Universidade Federal da Bahia - UFBA
Instituto de Matemática - IM
Sociedade Brasileira de Matemática - SBM
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT
Dissertação de Mestrado

Operações com Números Inteiros e Racionais de forma lúdica

Marília Caribé Ribeiro Sales

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2016

Operações com Números Inteiros e Racionais de forma lúdica

Marília Caribé Ribeiro Sales

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva.

Salvador - Bahia
Fevereiro de 2016

Operações com Números Inteiros e Racionais de forma lúdica

Marília Caribé Ribeiro Sales

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFBA como requisito parcial para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

____

Profa. Dra. Rita de Cássia de Jesus Silva (Orientadora)
UFBA

____

Prof. Dr. André Luís Godinho Mandolesi
UFBA

____

Prof. Dr. Oscar Eduardo Ocampo Uribe
UFBA

A Deus, à minha família e aos amigos.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter estado sempre ao meu lado e oportunizado o meu crescimento em todos os aspectos.
Agradeço a minha família, avós, pais, tios, por ter investido tanto e acreditado em mim. Obrigada pela grande aplicação de tempo, amor, dinheiro, olhar, companhia; por me incutir os valores e princípios que tenho hoje.
Agradeço ao meu filho Victor pela compreensão e apoio neste período de estudo e ao meu marido Eduardo pelo amor, companheirismo e parceria.
Aos meus colegas da turma de 2013 que foram muito especiais, tornaram-se amigos. Aos meus amigos da vida por cada palavra de incentivo, pelos ouvidos para as minhas ansiedades antecedentes às provas e a todos por sempre acreditar que eu concluiria o mestrado.

"Não sei se a vida é curta ou longa para nós, mas sei que nada do que vivemos tem sentido, se não tocarmos o coração das pessoas. Muitas vezes basta ser: colo que acolhe, braço que envolve, palavra que conforta, silêncio que respeita, alegria que contagia, lágrima que corre, olhar que acaricia, desejo que sacia, amor que promove. E isso não é coisa de outro mundo, é o que dá sentido à vida. É o que faz com que ela não seja nem curta, nem longa demais, mas que seja intensa, verdadeira, pura enquanto durar. Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina."
Cora Coralina

Resumo

Trabalhando com o Ensino Fundamental II, nas escolas públicas, foi percebido que as operações com números inteiros é um conhecimento não consolidado para os estudantes, o que dificulta muito a continuidade dos assuntos a serem estudados.
Um outro tabu é a deficiência na significação de fração. O aluno não avançou ao desenvolver o sentido concreto de fração e assim também não consegue avançar ao evoluir a noção de fração para um sentido abstrato.
Este trabalho pretende propor atividades para o ensino de Matemática, a partir de dois modelos concretos. O primeiro significa as operações entre números inteiros, como a acepção da regra de sinais e o segundo retrata as operações com frações, tentando suprir a deficiência do ensino destes dois assuntos tão importantes para o cotidiano.
Palavras chaves:Inteiros, Racionais, Lúdico.

Abstract

Working with Elementary School II, in government schools, it was realized that the integer operations are a non- consolidated knowledge to the students, which greatly hampers the continuity of the subjects to be studied.
Another taboo is the deficiency in significance of the mathematical operations on fractions. The student has not progressed to develop concrete sense of those operations and so cannot move to evolve to an abstract sense.
This work intends to propose activities for the teaching of mathematics, from two specific models. The first means transactions between integers, as the meaning of the signs rule and the second depicts the operations with fractions, trying to meet the educational deficiency of these two mathematical issues that is so important in everyday life.

Key words: Integer, Rational Number, Playful.

Sumário

Introdução

O ensino de frações nos primeiros anos do Ensino Fundamental, que deve ter uma abordagem concreta para a preparação da abordagem algébrica no início do Ensino Fundamenta II, nem sempre fica retido pelas crianças, é notória a dificuldade delas. E quando não são elucidadas, a falta de sapiência com este assunto gera insegurança, desmotivação e entraves para a sua evolução matemática.

Um outro grande obstáculo para alguns estudantes é compreender as operações no âmbito do conjunto dos Inteiros, principalmente quando se diz respeito aos números negativos. Muitos professores que introduzem este assunto em sala de aula, ilustram as operações deste conjunto com situações do cotidiano e geralmente situações financeiras, em que os números positivos representam crédito e os negativos, débito. Contudo existe uma grande dificuldade de expor a polaridade do produto de um par de números negativos.

Ao longo dos anos, na escola particular, fui percebendo a dificuldade de alguns alunos em entender as operações com números inteiros. Geralmente, aqueles que traziam dificuldades em Matemática das séries anteriores. Notei, que alguns deles desistiam de entender e simplesmente decoravam algumas regras operacionais. Para estes alunos, a situação foi mudando de figura, a partir do momento que trabalhei com eles mais itensificadamente, em um horário extra, as questões contextualizadas, concretizando a álgebra.

Alguns anos depois fui convocada para ser professora de algumas escolas da rede municipal de Lauro de Freitas e fui ensinar Matemática para alunos de 8^o e 9^o anos do Ensino Fundamental II e para alunos do programa de Eduacação de Jovens e Adultos, EJA. Foi, então que percebi, nesta comunidade, que os alunos não sabiam os conteúdos da Matemática que eram necessários para seguir com os assuntos da série atual.

Eu acredito que dos conteúdos de 6^o e 7^o anos, dois me faziam mais falta, operações com números inteiros e operações com frações. Eles podiam entender o assunto atual, mas quando algum problema precisava destes conhecimentos prévios para ser resolvido, este público desistia e se desestimulava. Foram muitas as tentativas de resolver esta situação com os alunos, já que eu não tenho como resolver o problema do sistema público da educação brasileira, o que eu queria era resolver a falta de conhecimento básico da comunidade em que eu atuo. Foi então que a minha orientadora, Rita de Cássia, me apresentou um jogo que objetiva facilitar o entendimento das operações com números inteiros, desenvolvido pela Experimentoteca da USP.

Obtive bastante êxito com esta dinâmica, os alunos passaram a responder a questionamentos como soma e multiplicação de números negativos com segurança e não mais na forma de tentativa como acontecia antes da aplicação do jogo. Para a turma de 8^o

ano, percebi que quando eles passaram para o 9^o ano o assunto tinha alcançado o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Quero deixar claro que o modelo que vou escrever neste trabalho foi desenvolvido pela Experimentoteca, o meu objetivo é mostrar o processo para a aplicação deste modelo que pode ser visto em [3].

No primeiro capítulo deste trabalho é exposta a longa trajetória para aceitação dos negativos como números, foram mais de 1500 anos para que os maiores intelectuais da história aceitassem quantidades que fossem menor do que o zero. Então, como esperar que jovens com cerca de 12 anos não apresentem dificuldade para aceitá-los? Ainda neste capítulo, é abordada, também, a evolução natural dos números fracionários. Os conhecimentos foram sendo desenvolvidos ao longo da história de forma espontânea, através de situações corriqueiras, como por exemplo, a divisão de um peixe ou uma caça pelo homem pré histórico.

Este trabalho visa promover as ferramentas necessárias para o preceptor se sentir seguro e provido de todos os pré requisitos para instruir seu público a operar nos conjuntos dos números Inteiros e Racionais. Para isso foi construído no segundo e terceiro capítulos toda a estruturação algébrica destes conjuntos a nível superior.
Posteriormente, no capítulo 4 é apresentado um modelo que visa enriquecer a metodologia do professor em relação às operações com números inteiros, além de motivar o aluno e promover uma intuição das operações neste conjunto através do lúdico.

Um outro modelo é apresentado no capítulo 5, para se trabalhar as frações e suas operações de forma concreta, possibilitando a consolidação do conhecimento no sistema cognitivo do receptor deste conteúdo.

Neste trabalho utilizamos [5] para auxiliar na cronologia de toda a fundamentação teórica e na apresentação dos modelos foi utilizado como base os jogos da Experimentoteca da USP, em particular [3] e [4].

Até que no capítulo 6 fazemos as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1

Um Pouco de História

1.1 O Surgimento dos Números Negativos

Por vezes os alunos me perguntam quem criou a Matemática, o que não pode ser atribuido a uma pessoa. A Matemática foi sendo desenvolvida de acordo com a necessidade do homem de representar quantidades, estabelecer o que é maior ou menor, relacionar símbolos e significado, entre outras coisas. O número percorreu um longo caminho e conviveu entre diversos povos e entre uma diversidade de línguas. Cada povo desenvolveu a sua forma de registrar quantidades. E o conceito de número foi tomando forma num longo desenvolvimento histórico, desde a pré história, no periodo paleolítico, na idade da pedra lascada, até os dias de hoje, onde a Matemática continua a ser desenvolvida de acordo com as necessidades do homem.

A necessidade de contar levou ao aparecimento dos números naturais, com excessão do zero, que só foi representado algum tempo depois. O primeiro povo a fazer a representação do zero foi o babilônico e o fez há mais de dois milênios antes de Cristo. Todos os povos que desenvolveram formas de escrita introduziram o conceito de Número Natural e desenvolveram um sistema de contagem.

O desenvolvimento dos números Naturais tiveram uma inspiração geométrica: a contagem de objetos. Tal inspiração não acontece em relação ao surgimento dos números negativos, que apareceram da manipulação algébrica, como na resolução de equações lineares e quadráticas. A origem dos números negativos é incerta, o primeiro vestígio deles foi encontrado em uma obra na China Antiga, em um livro chinês intitulado "Nove capítulos sobre a arte Matemática". Ele foi escrito por cerca do segundo século antes de cristo, mas pode ter material ainda mais antigo. De acordo com [9], neste livro, problemas ligados ao dia a dia dos chineses conduziam à equações lineares onde foram encontrados os primeiros números negativos.

Neste livro chinês, apareceram dois tipos de contadores: os vermelhos e os pretos. Os contadores vermelhos eram usados para representar os números positivos; já os contadores pretos, para representar os números negativos. De acordo com a descrição deste modelo em [8], ele se assemelha muito com o modelo que iremos propor neste trabalho, no capítulo 4. Acredita-se que tal desenvolvimento se deve a forte filosofia chinesa de opostos. Embora os chineses usassem os números negativos, eles não aceitavam a ideia de tal número poder ser a solução de uma equação. Segundo [1], na Matemática chinesa, os números negativos eram usados apenas como intermediários na execução de algum algoritmo, ou interpretação de alguma situação problema, mas não se aceitava a ideia desses números serem soluções de uma equação.

Enquanto isso, na Grécia e no Egito antigos, era desenvolvida a Matemática sobre os aspectos geométricos. Segundo[1], os Egípcios usavam malhas quadriculadas para a construção de pirâmides, onde era indicado o nível do chão e os níveis acima e abaixo dele. Tal técnica poderia ter sido o "insight" para desenvolver a ideia de números negativos, no entanto nem os egípcios nem os gregos, que atribuiam aos Egípcios o título de serem seus mestres matemáticos, não utilizaram tal metáfora para aceitar os inteiros negativos. Em (Medeiros e Medeiros, 1992), para os gregos a geometria era um prazer e a álgebra um demônio necessário.

Foi então que Diofanto de Alexandria (c. 250 d.C.), considerado pai da Álgebra, escreveu três trabalhos. Em um deles, apesar de não fazer referências sobre o número negativo, ele faz uma declaração que se relaciona com a multiplicação de tais números. Afirma que o que está em falta multiplicado pelo que falta resulta em algo positivo; enquanto que o que está em falta multiplicado pelo que é positivo resulta em algo que está em falta. Ele desenvolveu o produto de dois binômios do tipo $(a-b)\cdot(c-d)$ como sendo $a\cdot c - b\cdot c - a\cdot d + b\cdot d$. Tal desenvolvimento pode ter sido demonstrado a partir da interpretação geométrica do quadrado da diferença. Apesar dele considerar $a > b$ e $c > d$ e considerar apenas as raízes positivas das equações pode-se observar que os matemáticos gregos conheciam um tipo de número que representava a falta, mas que ainda não havia sido conceituado.

A civilização hindu foi muito influenciada pela região da Alexandria, inclusive no que diz respeito ao desenvolvimento intelectual. Por volta de 600 d.C., o hindu Brahmagupta escreveu a obra "A abertura do universo" onde desenvolveu uma aritmética sistematizada dos números negativos. Definiu o zero como sendo o resultado da subtração de um número por ele mesmo e introduziu números positivos em termos de fortuna e os negativos como débitos. Tal desenvolvimento deve ter ocorrido pelo fato dos hindus serem comerciantes natos e precisarem operar com os débitos em seu cotidiano. Brahmagupta pecou, apenas, em afirmar em sua obra que $0 \div 0 = 0$. Infelizmente, tal obra não foi aceita pelos gregos que não utilizavam a operação de débito, e não a julgavam necessária. Além disso, não havia uma demonstração geométrica, apenas uma sistematização das operações aritméticas. Segundo [1], o uso sistemático dos números negativos não pareceu algo uniformemente aceito nem perante os matemáticos hindus.

O maior matemático hindu do século VII, Bháskara, ao resolver uma equação do segundo grau encontra como raizes os valores 50 e -5. Contudo ele considera o valor menor do que zero inadequado. Bháskara afirmava que as raízes negativas não podiam existir pois não eram números quadrados. Apesar dos números negativos serem crescentemente utilizados pelos intectuais, a sua aceitação, o seu significado enquanto soluções verdadeiras estava longe de ser concretizado.

A partir do século XIV, o surgimento do sistema bancário com estrutura de crédito não foi um incentivo suficiente para legitimar os negativos. O cliente poderia sacar um valor maior do que depositou. O uso dos negativos era crescente mas não eram aceitos como números. Foi a partir do século XVII que os matemáticos começaram a reconhecer os números negativos como válidos, e com a descoberta de uma interpretação geométrica para números positivos e negativos como sendo segmentos de direções opostas, eles começaram a aparecer naturalmente nos trabalhos científicos justificados apenas com a frase: "A eficácia do cálculo é suficiente para confortar o matemático em sua fé".

Percebemos, que ao longo da história a aceitação dos números negativos foi muito difiícil para o homem. Mesmo os maiores intelectuais da história resistiam à existência de tais números, tiveram muita dificuldade para demonstrar as operações neste conjunto tão abstrato. Muitos matemáticos escreveram obras operacionalizando os números negativos, utilizando-os com artifício de cálculo mas até o início do século XIX havia matemáticos que não lhes atribuiam uma existência real.

Em oposição a Brahmagupta, Bhaskara, no século VII, e outros matemáticos árabes que aperfeiçoaram o sistema de numeração hindu, como Al-Kwarizmi, chamaram a solução negativa de inadequada.

No século XV, o Matemático francês Nicolás Chuquet, em sua obra "Triparty" chamava os números negativos de absurdos, assim como Michael Stiffel, o pai dos logaritmos, no século XVI. Ainda neste século, Giordano Cardan (1501-1576) intitulava as raizes negativas de fictícias. Em sua obra "Ars Magna" ele separa os números verdadeiros, que são as frações positivas, os naturais e alguns irracionais, dos números fictícios, que são os negativos e os imaginários. François Viète (1540-1603) criou um sistema simbólico que revolucionou os problemas algébricos e que propiciaram a aceitação dos números negativos, contudo o próprio Viète não os aceitou. Para ele os números negativos eram desprovidos do significado intuitivo.

No século XVII, Thomas Harriot (1560-1621), introdutor dos símbolos $>$ (maior que) e $<$ (menor que), além de não aceitar os inteiros negativos, acreditou ter provado a impossibilidade de tais raizes. René Descartes (1596-1650) tomou as raizes negativas como falsas, Pierre Fermat (1601-1665) não usou as coordenadas negativas em sua obra "Introdução aos lugares planos e sólidos". Enquanto isso, Simon Stevin (1548-1620) utilizava e aceitava os números negativos como soluções nas equações.

No século XVIII as ideias dos matemáticos em relação aos números inteiros ainda eram muito antagônicas. Grandes nomes como Gabriel Cramer (1704-1752), Jean D'Alembert (1717-1783), Lazare Carnot (1753-1823) rejeitavam os negativos de alguma forma.

D'Alembert afirmou que um problema que conduz a uma solução negativa tem alguma parte da hipótese que era falsa, mas foi assumida como verdadeira. Contudo o grande Leonhard Euler (1707-1783) aceitou as raízes negativas, ainda que as denominasse de fictícias. Ele foi além, sistematizou o uso dos negativos e tentou demonstrar a regra dos sinais na multiplicação, mesmo não sendo convincente no seu argumento de que a multiplicação de negativos resulta em um número positivo. O alemão Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) também usou as raízes negativas em seu livro "Teoria dos Números". Da mesma forma, o inglês Isaac Newton (1642-1727) apresentou as regras de sinais sem qualquer demonstração mas com muitos exemplos.

Os números negativos continuaram a ser um ponto de atrito entre os matemáticos, a maioria dos intelectuais acreditavam que os inteiros precisavam de uma fundamentação rigorosa e começaram a tentar apresentar justificativas para a sua existência. Até que em meados do século XIX um grupo de ingleses começou a repensar o conceito da álgebra pela incoerência com a concepção de número negativo e George Peacock (1791-1858) distinguiu a Álgebra aritmética da Álgebra simbólica.

De acordo com [6], na Álgebra aritmética apenas as operações com os inteiros positivos seriam permitidas; na Álgebra simbólica, tal restrição era removida embora fossem ainda adotadas as regras da Álgebra aritmética. As regras que regiam os antigos números (inteiros positivos), também deveriam reger os novos (inteiros negativos). Dentre estas regras, as principais, tomadas como axiomas na Álgebra clássica, são as propriedades comutativa e associativa da adição e da multiplicação, além da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

Este foi o momento que os números negativos deixaram de ser meros símbolos, utilizados como meios no desenvolvimento aritmético e passaram a ser unânimemente aceitos na comunidade matemática, sendo inclusos em uma aritmética ampliada. A comunidade deixa de buscar uma relação de correspondência com algo concreto, natural e aceita os novos números como deduções lógicas a partir de seu conceito, o que chamamos de Matemática "pura".

Percebemos a dificuldade de mentes brilhantes para operacionalizar e muitas vezes, até aceitar, os números negativos. Podemos, assim, compreender a resistência de alguns dos nossos alunos a este conceito tão abstrato de quantidade. A partir desta problemática, a proposta deste trabalho é apresentar um metódo para que tal conhecimento seja exposto para o nosso público e que possa ser, por eles, compreendido.

1.2 O Surgimento dos números Racionais

O percurso dos números racionais foi aceito com muito mais tranquilidade do que os números negativos, que foram considerados absurdos por mais de quinze séculos. Os números racionais surgiram da necessidade da medição. Por volta de 3000 anos a.C. o rio Nilo era considerado um rio de grande importância para o cultivo da civilização egípcia que lá viviam, por isso as terras às margens do rio eram extremamente cobiçadas por serem férteis. Segundo [2], os egípcios começaram cedo a se interessar pela astronomia e observaram que as inundações do Nilo eram separadas por 365 dias (estrela Sirius se levantava a leste logo antes do sol).Desta observação, surge, pois, o calendário solar. Nele, são estabelecidos 12 meses de 30 dias e mais cinco dias de festas.

Os egípcios que habitavam as margens deste rio tinham suas terras cobertas pelas águas em épocas de cheias, de julho a outubro, e quando o rio esvaziava todas as marcações que existiam para separar os territórios dos poucos agricultores para seu próprio cultivo eram destruídas e tinham que ser refeitas em todas as épocas a cada cheia. As marcações eram feitas por pessoas chamadas de esticadores de corda usando um instrumento feito de corda. Neste instrumento, de acordo com [7], eram dados vários nós e cada espaço entre os nós era interpretado pelos egípcios como a unidade de medida, chamada de *cúbito*.

O cúbito era uma unidade de medida do faraó, o seu comprimnto era equivalente à distância compreendida entre a ponta do dedo médio e o cotovelo do faraó e era usado para a marcação do terreno nas inundações causados pelas cheias do rio Nilo. Os esticadores faziam as medições e verificavam quantas unidades de medidas exatas cabiam em cada lado do terreno dos poucos agricultores. Muitas vezes, não cabia um número exato de unidades em um lado do terreno. A partir daí a civilização egípcia teve a necessidade de desenvolver um novo tipo de numeração, o número fracionário.

Esse tipo de numeração apareceu primeiramente com o numerador unitário, pois os egípcios entendiam essas frações como uma parte da unidade. O sinal que separava o número unitário do denominador era alongado e oval. Quando se tinha a necessidade de expressar uma fração onde o numerador não era unitário, os egípcios as representavam como soma de frações onde todas eram unitárias, com excessão de $2/3$ e $3/4$ que tinham símbolos que as representavam. Quaisquer outras frações, diferente destas, eram decompostas como soma de frações com numerador igual a 1 e o símbolo de adição (mais) para separar essas frações não era usado, pois ainda não tinha sido inventado e como consequência disso os cálculos eram bastante complicados.

Todo esse conhecimento que possuímos hoje da Matemática egípcia vem de registros feitos em um documento conhecido como Papiro, material principal usado para fazer registros, como problemas matemáticos ligados ao cotidiano dos egípcios que muitas vezes ajudavam em situações reais vividas por este povo. Dentre tantos registros o que mais se destacou foi o longo papiro Rhind de origem egípcia de 1650 a.C. que contém 85 problemas com solução ligados à Aritmética e à Geometria e onde foi encontrado os registros sobre frações.

Apesar do cálculo com frações adotado pelos Egípcios ser complicado e pesado, a maneira de operar com as frações unitárias foi praticada durante muitos anos, no período grego e também na Idade Média.

Com a criação dos números naturais, ao longo dos anos não existia mais a necessidade de escrever um número fracionário como soma de outros números fracionários e este por sua vez passou a ser escrito como razão de dois números naturais. Por isso são chamados de números racionais.

Capítulo 2

Números Inteiros

O conjunto dos Números Inteiros é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$ graças a palavra alemã zahl, que quer dizer número. Como vimos no capítulo anterior foram mais de 1500 anos para que as raízes negativas fossem finalmente aceitas como número, até que este conjunto numérico foi denominado de Números Inteiros.

Ao longo da história, o homem se motivou a reconhecer o conjunto $\mathbb{Z}$ para responder a problemas que fatalmente caíam em questões como "$3-5$" ou "$1-9''$, esta também é uma motivação para que os alunos se interessem em conhecer este conjunto.

2.1 Construção do Conjunto dos Números Inteiros

Para construir o conjunto dos números Inteiros vamos admitir o conhecimento prévio do conjunto dos números Naturais, suas operações e propriedades. Vamos começar a construção relacionando o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ com $\mathbb{Z}$. Vamos definir um número inteiro como sendo uma classe de equivalência do produto cartesiano do conjunto dos números Naturais. Para issso vamos inicialmente levantar algumas questões para entendermos porque o conjunto $\mathbb{Z}$ foi escrito de tal forma.

Sabemos que os números negativos surgem da subtração de Naturais onde o minuendo é menor do que o subtraendo, tal operação não é fechada em $\mathbb{N}$, pois este resultado não é natural. As classes de equivalência deveriam ser todas as subtrações que resultariam em um número inteiro. Por exemplo, temos que o número 1 pode ser escrito através de subtrações entre números naturais:

$$1 = 3 - 2 = 8 - 7 = \cdots$$

Então poderíamos escrever a classe do número 1, que seria representada por qualquer par ordenado cuja a subtração de seus termos seja igual a 1:

$$\bar{1} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}/midx - y = 1\}$$

Contudo, o mesmo não acontece com o número -1, por exemplo, pois a subtração não é uma operação fechada em $\mathbb{N}$. Não é possível se criar classe de equivalência que seja reresentada por um par de números cuja a subtração resulte em -1 pois este resultado, assim como outros negativos, não faz sentido no conjunto natural.

$$-1 = 2 - 3 = 7 - 8 = \cdots$$

Por isso os matemáticos do século XIX, em alternativa à subtração, resolveram escrever as classes de equivalência $a - b = c - d$ de outra forma, $a + d = c + b$. E então se definiu a relação $\sim$, que transformou uma igualdade de diferenças em uma igualdade de somas através de uma equivalência de equações, como veremos a seguir.

Definição 2.1.1. *Sejam* $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*. Dizemos que* (a, b) *está relacionado com* (c, d) *quando* $a + d = c + b$*. Denotaremos tal relação de* $\sim$*.*

Exemplo 2.1.1. *De acordo com a definição acima podemos escrever:*

(a) (3,2)∼(8,7), pois $3 + 7 = 8 + 2$

(b) (5,3)∼(12,10) , pois $5 + 10 = 12 + 3$

(c) (2,3)∼(7,8), pois $2 + 8 = 7 + 3$

Note que os pares ordenados se relacionam quando a subtração de suas coordenadas coincide, mas, como estamos construindo $\mathbb{Z}$ fundamentado no conjunto $\mathbb{N}$ tal expressão não faz sentido.

Temos que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência pois ela é Reflexiva, Simétrica e Transitiva como mostraremos a seguir:

Reflexiva: Seja $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Temos que $(a, b) \sim (a, b)$ pois $a + b = a + b$.

Simétrica: Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se $(a, b) \sim (c, d)$ então $(c, d) \sim (a, b)$.
De fato, como $(a, b) \sim (c, d)$ temos que $a + d = c + b$ e graças a propriedade simétrica dos números Naturais podemos escrever $c + b = a + d$ logo, $(c, d) \sim (a, b)$.

Transitiva: Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ então $(c, d) \sim (a, b)$.
Sendo $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ então $a + d = c + b$ e $c + f = e + d$ e utilizando as propriedades da adição de números Naturais temos:
$a + d = c + b \Rightarrow a + d + f = c + b + f \Rightarrow a + f + d = b + c + f$.
Sabendo que $c + f = e + d$ e usando a lei do cancelamento e da comutatividade, temos:
$a + f + d = b + e + d \Rightarrow a + f = e + b \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$.

Logo, a relação $\sim$ é realmente de equivalência.

De acordo com o que vimos, existem infinitas diferenças distintas que representam o mesmo número inteiro, por isso vamos generalizar tais pares que representam um mesmo número inteiro.

Definição 2.1.2. *Seja* $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$*. A classe de equivalência do par ordenado* (a, b) *pela relação* $\sim$ *será denotada por* $\overline{(a, b)}$ *e representará todos os pares ordenados que se relacionam com* (a, b) *através de* $\sim$*.*

$$\overline{(a,b)} = \{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (a,b) \sim (x,y)\}$$

Exemplo 2.1.2.

(a) $\overline{(4,1)} = \{(3,0), (4,1), (5,2), (6,3), (7,4), ...\}$

(b) $\overline{(3,5)} = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7), ...\}$

(c) $\overline{(5,7)} = \{(1,3), (2,4), (3,5), (4,6), (5,7), ...\}$

Perceba que $\overline{(3,5)} = \overline{(5,7)}$. *Já que* $(3,5) \sim (5,7)$ *então suas classes de equivalências são iguais.*

Pela ideia inicial da construção de números inteiros, sabemos que todos os pares (x,y) que se relacionam com (a,b) através de $\sim$ são aqueles em que $x - y = a - b$. Desta forma, podemos finalmente estabelecer o conjunto dos números inteiros da forma seguinte.

Definição 2.1.3. *O conjunto quociente* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ *formado por todas as classes de equivalência* $\overline{(a,b)}$ *será representado por* $\mathbb{Z}$ *e denominado de conjunto dos números inteiros.*

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim = \left\{\overline{(a,b)} \mid (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\right\} \tag{2.1}$$

2.2 Adição de Números Inteiros

Vamos definir a operação denominada adição, representada pelo sinal de $+$. Vimos na seção anterior que os matemáticos encontraram uma forma alternativa para representar a subtração de números naturais. Intuitivamente sabemos que um número inteiro representado por $\overline{(a,b)}$ representa o valor de $a - b$ e vamos utilizar esta noção para visualizarmos onde queremos chegar para definirmos a operação soma.

$$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = a - b + c - d = (a+c) - (b+d) = \overline{(a+c, b+d)}$$

Definição 2.2.1. *Dados* $\overline{(a,b)}$ *e* $\overline{(c,d)}$ *pertencentes a* $\mathbb{Z}$, *definimos a soma* $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}$ *como sendo o inteiro* $\overline{(a+c, b+d)}$.

Vamos mostrar que a soma de números inteiros está bem definida, ou seja, a soma independe do representante da classe.

Teorema 2.2.1. *Se* $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ *e* $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$, *então* $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$.

Demonstração.

Sabemos que quando dois representantes de classe são iguais então eles se relacionam por uma relação de equivalência, que é o caso de $\sim$, logo temos que $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ então $\overline{(a,b)} \sim \overline{(a',b')}$ e $a + b' = a' + b$. Do mesmo modo temos que $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ então

$\overline{(c,d)} \sim \overline{(c',d')}$ e $c+d' = c'+d$.

Queremos mostrar que $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} + \overline{(c',d')}$ ou seja $\overline{(a+c,b+d)} \sim \overline{(a'+c',b'+d')}$.

Desta forma, tendo duas equações, $a+b' = a'+b$ e $c+d' = c'+d$, a soma dos primeiros termos será equivalente a soma dos segundos termos destas equações. Fazendo isto, temos:

$$(a+b') + (c+d') = (a'+b) + (c'+d) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a+c) + (b'+d') = (a'+c') + (b+d) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \overline{(a+c,b+d)} \sim \overline{(a'+c',b'+d')}.$$

□

Vamos mostrar também, no teorema a seguir, que a adição em $\mathbb{Z}$ tem as mesmas propriedades da adição em $\mathbb{N}$, é comutativa, associativa e tem $\overline{(0,0)}$ como elemento neutro. Tais propriedades serão muito utilizadas na manipulação do material concreto que será apresentado neste trabalho, em especial a propriedade do elemento neutro. Em alguns momentos, na proposta apresentada no capítulo 4, será necessário reconhecer o elemento neutro da adição além de operar com o mesmo.

Teorema 2.2.2. *A adição em $\mathbb{Z}$ é comutativa, associativa e tem $\overline{(0,0)}$ como elemento neutro.*

Demonstração.

1. *Comutativa:* Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

   Seja $\alpha = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ e $\beta = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ temos que:

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta = \quad & \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} & = \\
& \overline{(a+c,b+d)} & = \\
& \overline{(c+a,d+b)} & = \\
& \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} & = \beta + \alpha.
\end{aligned}$$

2. *Associativa:* Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

   Seja $\alpha = \overline{(a,b)}$, $\beta = \overline{(c,d)}$ e $\gamma = \overline{(e,f)}$, queremos mostrar que $\overline{(a,b)} + \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) = \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}\right) + \overline{(e,f)}$.

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)} + \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) = \quad & \overline{(a,b)} + \overline{(c+e, d+f)} && = \\ & \overline{(a+c+e, b+d+f)} && = \\ & \overline{(a+c, b+d)} + \overline{(e,f)} && = \left(\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)}\right) + \overline{(e,f)}.\end{aligned}$$

A propriedade associativa é utilizada quando temos a soma de números positivos e negativos. Esta propriedade permite que possamos efetuar uma diferença entre a soma de todos os números positivos e a de todos os negativos.

3. *Elemento Neutro:* Seja $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, vamos mostrar que $\overline{(0,0)}$ é o elemento neutro da adição, ou seja que $\overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} = \overline{(a,b)}$.

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)} + \overline{(0,0)} &= \\ \overline{(a+0, b+0)} &= \\ \overline{(a,b)}.\end{aligned}$$

□

Um componente extremamente importante de $\mathbb{Z}$ é o elemento oposto. É muito comum, e correto, se estabelecer o conjunto $\mathbb{Z}$ como sendo a união dos números Naturais com os seus opostos. Por isso, segue a definição de elemento oposto e a demonstração que o oposto de um número é único.

Definição 2.2.2. *Chamamos de elemento oposto de* $\alpha = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ *o elemento* $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$. *Chamaremos o elemento oposto de* α *de* $-\alpha$.

Teorema 2.2.3. *Todo número inteiro tem um único elemento oposto.*

Demonstração.
Seja $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, vamos mostrar que existe $\overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ tal que $\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}$ e logo em seguida vamos mostrar que é único.

$$\begin{array}{rcll}\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} & = & \overline{(0,0)} & \Leftrightarrow \\ \overline{(a+c, b+d)} & = & \overline{(0,0)} & \Leftrightarrow \\ a+c & = & b+d & .\end{array}$$

Para que isto aconteça $c = b$ e $d = a$, logo o elemento oposto de $\overline{(a,b)}$ existe e é da forma $\overline{(b,a)}$.

Vamos, agora, mostrar que o elemento oposto é único. Para isso, vamos supor que $\overline{(a,b)}$ tenha dois elementos opostos distintos, $\overline{(c,d)}$ e $\overline{(e,f)}$.

Sendo assim, temos que:

1)$\overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a+c, b+d)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow a+c = b+d.$

2) $\overline{(a,b)} + \overline{(e,f)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow \overline{(a+e, b+f)} = \overline{(0,0)} \Rightarrow a+e = b+f.$

De 1) e 2) temos que $a+e+b+d = b+f+a+c \Rightarrow d+e = c+f$, o que é um absurdo pois por hipótese $\overline{(c,d)} \neq \overline{(e,f)} \Rightarrow c+f \neq d+e$. Logo todos os números inteiros tem um único elemento oposto.

□

Este resultado é de suma importância para a atividade que iremos descrever no Capítulo 4. Em algumas situações, para resolver operações dentro do conjunto $\mathbb{Z}$ o elemento neutro deve ser construído, e para isso devemos adicionar dois números opostos.

De posse deste resultado, podemos definir uma nova operação em $\mathbb{Z}$ chamada *subtração* e representada pelo símbolo $-$.

2.2.1 Subtração de Números Inteiros

A subtração entre dois números inteiros x e y é representada por $x - y$ e, nesta seção, vamos perceber que esta operação nada mais é do que uma soma.

Definição 2.2.3. *Sejam x e y números inteiros. A subtração $x - y$ é dada por $x + (-y)$.*
.

Percebemos, e é importante que façamos nossos alunos perceberem, que a subtração entre x e y nada mais é do que a soma entre x e o oposto de y. Para esclarecer como operar com a subtração de inteiros vamos pormenorizar cada uma de suas propriedades no teorema a seguir.

Teorema 2.2.4. *Para x, y e $z \in \mathbb{Z}$ são válidas as seguintes propriedades:*

(a) $-(-x) = x$.

(b) $-x + y = y + (-x)$.

(c) $x - (-y) = x + y$.

(d) $-x - y = -(x + y)$.

(e) $x - (y + z) = x - y - z$

Demonstração.

(a) $-(-x) = x$.

Seja $x = \overline{(a,b)}$. Então vamos chamar de x' o elemento oposto de x, ou seja, $x' = -x = \overline{(b,a)}$. Assim, $-(-x)$ é o elemento oposto de x', ou seja, $-(-x) = -x' = -\overline{(b,a)} = \overline{(a,b)} = x$.

(b) $-x + y = y + (-x)$.

Seja $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$. Queremos mostrar que $-x + y = y + (-x)$, ou seja $\overline{(b,a)} + \overline{(c,d)} = \overline{(c,d)} + \overline{(b,a)}$.
De fato, os números $-x$ e y são inteiros e como a sua soma é comutativa, isto já bastaria para validar esta propriedade. Contudo, perceba que desenvolvendo $-x + y$, como feito abaixo, também concluimos que é igual a $y + (-x)$.

$$\overline{(b,a)} + \overline{(c,d)} = \overline{(b+c, a+d)} =$$
$$\overline{(c+b, d+a)} = \overline{(c,d)} + \overline{(b,a)}.$$

(c) $x - (-y) = x + y$.

Por definição sabemos que a subtração de dois números inteiros x e a equivale a soma de x com o elemento oposto de a.

$$x - a = x + (-a)$$

Façamos $a = -y$, então $-a = y$ e podemos escrever:

$$x - (-y) = x - a = x + (-a) = x + y$$

(d) $-x - y = -(x + y)$.

Seja $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$. Queremos mostrar que $-x - y = -(x + y)$, vejamos:

$$-x - y = -x + (-y) = \overline{(b,a)} + \overline{(d,c)} = \overline{(b+d, a+c)}. \tag{2.2}$$

Por outro lado, temos:

$$x + y = \overline{(a,b)} + \overline{(c,d)} = \overline{(a+c, b+d)}. \tag{2.3}$$

De acordo com este resultado, podemos concluir que $-(x + y)$ será o oposto do resultado encontrado imediatamente acima:

$$-(x + y) = \overline{(b+d, a+c)}. \tag{2.4}$$

Comparando os resultados das equações (2.2) e (2.4) conferimos que $-x-y = -(x+y)$.

(e) $x - (y + z) = x - y - z$

Seja $x = \overline{(a,b)}, y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$. Vamos desenvolver $x - (y + z)$ para chegarmos a $x - y - z$.

$$\begin{aligned} x - (y+z) = \quad & \overline{(a,b)} - \left(\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right) & = \\ & \overline{(a,b)} - \overline{(c+e, d+f)} & = \\ & \overline{(a,b)} + \overline{(d+f, c+e)} & = \\ & \overline{(a,b)} + \overline{(d,c)} + \overline{(f,e)} & = x - y - z. \end{aligned}$$

$\square$

2.3 Multiplicação de Números Inteiros

Assim como fizemos ao definir a adição em $\mathbb{Z}$, vamos utilizar a nossa percepção de que a classe $\overline{(a,b)}$ representa o valor $a - b$ para ilustrar a melhor forma de se definir a multiplicação de números inteiros. Sejam dois números inteiros $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$, vamos fazer uma manipulação algébrica sobre a multiplicação entre eles a fim de estabelecer com acerto esta operação.

$$x \cdot y = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = (a-b) \cdot (c-d) =$$
$$= ac + bd - ad - bc = (ac + bd) - (ad + bc) =$$
$$= \overline{(ac + bd, ad + bc)}.$$

Inteirados deste resultado, vamos à definição de multiplicação de números inteiros.

Definição 2.3.1. *Dados $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$ pertencentes a $\mathbb{Z}$, definimos o produto $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}$ como sendo o inteiro $\overline{(ac+bd, ad+bc)}$.*

Exemplo 2.3.1.

1. $\overline{(7,2)} \cdot \overline{(4,1)} = \overline{(28+2, 7+8)} = \overline{(30,15)}$
Perceba que a classe $\overline{(7,2)}$ representa o número 5 e a classe $\overline{(4,1)}$ representa 3. Efetuando a multiplicação entre eles obtemos 15 que equivale a classe encontrada $\overline{(30,15)}$.

2. $\overline{(2,5)} \cdot \overline{(3,1)} = \overline{(6+5, 2+15)} = \overline{(11,17)}$
Perceba que a classe $\overline{(2,5)}$ representa o número-3 e a classe $\overline{(3,1)}$ representa 2. Efetuando a multiplicação entre eles obtemos -6 que equivale a classe encontrada $\overline{(11,17)}$.

Vamos mostrar que a multiplicação está bem definida.
Como cada número inteiro pode ser representado por uma classe, vamos mostrar que o produto de dois inteiros não se altera mudando o representante da classe.

Teorema 2.3.1. *Se* $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ *e* $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$*, então* $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}$*.*

Demonstração.
Queremos mostrar que $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')}$ ou seja $\overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(a'c'+b'd', a'd'+b'c')}$. Por hipótese temos que:

$\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$ então $\overline{(a,b)} \sim \overline{(a',b')}$, ou seja:

$$a + b' = a' + b. \tag{2.5}$$

$\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ então $\overline{(c,d)} \sim \overline{(c',d')}$, ou seja:

$$c + d' = c' + d. \tag{2.6}$$

A seguir temos duas equações, a primeira resulta da multiplicação da equação (2.5) por c, e a segunda é a multiplicação da mesma equação por d:

Multiplicando ambos os termos por c: $ac + b'c = a'c + bc$.
Multiplicando ambos os termos por d: $ad + b'd = a'd + bd$.

Somando as equações encontradas acima obtemos:

$$ac + b'c + a'd + bd = a'c + bc + ad + b'd \tag{2.7}$$

Desta vez, manipulando a equação (2.6), multiplicando-a por a' e em seguida porb', encontramos respectivamente as duas equações a seguir:

Multiplicando ambos os termos por a': $a'c + a'd' = a'c' + a'd$.
Multiplicando ambos os termos por d: $b'c + b'd' = b'c' + b'd$.

Somando as equações encontradas acima obtemos:

$$a'c + a'd' + b'c' + b'd = a'c' + a'd + b'c + b'd' \tag{2.8}$$

Finalmente, somando as equações (2.7) e (2.8) e aplicando a lei do cancelamento para a soma de números Naturais, obtemos:

$$ac + b'c + a'd + bd + a'c + a'd' + b'c' + b'd = a'c + bc + ad + b'd + a'c' + a'd + b'c + b'd'$$

$$ac + bd + a'd' + b'c' = ad + bc + a'c' + b'd'$$

$$\overline{(ac+bd, ad+bc)} = \overline{(a'c'+b'd', a'd'+b'c')}$$

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(a',b')} \cdot \overline{(c',d')} \tag{2.9}$$

□

A multiplicação tem uma série de propriedades que são usadas de maneira trivial para facilitar os cálculos algébricos. Vamos enunciar e demonstrar cada uma delas.

Teorema 2.3.2. *Para a multiplicação em $\mathbb{Z}$ são válidas as propriedades comutativa, associativa, elemento neutro da multiplicação que é o elemento $\overline{(1,0)}$ e a distributiva em relação à adição. Também é válido o cancelamento multiplicativo, isto é, se $x, y, k \in \mathbb{Z}$, com $k \neq \overline{(0,0)}$ e $x \cdot k = y \cdot k$, então $x = y$.*

Demonstração.

1. A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa.

   Sejam $x, y \in \mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $x \cdot y = y \cdot x$.

   Seja $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ e $y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ temos que:

$$\begin{aligned} x \cdot y = &\ \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} \\ = &\ \overline{(ac+bd, ad+bc)} \\ = &\ \overline{(ca+db, da+cb)} \\ = &\ \overline{(ca+db, cb+da)} \\ = &\ \overline{(c,d)} \cdot \overline{(a,b)} \\ = &\ y \cdot x. \end{aligned}$$

   A propriedade comutativa é muito utilizada na multiplicação. Um exemplo é quando é efetuado o produto entre um número negativo e um positivo. Aplicar a definição de multiplicação em $(-3) \cdot (+2)$ é muito abstrato. Mas, sabendo que o resultado é o mesmo que $(+2) \cdot (-3)$, podemos aplicar a definição que consiste em somar duas parcelas iguais a -3.

2. A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é associativa.

   Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$. Vamos mostrar que $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$$\begin{aligned} x \cdot (y \cdot z) = &\ \overline{(a,b)} \cdot \left[\overline{(c,d)} \cdot \overline{(e,f)}\right] \\ = &\ \overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{c.e + d.f, c.f + d.e}\right) \\ = &\ \overline{[a.(c.e+d.f) + b.(c.f+d.e), a.(c.f+d.e) + b.(c.e+d.f)]} \\ = &\ \overline{(a.c.e + d.a.f + c.b.f + b.d.e, a.c.f + a.d.e + b.c.e + b.d.f)} \\ = &\ \overline{[e.(a.c+b.d) + f + (a.d+b.c), f.(a.c+b.d) + e.(a.d+b.c)]} \\ = &\ \overline{(a.c+b.d, a.d+b.c)} \cdot \overline{(e,f)} \\ = &\ \left[\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)}\right] \cdot \overline{(e,f)} \\ = &\ (x \cdot y) \cdot z. \end{aligned} \tag{2.10}$$

3. O elemento neutro da multiplicação no conjunto dos números inteiros é $\overline{(1,0)}$.

   Queremos mostrar que qualquer que seja $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, $x \cdot \overline{(1,0)} = \overline{(1,0)} \cdot x = x$, então:

$$x \cdot \overline{(1,0)} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(1,0)} = \overline{(a.1 + b.0, a.0 + b.1)} = \overline{(a,b)} = x \tag{2.11}$$

$$\overline{(1,0)} \cdot x = \overline{(1,0)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(1.a + 0.b, 0.a + 1.b)} = \overline{(a,b)} = x \tag{2.12}$$

   Comparando as equações (2.11) e (2.12) percebemos resultados iguais a x, logo mostramos que $\overline{(1,0)}$ é o elemento neutro da multiplicação.

4. A propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição é válida no conjunto dos números inteiros, ou seja, $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

   Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$. Vamos mostrar que $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

$$\begin{aligned} x \cdot (y + z) = & \ \overline{(a,b)} \cdot \left[\overline{(c,d)} + \overline{(e,f)}\right] \\ = & \ \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c + e, d + f)} \\ = & \ \overline{[a.(c + e) + b.(d + f), a.(d + f) + b.(c + e)]} \\ = & \ \overline{(a.c + a.e + b.d + b.f, a.d + a.f + b.c + b.e)} \\ = & \ \overline{(a.c + b.d, a.d + b.c)} + \overline{(a.e + b.f, a.f + b.e)} \\ = & \ \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} \\ = & \ x \cdot y + x \cdot z \end{aligned}$$

   A propriedade distributiva é utilizada de maneira trivial na resolução de equações. Assim como o cancelamento multiplicativo, que será demonstrado a seguir.

5. É válido o cancelamento multiplicativo em $\mathbb{Z}$.

   Sejam $x, y, k \in \mathbb{Z}$ com $k \neq \overline{(0,0)}$. Vamos mostrar que se $x \cdot k = y \cdot k$, então $x = y$.

   Seja $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, $y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ e $k = \overline{(m,n)} \in \mathbb{Z}$, $m \neq n$ temos que:

$$\begin{aligned}
x \cdot k = y \cdot k &\Rightarrow \\
\overline{(a,b)} \cdot \overline{(m,n)} = \overline{(c,d)} \cdot \overline{(m,n)} &\Rightarrow \\
\overline{(a.m+b.n, a.n+b.m)} = \overline{(c.m+d.n, c.n+d.m)} &\Rightarrow \\
\overline{(a.m+b.n, a.n+b.m)} \sim \overline{(c.m+d.n, c.n+d.m)} &\Rightarrow \\
a.m+b.n+c.n+d.m = c.m+d.n+a.n+b.m &\Rightarrow \\
m.(a+d)+n.(c+b) = m.(c+b)+n.(a+d).&
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $m \neq n$, suponhamos, sem perda de generalidade, que $m > n$, então podemos escrever que $m = n + p$ com $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
m.(a+d)+n.(c+b) = m.(c+b)+n.(a+d) &\Rightarrow \\
(n+p).(a+d)+n.(c+b) = (n+p).(c+b)+n.(a+d) &\Rightarrow \\
n.a+n.d+p.a+p.d+n.c+n.b = n.c+n.b+p.c+p.b+n.a+n.d &\Rightarrow \\
p.a+p.d = p.c+p.b \Rightarrow p.(a+d) = p.(c+b) &\Rightarrow \\
a+d = c+b \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} &\Rightarrow \\
x = y.&
\end{aligned}$$

De forma análoga, podemos supor que $m < n$, e também concluiremos que $x = y$.

□

Vamos mostrar que um produto só pode ser nulo se pelo menos um de seus fatores for nulo.

Proposição 2.3.1. *Se $x, y \in \mathbb{Z}$ e $x \cdot y = \overline{(0,0)}$, então $x = \overline{(0,0)}$ ou $y = \overline{(0,0)}$.*

Demonstração.

Seja $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$ e $y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ temos que $\overline{(a.c+b.d, a.d+b.c)} = \overline{(0,0)}$ daí concluimos que $a.c+b.d = a.d+b.c$.

Suponhamos que $\overline{(a,b)} \neq \overline{(0,0)}$ então $a \neq b$, tomemos $a > b$ então existe um $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $a = b + p$ e podemos escrever:

$$\begin{aligned}
(b+p).c + b.d = (b+p).d + b.c \quad &\Rightarrow \\
b.c + p.c + b.d = b.d + p.d + b.c \quad &\Rightarrow \\
p.c = p.d \quad &\Rightarrow \\
c = d \quad &\Rightarrow \\
y = \overline{(c,d)} = \overline{(0,0)}.&
\end{aligned}$$

De forma análoga, supondo $\overline{(c,d)} \neq \overline{(0,0)}$ encontraremos $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$. □

Finalmente vamos mostrar o que acontece quando a multiplicação envolve números negativos. Acredito que esta seja uma grande questão quando expomos tal assunto para os nossos alunos.

Proposição 2.3.2. *Sejam* $x = \overline{(a,b)}, y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$:

1. $(-x) \cdot y = -x \cdot y = -x \cdot y$.
2. $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

Demonstração.

1. Na seção anterior vimos que se um número inteiro $x = \overline{(a,b)}$ então o número $-x = \overline{(b,a)}$. Sabendo disso vamos comparar o valor de $(-x) \cdot y$, o de $-x \cdot y$ e o de $-x \cdot y$.

$$(-x) \cdot y = \overline{(b,a)} \cdot \overline{(c,d)} = \overline{(b.c + a.d, b.d + a.c)}$$

$$-x \cdot y = -\overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} = -\overline{(a.c + b.d, a.d + b.c)} = \overline{(a.d + b.c, a.c + b.d)}$$

$$x \cdot (-y) = -\overline{(a,b)} \cdot \overline{(d,c)} = \overline{(b.c + a.d, b.d + a.c)}$$

Percebemos pelos resultados das equações acima que $(-x) \cdot y = -x \cdot y = -x \cdot y$.

2. Vamos mais uma vez fazer uma comparação de resultados desenvolvendo $(-x) \cdot (-y)$ e então perceber que o resultado é o mesmo que o de $x \cdot y$.

$$\begin{aligned}
(-x) \cdot (-y) = &\quad \overline{(b,a)} \cdot \overline{(d,c)} &= \\
= &\quad \overline{(b.d + a.c, b.c + a.d)} &= \\
= &\quad \overline{(a.c + b.d, a.d + b.c)} &= \\
= &\quad \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} &= x \cdot y
\end{aligned}$$

□

Verifique que a proposição 2.3.2 é, na verdade, a regra de sinais da multiplicação. Ela mostra que o produto entre números negativos resulta em um número positivo e o produto entre um número positivo e um negativo resulta em um negativo. Ou seja, o produto de números com polaridades distintas resultam em números negativos, enquanto que o produto entre números de uma mesma polaridade resultam em números positivos.

Vimos anteriormente que a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição é válida no universo inteiro, vamos mostrar a validade desta propriedade em relação à subtração. Contudo, esta ação não seria necessária, já que a subtração entre a e b nada mais é do que a soma entre a e o oposto de b e esta propriedade já foi provada para a soma. esta ação será realizada pela importância de sua exposição para os alunos. Mesmo que já tenha sido explicada a distributiva da multiplicação em relação à adição, é fundamental que seja explanado, também, em relação à subtração.

Proposição 2.3.3. *Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Temos que $x \cdot (y - z) = x \cdot y - x \cdot z$ Chamamos tal propriedade de distributiva da multiplicação em relação à subtração.*

Demonstração.
Sejam $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $z = \overline{(e,f)}$

$$\begin{aligned}
x \cdot (y - z) &= \overline{(a,b)} \cdot \left[\overline{(c,d)} - \overline{(e,f)}\right] \\
&= \overline{(a,b)} \cdot \left[\overline{(c,d)} + \overline{(f,e)}\right] \\
&= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c+f, d+e)} \\
&= \overline{[a.(c+f) + b.(d+e), a.(d+e) + b.(c+f)]} \\
&= \overline{(a.c + a.f + b.d + b.e, a.d + a.e + b.c + b.f)} \\
&= \overline{(a.c + b.d, a.d + b.c)} + \overline{(a.f + b.e, a.e + b.f)} \\
&= \overline{(a.c + b.d, a.d + b.c)} - \overline{(a.e + b.f, a.f + b.e)} \\
&= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(c,d)} - \overline{(a,b)} \cdot \overline{(e,f)} \\
&= x \cdot y - x \cdot z
\end{aligned}$$

□

Notação:

No início desta Seção 2.3 definimos o produto de dois números inteiros x e y e o representamos por $x \cdot y$. Esta representação também pode ser feita por $x.y$ ou simplesmente por xy.

2.4 Relação de Ordem em $\mathbb{Z}$

Depois de construir o conjunto dos números inteiros e de definir suas operações, vamos mostrar que $\mathbb{Z}$ é um conjunto ordenado, para isso, inicialmente, vamos lembrar o que é um conjunto ordenado.

Definição 2.4.1. *Um conjunto não vazio A, munido de uma relação de ordem, é um conjunto ordenado.*
Uma relação binária R em um conjunto não vazio A, é uma relação de ordem em A quando satisfizer as seguintes condições:

1. *R é reflexiva.*

2. *R é antissimétrica.*

3. *R é transitiva.*

Para mostrar que $\mathbb{Z}$ é um conjunto ordenado temos que definir uma relação de ordem. É o que faremos a seguir.

Definição 2.4.2. *Dados os inteiros $\overline{(a,b)}$ e $\overline{(c,d)}$, escrevemos $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ (lê-se $\overline{(a,b)}$ é menor que ou igual a $\overline{(c,d)}$), quando $a+d \leq b+c$.*

Vamos mostrar que a relação que acabamos de definir, $\leq$ é uma relação de ordem em $\mathbb{Z}$.

1. A relação $\leq$ é reflexiva, ou seja,$\overline{(a,b)} \leq \overline{(a,b)}$.

   De fato, $\leq$ é reflexiva, ou seja,$\overline{(a,b)} \leq \overline{(a,b)}$ pois $a+b \leq b+a$.
   Em particular, $a+b = b+a$

2. R é antissimétrica, ou seja, se $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)}$, então $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

   Se $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ pela definição temos que $a+d \leq b+c$. Por outro lado, se $\overline{(c,d)} \leq \overline{(a,b)}$ então $b+c \leq a+d$, desta forma, pela relação de ordem dos números naturais temos que $a+d = b+c$, logo podemos concluir que $\overline{(a,b)} = \overline{(c,d)}$.

3. R é transitiva, ou seja, se $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e $\overline{(c,d)} \leq \overline{(e,f)}$, então $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$.

$$\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d \leq b+c. \tag{2.13}$$

$$\overline{(c,d)} \leq \overline{(e,f)} \Rightarrow c+f \leq d+e. \tag{2.14}$$

   Somando as equações (2.13) e (2.14) obtemos o seguinte resultado: $a+d+c+f \leq b+c+d+e$. Daí contatamos que $a+f \leq b+e$, até que finalmente concluimos que $\overline{(a,b)} \leq \overline{(e,f)}$.

Agora que mostramos que a relação $\leq$ é uma relação de ordem, o que torna o conjunto $\mathbb{Z}$ ordenado, vamos mostar que a Definição 2.4.2 está bem definida, ou seja, se $\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')}$, $\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')}$ e $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ então $\overline{(a',b')} \leq \overline{(c',d')}$.

$$\overline{(a,b)} = \overline{(a',b')} \Rightarrow a + b' = b + a' \tag{2.15}$$

$$\overline{(c,d)} = \overline{(c',d')} \Rightarrow c + d' = d + c' \tag{2.16}$$

$$\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \Rightarrow a + d \leq b + c \tag{2.17}$$

Somando b' e d' em ambos os membros da desigualdade (2.17) encontramos a desigualdade abaixo (2.18) e substituindo nela as equações (2.15) e (2.16) encontramos o resultado esperado na equação (2.19).

$$a + d \leq b + c \Rightarrow a + b' + d + d' \leq b + b' + c + d'. \tag{2.18}$$

$$a+b'+d+d' \leq b+b'+c+d' \Rightarrow b+a'+d+d' \leq b+b'+d+c' \Rightarrow \overline{(a',b')} \leq \overline{(c',d')} \tag{2.19}$$

Sendo assim podemos dizer que $\mathbb{Z}$ é um conjunto ordenado.

Definição 2.4.3. *Sejam $m, n \in \mathbb{Z}$,*

1. *se $m \leq n$, mas $m \neq n$, escrevemos $m < n$ e lê-se, m é menor do que n.*
2. *escrevemos $n \geq m$ como opção a $m \leq n$, e lemos n é maior que ou igual a m.*
3. *escrevemos $n > m$ como opção a $m < n$, e lemos n é maior do que m.*

O teorema a seguir exibirá a validade do cancelamento aditivo e multiplicativo que é utilizado de maneira corrente em desigualdades, assim como em equações.

Teorema 2.4.1. *A relação $\leq$ é compatível com as operações do conjunto dos números inteiros, ou seja, para quaisquer $x, y, k \in \mathbb{Z}$ é válido:*

(a) $x \leq y \Leftrightarrow x + k \leq y + k$

(b) $x \leq y$ *e* $k \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow x \cdot k \leq y \cdot k$.

(c) $x \leq y$ *e* $k < \overline{(0,0)} \Rightarrow x \cdot k \geq y \cdot k$.

Demonstração.

(a) $x \leq y \Rightarrow x + k \leq y + k$

Sejam $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, $y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ e $k = \overline{(m,n)} \in \mathbb{Z}$, temos que:

$$
\begin{aligned}
x \leq y \Rightarrow \quad & \overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)} \\
\Rightarrow \quad & a+d \leq c+b \\
\Rightarrow \quad & c+b = a+d+p, p \in \mathbb{N} \\
\Rightarrow \quad & c+m+b+n = a+m+d+n+p \\
\Rightarrow \quad & a+m+d+n \leq c+m+b+n \\
\Rightarrow \quad & \overline{(a+m,b+n)} \leq \overline{(c+m,d+n)} \\
\Rightarrow \quad & \overline{(a,b)} + \overline{(m,n)} \leq \overline{(c,d)} + \overline{(m,n)} \\
\Rightarrow \quad & x+k \leq y+k.
\end{aligned}
$$

(b) $x \leq y$ e $k \geq \overline{(0,0)} \Rightarrow x \cdot k \leq y \cdot k.$

Sejam $x = \overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, $y = \overline{(c,d)} \in \mathbb{Z}$ e $k = \overline{(m,n)} \in \mathbb{Z}, m \neq n$,sendo assim, por hipótese podemos escrever que: $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ e temos $a+d \leq c+b$. Logo existe um número natural p tal que:

$$c+b = a+d+p \tag{2.20}$$

Multiplicando a equação (2.20) por m e por n encontramos as equações (2.21) e (2.22) respectivamente.

$$cm+bm = am+dm+pm \tag{2.21}$$

$$cn+bn = an+dn+pn \tag{2.22}$$

Somando as equações (2.21) e (2.22) encontramos,

$$cm+bm+an+dn+pn = cn+bn+am+dm+pm \tag{2.23}$$

Sabendo que $k = \overline{(m,n)} \neq \overline{(0,0)}$ então $m \neq n$. Supondo $m > n$, existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $m = n+r$.

$$m = n+r \Rightarrow pm = pn+pr. \tag{2.24}$$

Substituindo (2.24)em (2.23) temos,

$$
\begin{aligned}
& & cm+bm+an+dn+pn = cn+bn+am+dm+pn+pr \\
&\Rightarrow & cm+dn+an+bm = am+bn+cn+dm+pr \\
&\Rightarrow & am+bn+cn+dm \leq cm+dn+an+bm \\
&\Rightarrow & \overline{(am+bn, an+bm)} \leq \overline{(cm+dn, cn+dm)} \\
&\Rightarrow & \overline{(a,b)} \cdot \overline{(m,n)} \leq \overline{(c,d)} \cdot \overline{(m,n)} \\
&\Rightarrow & x.k \leq y.k.
\end{aligned}
$$

(c) $x \leq y$ e $k < \overline{(0,0)} \Rightarrow x \cdot k \geq y \cdot k$.
Sejam $x = \overline{(a,b)}$, $y = \overline{(c,d)}$ e $k = \overline{(m,n)} \in \mathbb{Z}$, por hipótese podemos escrever que: $\overline{(a,b)} \leq \overline{(c,d)}$ o que implica em $a+d \leq c+b$. Logo existe um número natural p tal que:

$$c+b = a+d+p \tag{2.25}$$

Multiplicando a equação (2.25) por m e por n encontramos as equações (2.26) e (2.27) respectivamente.

$$cm+bm = am+dm+pm \tag{2.26}$$

$$cn+bn = an+dn+pn \tag{2.27}$$

Somando as equações (2.26) e (2.27) encontramos,

$$cn+bn+am+dm+pm = cm+bm+an+dn+pn \tag{2.28}$$

Sabendo que $k = \overline{(m,n)} < \overline{(0,0)}$ então $m < n$. Logo, existe um $r \in \mathbb{N}$ tal que $n = m+r$.

$$n = m+r \Rightarrow pn = pm+pr. \tag{2.29}$$

Substituindo (2.29) em (2.28) temos,

$$
\begin{aligned}
& cn+bn+am+dm+pm = cm+bm+an+dn+pm+pr \\
\Rightarrow\quad & cn+bn+am+dm = cm+bm+an+dn+pr \\
\Rightarrow\quad & am+bn+cn+dm \geq cm+dn+an+bm \\
\Rightarrow\quad & \overline{(am+bn, an+bm)} \geq \overline{(cm+dn, cn+dm)} \\
\Rightarrow\quad & \overline{(a,b)}\cdot\overline{(m,n)} \geq \overline{(c,d)}\cdot\overline{(m,n)} \\
\Rightarrow\quad & x.k \geq y.k.
\end{aligned}
$$

□

A lei de tricotomia também é válida em $\mathbb{Z}$, isto é, tomando dois inteiros quaisquer, ou eles são iguais ou um é maior do que o outro exclusivamente.

Teorema 2.4.2. ***(Lei da tricotomia dos inteiros)*** *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Z}$, apenas uma das situações, a seguir, ocorre: $x = y$ ou $x > y$ ou $x < y$.*

Demonstração.
Suponhamos, inicialmente, que duas destas situações ocorra simultaneamente. Perceberemos que é impossível.
Façamos $x = \overline{(a,b)}$ e $y = \overline{(c,d)}$.

- Se $x = y$ e $x > y$ ao mesmo tempo podemos concluir que:
  - $x = y \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d = c+b$
  - $x > y \Rightarrow \overline{(a,b)} > \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d > c+b$

  Como $a, b, c, d \in \mathbb{N}$ podemos afirmar que $a+d = p, p \in \mathbb{N}$ e que $c+b = q, q \in \mathbb{N}$. Assim podemos escrever os resultados encontrados anteriormente como $p = q$ e $p > q$ o que é um absurdo, pela lei de tricotomia dos números naturais.

- De forma análoga mostraremos que se $x = y$ e $x < y$ também encontraremos um absurdo. Nesse caso:
  - $x = y \Rightarrow \overline{(a,b)} = \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d = c+b$
  - $x < y \Rightarrow \overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d < c+b$

  Fazendo $a+d = p, p \in \mathbb{N}$ e $c+b = q, q \in \mathbb{N}$, temos que $p = q$ e $p > q$ o que é, mais uma vez, um absurdo, pela lei de tricotomia dos números naturais.

- Se $x > y$ e $x < y$ teremos o seguinte:
  - $x > y \Rightarrow \overline{(a,b)} > \overline{(c,d)} \Rightarrow a+d > c+b$

– $x < y \Rightarrow \overline{(a,b)} < \overline{(c,d)} \Rightarrow a + d < c + b$

Fazendo $a + d = p, p \in \mathbb{N}$ e $c + b = q, q \in \mathbb{N}$, temos que $p > q$ e $p < q$, novamente, absurdo, pelo mesmo motivo dos itens anteriores.

$\square$

Como este teorema foi demonstrado para dois inteiros quaisquer, podemos, em particular, comparar um número inteiro com o $\overline{(0,0)}$. O que acabou de ser demonstrado nos permite concluir que apenas uma das situações ocorre:

- $x = \overline{(0,0)}$ ou

- $x > \overline{(0,0)}$ ou

- $x < \overline{(0,0)}$.

Tal teorema mostra que a relação $\leq$ faz de $\mathbb{Z}$ um conjunto totalmente ordenado.

Definição 2.4.4. *Dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$, dizemos que:*

(a) $\overline{(a,b)}$ é positivo quando $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$

(b) $\overline{(a,b)}$ é não negativo quando $\overline{(a,b)} \geq \overline{(0,0)}$

(c) $\overline{(a,b)}$ é negativo quando $\overline{(a,b)} < \overline{(0,0)}$

(d) $\overline{(a,b)}$ é não positivo quando $\overline{(a,b)} \leq \overline{(0,0)}$

Esta definição está de acordo com a noção intuitiva sobre a classe $\overline{(a,b)}$ que demos no início do capítulo, a ideia é que tal classe representa a diferença entre a e b: $a - b$. Perceba que tal diferença é positiva, quando $a > b$, e a classe $\overline{(a,b)}$ é positiva quando $\overline{(a,b)} > \overline{(0,0)}$, ou seja, quando $a > b$. Em todos os outros itens a ideia inicial sobre a classe $\overline{(a,b)}$ também está de acordo com a definição.

É possível observar ainda que quando $\overline{(a,b)}$ é positivo, temos que $a > b$, então existe um número natural $p \neq 0$ tal que $a = b + p$. Tal igualdade pode ser escrita de acordo com a noção inicial de números inteiros, ou seja, como a diferença de dois números naturais, $a - b = p - 0$ e podemos concluir uma igualdade entre as classes $\overline{(a,b)} = \overline{(p,0)}$. De maneira equivalente, se $\overline{(a,b)}$ é negativo, existe um natural $p \neq 0$ tal que $b = a + p$ e podemos concluir que a diferença entre a e b é equivalente à diferença entre 0 e p, logo $\overline{(a,b)} = \overline{(0,p)}$.

Lembrando que um número inteiro ou é positivo, ou nulo, ou negativo, podemos escrever uma generalização para o conjunto dos números inteiros a partir da união de conjutos disjuntos.

$$\mathbb{Z} = \left\{ \overline{(0,m)} \mid m \in \mathbb{N}^* \right\} \cup \left\{ \overline{(0,0)} \right\} \cup \left\{ \overline{(m,0)} \mid m \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Notação:

1. Chamaremos de $\mathbb{Z}^* = \left\{\overline{(0,p)} \mid p \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \left\{\overline{(p,0)} \mid p \in \mathbb{N}^*\right\}$ o conjunto dos números inteiros não nulos.
2. Chamaremos de $\mathbb{Z}_-^* = \left\{\overline{(0,p)} \mid p \in \mathbb{N}^*\right\}$ o conjunto dos números inteiros negativos.
3. Chamaremos de $\mathbb{Z}_- = \left\{\overline{(0,p)} \mid p \in \mathbb{N}\right\}$ o conjunto dos números inteiros não positivos.
4. Chamaremos de $\mathbb{Z}_+^* = \left\{\overline{(p,0)} \mid p \in \mathbb{N}^*\right\}$ o conjunto dos números inteiros positivos.
5. Chamaremos de $\mathbb{Z}_+ = \left\{\overline{(p,0)} \mid p \in \mathbb{N}\right\}$ o conjunto dos números inteiros não negativos.

Escrever o conunto $\mathbb{Z}$ como a união de conjuntos disjuntos formados por números Naturais nos faz conjecturar que $\mathbb{Z}$ é infinito.
Para provar que tal conjectura é verdadeira vamos mostrar que existe uma função injetora de $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$.

Teorema 2.4.3. *O conjunto $\mathbb{Z}$ é infinito pois a função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = \overline{(n,0)}$ é injetora.*

Demonstração. Sejam n_1 e n_2 números naturais tais que $n_1 \neq n_2$. Temos que $f(n_1) = \overline{(n_1,0)}$ e $f(n_2) = \overline{(n_2,0)}$. Suponhamos que $f(n_1) = f(n_2)$, então $\overline{(n_1,0)} = \overline{(n_2,0)}$ o que implica em $n_1 = n_2$, o que é um absurdo pois consideramos inicialmente, justamente $n_1 \neq n_2$.
Logo se $n_1 \neq n_2$ então $f(n_1) \neq f(n_2)$.

□

Existe uma bijeção entre o conjunto dos números inteiros não negativos, $\mathbb{Z}_+$ e o conjunto dos Números Naturais, esses conjuntos são equipotentes, mais do que isso, o Teorema 2.4.4, a seguir, nos mostra que $\mathbb{Z}_+$ é uma cópia algébrica de $\mathbb{N}$.

Teorema 2.4.4. *Seja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ dada por $f(n) = \overline{(n,0)}$ injetora. São válidas as seguintes propriedades:*

(a) $f(m+n) = f(m) + f(n)$;

(b) $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$;

(c) Se $m \leq n$ então $f(m) \leq f(n)$.

Demonstração.

(a) Provemos que $f(m+n) = f(m) + f(n)$, descrevendo cada um dos membros desta igualdade:
$$f(m+n) = \overline{(m+n,0)} \tag{2.30}$$

$$f(m) + f(n) = \overline{(m,0)} + \overline{(n,0)} = \overline{(m+n,0)} \tag{2.31}$$

Comparando as equações (2.30) e (2.31) percebemos que $f(m+n) = f(m) + f(n)$.

(b) Mostremos que $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$ desenvolvendo cada uma das partes desta identidade.

$$f(m.n) = \overline{(m.n, 0)} \tag{2.32}$$

$$f(m).f(n) = \overline{(m, 0)} \cdot \overline{(n, 0)} = \overline{(m.n + 0.0, m.0 + n.0)} = \overline{(m.n, 0)} \tag{2.33}$$

Comparando as equações (2.32) e (2.33) percebemos que $f(m \cdot n) = f(m) \cdot f(n)$.

(c) Se $m \leq n$ então $f(m) \leq f(n)$. Se $m \leq n$ então existe um número natural p tal que $n = m+p$. Como $f(n) = \overline{(n, 0)}$ podemos escrever que $f(n) = f(m+p) = \overline{(m+p, 0)} = \overline{(m, 0)} + \overline{(p, 0)}$.

Quando comparamos este resultado com $f(m) = \overline{(m, 0)}$ fica claro que $f(m) \leq f(n)$.

□

A função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ exposta acima chama-se "imersão" de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{Z}$. Com ela evidenciamos que o conjunto dos números inteiros não negativos tem a mesma estrutura algébrica do conjunto dos Naturais. Por exemplo, a soma $1 + 2 = 3$ no conjunto dos naturais é equivalente à soma $\overline{(1, 0)} + \overline{(2, 0)} = \overline{(3, 0)}$ em $\mathbb{Z}_+$. As relações de multiplicação e desigualdade também se preservam.
Assim podemos considerar que $\mathbb{N}$ é um subconjunto de $\mathbb{Z}$, apesar de, por conceito, os números inteiros serem classes de equivalência de pares de números naturais, e essa afirmação, por tal ponto de vista, não fazer sentido.
Contudo, analisando algebricamente a função de imersão apresentada, percebemos que $\mathbb{Z}_+$ é o próprio $\mathbb{N}$.

Vamos, agora, passar a adotar a notação que utilizamos no Ensino Fundamental para representar os números inteiros. De acordo com a equivalência notada entre os conjuntos $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}_+$ através da função f do Teorema 2.4.3, podemos escrever o natural m, como sendo $\overline{(m, 0)}$ e o seu simétrico $\overline{(0, m)}$ que pode ser representado por $-\overline{(m, 0)}$ vamos representá-lo por $-m$.

Agora, enfim, podemos assumir:

$$\overline{(a, b)} = \overline{(a, 0)} + \overline{(0, b)} = \overline{(a, 0)} - \overline{(b, 0)} = a - b.$$

Perceba que neste momento estamos utilizando a notação usual do Ensino Fundamental, contudo é importante lembrar que todas as propriedades relatadas neste capítulo continuam sendo válidas para estes números, já que o inteiro 1 nada mais é do que a classe $\overline{(1, 0)}$ e o -1 é $-\overline{(1, 0)}$ ou ainda $\overline{(0, 1)}$, como for conveniente.

Temos também que um número inteiro qualquer, representado pela classe $\overline{(a, b)}$ pode ser considerado como:

- $\overline{(z, 0)}$, desde que $a \geq b$ e $a - b = z$
- $\overline{(0, z)}$ ou $-\overline{(z, 0)}$, desde que $a < b$ e $b - a = z$

Definição 2.4.5. *Um número inteiro x é inversível se existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x.y = 1$. Chamamos y de inverso de x e o denotamos por x^{-1}.*

Teorema 2.4.5. *Os únicos elementos inversíveis de $\mathbb{Z}$ são 1 e -1.*

Demonstração.
Dado $p \in \mathbb{Z}$ suponhamos que p seja inversível e que o seu inverso seja o inteiro p^{-1}. Sendo assim temos que $p \cdot p^{-1} = 1$. De acordo com a proposição 2.3.2 temos que p e p^{-1} tem a mesma polaridade, pois o seu produto está resultando em um número positivo.

Sejam $p = \overline{(p, 0)}$, $q = \overline{(q, 0)}$ e $1 = \overline{(1, 0)}$. O produto entre p e q pode ser escrito como abaixo.

$$p \cdot q = \overline{(p, 0)} \cdot \overline{(q, 0)} = \overline{(p \cdot q, 0)} = \overline{(1, 0)}$$

Concluimos que $p \cdot q = 1$. Como p e q são números inteiros então as únicas possibilidade para o produto entre eles ser igual a 1 é que $p = q = 1$ ou $p = q = -1$.

Assim, concluimos que os únicos inteiros inversíveis são 1 e -1.

□

Veremos no próximo capítulo que a operação de divisão será definida utilizando o inverso multiplicativo de um número, por este motivo não estabelecemos aqui a operação divisão no universo Inteiro, afinal vimos $\mathbb{Z}$ tem apenas dois elementos inversíveis.
Conclusivamente, podemos considerar:

$$\mathbb{Z} = \{-m \mid m \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^* = \{..., -m, ... - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., m, ...\}.$$

Capítulo 3

Números Racionais

Os números racionais são construídos no Ensino Fundamental a partir da razão de dois números inteiros, onde o consequente, também chamado de denominador não pode ser nulo. Neste capítulo vamos construir o conjunto dos números racionais, representados por $\mathbb{Q}$, a partir do conjunto $\mathbb{Z}$, de forma análoga à construção de números inteiros, na qual utilizamos $\mathbb{N}$ na construção.

No capítulo anterior usamos uma relação de equivalência para construir o conjunto $\mathbb{Z}$, as classes de equivalência representavam de forma intuitiva a diferença de dois números naturais. Vamos desenvolver o mesmo princípio para construir $\mathbb{Q}$, será estruturado uma relação de equivalência utilizando o conjunto dos inteiros, que já é conhecido. Intuitivamente vamos formar classes de equivalência que representam a divisão entre dois números inteiros.

Todavia, a divisão não é uma operação fechada em $\mathbb{Z}$, pois o resultado do quociente de dois números inteiros pode não ser inteiro. Sendo assim vamos utilizar aqui, também, um artifício para definir a relação de equivalência que irá gerar o conjunto dos racionais, como veremos a seguir.

3.1 Construção do Conjunto dos Números Racionais

Para definir o conjunto $\mathbb{Q}$ no Ensino Fundamental utilizamos a fração, ou razão, de números inteiros $\frac{a}{b}, b \neq 0$. Contudo, neste momento, vamos construir este mesmo conjunto a partir de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ através da relação $\sim$ definida a seguir.

Definição 3.1.1. *Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Dizemos que (a, b) está relacionado com (c, d) quando $a \cdot d = b \cdot c$. Denotaremos tal relação de $\sim$.*

Exemplo 3.1.1. *De acordo com a definição acima podemos escrever:*

1. *(2,3)$\sim$(4,6), pois* $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

2. $(-6, -9) \sim (8, 12)$, *pois* $-6 \cdot 12 = -9 \cdot 8$.

3. $(-10, -15) \sim (12, 18)$, *pois* $-10 \cdot 18 = -15 \cdot 12$.

Perceba que dizer que $a.d = b.c$ é o mesmo que escrever $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Este é um artifício usado já que a divisão não é fechada em $\mathbb{Z}$. Então dois pares ordenados são equivalentes se a razão entre suas coordenadas, na mesma ordem, coincidem.

Temos que a relação $\sim$ é uma relação de equivalência pois ela é reflexiva, simétrica e transitiva como mostraremos a seguir:

Reflexiva: Seja $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Temos que $(a, b) \sim (a, b)$ pois $a.b = b.a$, de acordo com a propriedade comutativa de $\mathbb{Z}$.

Simétrica: Sejam $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Se $(a, b) \sim (c, d)$ então $(c, d) \sim (a, b)$.
Tomando que $(a, b) \sim (c, d)$ temos que $a.d = b.c$.
Graças a propriedade simétrica dos números Inteiros podemos escrever $b.c = a.d$ e pela comutativa que $c.b = d.a$. Logo, $(c, d) \sim (a, b)$.

Transitiva: Sejam $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$. Se $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ então $(a, b) \sim (e, f)$.
Sendo $(a, b) \sim (c, d)$ e $(c, d) \sim (e, f)$ então $a.d = b.c$ e $c.f = d.e$. Utilizando as propriedades aritméticas de números Inteiros vamos mostrar que $(a, b) \sim (e, f)$.
Como $(a, b) \sim (c, d)$ podemos escrever que $a.d = b.c$. Multiplicando ambos os termos da igualdade por f temos que $a.d.f = b.c.f$. Por outro lado, sabendo que $c.f = d.e$ substituimos em $a.d.f = b.c.f$ o que resulta em $a.d.f = b.d.e$.
Temos, por hipótese, que $d \neq 0$ então o resultado $a.d.f = b.d.e$ é equivalente a $a.f = b.e$ e consequentemente $(a, b) \sim (e, f)$.
Logo, a relação $\sim$ é realmente de equivalência.

Definição 3.1.2. *Dado $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, denotamos por $\frac{a}{b}$ a classe de equivalência do par (a, b) pela relação $\sim$ da Definição 3.1.1 acima. Assim:*

$$\frac{a}{b} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (a, b)\} \tag{3.1}$$

A classe de equivalência $\frac{a}{b}$ também é chamada de fração, onde a é o numerador da fração e b é o denominador.

Exemplo 3.1.2.

$$\frac{8}{10} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid (x, y) \sim (8, 10)\} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \mid 10.x = 8.y\}$$

Desta forma, $(4, 5) \in \frac{8}{10}$; $(-20, -25) \in \frac{8}{10}$; $(2, 3) \notin \frac{8}{10}$.

Perceba que $\frac{4}{5} = \frac{8}{10}$. De fato, como $(4, 5) \sim (8, 10)$ as classes de equivalência geradas por eles são iguais. A partir desta definição fica bem claro o significado de fração. Esta é a mesma notação utilizada com os nossos alunos. Uma fração tem infinitos representantes que são, na verdade, todos os elementos da classe que se conectam através da relação $\sim$. Chamamos estas frações de equivalentes.

Teorema 3.1.1. *(Propriedade fundamental das frações). Se (a,b) e (c,d) são elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, então $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ se, e somente se, $a.d=b.c$.*

Demonstração.
De imediato, usando a definição da relação $\sim$ podemos escrever:

$$\tfrac{a}{b}=\tfrac{c}{d}\Leftrightarrow(a,b)\sim(c,d)\Leftrightarrow a.d=b.c.$$

□

Esta propriedade é muito útil para verificarmos de forma rápida se duas frações são equivalentes. Além disso, é através dela que podemos determinar frações que estão conectadas pela relação $\sim$, da seguinte forma.

Seja $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ então pela propriedade fundamental das frações podemos escrever que $a.d=b.c$.

Agora, tome $k\in\mathbb{Z}^*$, pelo item 5 da Proposição2.3.2 temos que $a.d.k=b.c.k$ e podemos escrever que $\frac{a}{b}=\frac{k.c}{k.d}$. Ou seja, temos por hipótese que $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ e construimos que $\frac{a}{b}=\frac{k.c}{k.d}$.
Utilizando a propriedade transitiva, temos que $\frac{c}{d}=\frac{k.c}{k.d}$, isto é, essas frações são equivalentes, ou seja representantes de uma mesma classe.

Constatamos que para determinar frações equivalentes basta multiplicar ambos os termos de uma fração por um número inteiro não nulo.

De posse do significado de fração e depois da construção da relação $\sim$, finalmente podemos definir formalmente o conjunto dos números racionais.

Definição 3.1.3. *O conjunto dos números racionais é denotado pelo simbolo $\mathbb{Q}$ e representa o conjunto quociente de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ pela relação de equivalência $\sim$, da seguinte forma,*

$$\mathbb{Q}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim\ =\left\{\frac{a}{b};a\in\mathbb{Z}\quad e\quad b\in\mathbb{Z}^*\right\}\tag{3.2}$$

3.2 Adição de Números Racionais

Sabemos que para somar frações de um mesmo denominador devemos adicionar os numeradores e conservar o denominador. Quando as frações tem denominadores distintos, o processo para somá-las consiste primeiro em determinar frações equivalentes às parcelas dadas para então efetuar o processo de soma para frações com um mesmo denominador. Contudo, vamos generalizar a operação soma em um único processo.

Definição 3.2.1. *Dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ pertencentes a $\mathbb{Q}$, definimos a soma $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ como sendo o racional $\frac{a.d+c.b}{b.d}$.*

Exemplo 3.2.1. *Soma de frações.*

(a) $\frac{2}{5}+\frac{3}{2}=\frac{2.2+3.5}{5.2}=\frac{19}{10}$

(b) $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5.3+1.6}{6.3} = \frac{21}{18} = \frac{7}{6}$

(c) $\frac{11}{4} + \frac{3}{1} = \frac{11.1+3.4}{4.1} = \frac{23}{4}$

Vamos mostrar que a soma de frações está bem definida, ou seja, a soma independe do representante da classe.

Teorema 3.2.1. *Se* $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ *e* $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$*, então* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$.

Demonstração.

Sabemos que quando dois representantes de classe são iguais podemos aplicar a propriedade fundamental das frações. Assim se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$então $a \cdot b' = a' \cdot b$. Do mesmo modo temos que se $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ então $c \cdot d' = c' \cdot d$.

Queremos mostrar que $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'}$ ou seja $\frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d} = \frac{a' \cdot d' + c' \cdot b'}{b' \cdot d'}$.
Por hipótese temos as equações:

$$a \cdot b' = a' \cdot b \tag{3.3}$$

$$c \cdot d' = c' \cdot d \tag{3.4}$$

Vamos multiplicar a equação (3.3) por $(d \cdot d')$ e a equação (3.4) por $(b \cdot b')$ e somar as equações obtidas encontrando (3.8):

$$a.b' \cdot (d.d') = a'.b \cdot (d.d') \tag{3.5}$$
$$c.d' \cdot (b.b') = c'.d \cdot (b.b') \tag{3.6}$$
$$a.b' \cdot (d.d') + c.d' \cdot (b.b') = a'.b \cdot (d.d') + c'.d \cdot (b.b') \tag{3.7}$$
$$a.d \cdot (b'd') + c.b \cdot (b'd') = a'.d' \cdot (b.d) + c'.b' \cdot (b.d) \tag{3.8}$$

A equação (3.8) foi obtida aplicando a propriedade comutativa da multiplicação em cada uma das parcelas da equação (3.8). Utilizando a propriedade distributiva dos números inteiros e a propriedade fundamental das frações na equação (3.8) obtemos:

$$(a.d + c.b).(b'd') = (a'.d' + c'.b').(b.d) \Rightarrow \frac{a.d + c.b}{b.d} = \frac{a'.d' + c'.b'}{b'.d'}. \tag{3.9}$$

□

Os elementos do conjunto dos números racionais apresentam as mesmas propriedades da adição do conjunto dos inteiros, propriedades estas que são úteis para a resolução de cálculos algébricos.

Teorema 3.2.2. *A adição em* $\mathbb{Q}$ *é comutativa, associativa, tem* $\frac{0}{1}$ *como elemento neutro e todos os seus elementos apresentam elemento oposto.*

Demonstração.

1. *Comutativa:* Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Vamos mostrar que $x + y = y + x$.

   Seja $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ temos que $x + y = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+c.b}{b.d} = \frac{c.b+a.d}{d.b} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b} = x + y$.

2. *Associativa:* Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$. Vamos mostrar que $x + (y + z) = (x + y) + z$.

$$
\begin{aligned}
x + (y + z) = &\quad \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) \\
= &\quad \frac{a}{b} + \left(\frac{c.f+e.d}{d.f}\right) \\
= &\quad \frac{a.d.f+c.f.b+e.d.b}{b.d.f} \\
= &\quad \frac{(a.d+b.c).f+e.(d.b)}{b.d.f} \\
= &\quad \frac{a.d+b.c}{b.d} + \frac{e}{f} \\
= &\quad \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \\
= &\quad (x + y) + z.
\end{aligned}
$$

3. *Elemento Neutro:* Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, vamos mostrar que $\frac{0}{1}$ é o elemento neutro da adição, ou seja que $x = \frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

   i) $\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a.1+0.b}{b.1} = \frac{a}{b}$

   ii) $\frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0.b+a.1}{1.b} = \frac{a}{b}$

4. *Elemento oposto:* Qualquer que seja o número racional $x = \frac{a}{b}$ vamos mostrar que existe apenas um x' tal que $x + x' = \frac{0}{1}$.
   Seja $x' = \frac{-a}{b}$, então $x + x' = \frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{a.b+(-a.b)}{b.b} = \frac{0}{b.b} = \frac{0}{1}$
   Suponhamos que exista um $x'' = \frac{c}{d} \neq \frac{-a}{b}$ tal que $x + x'' = \frac{0}{1}$ então,

$$x + x'' = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d+c.b}{b.d} = \frac{0}{1}$$

E pela propriedade fundamental das frações temos que $(a.d + c.b) \cdot 1 = b \cdot d \cdot 0$, ou seja $a.d + c.b = 0$. Sendo assim, para ocorrer $a.d + c.b = 0$, pela propriedade do elemento oposto dos números inteiros $a.d$ e $c.b$ são números opostos, ou seja, $c.b = -a.d$, sem perda de generalidade. Logo, em contradição à nossa suposição inicial, temos que $\frac{c}{d} = \frac{-a}{b}$, o que é um absurdo. Concluimos, então, que o elemento oposto de $\frac{a}{b}$ é único e igual a $\frac{-a}{b}$.

□

Denotamos o elemento oposto de x por $-x$.

3.2.1 Subtração de Números Racionais

Vamos mostrar que a subtração e suas propriedades também são válidas no conjunto dos Racionais.

Definição 3.2.2. *Sejam x e y números racionais. A subtração $x-y$ é dada por $x+(-y)$.*

Mais uma vez temos que a subtração entre x e y nada mais é do que a soma entre x e o oposto de y.

Proposição 3.2.1. *Para x, y e $z \in \mathbb{Q}$ são válidas as seguintes propriedades:*

(a) $-(-x) = x$

(b) $-x + y = y + (-x)$

(c) $x - (-y) = x + y$

(d) $-x - y = -(x + y)$

(e) $x - (y + z) = x - y - z.$

Demonstração.

(a) $-(-x) = x$.

Seja $x = \frac{a}{b}$. Então vamos chamar de x' o elemento oposto de x, ou seja, $x' = -x = \frac{-a}{b}$. Assim, $-(-x)$ é o elemento oposto de x', $-(-x) = -x' = \frac{-(-a)}{b} = \frac{a}{b} = x$.

(b) $-x + y = y + (-x)$.

Seja $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. Queremos mostrar que $-x+y = y+(-x)$, ou seja $\frac{-a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{-a}{b}$. De fato,

$$\frac{-a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{-a.d+c.b}{b.d} = \frac{c.b+(-a.d)}{d.b} = \frac{c}{d} + -\left(\frac{-a}{b}\right)$$

(c) $x - (-y) = x + y$.

Por definição sabemos que a subtração de dois números inteiros x e a equivale a soma de x com o elemento oposto de a.

$$x - a = x + (-a)$$

Façamos $a = -y$, então $-a = y$ e podemos escrever:

$$x - (-y) = x - a = x + (-a) = x + y$$

(d) $-x-y=-(x+y)$.

Seja $x=\frac{a}{b}$ e $y=\frac{c}{d}$. Queremos mostrar que $-x-y=-(x+y)$, vejamos:

$-x-y=-x+(-y)=\frac{-a}{b}+\frac{(-c)}{d}=\frac{-a.d+(-c).b}{b.d}=\frac{-a.d-c.b}{b.d}=\frac{-(a.d+c.b)}{b.d}=-\frac{a.d+c.b}{b.d}=-\left(\frac{a.d+c.b}{b.d}\right)=-(x+y)$.
Logo, $-x-y=-(x+y)$.

(e) $x-(y+z)=x-y-z$

Seja $x=\frac{a}{b}, y=y=\frac{c}{d}$ e $z=y=\frac{e}{f}$. Vamos desenvolver $x-(y+z)$ para chegarmos a $x-y-z$.

$$\begin{aligned}
x-(y+z)= & \frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)\\
= & \frac{a}{b}-\left(\frac{c.f+e.d}{d.f}\right)\\
= & \frac{a.d.f-c.f.b-e.d.b}{b.d.f}\\
= & \frac{a.d-c.b)}{b.d}-\frac{e}{f}\\
= & \frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\\
= & x-y-z.
\end{aligned}$$

□

3.3 Multiplicação de Números Racionais

Assim como fizemos para definir a soma de números racionais, vamos utilizar dos nossos conhecimentos prévios para definir a multiplicação neste conjunto.

Definição 3.3.1. *Dados $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ pertencentes a $\mathbb{Q}$, definimos o produto como sendo o racional $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}$, podendo escrever, simplesmente, $\frac{ac}{bd}$.*

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}=\frac{ac}{bd} \tag{3.10}$$

Exemplo 3.3.1.

(a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{2}=\frac{2.3}{5.2}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$

(b) $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5.1}{6.3}=\frac{5}{18}$

(c) $\frac{11}{4}\cdot\frac{3}{1}=\frac{11.3}{4.1}=\frac{33}{4}$

Teorema 3.3.1. *A multiplicação de frações está bem definida. Sejam* $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ *e* $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$*, então* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$.

Demonstração.

Sabendo das seguintes implicações,

1. $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \Rightarrow a.b' = a'b$ e

2. $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'} \Rightarrow c.d' = c'd$.

Queremos mostrar que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$.

Dizer que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'}$ implica em dizer que $acb'd' = a'c'bd$,utilizando a propriedade comutativa dos números inteiros e redesenhando esta equação, $(ab') \cdot (cd') = (a'b) \cdot (c'd)$ percebemos, a partir das equações (1) e (2), que ela é, de fato, verdadeira.

□

A multiplicação em $\mathbb{Q}$ também goza de propriedades análogas às propriedades dos números inteiros.

Teorema 3.3.2. *A multiplicação em* $\mathbb{Q}$ *é comutativa, associativa , tem* $\frac{1}{1}$ *como elemento neutro e é válida a propriedade distributiva em relação à adição. Além disso, vale também, o cancelamento multiplicativo, ou seja, se* $x, y, k \in \mathbb{Q}$*, com* $k \neq \frac{0}{1}$ *e* $x \cdot k = y \cdot k$*, então* $x = y$.

Demonstração.

1. Comutativa: Sejam $x, y \in \mathbb{Q}$. Vamos mostrar que $x \cdot y = y \cdot x$.
   Seja $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$ temos que $x \cdot y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} = \frac{ca}{db} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = x \cdot y$.

2. Associativa: Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$. Vamos mostrar que
   $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.

$$
\begin{aligned}
x \cdot (y \cdot z) &= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) \\
&= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{ce}{df}\right) \\
&= \frac{ace}{bdf} \\
&= \frac{(ac.e)}{bd.f} \\
&= \left(\frac{ac}{bd}\right) \cdot \frac{e}{f} \\
&= \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} \\
&= (x \cdot y) \cdot z.
\end{aligned}
$$

3. Elemento Neutro: Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, vamos mostrar que $\frac{1}{1}$ é o elemento neutro da multiplicação, ou seja que $x = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a.1}{b.1} = \frac{a}{b}$$

Pela propriedade comutativa, já demonstrada neste Teorema 3.3.2, temos que $\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{1} \cdot \frac{a}{b}$ que é igual a $\frac{a}{b}$

4. Distributiva: Vamos mostrar a validade da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição no conjunto dos números racionais, ou seja, $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

   Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$

$$\begin{aligned} x \cdot (y+z) &= \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{cf+ed}{df} \\ &= \frac{a.(cf+ed)}{b.df} \\ &= \frac{acf+aed}{bdf} \\ &= \frac{b.(acf+aed)}{b.(bdf)} \\ &= \frac{bacf+baed}{bbdf} \\ &= \frac{ac(bf)+ae(bd)}{(bd)(bf)} \\ &= \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} \\ &= \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \\ &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

5. Cancelamento multiplicativo: Sejam $x, y, k \in \mathbb{Q}$ com $k \neq \frac{0}{1}$. Vamos mostrar que se $x \cdot k = y \cdot k$, então $x = y$.

   Sejam $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $k = \frac{m}{n}$, temos que se $x \cdot k = y \cdot k$ então podemos escrever que $\frac{am}{bn} = \frac{cm}{dn}$ e concluir que $a.m.d.n = c.m.b.n$. Pela lei do cancelamento multiplicativo de Números Inteiros a equação $a.m.d.n = c.m.b.n$ é equivalente a $a.d = c.b$ que pela Propriedade fundamental das frações corresponde a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Logo $x = y$.

□

A operação de divisão nem sempre é possível no conjunto dos Números Inteiros, contudo esta operação sempre é possível no conjunto dos Racionais devido a definição e teorema a seguir.

Definição 3.3.2. *Um elemento de $x \in \mathbb{Q}$ diz-se inversível se existe $x_1 \in \mathbb{Q}$ tal que $x \cdot x_1 = \frac{1}{1}$. Dizemos que x_1 é o inverso multiplicativo de x, ou simplesmente, o inverso de x e o representaremos por x^{-1}.*

Teorema 3.3.3. *Todo elemento não nulo de $\mathbb{Q}$ possui um único inverso multiplicativo.*

Demonstração.

Queremos determinar um elemento racional x_1 que quando multiplicado por $\frac{a}{b}$ resulte em $\frac{1}{1}$. Lembre que $\frac{1}{1}$ é uma classe que representa todas as frações em que o numerador e o denominador são iguais, portanto o elemento x_1 que procuramos é aquele que quando multiplicado por $\frac{a}{b}$ resulte em uma classe de termos iguais.

Seja $x = \frac{a}{b} \neq \frac{0}{1} \in \mathbb{Q}$. Tomemos $x_1 = \frac{b}{a}$, então $\frac{a}{b}.\frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab} = \frac{1}{1}$

Além disso, x_1 é único. Suponhamos, que exista $x_2 = \frac{c}{d} \neq x_1$, ou seja $\frac{c}{d} \neq \frac{b}{a}$,tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{ac}{bd} = \frac{1}{1} \Rightarrow ac = bd \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{a}.$$

O que é uma contradição.

Logo, $x_2 = x_1 = \frac{b}{a}$.

□

Como a fração é composta por números inteiros, podemos ter uma fração composta por numerador e denominador com sinais diferentes. Então, como fica o sinal da fração? Positivo ou negativo? Esta é uma pergunta que sempre é feita em sala de aula. Na proposição a seguir essa questão será pormenorizada.

Proposição 3.3.1. *Para $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, temos que,* $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} = -\frac{-a}{-b}$.

Demonstração.

Tendo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ são válidas todas as propriedades dos inteiros para as operações aritméticas sobre a e b, por este motivo todos os itens abaixo são verdadeiros.

- $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} \Leftrightarrow (-a).(-b) = a.b \Leftrightarrow a.b = a.b.$
- $\frac{a}{-b} = -\frac{a}{b} \Leftrightarrow a.b = -(a).(-b) \Leftrightarrow a.b = -(-ab) \Leftrightarrow a.b = a.b$
- $-\frac{a}{b} = -\frac{-a}{-b} \Leftrightarrow -(a).(-b) = -(-a).b \Leftrightarrow -(-ab) = -(-ab) \Leftrightarrow a.b = a.b$

□

De acordo com esta demonstração, quando um número racional é negativo, podemos considerar, exclusivamente, a ou$b$ negativo. Da mesma forma que, quando tomamos ambos os termos negativos, estamos considerando um número de $\mathbb{Q}$ positivo. Sem perda de generalidade, neste trabalho, vamos considerar que quando um número racional $\frac{a}{b}$ for negativo teremos $a < 0$ e $b > 0$.

A seguinte propriedade estabelece as regras de sinais para a multiplicação de números racionais, além de detalhar a propriedade distributiva em relação à subtração.

Proposição 3.3.2. *Se $x, y, z \in \mathbb{Q}$, então:*

1. $(-x).y = x.(-y) = -x.y$
2. $(-x).(-y) = x.y$

3. *(Propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração)* $x.(y-z) = x.y - x.z$.

Demonstração.
Sejam os números racionais $x = \frac{a}{b}$, $y = \frac{c}{d}$ e $z = \frac{e}{f}$.

1. Mostremos a validade de $(-x).y = x.(-y) = -x.y$. Para isto vamos desenvolver o primeiro e o segundo membro desta igualdade chegando a um mesmo resultado, o terceiro membro.
   - $(-x).y = \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \frac{c}{d} = -\frac{ac}{bd} = -x.y$.
   - $x.(-y) = \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{c}{d}\right) = -\frac{ac}{bd} = -x.y$.
2. Provemos que $(-x).(-y) = x.y$.
   $(-x).(-y) = \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{-a}{b} \cdot \frac{-c}{d} = \frac{ac}{bd} = x.y$.
3. Para verificar que $x.(y-z) = x.y - x.z$ vamos explanar o primeiro membro desta identidade para chegar ao segundo membro.

$$
\begin{aligned}
x \cdot (y-z) = & \quad \frac{a}{b} \cdot \left[\frac{c}{d} - \left(\frac{e}{f}\right)\right] \quad = \\
= & \quad \frac{a}{b} \cdot \left[\frac{c}{d} + \left(-\frac{e}{f}\right)\right] \\
= & \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \left(-\frac{e}{f}\right) \\
= & \quad \frac{ac}{bd} + \left(-\frac{ae}{bf}\right) \\
= & \quad \frac{ac}{bd} - \frac{ae}{bf} \\
= & \quad x.y - x.z.
\end{aligned}
$$

□

Perceba que todas as operações aritméticas do conjunto $\mathbb{Z}$ são mantidas quando mudamos para o conjunto Racional.

3.4 Relação de ordem em $\mathbb{Q}$

Neste momento vamos estabelecer uma relação de ordem dentro do conjunto $\mathbb{Q}$ para que possamos comparar elementos deste grupamento.

Definição 3.4.1. *Dados os inteiros $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$, escrevemos $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$, lê-se $\frac{a}{b}$ é menor que ou igual a $\frac{c}{d}$, quando $a \cdot d \leq b \cdot c$.*

Os símbolos $\geq$, $>$ e $<$ definem-se de forma análoga à que fizemos para a relação de ordem em $\mathbb{Z}$ na Definição 2.4.3.

Teorema 3.4.1. *A relação $\leq$, dada na Definição 3.4.1, está bem definida, ou seja, se $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ e $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ então $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.*

Demonstração.

Utilizando a hipótese temos que $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ então $a.b' = a'b$ temos também que $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ então $c.d' = c'd$. Partindo de que $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ queremos chegar em $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.
Para esta demonstração é importante lembrar que mesmo que alguma classe referida acima seja negativa, podemos, e vamos considerar que o termo localizado no denominador é positivo e atribuiremos o sinal de negativo para o numerador. Caso a classe seja positiva, temos ambos os termos maiores que zero. Portanto, todos os denominadores são maiores do que zero.

Partindo de$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ temos que $ad \leq bc$. Multiplicando ambos os termos desta desigualdade por b' ficamos com $ab'd \leq bcb'$. Usando que $ab' = a'b$ e substituindo no primeiro termo desta desigualdade constatamos que $a'bd \leq bcb'$ e pela lei do cancelamento multiplicativo temos que $a'd \leq cb'$.

Tomando que $a'd \leq cb'$ vamos multiplicar a desigualdade por d' o que gera $a'd'd \leq cd'b'$. Sabendo que $cd' = c'd$ e substituindo no segundo membro da desigualdade $a'd'd \leq cd'b'$ encontramos $a'd'd \leq c'db'$ que pela lei do cancelamento multiplicativo corresponde a $a'd' \leq c'b'$, logo $\frac{a'}{b'} \leq \frac{c'}{d'}$.

□

Teorema 3.4.2. *A relação $\leq$,é uma relação de ordem em $\mathbb{Q}$.*

Demonstração.

1. A relação $\leq$ é reflexiva, ou seja,$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$.

   De fato, $\leq$ é reflexiva, ou seja,$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}$ pois $a.b \leq a.b$. Em particular é igual.

2. $\leq$ é antissimétrica, ou seja, se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

   Se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ pela definição temos que $a.d \leq c.b$. Por outro lado, se $\frac{c}{d} \leq \frac{a}{b}$ então $c.b \leq a.d$. Como $c.b$ e $a.d$ são números inteiros, podemos considerar a sua relação de ordem e concluir que $a.d = c.b$. Logo, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

3. $\leq$ é transitiva, ou seja, se $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ e $\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f}$, então $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

   $$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \Rightarrow a.d \leq c.b \tag{3.11}$$

   $$\frac{c}{d} \leq \frac{e}{f} \Rightarrow c.f \leq e.d \tag{3.12}$$

   Multiplicando as equações (3.11) e (3.12) obtemos o seguinte resultado: $a.d.c.f \leq c.b.e.d$, que pela lei do cancelamento multiplicativo equivale a $a.f \leq e.b$ e implica que $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$.

Logo a relação $\leq$ é uma relação de ordem, o que torna o conjunto $\mathbb{Q}$ ordenado. □

Vamos utilizar no conjunto dos Números Racionais a mesma notação utilizada no conjunto dos Números Inteiros em 2.4.3.

Vamos mostrar que o princípio aditivo e o multiplicativo se conservam na relação $\leq$ deste conjunto. Esse resultado é muito utilizado na resolução de equações. Além disso, logo em seguida, vamos estabelecer que dois elementos racionais quaisquer ao serem comparados ou são equivalentes, ou um é maior do que o outro, ou seja a lei da tricotomia rege os números racionais

Teorema 3.4.3. *A relação $\leq$ definida acima é compatível com as operações em $\mathbb{Q}$, isto é, para quaisquer $x, y, k \in \mathbb{Q}$ vale:*

(a) $x \leq y \Leftrightarrow x + k \leq y + k$

(b) $x \leq y$ *e* $k \geq \frac{0}{1} \Rightarrow x.k \leq y.k.$

(c) $x \leq y$ *e* $k \leq \frac{0}{1} \Rightarrow x.k \geq y.k.$

Demonstração.
Sejam $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $k = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$,

(a) $x \leq yse, esomentesex + k \leq y + k$

$$\begin{aligned}
x - k \leq y - k \Leftrightarrow\ & \tfrac{a}{b} + \tfrac{m}{n} \leq \tfrac{c}{d} + \tfrac{m}{n} \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{an+bm}{nb} \leq \tfrac{cn+dm}{dn} \\
\Leftrightarrow\ & (an + bm).d.n \leq (cn + dm).b.n \\
\Leftrightarrow\ & (an + bm).d \leq (cn + dm).b \\
\Leftrightarrow\ & and + bmd \leq cnb + bmd \\
\Leftrightarrow\ & and \leq cnb \\
\Leftrightarrow\ & ad \leq cb \\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{a}{b} \leq \tfrac{c}{d}. \\
\Leftrightarrow\ & x \leq y.
\end{aligned}$$

(b) Se $x \leq y$ e $k \geq \frac{0}{1}$ então $x.k \leq y.k.$

Sabendo que $k \geq \frac{0}{1}$ podemos tomar que o numerador de k é não negativo e o seu denominador, positivo, ou seja $m \in \mathbb{Z}_+$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{a}{b} \leq \tfrac{c}{d} \Rightarrow &\quad ad \leq bc \\
\Rightarrow &\quad ab'd \leq bcb' \\
\Rightarrow &\quad ad.(mn) \leq bc.(mn) \\
\Rightarrow &\quad a.m.(dn) \leq c.m.(bn) \\
\Rightarrow &\quad \tfrac{a.m}{b.n} \leq \tfrac{c.m}{d.n} \\
\Rightarrow &\quad \tfrac{a}{b}.\tfrac{m}{n} \leq \tfrac{c}{d}.\tfrac{m}{n} \\
\Rightarrow &\quad x.k \leq y.k.
\end{aligned}$$

(c) $x \leq y$ e $k \leq \frac{0}{1}$ implica em $x.k \geq y.k$

Sendo $k \leq \frac{0}{1}$ sabemos que um dos termos de k, e apenas um, é menor que ou igual a zero. Tomemos, sem perda de generalidade, $m \in \mathbb{Z}_-$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{a}{b} \leq \tfrac{c}{d} \Rightarrow &\quad ad \leq bc \\
\Rightarrow &\quad ab'd \leq bcb' \\
\Rightarrow &\quad ad.(n) \leq bc.(n) \\
\Rightarrow &\quad adn \leq bcn.
\end{aligned}$$

Sabendo que $m \leq 0$ e utilizando a propriedade c do Teorema 2.4.1 na desigualdade $adn \leq bcn$ temos que:

$$\begin{aligned}
adn \leq bcn \Rightarrow &\quad adn.(m) \geq bcn.(m) \\
\Rightarrow &\quad a.m.(d.n) \geq c.m.(b.n) \\
\Rightarrow &\quad \tfrac{a.m}{b.n} \geq \tfrac{c.m}{d.n} \\
\Rightarrow &\quad \tfrac{a}{b}.\tfrac{m}{n} \geq \tfrac{c}{d}.\tfrac{m}{n}.
\end{aligned}$$

$\square$

Teorema 3.4.4. ***(Lei da tricotomia dos racionais)*** *Para quaisquer $x, y \in \mathbb{Q}$, apenas uma das situações, a seguir, ocorre: $x = y$ ou $x > y$ ou $x < y$.*

Demonstração.

Sejam $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$. Tomemos $a.d$ e $c.b$ que são números inteiros, pelo teorema 2.4.2 temos três possibilidades exclusivas:

- $a.d = c.b$ e então teremos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, logo $x = y$
- $a.d < c.b$ e então teremos $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ já que $b.d > 0$, logo $x < y$
- $a.d > c.b$ e então teremos $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ já que $b.d > 0$, logo $x > y$

□

Em particular, a lei de tricotomia dos racionais nos faz concluir que comparando um número racional r qualquer com o $\frac{0}{1}$ temos três possibilidades exclusivas, $r = \frac{0}{1}$ ou $r > \frac{0}{1}$ ou $r < \frac{0}{1}$. Como o produto de racionais resulta em um número racional então a partir da lei de tricotomia de racionais podemos dizer que este resultado ou é positivo ou é negativo ou é nulo. A "regra de sinais" que é sistematizada para a multiplicação de inteiros também pode ser utilizada ao multiplicar números racionais. E esta afirmação que é feita para os alunos de nível fundamental será demonstrada a seguir.

Proposição 3.4.1. *Para os números racionais genéricos $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, são válidas as propriedades:*

1. *Se $x.y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.*
2. *Se $x > 0$ e $y > 0$, então $x.y > 0$*
3. *Se $x > 0$ e $y < 0$, então $x.y < 0$*
4. *Se $x < 0$ e $y < 0$, então $x.y > 0$*

Demonstração. Para fazer esta demonstração vale lembrar que a, b, c, d são números inteiros e por isto usaremos a Proposição 2.3.2 para estes números.

1. Se $x.y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$.
   Seja $x = \frac{a}{b} \neq 0$, ou seja $a \neq 0$ então se $x.y = 0$ então podemos escrever que $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = 0$ implica em $\frac{ac}{bd} = 0$ logo $ac = 0$ Como $a \neq 0$ concluimos que $c = 0$. Logo, $y = \frac{c}{d} = \frac{0}{d} = \frac{0}{1} = 0$.

2. Se $x > 0$ e $y > 0$, então $x.y > 0$
   Se $x = \frac{a}{b} > 0$ então $a > 0$. Da mesma forma que se $y = \frac{c}{d} > 0$ então $c > 0$ logo $ac > 0$. Dessa forma $x.y$ é igual a $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ que por sua vez é igual a $\frac{ac}{bd}$. Como $ac > 0$ temos que $\frac{ac}{bd} > 0$, ou seja $x.y > 0$

3. Se $x > 0$ e $y < 0$, então $x.y < 0$.
Seja $x = \frac{a}{b} > 0$ então $a > 0$. Da mesma forma que tomando $y = \frac{c}{d} < 0$ então $c < 0$, logo $ac < 0$. Notemos que $x.y$ é igual a $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ que, por sua vez, é equivalente a $\frac{ac}{bd}$.
Como $ac < 0$ então $\frac{ac}{bd} < 0$, ou seja, $x.y < 0$.

4. Se $x < 0$ e $y < 0$, então $x.y > 0$
Sabendo que $x = \frac{a}{b} < 0$ então $a < 0$ e tomando $y = \frac{c}{d} < 0$ então $c < 0$, logo temos que $ac > 0$. Obsrvemos que $x.y = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$ então $\frac{ac}{bd}$.
Como $ac > 0$ temos que $\frac{ac}{bd} > 0$, o que significa que $x.y > 0$

$\square$

Notação: Assim como fizemos com o conjunto dos números inteiros, vamos usar notações semelhantes para representar alguns subconjuntos de $\mathbb{Q}$.

1. Chamaremos $\mathbb{Q}^* = \left\{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*\right\}$ de conjunto dos números racionais não nulos.

2. Chamaremos $\mathbb{Q}^*_- = \left\{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^*_- \times \mathbb{Z}^*_+\right\}$ de conjunto dos números racionais negativos.

3. Chamaremos $\mathbb{Q}_- = \left\{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}_- \times \mathbb{Z}^*_+\right\}$ de conjunto dos números racionais não positivos.

4. Chamaremos $\mathbb{Q}^*_+ = \left\{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}^*_+ \times \mathbb{Z}^*_+\right\}$ de conjunto dos racionais positivos.

5. Chamaremos $\mathbb{Q}_+ = \left\{\frac{a}{b} \mid (a,b) \in \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}^*_+\right\}$ de conjunto dos números racionais não negativos.

Já vimos que todas as operações aritméticas de $\mathbb{Z}$ são preservadas em $\mathbb{Q}$, agora estamos prontos para definir a função que mostrará que $\mathbb{Z}$ também tem uma cópia algébrica em $\mathbb{Q}$, vamos definir a função imersão injetora de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, que é exatamente a justificativa para afirmarmos que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Teorema 3.4.5. *Seja $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $i(n) = \frac{n}{1}$ para qualquer n inteiro, então i é injetora e preserva as operações e a relação de ordem de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, no seguinte sentido:*

1. *$i(m + n) = i(m) + i(n)$.*

2. *$i(m.n) = i(m) \cdot i(n)$.*

3. *Se $m \leq n$, então $i(m) \leq i(n)$.*

Demonstração.
Mostraremos inicialmente que i é injetora. Sejam n_1 e n_2 números inteiros tais que $n_1 \neq n_2$, vamos mostrar que $i(n_1) \neq i(n_2)$.
Temos por hipótese que $n_1 \neq n_2$, suponhamos, por absurdo, que $i(n_1) = i(n_2)$, ou seja, $\frac{n_1}{1} = \frac{n_2}{1}$. Mas isto equivale a dizer que $n_1 = n_2$, o que é um absurdo. Logo $n_1 \neq n_2$.

1. Provemos que $i(m+n) = i(m) + i(n)$.
   De fato, $i(m+n) = \frac{m+n}{1} = \frac{m.1+n.1}{1.1} \frac{m}{1} + \frac{n}{1} = i(m) + i(n)$.

2. Verifiquemos que $i(m.n) = i(m) \cdot i(n)$.

   Desenvolvendo $i(m.n)$ temos $\frac{m.n}{1} = \frac{m.n}{1.1} = \frac{m}{1}.\frac{n}{1} = i(m) \cdot i(n)$.

3. Vejamos que se $m \leq n$, então $i(m) \leq i(n)$. Tendo em vista que $m \leq n$, suponhamos, contrariamente que, $i(m) > i(n)$ então $\frac{m}{1} > \frac{n}{1}$ o que corresponde a afirmar que $m > n$, o que não condiz com a hipótese. Logo se $m \leq n$, então $i(m) \leq i(n)$.

□

A função $i(n)$ permite que qualquer número inteiro n possa ser escrito na forma racional como $\frac{n}{1}$, além de preservar as suas operações aritméticas e sua relação de ordem. Essa função também nos possibilita concluir que o conjunto dos números racionais é infinito, já que $i(n)$ é uma função injetora de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$, e sabemos que $\mathbb{N}$ está contido em $\mathbb{Z}$. Dessa forma, temos uma cópia algébrica dos Números Inteiros nos Racionais.

Neste capítulo definimos a operação soma representada pelo simbolo de $+$ e a operação subtração representada por $-$, a partir da soma. Percebemos que a subtração entre os números x e y nada mais é do que a soma entre x e o oposto de y. Definimos a operação multiplicação, representada por um ponto e agora, utilizando esta operação, vamos definir a divisão, denotada por $\div$ como veremos a seguir.

Definição 3.4.2. *Sejam $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Q}^*$ com $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, dizemos que x dividido por y é dado pelo produto entre x e o inverso de y, ou seja,*

$$x \div y = x \cdot y^{-1}.$$

Exemplo 3.4.1.

(a) $\frac{1}{2} \div \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$.

(b) $\frac{7}{2} \div \frac{5}{4} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{28}{10} = \frac{14}{5}$.

(c) $4 \div 2 = \frac{4}{1} \div \frac{2}{1} = \frac{4}{1} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = \frac{2}{1} = 2$.

Proposição 3.4.2. *Se $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ e $y \neq \frac{0}{1}$, então $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.*

Demonstração. Usando a definição de divisão, temos que $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ equivale a $\frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ que, por sua vez, corresponde a $\frac{ad}{bc}$. □

Notação:

A divisão $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ também pode ser representada por $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ ou $\frac{a}{b} : \frac{c}{d}$.

Como a divisão entre x e y é, na verdade, a multiplicação entre x e o inverso de y constatamos que a divisão proverá de todas as propriedades da multiplicação entre x e o inverso de y. Vamos, apenas, conhecer sobre o sinal do inverso de um número qualquer na propriedade a seguir. Ademais, veremos que sempre há um número racional entre dois números arbitrários deste conjunto. Essa afirmação é importante pois no conjunto $\mathbb{Z}$ não há elemento entre dois inteiros consecutivos, já no conjunto $\mathbb{Q}$, de acordo com essa afirmação, entre dois números quaisquer, inclusive consecutivos, sempre há um número racional o que nos faz concluir que não estamos trabalhando com um conjunto bem ordenado, pois podemos tomar um subconjunto de $\mathbb{Q}$ limitado inferiormente, como por exemplo $(x, +\infty)$ que é limitado inferiormente por x mas que não tem elemento mínimo já que pelo segundo item da propriedade a seguir, tomando um elemento y qualquer deste subconjunto sempre haverá um elemento entre eles. Veja a seguir.

Proposição 3.4.3. *Para os números racionais genéricos $x = \frac{a}{b}$ e $y = \frac{c}{d}$, são válidas as propriedades:*

1. *Se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$.*
2. *Se $x < y$ então $x < (x + y).2^{-1} < y$.*

Demonstração.

1. Se $x > 0$ então $x^{-1} > 0$. Seja $x = \frac{a}{b} > 0$, ou seja a eb tem o mesmo sinal e ambos são diferentes de zero. Logo, $x^{-1} = \frac{b}{a} > 0$.

2. Se $x > y$ então $x < (x + y).2^{-1} < y$.Seja $x < y$ então temos:

$$x < y \Rightarrow x + x < y + x \Rightarrow 2x < x + y \tag{3.13}$$

$$x < y \Rightarrow x + y < y + y \Rightarrow x + y < 2y \tag{3.14}$$

Através das equações (3.13) e (3.14) podemos escrever, $2x < x + y < 2y$. Multiplicando todos os termos por 2^{-1} obtemos,

$$2x < x + y < 2y \Rightarrow 2^{-1}.2x < 2^{-1}.(x + y) < 2^{-1}.2y \Rightarrow x < (x + y).2^{-1} < y.$$

□

De acordo com [5], apesar de $\mathbb{Q}$ não ser bem ordenado como $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ possui todas as propriedades aritméticas de $\mathbb{Z}$, além da propriedade de que todo elemento não nulo possui inverso.

Finalmente, fazendo uma analogia com o conjunto $\mathbb{Z}$, podemos escrever:

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_{-}^{*} \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_{+}^{*}$$

Capítulo 4

Números Inteiros - O modelo

O modelo apresentado neste Capítulo 4 foi desenvolvido pela Experimentoteca, o meu objetivo é mostrar o processo para a aplicação deste modelo que pode ser visto em [3].

Para começar a desenvolver a atividade é necessário construir alguns kits para serem distribuídos para as equipes que devem ter cerca de três alunos. Cada kit é constituido por 40 fichas que podem ser feitas com papel duplex, cartolina e fica muito bonito com E.V.A.. São quadrados de lado 5 cm que são cortados ao meio. Uma metade é pintada de vermelho simbolizando a unidade negativa e a outra metade é pintada de azul, simbolizando a unidade positiva. Vinte peças de cada cor formam um kit.
Ao unir as duas peças , negativa e positiva, eu escolhi formar o símbolo do conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z}$, o símbolo formado também poderia ser o zero, já que essas duas peças formam o elemento neutro da soma. Contudo ista marca é dispensável.

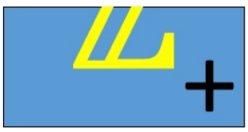


Figura 4.1: Peça: A unidade positiva.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Figura 4.2: Peça: A unidade negativa.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Figura 4.3: A união das peças.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

As peças juntas representam o elemento neutro da adição, o zero. Uma peça azul anula uma peça vermelha e vice versa. É importante ressaltar para o aluno que pode-se representar quantos zeros se queira. Cinco peças azuis com cinco peças vermelhas formam cinco zeros, que continua sendo zero, como vemos abaixo.

Para formar o número +5, por exemplo, podemos usar cinco peças azuis.

Também podemos formar o número +5 unindo oito peças azuis e três vermelhas, pois desta forma, estamos formando 3 zeros mais 5 unidades positivas que resulta no número desejado. Atente para o fato que estamos utilizando a propriedade do elemento

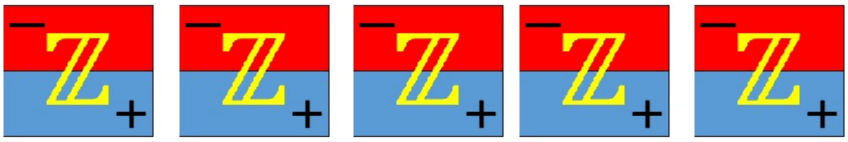


Figura 4.4: Cinco zeros.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Figura 4.5: Cinco peças positivas.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

neutro da adição, demonstrada em 3.

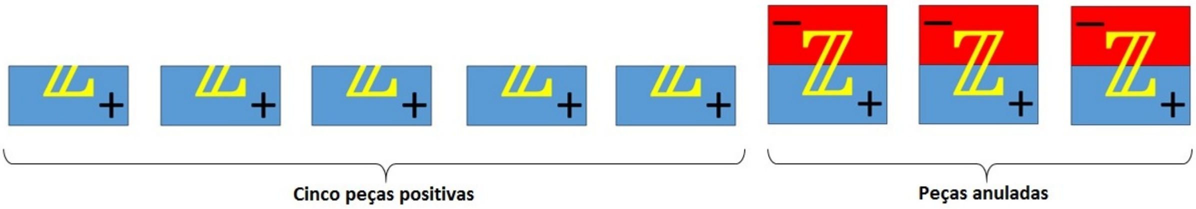


Figura 4.6: Representação do número +5.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

De forma análoga, para representar o número -2 podemos agrupar duas peças vermelhas, que são duas unidades negativas. Ou, ainda, seis peças vermelhas e quatro peças azuis, que vão formar quatro elementos neutros, pois uma peça azul irà anular uma vermelha e vão sobrar duas peças vermelhas, formando o número -2. Percebemos que existem infinitas formas de representar um mesmo número.

Após esta explicação, que podemos dizer, é a apresentação das "regras do jogo", partimos para explicar as operações e pedimos para que, utilizando o material concreto, respondam a algumas questões que serão apresentadas, como sugestão, no final desta seção, na página 64.

4.1 Adição de Números Inteiros

Inicialmente o professor deve lembrar o significado da palavra adição ou adicionar que é a idéia de juntar, que será muito utilizada nesta etapa.
Um exemplo é adicionar (–3) com (+6), ou seja, devemos juntar 3 peças vermelhas com 6 peças azuis. E agora? Lembre–se que ao juntarmos uma peça azul com uma vermelha, elas se anulam e podem ser desconsideradas. Então ficaremos com 3 peças da cor azul, ou seja, (+3).

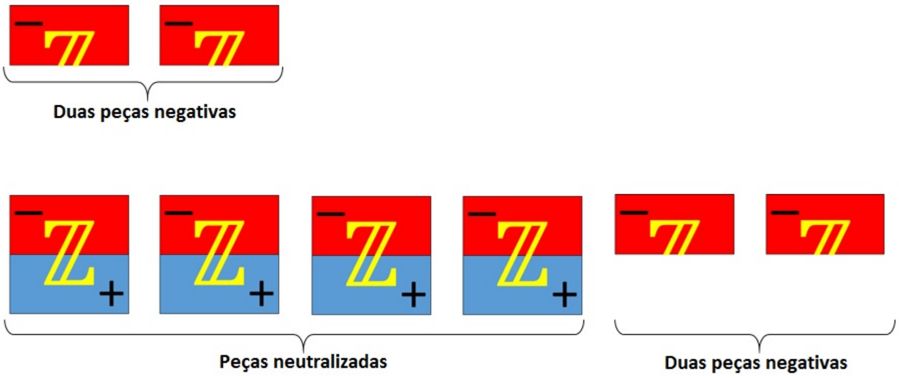


Figura 4.7: Representações do número -2.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

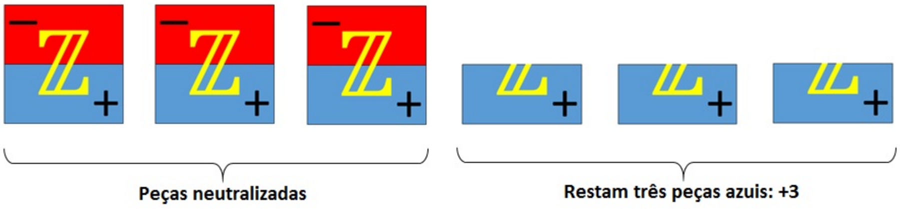


Figura 4.8: A soma entre (-3) e (+6).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

A operação que acabou de ser feita, adicionar (-3) com $(+6)$, pode ser representada algebricamente na forma $(-3) + (+6)$ e como a adição é comutativa, como vimos em 1, obteremos o mesmo resultado caso a operação seja representada por $(+6) + (-3)$.

4.1.1 Subtração

Para realizar esta operação é importante que seja resgatado o significado da subtração, que é, entre outros, "retirar". Esta será a palavra chave aqui! Para realizar a operação $(-5) - (-2)$ vamos usar cinco peças vermelhas e retirar duas destas peças, restando três peças vermelhas que representa o número -3.

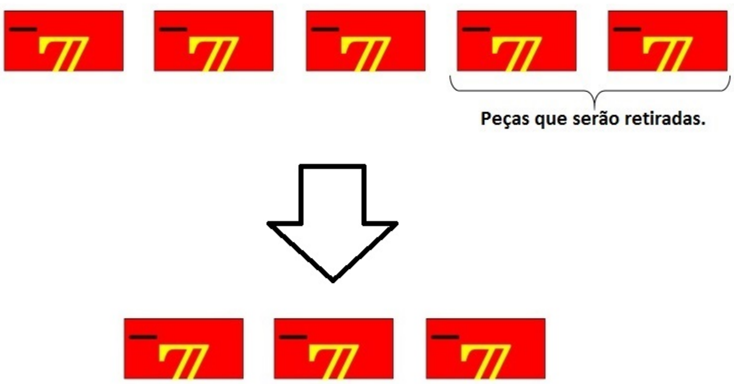


Figura 4.9: A subtração entre (-5) e (-2).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Agora vamos realizar a operação (-3)–$(+2)$, que equivale retirar 2 peças azuis das

3 peças vermelhas. Para fazer tal operação usaremos o recurso de ”colocar zeros” que consiste em acrescentar peças azuis e vermelhas em quantidades iguais. Estes são os “zeros construídos”, vejamos a seguir.

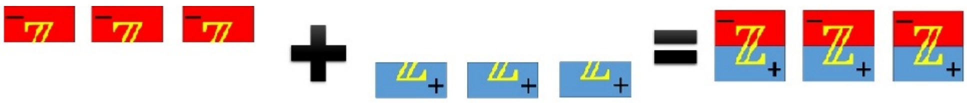


Figura 4.10: Zeros construídos.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Portanto, para realizar a operação (–3)–(+2) vamos utilizar três peças vermelhas e para retirar as duas peças azuis, é necessário que elas apareçam, então também precisaremos usar, no mínimo, dois zeros construídos. Não há problema se houver mais de dois zeros construídos, implicará apenas que irá sobrar zeros e como este é o elemento neutro da adição, não alterará o resultado como veremos logo abaixo, considerando a construção de três zeros.

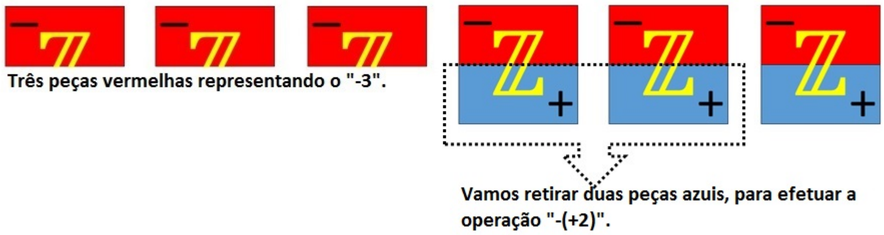


Figura 4.11: A subtração entre (-3) e (+2).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Sobrarão cinco peças vermelhas e um zero, formado por uma peça vermelha e uma azul. O resultado a ser considerado, então, são as cinco peças vermelhas.

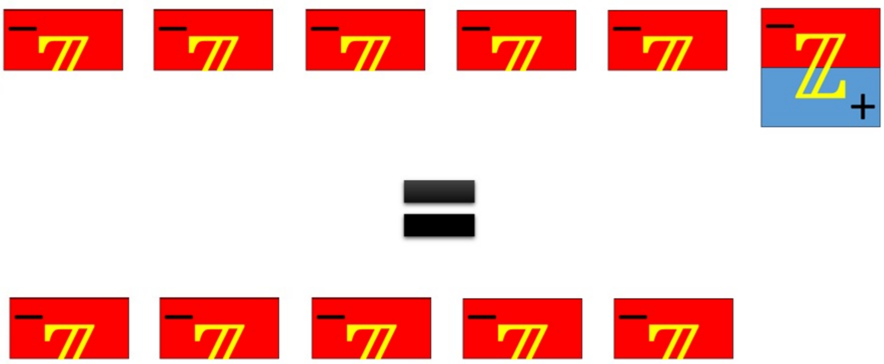


Figura 4.12: A subtração entre (-3) e (+2).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Logo, o resultado da operação (–3)–(+2) é -5.
Note que ao realizar esta operação, utilizamos algumas propriedades. Inicialmente a

propriedade do elemento neutro da adição,3, pois para criar zeros estamos escrevendo a operação na forma $(-3) + 0 - (+2)$. Então foi utilizada a propriedade do elemento oposto, 2.2.2, já que escrevemos o zero na forma $(-2) + (+2)$ e podemos reescrever a operação como $(-3) + [(-2) + (+2)] - (+2)$. Daí foi utilizada a propriedade associativa, demonstrada em 2. Efetuamos $(-3) + (-2) + [(+2) - (+2)]$ e encontramos $(-3) + (-2) + 0$, para finalmente efetuar $(-3) + (-2)$ e encontar -5. Este resultado é coerente com a definição de subtração vista em 2.2.3. Mostrar para o aluno que esta operação $(-3) - (+2)$ nada mais é do que a soma de -3 com o oposto de $+2$, ou seja, $(-3) + (-2)$, ou simplesmente $-3 - 2$.
É significativo que o aluno descubra o número mínimo de zeros a serem utilizados numa operação como esta, contudo caso a quantidade seja maior do que a mínima, como vimos, o resultado não se altera, já que o zero é o elemento neutro da adição.

É relevante que façamos mais de um exemplo, desta vez estimulando o nosso aluno a determinar a quantidade mínima de zeros a ser utilizada.

Qual o resultado de $(-2) - (-6)$? De duas peças vermelhas queremos retirar seis peças vermelhas. Neste momento consideramos que teremos que construir alguns zeros e abrimos a discussão para determinarmos quantos zeros, no mínimo, serão necessários. Como temos duas peças vermelhas e destas queremos retirar seis, devem“’aparecer” mais quatro peças desta cor. Esta aparição se dará com os zeros, logo teremos que construir quatro zeros, ou seja, colocar, além das duas peças vermelhas que representarão o (-2), usar quatro peças azuis e quatro vermelhas que estarão se anulando e representarão os zeros, para então retirar seis peças vermelhas.

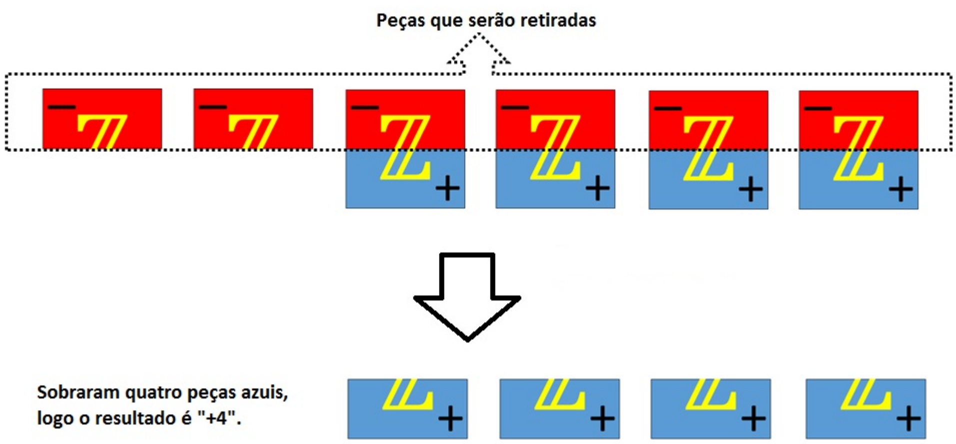


Figura 4.13: A subtração entre (-2) e (-6).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Logo, o resultado da operação $(-2) - (-6) = +4$.

Assim, o professor finaliza a apresentação do modelo e expõe algumas questões para serem resolvidas com o auxílio do kit. A seguir apresentamos alguns exemplos de questões.

Tabela 4.1: Atividades de soma de Inteiros

<table>
<tr><td colspan="2">1. Queremos adicionar (-3) com (-6), ou seja, devemos juntar 3 peças vermelhas com 6 peças vermelhas. Ao todo, quantas peças vermelhas teremos?
R. -9</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Qual o resultado da seguinte operação: $(+3)+(-6)$? Faça um desenho mostrando a operação que você realizou.
R. -3</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Queremos fazer agora: $(-3)-(-2)$, ou seja, de 3 peças vermelhas queremos retirar 2 peças vermelhas. Com quantas peças vermelhas ficaremos?
R. -1</td></tr>
<tr><td colspan="2">4. Determine o resultado de cada operação abaixo.</td></tr>
<tr><td>Soma.
a. $(+5)+(+3) =$ **R. +8**
b. $(-1)+(-4) =$ **R. -5**
c. $(+8)+(-9) =$ **R. -1**
d. $(-5)+(+7) =$ **R. +2**
e. $(-6)+(+6) =$ **R. 0**
f. $+2+7 =$ **R. +9**
g. $-1+1 =$ **R. 0**
h. $-4+7 =$ **R. +3**</td><td>Subtração.
a. $(+5)-(-3) =$ **R. +8**
b. $(-5)-(-3)$ **R. -2**
c. $(-5)-(+3) =$ **R. -8**
d. $(+5)-(+3) =$ **R. +2**
e. $(+2)-(+6) =$ **R. -4**
f. $(-7)-(-2) =$ **R. -5**
g.$1-7 =$ **R. -6**
h.$-2-3 =$ **R. -5**</td></tr>
<tr><td colspan="2">5. Numa determinada cidade, durante o dia, apresentava uma temperatura de 5°C e a noite, a temperatura caiu 7°C. Qual foi a temperatura desta cidade, a noite?
R. -2°C</td></tr>
</table>

4.2 Multiplicação de Números Inteiros

Neste primeiro momento vale relembrar que multiplicar números naturais nada mais é do que somar parcelas iguais uma determinada quantidade de vezes, por exemplo, 3×5 equivale a somar três parcelas iguais a cinco cada uma. Relacionando esta definição com o nosso modelo concreto, operar 3×5 significa formar três grupos de cinco unidades cada um.

Utilizando o kit mostra-se alguns exemplos de multiplicação. Efetuar a operação $(+2) \times (-3)$ consiste em formar dois grupos de três peças vermelhas cada um.

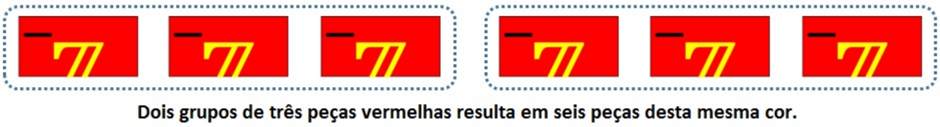


Figura 4.14: O produto entre (+2) e (-3).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

O resultado de $(+2) \times (-3)$ é -6.
Utilizando a propriedade comutativa da multiplicação de inteiros, 1, podemos concluir que $(+2) \times (-3) = (-3) \times (+2) = -6$. Contudo também podemos interpretar $(-3) \times (+2)$ como a retirada de três grupos de duas peças azuis. Assim, partindo do zero retiramos dois grupos de peças azuis, para isso usaremos, mais uma vez o recurso do "zero construído". Utilizaremos seis zeros construídos para, então, retirarmos os três grupos de 2 peças azuis.

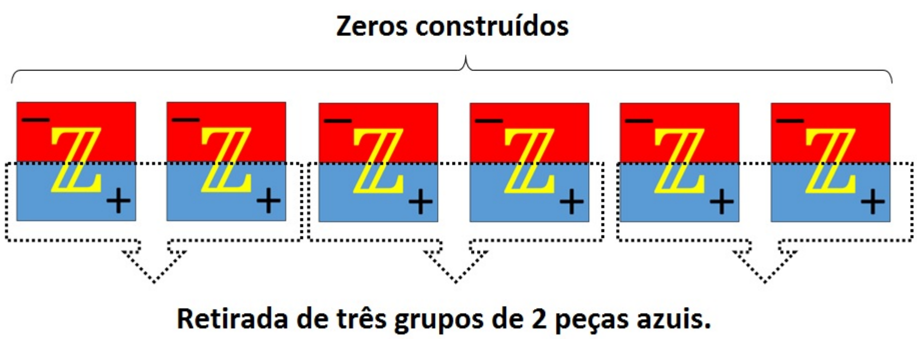


Figura 4.15: A retirada de três grupos de 2 peças azuis a partir do zero.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Aritmeticamente esta situação consiste na utilização do elemento neutro da adição, 3, e logo depois a propriedade do elemento oposto da adição, 2.2.2, da seguinte forma, $(-3) \times (+2) = 0 + (-3) \times (+2) = (-6) + (+6) + (-3) \times (+2) = (-6) + (+6) - (+2) - (+2) - (+2) = (-6) + (+6) - (+6) = -6$.

De forma análoga temos que a multiplicação de $(-4) \times (+2)$ consiste em retirar quatro grupos de duas peças azuis. Mas como retirar peças quando não se há nada? Vamos utilizar mais uma vez o recurso do "zero contruído".
Retirar quatro grupos de duas peças azuis equivale a retirar oito peças azuis no total, então será necessário contruir, no mínimo oito zeros.

Logo, o resultado de $(-4) \times (+2) = -8$.

É fundamental mostrar que a multiplicação é comutativa, e mostrar que este resultado é igual ao resultado da multiplicação $(+2) \times (-4)$. Formar dois grupos com quatro peças vermelhas, cada um, também resulta em oito peças vermelhas, ou seja, -8.

Uma das maiores dificuldades do professor quando se explica multiplicação de números inteiros é convencer os alunos sobre o sinal do produto entre dois números negativos. Esta foi uma grande dificuldade minha e este modelo, de forma concreta, intuitiva e lógica, nos possibilita construir o fato de que o produto entre dois números negativos é

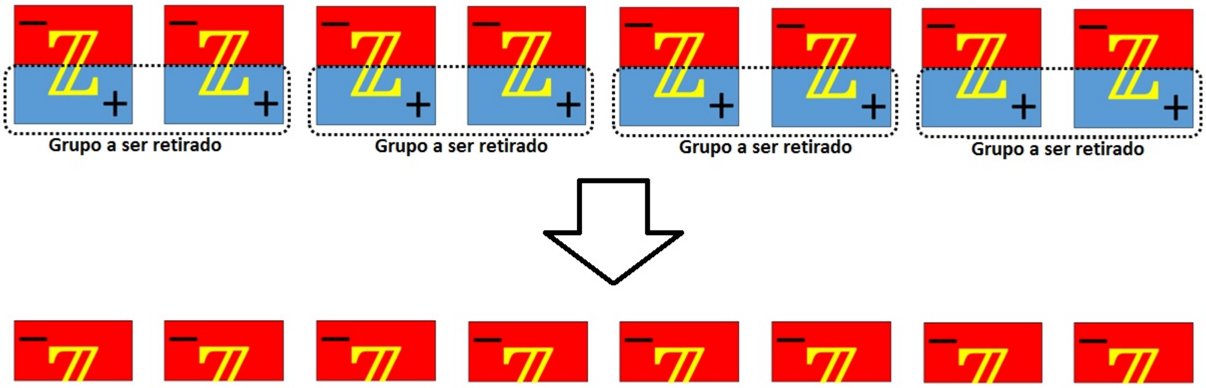


Figura 4.16: O produto entre (-4) e (+2).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

um número positivo.

Para efetuar a operação $(-3) \times (-2)$ temos que retirar três grupos de duas peças vermelhas, cada um. Mais uma vez teremos que construir alguns zeros. Analisando a quantidade de peças a serem retiradas, concluímos que temos que formar minimamente seis zeros.

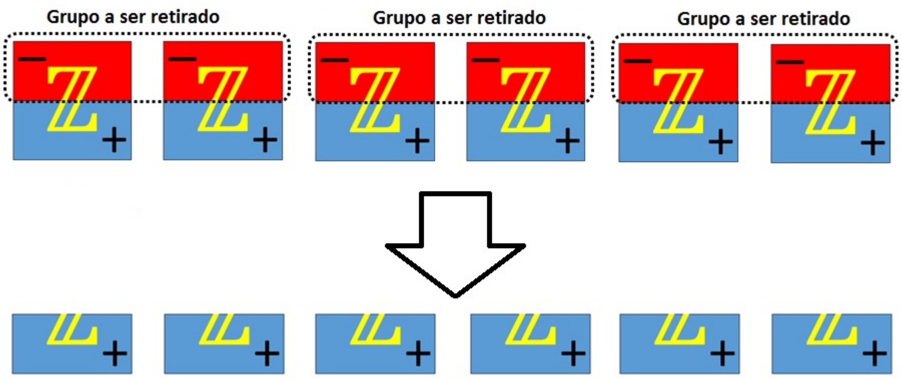


Figura 4.17: O produto entre (-3) e (-2).
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Visualizamos que o produto entre (-3) e (-2), que são dois números negativos, é igual a $+6$, um número positivo.

Mais uma vez, podemos mostrar esta operação de forma algébrica, $(-3) \times (-2) = 0 + (-3) \times (-2) = [(+6) + (-6)] + (-3) \times (-2) = (+6) + [(-6) + (-3) \times (-2)] = +6$. Uma outra forma de mostrarmos esta situação algebricamente é utilizando a propriedade 2.3.1, através dela sabemos que $(-3) \times 0 = 0$. Vamos escrever o zero como $(+2) + (-2)$ e então $(-3) \times [(+2) + (-2)] = 0$. Aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, 2.3.2, temos $(-3) \times (+2) + (-3) \times (-2) = 0$. Como $(-3) \times (+2)$ é igual a -6 podemos concluir que $(-3) \times (-2)$ é o seu oposto, já que temos uma soma de dois inteiros dando zero. Logo, $(-3) \times (-2) = +6$.

Segue mais uma recomendação de atividade para ser feita com o auxílio do material concreto.

Tabela 4.2: Atividades de multiplicação de Inteiros

<table>
<tr><td colspan="2">1 . Dê o resultado de: $(+3) \times (+4)$. Faça um desenho mostrando a operação realizada.
R. +12</td></tr>
<tr><td colspan="2">2 . Qual o resultado da operação: (-4) x (+3)? Lembre de construir zeros!
R. -12</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Determine o multiplicação a seguir.</td></tr>
<tr><td>a. $(+5) \times (+2) =$ **R. +10**
b. $(-1) \times (-4) =$ **R. +4**
c. $(+3) \times (-3) =$ **R. -9**
d. $(-1) \times (-1) =$ **R. +1**
e. $(+5) \times (0) =$ **R. 0**
f. $(+2) \times (+2) =$ **R. +4**</td><td>g. $(+4) \times (+2) =$ **R. +8**
h. $(+4) \times (-2) =$ **R. -8**
i. $(-4) \times (-2) =$ **R. +8**
j. $(-4) \times (+2) =$ **R. -8**
k. $(+2) \times (+6) =$ **R. +12**
l. $(-7) \times (+1) =$ **R. -7**</td></tr>
<tr><td colspan="2">4 . Qual o saldo de uma pessoa que sacou 3 reais, duas vezes, sem ter dinheiro no banco?
R. Deve 6 reais, ou -6 reais.</td></tr>
<tr><td colspan="2">5 .Existem dois pares de números inteiros que multiplicados resultam em 3, quais são eles?
R. +1 e +3 ou -1 e -3.</td></tr>
</table>

Em um outro momento, o professor deve sitematizar com os alunos as regras de sinais, diferenciando a de soma para a de multiplicação.

A divisão é a operação inversa da multiplicação representada pelo simbolo $\div$. A divisão dos inteiros x e y é representada por $x \div y$. Seja z o inteiro que representa o resultado da divisão de x por y, $x \div y = z$, se só se $y \cdot z = x$. É importante lembrar que nem sempre a divisão de números inteiros resulta em um inteiro. Tal operação deve ser tratada como a operação inversa da multiplicação, ou seja, o resultado da divisão de 8 por (-2) é igual ao número que multiplicado por (-2) que dá 8. Chamar a atenção que a regra de sinais para a divisão é a mesma da multiplicação.

Capítulo 5

Números Racionais - O modelo

Para o estudo de frações, vamos iniciar lembrando ou introduzindo (caso seja uma turma de 6° ano) o conceito de fração.

FRAÇÃO é uma parte ou pedaço do inteiro que foi dividido em partes iguais.

Imagine uma folha de ofício que foi dividida em quatro partes iguais. Cada parte representa um quarto da folha. E pode ser representada por $\frac{1}{4}$. Neste momento o professor deve considerar os elementos da fração. O número acima do traço da fração é chamado de numerador, ele indica quantas partes do todo foram consideradas. Já o número abaixo do traço, chama-se denominador e indica em quantas partes o todo foi dividido.

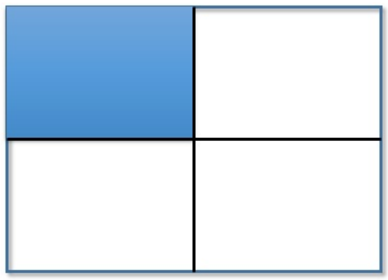


Figura 5.1: Representação de $\frac{1}{4}$.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

O denominador, também denomina a fração, ele determina em quantas partes o inteiro está sendo dividido. Ao se ler uma fração, lê-se o numerador como o número que ele é. Já o denominador, se for 2 lê-se meios, se for 3 lê-se terços e assim por diante, como vemos na tabela abaixo.

Tabela 5.1: Nomenclatura de frações

Fração	Como se lê:
$\frac{8}{1}$	Oito inteiros
$\frac{1}{2}$	Um meio
$\frac{1}{3}$	Um terço
$\frac{3}{4}$	Três quartos
$\frac{3}{5}$	Três quintos
$\frac{5}{6}$	Cinco sextos
$\frac{5}{7}$	Cinco sétimos
$\frac{1}{8}$	Um oitavo
$\frac{2}{9}$	Dois nonos
$\frac{7}{10}$	Sete déciomos

O denominador tem seu nome alterado, e assim denomina a fração. Para frações que tem como denominador os números 10, 100 ou 1.000 serão lidas como décimos, centésimos ou milésimos, respectivamente. Para as frações que tem denominadores maiores do que 10, com excessão do 100 e 1.000, usamos a palavra avos após a leitura do número escrito no denominador. Observe:

Tabela 5.2: Nomenclatura de frações

Fração	Como se lê:
$\frac{1}{15}$	Um, quinze avos
$\frac{9}{70}$	Nove, setenta avos

Vale lembrar que não existe fração com denominador igual a zero, como vimos na definição de fração em 3.1.2.

Para alguns alunos da rede pública, não foi possível aprender fração, então mesmo sendo um professor das séries finais do Esino Fundamental II, vale a pena retomar este assunto com calma para que o aluno tenha pré requisitos para prosseguir em assuntos matemáticos das séries futuras. Portanto este é o momento para exemplificar com figuras e situações o uso da fração. Segue alguns exemplos.

(a) Um quarto de hora equivale ao tempo de uma hora, ou seja, 60 minutos, dividido em quatro partes iguais. Logo um quarto de hora corresponde a 15 minutos.

(b) A fração que 5 meses representa de um ano é $\frac{5}{12}$.

(c) Maria comprou 12 balas e comeu $\frac{2}{3}$ destas balas. Essa afirmação significa dizer que Maria pegou as balas e dividiu em três partes iguais, e comeu duas destas partes. Como 12 balas dividido por 3 resulta em 4 , temos que cada parte tem quatro balas. Já que ela comeu duas destas partes, Maria comeu 8 balas.

(d) A parte pintada do triângulo ABC, abaixo, é representada pela fração $\frac{3}{4}$.

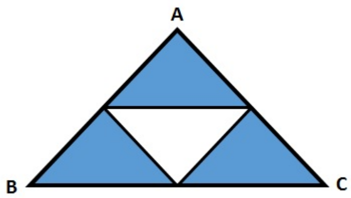


Figura 5.2: Representação de $\frac{3}{4}$.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

(e) O que representa a fração $\frac{5}{7}$? Representa que um inteiro foi dividido em sete partes iguais e destas, estão sendo consideradas cinco.

O professor deve dar diversos exemplos de inteiro. Um inteiro, é um referencial e pode ser diversas coisas. É possível ser uma barra de chocolate, uma quantia em dinheiro, o comprimento de um pé, ou até mesmo a massa do seu corpo. Uma mesma fração de inteiros diferentes tem resultados diferentes. Por exemplo, um meio, ou seja a metade, de dez reais equivale a cinco reais; e um meio de setenta reais resulta em trinta e cinco reais.

Após este primeiro momento com a familiarização das fracões, o professor começará a utilizar o kit de frações que também foi desenvolvido pela Experimentoteca do Centro de divulgação científica e cultural da Universidade de São Paulo e pode ser visto em [4].

O modelo é constituído por oito retângulos de dimensões $24cm \times 8cm$ que podem ser feitos de papel duplex, E.V.A., ou de M.D.F. de 3 mm de espessura. Cada retângulo será dividido em uma quantidade de partes iguais:

Retângulo 1- Ficará inteiro e sem marcações.

Retângulo 2- Ficará inteiro, mas terá marcações. Ele estará dividido em doze partes iguais.

Retângulo 3- Será dividido em duas partes iguais, formando duas peças soltas de $\frac{1}{2}$.

Retângulo 4- Será dividido em três partes iguais, formando três peças soltas de $\frac{1}{3}$.

Retângulo 5- Será dividido em quatro partes iguais, formando quatro peças soltas de $\frac{1}{4}$.

Retângulo 6- Será dividido em seis partes iguais, formando seis peças soltas de $\frac{1}{6}$.

Retângulo 7- Será dividido em oito partes iguais, formando oito peças soltas de $\frac{1}{8}$.

Retângulo 8- Será dividido em doze partes iguais, formando doze peças soltas de $\frac{1}{12}$.

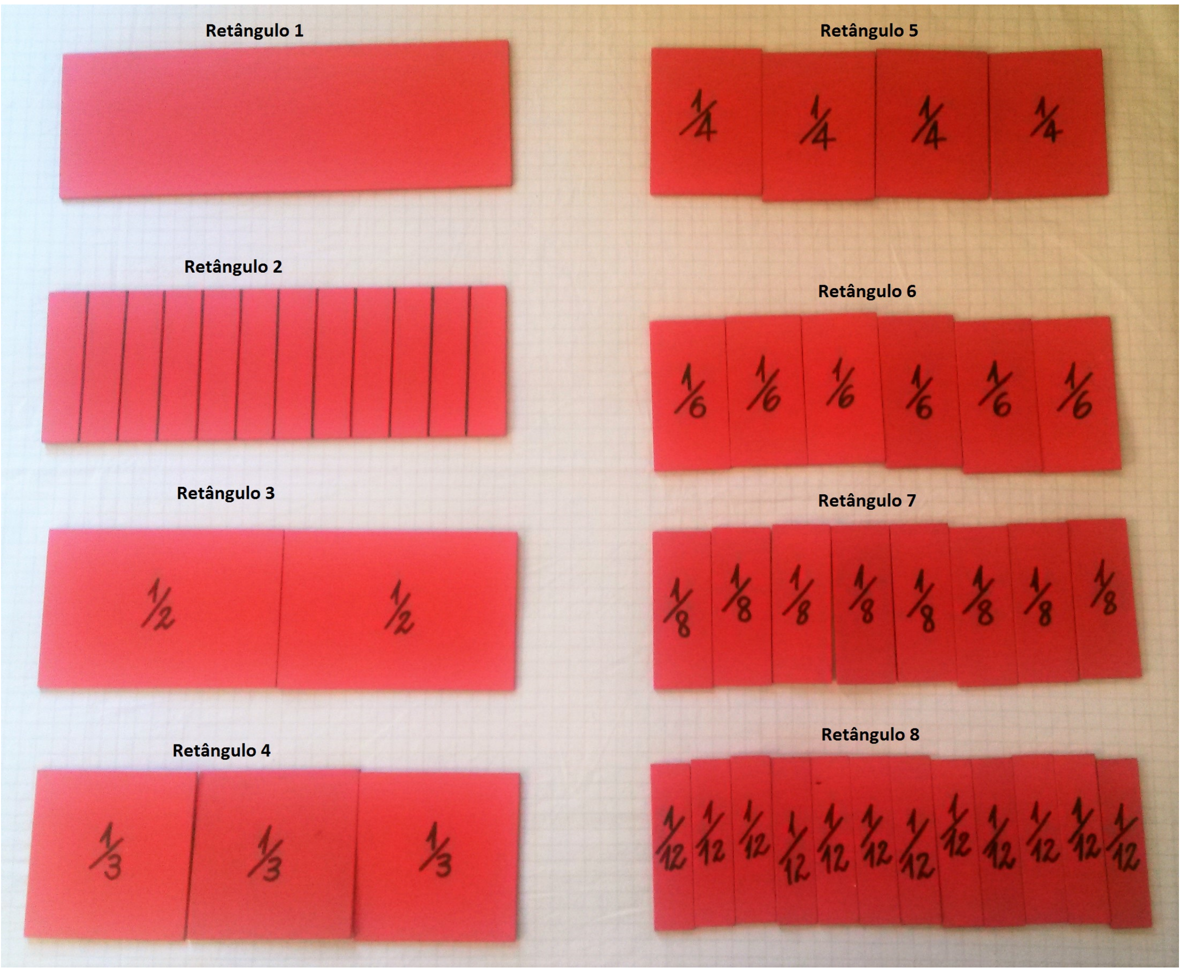


Figura 5.3: Kit do modelo de frações.
Fonte: LEMA - UFBA

Você pode estar se perguntando, porque não tem peças de $\frac{1}{5}$ ou $\frac{1}{9}$ entre outras neste modelo, simplesmente porque a medida do comprimento, 24 cm, não é múltplo nem de 5, nem de 9 e nem de outro número natural que não esteja representado. O que não impede que em seu modelo tenha tais peças.

Para dar início às atividades, divide-se a sala em grupos de três ou quatro alunos. Vamos pedir para que eles respondam às nossas perguntas numa folha, utilizando o kit entregue a cada grupo. Após a entrega é interessante que o professor apresente alguns pontos para os alunos (as regras do jogo):

- Neste modelo o retângulo é o nosso inteiro e vale a pena mostrar que a peça que representa $\frac{1}{6}$, por exemplo, é uma parte das seis iguais que formam o inteiro. Vou chamar este retângulo inteiro de nosso referencial.
- Para representar $\frac{3}{4}$, por exemplo, juntamos três peças de $\frac{1}{4}$.

5.1 Representação do inteiro por partes

A fração é uma parte do inteiro que foi dividido em partes iguais. Manuseando o material concreto com os alunos mostraremos que são necessárias duas metades para formar um inteiro, ou seja, duas peças que representam $\frac{1}{2}$ formam o nosso referencial. Utilizando, agora, as peças que representam $\frac{1}{3}$, precisaremos de três peças para formar o nosso inteiro. São necessários oito oitavos para formar o nosso retêngulo todo, ou seja, oito peças que representam $\frac{1}{8}$.E podemos mostrar outros exemplos até que o aluno seja tocado em seu intuitivo e consiga responder sem utilizar o material concreto, como por exemplo, mesmo não havendo peças que representem $\frac{1}{9}$, ele responda a quantidade de nonos são necessários para completar um inteiro. Esperamos que ele responda nove.

5.2 Identificando frações equivalentes

Frações equivalentes são àquelas que representam a mesma parte do todo ou a mesma proporção.

Pegue a peça que representa $\frac{1}{2}$, verifique quais as outras frações que tem o mesmo tamanho que esta peça. Perceba que duas peças que representam $\frac{1}{4}$ se encaixam perfeitamente em $\frac{1}{2}$. Assim temos que $\frac{2}{4}$ é equivalente a $\frac{1}{2}$ e representamos $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Na imagem 5.4 podemos perceber a equivalência de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$ numa suposta tentativa do aluno, contudo, também percebemos a falta de equivalência entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{3}$ numa outra tentativa. Cabe ao aluno determinar as outras frações equivalentes a $\frac{1}{2}$ e completar a igualdade abaixo.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ =.....=.....=.....

Esperamos que o aluno responda que $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{6}{12}$.

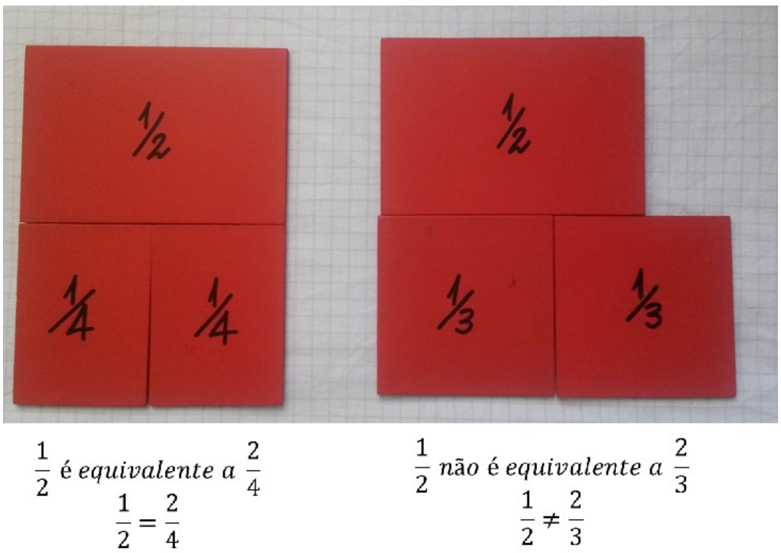


Figura 5.4: Equivalência de frações.
Fonte: LEMA - UFBA

Podemos sugestionar para os estudantes que neste momento eles possam determinar outras equivalências, como por exemplo, formar uma peça que represente $\frac{2}{3}$ e determinar as frações equivalentes a ela, verificando quais as frações que se encaixam nela. Espera-se que o aluno responda $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$.

Uma outra sugestão é determinar as frações equivalentes a $\frac{9}{12}$, une-se nove peças de $\frac{1}{12}$ e depois verifica-se as peças que correspondem a ela.Espera-se o seguinte resultado: $\frac{9}{12} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

Aproveitamos o momento para sistematizar a equivalência de frações. Como determinar frações equivalentes sem o uso de figuras? No primeiro exemplo descobrimos agumas frações equivalente, observe-as. Note que:

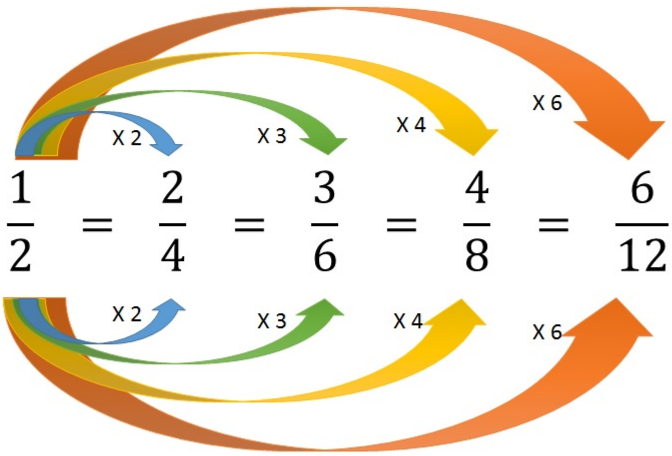


Figura 5.5: Obtenção de frações equivalentes.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Por outro lado, analisando a igualdade do segundo item de trás para frente, temos um trio de frações equivalentes que se relacionam da seguinte forma:

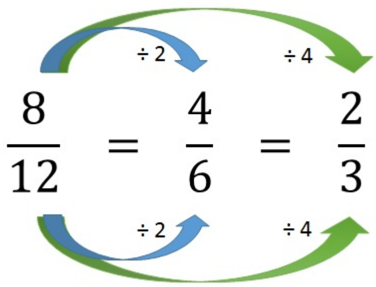


Figura 5.6: Obtenção de frações equivalentes.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Assim para determinar frações equivalentes sem o uso de figuras basta multiplicar ou dividir o numerador e o denominador da fração por um mesmo número, diferente de zero.

Este processo que acabamos de fazer, que determina uma fração equivalente com os menores termos possíveis chama-se simplificação de fração e o resultado final, que é uma fração cujos termos são primos entre si, chama-se fração irredutível.
Fração irredutível é aquela cujo o único divisor comum de seus termos é o número 1.
Para simplificar a fração $\frac{12}{18}$ até encontrarmos uma fração iredutível, basta determinar o número inteiro, diferente de 1, que divida 12 e 18 simultaneamente e repetir o processo com os termos da fração até que não exista mais um número Natural, diferente de um,

que seja divisor comum dos termos desta fração.

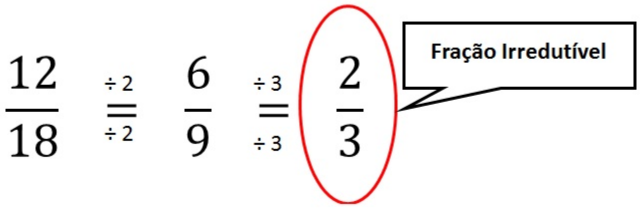


Figura 5.7: Obtenção de fração irredutível.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

5.3 Comparação de frações de um mesmo inteiro

Vamos utilizar as peças deste kit para desenvolver a relação de ordem do conjunto dos números racionais e estimular a escrita das frações e dos sinais $>$ e $<$ definidos em 2.4.3.

Para determinar a maior fração, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{1}{2}$, sobrepomos as peças em questão. Ao chegarmos a uma conclusão fazemos o registro utilizando o sinal $>$ e a escrita numérica das frações.

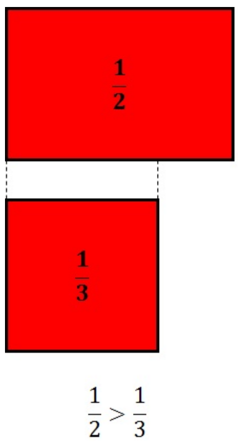


Figura 5.8: Comparação de frações: $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Da mesma forma que para comparar $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{8}$ vamos comparar as peças que representam estas frações e ao chegar a uma conclusão fazemos o registro utilizando o sinal $<$.

Ainda podemos mostrar a equivalência entre as escritas $\frac{2}{3} > \frac{2}{8}$ e $\frac{2}{8} < \frac{2}{3}$.

Ao comparar $\frac{2}{6}$ e $\frac{4}{6}$ esperamos que o aluno responda $\frac{2}{6} < \frac{4}{6}$ ou $\frac{4}{6} > \frac{2}{6}$.
vamos pedir, também, para que comparem as frações do tipo $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{6}$ e espera-se que sua resposta seja $\frac{2}{3} > \frac{3}{6}$ ou em alternativa a esta escrita que $\frac{3}{6} < \frac{2}{3}$.

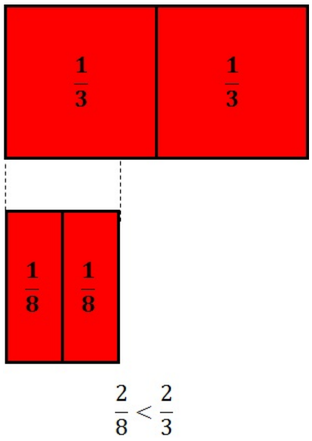


Figura 5.9: Comparação de frações: $\frac{2}{3} > \frac{2}{8}$.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Após a realização desta atividade, o professor também deve sistematizar, junto com os alunos, a relação de ordem entre as frações.

- Ao compararmos duas ou mais frações de mesmo denominador, será maior a fração que apresentar o maior numerador.
- Ao compararmos duas ou mais frações de mesmo numerador, será maior a fração que apresentar o menor denominador.
- Quando os termos forem diferentes, como por exemplo no quarto item acima podemos notar que a fração $\frac{2}{3}$ representa mais do que a metade do nosso referencial enquanto que a fração $\frac{3}{6}$ é exatamente a metade, concluimos que a maior fração é $\frac{2}{3}$, pois representa mais do que a metade um inteiro.
- Contudo, quando as frações são, por exemplo, $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ que ambas representam uma parte maior do que a metade de um inteiro, devemos encontrar frações equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{5}{8}$ que tenham o mesmo denominador. Para isto basta multiplicar ambos os termos de cada fração pelo denominador da outra fração. Multiplicando ambos os termos de $\frac{2}{3}$ por 8, teremos $\frac{16}{24}$; e $\frac{5}{8}$ por 3 encontraremos $\frac{15}{24}$. Como $\frac{16}{24}$ é maior do que $\frac{15}{24}$, então a maior fração é $\frac{2}{3}$.

5.4 Soma e Subtração de frações

A adição e subtração de frações devem ser bem trabalhadas. Instintivamente, a primeira ação do aluno ao somar frações é operar numeradores e denominadores respectivamente. Por isso, é interessante começar falando das ideias elementares desta operação citando alguns exemplos, como o que será feito a seguir.
Victor e Lucas compraram uma torta que estava dividida em 10 pedaços iguais. Victor comeu 3 pedaços, enquanto Lucas comeu apenas 1 pedaço. Que fração da torta cada um comeu? E que fração da torta os dois comeram juntos? Acredita-se que eles respondam que Victor comeu $\frac{3}{10}$ da torta, enquanto Lucas comeu apenas $\frac{1}{10}$ e que eles comeram juntos $\frac{4}{10}$ da torta.
Outros exemplos podem ser introduzidos até que seja iniciada a dinâmica com o kit.

5.4.1 Soma e Subtração de frações com mesmo denominador

O procedimento para somar ou subtrair frações é juntar as peças do estojo uma ao lado da outra para analisar a quantidade final. Para calcular a soma entre $\frac{1}{8}+\frac{2}{8}$ encontraremos um total de três peças de oitavos, concluimos que o resultado desta adição é $\frac{3}{8}$.

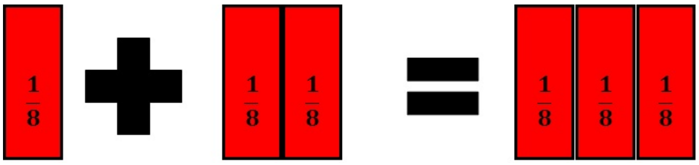


Figura 5.10: Soma de frações com um mesmo denominador.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

De forma equivalente, para subtrair frações vamos utilizar as peças que representam o minuendo e retirar, destas, as peças que representam o subtraendo. Para efetuar a diferença entre $\frac{5}{8}$ e $\frac{2}{8}$, vamos buscar cinco peças de oitavos e, destas, retirar duas. Restando três peças de oitavos o que nos leva a concluir que $\frac{5}{8}-\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$

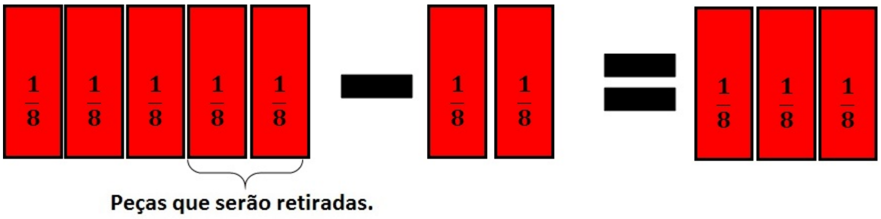


Figura 5.11: Subtração de frações com um mesmo denominador.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Após esta orientação, segue uma sugestão de operações para os alunos desenvolverem de forma empírica. Exemplos de questões são dados a seguir.

Tabela 5.3: Atividades de soma de frações com o mesmo denominador.

1.Efetue as operação a seguir utilizando o material concreto.	
a. $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=$	**R. 1 inteiro**
b.$\frac{3}{12}+\frac{5}{12}=$	**R.** $\frac{8}{12}$ **ou** $\frac{2}{3}$
c. $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}=$	**R.** $\frac{4}{8}$ **ou** $\frac{2}{4}$ **ou** $\frac{1}{2}$
d.$1-\frac{1}{6}=$	**R.** $\frac{5}{6}$
e. $1-\frac{5}{8}=$	**R.** $\frac{3}{8}$
f. $\frac{7}{12}+\frac{6}{12}=$	**R.** $\frac{13}{12}$
2. Apesar de não haver no kit, quintos ou nonos, através das conclusões obtidas na primeira questão, efetue as seguintes operações.	
g.$\frac{6}{5}-\frac{3}{5}=$	**R.** $\frac{3}{5}$
h.$\frac{4}{9}+\frac{8}{9}=$	**R.**$\frac{12}{9}$ **ou** $\frac{4}{3}$

Estruturando o conhecimento, verificamos que para somar ou subtrair frações com um mesmo denominador, basta conservar o denominador e efetuar a operação entre os numeradores.

5.4.2 Soma e Subtração de frações com denominadores diferentes

O desenvolvimento dessa operação é semelhante ao que fizemos anteriormente, mas é importante dar, também, esta orientação para os investigadores. Para efetuar a soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ vamos juntar as peças que representam estas frações e depois comparar qual a fração que corresponde exatamente com o tamanho da união das peças.

O aluno percebe que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$ ou ele pode fazer uma correspondência com a fração que representa $\frac{10}{12}$, o que também está correto, pois é uma fração equivalente a $\frac{5}{6}$.

O mesmo processo se aplica quando efetuamos uma subtração com denominadores distintos.

Para calcular $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$, inicialmente determina-se a parte que sobra quando retiramos a peça que representa $\frac{1}{3}$ da peça que representa $\frac{1}{2}$. Esta retirada se faz visualmente quando sobrepomos as duas peças.

Em seguida, da mesma maneira que fizemos com a soma, vamos verificar que fração

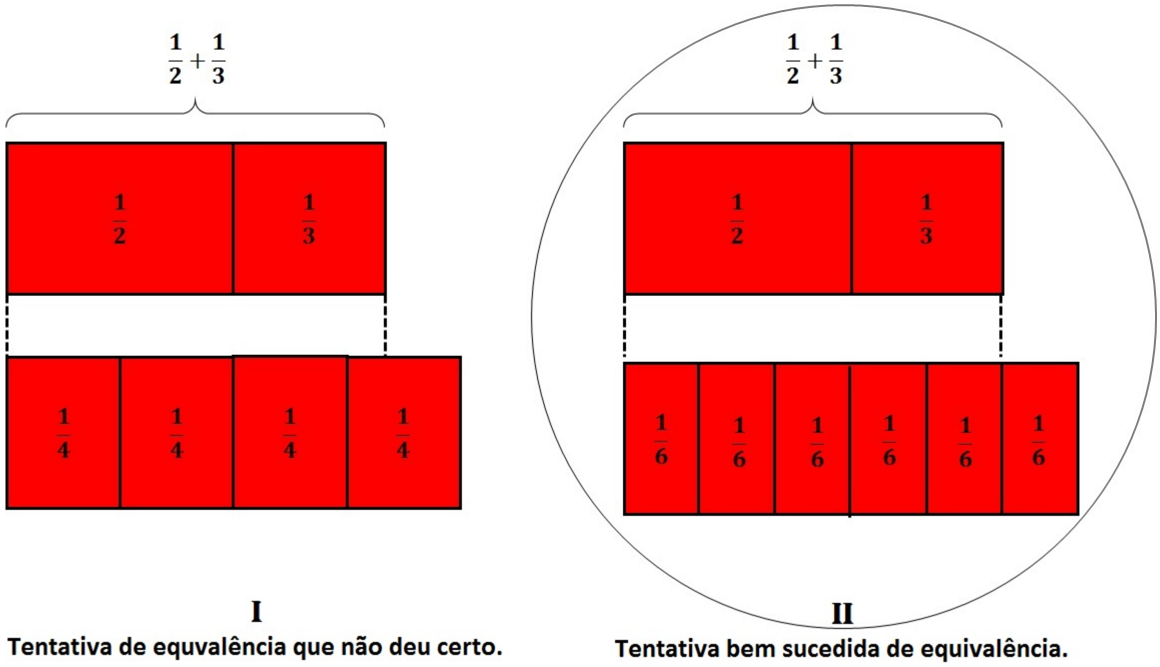


Figura 5.12: Soma de frações.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

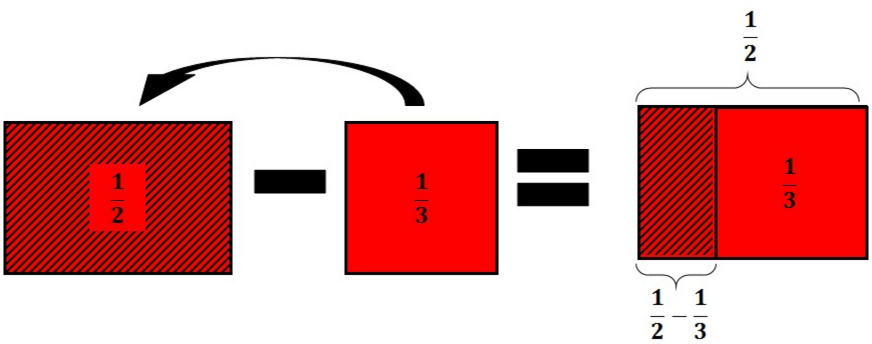


Figura 5.13: Subtração de frações com denominadores distintos.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

corresponde a parte que sobrou utilizando as peças do nosso kit.

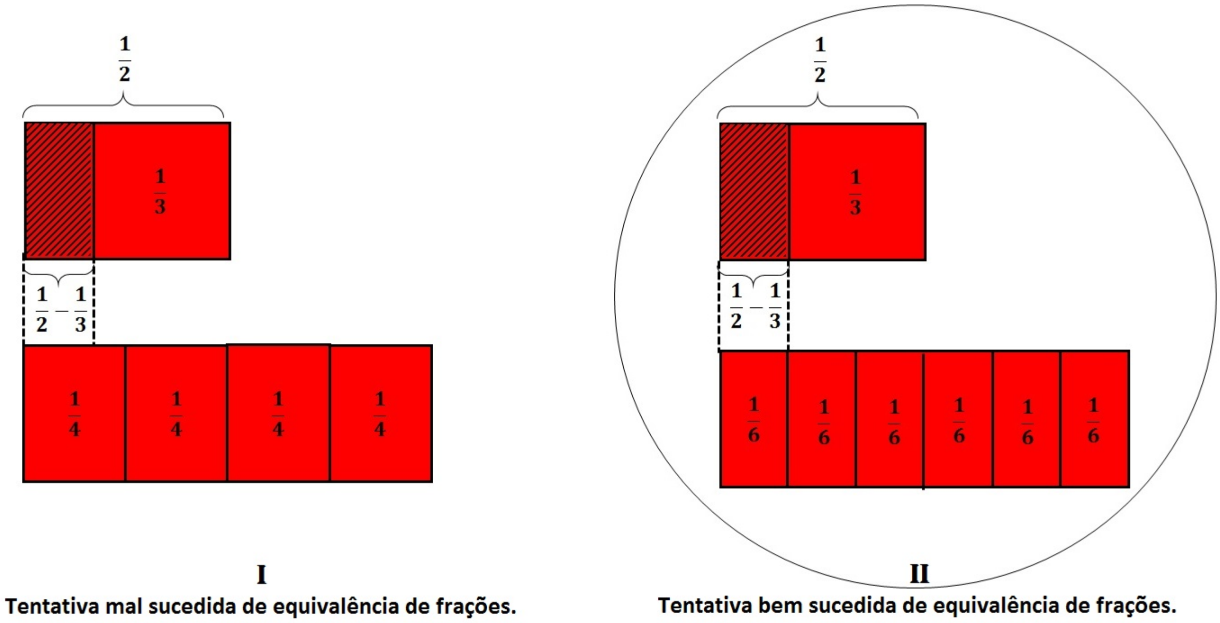


Figura 5.14: Subtração de frações.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Desta maneira constata-se que o resultado $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Mais uma vez, aparece o momento da investigação do aluno. propomos que, utilizando o kit de frações, eles realizem algumas operações, como por exemplo:

Tabela 5.4: Atividades de soma de frações com denominadores distintos.

1.Efetue as operação a seguir utilizando o material concreto.	
a. $\frac{1}{4} + \frac{2}{3} =$	**R.** $\frac{11}{12}$
b.$\frac{2}{8} + \frac{1}{12} =$	**R.** $\frac{4}{12}$ **ou** $\frac{2}{6}$ **ou ainda** $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$	**R.**$\frac{4}{6}$ **ou** $\frac{2}{3}$
d.$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} =$	**R.** $\frac{1}{4}$
e. $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} =$	**R.** $\frac{7}{12}$
f. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$	**R.** $\frac{7}{6}$

Sabemos que o resultado do item f é maior do que um inteiro, esperamos que o aluno verifique isto também e utilize o referencial de inteiro mais as peças que faltam para completar $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$. Espera-se que o aluno responda $\frac{7}{6}$, pois ele interpretará o inteiro como sendo $\frac{6}{6}$ e soma com $\frac{1}{6}$ que é a peça que se encaixa. De forma análoga ele pode chegar a $\frac{14}{12}$ que é um resultado correspondente.

A partir deste momento aproveitamos a falta de algumas frações no kit para perguntar como resolver estas operações sem o uso do material concreto, ou seja, algebricamente. Lançamos a pergunta: Como determinar o resultado de $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$? E para responder a esta questão vamos analisar os resultados que encontramos com a prática que acabamos de desenvolver.

O resultado de $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$ foi igual a $\frac{11}{12}$. Como o denominador do resultado é 12, vamos determinar uma fração equivalente a $\frac{1}{4}$ com denominador igual a 12, ou seja, $\frac{3}{12}$. Faremos o mesmo com $\frac{2}{3}$, que equivale a $\frac{8}{12}$. Então $\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=\frac{3}{12}+\frac{8}{12}=\frac{11}{12}$. É importante fazer notar que 12 é um múltiplo comum de 4 e 3.

De forma análoga, o resultado da operação $\frac{2}{8}+\frac{1}{12}$ foi igual a $\frac{1}{3}$. Utilizando a percepção do item anterior, vamos buscar um múltiplo comum de 8 e 12 para determinarmos as frações equivalentes com denominador comum, que pode ser o número 96. Posteriormente, vamos encontrar frações quivalentes a $\frac{2}{8}$ e $\frac{1}{12}$ com denominador 96 que são $\frac{24}{96}$ e $\frac{8}{96}$, respectivamente. Logo, $\frac{2}{8}+\frac{1}{12}=\frac{24}{96}+\frac{8}{96}=\frac{32}{96}$. O que não bate com a nossa resposta, a menos que simplifiquemos este resultado, $\frac{32}{96}\overset{\div 8}{=}\frac{1}{3}$.

De uma forma geral, para efetuar algebricamente a soma ou a subtração de frações com denominadores diferentes, deve-se primeiramente encontrar frações equivalentes às dadas, com um mesmo denominador. Este número é múltiplo comum dos denominadores das frações iniciais. Para enfim efetuar a operação com frações de denominadores iguais.

5.5 Multiplicação de frações

Para efetuar a prática com a operação multiplicação é fundamental retormarmos o seu conceito inicial. Multiplicar é somar parcelas iguais uma determinada quantidade de vezes. Multiplicar 2 por 5 significa somar duas parcelas iguais a cinco, 5+5, ou, como a multiplicação é comutativa, somar cinco parcelas iguais a dois 2+2+2+2+2.

5.5.1 Multiplicação de um inteiro por uma fração

Recordado este conceito fundamental para a obtenção do produto, mostra-se como efetuar a operação $2\cdot\frac{3}{8}$. Vamos somar duas parcelas iguais a $\frac{3}{8}$, ou seja, $\frac{3}{8}+\frac{3}{8}$.

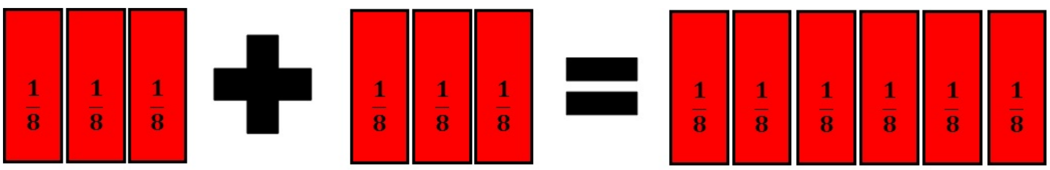


Figura 5.15: Multiplicação entre um inteiro e uma fração.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

O resultado é $\frac{6}{8}$, contudo utilizando os nossos conhecimentos sobre simplificação de frações adquiridos na Seção 5.2 deste trabalho, podemos dizer que este resultado é equivalente a $\frac{3}{4}$, que é uma fração irredutível.

Em seguida, o docente orienta os estudantes a fazerem algumas operações de multiplicação com o auxílio do material concreto e em seguida solicitamos para que eles escrevam uma conclusão sobre a sistemática da operação.Segue, mais uma vez, uma proposta de atividade.

Tabela 5.5: Atividades de multiplicação de frações com o mesmo denominador.

1.Efetue as operação a seguir utilizando o material concreto.	
a. $2 \cdot \frac{1}{3} =$	**R.** $\frac{2}{3}$
b. $3 \cdot \frac{2}{8} =$	**R.** $\frac{6}{8}$ **ou** $\frac{3}{4}$
c. $4 \cdot \frac{3}{12} =$	**R.** $\frac{12}{12}$ **ou 1 inteiro**
d. $3 \cdot \frac{3}{8} =$	**R.** $\frac{9}{8}$
e. $5 \cdot \frac{3}{12} =$	**R.** $\frac{15}{12}$ **ou** $\frac{5}{4}$
2. Como você explicaria a um colega como efetuar a multiplicação de um número inteiro por uma fração algebricamente, sem o uso do material concreto? **R. A expectativa é que ele relate que deve-se multiplicar o número inteiro pelo numerador da fração e conservar o denominador.**	

Neste momento, é significativo que o professor lembre que todo número inteiro pode ser escrito como uma fração de denominador igual a 1. Portanto, todas as operações acima podem ser consideradas, também, como o produto entre duas frações e como o número 1 é o elemento neutro da multiplicação, poderíamos dizer que os resultados obtidos foram gerados multiplicando os numeradores entre si e fazendo o mesmo com os denominadores.

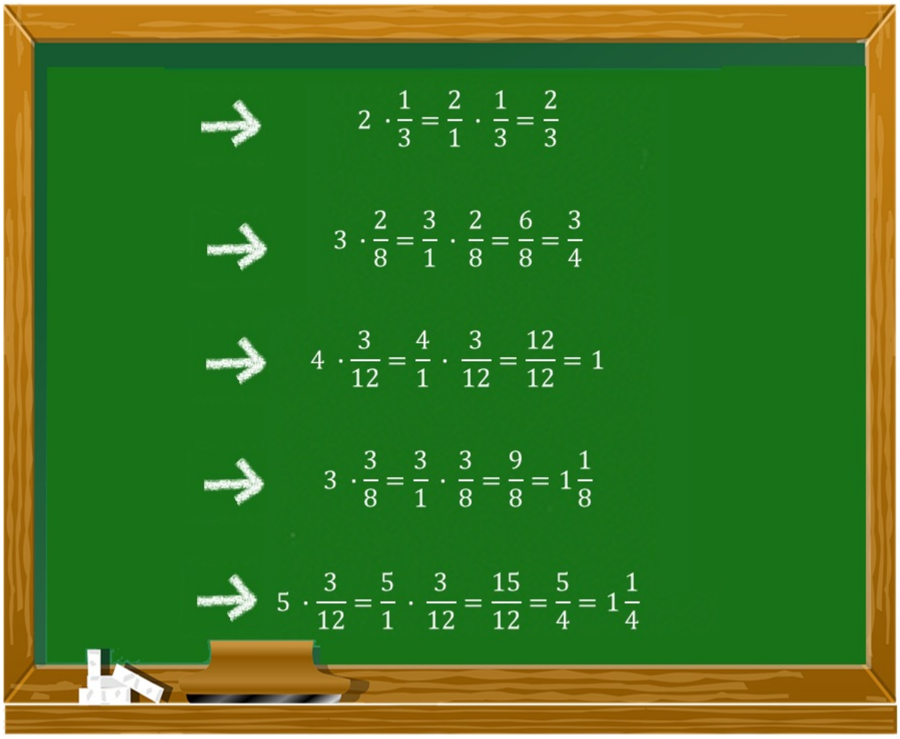


Figura 5.16: Exemplos.
Fonte:Modificada. https://pixabay.com/pt/verde-quadro-negro-giz-borracha-307835/

A intensão é que o estudante comece a pensar como seria a multiplicação entre frações, já que também tem que respeitar estes resultados.

5.5.2 Multiplicação entre frações

Inicialmente vamos lembrar a definição de multiplicação, temos que o produto entre os números a e b consiste em somar a parcelas iguais a b.

$$a \times b = \underbrace{b + b + b + ... + b}_{a \quad parcelas} \tag{5.1}$$

Ainda na definição de multiplicação, efetuar $1 \times b$ significa considerar uma parcela igual a b, que resulta em b.

O que seria multiplicar $\frac{1}{2}$ por $\frac{2}{3}$? Utilizando a definição de multiplicação, significa considerar $\frac{1}{2}$ de parcela igual a $\frac{2}{3}$.
Utilizando o conceito de fração, $\frac{1}{2}$ de parcela, representa meia parcela de $\frac{2}{3}$ e isto significa adotar $\frac{2}{3}$ como referencial, dividi-lo em duas partes iguais e usar uma!

A metade de $\frac{2}{3}$ é igual a $\frac{1}{3}$. Logo $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Mais um exemplo, qual seria o produto entre $\frac{2}{3}$ e $\frac{9}{12}$? Nada mais é do que considerar dois terços de parcela igual a $\frac{9}{12}$. Sabendo disso utilizamos o conceito de fração para calcular dois terços de $\frac{9}{12}$, ou seja, dividimos $\frac{9}{12}$ em três partes iguais e consideramos duas destas partes.

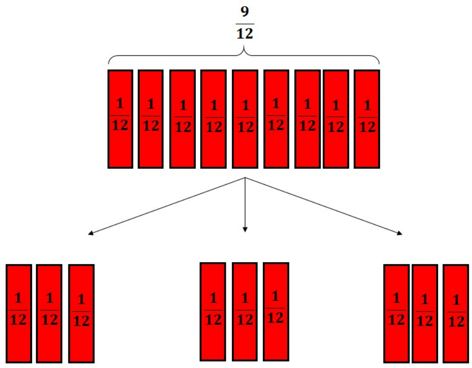


Figura 5.17: Divisão de $\frac{9}{12}$ em três partes iguais.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

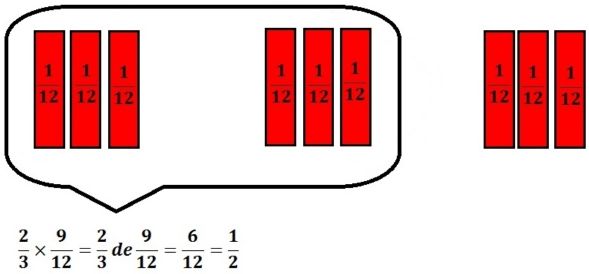


Figura 5.18: Duas das três partes de $\frac{9}{12}$, o que equivale a $\frac{2}{3} \times \frac{9}{12}$
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Logo, concluimos que $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.

A fase de experimentação, pede-se para que o aluno efetue as seguintes multiplicações: $\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{8}$, $\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{12}$ e $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$.

No fim desta etapa cabe ao mentor metodizar a multiplicação entre frações.

O produto de duas frações é uma fração em que o numerador é dado pelo produto dos numeradores; e o denominador é dado pelo produto dos denominadores.

Nos exemplos acima podemos verificar que o método acima está coerente.

- $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. OK
- $\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{12} = \frac{18}{36} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. OK
- Os alunos devem verificar a coerência com os outros produtos também.

5.6 Divisão entre frações

Nesta seção vamos tratar de três tipos de divisão: de número inteiro por fração, de fração por número inteiro e de frações. Vamos iniciar lembrando que a divisão é a operação inversa da multiplicação e vice versa, inclusive este é um conceito fundamental para entendermos a algebrização da divisão.
Uma outra definição importante é a de fração inversa (ou inverso de uma fração). Toda fração $\frac{a}{b}, a \neq 0$, admite inversa, e é igual a $\frac{b}{a}$. A inversa de uma fração com numerador não nulo é aquela que o numerador passa a ser denominador e o denominador passa a ser numerador. Por exemplo, a fração inversa de $\frac{7}{9}$ é $\frac{9}{7}$.
Todo número inteiro, não nulo, pode ser escrito como uma fração de denominador igual a 1, e também admite inversa. A inversa de 5 é $\frac{1}{5}$, e a fração inversa de $\frac{1}{20}$ é 20. O zero é o único número que não admite inversa.
Conscientes destes conceitos, gostaríamos de fazer a seguinte análise:

Multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ equivale a dividir 10 por 2, verifiquem!

$$10 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = \frac{10 \div 2}{2 \div 2} = \frac{10 \div 2}{1} = 10 \div 2 = 5 \tag{5.2}$$

Ou seja, multiplicar um número n por uma fração equivale a dividir n pela inversa desta fração. Da mesma forma que dividir n por b, equivale a multiplicar n pelo inverso de b.

Depois de ter explicitado tais conceitos chegou a hora de anunciar uma das ideias mais elementares da divisão. Dividir uma número a por b, sendo b não nulo, significa determinar quantas vezes b cabe em a. Por exemplo, dividir 6 por 2 é determinar quantas vezes o número 2 cabe em 6 e a resposta é três vezes.

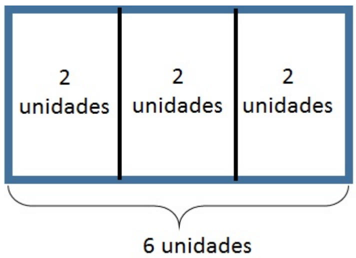


Figura 5.19: Divisão entre 6 e 2.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Logo, $6 \div 2 = 3$. E para verificarmos a validade da operação podemos realizar a propriedade fundamental da divisão que diz que, sejam a, b e c números inteiros em que $b \neq 0$, a dividido por b é igual a c se, e somente se, a é igual ao produto entre b e c.

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z}, b \neq 0; a \div b = c \Leftrightarrow a = b \cdot c$$

Sendo assim, $6 \div 2$ é realmente igual a 3, pois $6 = 2 \cdot 3$.

5.6.1 Divisão de um número inteiro por fração

Para dar início a esta prática é imprescindível que os conceitos supracitados sejam trabalhados com a classe.

Vamos dividir, por exemplo, 2 por $\frac{1}{3}$. Devemos procurar saber quantas vezes $\frac{1}{3}$ cabe em 2 inteiros. Para isso vamos fazer uso do material concreto. Vamos pegar os dois retângulos inteiros do kit, que são nossos referencias, são os nossos dois inteiros.

Percebemos que $\frac{1}{3}$ cabe três vezes em cada inteiro, logo, $2 \div \frac{1}{3} = 6$.

Utilizando o conceito de operação inversa, $2 \div \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{3}{1} = 2 \cdot 3 = 6$.

Um outro exemplo é dividir 2 por $\frac{4}{5}$. Quantas vezes $\frac{4}{5}$ cabe em dois?

Neste caso, percebemos que $\frac{4}{5}$ cabe em 2, duas vezes e meia. Logo $2 \div \frac{4}{5} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$. Mas como sistematizar esta operação? Aí é que entraremos, mais uma vez com aquele conceito de operação inversa.

Efetuar uma divisão é equivalente a fazer uma multiplicação entre dividendo e o inverso do divisor, ou seja, $2 \div \frac{4}{5} = 2 \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$, o mesmo resultado encontrado empiricamente.

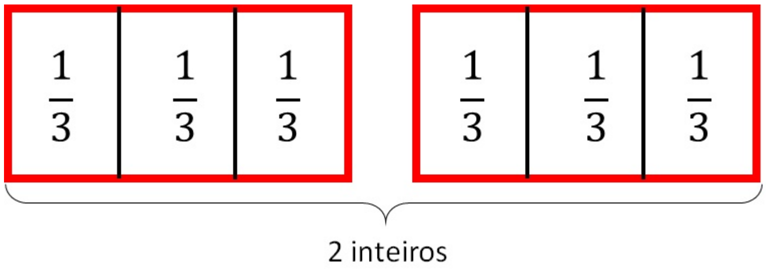
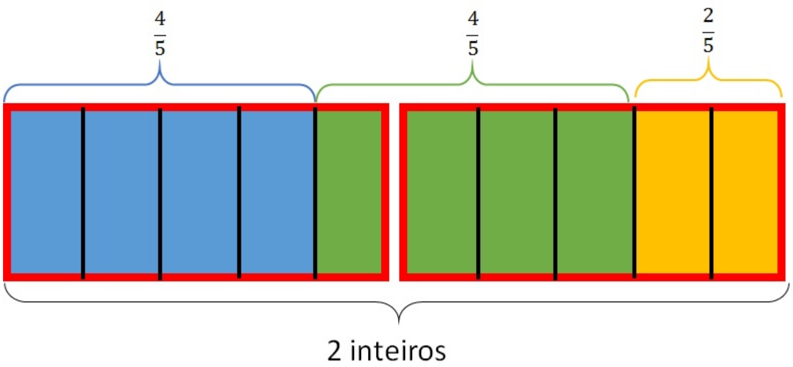


Figura 5.20: Divisão de dois inteiros por $\frac{1}{3}$.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013



De uma forma geral, concluimos que para dividir um número inteiro por uma fração basta conservar o inteiro e multiplicar pela fração invertida.

5.6.2 Divisão de uma fração por um inteiro

Dando continuidade, vamos efetuar uma divisão de uma fração por um número inteiro experimentalmente e depois verificar a validez da propriedade da operação inversa. Efetuar a operação $\frac{1}{3} \div 2$ significa descobrir quantas vezes 2 cabe em $\frac{1}{3}$. É lógico que dois inteiros não cabe em $\frac{1}{3}$, contudo teremos que descobrir que parte de dois inteiros cabe em $\frac{1}{3}$. Como vimos acima, dois inteiros é composto por seis peças de $\frac{1}{3}$, logo a parte de dois inteiros que cabe em $\frac{1}{3}$ é $\frac{1}{6}$.
Aplicando o conceito de operação inversa, $\frac{1}{3} \div 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, o resultado é equivalente ao encontrado empiricamente.

Nesta situação, podemos dizer que para dividir uma fração por um número inteiro, basta conservar esta fração e multiplicar pelo inverso deste inteiro.

5.6.3 Divisão de uma fração por outra fração

De forma análoga, para dividir $\frac{1}{3}$ por $\frac{1}{6}$, temos que descobrir quantas vezes $\frac{1}{6}$ cabe em $\frac{1}{3}$.

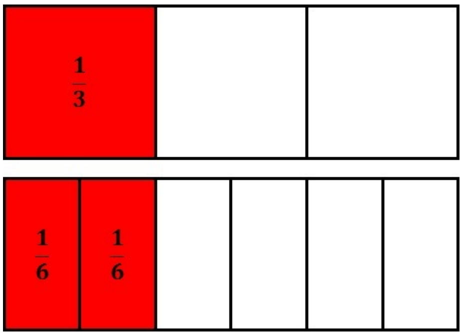


Figura 5.21: Divisão entre $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{6}$.
Fonte: Própria criada com o auxílio do PowerPoint 2013

Percebemos que $\frac{1}{6}$ cabe duas vezes em $\frac{1}{3}$, logo, $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = 2$. Será que o conceito de operação inversa também dá certo aqui? $\frac{1}{3} \div \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{1} = \frac{6}{3} = 2$.

Assim, vimos que a propriedade é válida quando dividimos número inteiro por fração, fração por número inteiro e fração por fração. Mas, será que o estudante ficou satisfeito? Uma forma de se justificar essa propriedade sem utilizar a intuição como fizemos até agora, é lembrar que existe uma propriedade de divisão que diz que o quociente não se altera se multiplicarmos dividendo e divisor por um mesmo número (inclusive utilizamos esta propriedade para determinar frações equivalentes). Exemplos:

- $20 \div 4 = (20 \cdot 5) \div (4 \cdot 5) = 100 \div 20 = 5$.
- $42 \div 7 = (42 \cdot 2) \div (7 \cdot 2) = 84 \div 14 = 6$.

Vamos usar esta propriedade para aplicar na divisão de frações, por exemplo, $\frac{7}{3} \div \frac{5}{2}$. Ambos os termos desta divisão será multiplicado pelo inverso do divisor, ou seja, $\frac{2}{5}$.

$\frac{7}{3} \div \frac{5}{2} = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} \div \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5} \div 1 = \frac{7}{3} \cdot \frac{2}{5}$.

Este raciocínio pode ser aplicado para todos os tipos de divisão. Concluimos, para efetuar a divisão de frações, conservamos a primeira fração e multiplicamos pelo inverso da segunda fração.

Capítulo 6

Considerações Finais

A atividade lúdica desperta na criança interesse e possibilita maior compreensão de muitas estruturas matemáticas existentes e de difícil assimilação. Além de favorecer positivamente a relação entre o professor e o aluno, propiciando um ambiente socioafetivo promissor para acontecer a aprendizagem. A mudança das atividades em sala de aula não deixa o aluno desconfortável, isso acontece com quem ministra a aula, a mudança de atitude e de metodologia pode não ter êxito total nas primeiras aulas, mas com o tempo o profissional vai se familiarizando e aprimorando a nova técnica.

O jogo possibilita um processo de aprendizagem mais livre, gera momentos mais felizes e criativos em sala de aula mas apesar de alguns professores terem interesse de fazer uma aula com mais brincadeiras, eles precisam de uma “receita de bolo” para ter segurança para modificar a sua metodologia. Além disso, a carga horária dos professores brasileiros é muito alta, conheço muitos que trabalham 60 horas semanais, o que proporciona dificuldade para que a parte do cérebro responsável pela imaginação e criatividade aflore no planejamento de suas aulas.

Espera-se que o aluno consiga efetuar cálculos com números inteiros utilizando a regra de sinais e que desenvolva habilidade de efetuar as quatro operações básicas com frações. A expectativa deste trabalho é motivar e promover aulas ricas em materiais, oportunidades e investigação para que o conhecimento possa ser construído e solidificado na mente das pessoas que serão os futuros profissionais do nosso país.

Referências Bibliográficas

[1] ANJOS, Marta Figueredo dos - A difícil aceitação dos números negativos: Um estudo da teoria dos números de Peter Barlow (1176-1862). Natal: UFRN, 2008, 96p. Dissertação de mestrado em Ciências Naturais e Matemática, programa de pós graduação em ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal - RN. 2008.

[2] BOYER, Carl Benjamin. História da Matemática. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

[3] EXPERIMENTOTECA, CDCC - USP - 1 Números Inteiros - Operações com números inteiros. Disponível em `http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_fundamental/1f_numeros_inteiros_p.pdf`. Acesso em 27 de fevereiro de 2016.

[4] EXPERIMENTOTECA, CDCC - USP - 4 Frações - Representação das frações. Adição e Subtração. Disponível em `http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_fundamental/4f_representacao_das_fracoes_p.pdf`. Acesso em 27 de fevereiro de 2016.

[5] FERREIRA, Jamil - A construção dos números - 2 ed. SBM, 2011.

[6] MEDEIROS, Alexandre e MEDEIROS, Cleide. Números negativos: Uma história de incertezas. Bolema, ano 7, n 8, p.49-59. 1992.

[7] PERLIN, Patrícia e LOPES, Anemari Roesler Luersen Vieira. A necessidade histórica da criação das frações e a organização do ensino do professor dos anos iniciais. VI Congresso internacional de Ensino da Matemática. Canoas: ULBRA, 2013, 11p. Disponível em `http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/932/907`. Acesso em 27 de fevereiro de 2016.

[8] POMMER, Wagner M. - Diversas abordagens da regra de sinais nas operações em Z. (Artigo) Seminários de Ensino de Matemática - SEMA/FEUSP. Março 2010.

[9] SÁ, Pedro Franco de e ANJOS, Luís Jorge Souza dos - Números Negativos: Uma trajetória histórica. Anais de IX Seminário nacional de História da Matemática - Sociedade Brasileira de Matemática. 2011.