ \ln 10^{-1} &= \ln e^{-1,25 \cdot 10^{-4} \cdot t} \\ -\ln 10 &= -1,25 \cdot 10^{-4} \cdot t \cdot \ln e \\ t &= \frac{\ln 10}{1,25 \cdot 10^{-4}} \approx 18420 \text{ anos.}\end{aligned}$$

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos os logaritmos sob o ponto de vista geométrico. A intenção é expor o tema de uma maneira diferente da habitual. Além disso, esperamos que este material sirva de apoio para ampliação do conhecimento sobre a temática.

Ao realizar este estudo sobre logaritmos, foi possível perceber o quanto esse assunto ainda está presente em muitas aplicações, apesar de todos os dispositivos tecnológicos de cálculo que possuímos hoje. Por exemplo, os logaritmos estão presentes no cálculo de juros contínuos, na datação de fósseis, no resfriamento de corpos, na magnitude de sismos, entre outras.

Em vista de todos os problemas que se enfrentam no ensino de Geometria no Ensino Básico, damos um exemplo de como contornar esta situação, propondo, quando for possível, partir da geometria para a definição encontrada na maioria dos livros didáticos de Matemática.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYER, Carl. Tradução de Elza Gomide. *História da Matemática*. Ed. Edgard Blücher Ltda. São Paulo, 1996.
- [2] EVES, Howard. Tradução de Hygino Domingues. *Introdução à História da Matemática*. 2ª Edição. Coleção Repertórios. Editora da Unicamp. São Paulo, 1997.
- [3] GRUPO DE ENSINO DE FÍSICA - UFSM, *Desintegração Radioativa*. Disponível em: <<http://coral.ufsm.br/gef/Nuclear/nuclear09.pdf>> (Acesso em 26 de julho de 2016).
- [4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. Volume 1. 11ª Edição. Instituto Nacional e Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2004.
- [5] LIMA, Elon Lages. *Logaritmos*. SBM. 2ª Edição. Rio de Janeiro, 1996.
- [6] LIMA, Elon Lages. *Números e Funções Reais*. Coleção PROFMAT. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). Rio de Janeiro, 2013.
- [7] LIMA, Elon Lages et al. *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1. 10ª Edição. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 2012.
- [8] MATOS, Marcos Pinheiro. *Funções Exponenciais e Logarítmicas*. Campo Grande, 2014. 64 p.. Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Matemática - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. INMA/UFMS, 2014.
- [9] MORGADO, Augusto César; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. *Matemática Discreta*. Coleção PROFMAT. SBM. Rio de Janeiro, 2013.
- [10] MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo; ZANI, Sheila C.. *Progressões e Matemática Financeira*. 5ª Edição. Coleção do Professor de Matemática. SBM. Rio de Janeiro, 2001.
- [11] OLIVEIRA, Gabriel Alessandro. Mundo Educação. *O Logaritmo na Matemática Financeira*. Disponível em: <<http://mundoeducacao.bol.uol.com.br/matematica/o-logaritmo-na-matematica-financeira.htm>> (Acesso em 26 de julho de 2016).

- [12] SOUZA, Joamir Roberto de. *Novo Olhar: Matemática: 1. 2ª Edição*. FTD. São Paulo, 2013.