UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA

SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL - PROFMAT

FERNANDA CAON

NÚMEROS COMPLEXOS: INTER-RELAÇÃO ENTRE CONTEÚDOS E APLICAÇÕES

PONTA GROSSA

2013

FERNANDA CAON

NÚMEROS COMPLEXOS: INTER-RELAÇÃO ENTRE CONTEÚDOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática PROFMAT – UEPG como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira

PONTA GROSSA

2013

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Caon, Fernanda
C235 Números complexos: inter-relação entre conteúdos e aplicações/ Fernanda Caon. Ponta Grossa, 2013.
72f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática),Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira.

1.Números complexos. 2.Inter-relação. 3.Aplicações. I.Pereira, Marciano. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 512

TERMO DE APROVAÇÃO

Fernanda Caon

"Números Complexos: Inter-Relação Entre Conteúdos e Aplicações"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

M Pereira

Orientador: Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática, UEPG/PR

Marcos Calçada

Prof. Dr. Marcos Calçada
Departamento de Matemática, UFPR/PR

Simão Nicolau Stelmastchuk

Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk
Departamento de Matemática, UNESPAR/PR

Ponta Grossa, 12 de Março de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me manter motivada e com saúde durante todo o período de realização do mestrado.

À minha mãe Sueli Terezinha Caon por ter me ensinado a ler, escrever e calcular na condição de professora e por ter me incentivado a estudar e buscar sempre o melhor caminho na condição de mãe.

Ao meu pai Deonildo Caon por me mostrar a cada dia o valor e as virtudes de um grande ser humano e por me estender a mão sempre que precisei de ajuda.

Ao meu marido Edinilson Salateski pela parceria, carinho e força nos momentos mais difíceis e por dividir com meus estudos e preocupações nossos momentos de lazer e descanso.

Ao professor Marciano Pereira pela orientação do trabalho e pela verdadeira demonstração de amizade predispondo-se a me auxiliar nos momentos em que a distância e a falta de tempo se impuseram como limitações.

A todos os professores do PROFMAT que dividiram comigo seus conhecimentos e me orientaram nos momentos de dúvida.

Aos colegas que se tornaram amigos com a convivência e compartilharam momentos de alegrias e de conquistas e também momentos de angústias e provações.

"Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real".

Nicolai Lobachevski (1793-1856)

RESUMO

Os Números Complexos possuem diversas aplicações tanto na Matemática quanto em outras áreas do conhecimento. Associados a outros conteúdos matemáticos, promovem técnicas alternativas de demonstração e resolução de problemas, resgatando conceitos e atribuindo significados. Há áreas do conhecimento em que são considerados essenciais e outras em que são importantes facilitadores de cálculos. Apesar disso, os Números Complexos são pouco explorados ou explorados de forma pouco significativa no Ensino Médio. Este trabalho tem por objetivo apresentar possibilidades de integração dos Números Complexos com outros conteúdos matemáticos bem como aplicações desses números em outras áreas do conhecimento, valorizando os aspectos históricos, algébricos e geométricos do conteúdo.

Palavras-chave: Números Complexos, inter-relação, aplicações.

ABSTRACT

The Complex Numbers have many applications both in Mathematics and in other areas of knowledge. Associated with other mathematical content, promote alternative techniques demonstration and troubleshooting, rescuing attributing meanings and concepts. There are areas of knowledge that are considered essential and others that are important facilitators of calculations. Nevertheless, the Complex Numbers are little explored or exploited minor in secondary education. This paper aims to present opportunities for integration of Complex Numbers with other mathematical content as well as applications of these numbers in other areas of knowledge, valuing the historical aspects, algebraic and geometric content.
Keywords: complex numbers, interrelationship, applications.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

De acordo com [27], p.42 o ensino da Matemática nessa modalidade tem, entre outros, os seguintes objetivos: "aplicar os conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas e estabelecer conexões entre diferentes conteúdos matemáticos e entre esses conteúdos e o conhecimento de outras áreas do currículo". O mesmo documento acrescenta que:

> (...) não basta revermos a forma ou metodologia de ensino, se mantivermos o conhecimento matemático restrito à informação, com as definições e os exemplos, assim como a exercitação, ou seja, exercícios de aplicação ou fixação pois, se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras.([27], p.42)

Por sua vez, em [26] temos que "(...) a Matemática deixou de ser vista como um conjunto de conhecimentos universais e teoricamente bem definidos e passou a ser considerada como saber dinâmico, prático e relativo". Além do mais:

> A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios. ([26], p.45)

Na mesma linha de pensamento, [19], p.41, ressalta que é imprescindível que o estudante se aproprie do conhecimento de forma que “compreenda os conceitos e princípios matemáticos, raciocine claramente e comunique ideias matemáticas, reconheça suas aplicações e aborde problemas matemáticos com segurança”.

Apesar de documentos norteadores do ensino da Matemática destacarem a importância de estabelecer conexões entre os conteúdos matemáticos e entre esses e outras áreas do conhecimento, a fim de atribuir-lhes sentido e dar significado à aprendizagem dos mesmos, alguns livros didáticos que constituem o material de apoio imediato de professores e alunos trata dos Números Complexos de forma isolada, como um capítulo à parte, sem conexões com outros conteúdos e tampouco aplicações.

É preciso, então, mostrar que tais números possuem relação com outros conteúdos matemáticos e outras áreas do conhecimento explorando algumas aplicações dos números complexos em uma abordagem passível de compreensão a alunos do Ensino Médio. Tal abordagem pode ser feita partindo do contexto histórico dos Números Complexos, passando para um estudo integrado com outros conteúdos matemáticos e finalizando com algumas aplicações em outras áreas do conhecimento.

Dessa forma, busca-se com esse trabalho apresentar possibilidades de integração dos Números Complexos com outros conteúdos matemáticos bem como aplicações desses números em outras áreas do conhecimento, após uma descrição de seu contexto histórico e dos conceitos básicos relacionados, analisando a forma como se apresentam nos livros didáticos e valorizando os aspectos algébricos e geométricos.

Conhecer o contexto histórico é importante, pois como afirma [16], p.8, “(...) diante de um objeto matemático, é muito importante conhecermos os problemas que envolveram o seu surgimento e o seu desenvolvimento”. [6], p.3, também coloca que:

> “Os Números Complexos possuem uma grande diversidade em aplicações servindo como base para as áreas das Ciências Exatas, sendo um assunto pouco trabalhado na disciplina de Matemática, principalmente no ensino de nível médio. Por isso, o conhecimento da história e conceitos dos Números Complexos pode auxiliar significativamente na sua utilização em aplicações na área de Física, por exemplo, assim como na compreensão de fatos cotidianos.”

Entende-se também que relacionar Números Complexos com outros conteúdos matemáticos, é bem proveitoso por promover o emprego de técnicas alternativas de demonstração, de resolução de problemas e também por resgatar resultados clássicos desses conteúdos. Dessa inter-relação, tanto os Números Complexos quanto os outros conteúdos são valorizados e revitalizados, abrindo-se a possibilidade de retomada de conceitos em vários momentos do processo de ensino e aprendizagem.

Porém, para não ficarmos presos apenas ao contexto histórico e aos conceitos básicos dos Números Complexos, embora integrados com outros conteúdos matemáticos, pretende-se apresentar ao final do trabalho algumas aplicações desses números em outras áreas do conhecimento como, por exemplo, Física e Engenharia. Afinal, como afirma [1], p.88, no que se refere aos Números Complexos:

> “(...) hoje temos aplicações que não se fizeram presente na história de sua criação, tais como: Topografia, Cosmologia, Informática, Física Moderna e Eletricidade. Os modelos matemáticos fornecem os fundamentos científicos que propiciam explicações para fenômenos que, sem sua utilização, não seriam possíveis obter respostas nas áreas das ciências e da tecnologia. Isso reforça nossa responsabilidade na tarefa educativa, ao mesmo tempo em que nos faz sentir as limitações de nossa ação num mundo em constante transformação”.

Dessa forma, considerando que os Números Complexos podem ser vinculados a outros conteúdos matemáticos e também a vasta aplicabilidade desses números em outras áreas do conhecimento, nada mais correto que explorar essas possibilidades para uma aprendizagem mais significativa no ensino médio.

O trabalho está estruturado em quatro capítulos, da seguinte forma:

No primeiro capítulo, intitulado História dos Números Complexos, relatamos acontecimentos que culminaram com o seu surgimento bem como a contribuição de diversos matemáticos nesse processo e os problemas de aceitação pelos quais esses números passaram em diferentes momentos da história.

No segundo capítulo, intitulado Números Complexos, apresentamos uma breve análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, no que se refere ao contexto histórico, à forma de apresentação dos conceitos, a relação com outros conteúdos matemáticos e a aplicações em outras áreas do conhecimento. Em seguida, fazemos uma revisão detalhada dos conceitos básicos do conteúdo Números Complexos, valorizando os aspectos algébricos e geométricos, incluindo as demonstrações no nível de ensino médio.

No terceiro capítulo, intitulado Conexões com outros Conteúdos Matemáticos, apresentamos algumas relações estabelecidas entre os Números Complexos e outros conteúdos matemáticos, como Geometria Plana, Geometria Analítica e Equações Algébricas.

No quarto capítulo, intitulado Aplicações em outras Áreas do Conhecimento, descrevemos aplicações dos Números Complexos na Física, na Engenharia Elétrica, nos Fractais, na Arte e na Aerodinâmica.

No desenvolvimento desse trabalho, algumas referências merecem destaque pois estão de acordo com o que realizamos e trazem importantes subsídios para a continuidade do mesmo. Entre elas, citamos: [16], que apresenta o desenvolvimento dos Números Complexos em determinado período da história, que vai desde o Renascimento, até o início do século XIX, antes que fosse estabelecida uma formalização rigorosa para estes números com conceitos matemáticos; [7] que trata da demonstração de alguns teoremas clássicos da Geometria Plana com a utilização dos Números Complexos; [1] que apresenta uma proposta de mudança metodológica para o ensino de Números Complexos no Ensino Médio; [23], cuja pesquisa busca uma forma de ensinar os Números Complexos para alunos do Ensino Médio e a possibilidade de utilização da Geometria Dinâmica para cumprir tal finalidade e [18] com uma proposta didática utilizando a Teoria dos Fractais e Geometria, como exemplos de aplicações para serem contextualizados na sala de aula, de forma a facilitar o processo de aceitação da existência dos Números Complexos pelos alunos.

As referências acima mencionadas são apenas algumas que tratam dos Números Complexos e foram utilizadas para enriquecer a proposta desse trabalho.

CAPÍTULO 1
HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

A História dos Números Complexos é marcada pela resistência e ilustra bem o quanto um conceito matemático pode demorar a ser compreendido e aceito. Grandes matemáticos negaram sua existência mesmo quando os usavam para realizar operações.

A análise do contexto histórico dos Números Complexos também mostra que o surgimento dos mesmos está associado à resolução de equações de 3º grau, corrigindo a falsa ideia de que surgiram para resolver equações de 2º grau com raízes quadradas de números negativos.

Essa falsa ideia aparece em alguns livros didáticos e também em [27], p.71, quando escreve que "Os Números Complexos devem ser apresentados como uma histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação, tomando-se, para isso, uma equação bem simples, a saber, $x^2 + 1 = 0$".

Os dados históricos utilizados nesse capítulo são baseados nas referências [8], [9], [11], [12], [16], [21], [22] e [29].

1.1 EQUAÇÕES DE SEGUNDO E TERCEIRO GRAUS

Com a criação dos Números Reais, que tinham representação para a solução de todos os problemas de medida, a impressão que imperava entre os matemáticos, por volta de 1500 d.C., é que não seria necessária a ampliação de nenhum conjunto numérico, visto que os Números Reais davam conta de resolver todos os problemas concretos com os quais se defrontavam. O pensamento corrente nessa época era que "como um número negativo não era quadrado de nenhum número, não existia raiz quadrada de número negativo".

Apesar de encontrarmos menções a uma raiz quadrada de número negativo em autores da Antiguidade, como por exemplo, a expressão $\sqrt{81-144}$, que aparece em uma obra de Heron de Alexandria (século I), ou $\sqrt{1849-2016}$, que aparece na tentativa de Diofanto (século III) de resolver a equação $336x^2 + 24 = 172x$, foi apenas no século XVI, com os matemáticos italianos, que tais raízes começaram a aparecer sistematicamente nas equações. Quando isso aconteceu, os matemáticos ainda nem tinham esclarecido todos os conceitos de números negativos e irracionais.

Ao deparar-se com problemas que envolviam as equações de 2º grau com discriminante negativo, a situação tornava-se bem desconfortante, para os matemáticos.

Muitas vezes, eles utilizavam raízes de números negativos, aplicando as propriedades de Números Reais, mas isto incomodava muito os cientistas. Tomando, por exemplo, o problema de dividir o número 18 em duas partes cujo produto seja 82.

Representando por x uma dessas partes, então, a outra parte será $18 - x$ e a equação que resolve o problema é $x(18 - x) = 82$ ou $x^2 - 18x + 82 = 0$, cujas raízes são representadas por $9 + \sqrt{-1}$ e $9 - \sqrt{-1}$. Essas soluções são impossíveis no conjunto dos números reais, pois $\sqrt{-1}$ nada significa nesse conjunto.

Para evitar o envolvimento com números dessa natureza, os matemáticos diziam, simplesmente, que a equação não podia ser resolvida. Apesar do desconforto, não foi a resolução das equações de 2º grau que motivaram o surgimento dos Números Complexos.

No início do século XVI, no meio da disputa pela resolução da equação do 3º grau, é que se percebeu que os Números Reais não eram suficientes e surgem as primeiras ideias da criação do Conjunto dos Números Complexos.

Por volta de 1510, o matemático italiano Scipione Del Ferro (1465-1526), encontrou uma forma de resolver as equações de 3º grau da forma $x^3 + px + q = 0$, mas morreu antes de publicar sua descoberta. Conhecendo o método de resolução, Antonio Maria Fior, aluno de Dell Ferro, tenta ganhar notoriedade propondo, uma disputa matemática a outro matemático italiano, Nicolo Fontana Tartaglia (1499-1557). Cada oponente propôs ao outro trinta problemas. Enquanto Tartaglia propôs questões variadas, todas as questões propostas por Fior envolviam equações do tipo $x^3 + px = q$, cujo método de resolução já era conhecido por ele.

Tartaglia conseguiu descobrir o método de resolução de tais equações o que o tornou vencedor do desafio, pois apresentou todas as questões resolvidas enquanto seu oponente não teve o mesmo êxito.

O feito de Tartaglia se espalhou chegando ao conhecimento de Girolamo Cardano (1501-1576) que, em 1539, convenceu Tartaglia a revelar seu método de resolver equações cúbicas, sob juramento de que não publicaria antes que ele o fizesse. A regra foi revelada em forma de versos, mas sem a demonstração. A ideia dos versos não é tão estranha, visto que na época os autores não dispunham de notação adequada para representar as equações em fórmulas como ocorre atualmente.

Os versos de Tartaglia constam na página 120, da publicação comemorativa do IV centenário de sua morte, intitulada *Quesiti et inventioni diverse*.

De acordo com a tradução para português apresentada por [22], os versos dizem:

1. Quando o cubo com a coisa em apreço
Se igualam a qualquer número discreto
Acha dois outros diferentes nisso

2. Depois terás isto por consenso
Que seu produto seja sempre igual
Ao cubo do terço da coisa certo

3. Depois, o resíduo geral
Das raízes cúbicas subtraídas
Será tua coisa principal

4. Na segunda destas operações,
Quando o cubo estiver sozinho
Observarás estas outras reduções

5. Do número farás dois, de tal forma
Que um e outro produzam exatamente
O cubo da terça parte da coisa

6. Depois, por um preceito comum
Toma o lado dos cubos juntos
E tal soma será teu conceito

7. Depois, a terceira destas nossas contas
Se resolve como a segunda, se observas bem
Que suas naturezas são quase idênticas

8. Isto eu achei, e não com passo tardo
No mil quinhentos e trinta e quatro
Com fundamentos bem firmes e rigorosos
Na cidade cingida pelo mar

De posse do método de resolução revelado em versos por Tartaglia, Cardano conseguiu achar uma demonstração que o justificasse e trabalhando conjuntamente com seu discípulo Ludovico Ferrari (1522-1565), conseguiram descobrir um método de resolução para a equação de quarto grau com a devida demonstração.

Em 1544, ao tomar conhecimento do trabalho de Scipione Del Ferro, Cardano descobriu que Tartaglia não havia sido o único a descobrir a fórmula para resolver as equações cúbicas. No entendimento de Cardano, isso o desobrigava de seu juramento. Assim, em 1545, publicou sua obra *Ars Magna*, na qual revelava a solução de equações cúbicas e quárticas, além de todo seu trabalho produzido após o conhecimento da fórmula de Tartaglia.

A fórmula apresentada por Cardano para as equações cúbicas do tipo $x^3 + px = q$ era:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

No entanto, a resolução de equações cúbicas por meio dessa fórmula esbarrava em um problema quando $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0$, pois recaia em raízes quadradas de números negativos, o que na época era inconcebível.

De acordo com [12], p.171:

> A importância do trabalho de Cardano foi apresentar raízes de números negativos nas aplicações da fórmula para resolver equações cúbicas (os chamados casos irredutíveis). Cardano não havia entendido exatamente o seu próprio trabalho com essas raízes e, durante muitas décadas, todos os que trabalharam com raízes quadradas de números negativos não o fizeram com muita fé.

Tomando como exemplo, o seguinte problema: "Qual a medida x, comum à aresta de um cubo e à altura de um paralelepípedo com base 15 unidades de área, sabendo que a diferença entre seus volumes é de 4 unidades?". Esse problema corresponde à equação $x^3 - 15x = 4$ e, aplicando-se a fórmula apresentada por Cardano, apareceria a solução 4, obtida da expressão $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$. A dúvida que persistia era como de uma expressão com raízes de números negativos poderia originar um número real, que sabidamente era solução do problema.

Conforme ressalta [16], p.23:

> Cardano se referia às raízes quadradas de números negativos como sofísticas e chegou a avaliar que esses resultados eram tão sutis quanto inúteis.[...] independente das operações funcionarem perfeitamente com estas quantidades "sofisticadas", era necessário, mas confuso, associar um sentido geométrico a elas, permanecendo em aberto uma justificativa para o cálculo de raízes de números negativos. A atenção dada por Cardano a essas quantidades, aliada ao método de solução de equações cúbicas através de radicais, dá origem a um processo longo e de extrema importância na história da matemática. A partir deste momento, uma nova questão vai alimentar o pensamento matemático: como justificar a possibilidade de efetuarmos cálculos e admitirmos soluções envolvendo raízes quadradas de números negativos?

Ressurge o problema encontrado pelos matemáticos na resolução das equações do 2º grau com discriminante negativo. Porém, nesse caso, sabe-se que existe pelo menos uma raiz e já não se pode simplesmente dizer que o problema não tem solução. É preciso aceitar que o instrumento de cálculo, o Conjunto dos Números Reais, não é suficiente; há uma raiz e ele não permite calculá-la.

1.2 O SURGIMENTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1573), discípulo de Cardano, estudou profundamente o trabalho de seu mestre, principalmente os casos irredutíveis das equações cúbicas, que levavam a raízes de números negativos. Julgando que o estilo de exposição da obra Ars Magna não era muito claro, Bombelli publicou, em 1572, o livro *l'Algebra*, em que descreve as ideias de Cardano de forma didática, de tal forma que pudesse estudá-las sem necessidade de nenhuma outra referência.

É precisamente nesse livro que aparece pela primeira vez, explicitamente, a necessidade de introduzir os Números Complexos e também uma primeira apresentação do assunto.

Voltando à resolução da equação $x^3 - 15x = 4$, onde as raízes cúbicas $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ e $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ que aparecem na fórmula resolutiva diferem apenas por um sinal, Bombelli decidiu trabalhar como se as raízes quadradas de números negativos fossem verdadeiros números, o que chamou de “ideia louca”.

De acordo com a descrição apresentada por [21], Bombelli admitiu que a raiz cúbica de $2 + \sqrt{-121}$, podia ser representada por uma expressão da mesma forma, ou seja, existe $a + \sqrt{-b}$, tal que $\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$. Então, ele assume que a raiz cúbica de $2 - \sqrt{-121}$ é da forma $a - \sqrt{-b}$. Como ele já sabia que 4 era raiz da equação, necessariamente $a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b} = 4$. Assumindo que se aplicam a esses números as regras usuais do cálculo, as quantidades não existentes se cancelam, restando $a = 2$. Voltando à equação $\left(a + \sqrt{-b}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$ fica fácil deduzir que $b = -1$. Assim, ele obtém que:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1},$$

$$\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1},$$

$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Bombelli foi o primeiro matemático a dar alguma importância aos números que hoje conhecemos como complexos. Ele definiu as regras da adição e multiplicação para raízes de números negativos, escrevendo que $\sqrt{-n} \cdot \sqrt{-n} = -n$. Percebendo que com suas regras, a fórmula de Cardano funcionava em qualquer caso, operou livremente com elas.

Com a ideia de Bombelli e as regras desenvolvidas por ele, fica evidente a insuficiência dos Números Reais para a solução das Equações Algébricas. Entretanto, ainda faltava formalizarem-se as operações e propriedades desses números. Isso aconteceu mais de dois séculos depois com a contribuição do matemático suiço Leonard Euler (1707-1783).

Em 1749, Euler mostrou que se $a + b\sqrt{-1}$ for raiz de uma equação, então $a - b\sqrt{-1}$ também será. Também coube a ele melhorar a simbologia dos Números Complexos. Em um trabalho de 1777, o qual foi publicado somente em 1794, definiu $\sqrt{-1}$ como sendo i, de tal forma que $i^2 = -1$, surgindo a base dos números imaginários. A partir daí, o número

$a + b\sqrt{-1}$ passava a ser representado na sua forma algébrica $a + bi$, possibilitando operações como se fossem polinômios, ou seja, $a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i$; $a + bi - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$ e $(a + bi).(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$.

Mesmo assim, como a maioria até então, Euler ainda era reticente ao trabalhar com tais números, conforme escrito por ele, na obra *Vollstándige Anleitunng zur Álgebra*, publicada primeiro em russo, em 1768, e depois em alemão, em 1770, traduzido para português e citado por [21], p.10:

> Uma vez que todos os números concebíveis são maiores do que 0, ou menores do que 0 ou iguais a 0, é claro que a raiz quadrada de um número negativo não pode ser incluída entre os números possíveis. Conseqüentemente, devemos dizer que estes são números impossíveis. E esta circunstância nos conduz a tais números, que por sua natureza são impossíveis, e que são chamados costumeiramente de imaginários, pois eles só existem na imaginação.

A aceitação plena dos Números Complexos só aconteceu com a possibilidade da representação geométrica para tais números.

1.3 REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

O primeiro registro histórico de uma representação geométrica dos Números Complexos foi um artigo entregue, em 1797, à Academia Dinamarquesa de Ciências, pelo topógrafo norueguês Caspar Wessel (1745-1818). Tal artigo foi publicado em 1799 e intitulada *Sobre a Representação Analítica da Direção.*

Essa representação consistia em um sistema de eixos orientados, tal como o Sistema Cartesiano Ortogonal, onde um dos eixos é tomado expressamente para os números da forma $0 + bi$ (chamados imaginários puros) e o outro eixo é tomado para os Números Reais. Assim sendo, se $a + bi$ é um complexo qualquer e M o ponto do plano de coordenadas (a, b), faz-se corresponder ao complexo $a + bi$ o ponto M. Reciprocamente, para um ponto M', qualquer, com coordenadas (a', b') faz-se corresponder o complexo $a' + b'i$. Estabelece-se, assim, uma correspondência biunívoca entre os Números Complexos e pontos do plano.

Em sua obra Wessel também representou os Números Complexos da forma $a + bi$ como vetores do plano, tal como o fazemos hoje em dia, colocando a origem do vetor na origem do sistema de coordenadas e extremidade no ponto M de coordenadas (a, b). Com isso mostrou uma representação geométrica para a adição de dois Números Complexos como a diagonal do paralelogramo construído a partir dos vetores correspondentes aos complexos $a + bi$ e $c + di$.

Uma representação semelhante à de Wessel para os números da forma $a + bi$ e suas operações, foi dada, em 1806, pelo matemático suíço Jean Robert Argand (1768-1822) ao escrever o livro *Ensaio sobre uma maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas.* Observando que a multiplicação de 1 por i é igual a i e uma nova multiplicação por i é -1, Argand pensou em representar i por uma operação que se comporta dessa maneira. Assim, pode-se representar i por uma rotação de $90°$ no sentido anti-horário. Em sua obra ele também utilizou os resultados obtidos para demonstrar teoremas da Álgebra, da Geometria e da Trigonometria.

Devido a pouca representatividade de Wessel e Argand, seus trabalhos apesar de importantes, não ganharam notoriedade entre os matemáticos da época.

Somente no final do século XVIII, quando o renomado matemático Carl Friedrich Gauss (1777-1855) passou a considerar os Números Complexos e sua representação no plano imaginário, que esses números ganharam status, e os matemáticos passaram a se sentir mais à vontade ao trabalhar com eles.

Uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra foi publicada em 1799, na tese de doutorado de Gauss. Esse teorema diz que "toda equação polinomial de grau n, com n ≥ 1 admite pelo menos uma raiz complexa". Em sua demonstração, Gauss utilizou Números Complexos, mas não fez referências à representação geométrica dos mesmos.

A grande obra de Gauss a favor dos Números Complexos apareceu em 1831. Ele publicou suas ideias referindo-se "à verdadeira metafísica das quantidades imaginárias". Foi também nessa época que Gauss inventou o termo "Números Complexos" que permanece até hoje. O trabalho publicado consiste de um artigo bem explícito sobre o assunto, no qual ele diz na introdução:

> O autor tem considerado há vários anos esta parte importante da Matemática sob um ponto de vista diferente, que permite conferir às quantidades imaginárias, como as negativas, uma existência objetiva. O significado intuitivo dos Números Complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir estas quantidades no domínio da aritmética. ([21], p.15)

Nesse trabalho, ele apresentou uma detalhada explicação de como os Números Complexos poderiam ser desenvolvidos segundo uma teoria exata, apoiada na representação desses números no plano.

Wessel e Argand já haviam escrito sobre a representação geométrica dos Números Complexos, porém, o plano utilizado para representá-los passou a ser conhecido como Plano de Argand-Gauss, desprezando o mérito de Wessel.

Considerando a representação geométrica de um Número Complexo $m = a + bi$ no Plano Argand-Gauss, tal número corresponde no plano ao vetor com origem na origem O do sistema e extremidade no ponto M de coordenadas (a, b). Então, a partir das relações trigonométricas no triângulo retângulo pode-se estabelecer a seguinte igualdade $a + bi = r(cos\, \alpha + isen\, \alpha)$, sendo r a norma do vetor $\overrightarrow{OM}$ e α o menor ângulo que esse vetor forma com o eixo real. O número r passou a ser chamado módulo e o ângulo α de argumento.

Surgem assim, as Funções Circulares que estabelecem uma conexão entre a essência analítica dum Número Complexo e sua representação geométrica.

No campo das descobertas associadas aos Números Complexos, Willian Rowan Hamilton(1805-1865) também deu uma importante contribuição em 1837, reconhecendo os Números Complexos como um par ordenado de Números Reais (a, b) e reescrevendo as definições geométricas de Gauss, na forma algébrica.

Além dos autores citados acima, muitos outros deram suas contribuições até que o conjunto dos Números Complexos ficasse dotado das operações e propriedades que são estudadas atualmente.

Analisando a história dos Números Complexos fica fácil perceber que nem sempre a ordem que os fatos ocorreram condiz com a que são ensinados, até mesmo porque, muitas vezes, o mesmo conceito foi estudado por matemáticos diferentes em épocas diferentes. Podemos perceber também que a álgebra dos Números Complexos não está desvinculada da representação geométrica, sendo que a última foi de grande relevância no processo de aceitação de tais números.

Conhecer essa história ou parte dela é muito importante para responder questões que surgem no processo de ensino e aprendizagem. Uma história tão marcada pela resistência e tão cheia de tentativas até a formalização dos conceitos supera a ideia da Matemática como teoria pronta e acabada, inventada por alguém e aceita mediante um teorema com sua respectiva demonstração.

A História dos Números Complexos teve um início, motivado pela busca de soluções das equações cúbicas, mas, não se pode dizer que tem um final, pois certamente muitas aplicações desses números que hoje são encontradas na Física, na Engenharia e na própria Matemática nem foram imaginadas pelos estudiosos na época de sua descoberta.

CAPÍTULO 2
NÚMEROS COMPLEXOS

No capítulo anterior fizemos uma abordagem histórica dos Números Complexos, pois como afirma [16],p.8, "(...) diante de um objeto matemático, é muito importante conhecermos os problemas que envolveram o seu surgimento e o seu desenvolvimento". Porém, ao estudar um conteúdo, também é de extrema importância conhecer os conceitos em suas diversas formas de representação. No caso dos Números Complexos, podemos defini-los na forma algébrica, trigonométrica, exponencial ou geométrica, sendo que uma forma não exclui a outra em significado e importância apenas se relacionam e se complementam.

Por sua vez, sendo o livro didático um importante recurso utilizado em sala de aula, nas escolas públicas, faz-se necessário uma constante análise para avaliar a maneira como os conteúdos são abordados, se existem ou não erros conceituais, se há valorização das diferentes formas de representação e conexões com outros conteúdos. No entanto, devemos levar em consideração a referência [5], p.85, quando coloca que "o livro didático não deve assumir o papel de única referência sobre o saber a ser ensinado, mas ser considerado um recurso a mais". Assim sendo, se o livro didático não atende todos os requisitos para um aprendizado significativo, estes devem ser buscados em outras referências.

2.1 OS NÚMEROS COMPLEXOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

No intuito de propor uma nova alternativa de abordagem para os Números Complexos, pretende-se verificar, a exemplo de [1], a forma como diferentes autores estão explorando esse conteúdo nos livros didáticos. Para tanto, foram selecionados dez livros do ensino médio, sendo que sete deles se encontravam disponíveis para escolha no Plano Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM), em 2011. Tais livros constituem as referências [3], [4], [12], [15], [20], [25], [29], [30], [31] e [32].

Serão considerados na análise dos referidos livros: o contexto histórico, as formas de apresentação, a relação com outros conteúdos matemáticos e as aplicações em outras áreas do conhecimento.

No que se refere ao contexto histórico, percebemos que os autores têm se esforçado para inseri-lo em suas obras, pois a descrição de fatos históricos está presente nos livros analisados, sendo que em todos, iniciam o capítulo. No entanto, essa descrição é feita, em alguns casos, de forma superficial, sem muita relação com os conceitos a serem explorados posteriormente e resumindo a narrativa da descoberta e formalização dos Números Complexos aos matemáticos Tartaglia, Cardano, Bombelli e Gauss. Nesse sentido, os livros considerados mais completos são [12] e [32], que além de valorizarem a contribuição de diversos matemáticos no desenvolvimento dos Números Complexos, iniciam e terminam o capítulo com dados históricos, inclusive explorando os mesmos em questões abertas.

No momento de introduzir o conteúdo propriamente dito, oito dos autores estudados iniciam tentando resolver uma equação de segundo grau, com discriminante negativo e a maioria entre eles cita os Números Complexos como ampliação do conjunto dos Números Reais, necessária para resolver esse tipo de equações, a partir daí substituem a raiz quadrada de -1 por i e apresentam o conteúdo. Essa forma de abordagem transmite a falsa ideia de que os Números Complexos surgiram para resolver equações de 2º grau, o que só não é mais grave pelo fato de que a descrição histórica, feita antes de introduzir o conteúdo, esclarece que o surgimento deve-se à busca de soluções para as equações de 3º grau.

Os autores [15] e [30], não utilizaram essa forma de introduzir o conteúdo, partindo diretamente para a definição do conjunto dos Números Complexos como o conjunto de todos os pares ordenados de Números Reais, para os quais são válidas as definições de igualdade, adição e multiplicação de pares ordenados. Além deles, os autores das referências [12], [29] e [32] definem os Números Complexos como um conjunto de pares ordenados, sendo que o primeiro é mais detalhista ao explorar as propriedades e o último nem cita quais são as propriedades que devem ser satisfeitas. Os demais autores apresentam diretamente a forma algébrica dos Números Complexos, destacando parte real e parte imaginária.

Todos os livros mostram os Números Complexos no Plano de Argand-Gauss e fazem referência aos Números Complexos como vetor, mas deixam a desejar no que se refere à representação geométrica da adição, subtração, multiplicação, conjugado, etc. Nesse sentido, encontramos a representação geométrica da adição nos livros de [12] e [29] e do conjugado no livro [12]. Nos demais livros essa forma de visualização, tão importante para a compreensão dos conceitos é omitida ou aparece timidamente misturada em meio a uma série de exercícios de manipulação de fórmulas. Na apresentação da forma trigonométrica ou polar, as representações geométricas são mais satisfatórias, valendo destacar que a maioria dos livros traz o significado geométrico das raízes n-ésimas dos Números Complexos quando tratam da 2ª lei de De Moivre. Em contrapartida, [25] e [32] não contemplam essa parte do conteúdo nos livros didáticos analisados, explorando o conteúdo apenas até a 1ª Lei de De Moivre.

Nesta análise também verificamos que as demonstrações, mesmo as mais simples, estão sendo omitidas em quase todos os livros didáticos do ensino médio.

No que se refere à relação com outros conteúdos matemáticos, os Números Complexos são tratados estrategicamente no capítulo que antecede o de Polinômios e Equações Algébricas e depois aparecem no cálculo de raízes, sendo novamente citados no Teorema Fundamental da Álgebra para justificar a existência das n raízes de um polinômio de grau n. O problema observado é que, na quase totalidade dos livros, o cálculo de raízes de uma equação algébrica ou polinômio é feito de forma puramente técnica, em exercícios descontextualizados e desprovidos de significado. Uma exceção aparece em [32] que traz alguns problemas em contextos interessantes, inclusive o histórico.

Os autores [12], [25], [29] e [31] relacionam Números Complexos e Geometria, fazendo rotações de pontos em um sistema de eixos ortogonais; [29] utiliza os Números Complexos para demonstrar que em um quadrilátero qualquer, os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo e [25] aborda também a translação de figuras no plano.

As aplicações dos Números Complexos em outras áreas do conhecimento, contempladas nos livros analisados, estão relacionadas à Física, à Arte e à Engenharia Elétrica. [31] traz a aerodinâmica dos aviões com as descobertas do matemático russo Joukowski (1847-1921) como uma aplicação interessante. [4] cita a utilidade das operações com Números Complexos ao trabalhar com grandezas vetoriais na Física. [12], [29] e [32] citam a presença dos Números Complexos no processo de geração de energia elétrica e nos circuitos de corrente alternada, porém sem muita ênfase. [3] e [20] fazem breve referência às Funções Complexas que dão origem aos Fractais, cuja geometria é importante no estudo de Sistemas Dinâmicos.

Para concluir a análise, consideramos positivo o fato de que a maioria dos autores está inserindo o contexto histórico e buscando mostrar algumas aplicações, embora isso ainda aconteça insatisfatoriamente. Acreditamos que o conteúdo pode ser mais bem explorado nos exercícios, inserindo-se mais exercícios contextualizados com questões abertas e reduzindo a quantidade daqueles que priorizam a simples manipulação de fórmulas e repetição de exemplos resolvidos. Também acreditamos que a representação geométrica das operações e conceitos deve ser apresentada simultaneamente com a algébrica para facilitar a compreensão dos mesmos, pois “os conhecimentos geométricos não devem ser separados da aritmética e da álgebra, pois interliga-se com ambas” ([26], p.57).

Nos casos onde as demonstrações estão no nível de ensino médio, estas não devem ser omitidas, pois “entende-se que a valorização de definições, as abordagens de enunciados e as demonstrações de seus resultados são inerentes ao conhecimento”. ([26], p.57).

A seguir apresentamos uma série de conceitos e propriedades relacionados ao conteúdo Números Complexos, cujo objetivo não é discutir se a sequência e forma apresentadas são melhores ou piores do que a dos livros didáticos e sim, fazer uma revisão detalhada enfatizando as representações gráficas que possuem grande apelo visual e inserindo algumas demonstrações, cujo conhecimento é importante para tratar de inter-relações e aplicações do conteúdo. Para fazer tal revisão, foram utilizadas as referências [8], [9], [10], [13] e [23], além das utilizadas na análise acima.

2.2 O CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

2.2.1 Definição e Propriedades

Seguindo o que foi proposto por Gauss, em 1831 e reafirmado por Hamilton, em 1837, podemos definir o Conjunto dos Números Complexos, indicado por $\mathbb{C}$, da seguinte maneira:

Definição: O Conjunto dos Números Complexos é o conjunto dos pares ordenados de Números Reais, para os quais estão definidas as seguintes operações:

i) Igualdade: $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$;

ii) Adição: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$;

iii) Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Propriedades da Adição: A operação de adição, conforme definida em ii), satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer z, v e w pertencentes a $\mathbb{C}$:

A_1) Comutativa: $z + v = v + z$;

A_2) Associativa: $(z + v) + w = z + (v + w)$;

A_3) Elemento neutro: existe $z_0 \in \mathbb{C}$, tal que $z + z_0 = z_0 + z = z$;

A_4) Inverso aditivo ou oposto: Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $z' \in \mathbb{C}$, tal que $z + z' = 0 = z' + z$.

Demonstração:

A_1) Sejam $z = (a_1, b_1)$ e $v = (a_2, b_2)$. Então,

$$z + v = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Utilizando a propriedade comutativa dos Números Reais, temos

$$z + v = (a_2 + a_1, b_2 + b_1),$$

ou seja,

$$z + v = (a_2, b_2) + (a_1, b_1) = v + z.$$

A_2) Sejam $z = (a_1, b_1), v = (a_2, b_2)$ e $w = (a_3, b_3)$. Então

$$(z + v) + w = [(a_1, b_1) + (a_2, b_2)] + (a_3, b_3) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3),$$

que equivale a

$$(z+v)+\ w=(a_1+a_2+a_3,b_1+b_2+b_3).$$

Utilizando a propriedade associativa dos Números Reais, temos

$$(z+v)+w=(a_1,b_1)+(a_2+a_3,b_2+b_3)=(a_1,b_1)+[(a_2,b_2)+(a_3,b_3)],$$

ou seja,

$$(z+v)+w=z+(v+w).$$

A3) Sejam $z=(a_1,b_1)$ e $z_0=(0{,}0)\in\mathbb{C}$. Então

$$z+\ z_0=\ (a_1,b_1)+\ (0{,}0)=\ (a_1+0,b_1+0)=(0+\ a_1,0+b_1).$$

Pelo elemento neutro da adição nos Números Reais, segue que

$$z+\ z_0=\ (a_1,b_1)=z.$$

A4) Se $z=(a_1,b_1)$ tomemos $z'=(-\,a_1,-\,b_1)$, então

$$z+\ z'=(a_1,b_1)+(-\,a_1,-\,b_1)=[a_1+(-\,a_1),b_1+(-\,b_1)]=(a_1-\ a_1,b_1-\ b_1).$$

Portanto, pelo inverso aditivo dos Números Reais, temos

$$z+z'=(0{,}0).$$

Propriedades da Multiplicação: A operação de multiplicação, conforme definida em iii), satisfaz as seguintes propriedades, para quaisquer z, v e w pertencentes a $\mathbb{C}$:

M1) Comutativa: $z\cdot v=\ v\cdot z$;

M2) Associativa: $(z\cdot v)\cdot w=z\cdot(v\cdot w)$;

M3) Elemento neutro: existe $z_0\in\mathbb{C}$, tal que $z\cdot z_0=z$;

M4) Inverso multiplicativo: Para todo $z\neq(0{,}0)$, existe $z^{-1}\in\mathbb{C}$, tal que $z\cdot z^{-1}=z^{-1}\cdot z=(1{,}0)$;

AM) Distributiva em relação à adição: $z\cdot(v+w)=\ z\cdot v+z\cdot w$.

Demonstração:

M1) Sejam $z=(a_1,b_1)$ e $v=(a_2,b_2)$. Então

$$z\cdot v=\ (a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)=(a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1).$$

Pela propriedade comutativa da multiplicação de Números Reais,

$$z\cdot v=\ (a_2a_1-b_2b_1,b_2a_1+b_1a_2).$$

Portanto,

$$z\cdot v=\ (a_2,b_2)\cdot(a_1,b_1)=v\cdot z.$$

M2) Sejam z = $(a_1,b_1),\ v=(a_2,b_2)$ e $w=(a_3,b_3)$. Então

$$(z\cdot v)\cdot w=[(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2)]\cdot(a_3,b_3)=(a_1a_2\ -\ b_1b_2,a_1b_2+\ a_2b_1)\cdot(a_3,b_3),$$

ou seja,

$$(z\cdot v)\cdot w=(a_1a_2a_3\ -b_1b_2a_3-a_1b_2b_3-b_1a_2b_3,a_1a_2b_3-b_1b_2b_3+a_1b_2a_3+\ a_2b_1a_3).$$

Pela associatividade da multiplicação de Números Reais,

$$(z \cdot v)\cdot w = (a_1, b_1) \cdot (a_2a_3 - b_2b_3, a_2b_3 + a_3b_2) = (a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) \cdot (a_3, b_3)].$$

Portanto,

$$(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w).$$

M$_3$) Sejam $z = (a_1, b_1)$ e $z_0 = (1, 0) \in \mathbb{C}$. Então

$$z \cdot z_0 = (a_1, b_1) \cdot (1,0) = (a_1 \cdot 1 - b_1 \cdot 0, a_1 \cdot 0 + b_1 \cdot 1) = (a_1 \cdot 1, b_1 \cdot 1).$$

Pelo elemento neutro da multiplicação nos Números Reais, segue que

$$z \cdot z_0 = (a_1, b_1) = z.$$

M$_4$) Se $z = (a, b)$ tomemos $z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) \in \mathbb{C}$, então

$$z \cdot z^{-1} = (a, b) \cdot \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}, -\frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right),$$

ou seja,

$$z \cdot z^{-1} = \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab-ab}{a^2+b^2}\right) = (1, 0).$$

AM) Sejam $z = (a_1, b_1)$, $v = (a_2, b_2)$ e $w = (a_3, b_3)$. Então

$$z \cdot (v + w) = (a_1, b_1) \cdot [(a_2, b_2) + (a_3, b_3)] = (a_1, b_1) \cdot (a_2 + a_3, b_2 + b_3),$$

ou seja,

$$z \cdot (v + w) = [a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3), a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)].$$

Aplicando a propriedade distributiva dos Números Reais, temos

$$z \cdot (v + w) = (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3, a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3),$$

de onde segue que

$$z \cdot (v + w) = (a_1a_2 - b_1b_2, a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1a_3 - b_1b_3, a_1b_3 + b_1a_3).$$

Portanto,

$$z \cdot (v + w) = (a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) + (a_1, b_1) \cdot (a_3, b_3) = z \cdot v + z \cdot w.$$

2.2.2 Números Reais e Unidade Imaginária

Sejam a e b Números Reais quaisquer, então de acordo com as propriedades i), ii) e iii), acima:

$$(a, 0) = (b, 0) \text{ se, e somente se, } a = b;$$

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0 + 0) = (a + b, 0);$$

$$(a, 0).(b, 0) = \left(a.b - 0.0, a.0 + 0.b\right) = (a.b, 0).$$

Percebemos que nos pares onde o segundo elemento é zero, tanto a igualdade quanto a adição e a multiplicação dependem só dos primeiros elementos. Por isso, podemos associar um par ordenado $(a, 0)$ com o número real a, ou seja, $(a, 0) = a$.

Por outro lado, $(0, 1)^2 = (0,1) \cdot (0,1) = (0 - 1, 0 + 0) = (-1, 0)$.

Como $(0,1)^2 = (-1, 0)$ e $(-1, 0) = -1$, então, $(0, 1)^2 = -1$ ou $(0, 1) = \sqrt{-1}$. O número $(0, 1)$ é chamado de unidade imaginária e foi representado por Euler, em 1777, pela letra i. Dessa forma, $i \cdot i = i^2 = -1$.

Em resumo, podemos dizer que os Números Reais estão imersos em $\mathbb{C}$ e correspondem aos pares que têm o segundo elemento igual a zero. Os Números Complexos não reais correspondem aos pares que têm o segundo elemento diferente de zero.

2.2.3 Representação Algébrica

Considerando o Número Complexo $z = (a, b)$, com $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$:

$$z = (a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) = a + bi.$$

Portanto, todo Número Complexo $z = (a, b)$ pode ser escrito na forma $z = a + bi$, a qual é denominada forma algébrica de um Número Complexo.

Nesse tipo de representação, o Número Real a é chamado parte real de z e o Número Real b parte imaginária de z, denotados, respectivamente, por $Re(z)$ e $Im(z)$.

Se a parte imaginária de z é nula, o número é real, pois $z = (a, 0) = a + 0 \cdot i = a$.

Se a parte real de z é nula e a parte imaginária é diferente de zero, o número é dito imaginário puro.

2.2.4 Representação Geométrica

Como um Número Complexo $z = a + bi$ foi definido como um par ordenado de números reais (a, b), esses números podem ser representados em um plano cartesiano por um único ponto. Assim, a um ponto P, de coordenadas a e b, ou seja, $P(a, b)$, podemos associar um único Número Complexo $z = a + bi$ e vice-versa.

O ponto P é denominado imagem de z e o plano cartesiano em que são representados os Números Complexos é denominado Plano de Argand-Gauss ou Plano Complexo. Nesse plano, o eixo das abscissas é chamado eixo real (Re) e o eixo das ordenadas de eixo imaginário (Im).

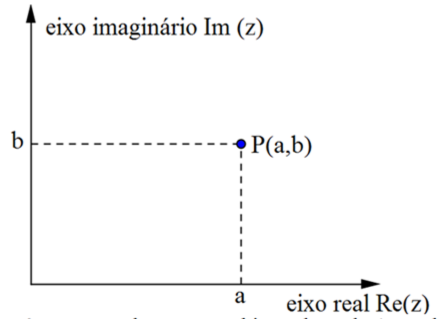

Figura 1: número complexo z = a + bi no plano de Argand-Gauss
Fonte: a autora

O Número Complexo representado pelo ponto $P(a, b)$ é chamado afixo de P.

Também podemos associar cada Número Complexo $z = a + bi$ a um único vetor, com uma das extremidades na origem do plano e a outra no ponto $P(a, b)$.

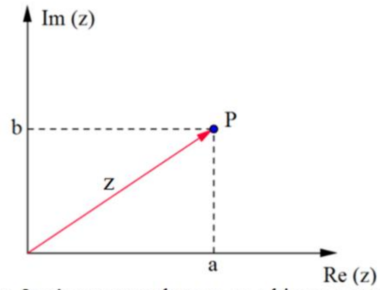

Figura 2: número complexo z = a + bi como vetor
Fonte: a autora

2.2.5 Operações com Números Complexos

2.2.5.1 Adição e Subtração

Sejam $u = (a, b)$ e $v = (c, d)$, com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Pela definição dada em 2.2.1, temos que a adição de Números Complexos na forma de pares ordenados é:

$$u + v = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

Escrevendo u e v na forma algébrica, temos:

$$u + v = (a + bi) + (c + di) = a + bi + c + di = (a + c) + (b + d)i.$$

Portanto, na adição de Números Complexos, as partes reais e imaginárias são somadas separadamente.

Representando os Números Complexos u e v como vetores no plano de Argand-Gauss, a soma $u + v$, corresponde à diagonal do paralelogramo que tem u e v como lados adjacentes.

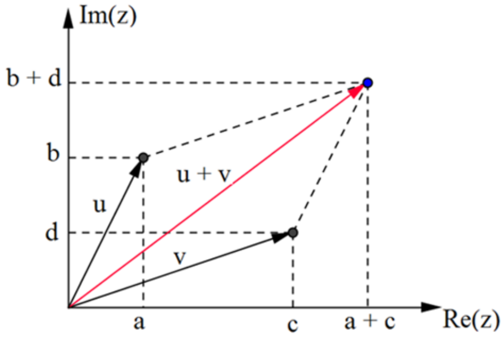

Figura 3: adição dos números complexos u e v
Fonte: a autora

A subtração de Números Complexos $u - v$ é equivalente à soma de u pelo oposto de v. No plano de Argand-Gauss, dois Números Complexos opostos são simétricos em relação à origem.

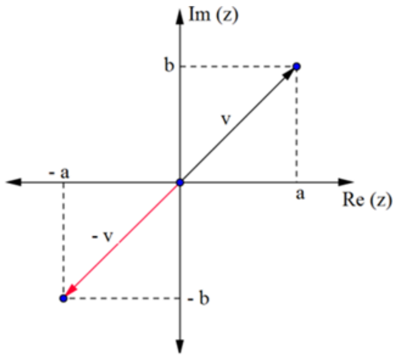

Figura 4: número complexo v e seu oposto - v
Fonte: a autora

Na forma de pares ordenados:

$$u - v = (a, b) - (c, d) = (a, b) + (-c, -d) = (a - c, b - d).$$

Escrevendo os vetores na forma algébrica, temos:

$$u - v = (a - c) + (b - d)i.$$

Graficamente, o Número Complexo $u - v$ corresponde à diagonal do paralelogramo que tem os vetores u e $-v$ como lados adjacentes.

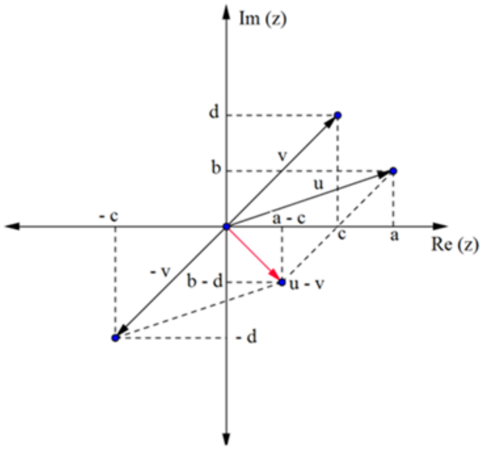

Figura 5: subtração dos números complexos u e v
Fonte: a autora

2.2.5.2 Multiplicação

Sejam os Números Complexos $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$. Há três casos a considerar na multiplicação de u por v.

1º) v é um número real, ou seja, $d = 0$.

Nesse caso, o produto $u \cdot v$ corresponde ao produto do vetor (a,b) pelo número real c. Se $c > 0$, então essa operação corresponde a uma dilatação de razão c do vetor u e se $c < 0$ corresponde a uma dilatação de razão $|c|$ do mesmo vetor, seguida de uma rotação de 180º de centro na origem.

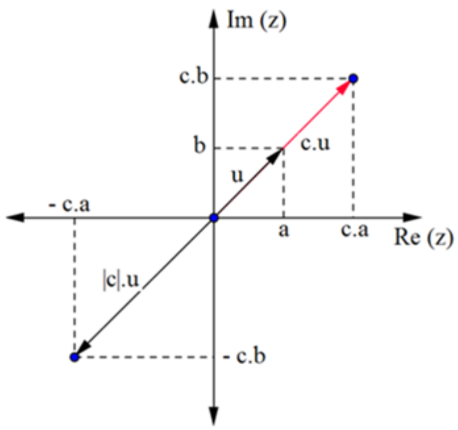

Figura 6: produto do complexo u pelo número real c
Fonte: a autora

Escrevendo na forma algébrica:

$$u \cdot v = (a,b) \cdot (c,0) = (a + bi) \cdot (c + 0i) = ac + bci = (ac,bc) = c \cdot (a,b)$$

2º) v é um imaginário puro, ou seja, $c = 0$ e $d \neq 0$.

Se $d = 1$, então o complexo v, representa a unidade imaginária. Nesse caso, o produto $u \cdot v$ representa, geometricamente, uma rotação de 90º do vetor u em relação à origem, no sentido positivo (anti-horário).

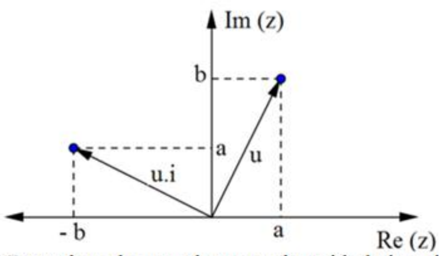

Figura 7: produto do complexo u pela unidade imaginária i
Fonte: a autora

Se $d = k$, com $k \in \mathbb{R}$, então v é o imaginário puro ki. Supondo, sem perda de generalidade, $k > 0$, o produto $u \cdot v$ corresponde ao produto do vetor (a,b) por k, seguido de uma rotação de 90º, no sentido positivo, em relação à origem do vetor obtido.

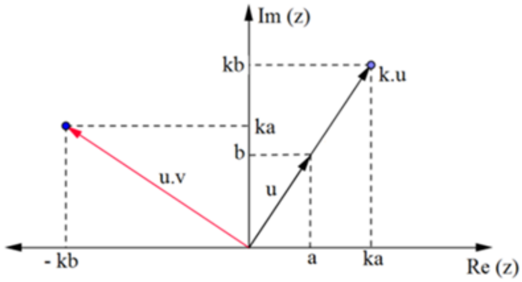

Figura 8: produto do complexo u pelo imaginário ki, k > 0
Fonte: a autora

Na forma algébrica:

$$u \cdot v = (a,b) \cdot (0,k) = (a + bi) \cdot (0 + ki) = a \cdot 0 + ak \cdot i + bi \cdot 0 + bk \cdot i^2,$$

ou seja,

$$u \cdot v = aki + bk(-1) = -bk + aki = k \cdot (-b,a).$$

3º) a, b, c e d são Números Reais não nulos.

Conforme definido em 2.2.1, a multiplicação dos Números Complexos $u = (a,b)$ e $v = (c,d)$ é dada por $u \cdot v = (ac - bd, ad + bc)$. Escrevendo os números na forma algébrica:

$$u \cdot v = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Esse produto é equivalente a $c \cdot u + di \cdot u$. Por isso, vetorialmente, corresponde a:

i) determinar o produto do vetor (a,b) pelo número real c;

ii) determinar o produto do vetor (a,b) pelo número real d e fazer uma rotação de 90º do vetor obtido;

iii) adicionar os vetores obtidos em i) e ii).

A figura 9 ilustra o produto u.v no caso em que $a > 0, b > 0, c > 0$ e $d < 0$.

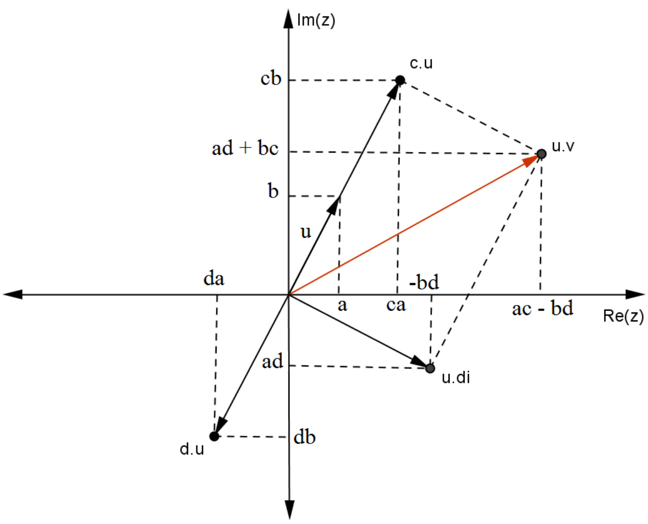

Figura 9: produto dos números complexos u e v
Fonte: a autora

2.2.5.3 Conjugado de um Número Complexo

O Número Complexo $\bar{z}$ é o conjugado de z se, e somente se, $Re\,(z) = Re\,(\bar{z})$ e $Im\,(z) = -Im\,(\bar{z})$, ou seja, o conjugado de $z = (a, b) = a + bi$ é o complexo $\bar{z} = (a, -b) = a - bi$.

Geometricamente, o conjugado $\bar{z}$ de z é representado pelo simétrico de z em relação ao eixo real.

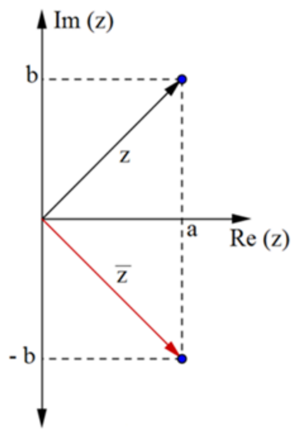

Figura 10: conjugado do número complexo z
Fonte: a autora

Propriedades do Conjugado: As seguintes propriedades do conjugado se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

C_1) $\bar{\bar{z}} = z$;

C_2) $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ (real positivo ou nulo);

C_3) $\bar{z} = z$ se, e somente se, z é um número real;

C_4) $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$;

C_5) $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

Demonstração:

C_1) Se $z = a + bi$, então $\bar{z} = a - bi$, de onde segue que

$$\bar{\bar{z}} = \overline{a - bi} = a - (-b)i = a + bi = z$$

C_2) Se $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, temos

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot \big(a - bi\big) = a^2 - abi + abi - bi^2 = a^2 - b^2(-1),$$

ou seja,

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2.$$

C_3) Se $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$, temos

$$\bar{z} = z \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow b = -b \Leftrightarrow b = 0 \Leftrightarrow z \text{ é real.}$$

C_4) Se $z = a + bi$ e $w = c + di$, temos

$$\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i,$$

ou seja,

$$\overline{z + w} = a + c - bi - di = (a - bi) + (c - di).$$

Portanto,

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}.$$

C_5) Se $z = a + bi$ e $w = c + di$ são Números Complexos, então

$$z \cdot w = (ac - bd) + (bc + ad)i \Rightarrow \overline{z \cdot w} = (ac - bd) - (bc + ad)i, \qquad \text{(I)}$$

Sabemos também que $\bar{z} = a - bi$ e $\bar{w} = c - di$. Portanto,

$$\bar{z} \cdot \bar{w} = (a - bi) \cdot (c - di) = (ac - bd) - (bc + ad)i. \qquad \text{(II)}$$

Comparando (I) e (II), concluímos que

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

Através da noção de conjugado, é possível deduzir a expressão do inverso multiplicativo de um Número Complexo $z = a + bi \neq 0$. Por 2.2.1, sabemos que para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z^{-1} \cdot z = (1,0)$. Dado $z \neq 0$, para obter o inverso multiplicativo na forma algébrica, basta multiplicar numerador e denominador por $\bar{z}$, ou seja, pelo conjugado de z.

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

Logo,

$$\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i.$$

2.2.5.4 Divisão

O quociente entre os Números Complexos $z = (a, b)$ e $w = (c, d), w \neq 0$, pode ser obtido multiplicando-se o numerador z e o denominador w, pelo conjugado do denominador, $\bar{w}$. Assim, utilizando a forma algébrica de z e w, temos:

$$\frac{z}{w} = \frac{z \cdot \bar{w}}{w \cdot \bar{w}} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

2.2.5.5 Potenciação de i

Sabendo que $i^2 = -1$ e utilizando propriedades de potenciação em $\mathbb{R}$, podemos calcular os valores de i^n, com n pertencente ao Conjunto dos Números Naturais $\mathbb{N}$.

Calculando i^n para $n \in \mathbb{N}$, temos que:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 i = (-1)\, i = -i$

$i^4 = i^2 i^2 = (-1)(-1) = 1$

$i^5 = i^4 i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 i^2 = 1(-1) = -1$

$i^7 = i^4 i^3 = 1(-i) = -i$

$\vdots$

Se $n = 4k, i^{4k} = i^0 = 1$

Se $n = 4k + 1, i^{4k+1} = i^{4k} i = i^1 = i$

Se $n = 4k + 2, i^{4k+2} = i^{4k} i^2 = i^2 = -1$

Se $n = 4k + 3, i^{4k+3} = i^{4k} i^3 = i^3 = -i.$

Percebemos que as potências de i são periódicas, com período 4, ou seja, se r é o resto da divisão de n por 4, tem-se $i^n = i^r$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

2.2.6 Módulo de um Número Complexo

Graficamente, o módulo de um Número Complexo z, denotado por $|z|$, representa o comprimento desse vetor no plano complexo, ou seja, a distância da origem do vetor à imagem de z (o ponto $P(a, b)$).

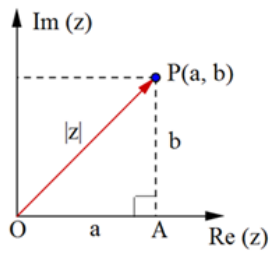

Figura 11: módulo do número complexo z
Fonte: a autora

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo OAP, temos

$$|z|^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Essa igualdade também é válida para pontos situados nos eixos e nos demais quadrantes. Logo, o módulo de z, indicado por $|z|$, é o número real positivo ou nulo dado por:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Pensando nos Números Complexos z e w como pontos do plano, o módulo da diferença é a distância $d(z, w)$ entre os dois pontos, isto é,

$$|z - w| = d(z, w).$$

Propriedades de Módulo: As seguintes propriedades de módulo se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:

M_1) $|z| = |\bar{z}|$

M_2) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

M_3) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

Demonstração:

M_1) Se $z = a + bi$, então

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Por sua vez,

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Portanto,

$$|z| = |\bar{z}|.$$

M_2) Sabemos que $z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Logo,

$$|z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 = z.\bar{z}.$$

Portanto,

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

M_3) De acordo com a propriedade b),

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\overline{z \cdot w}) \,. \qquad \text{(I)}$$

Das propriedades do conjugado sabe-se que

$$\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}. \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), obtemos

$$|z \cdot w|^2 = (z \cdot w) \cdot (\bar{z} \cdot \bar{w}) = (z \cdot \bar{z}) \cdot (w \cdot \bar{w}) = |z|^2 \cdot |w|^2 = (|z| \cdot |w|)^2.$$

Como o módulo é um número positivo ou nulo, podemos extrair a raiz quadrada em ambos os membros. Portanto,

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

Se $z \neq 0$, as propriedades acima indicam que $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$. Essa identidade mostra como z e z^{-1} se comportam graficamente: z^{-1} aponta na direção de $\bar{z}$ e tem valor absoluto $\frac{1}{|z|}$.

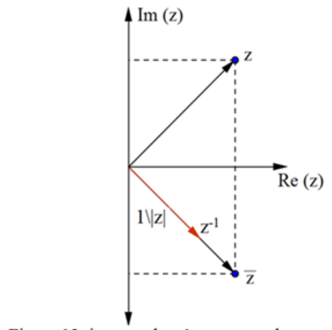

Figura 12: inverso do número complexo z
Fonte: a autora

2.2.7 Forma Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos

Conforme já foi visto anteriormente, podemos identificar um Número Complexo z com um ponto $P(a, b)$ do plano complexo ou com um vetor de origem na origem do plano e extremidade em P. Quando associamos z com um ponto do plano o mesmo é expresso por coordenadas cartesianas. Quando a associação é feita com um vetor, obtemos as coordenadas polares de z, que são:

a) o módulo de z, indicado por $|z|$ representando a distância de P à origem do plano;

b) o ângulo α, em que $0 \leq \alpha < 2\pi$, que o vetor z forma com o eixo real Ox. Esse ângulo α é chamado argumento de z e indicado por $\arg(z)$.

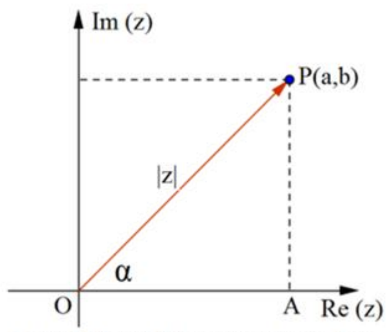

Figura 13: módulo e argumento de z
Fonte: a autora

Utilizando as razões trigonométricas no triângulo retângulo OAP, obtemos:

$$cos\,\alpha = \frac{a}{|z|} \text{ e } sen\,\alpha = \frac{b}{|z|}, com\; 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Essas igualdades levam a:

$$a = |z| cos\,\alpha \text{ e } b = |z| sen\,\alpha.$$

Substituindo esses valores em $z = a + bi$, temos:

$$z = a + bi = |z| cos\,\alpha + |z| sen\,\alpha\; i = |z|(cos\,\alpha + i\, sen\,\alpha)$$

Portanto,

$$z = |z|(cos\,\alpha + i\, sen\,\alpha),$$

que é chamada forma trigonométrica ou forma polar de z.

2.2.7.1 Multiplicação na Forma Polar

Considerando os Números Complexos z_1 e z_2, de módulos $|z_1|$ e $|z_2|$ e argumentos α_1 e α_2, respectivamente, não nulos, na forma trigonométrica,

$$z_1 = |z_1|(cos\,\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)\ e\ z_2 = |z_2|(cos\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2).$$

Então,

$$z_1 \cdot z_2 = [|z_1|(cos\,\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)] \cdot [|z_2|(cos\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2)]$$
$$= |z_1||z_2|(cos\,\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)(cos\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2)$$
$$= |z_1||z_2|(\cos\alpha_1\,cos\,\alpha_2 + i\,cos\,\alpha_1\,sen\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2$$
$$+ i^2\,sen\,\alpha_1\,sen\,\alpha_2)$$
$$= |z_1||z_2|(cos\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2 - sen\,\alpha_1\,sen\,\alpha_2) + i\,(cos\,\alpha_1\,sen\,\alpha_2$$
$$+ sen\,\alpha_1\,cos\,\alpha_2).$$

Portanto,

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[cos\,(\alpha_1 + \alpha_2) + i\,sen(\alpha_1 + \alpha_2)].$$

Assim sendo, o produto de dois Números Complexos na forma trigonométrica é o Número Complexo cujo módulo é igual ao produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é igual à soma dos argumentos dos fatores.

Geometricamente, o produto $z_1 \cdot z_2$ representa uma rotação, no sentido anti-horário, de α_2 em relação a z_1, ou seja, o Número Complexo z_1 que possui argumento α_1, ao ser multiplicado por z_2 , sofre uma rotação equivalente a α_2, que é o argumento de z_2. Além do mais o vetor z_1 sofre uma dilatação de ordem $|z_2|$.

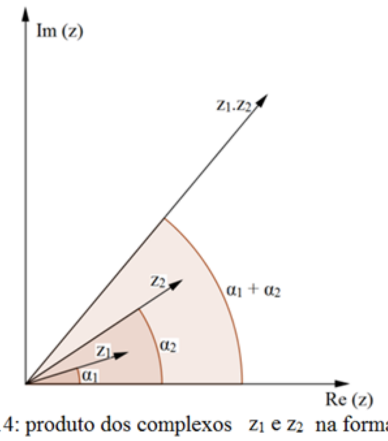

Figura 14: produto dos complexos z_1 e z_2 na forma polar
Fonte: a autora

O produto pode ser generalizado para n Números Complexos $z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n$, por:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = |z_1||z_2| \ldots |z_n|[cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + i\,sen(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)].$$

2.2.7.2 Divisão na Forma Polar

Sejam os complexos $z_1 = |z_1|(cos\ \alpha_1 + i\ sen\ \alpha_1)$ e $z_2 = |z_2|(cos\ \alpha_2 + i\ sen\ \alpha_2)$, na forma trigonométrica, com $z_2 \neq 0$, módulos $|z_1|$ e $|z_2|$ e argumentos α_1 e α_2, respectivamente, não nulos. Então,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(cos\ \alpha_1 +\ i\ sen\ \alpha_1)}{|z_2|(cos\ \alpha_2 +\ i\ sen\ \alpha_2)} = \frac{|z_1|(cos\ \alpha_1 +\ i\ sen\ \alpha_1).(cos\ \alpha_2 -\ i\ sen\ \ \alpha_2)}{|z_2|(cos\ \alpha_2 +\ i\ sen\ \ \alpha_2).(cos\ \alpha_2 -\ i\ sen\ \ \alpha_2)},$$

ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(cos\ \alpha_1\ cos\ \alpha_2 -\ i\ cos\ \alpha_1\ sen\ \alpha_2 +\ i\ sen\ \alpha_1\ cos\ \alpha_2 -\ i^2\ sen\ \alpha_1\ sen\ \alpha_2)}{(cos\ \alpha_2)^2 -\ (i\ sen\ \alpha_2)^2}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{(cos\ \alpha_1\ cos\ \alpha_2 -\ i\ cos\ \alpha_1\ sen\ \alpha_2 +\ i\ sen\ \alpha_1\ cos\ \alpha_2 + sen\ \alpha_1\ sen\ \ \alpha_2)}{cos^2\alpha_2 +\ sen^2\alpha_2}$$

$$= \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos\ \alpha_1\ cos\ \alpha_2 +\ sen\ \alpha_1\ sen\ \ \alpha_2 +\ i\ (sen\ \alpha_1\ cos\ \alpha_2 -\ sen\ \alpha_2\ cos\ \alpha_1)].$$

Portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos\ (\alpha_1 -\ \alpha_2) +\ i\ sen\ (\alpha_1 -\ \alpha_2)].$$

Assim sendo, o quociente entre os Números Complexos z_1 e z_2 na forma trigonométrica é o Número Complexo cujo módulo é igual ao quociente dos módulos de z_1 e z_2 e o argumento é igual à diferença, na ordem dada, dos argumentos de z_1 e z_2.

Geometricamente, o Número Complexo z_1 que possui argumento α_1, ao ser dividido por z_2, sofre uma rotação, no sentido horário, equivalente a α_2, que é o argumento de z_2 bem como uma dilatação de ordem $\frac{1}{|z_2|}$.

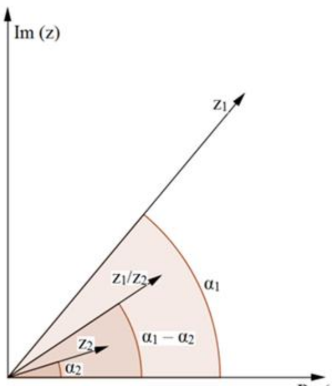

Figura 15: divisão dos complexos z_1 e z_2 na forma polar
Fonte: a autora

2.2.7.3 Potenciação (1ª Lei de De Moivre)

Conforme descrito em 2.2.7.1, o produto de n Números Complexos quaisquer é:

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = |z_1||z_2| \ldots |z_n|[cos\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) + i\,sen(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)].$$

A potenciação de Números Complexos na forma trigonométrica é um caso particular do produto, pois representa o produto de n Números Complexos para $z_1 = z_2 = \cdots = z_n$. Nesse caso, $z^n = z \cdot z \cdot \cdots \cdot z$ (n fatores) e, assim, obtemos

$$z^n = |z|^n[cos\,(n\alpha) + i\,sen\,(n\alpha)].$$

Essa relação é conhecida como 1ª Lei de De Moivre ou Primeira Fórmula de De Moivre, em homenagem ao matemático francês Abrahan de Moivre (1667-1754).

A Primeira Fórmula de De Moivre pode ser demonstrada utilizando o Princípio de Indução Finita, que pode ser encontrado em [12]. Faremos isso na proposição seguinte.

Proposição: Dado $z \in \mathbb{C}$, considere a sua forma polar $z = |z|(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)$. A propriedade

$$P(n): z^n = |z|^n[cos\,(n\alpha) + i\,sen\,(n\alpha)],$$

é válida para todo inteiro $n \geq 1$.

Demonstração: Pelo Princípio da Indução Finita, temos:

i) Verifiquemos que vale para $n = 1$: $P(1)$ é verdadeira, pois $P(1)$ corresponde a forma polar de z.

ii) Suponha que vale para $n = k$, chamada Hipótese de Indução, e mostremos que vale para $n = k + 1$. Ou seja, devemos mostar que

$$P(k) \Longrightarrow P(k+1).$$

Assim,

$$z^{k+1} = [|z|(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)]^{k+1} = [|z|(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)]^k.[|z|(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)],$$

e, agora, usando a Hipótese de Indução, temos

$$\begin{aligned} z^{k+1} &= \left[|z|^k\left(\cos(k\alpha) + isen(k\alpha)\right)\right].[|z|(\cos\alpha + i\,sen\,\alpha)] \\ &= |z|^{k+1}[\cos(k\alpha)\,cos\alpha + i\cos(k\alpha)\,sen\alpha + isen(k\alpha)cos\alpha + i^2 sen(k\alpha)sen\alpha] \\ &= |z|^{k+1}\{\cos(k\alpha)\,cos\alpha - sen(k\alpha)sen\alpha + i[\cos(k\alpha)\,sen\alpha + sen(k\alpha)cos\alpha]\} \\ &= |z|^{k+1}[\cos(k\alpha + \alpha) + isen(k\alpha + \alpha)]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$z^{k+1} = |z|^{k+1}\left[\cos\left((k+1)\alpha\right) + i\,sen\left((k+1)\alpha\right)\right].$$

Logo, a propriedade $P(n)$ é verdadeira para todo $n \geq 1$, o que concluí a demonstração da Primeira Fórmula de De Moivre.

A figura 16 representa a potência de z para $n = 3$.

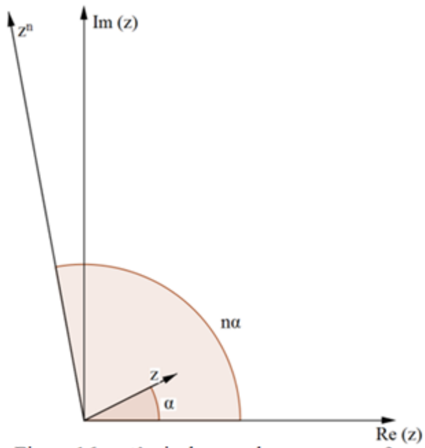

Figura 16: potência do complexo z para n = 3
Fonte: a autora

A Primeira Fórmula de De Moivre pode ser estendida para expoentes inteiros negativos. De fato, sendo n inteiro positivo, tem-se:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{|z|^n[cos\,(n\alpha) + i\,sen\,(n\alpha)]},$$

ou seja,

$$z^{-n} = \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{1}{cos\,(n\alpha) + i\,sen\,(n\alpha)} \cdot \frac{cos\,(n\alpha) - i\,sen\,(n\alpha)}{cos\,(n\alpha) - i\,sen\,(n\alpha)},$$

que equivale a

$$z^{-n} = \frac{1}{|z|^n} \cdot \frac{cos\,(n\alpha) - i\,sen\,(n\alpha)}{cos^2(n\alpha) + sen^2(n\alpha)} = |z|^{-n}[cos\,(-n\alpha) + i\,sen\,(-n\alpha)].$$

Portanto,

$$z^n = |z|^n[cos\,(n\alpha) + i\,sen\,(n\alpha)], \text{ para todo } n \in \mathbb{Z}.$$

2.2.7.4 Radiciação (2ª Lei de De Moivre)

Dados um Número Complexo z e um número natural $n > 1$, dizemos que $w \in \mathbb{C}$ é uma raiz n–ésima de z se $w^n = z$.

Se z = 0, é evidente que w = 0 é a única solução da equação $w^n = z$. Logo, o número zero possui uma única raiz n–ésima que é o próprio zero. Seja $w \neq 0$, então $z = |z|(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$ é um Número Complexo não nulo.

Calcular a raiz n–ésima de um Número Complexo na forma trigonométrica consiste em determinar o Número Complexo w, tal que

$$w^n = |z|(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha).$$

Escrevendo $w = |w|(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)$, temos

$$w^n = z \Leftrightarrow [|w|(cos\,\theta + i\,sen\,\theta)]^n = |z|(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$$

Aplicando a Primeira Fórmula de De Moivre, segue que:

$$|w|^n[cos\,(n\theta) + \,i\,sen\,(n\theta)] = |z|(cos\,\alpha \,+\, i\,sen\,\alpha).$$

Como Números Complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, segue da igualdade acima que:

- $|w|^n = |z| \Rightarrow |w| = \sqrt[n]{|z|}$
- $\left.\begin{matrix} cos\,n\theta = cos\,\alpha \\ sen\,n\theta = sen\,\alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow n\theta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\alpha + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}.$

Logo,

$$w = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\,\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\,sen\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right], k \in \mathbb{Z}.$$

Essa relação é conhecida como Segunda Fórmula de De Moivre.

Sendo α o argumento de z, pode-se determinar os valores de w, indicando-os por w_k, atribuindo valores naturais para k, como por exemplo:

$k = 0 \Rightarrow w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\,\frac{\alpha}{n} + i\,sen\frac{\alpha}{n}\right]$

$k = 1 \Rightarrow w_1 = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right]$

$k = 2 \Rightarrow w_2 = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{4\pi}{n}\right)\right]$

$\vdots$

$k = n - 1 \Rightarrow w_{n-1} = \sqrt[n]{|z|}\left[cos\,\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\,sen\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right].$

Para $k = 0, 1, 2, \cdots, (n - 1)$, os argumentos são diferentes entre si e pertencentes ao intervalo $[0,2\pi[$. Logo, $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$ são distintos entre si.

Continuando a atribuir valores para k, notamos que $w_n = w_0, w_{n+1} = w_1, w_{n+2} = w_2, \cdots$, ou seja, para valores de k maiores que $n - 1$, os valores de w começam a repetir. Por outro lado, atribuindo valores inteiros negativos para k também notamos que $w_{-1} = w_{n-1}, w_{-2} = w_{n-2}, \cdots, w_{-(n-1)} = w_1, w_{-n} = w_0, w_{-(n+1)} = w_{n-1}$, e assim por diante. Consequentemente, obtemos que $\sqrt[n]{z}$ possui n raízes distintas, as quais são obtidas atribuindo-se valores para k de 0 a $n - 1$.

As raízes n-ésimas de um Número Complexo z, não nulo, possuem as seguintes propriedades, de fácil verificação:

i) $|w_0| = |w_1| = |w_2| = \cdots = |w_{n-1}| = \sqrt[n]{|z|}$;

ii) $\arg(w_j) - \arg(w_{j-1}) = \frac{2\pi}{n}, 0 < j \leq n - 1$, ou seja, os argumentos crescem em progressão aritmética de razão $\frac{2\pi}{n}$.

Geometricamente, a propriedade i) significa que os afixos de $w_0, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$, pertencem à circunferência centrada na origem do plano complexo e de raio $\sqrt[n]{|z|}$ enquanto a propriedade ii) significa que essa circunferência fica dividida em n partes congruentes entre si, cada uma de comprimento $\frac{2\pi|w_k|}{n}$. Isso significa que os afixos das raízes n-ésimas de z são vértices de um polígono regular de n lados inscrito na circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt[n]{|z|}$. Dessa forma, conhecendo uma das raízes e sabendo ao todo quantas são, é possível obter as $n - 1$ raízes desconhecidas.

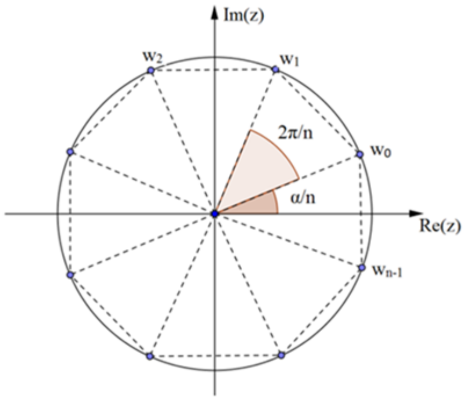

Figura 17: raízes n-ésimas do número complexo z
Figura: a autora

2.2.8 A Forma Exponencial dos Números Complexos

Entre as contribuições de Euler no desenvolvimento dos Números Complexos, está a introdução da relação $e^{i\alpha} = cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha$, conhecida como Relação de Euler, onde a constante e é o número de Euler e tem valor aproximado 2,71828. A demonstração dessa igualdade requer conhecimento de Cálculo Diferencial e Integral e, portanto, será omitida. No caso particular para $\alpha = \pi$, obtém-se $e^{i\pi} = -1$ ou $e^{i\pi} + 1 = 0$, que relaciona numa mesma expressão os valores $1, e, \pi$ e i que aparecem, normalmente em contextos diferentes.

Como um Número Complexo z na forma polar é dado por $z = |z|(cos\,\alpha + i\,sen\,\alpha)$, obtemos pela relação de Euler, que $z = |z| \cdot e^{i\alpha}$. Essa igualdade representa a forma exponencial de um Número Complexo.

Sejam os Números Complexos $z_1 = |z_1| \cdot \mathrm{e}^{i\alpha_1}$ e $z_2 = |z_2| \cdot \mathrm{e}^{i\alpha_2}$ na forma exponencial, então obtemos:

Produto: $z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2| \cdot e^{i(\alpha_1 + \alpha_2)}$

Conjugado: $\overline{z_1} = |z_1|\, e^{-i\alpha_1}$

Quociente: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\alpha_1 - \alpha_2)}$

Potência: $(z_1)^n = |z_1|^n e^{in\alpha_1}$

Raiz de ordem k: $\sqrt[k]{z_1} = \sqrt[k]{|z_1|} \cdot e^{\frac{\alpha + 2\pi j}{k}}$, com $k \in \mathbb{N}$ e j = 0, 1, 2, ..., j – 1.

A organização do conteúdo Números Complexos apresentada nesse trabalho busca valorizar tanto o aspecto algébrico quanto o geométrico, mostrando que um não é dissociado do outro, mas consistem em formas diferentes de representar os mesmos conceitos.

O aspecto algébrico com suas propriedades, fórmulas e demonstrações favorecem a análise e a generalização dos conceitos levando os alunos a um nível de abstração mais avançado. Ao mesmo tempo, as representações gráficas trazem o significado geométrico, complementando o significado dos conceitos e propriedades algébricas, realizando uma espécie de tradução para o aprendiz. A importância de trabalhar conjuntamente Álgebra e Geometria no Ensino Médio encontra-se expressa em [26], p. 56, quando ressalta que:

> No Ensino Médio, deve-se garantir ao aluno o aprofundamento dos conceitos em um nível de abstração mais complexo. Nesse nível de ensino, os alunos realizam análises dos elementos que estruturam os conteúdos, através da representação algébrica ou geométrica (...). Assim, é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas e teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas.

Articulando os aspectos algébricos com os geométricos e também os históricos, cuja importância já foi descrita no Capítulo 1, a abordagem dos Números Complexos pode-se tornar muito interessante. Acreditamos que esta articulação pode ocorrer de forma bem significativa em questões abertas, as quais favorecem a análise e discussão dos conceitos. Da mesma forma, as demonstrações podem e devem ser exploradas nesse tipo de questões. Cabe ao professor apenas familiarizar os alunos com as demonstrações e representações geométricas, que são tão importantes para compreensão dos conteúdos, mas muitas vezes são omitidas não só nos livros didáticos, mas no processo de ensino e aprendizagem. Nessa linha de pensamento, [2], p.7, afirma que a partir da 7ª série (atual 8º ano do ensino fundamental):

> O professor deve começar com demonstrações de teoremas que não sejam verdades evidentes ao senso comum para que o aluno possa entender a necessidade de demonstrações. Sendo exposto ao encadeamento das demonstrações, o aluno vai adquirindo maturidade para entender que a sequência de definições, teoremas e demonstrações não pode continuar indefinidamente. Assim ele vai se preparando para entender que alguns conceitos têm de ficar sem definição e algumas proposições têm de ser escolhidas para ficar sem demonstrações.

Para concluir cabe ressaltar que este trabalho não tem por objetivo estabelecer uma sequência didática a ser seguida pelo professor tal como se apresenta, mas pode sim trazer subsídios para organização do trabalho pedagógico com diferentes formas de abordagem do conteúdo Números Complexos, enfatizando seus diferentes aspectos de forma articulada e significativa.

CAPÍTULO 3
CONEXÕES COM OUTROS CONTEÚDOS MATEMÁTICOS

No capítulo 2, após uma análise sobre a forma de abordagem dos Números Complexos nos livros didáticos, apresentamos uma revisão detalhada desse conteúdo valorizando o aspecto algébrico dos conceitos e operações com as respectivas demonstrações e também o aspecto geométrico, mostrando as representações gráficas com seus respectivos significados. Sob essa perspectiva de trabalhar concomitantemente os dois aspectos, o conteúdo já ganha muito em significado e número de possibilidades de abordagem.

No entanto, no que se refere aos Números Complexos um passo a mais pode ser dado no sentido de atingir os objetivos propostos para o Ensino Médio bem como para superar algumas ideias de professores e alunos sobre esse conteúdo, citadas em [10], p.1, quando diz que "O ensino usual dos Números Complexos baseia-se em uma abordagem puramente algébrica, onde estão ausentes o significado e as aplicações destes números" e [23], p.3, ao comentar que "pela abordagem de alguns livros, os Números Complexos são estudados somente para serem trabalhados com eles próprios, ou seja, sem nenhuma relação com nenhum outro aspecto da matemática ou das ciências".

Esse passo consiste em estabelecer conexões existentes entre os Números Complexos e outros conteúdos matemáticos mostrando que esses números não precisam e não devem ser trabalhados de maneira isolada, mas de forma articulada com outros conteúdos previamente estudados.

Essa articulação entre conteúdos matemáticos é defendida em [27], p.41, quando ressalta que:

> **(...)** no Ensino Fundamental, os alunos devem ter se aproximado de vários campos do conhecimento matemático e no Ensino Médio estão em condições de utilizá-los e ampliá-los e desenvolver de modo mais amplo capacidades tão importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, resolução de problemas de qualquer tipo, investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade. Por fim, cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo.

Por sua vez [26], p.52, acrescenta que:

> O conhecimento não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente. Defende-se uma abordagem pedagógica que os articule, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados. (...) Deve-se compreender que os números estão inseridos em contextos articulados com os demais conteúdos da Matemática. Portanto, é necessário que os números sejam compreendidos de forma ampla, para que se analisem e descrevam relações em vários contextos onde se situam as abordagens matemáticas, explorando os significados que possam ser produzidos a partir destes conteúdos.

A fim de apresentar algumas relações existentes entre os Números Complexos e outros conteúdos matemáticos, foram consideradas informações das referências [3], [7], [10], [12], [14], [21], [22], [23], [24], [25], [29], [31] e [32].

3.1 NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA

Quando as representações gráficas de conceitos e operações com Números Complexos foram apresentadas no capítulo anterior, tornou-se fácil perceber que existem relações entre esses números e a Geometria. Nesta seção, pretendemos explorar algumas dessas relações, analisando elementos e conceitos da Geometria no plano complexo.

3.1.1 Movimentos no Plano

Qualquer movimento no plano pode ser estudado por meio de operações com Números Complexos. Para tanto, basta associar ao plano um sistema de eixos real e imaginário.

3.1.1.1 Translação

Dada uma figura no plano, pelo movimento de translação ocorre um deslocamento de todos os pontos dessa figura ao longo de um mesmo vetor. Nesse movimento, a orientação da figura bem como todas as suas medidas permanecem inalteradas.

Para transladar uma figura no plano complexo, basta adicionar um mesmo Número Complexo não nulo a cada Número Complexo associado aos pontos da figura.

Seja o triângulo ABC no plano complexo cujos vértices A, B e C são as imagens dos Números Complexos z_1, z_2 e z_3, respectivamente.

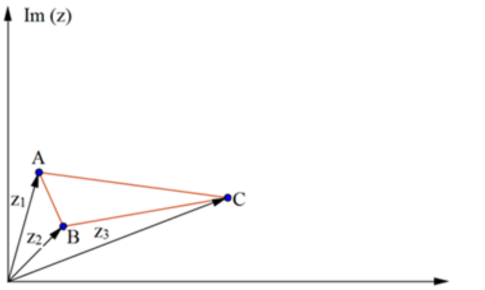

Figura 18: triângulo ABC no plano complexo
Fonte: a autora

Adicionando o número $z = a + bi$ aos Números Complexos z_1, z_2 e z_3, há três possibilidades a considerar:

1ª) O Número Complexo z é real e não nulo, ou seja, $a \neq 0$ e $b = 0$. No caso em que $a > 0$, o triângulo ABC se desloca horizontalmente para a direita, por uma distância igual a $|z|$.

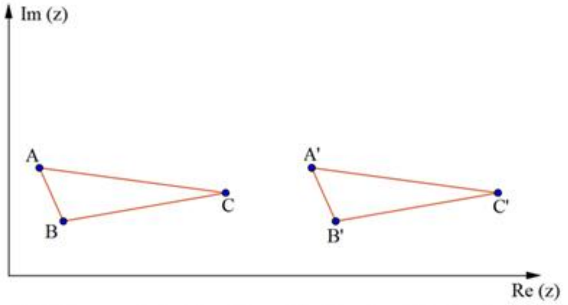

Figura 19: deslocamento horizontal para direita, pela adição do número real a > 0
Fonte: a autora

Se $a < 0$, o triângulo se desloca horizontalmente para a esquerda, por uma distância $|z|$.

2ª) O Número Complexo z é imaginário puro, ou seja, $a = 0$ e $b \neq 0$. Supondo $b > 0$, o triângulo ABC, se desloca verticalmente para cima, por uma distância igual a $|z|$.

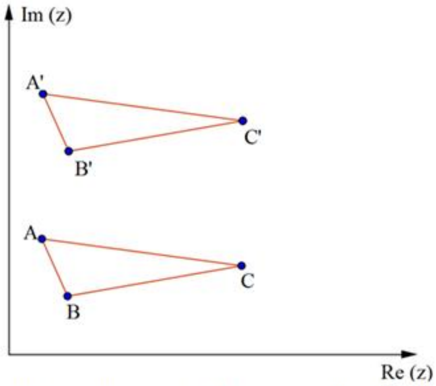

Figura 20: deslocamento vertical para cima pela adição de b > 0
Fonte: a autora

Se $b < 0$, o triângulo se desloca verticalmente para baixo, por uma distância igual a $|z|$.

3ª) z é um Número Complexo não nulo, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Nesse caso, o triângulo se desloca tanto na horizontal quanto na vertical.

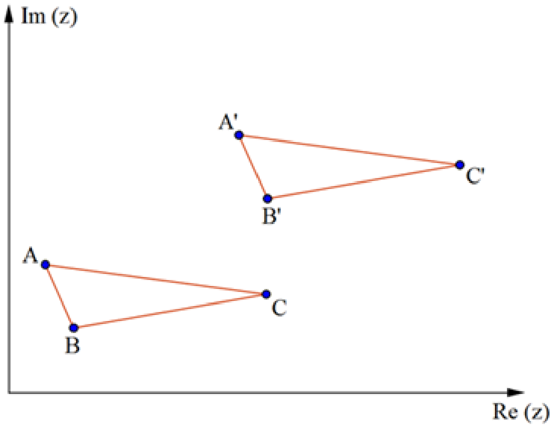

Figura 21: deslocamento de |z| unidades na direção do vetor z
Fonte: a autora

Cada ponto se desloca $\sqrt{a^2 + b^2}$ unidades, isto é, $|z|$ unidades na direção do vetor correspondente ao número complexo $z = a + bi$. Isso corresponde a um deslocamento horizontal de $|a|$ unidades, seguido de um deslocamento vertical de $|b|$ unidades. O sentido do deslocamento horizontal e vertical depende do sinal de a e b, respectivamente.

Em todos os casos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes, isto é, os lados e os ângulos correspondentes possuem a mesma medida. Observamos que essa propriedade da translação é válida qualquer que seja a figura considerada.

3.1.1.2 Dilatação ou Contração

Dada uma figura no plano, dizemos que ela sofreu uma dilatação quando suas dimensões se tornam proporcionalmente maiores e uma contração quando suas dimensões se tornam proporcionalmente menores que as da figura original. O deslocamento de cada ponto da figura ocorre ao longo da reta que contém o vetor associado a esse ponto.

Para dilatar ou contrair uma figura no plano complexo, basta multiplicar todos os Números Complexos associados a pontos da figura por um número real k. Se $k > 0$, a figura que sofreu dilatação ou contração, mantém a orientação. Se $k < 0$, a orientação se inverte. Consideremos o triângulo ABC da figura 18 e um número real k, tal que $k > 0$. Multiplicando os Números Complexos z_1, z_2 e z_3 por k, temos que:

a) Se $k > 1$, o triângulo ABC se dilata, sendo k o fator de dilatação. A figura 22 ilustra uma dilatação de fator 2.

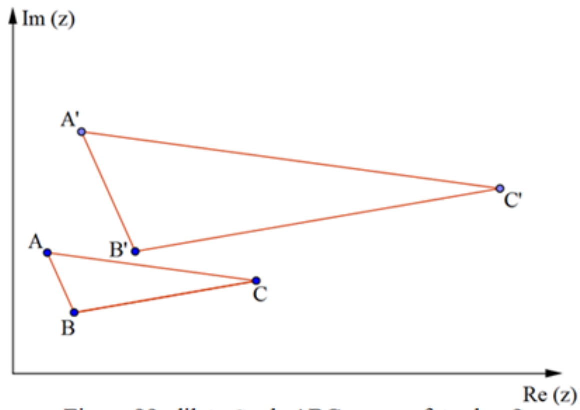

Figura 22: dilatação de ABC por um fator k = 2
Fonte: a autora

b) Se $0 < k < 1$, o triângulo ABC se contrai, sendo k o fator de contração. A figura 23 ilustra uma dilatação de fator $\frac{1}{2}$.

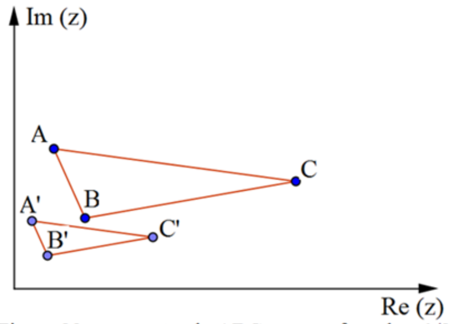

Figura 23: contração de ABC por um fator k = 1/2
Fonte: a autora

Em ambos os casos, o triângulo original ABC e o transformado $A'B'C'$ são semelhantes, ou seja, os ângulos são preservados e os lados do triângulo transformado são proporcionais ao do triângulo original. Além do mais, a dilatação (ou contração) se dá em relação à origem do plano complexo.

3.1.1.3 Rotação em Relação à Origem

Dada uma figura no plano, pelo movimento de rotação ocorre um deslocamento de todos os pontos dessa figura ao longo de um ângulo θ. Esse movimento altera a orientação da figura, porém seus ângulos e dimensões permanecem inalterados.

No plano de Argand-Gauss, uma rotação θ da imagem de um Número Complexo z em torno da origem, é obtida multiplicando-se z por um Número Complexo w de módulo 1 e argumento θ. Consideremos $z_k = |z_k|(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)$ e $w = cos\ \theta + i\ sen\ \theta$, com α e θ pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi[$ e $k\ \in \mathbb{N}$. O produto desses complexos é:

$$z_k w = |z_k|[(cos\ (\alpha + \theta) + i\ sen\ (\alpha + \theta)].$$

Observando que $z_k w$ tem o mesmo módulo de z_k e tem o argumento de z_k acrescido de θ, conclui-se que a imagem de $z_k w$ é a transformação da imagem de z_k por uma rotação θ, no sentido anti-horário, em torno da origem do sistema de eixos do plano complexo.

Utilizando o triângulo ABC da figura 18, podemos ilustrar o movimento de rotação de uma figura qualquer, dado o ângulo θ. Há alguns casos interessantes a considerar:

a) Para $\theta = 90°$, obtém-se $w = i$. Portanto, multiplicar os complexos z_1, z_2 e z_3 associados aos vértices A, B e C do triângulo considerado por $w = i$ é o mesmo que girar o triângulo ABC $90°$ em torno da origem.

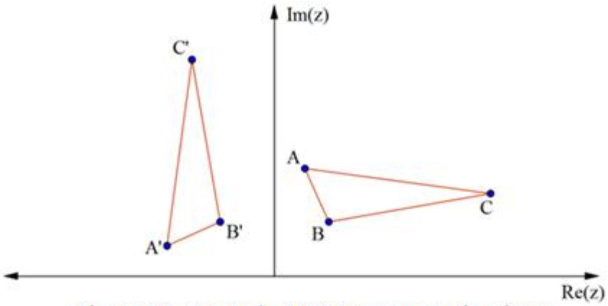

Figura 24: rotação de ABC 90° em torno da origem
Fonte: a autora

Logo, a multiplicação por i corresponde a uma rotação de $90°$ em torno da origem.

b) Para $\theta = 180°$, obtém-se $w = i^2 = -1$. Portanto, o triângulo ABC sofrerá uma rotação de $180°$ em torno da origem, quando todos os números complexos associados a seus vértices forem multiplicados por -1. Do Capítulo 2, sabemos que os números complexos z_1', z_2' e z_3' obtidos por essa multiplicação são, respectivamente, os opostos de $z_1, z_2\ e\ z_3$.

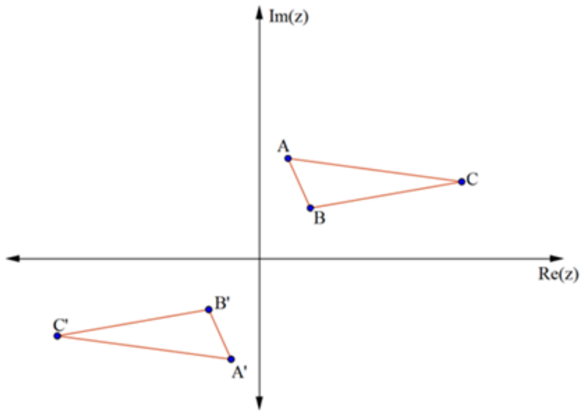

Figura 25: rotação de ABC 180° em torno da origem
Fonte: a autora

Os triângulos ABC e $A'B'C'$ são simétricos em relação à origem. Logo, multiplicar um Número Complexo por i^2 é o mesmo que encontrar seu simétrico em relação à origem. Daí, obtemos facilmente a relação $i^2 = -1$.

De forma geral, para rotacionar de um ângulo θ, no sentido anti-horário, um ponto P em torno da origem, sendo que esse ponto P representa um Número Complexo z no plano de Argand-Gauss, basta multiplicar z pelo Número Complexo $w = cos\ \theta + i\ sen\ \theta$.

3.1.1.4 Reflexão em Torno de uma Reta pela Origem

Pela reflexão em torno de uma reta, um ponto do plano é levado a seu simétrico em relação à reta dada.

No plano de Argand-Gauss a reflexão em torno de uma reta r que passa pela origem e forma um ângulo φ com o eixo real está associada à multiplicação de Números Complexos.

Seja $z = |z|(cos\ \alpha + i\ sen\ \alpha)$ e φ o ângulo que a reta r forma com o eixo $Re(z)$, então $\bar{z}\ = |z|(cos\ \alpha - i\ sen\ \alpha)$. Se α é o ângulo que z forma com o eixo real, então o ângulo entre $z\ e\ \bar{z}$ é 2α. O ângulo entre o vetor que representa z e a reta r é dado por $\varphi - \alpha$, logo o ângulo entre $z\ e\ z'$ é dado por $2(\varphi - \alpha)$. Assim sendo, o ponto simétrico de z em relação à reta r pode ser obtido pela rotação do conjugado $\bar{z}$ de z, em torno da origem, do ângulo $2\alpha - 2(\alpha - \varphi) = 2\varphi$.

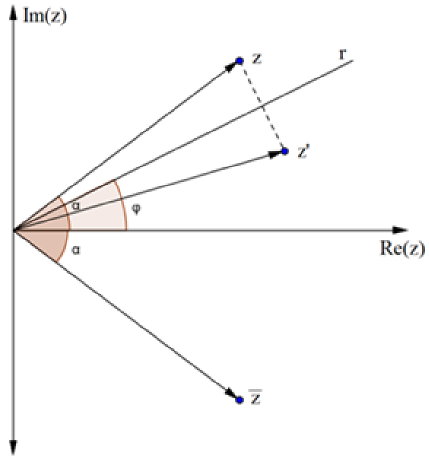

Figura 26: reflexão do número complexo z em torno da reta r
Fonte: a autora

Considerando o triângulo da figura 18 temos:

a) Reflexão em torno da reta $x = 0$, ou seja, do eixo imaginário. Nesse caso, como $\varphi = \frac{\pi}{2}$ basta multiplicar todos os conjugados dos Números Complexos associados aos vértices do triângulo ABC por $w =\ cos\ \pi + i\ sen\ \pi$, ou seja, por $w =\ -1$.

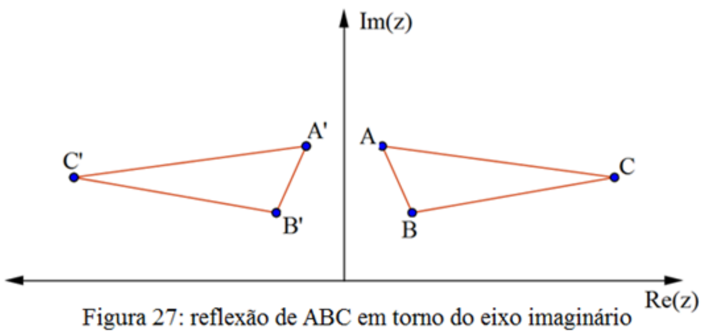

Figura 27: reflexão de ABC em torno do eixo imaginário
Fonte: a autora

b) Reflexão em torno da reta $y = 0$, ou seja, do eixo real. Nesse caso, como $\varphi = 0$, temos $w = 1$, então basta tomar o conjugado dos Números Complexos associados aos vértices do triângulo.

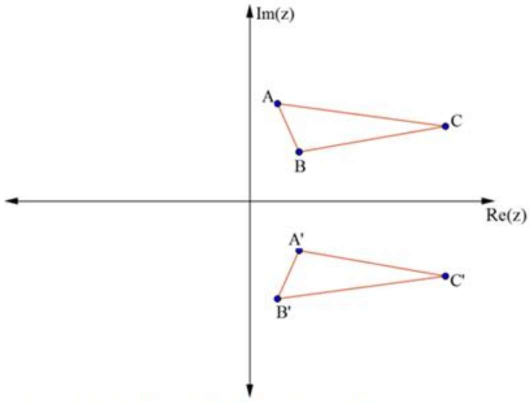

Figura 28: reflexão de ABC em torno do eixo real
Fonte: a autora

c) Reflexão em torno da reta $y = x$, ou seja, da bissetriz dos quadrantes ímpares. Nesse caso, como $\varphi = \frac{\pi}{4}$ basta multiplicar os conjugados dos Números Complexos z_1, z_2 e z_3 associados aos vértices A, B e C, respectivamente, por $w = cos\ \frac{\pi}{2} + i\ sen\ \frac{\pi}{2}$, ou seja, por $w = i$.

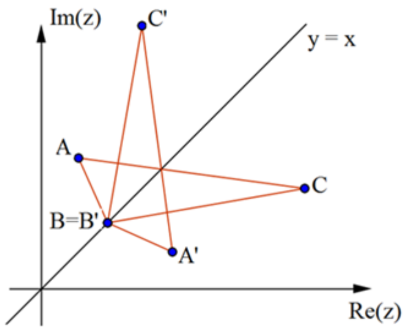

Figura 29: reflexão de ABC em torno da reta y = x
Fonte: a autora

Em todos os casos, os triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes e simétricos em relação à reta dada.

De forma geral, para refletir uma figura em torno de uma reta r que passa pela origem e forma um ângulo φ com o eixo real, devemos multiplicar todos os conjugados dos Números Complexos associados a pontos da figura por $w = cos\ 2\varphi + i\ sen\ 2\varphi$.

Aplicando, na mesma figura do plano complexo, dois ou mais dos movimentos estudados, obtemos as chamadas composições de movimento que não serão descritas nesse capítulo, mas podem ser encontradas na referência [14].

3.1.2 Paralelismo no Plano Complexo

Dados z_1 e z_2 no plano complexo, os vetores que os representam são paralelos se, e somente se, o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ é um número real, isto é, se existe $\rho \in \mathbb{R}$ tal que $z_1 = \rho \cdot z_2$.

De fato, se $z_1 = |z_1|(cos\,\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)$ e $z_2 = |z_2|(cos\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2)$ são paralelos, o ângulo entre eles é da forma $k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\alpha_1 - \alpha_2 = k\pi$ e, portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(cos\,\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)}{|z_2|(cos\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos\,(\alpha_1 - \alpha_2) + i\,sen\,(\alpha_1 - \alpha_2)],$$

ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos\,(k\pi) + i\,sen\,(k\pi)].$$

Como $sen\,k\pi = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$; $cos\,k\pi = 1$, se k é par e $cos\,k\pi = -1$ se k é $ímpar$, temos que z_1 paralelo a z_2 implica que $\frac{z_1}{z_2}$ é um Número Real, ou seja, $z_1 \parallel z_2 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$.

Reciprocamente, se $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$, então $cos\,(\alpha_1 - \alpha_2) + i\,sen\,(\alpha_1 - \alpha_2) \in \mathbb{R}$, de onde segue que $sen\,(\alpha_1 - \alpha_2) = 0 \Rightarrow \alpha_1 - \alpha_2 = k\pi$, com $k \in Z \Rightarrow z_1$ e z_2 são paralelos.

A figura 30 representa graficamente dois vetores paralelos, no plano complexo, com origens diferentes.

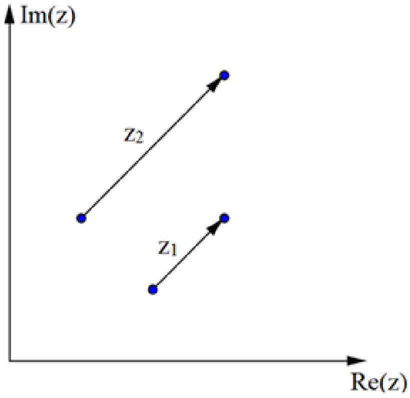

Figura 30: vetores paralelos no plano complexo
Fonte: a autora

Se os vetores z_1 e z_2 forem paralelos de mesma origem, então são colineares.

3.1.3 Perpendicularismo no Plano Complexo

Dados z_1 e z_2 no plano complexo, os vetores que os representam são perpendiculares se, e somente se, o quociente $\frac{z_1}{z_2}$ é um número imaginário puro.

De fato, se $z_1 = |z_1|(cos\,\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)$ e $z_2 = |z_2|(cos\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2)$ são perpendiculares o ângulo entre eles é da forma $\frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, ou seja, $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ e, portanto,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(cos\,\alpha_1 + i\,sen\,\alpha_1)}{|z_2|(cos\,\alpha_2 + i\,sen\,\alpha_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[cos\,(\alpha_1 - \alpha_2) + i\,sen\,(\alpha_1 - \alpha_2)],$$

ou seja,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i\,sen\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\right].$$

Como $cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$; $sen\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 1$, se k é par e $sen\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = -1$, se k é ímpar, tem-se que z_1 perpendicular a z_2 implica que $\frac{z_1}{z_2}$ é imaginário puro, ou seja, $z_1 \perp z_2 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2}$ é imaginário puro.

Reciprocamente, se $\frac{z_1}{z_2}$ é imaginário puro, $cos\,(\alpha_1 - \alpha_2) + i\,sen\,(\alpha_1 - \alpha_2)$ é imaginário puro de onde segue que $cos\,(\alpha_1 - \alpha_2) = 0$, ou seja, $\alpha_1 - \alpha_2 = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Logo, z_1 é perpendicular a z_2.

A figura 31 mostra a representação de dois vetores perpendiculares de mesma origem.

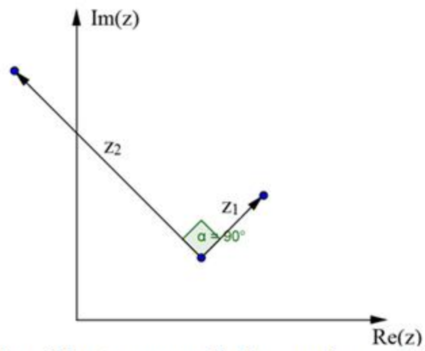

Figura 31: vetores perpendiculares no plano complexo
Fonte: a autora

3.1.4 Equação de Reta no Plano Complexo

Sejam $A = (a, c)$ e $B = (b, d)$ dois pontos fixados no Plano de Argand-Gauss que representam, respectivamente, os Números Complexos $z_1 = a + ci$ e $z_2 = b + di$, e $P(x, y)$ um ponto arbitrário da reta r que passa por A e B, de modo que $z = x + yi$ é o Número Complexo representado por P.

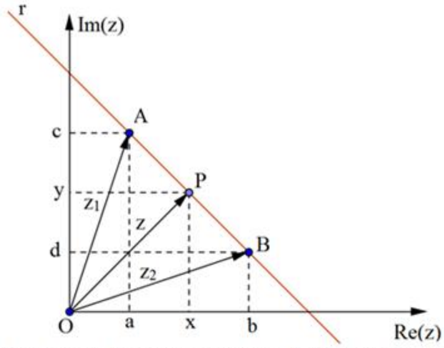

Figura 32: reta r que passa pelos pontos A e B no plano complexo
Fonte: a autora

Desse modo:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} \Leftrightarrow z_1 + \overrightarrow{AP} = z \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = z - z_1 \qquad \text{(I)}$$

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow z_1 + \overrightarrow{AB} = z_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = z_2 - z_1 \qquad \text{(II)}$$

Como A, B e P pertencem à reta r, ou seja, são colineares, temos que $\overrightarrow{AP} = k \cdot \overrightarrow{AB}$ sendo k um número real. Então, segue por (I) e (II) que $z - z_1 = k \cdot (z_2 - z_1)$. Logo, a equação da reta r que passa por A e B é dada por:

$$r(k) = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1), \text{ com } k \in \mathbb{R}.$$

Nessa equação, o ponto que representa z_1 pertence à reta r e o vetor $\overrightarrow{z_1 z_2} = z_2 - z_1$ indica a direção da mesma, em relação ao eixo real.

Através da equação da reta podemos retomar alguns conceitos e verificar quando as retas são paralelas, perpendiculares ou quando três pontos são colineares.

3.1.4.1 Retas Paralelas no Plano Complexo

Sejam $r(k) = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1)$, a reta que passa pelos pontos A e B no plano complexo, cujos afixos são os números $z_1 = a + ci$ e $z_2 = b + di$, respectivamente, e $s(k) = z_3 + k \cdot (z_4 - z_3)$ a reta que passa pelos pontos C e D, cujos afixos são os números $z_3 = e + fi$ e $z_4 = g + hi$. Sabemos que duas retas são paralelas quando têm a mesma direção. Assim sendo, r e s são paralelas se satisfazem uma das seguintes condições:

- $\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_4 - z_3) \pm \pi$ ou
- $\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_4 - z_3)$

A figura 33 ilustra uma situação em que $\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_4 - z_3) \pm \pi$, ou seja, $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3} \in \mathbb{R}$.

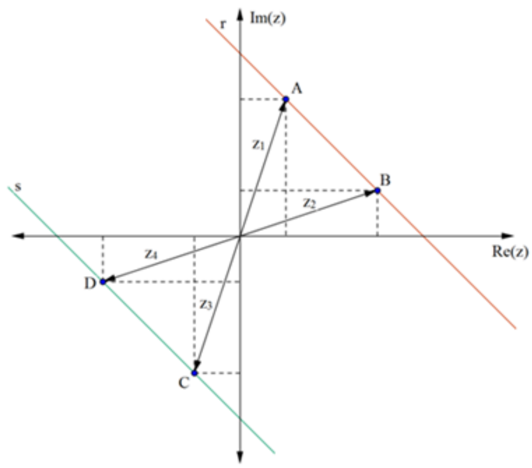

Figura 33: retas paralelas no plano complexo
Fonte: a autora

3.1.4.2 Retas Perpendiculares no Plano Complexo

As retas $r(k) = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1)$ e $s(k) = z_4 + k \cdot (z_4 - z_3)$ são perpendiculares quando a condição $\arg(z_2 - z_1) = \arg(z_4 - z_3) \pm \frac{\pi}{2}$ é satisfeita. Em consonância com a Seção 3.1.3 isso equivale dizer que $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$ é um número imaginário puro.

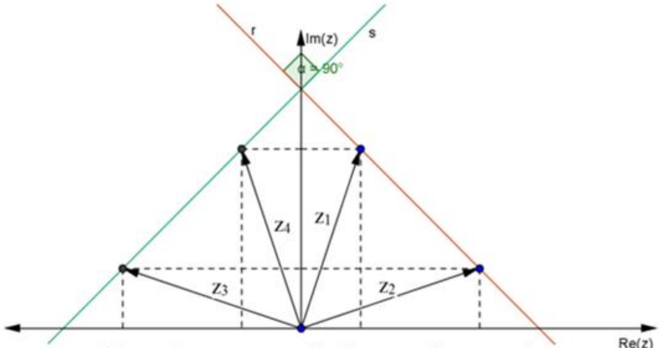

Figura 34: retas perpendiculares no plano complexo
Fonte: a autora

3.1.4.3 Alinhamento de Três Pontos

Para que os pontos A, B e C que representam os complexos z_1, z_2 e z_3 no Plano de Argand-Gauss sejam colineares é necessário que estejam sobre a mesma reta. Considerando a reta $r(k) = z_1 + k \cdot (z_2 - z_1)$. Se A, B e C são colineares, então existe $k \in \mathbb{R}$, tal que:

$$r(k) = z_3 \Rightarrow z_1 + k \cdot (z_2 - z_1) = z_3 \Rightarrow k \cdot (z_2 - z_1) = z_3 - z_1 \Rightarrow k = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Portanto, para que A, B e C sejam colineares o quociente $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ deve ser real.

3.1.5 Mediatriz no Plano Complexo

Sejam A e B os pontos que representam os Números Complexos z_1 e z_2 no plano de Argand-Gauss e r a reta que passa por esses pontos. Denomina-se mediatriz de AB, a reta s perpendicular a r passando pelo ponto médio do segmento AB.

Seja z o Número Complexo associado ao ponto M, onde $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$ é o ponto médio do segmento AB. Como r e s são perpendiculares e $z_2 - z_1$ indica a direção da reta r, temos que a direção da reta s, corresponde a uma rotação de 90° do vetor $z_2 - z_1$, ou seja, s tem a direção do vetor $(z_2 - z_1)i$. Assim sendo, a equação da mediatriz s é dada por:

$$s(t) = z + t \cdot (z_2 - z_1)i, \text{ com } t \in \mathbb{R}.$$

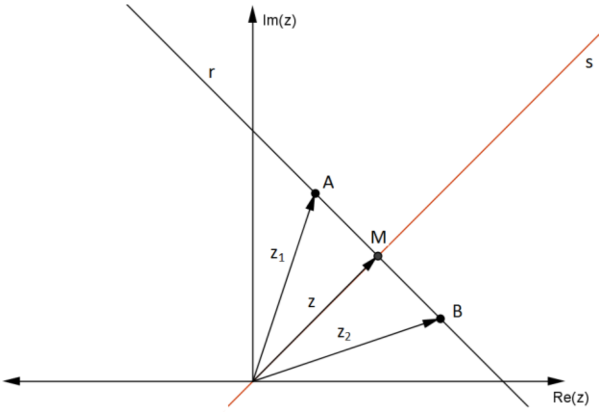

Figura 35: mediatriz s do segmento AB no plano complexo
Fonte: a autora

3.1.6 Semelhança de Triângulos no Plano Complexo

Dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes quando têm os ângulos internos respectivamente congruentes e os lados correspondentes proporcionais. Os ângulos congruentes são chamados ângulos correspondentes e os lados opostos aos ângulos correspondentes são chamados lados homólogos. Representa-se por $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

A exemplo de [24], p.30, sejam os triângulos $\Delta z_1 z_2 z_3$ e $\Delta z'_1 z'_2 z'_3$ no plano complexo, com a mesma orientação, ou seja, ambos no sentido horário ou ambos no sentido anti-horário. Como consequência da definição temos que se esses triângulos são semelhantes, então a razão entre dois lados correspondentes é a mesma e os ângulos formados por esses lados, incluindo a orientação, são iguais. Assim sendo,

- $\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right| = \left|\frac{z'_2-z'_1}{z'_3-z'_1}\right| = k$, sendo k um número real, e
- $\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \arg\frac{z'_2-z'_1}{z'_3-z'_1} \Leftrightarrow \frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z'_2-z'_1}{z'_3-z'_1}$.

Da última igualdade temos que:

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z'_2-z'_1}{z'_3-z'_1} \Leftrightarrow (z_2-z_1)(z'_3-z'_1)-(z_3-z_1)(z'_2-z'_1)=0,$$

ou seja,

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{z'_2-z'_1}{z'_3-z'_1} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_2-z_1 & z'_2-z'_1 \\ z_3-z_1 & z'_3-z'_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & 1 \\ z_2-z_1 & z'_2-z'_1 & 0 \\ z_3-z_1 & z'_3-z'_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Por sua vez,

$$\begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & 1 \\ z_2-z_1 & z'_2-z'_1 & 0 \\ z_3-z_1 & z'_3-z'_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & 1 \\ z_2 & z'_2 & 1 \\ z_3 & z'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Portanto,

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta z'_1 z'_2 z'_3 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} z_1 & z'_1 & 1 \\ z_2 & z'_2 & 1 \\ z_3 & z'_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

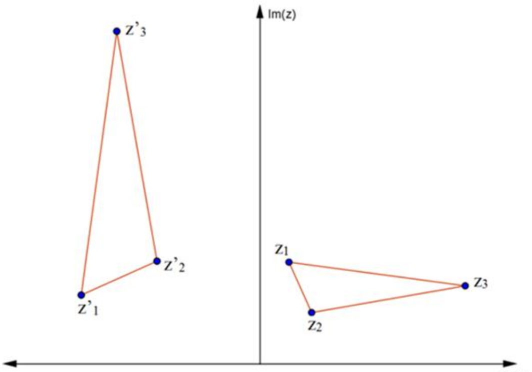

Figura 36: triângulos semelhantes de mesma orientação
Fonte: a autora

Se os triângulos têm orientações opostas, ou seja, um no sentido horário e outro no sentido anti-horário, indicamos $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim op\Delta z'_1 z'_2 z'_3$. Lembrando que o conjugado de um Número Complexo é seu simétrico em relação a $Re(z)$, percebe-se que $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim op\Delta \overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}$. Assim sendo, $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim op\Delta z'_1 z'_2 z'_3 \Leftrightarrow \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \overline{z'_1}\,\overline{z'_2}\,\overline{z'_3}$, de onde segue que

$$\Delta z_1 z_2 z_3 \sim op\Delta z'_1 z'_2 z'_3 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} z_1 & \overline{z'_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z'_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z'_3} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

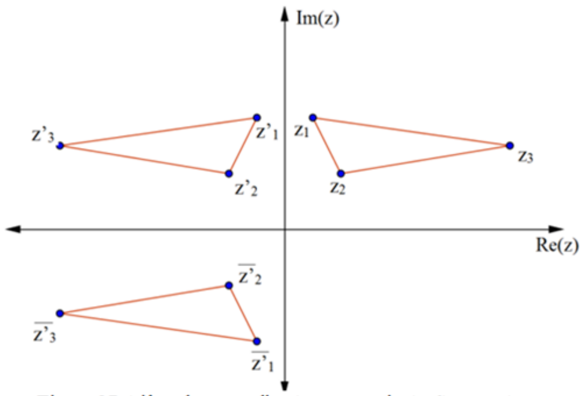

Figura 37: triângulos semelhantes com orientação oposta
Fonte: a autora

3.1.7 Circunferência no Plano Complexo

Dado um Número Complexo $z = a + ci \in \mathbb{C}$, no plano de Argand Gauss, uma circunferência nesse plano é o lugar geométrico de todos os pontos $w = x + yi$ cuja distância a z é uma constante fixa $r > 0$, a qual é denominada raio da circunferência. O conjunto que representa essa circunferência é $\{w \in \mathbb{C}: |w - z| = r\}$. Dessa definição, temos que:

$$|w - z| = r \Rightarrow |(x + yi) - (a + ci)| = r \Rightarrow |(x - a) + (y - c)i| = r.$$

Aplicando a definição de módulo de um Número Complexo, obtemos:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - c)^2} = r \Rightarrow (x - a)^2 + (y - c)^2 = r^2.$$

Essa última equação representa uma circunferência no plano complexo de centro z e raio r, denotada por $C(z; r)$.

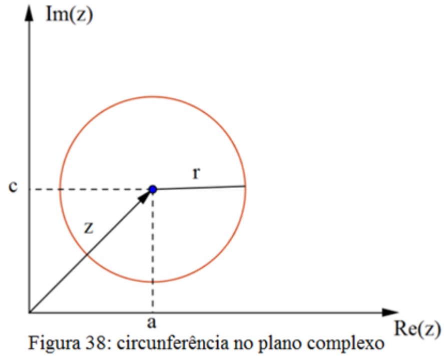

Figura 38: circunferência no plano complexo

Fonte: a autora

3.2 NÚMEROS COMPLEXOS E EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Já foi visto no Capítulo 1 que os Números Complexos surgiram em meio à busca de soluções para as equações cúbicas. Hoje em dia, o Conjunto dos Números Complexos pertence ao contexto das equações algébricas de grau n, com n natural e $n \geq 1$. Sem fazer um estudo detalhado das Equações Algébricas vamos destacar nessa Seção importantes relações entre elas e o Conjunto dos Números Complexos.

3.2.1 Teorema Fundamental da Álgebra

A primeira demonstração convincente do Teorema Fundamental da Álgebra apareceu em 1798 na tese de doutorado de Gauss. Outros matemáticos como Newton, D'Alembert, Euler e Lagrange também realizaram tentativas para demonstrar esse teorema, porém nenhum deles obteve resultados totalmente satisfatórios.

De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra: *Toda equação polinomial de grau n, com n ≥ 1, admite pelo menos uma raiz complexa.*

Esse teorema nos assegura apenas a existência de pelo menos um número que é solução de uma equação algébrica de grau $n \geq 1$; não nos informa quantas são as soluções nem como determiná-las. Uma demonstração desse teorema pode ser encontrada em [33].

3.2.2 Teorema da Decomposição

Como consequência do Teorema Fundamental da Álgebra, surge o Teorema da Decomposição, segundo o qual: *Todo polinômio* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + ax + a_0$ *de grau* n*, com* $n \geq 1$*, pode ser decomposto na forma* $p(x) = a_n(x - r_1)(x - r_2)\ldots(x - r_{n-1})(x - r_n)$*, em que* $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ *são as raízes de* $p(x) = 0$.

Para demonstrar esse teorema será utilizado outro resultado conhecido como Teorema de D'Alembert, o qual será aceito sem demonstração (para tal, veja [12]), cujo enunciado é: *Um polinômio p(x) é divisível por* $x - r$ *se, e somente se, r é a raiz de p(x), isto é, se* $p(r) = 0$.

Demonstração (do Teorema da Decomposição):

Seja o polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + ax + a_0$ de grau *n*, com $n \geq 1$. De acordo com o Teorema Fundamental da Álgebra, $p(x)$ admite uma raiz complexa r_1. Assim, $p(r_1) = 0$ e, de acordo com o Teorema de D'Alembert, p é divisível por $x - r_1$ e podemos escrever

$$p(x) = (x - r_1) \cdot q_1(x), \qquad \text{(I)}$$

em que $q_1(x)$ é um polinômio de grau $n - 1$.

Se $n - 1 \geq 1$, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $q_1(x)$ admite uma raiz complexa r_2 tal que

$$q_1(x) = (x - r_2) \cdot q_2(x), \qquad \text{(II)}$$

Substituindo (II) em (I), temos

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot q_2(x).$$

Repetindo n vezes esse procedimento, obtemos:

$$p(x) = (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n) \cdot q_n(x).$$

Pela igualdade de polinômios, pode-se concluir que o coeficiente a_n do polinômio p é igual a q_n, isto é, $a_n = q_n(x)$. Logo,

$$p(x) = a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n),$$

o que conclui a demonstração.

Segue desse teorema que toda equação polinomial de grau n, com $n \geq 1$, pode ser escrita na forma $a_n(x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot \cdots \cdot (x - r_{n-1}) \cdot (x - r_n) = 0$. Assim sendo, como $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}, r_n$ são todas raízes dessa equação, podemos concluir que: *Toda equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes complexas, não necessariamente distintas entre si.*

No que se refere às raízes complexas da forma $z = a + bi$, com $b \neq 0$, de uma equação polinomial com coeficientes reais, um resultado importante é o que segue: *Se um número complexo $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$ e $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais $p(x) = 0$, então o conjugado de z, $\bar{z} = a - bi$, também o é.*

Demonstração:

Considerando um polinômio $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + ax + a_0$, com coeficientes reais, de modo que o Número Complexo $z = a + bi$, com a e b reais e $b \neq 0$, é raiz da equação polinomial $p(x) = 0$. Temos então que $p(z) = 0$, *isto é*, $a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + az + a_0 = 0$. Como complexos iguais têm conjugados iguais, $\overline{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2 z^2 + az + a_0} = \bar{0}$. Para seguir a demonstração serão utilizadas propriedades do conjugado de Números Complexos, já vistas no Capítulo 2. Utilizando a propriedade $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, podemos escrever a equação acima como

$$\overline{a_n z^n} + \overline{a_{n-1}z^{n-1}} + \ldots + \overline{a_2 z^2} + \overline{az} + \overline{a_0} = \bar{0}.$$

Das propriedades $\overline{xz} = x\bar{z}$ e $\bar{x} = x$, sendo x real, segue que

$$a_n \overline{z^n} + a_{n-1}\,\overline{z^{n-1}} + \ldots + a_2 \overline{z^2} + a\,\bar{z} + a_0 = 0,$$

e usando a propriedade $\overline{z^n} = \bar{z}^n$, temos

$$a_n(\bar{z})^n + a_{n-1}(\bar{z})^{n-1} + \ldots + a_2(\bar{z})^2 + a\,\bar{z} + a_0 = 0.$$

Portanto, $p(\bar{z}) = 0$, isto é, $\bar{z}$ é raiz de $p(x) = 0$, como queríamos demonstrar.

Podemos citar como consequências desse teorema, as seguintes proposições:

- "se um Número Complexo não real $z = a + bi$, é raiz de multiplicidade m de uma equação algébrica com coeficientes reais $p(x) = 0$, então seu conjugado $\bar{z} = a - bi$, também é raiz de multiplicidade m dessa equação" ([32], p.276).
- "a quantidade de raízes complexas não reais de uma equação com coeficientes reais é necessariamente par. Assim, se o grau da equação é ímpar, ela admite pelo menos uma raiz real" ([29], p.344).

3.2.3 Equações Binômias e Trinômias

Denomina-se Equação Binômia qualquer equação que possa ser reduzida à forma $ax^n + b = 0$, com a e b pertencentes ao Conjunto dos Números Complexos, a diferente de zero e n pertencente ao Conjunto dos Números Naturais.

Para resolver uma Equação Binômia, isolamos x^n no primeiro membro e aplicamos a Segunda Fórmula de De Moivre, vista no Capítulo 2,

$$ax^n + b = 0 \Leftrightarrow x^n = -\frac{b}{a}.$$

Logo, o conjunto solução de uma equação binômia são as n raízes n −ésimas de $-\frac{b}{a}$.

Qualquer equação que pode ser reduzida à forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, com $a, b, c \in \mathbb{C}, a, b \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, é denominada Equação Trinômia.

Para resolver esse tipo de equação é preciso fazer uma troca de variável substituindo $x^n = y$, obtendo a equação do 2º grau $ay^2 + by + c = 0$, cujas soluções são y' e y''. Retornando à igualdade $x^n = y$, recaímos nas equações binômias $x^n = y'$ e $x^n = y''$, que quando resolvidas fornecem as raízes da equação inicial.

Pelo exposto nesse capítulo percebemos que existem várias conexões entre os números complexos e outros conteúdos matemáticos pertencentes ao currículo do Ensino Fundamental e Médio. Assim sendo, não se justifica o estudo dos Números Complexos de forma isolada, contemplando apenas a manipulação descontextualizada das fórmulas e operações, pois como afirma [12], p.280:

> Tratar os conteúdos matemáticos de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal ou social do aluno, de modo a dar significado ao que está sendo aprendido, levando- se em conta que todo conhecimento envolve uma relação ativa entre o sujeito e o objeto do conhecimento. Assim, a contextualização ajuda a desenvolver no aluno a capacidade de relacionar o aprendido com o observado e a teoria com suas consequências e aplicações práticas. Ajuda também a fazer conexões dentro da própria matemática.

Enfim, a inegável importância de trabalhar um conteúdo matemático, tendo o conjunto dos Números Complexos como caso particular, de forma integrada com outros conteúdos da disciplina é expressa em [15], p.279, quando ressalta:

> É essencial estabelecer conexões entre o assunto em desenvolvimento e outros tópicos de Matemática já estudados, pois um currículo muito linear pode levar à fragmentação dos conteúdos e à desmotivação do aluno para aprendizagem em Matemática. Além do mais, a integração entre conteúdos diversos de Matemática, possibilita a retomada de conceitos importantes ou a visualização sob outros pontos de vista.

CAPÍTULO 4
APLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

No capítulo anterior conseguimos verificar que o Conjunto dos Números Complexos não é um conteúdo isolado, mas que possui relações com diversos conteúdos matemáticos ampliando assim o rol de possibilidades para a abordagem desse conteúdo no Ensino Médio.

Para ir um pouco além pretendemos mostrar que os Números Complexos não são exclusividade da Matemática e ultrapassam as barreiras da disciplina com aplicações em outras áreas do conhecimento. Conforme [24], p.5, "os Números Complexos desempenham um papel sumamente importante nos mais diversos ramos da Matemática e, através destes, em muitas das aplicações a outras áreas do conhecimento".

Citando [1], p.88, "hoje temos aplicações que não se fizeram presentes na história da sua criação, tais como: Topografia, Cosmologia, Informática, Física Moderna e Eletricidade". Algumas dessas aplicações podem ser exploradas com mais detalhes no Ensino Médio, outras podem apenas ser comentadas, pois os conteúdos envolvidos estão além do currículo desse nível de ensino. Tomar conhecimento dessas aplicações é importante no aprendizado dos Números Complexos, pois conforme [28], p.11:

> aprender matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de habilidades formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar, tirar conclusões próprias, tomar decisões e generalizar.

Nesse capítulo serão descritas, sem aprofundamento teórico, aplicações dos Números Complexos na Física, na Engenharia Elétrica, nos Fractais, na Arte e na Aerodinâmica as quais foram identificadas, mediante revisão bibliográfica.

4.1 APLICAÇÕES NA FÍSICA

A própria representação de um Número Complexo como vetor e suas operações estabelecem relações entre esses números e a disciplina de Física.

4.1.1 Grandezas Vetoriais

Escrevendo sobre os movimentos de rotação e translação de Números Complexos como vetores no plano de Argand-Gauss, [4],p. 153, afirma que "essa correspondência entre as operações com complexos e as transformações geométricas é muito útil na Física quando trabalha com grandezas vetoriais como: força, velocidade, aceleração, etc".

Ainda tratando da utilidade desses números no estudo de grandezas vetoriais, os mesmos autores colocam que "os Números Complexos podem ser usados para se determinar a força resultante que age sobre um corpo no qual atuam várias forças" ([4], p. 153). Consideremos as forças F_1 e F_2 atuando sobre um corpo representado na origem do plano complexo. Essas duas forças provocam o mesmo efeito que uma única força, denominada força resultante (F_r), que possui o mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido que o vetor soma $F_1 + F_2$, ou seja, $F_r = F_1 + F_2$.

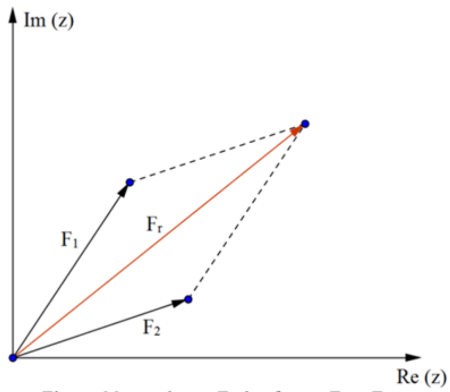

Figura 39: resultante F_r das forças F_1 e F_2
Fonte: a autora

Esse resultado pode ser generalizado para n forças, ou seja, n forças atuando sobre um corpo podem ser substituídas pela força resultante tal que $F_r = F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.

4.1.2 Reflexão em Espelhos Planos

Do estudo de espelhos planos na disciplina de Física sabemos que o ângulo de incidência e o ângulo de reflexão de um raio luminoso sobre um espelho plano são iguais, em relação a uma reta perpendicular ao espelho no ponto onde o raio incide. Representando um espelho plano pela reta E e a normal ao espelho no ponto de incidência por N, podemos usar um plano complexo com origem no ponto de incidência, reta E contida no eixo imaginário e normal N contida no eixo real. O raio refletido aparece como o simétrico do raio incidente em relação à normal N. A direção dos raios incidente e refletido é dada pelos complexos (vetores) z e $\bar{z}$ no plano determinado.

Citando [17], p.39, "se considerarmos os raios incidente e refletido juntamente com seus prolongamentos, eles podem ser encarados como retas, e não semirretas. Assim fazendo, o raio refletido é o simétrico do raio incidente não somente em relação à normal, como também em relação ao próprio espelho".

De forma geral, "dado um ponto z do raio incidente, e sendo u um vetor unitário da direção da reta que representa o espelho E, o simétrico de z em relação ao espelho será $z' = u^2\bar{z}$ desde que o espelho passe pela origem do sistema de coordenadas escolhido. O raio refletido fica então determinado por z' e pelo ponto de interseção do raio incidente com o espelho" ([17], p.39).

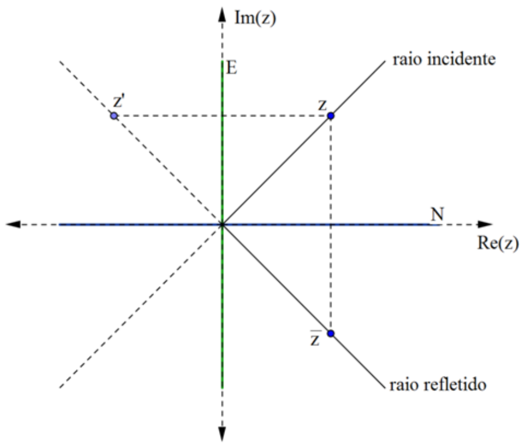

Figura 40: reflexão no espelho plano E
Fonte: a autora

4.2. APLICAÇÕES NA ENGENHARIA ELÉTRICA

A geração e utilização da energia elétrica trouxeram progresso e inúmeros benefícios para a sociedade. Na geração dessa energia nas usinas e nas instalações elétricas residenciais encontramos algumas aplicações dos Números Complexos que, na forma trigonométrica, facilitam os cálculos quando se quer trabalhar com a tensão alternada nas usinas e transmiti-la até os usuários.

4.2.1 Geração de Energia Elétrica

Pelo princípio da indução eletromagnética, quando um imã é colocado em movimento, ocorre uma variação do fluxo magnético pela bobina, gerando uma tensão elétrica induzida no fio, associada a uma corrente elétrica i.

Com a variação do fluxo magnético ocorre também uma variação na tensão elétrica, ou seja, a tensão elétrica será alternada, possuindo uma frequência de variação que, no Brasil, é de 60 hertz.

Sendo a tensão elétrica alternada, ela pode ser representada por uma senóide e, para facilitar os cálculos e as representações, faz-se uso dos fasores, vetores gigantes com a mesma frequência angular da função trigonométrica e com tamanho constante, variando somente seu ângulo ([29], p.309).

Cada fasor pode ser representado por um número complexo na forma trigonométrica, sendo que, a cada momento corresponde um ângulo e a tensão possui seu valor descrito pela projeção vertical do fasor.

4.2.2 Circuitos de Corrente Alternada

Um circuito elétrico que contém um resistor (R), um indutor (L) e um capacitor (C) conectados em série ou em paralelo é denominado circuito RLC. A medida da resistência de um circuito RLC é chamada de impedância (Z).

Nas instalações elétricas residenciais os circuitos são de corrente alternada e as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio dos Números Complexos, para facilitar os cálculos. "A relação $U = Ri$, estudada na Física do ensino médio e que se utiliza dos Números Reais, torna-se $U = Zi$, em que U é a tensão, Z é a impedância e i é a corrente elétrica, sendo que essas grandezas passam a ser representadas através de Números Complexos" ([12], p.168).

No cálculo da corrente elétrica fornecida por uma fonte de tensão de valor U volts que alimenta uma carga de impedância Z ohm é preciso efetuar a divisão $i = \frac{U}{Z}$. Para tanto, é preferível ter U e Z na forma trigonométrica.

Como a letra i também é utilizada para indicar a unidade imaginária, a fim de evitar confusão com o símbolo da corrente elétrica "os engenheiros elétricos usam j como unidade imaginária na representação algébrica $a + bj$ de um Número Complexo. Além disso, usam a notação $|w| < \theta$ para a forma trigonométrica $|w|(cos\,\theta + isen\,\theta)$".([12], p.168)

4.3 APLICAÇÃO NA AERODINÂMICA

A diferença relativa de velocidades entre objetos e fluídos, cuja explicação está na conservação da energia, enunciada como Princípio de Bernoulli, é um dos principais conceitos da aerodinâmica.

"O russo Nicolai Joukowski (1847-1921) foi o primeiro cientista a explicar matematicamente a aerodinâmica para a sustentação gerada por um corpo em movimento através de um fluído ideal" ([31], p.261). Para tanto, ele construiu uma curva fechada no plano complexo, tal como o perfil de uma asa de avião, utilizando transformações geométricas. Essa curva ficou conhecida como aerofólio de Joukowski.

Além disso, ele usou o Princípio de Bernoulli e a Teoria das Funções Complexas para deduzir uma fórmula de uma variável complexa $F(z) = z + \frac{1}{z}$, denominada transformação de Joukowski que "permite calcular a força de arrasto responsável pela sustentação do corpo. A partir da solução matemática definiu o perfil aerodinâmico que facilita a circulação do fluido em torno da asa do avião, tendo como elementos essenciais uma borda arredondada, superfície dupla (curva ou reta) e uma cauda afiada (borda)".([31], p.261)

Aplicando a transformação de Joukowski em modelos matemáticos de aerofólios os engenheiros conseguem estabelecer previsões das forças de sustentação e arrasto nas asas de um avião cujas seções transversais possuem forma de aerofólio.

Os cálculos e transformações utilizados pelos engenheiros são de nível superior mas fica evidente a importância dos Números Complexos para dar uma explicação matemática para o movimento de um corpo em meio fluido contribuindo, consequentemente, para o progresso tecnológico.

4.4. APLICAÇÃO NOS FRACTAIS

Os fractais são normalmente conhecidos por serem geradores de figuras, mas além de produzir belas imagens, "a geometria fractal é importante no estudo de sistemas dinâmicos ou sistemas em movimento, que são imprevisíveis sob certas condições. Esse conhecimento é usado na previsão do clima, no estudo do movimento das estrelas e galáxias do sistema solar" ([20], p.568), na análise de pulsos elétricos no cérebro e de batimentos cardíacos. "Nesta geometria são encontradas formas de descrever os vários fenômenos na natureza, onde não podem ser utilizadas as geometrias tradicionais". ([18], p.5)

Alguns fractais importantes podem ser obtidos pela repetição de funções envolvendo números complexos entre os quais pode ser citado o conjunto do matemático polonês Benôit Mandelbrot.

A construção de Mandelbrot baseia-se na sequência de números complexos $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + w$, onde n é um número natural, Z_n e w são complexos e $Z_0 = 0$. O conjunto de Mandelbrot é definido como sendo o conjunto de todos os Números Complexos w tais que Z_{n+1} não tende para infinito, quando n tende para infinito.

Segundo [18], p.6, "os fractais permitem modelar qualquer coisa da natureza na tela de um computador graças aos Números Complexos, pois a produção de cada imagem se resume a uma fórmula iterativa no plano complexo”. Além do mais, “as iterações sucessivas dos fractais na sequência $Z_{n+1} = (Z_n)^2 + w$ é nível de aprendizagem de alunos do Ensino Médio, e se explorada através dos Números Complexos, pode ser utilizada para a fixação deste último conteúdo” ([18], p.6).

4.5 APLICAÇÃO NA ARTE

Já vimos que é possível associar movimentos no plano e operações com Números Complexos. Em particular, a rotação de pontos e a reflexão em torno de uma reta r estão relacionadas à multiplicação de Números Complexos.

Podemos citar como aplicação dos Números Complexos na Arte, algumas obras do artista Maurits Cornelius Escher, nas quais ele utilizou a rotação e a reflexão de imagens como recurso.

Na obra Limite Circular III, os quatro peixes do centro do quadro correspondem a uma rotação de 90º em torno da origem dos pontos de cada figura.

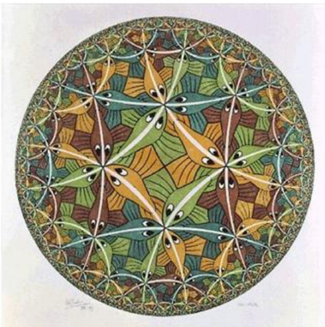

Figura 41: Limite Circular III
Fonte: www.mcescher.com

Na obra Limite circular IV, os três demônios negros do centro correspondem a uma rotação de 120º em torno da origem dos pontos de cada figura. Na mesma obra, um dos demônios citados é simétrico em relação à reta $x = 0$. Assim, pelo que foi visto em 3.1.1.4, cada ponto de uma das metades desse demônio pode ser obtido como o produto do conjugado de um ponto da outra metade por $w = cos\,\pi + i\,sen\,\pi$.

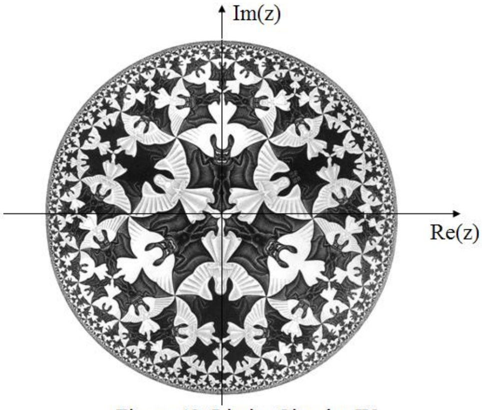

Figura 42: Limite Circular IV
Fonte: www.mcescher.com

As aplicações apresentadas neste capítulo revelam a importância do estudo dos Números Complexos tanto na disciplina de Matemática quanto em outras áreas do conhecimento.

Para melhor explorar no Ensino Médio algumas dessas aplicações e potencializar a aprendizagem dos conteúdos relacionados sugerimos um trabalho interdisciplinar, pois:

> no ensino dos conteúdos escolares, as relações interdisciplinares evidenciam, por um lado, as limitações e as insuficiências das disciplinas em suas abordagens isoladas e individuais e, por outro, as especificidades próprias de cada disciplina para a compreensão de um objeto qualquer. Desse modo, explicita-se que as disciplinas escolares não são herméticas, fechadas em si, mas, a partir de suas especialidades, chamam umas às outras e, em conjunto, ampliam a abordagem dos conteúdos de modo que se busque, cada vez mais, a totalidade, numa prática pedagógica que leve em conta as dimensões científica, filosófica e artística do conhecimento. ([26], p. 27)

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento do trabalho vimos que os Números Complexos constituem-se em uma grande ferramenta para resolver diversos problemas. No entanto, ao fazer uma breve análise em livros didáticos do Ensino Médio percebemos que ainda existe um distanciamento entre a forma como esse conteúdo é desenvolvido em sala de aula e sua aplicabilidade.

Documentos que orientam o ensino de Matemática, no âmbito nacional (PCNs) e estadual (DCEs), defendem a importância de trabalhar os diferentes aspectos e formas de representação dos conteúdos bem como suas aplicações para favorecer a aprendizagem. Entre os autores dos livros didáticos analisados, encontramos aqueles que levam essas orientações em consideração apresentando algumas representações geométricas e aplicações, embora insuficientes, buscando abordagens mais significativas para o conteúdo. Porém, a maioria ainda omite qualquer aplicação em outros conteúdos da disciplina ou em outras áreas do conhecimento e exploram os Números Complexos apenas de forma técnica, priorizando a manipulação dos conceitos e operações, sem apresentar as representações gráficas e as demonstrações de fórmulas e teoremas passíveis de compreensão no Ensino Médio. Essa postura, além de fragmentar o conteúdo, contribui para esvaziar seu significado motivando o desinteresse por parte dos alunos.

O contexto histórico também começa a ser utilizado por todos os autores para iniciar os capítulos e há inclusive os que o utilizam para contextualizar exercícios. Esse é um fator positivo, pois o contexto histórico é importante para compreensão do surgimento dos números complexos, bem como os problemas de aceitação pelos quais esses números passaram em diferentes momentos da história.

Nesse trabalho damos um passo importante no sentido de superar a ideia de que os Números Complexos só servem para operar com eles mesmos, sem conexões com outros conteúdos matemáticos e desprovidos de aplicações. Tal passo consistiu em apresentar uma série de possibilidades de aplicações práticas e significativas relacionadas à própria disciplina e a outras áreas do conhecimento. Acreditamos que dessa forma pode-se mostrar a alunos e professores do Ensino Médio que os Números Complexos possuem uma grande diversidade de aplicações que merecem destaque nos currículos escolares.

Conhecer e explorar os aspectos históricos, algébricos e geométricos dos Números Complexos, bem como suas diversas aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento permite aos professores do Ensino Médio desenvolver novas formas de abordagem para tratar do conteúdo de forma mais significativa e interessante, favorecendo a aprendizagem.

É válido constar que o software livre Geogebra foi de grande importância na confecção das figuras utilizadas revelando-se, inclusive, numa excelente ferramenta de aprendizagem.

Ressaltamos também que ao longo do desenvolvimento desse trabalho outras ideias foram surgindo e talvez possam ser utilizadas em trabalhos futuros. Podemos citar o estudo sobre as Transformações de Mobius que associam as transformações do plano a Números Complexos e Matrizes. Havendo tempo para aplicação e análise dos resultados, uma sequência didática, com as diversas formas de representação dos Números Complexos e suas aplicações, pode ser desenvolvida e aplicada para comparar a eficiência dessa forma de abordagem com a tradicionalmente utilizada nos livros didáticos.

REFERÊNCIAS

[1] ARAÚJO, N. B. F. **Números Complexos: uma proposta de mudança metodológica para uma aprendizagem significativa no Ensino Médio.** 2006. 111f. Dissertação (Mestrado em ensino de Ciências Naturais e Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2006. Disponível em: < http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/ publicacao_34.pdf >. Acesso em 29/12/2012.

[2] ÁVILA, G. **Reflexões sobre o ensino de Geometria**. Revista do Professor de Matemática Nº 71, pp. 3-8. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, 2010.

[3] BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. Ensino Médio, v.3, pp.170-195. São Paulo, Moderna, 2010.

[4] BONJORNO, J; GIOVANNI, J. R. **Matemática Completa**. Ensino médio, v.3, pp.135-163. São Paulo, FTD, 2005.

[5] BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. v. 2. 135p. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. Brasília, 2008.

[6] CAMARGO, M. V.P; VRIESMAN, T. C. **A Evolução dos Números Complexos: História e Aplicações.** Artigo online, 2012, 15f. Universidade Tecnológica do Paraná, Curitiba, 2012. Disponível em: <http://tcconline.utp.br/wp-content/uploads//2012/08.pdf>. Acesso em 30/09/2012.

[7] CANTONI, A. C. L. **Números Complexos e Alguns Resultados Clássicos da Geometria Plana.** 2008. 59f. Monografia (Especialização em Matemática). Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008. Disponível em: < http://www.mat.ufmg.br/~ pgmat/monografias/ Mono007. pdf >. Acesso em 31/12/2012.

[8] CARAÇA, B. de J. **Conceitos Fundamentais de Matemática.** 6ª Ed; pp. 151-159. Gradiva-Publicações, LTDA, Lisboa, 1995.

[9] CARMO, M. P; MORGADO, A. C; WAGNER, E. **Trigonometria e Números Complexos**. Notas históricas de João Bosco Pitombeira de Carvalho. Apêndice C, pp.109-113. Graftex, Rio de Janeiro, 1992.

[10] CARNEIRO, J. P. **A Geometria e o ensino dos Números Complexos**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. 12p. Anais. Realização Sociedade Brasileira de Matemática, Recife, 2004.

[11] CERRI C.; MONTEIRO M. S. **História dos Números Complexos**. CAEM - Centro de Aperfeiçoamento de Ensino de Matemática Instituto de Matemática e Estatística da USP, 2001. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf> Acesso em: 20/10/2012.

[12] DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Ensino Médio, v.3; pp. 136-284. São Paulo, Ática, 2010.

[13] FERNANDEZ, C. S; BERNARDES, N. C. **Introdução às funções de uma variável complexa**. 2ª ed. pp. 1-17. Rio de Janeiro, SBM, 2008.

[14] FNDE. **Transformação de Mobius**. Guia do Professor. Experimento. 37p. Ministério da Educação, São Paulo, Unicamp, 2010.

[15] IEZZI, G., et all. **Matemática: Ciências e Aplicações**. Ensino Médio, v. 3, pp.122-292. São Paulo, Saraiva, 2010.

[16] JUNIOR, U. P. **A História dos Números Complexos "das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand".** 2009. 94f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009. Disponível em: < http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/12%20 Ulicio %20 Pinto.pdf >. Acesso em 30/10/2012.

[17] LINO, P. S; CARNEIRO, J. P. **Reflexões em Espelhos Planos usando Números Complexos**. Revista do Professor de Matemática. Nº 76. Ano 29,3º quadrimestre, pp.37-41. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo, 2011.

[18] LOPES, A. C.M; CABRAL,V. P. G; ALVES, F. J. C. **Números complexos na vida real: Uma abordagem sobre o ensino e algumas aplicações.** VII Encontro Paranaense de Educação Matemática. Pará, 2011. Disponível em:< http://www.sbempa.mat.br/Boletim/ Anais/secoes% 5CCC0103.pdf >. Acesso em 06/01/2013.

[19] LORENZATO. S.; VILA, M. do C. **Século XXI: qual matemática é recomendável?** Revista Zetetiké. Campinas, ano 1, n. 1, pp. 41-49, 1993. Disponível em: http://www.lce.esalq.usp.br/gabriel/Matematica.pdf. Acesso em 31/12/2012.

[20] MELLO, J. L. P; BARROSO, J. M. **Matemática: construção e significado**. Ensino Médio. pp.568-589. São Paulo, Moderna, 2005.

[21] MILIES, C. P. **A Emergência dos Números Complexos**. Revista do Professor de Matemática (RPM). Nº. 24, pp. 5-15. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo,1993.
[22] **___ A solução de Tartaglia para a equação de 3º grau.** Revista do Professor de Matemática. Nº 25**.** Revista online. Sociedade Brasileira de Matemática, São Paulo,1994.

[23] MONZON, L. W. **A Abordagem dos Números Complexos no Ensino Médio.** 2010. 24f. Trabalho (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010. Disponível em: < http://larissamonzon.pbworks. com /f/TC_numeroscomplexos.pdf >. Acesso em 30/12/2012.

[24] MOTTA, E. **Aplicações dos Números Complexos à Geometria**. Revista Eureka Nº 6, 61p. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 1999.

[25] PAIVA, M. **Matemática**. Ensino Médio, v.3, pp. 123-147. São Paulo, Moderna, 2009.

[26] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica- Matemática.** Curitiba: SEED/DEB. 2008, p.45.

[27] PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000. <Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/ ciencian.pdf >. Acesso em 11/12/2012.

[28] PCNs+.**Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica. 141p. Brasília, 2002. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>. Acesso em 01/01/2013.

[29] RIBEIRO, J. **Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia.** Ensino Médio, v.3, pp.277-351. São Paulo, Scipione, 2010.

[30] SILVA, C. X; FILHO, B. B. **Matemática aula por aula**. Ensino Médio, v.3, pp. 149-171. São Paulo, FTD, 2005.

[31] SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Matemática**. Ensino Médio, v.3, pp. 236-275. São Paulo, Saraiva, 2010.

[32] SOUZA, J. **Matemática**. Coleção Novo Olhar. Ensino Médio, v.3, pp. 228-280. São Paulo, FTD, 2010.

[33] WAGNER, E., et.all. **A Matemática do Ensino Médio.** Coleção do Professor de Matemática, v.3. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.