UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Felipe Olavo Silva

ESPIRAL LOGARÍTMICA: DA NATUREZA PARA A SALA DE AULA

Rio de Janeiro
2015

Felipe Olavo Silva

ESPIRAL LOGARÍTMICA: DA NATUREZA PARA A SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gladson OctavianoAntunes

Co-orientadora: Prof. Msc. Bruna Moustapha Corrêa

Rio de Janeiro
2015

Silva, Felipe Olavo

Espiral Logarítmica: da natureza para a sala de aula. / Felipe Olavo Silva – 2015.

63.p

1. Natureza 2. Espiral 3. Logaritmo 4. Espiral logarítmica. I. Espiral Logarítmica: da natureza para a sala de aula.

CDU________

Felipe Olavo Silva

ESPIRAL LOGARÍTMICA: DA NATUREZA PARA A SALA DE AULA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Rio de Janeiro,15de dezembro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Gladson Octaviano Antunes
Doutor em Matemática – UNIRIO

Bruna Moustapha Corrêa
Mestreem Ensino de Matemática – UNIRIO

Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática –UNIRIO

Andreia Carvalho Maciel Barbosa
Doutoraem EducaçãoMatemática – UERJ

Rio de Janeiro
2015

A Deus, autor e consumador da minha fé.

Aos meus pais, Dalva e Olavo, responsáveis pela formação do meu caráter.

À minha irmã, Rachel, pelo apoio em todos os momentos.

À minha namorada, Sabrina, grande amor da minha vida.

"*A liberdade de pensamento é uma virtude,*
mas é imprescindível aprender a pensar."

Neil Barreto

Agradecimentos

A Jesus Cristo, por entregar a sua própria vida para me dar a salvação e me tornar um filho de Deus.

Aos meus pais, Dalva e Olavo, por terem feito e ainda fazerem tudo para me proporcionar a melhor educação possível e por forjarem dentro do meu ser o homem que sou.

A minha irmã, Rachel, por me ajudar em todos os momentos que precisei.

A minha avó, Maria da Penha, por sua fé em mim e por sempre me dar palavras de motivação nos momentos de dificuldade.

Aos meus amigos, por me incentivarem a prosseguir na busca do conhecimento.

Ao meu pastor, Neil Barreto, por ter me dado uma palavra que possibilitou tornar o sonho de realizar este curso em realidade.

Aos meus orientadores, Gladson e Bruna, por terem paciência e dedicação ao me orientar na construção deste trabalho.

Aos meus colegas de turma, por serem amigos verdadeiros me ajudando a superar todas as barreiras que se levantaram durante este curso.

LISTA DE FIGURAS

RESUMO

SILVA, Felipe Olavo. Espiral logarítmica: da natureza para a sala de aula. 2015. 63f.Trabalho de Conclusão de Curso. Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO.

Este trabalho apresenta uma proposta de atividade que se utiliza de um elemento da natureza para abordar o tema da espiral logarítmica e suas propriedades. A espiral logarítmica é uma curva que possui características muito interessantes, entre elas: o ângulo formado entre o eixo polar e a reta tangente à curva é sempre constante, o raio polar aumenta de forma geométrica e a espiral mantém a sua forma perante rotações ou mudanças de escala em torno do seu centro. Este tipo de espiral esta presente em diversos locais da natureza, nas folhas das plantas, nas flores, nas ondas do mar, em furacões e na concha do Náutilus. Escolhemos esta concha como figura principal da atividade na qual a partir de uma ilustração dela os alunos precisam realizar construções geométricas, fazer medições, cálculos e utilizar os conceitos de logaritmo e progressão geométrica para elaborar propriedades entre os raios da espiral logarítmica. Disponibilizamos neste trabalho um material de apoio detalhado para que os professores possam aplicá-lo em suas turmas e também um relatório da aplicação feita pelo autor com o objetivo de mostrar os detalhes e os resultados obtidos com esta proposta.

Palavras-chave: natureza, espiral, logaritmo, espiral logarítmica.

ABSTRACT

SILVA, Felipe Olavo.**Logarithmic spiral: from nature to the classroom.**2015. 63p. Master's Degree Dissertation in Professional Mathematics –Federal University in the State of the Rio de Janeiro.

This paper presents an activity proposal that it is utilized from an element of nature to approach the issue of the logarithmic spiral subject and its properties. The logarithmic spiral is a curve which has interesting features, including: the angle formed between the polar axis and tangent line to curve is always costant, the polar radius increases geometrically and the spiral retains its shape before rotation or changes scale around its center. This kind of spiral is in many places in nature, in plant leaves, flowers, the sea waves, hurricanes and Nautilus shell. We chose this shell as a leading figure of activity in which from an illustration of her the students need to make measurements, calculations and using the logarithm concepts and geometrical progression to prepare properties between the rays of the logarithmic spiral.We provide in this paper a detailed background material for the teachers to apply it in their classes and also an application report by the author in order to show the details and the results obtained with this proposal.

Keywords: nature, spiral, logarithm and logarithmic spiral.

Sumário

Introdução

É comum nós professores de Matemática nos depararmos com perguntas do tipo: “pra que serve a matemática?” ou “por que precisamos estudar matemática?” Tais questionamentos são, na maioria das vezes, motivados pela falta de compreensão ou pela falta de percepção da relação existente entre a Matemática e o mundo que nos cerca. Contudo, a Matemática é desenvolvida a partir de demandas internas ou externas à ela. Nesse sentido, alguns conceitos matemáticos relacionam-se diretamente com a natureza, outros com situações corriqueiras, além daqueles relacionados com a própria matemática. Os questionamentos apontados, entretanto, mostram que algumas pessoas têm dificuldade em perceber a importância da matemática, todavia a sua relevância é inquestionável.

Na busca por propostas de atividades matemáticas que explicitem estas relações, apresentamos neste trabalho um exemplo de como a matemática se relaciona com a natureza e como é possível utilizar essa relação em situações de ensino. Acreditamos que devemos levar a relação entre o mundo físico e a matemática para a sala de aula. Mostrar para o aluno que a matemática não é algo inventado sem fundamento ou sem aplicação, e sim que a partir das experiências humanas foi-se criando uma linguagem que facilita em muito a vida humana. Como dizia Galileu Galilei:

> O Universo (…) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem Matemática e os seus caracteres são o triângulo, o círculo e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes ficamos às escuras, num labirinto escuro.

A matemática se entrelaça na história desde o início da existência do ser humano, ou seja, não é possível viver sem ela e é muito bom conhecê-la cada dia mais.Com a evolução do mundo, é crescente a necessidade da formação de indivíduos que dominem a linguagem matemática. A escola é o local próprio para estimular o genuíno raciocínio matemático, que não deve estar limitado à resolução de uma lista de exercícios ou de um problema. É importante que o estudante perceba e seja capaz de fazer relações matemáticas entre os conteúdos aprendidos e dos conteúdos com situações do seu cotidiano.

Muitos conceitos matemáticos foram elaborados a partir da natureza. As noções de razão e proporção, por exemplo, podem ser vistas no próprio corpo humano, na disposição de galhos de árvores e nas pétalas das flores. Nesse texto, o termo natureza refere-se aos fenômenos do mundo físico e à vida em geral.

A curva conhecida como espiral está muito presente na natureza e por isso foi escolhida como protagonista da atividade que iremos desenvolver ao longo deste trabalho. Ela aparece, por exemplo, na forma como as pétalas estão dispostas em algumas flores, nas conchas, em chifres de animais, na cóclea do ouvido humano e nos furacões. De maneira geral, uma espiral pode ser descrita como sendo uma linha curva plana formada por um ponto móvel que gira em torno de um ponto central chamado polo, dele se afastando ou se aproximando segundo uma determinada lei. Tipos diferentes desta curva foram objetos de estudo de grandes matemáticos, dentre eles: Arquimedes de Siracura, Jacob Bernoulli, Pierre de Fermat e Roger Cotes, os quais descreveram matematicamente e também classificaram alguns tipos importantes de espiral,conforme suas principais características.

Um dos primeiros registros matemáticos de que se tem conhecimento sobre a espiral está no livro *Sobre Espirais,* de Arquimedes de Siracusa (287-212a.C.). Ao longo do desenvolvimento da matemática na história, outros tipos de espirais foram estudados, dentre elas destacam-se: a espiral logarítmica, de Fibonacci ou espiral de ouro, de Fermat, hiperbólica, de Lituus e clotóide.

Estabelecer relações entre as ciências da natureza e a matemática é necessário não só para os matemáticos, mas também para o cidadão poder entender e refletir a respeito do mundo no qual está inserido. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (2000, p.44) afirmam que:

> O critério central para elaboração do currículo é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.

O presente trabalho busca unir a matemática e as ciências da natureza focando no estudo da espiral logarítmica, a qual possui uma característica única: mantém a sua forma mediante mudanças de escala em torno do seu centro. É farta a presença deste tipo específico de espiral na natureza, assim o objetivo deste trabalho é levar à sala de aula uma proposta de atividade que se utiliza de um fenômeno natural para desenvolver os conceitos matemáticos inseridos no estudo da espiral logarítmica.

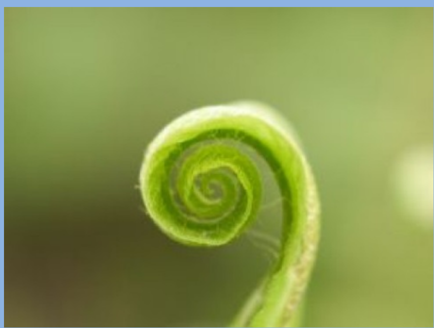
Para fornecer uma base teórica matemática e instrumentos que propiciem um ambiente em que o professor possa utilizá-lo em sala de aula, estruturamos o trabalho em capítulos que abordam os seguintes temas: a relação da espiral com a natureza, os conceitos teóricos da espiral logarítmica, uma proposta de atividade para sala de aula com uma ficha direcionada ao professor com as informações necessárias à aplicação, a descrição dos resultados da aplicação da atividade em duas turmas de Ensino Médio e por fim apresentamos um capítulo de considerações finais.

1. Espiral e a natureza

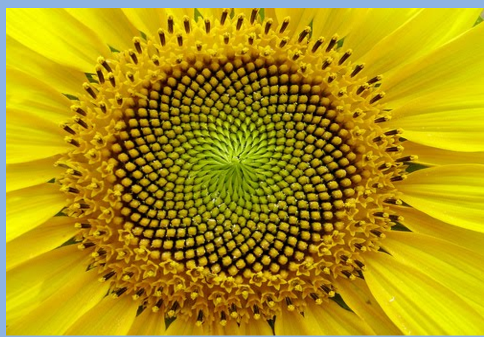
> “O estudo aprofundado da Natureza é a fonte mais fecunda das descobertas matemáticas”(Joseph Fourier).

A seguir temos a folha de uma espécie rara de samambaia originária da ilha do Havaí(figura a), o girassol(figura b),planta originária da América do Norte cultivada pelos povos indígenas para alimentação, a galáxia NCG 3344(figura c)descoberta em06 de Abrilde1785porWilliam Herschelee o caracol(figura d), molusco terrestre.

Diante desses elementos que compõem o mundo do qual fazemos parte, qual é a característica semelhante em todas as figuras?



(a)



(b)

(c)

(d)

fontes:http://br.freepik.com/fotos-gratis/espiral-samambaia_349863.htm
http://universoobservado.blogspot.com.br/2012_11_01_archive.html
http://jcnavegaluz.blogspot.com.br/2012/04/
http://gcn.net.br/noticia/218770/criancas/2013/08/o-caracol

Figura 1- a) Samambaia; b) Girassol; c) Galáxia NCG 3344; d) Caracol

É fácil observar que em todas elas há uma forma predominante de curva a qual recebe o nome de espiral, de fato a palavra espiral origina do grego *speîra* que significa enrolamento. O dicionário Aurélio da língua portuguesa (2000, p. 289) diz que espiral é *uma curva plana gerada por um ponto móvel que gira em torno de um ponto fixo, ao mesmo tempo que dele se afasta ou aproxima segundo uma determinada lei.*

Nos dias de hoje é muito comum recorrermos à Internet quando desejamos alguma informação sobre algo, ao digitar a palavra espiral no site de pesquisas *Google*, em apenas 0,38 segundos, 21.500.000 resultados são encontrados. É impressionante a quantidade de sites disponibilizados em uma fração de segundo.

Poderíamos pensar que com tanta informação disponível sobre esse tópico sua compreensão seria fácil, porém o que é observado em sala de aula não é isto. Ao apresentar uma tarefa individual de pesquisa livre aos alunos da 2ª série do Ensino Médio do Instituto Braga Carneiro, colégio particular localizado na Barra da Tijuca, sobre a relação entre espiral logarítmica e a progressão geométrica, sem mencionar o fato de que ao entregar o produto da pesquisa seria necessária uma apresentação oral do mesmo, constatamos que somente metade dos trabalhos escritos atendeu ao tema proposto, e dentre estes apenas um quarto conseguiu fazer a apresentação oral de suas pesquisas. Analisando o panorama geral da turma podemos perceber que apenas 12,5% dos alunos realmente pesquisaram, leram e refletiram sobre o tema, buscando colocar no papel aquilo que entenderam.

De posse dessas informações observamos que a maioria dos alunos sequer consegue expor, a partir do seu pensamento, uma definição aproximada daquela dada pelo dicionário a respeito da espiral. Atribuímos isto ao fato de que simplesmente captaram a informação e a puseram em uma folha de papel com seus respectivos nomes, e a entregaram ao professor.

Assim fica latente a ideia de que informação não necessariamente implica em conhecimento. O que temos atualmente são alunos com acesso à informação, porém com uma baixa capacidade de reflexão e de construção do conhecimento, habilidades essenciais para o seu desenvolvimento.

Esta situação constatada é tratada com destaque pelos PCNEM (2000, p.40):

> À medida que vamos nos integrando ao que se denomina uma sociedade da informação crescentemente globalizada, é importante que a Educação se volte para o desenvolvimento das capacidades de comunicação, de resolver problemas, de tomar decisões, de fazer inferências, de criar, de aperfeiçoar conhecimentos e valores, de trabalhar cooperativamente.

Apesar de sua beleza, a espiral quando vista de forma matemática causa reações adversas. Por exemplo, durante o desenvolvimento deste trabalho, ao publicar a foto de uma espiral em minha página pessoal da rede de relacionamentos *Facebook* fui surpreendido com comentários do tipo: “que medo” e “odeio isto”. Tal experiência também serviu de motivação para o desenvolvimento deste trabalho.

Fonte: https://www.facebook.com/photo.php?fbid=755049271260001&set=a.514874961944101.1073741829.100002648062938&type=1&theater

Figura 2- Publicação do Facebook

Uma infinidade de espirais podem ser construídas, entretanto alguns tipos específicos de espirais são mais importantes, seja por suas aplicações em áreas como engenharia e arquitetura, seja por sua presença na natureza. Vejamos alguns exemplos.

Os sulcos de gravação do disco de vinil formam uma espiral, de fato por serem igualmente espaçados eles permitem acomodar na área do disco um maior tempo de gravação.

(a) (b)

fontes:http://pt.wikipedia.org/wiki/Disco_de_vinilhttp://www.uel.br/projetos/matessencial/alegria/fibonacci/seqfib2.htm

Figura 3: a) Disco de vinil; b) Filotaxia

Na Microbiologia pode-se mensurar a concentração bacteriana por meio de uma placa cujo formato segue o padrão de uma espiral.O crescimento das folhas ao longo do caule das plantas se dá por meio de uma espiral, tal padrão de distribuição é chamado de filotaxia.

(a) (b)

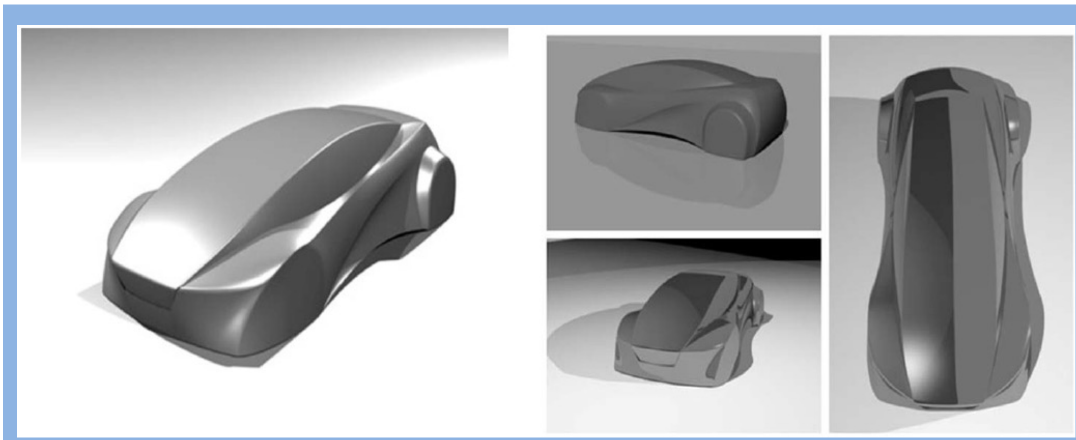
fontes:http://www.jupenoma.es/gauss/materiales_didacticos/eso/comentarios/geometria/figuras_curvas/curvas_enrolladas/soluciones.html
http://www.gayot.com/blog/phi-bar-hotel-indigo-san-diego/img_21831/

Figura 4: a) Ciclone; b) Concha do Nautilus

Imagens meteorológicas nos mostram que os sistemas de baixa pressão ou ciclones possuem formato de uma espiral onde o vento converge para o centro.

O *Nautilus*, que é um cefalópode marinho arcaico, possui uma concha formada por uma série de câmaras separadas que formam uma espiral. O animal ocupa a última câmara e as outras são cheias de gás. Na natureza tal forma ainda aparece na flor do girassol e no fruto da pinha.

Na engenharia automotiva a espiral é utilizada na projeção aerodinâmica. Carros construídos com design inspirado em curvas retiradas de uma espiral permitem melhor fluidez do ar através de seu corpo, acarretando em maior estabilidade e ganho de velocidade.



fonte: On the variety of planar spirals and their applications in computer aided design

Figura 5: Design de carro

Como podemos constatar a forma espiral está presente em diversas formas na natureza e algumas importantes aplicações tecnológicas se valem do formato dessa curva. Infelizmente, na maioria das vezes, esses fatos escapam da observação das pessoas em geral. Neste trabalho, além de apresentarmos um estudo matemático dessa curva, iremos propor uma atividade para ser desenvolvida em sala de aula tendo como objetivo despertar o interesse do estudante pelo assunto, evidenciando a relação entre a Matemática e a Natureza que nos cerca.

2. Espiral Logarítmica

"A Matemática não é apenas outra linguagem: é uma linguagem mais o raciocínio; é uma linguagem mais a lógica; é um instrumento para raciocinar." (Feynman, 1989)

Neste capítulo além de descrever matematicamente a curva denominada espiral, abordaremos alguns aspectos históricos relacionados ao seu desenvolvimento. Chamamos atenção que nosso foco será a espiral logarítmica, uma vez que é ela que aparece em diversas partes da natureza.

Para que se possa descrever matematicamente uma espiral de maneira mais simples se faz necessário expressar a posição de um ponto em um plano de maneira diferente da já conhecida forma cartesiana. Esta outra forma de nomear pontos no plano constitui um sistema de coordenadas conhecido como Polar, vejamos como funciona este outro sistema.

2.1. Coordenadas Polares

Considera-se um plano sem qualquer sistema de coordenadas, escolhemos um ponto O deste plano e a partir dele uma semirreta $\overrightarrow{OA}$, onde A é outro ponto qualquer diferente de O.

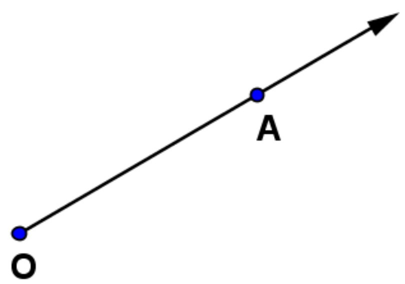


Figura 6: Semirreta $\overrightarrow{OA}$

Seja P um ponto do plano distinto de O. Considera-seρ a distância de O a P e θ o ângulo formado entre as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OP}$. Pode-se determinar a posição do ponto P em relação ao ponto O e à semirreta $\overrightarrow{OA}$, levando em consideração somente os valores de $\rho e \theta$.

Com apenas estes elementos básicos construímos um sistema de coordenados polares conforme pode ser visto abaixo:

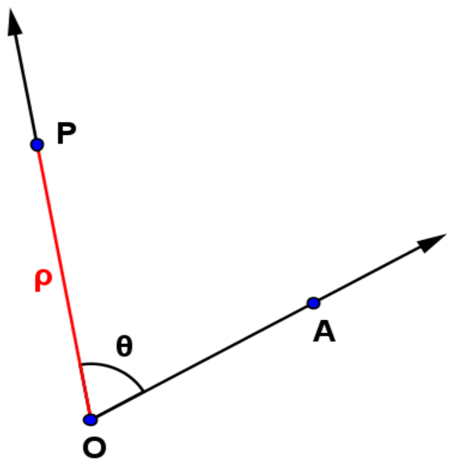


Figura 7: Sistema de coordenadas polares

Definição (Coordenadas Polares) *Um sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$ no plano consiste de um ponto O, chamado de* ***polo****, de uma semirreta $\overrightarrow{OA}$, com origem em O, chamada de* ***eixo polar,*** *e de uma unidade de comprimento para medir a distância* $\boldsymbol{\rho}$ *do ponto O a um ponto P qualquer do plano.*

Dado um ponto P do plano, suas coordenadas nesse sistema são os valores de ρ e θ, sendo ρ a distância de O a P e θ a medida do ângulo entre o eixo polar e a semirreta $\overrightarrow{OP}$. Usualmente a notação $P = (\rho\,, \theta)$ é utilizada para representar as coordenadas polares do ponto P.

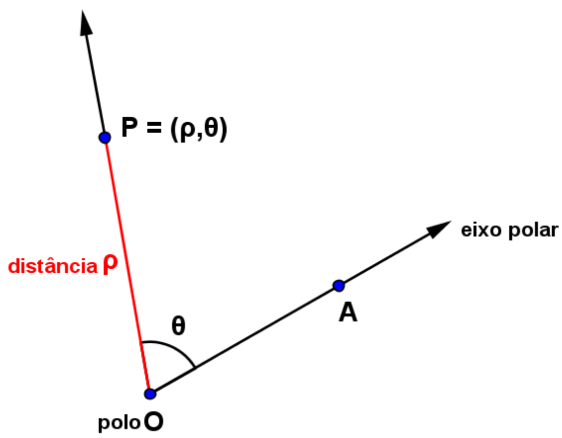


Figura 8: Ponto P em coordenadas polares

A partir da definição dada seguem as seguintes observações:

- A primeira coordenada polar ρ de um ponto distinto do polo é sempre maior que zero, pois representa a distância do ponto ao polo.
- Se a primeira coordenada polar de um ponto é zero então esse ponto é o polo. Neste caso, o ângulo do polo não está definido.
- De acordo com a construção anterior, as medidas θ e $\theta + 2k\pi$ estão associadas ao mesmo ângulo, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, as coordenadas polares (ρ, θ) e $(\rho, \theta + 2k\pi)$ representam o mesmo ponto no plano.

Após conhecer o sistema de coordenadas polares e como ele funciona, sabemos que a partir de um ponto qualquer do plano e a partir de um eixo polar pode-se estabelecer um sistema de coordenadas polares. Como as possibilidades são infinitas, e isto pode atrapalhar a exploração dos conceitos, vamos estabelecer um sistema de coordenadas polares padrão baseado no sistema de coordenadas cartesianas.

Seja $O\rho\theta$ um sistema de coordenadas polares. A partir dele pode-se construir um sistema cartesiano ortogonal OXY de maneira que o eixo polar seja o semieixo OX e o eixo OY seja obtido rotacionando OX de 90° no sentido anti-horário. Admitindo-se a mesma unidade de medida para ambos os sistemas, seja P um ponto no plano, distinto do polo O, sendo representado pelas coordenadas $P = (\rho, \theta)$ no sistema $O\rho\theta$e $P = (x, y)$ no sistema OXY, temos:

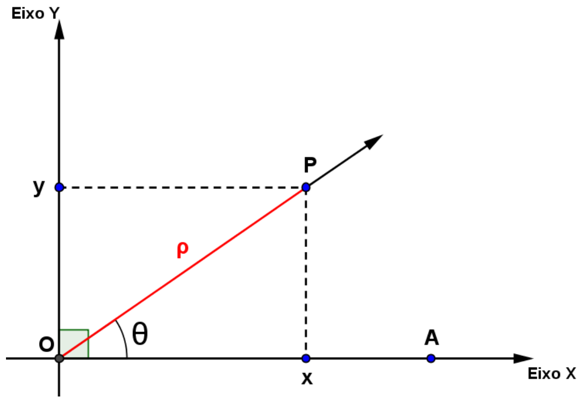


Figura 9: Sistema cartesiano ortogonal OXY

Vejamos agora como podemos estabelecer uma relação entre as coordenadas (ρ, θ) e (x, y). Para isto traçamos por P retas r e s perpendiculares aos eixos OX e OY, respectivamente. Seja$P_1 = (x, 0)$ o ponto onde r intersecta o eixo OX e $P_2 = (0, y)$ o ponto onde s intersecta o eixo OY. Então no triângulo retângulo OP_1P, a medida de $\overline{OP_1} = x$ é o comprimento do lado adjacente ao ângulo θ e $\overline{OP_2} = y$ é o comprimento do lado oposto ao ângulo θ.

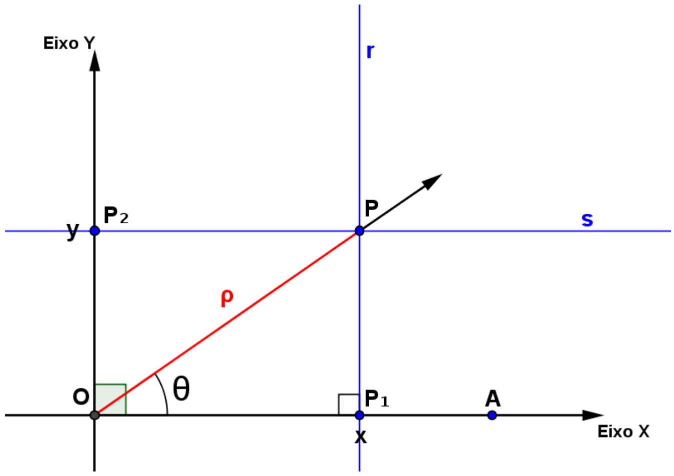


Figura 10: relação entre as coordenadas (ρ,θ) e (x,y)

Assim utilizando a trigonometria no triângulo retângulo, temos:

$$x = \rho \cos \theta e y = \rho \operatorname{sen} \theta$$

Matematicamente uma espiral pode ser compreendida como sendo uma curva plana que gira em torno de um ponto central (polo), se afastando ou se aproximando desse ponto segundo uma determinada lei. Por isso, uma espiral plana pode ser melhor descrita por meio de coordenadas polares, onde o raio será uma função contínua e monótona do ângulo de rotação.

Com essas ferramentas em mãos pode-se então adentrar no campo das curvas conhecidas como espirais, em especial a Logarítmica que é o foco principal deste trabalho. Entretanto, antes de definirmos o caso em questão, iremos descrever matematicamente um caso mais simples, que é a Espiral de Arquimedes.

Foi a partir da Espiral de Arquimedes que a espiral logarítmica foi estudada e caracterizada, vejamos então de forma resumida como Arquimedes descreveu as propriedades geométricas da espiral.

2.2. Espiral de Arquimedes

Definição (espiral de Arquimedes): *Num sistema de coordenadas polares $O\rho\theta$, a espiral de Arquimedes é o lugar geométrico dos pontos $P = (\rho, \theta)$ do plano, nos quais a distância ρ ao polo O (raio polar) é um múltiplo fixo do ângulo polar θ (ângulo do eixo polar para OP).*

A partir da definição acima nota-se que o ponto$P$ pertence à espiral se, e somente se, suas coordenadas ρ e θ satisfazem a equação$\rho = a \cdot \theta$, onde a representa uma constante real.

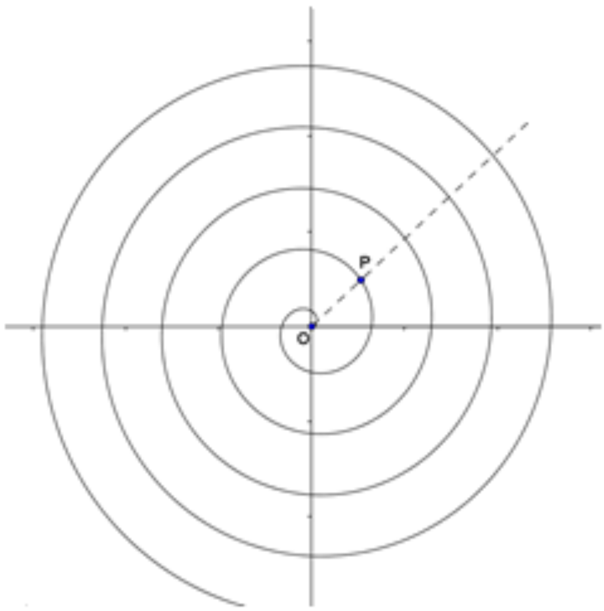


Figura 11–Espiral de Arquimedes

Vamos entender isto! Sabemos que uma espiral é uma curva plana que surge como resultado do movimento de um ponto afastando-se de um centro, combinado com uma rotação em torno do referido centro. No caso da Espiral de Arquimedes como a velocidade de afastamento (v) e a velocidade de rotação (w)são constantes, sua razão $\frac{v}{w}$ também será constante e é esta razão constante que denotamos por a.

Substituindo ρ por $a \cdot \theta$, percebemos que os pontos do plano que darão forma a esta espiral obedecem a lei $P = (a \cdot \theta , \theta)$, ou seja, como a é uma constante então ρ varia proporcionalmente ao ângulo polar θ e toda a espiral será definida em função apenas da variável θ.

Quando $\theta \in [0, +\infty]$ então a espiral gira em sentido anti-horário e quando $\theta \in [-\infty, 0]$ a espiral gira em sentido horário.

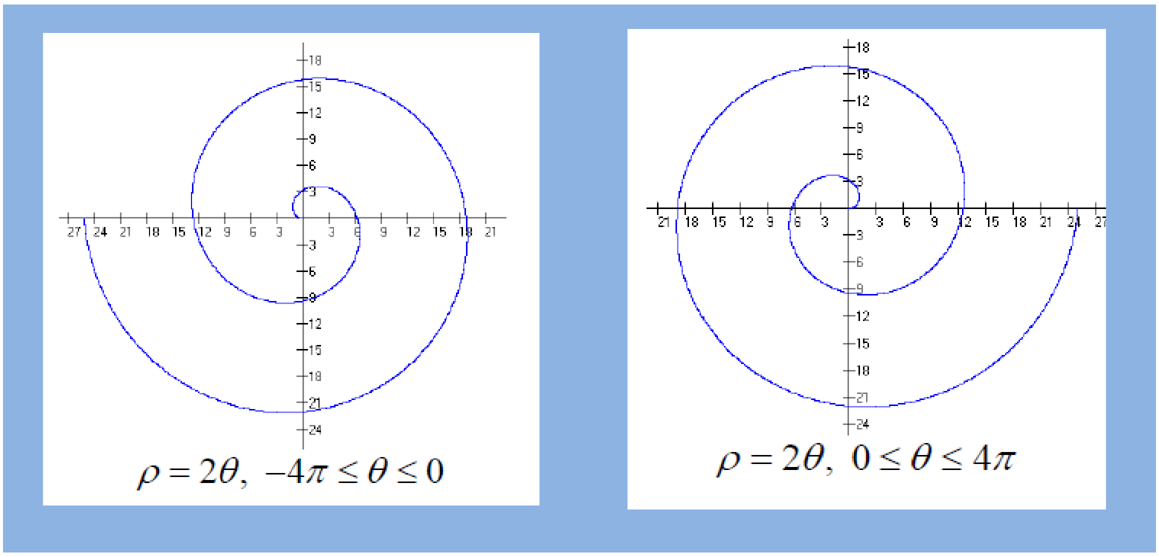


Figura 12: Exemplos de espiral de Arquimedes, com ρ = 2θ

Podemos extrair algumas implicações geométricas a respeito desta espiral. Porém, antes disso, precisamos estabelecer a noção de pontos consecutivos numa espiral qualquer. Dados três pontos $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$,$P_2 = (\rho_2,\theta_2)$ e$P_3 = (\rho_3,\theta_3)$ eles são considerados consecutivos se existe um ângulo α tal que

$$\theta_2 = \theta_1 + \alpha \text{e} \theta_3 = \theta_2 + \alpha.$$

Consideremos então três pontos consecutivos distribuídos ao longo de uma espiral de Arquimedes conforme a figura a seguir.

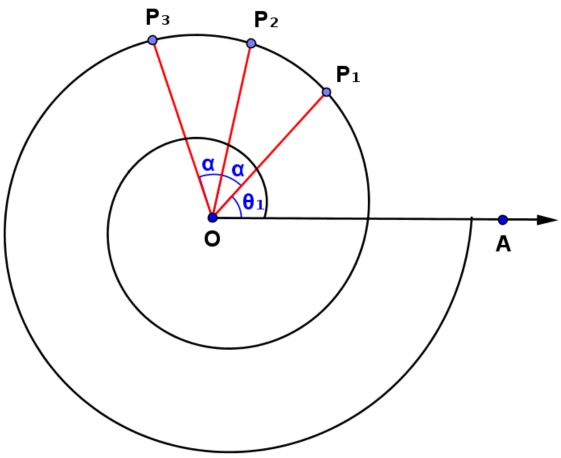


Figura 13: Pontos consecutivos na espiral de Arquimedes

Segundo a equação que descreve a Espiral de Arquimedes temos que:

$$\rho_1 = a\theta_1, \rho_2 = a\theta_1 + a\alpha \text{ e } \rho_3 = a\theta_1 + 2a\alpha.$$

Note que $\rho_1 + \rho_3 = 2a(\theta_1 + \alpha)$, e como $\rho_2 = a\theta_1 + a\alpha$, concluímos que $\rho_2 = \frac{\rho_1 + \rho_3}{2}$.

Ou seja, *o raio ρ_2 é a média aritmética dos raios adjacentes ρ_1 e ρ_3*.

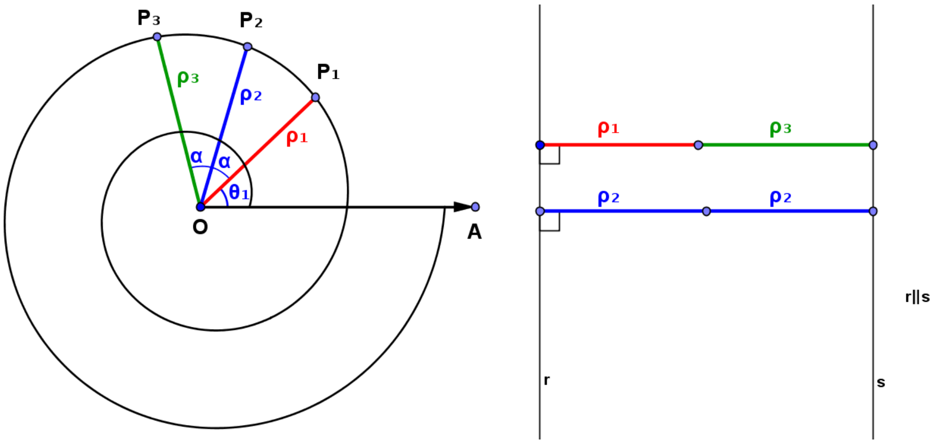


Figura 14: Relação geométrica entre os raios consecutivos de uma espiral de Arquimedes

Visto estas considerações iniciais podemos agora entender de forma matemática a espiral logarítmica. Tal espiral foi o mais importante objeto de estudo do matemático suíço Jacob Bernoulli (1654-1705), que descobriu que este tipo de espiral possui a propriedade de manter a sua forma perante rotações ou mudanças de escala em torno do seu centro.

Bernoulli considerava esta espiral tão maravilhosa que chegou a denomina-la *spiramirabilis*. Talvez um dos motivos do encantamento causado pela espiral logarítmica resida no fato de que sua forma se apresenta em vários fenômenos da natureza.

2.3. Espiral logarítmica

Definição (espiral logarítmica): *A espiral logarítmica é uma curva dada no sistema de coordenadas polares* $O\rho\theta$,*cuja reta tangente em cada ponto P faz um ângulo constante com a reta que passa por P e pelo polo*O.

Tomando um plano dividido em partes iguais a partir do polo O, podemos construir uma espiral logarítmica da seguinte forma.

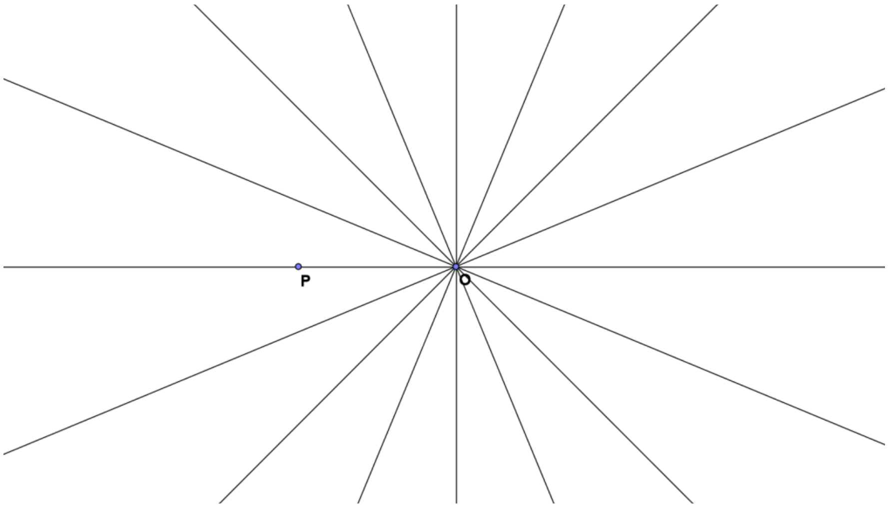


Figura 15: Plano dividido em partes iguais

Seja P um ponto deste plano pertencente a um dos raios, traçamos a partir dele uma reta perpendicular ao raio polar ρ passando por P, obtemos assim o ponto P_1 no raio seguinte ρ_1e traçando a reta perpendicular a este raio passando por P_1obtemos o ângulo αformado entre estas duas retas.

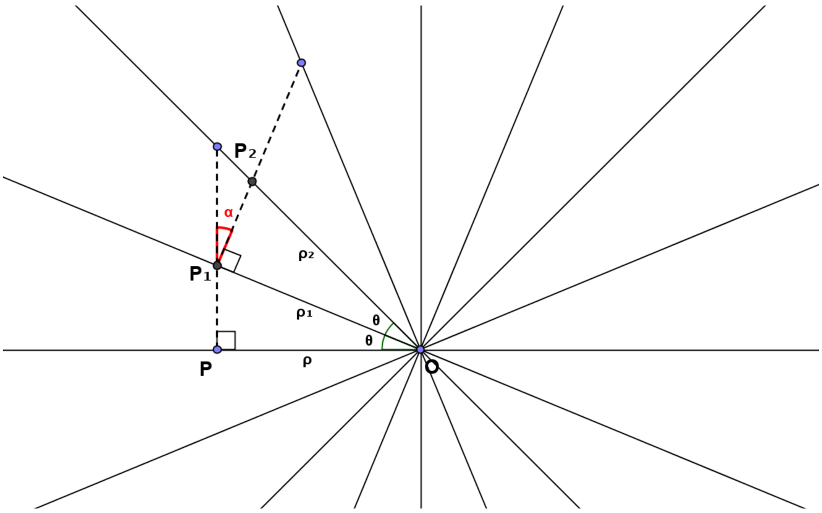


Figura 16: Definição de pontos e raios

Repetindo este processo para todos os pontos formados pela intersecção entre as retas perpendiculares e o próximo raio, formamos a espiral logarítmica. Observe que por construção todos os ângulos formados entre as perpendiculares são iguais a α, o que está de acordo com a definição da espiral logarítmica. Por este motivo esta espiral é conhecida como espiral equiangular.

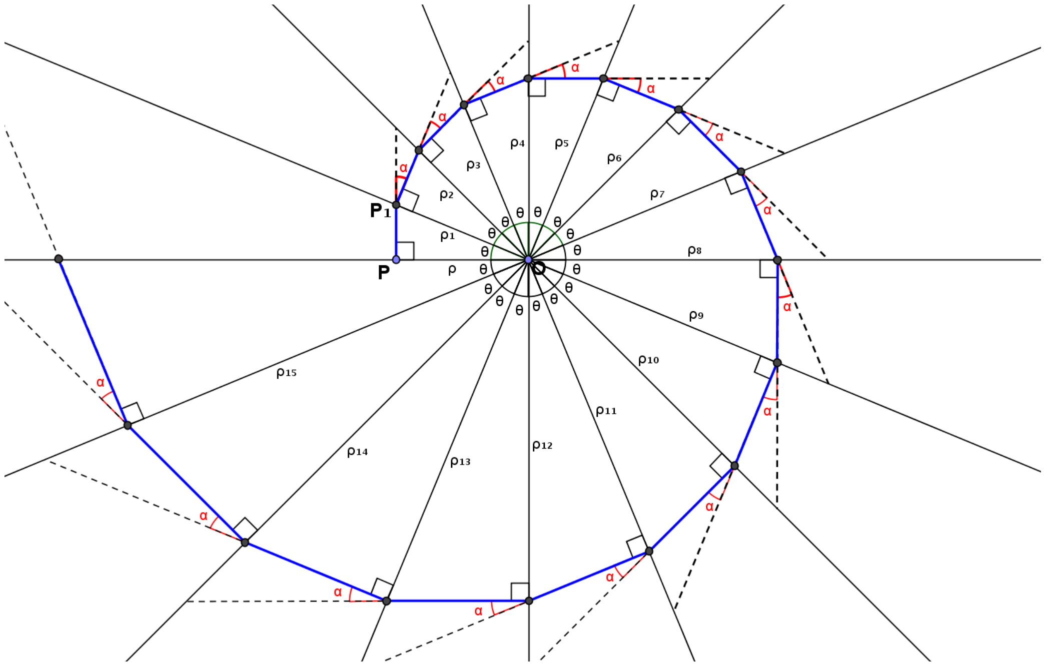


Figura 17: Construção da espiral logarítmica

Além deste, também recebe o nome de espiral geométrica. Isto por que o raio polar cresce em progressão geométrica. Na figura, temos uma sequência de triângulos retângulos em que a hipotenusa de cada triângulo é o próximo raio polar da espiral desenhada. Como os ângulos entre os raios são iguais a θ, utilizando relações trigonométricas, pode-se dizer que:

$$\cos\theta = \frac{\rho}{\rho_1} \therefore \rho_1 = \rho \cdot \frac{1}{\cos\theta}$$

Assim,

$$\rho_2 = \rho_1 \cdot \frac{1}{cos\,\theta} \therefore \rho_2 = \rho \cdot \frac{1}{\cos\theta} \cdot \frac{1}{cos\,\theta} \therefore \rho_2 = \rho \cdot \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2$$

Procedendo com esse raciocínio, sucessivamente, obtemos que

$$\rho_n = \rho \cdot \left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^n$$

Claramente formamos uma progressão geométrica entre os raios polares, entretanto neste caso do exemplo temos raios polares fixos, pois os ângulos que os separa são iguais. Sendo assim Jacob Bernoulli elaborou uma equação polar em quea velocidade de afastamento (v) e a velocidade de rotação (w), juntamente com a variação do ângulo polar, crescem de forma exponencial.

Portanto, a espiral logarítmica plana de centro no ponto O é o lugar geométrico de todos os pontos $P = (\rho, \theta)$que obedecem a equação $\rho = e^{a\theta}$, onde θ varia no conjunto dos números reais e a é uma constante não negativa que representa o fator de crescimento. Aqui se pode observar claramente que o raio polar cresce exponencialmente em relação ao ângulo polar.

Além disso, utilizando as propriedades de logaritmos podemos reescrever a equação acima da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\rho &= e^{a\theta}\\ \ln\rho &= \ln e^{a\theta}\\ \ln\rho &= a\theta\ln e\\ \ln\rho &= a\theta\\ \theta &= \frac{1}{a}\ln\rho\end{aligned}$$

Esta é equação a qual se deve o seu nome, espiral logarítmica, e sua caracterização geométrica se dá exatamente a partir desta representação na forma logarítmica. Consideremos três pontos consecutivos $P_1 = (\rho_1, \theta_1)$,$P_2 = (\rho_2, \theta_2)$ e$P_3 = (\rho_3, \theta_3)$, onde $\theta_2 = \theta_1 + \alpha$ e $\theta_3 = \theta_2 + \alpha = (\theta_1 + \alpha) + \alpha = \theta_1 + 2\alpha$ sobre a espiral.

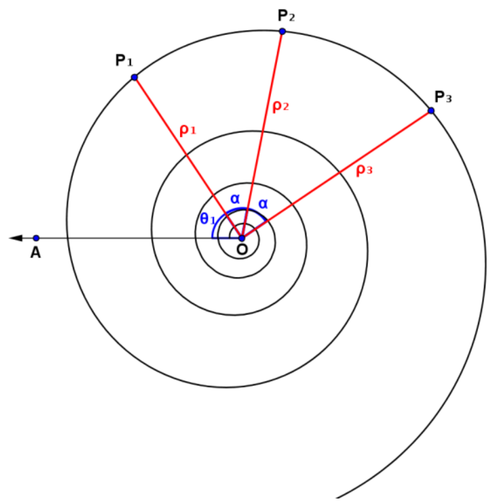


Figura 18: Raios consecutivos da espiral logarítmica

Assim os raios consecutivos formados por estes pontos são escritos da seguinte forma:

$$\rho_1 = e^{a\theta_1}$$

$$\rho_2 = e^{a\theta_2} \therefore \rho_2 = e^{a(\theta_1+\alpha)} \therefore \rho_2 = e^{a\theta_1+a\alpha} \therefore \rho_2 = e^{a\theta_1}\cdot e^{a\alpha}$$

$$\rho_3 = e^{a\theta_3} \therefore \rho_3 = e^{a(\theta_1+2\alpha)} \therefore \rho_3 = e^{a\theta_1+2a\alpha} \therefore \rho_3 = e^{a\theta_1}\cdot e^{2a\alpha} \therefore \rho_3 = e^{a\theta_1}\cdot (e^{a\alpha})^2$$

Continuando com esse processo obtemos, $\rho_n = e^{a\theta_1}\cdot (e^{a\alpha})^{n-1}$.

O que nos mostra que as equações que definem os raios consecutivos de uma espiral logarítmica formam uma progressão geométrica de razão $q = e^{a\alpha}$.

Agora, com o intuito de obter uma relação entre os raios consecutivos, vamos eliminar a razão q fazendo o produto entre os raios ρ_1 e ρ_3,

$$\rho_1 \cdot \rho_3 = e^{a\theta_1} \cdot e^{a\theta_1} \cdot (e^{a\alpha})^2$$

$$\rho_1 \cdot \rho_3 = \left(e^{a\theta_1}\right)^2 \cdot (e^{a\alpha})^2$$

$$\rho_1 \cdot \rho_3 = \left(e^{a\theta_1} \cdot e^{a\alpha}\right)^2,$$

tomando o logaritmo natural de ambos os lados da última igualdade obtemos

$$\ln(\rho_1 \cdot \rho_3) = \ln\left(e^{a\theta_1} \cdot e^{a\alpha}\right)^2$$

$$\ln(\rho_1 \cdot \rho_3) = 2\ln\left(e^{a\theta_1} \cdot e^{a\alpha}\right).$$

Lembrando que $\ln \rho_2 = \ln\left(e^{a\theta_1} \cdot e^{a\alpha}\right)$ segue que

$$\ln(\rho_1 \cdot \rho_3) = 2\ln \rho_2$$

$$\ln \rho_1 + \ln \rho_3 = 2\ln \rho_2,$$

ou seja,

$$\ln \rho_2 = \frac{\ln \rho_1 + \ln \rho_3}{2}$$

Acabamos portanto de verificar o seguinte: *os raios ρ_1, ρ_2 e ρ_3 são considerados raios consecutivos numa espiral logarítmica se, e somente se, o logaritmo natural do raio ρ_2 é a média aritmética dos logaritmos naturais dos raios adjacentes ρ_1 e ρ_3, isto é, $ln\, \rho_2 = \frac{ln\, \rho_1 + ln\, \rho_3}{2}$.*

Utilizando as propriedades de logaritmo obtemos

$$\ln \rho_2 = \frac{\ln \rho_1 + \ln \rho_3}{2} = \frac{1}{2}\ln(\rho_1\, \rho_3) = \ln(\rho_1\, \rho_3)^{1/2} = \ln\sqrt{\rho_1\, \rho_3},$$

isto é,

$$\rho_2 = \sqrt{\rho_1 \rho_3}$$

Esta identidade nos diz que o raio polar ρ_2 é a média geométrica dos raios polares ρ_1 e ρ_3.

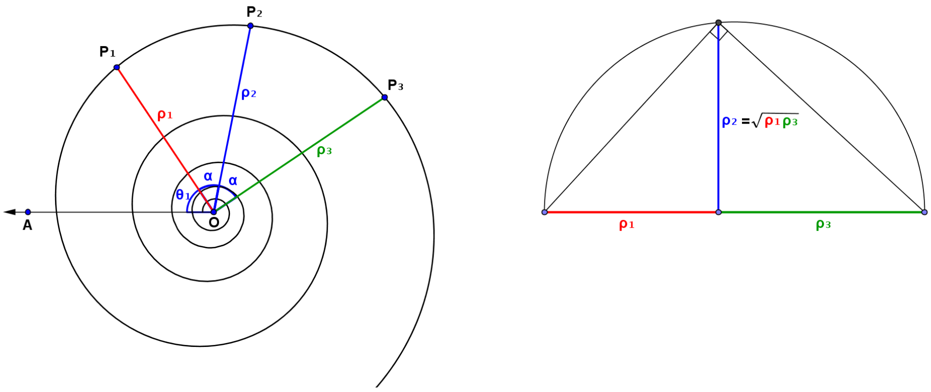


Figura 19: Relação geométrica dos raios da espiral logarítmica

3. Proposta de Atividade

Neste capítulo iremos propor uma atividade para o estudo da espiral logarítmica. Este assunto foi escolhido pois possibilita explorar os temas de logaritmos e progressão geométrica a partir da natureza. Para isto foi elaborada uma ficha de atividade (Anexo I), que é o objeto de trabalho dos alunos. Tal ficha conduz a atividade indicando tarefas a serem realizadas e é o local para exposição das ideias e cálculos referentes à atividade. Além disto, também foi elaborada uma ficha do professor (Anexo II), material que serve como sugestão de introdução da atividade e fornece algumas orientações para a aplicação da mesma. Sugerimos uma leitura preliminar destas fichas para que haja um melhor entendimento do que será tratado adiante.

A seguir apresentaremos uma descrição sintética da atividade proposta, expondo também seus objetivos, o ano de escolaridade destinado, o tempo previsto, pré-requisitos e os recursos necessários para a sua realização. Apresentamos também uma descrição a respeito da ficha do professor com algumas informações que julgamos pertinentes para apoiar a introdução sugerida e as orientações de aplicação da atividade.

3.1. Objetivos

Observar que em uma espiral logarítmica os raios consecutivos, digamos R_1, R_2 e R_3 satisfazem a relaçãoln $R_2 = \frac{\ln R_1 + \ln R_3}{2}$.

Trabalhar os conceitos básicos de progressões geométricas para concluir que $R_n = R_1 \cdot q^{n-1}$.

Analisaras construções geométricas feitas sobre um modelo de uma espiral logarítmica fornecido.

3.2. Organização da turma

A proposta é que esta atividade seja realizada em grupos de quatro ou cinco alunos para permitir a troca de informações e a discussão entre eles, entretanto não excluímos a possibilidade de aplicação da atividade de maneira individual ou em dupla.

3.3. Descrição da Atividade

Cada grupo receberá uma ficha de atividade contendo como peça principal uma figura da concha do Nautilus com a espiral logarítmica destacada. Colocamos a figura no início, pois nela serão feitas algumas construções geométricas que demandam algum espaço livre, ela é também utilizada como fonte de informações para a realização de todos os itens.

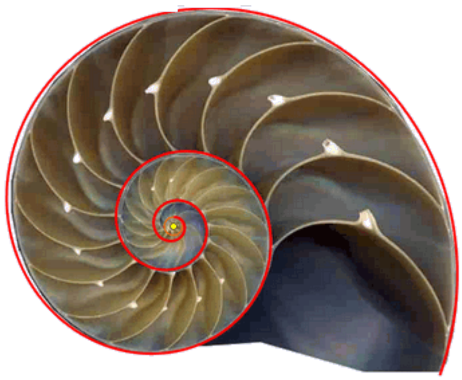


Figura 20: Concha do Nautilus com desenho da espiral

A atividade é composta por onze itens, todos compilados em uma única lista, porém há uma subdivisão implícita em duas partes. Basicamente os itens de 1 a 7 têm como objetivo a busca da relação entre três raios consecutivos e os itens de 8 a 11 objetivam encontrar a medida de um raio consecutivo qualquer a partir de um primeiro.

Os itens de 1 a 2 da ficha de atividade solicitam que os alunos preencham a tabela 1mostrada na figura 21, determinando assim a medida do ângulo **α**, em graus, para que possam fazer a construção de raios consecutivos na ilustração da concha do Nautilus.

Ângulo	Medida (em graus)
α	

Figura 21: Ilustração da tabela 1

Nos itens 3 a 5 é pedido o cálculo dos logaritmos naturais das medidas dos raios consecutivos e as médias entre logaritmos de raios alternados, estes cálculos devem ser feitos com o auxílio de uma calculadora científica.A figura 22 mostra as tabelas 2 e 3 que pertencem aos itens citados da ficha de atividade, estas tabelas auxiliam na organização das informações colhidas.

Raio	Medida (cm)	$\ln R_n$
R_1		
R_2		
R_3		
R_4		
R_5		

Média aritmética	Valor
$\frac{\ln R_1 + \ln R_3}{2}$	
$\frac{\ln R_2 + \ln R_4}{2}$	
$\frac{\ln R_3 + \ln R_5}{2}$	

Figura 22: Ilustração das tabelas 2 e 3

Nos itens 6 e 7, solicitamos que os alunos analisem as informações dos itens anteriores e discutam entre si a fim de chegar a uma conclusão sobre a relação matemática existente entre os raios consecutivos. É desejável que eles descrevam tal relação por meio de uma expressão matemática. Esperamos que neste ponto eles alcancem a ideia de que, tomando três raios consecutivos, o logaritmo da medida do raio intermediário é igual à média dos logaritmos das medidas dos raios extremos.

No item 8, pedimos o preenchimento da tabela 4 da ficha de atividade com o valor da razão entre raios consecutivos, a figura 23 ilustra esta tabela em que os resultados encontrados devem ser apontados apenas até a primeira casa decimal.

Razão	Valor
$\frac{R_2}{R_1}$	
$\frac{R_3}{R_2}$	
$\frac{R_4}{R_3}$	
$\frac{R_5}{R_4}$	

Figura 23: Ilustração da tabela 4

Em seguida, no item 9, solicitamos que os alunos descubram, apenas com cálculos, a medida de um raio consecutivo aos raios construídos na figura. O item 10 tem por objetivo propiciar uma reflexão a respeito do que eles acabaram de executar no item anterior associando com os conhecimentos adquiridos ao longo da sua formação, isto irá contribuir para o êxito do próximo item. Por fim, no item 11,pedimos que elaborem uma fórmula que permita calcular a medida de um raio consecutivo qualquer a partir de um raio escolhido. Nestes itens finais esperamos que os alunos associem as razões entre os raios consecutivos da tabela do item 8 com a razão q entre os termos de uma progressão geométrica, e assim utilizando o conceito de termo geral de uma progressão geométrica elaborem uma fórmula para o cálculo da medida de um raio consecutivo qualquer.

3.4. Ano de Escolaridade indicado

Esta atividade pode ser aplicada para estudantes de 1^ae 2^a séries do Ensino Médio que já tenham estudado progressões geométricas e logaritmo.

3.5. Tempo Previsto

O tempo previsto para a realização dessa atividade é de duas aulas de 50 minutos cada, ou seja, um total de 1h 40min.

3.6. Pré-requisitos

Para a realização dessa atividade é importante que os alunos saibam a definição de logaritmo, isto é,$log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$, com a e b reais e positivos e $a \neq 1$. Tenham conhecimento do logaritmo natural (ou neperiano), recurso utilizado para o cálculo de logaritmos nas calculadoras científicas. Conheçam a expressão do termo geral de uma progressão geométrica, ou seja,$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, sendo a_1 o primeiro termo da sequência e q a razão da progressão. É necessário também saber calcular a média aritmética entre duas grandezas, digamos a e b, dada por$M = \frac{a+b}{2}$.

3.7. Recursos Necessários

A fim de que a atividade seja realizada com sucesso são necessários os seguintes recursos:

- Ficha de atividade contendo a ilustração da espiral logarítmica e os itens do questionário;
- Lápis ou caneta;
- Régua milimetrada;
- Transferidor;
- Calculadora científica;
- Projetor de multimídia;

- Arquivo da introdução[1] (Apresentação da introdução a ser projetada, por ocasião desse trabalho foi utilizado o aplicativo Power Point);
- Acesso a Internet, para exposição dos vídeos recomendados;
- Caneta para quadro branco e apagador.

3.8. Descrição da Ficha do Professor

Antes de dividir a turma em grupos e distribuir a ficha de atividade, sugerimos que seja feita uma introdução seguindo o roteiro colocado na ficha do professor (Anexo II).A seguir faremos uma descrição dos passos desse roteiro e tecemos alguns comentários oriundos da aplicação da atividade em duas turmas da 2ª série do Ensino Médio.

Dividimos a introdução em seis momentos, a saber:

1) Apresentação de imagens da natureza em que a espiral aparece, para que o aluno possa perceber que a espiral logarítmica está presente na natureza. É interessante que seja questionado à turma sobre que padrão eles estão reconhecendo em todas as fotos e que fenômeno é este.

2) Fazer uma apresentação geométrica da construção de uma espiral em coordenadas polares. Para isso sugerimos utilizar o arquivo disponível no link: http://tube.geogebra.org/student/m86373.Mostrar com clareza que a espiral é construída a partir do deslocamento de um ponto sobre um segmento de reta que é rotacionado, isto é fácil ver com a projeção da animação proposta.

3) Introduzir os conceitos básicos a respeito da espiral em coordenadas polares, tais como: polo, ponto, raio, ângulo, raios consecutivos e lei de formação. Estes conceitos são fundamentais para a execução das construções geométricas a serem feitas pelos alunos na ilustração da espiral logarítmica contida na ficha da atividade, o professor pode explaná-los a partir da projeção da figura 24 contida na ficha do professor.

[1]Sugestão de apresentação da introdução disponível em: https://drive.google.com/open?id=0BzVMLVZc51mITGFMVHN2QVZmYzA

1) A origem da espiral é chamada de **polo**, sendo representado pela letra O;

2) **Raio** é o segmento de reta formado entre um ponto P pertencente à espiral e o polo O;

3) Três pontos $P1$, $P2$ e $P3$ são **pontos consecutivos** de uma espiral se os ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ entre os raios determinados pelos pontos P1, P2 e P3 e o polo possuírem a mesma medida.

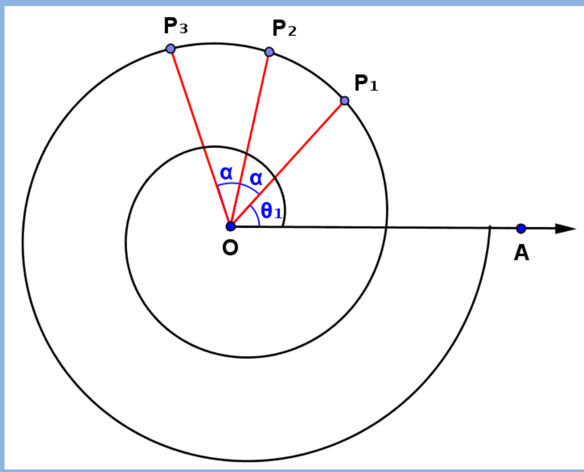


Figura 24: Conceitos básicos da espiral

4) Apresentação do vídeo Espiral Logarítmica. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=KUSCxBIXm-c. Este vídeo é sugerido pois neste momento os alunos já possuem um entendimento dos conceitos básicos de uma espiral genérica. Inicia-se então o estudo da espiral logarítmica, o vídeo é bem rico em informações, inicia dando exemplos na natureza em que a espiral logarítmica está presente e em seguida faz uma explanação teórica das propriedades desta espiral.

5) Após o vídeo, orientamos o aplicador a fazer um breve comentário ratificando os conceitos apresentados nele. Nesse momento pode ser utilizada a ilustração da construção de raios consecutivos em uma espiral logarítmica contida na ficha do professor.

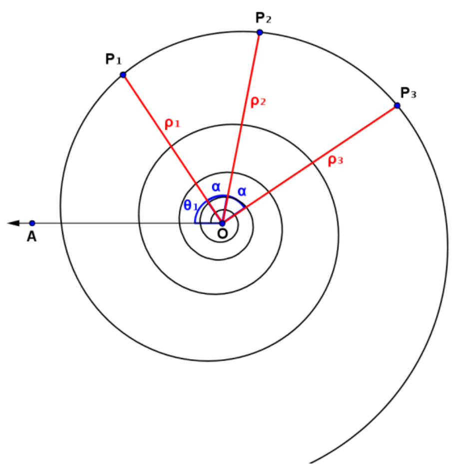


Figura 25: Espiral logarítmica

6) Em seguida, fazer a apresentação da concha de Nautilus presente na ficha do professor. Observamos que esta ilustração não possui o destaque do formato da

espiral, sugerimos um diálogo com a turma no sentido de eles identificarem este contorno na concha.

Figura 26: Concha do Nautilus

Feito isto, sugerimos que se passe para a ficha do aluno, a qual inicialmente solicita que os alunos escolham um ângulo θ qualquer e tracem raios consecutivos, em seguida façam as medições dos raios construídos por eles, organizando os dados em tabelas. É importante, para aumentar a qualidade da tarefa no que tange a generalização da relação entre os raios consecutivos, que os grupos escolham pontos de partida P e ângulos θ diferentes.

Nesse momento, é preciso ficar atento, pois em qualquer processo de medição podem ocorrer pequenas diferenças devido à imprecisão do instrumento ou ao próprio ato de medir.Além disso, nesse momento, é também preciso estar atento ao fato de os alunos, possivelmente, necessitarem recordar o conceito de logaritmo, bem como, ao fato de eles precisarem utilizar uma calculadora científica para determinar os logaritmos das medidas obtidas, neste ponto pode ser informado que existe um aplicativo em seus próprios aparelhos celulares que realiza o cálculo do logaritmo natural de um valor digitado. Além disto, orientamos a anotarem os valores encontrados até a segunda casa decimal, pois a intenção é minimizar erros nos cálculos solicitados no item 5 da ficha de atividade.

Após o cálculo das médias, é importante que o aplicador fique bem atento pois é um ponto que gera dúvidas nos alunos, sugerimos uma conversa com os grupos no sentido que eles observem os valores encontrados nas tabelas, estimulando os integrantes do grupo a analisarem e discutirem a respeito das igualdades nos dados obtidos, e também registrarem suas conclusões. Solicitamos a elaboração de um texto apontando as relações identificadas porque é salutar que os alunos desenvolvam a habilidade de expressar o fruto de suas ideias na forma escrita. Em seguida, pedimos que seja elaborada a expressão matemática objetivo da atividade, estimulando que os grupos façam a abstração daquilo que concluíram em suas análises para apresentar uma equação semelhante a $\ln \rho_2 = \frac{\ln \rho_1 + \ln \rho_3}{2}$.

Na segunda parte do questionário, solicitamos a utilização dos valores encontrados nas razões entre raios consecutivos somente até a primeira casa decimal para que, caso as medições estejam corretas, os grupos encontrem apenas um valor para todas as razões, isto tem o objetivo de trazer a ideia de razão entre termos de uma progressão geométrica. O aplicador deve ficar atento, pois a divergência de valores implicará na falta de percepção deste conceito e consequentemente no sucesso dos demais itens.

É importante estimular que os grupos montem a razão $\frac{R_6}{R_5}$ e a igualem ao valor encontrado nas razões solicitadas na tabela para que possam encontrar o valor da medida de R_6 sem construí-lo geometricamente. Por fim, deve-se conduzi-los a uma reflexão a respeito do valor da medida de um R_n, falando caso seja necessário que, por exemplo, $R_2 = R_1 \cdot q$ e $R_3 = (R_1 \cdot q) \cdot q$, para que os alunos possam concluir que a partir da medida de R_1 basta multiplicar a razão $q (n - 1)$ vezes para encontrar o valor de R_n. E elaborem assim uma expressão semelhante a $\rho_n = \rho_1 \cdot q^{n-1}$ para os raios consecutivos de uma espiral logarítmica.

Para finalizar este capítulo fornecemos a seguir um modelo de respostas da ficha de atividade que serve apenas de exemplo para o aplicador, tendo em vista que como o ponto inicial P_1 e o ângulo entre os raios consecutivos serão diferentes para cada grupo, os resultados encontrados pelos grupos podem estar corretos apesar de não serem idênticos aos apresentados. Este modelo não serve como gabarito da ficha de atividades, e sim como material de apoio ao aplicador.

3.9. Modelo de respostas da ficha de atividade

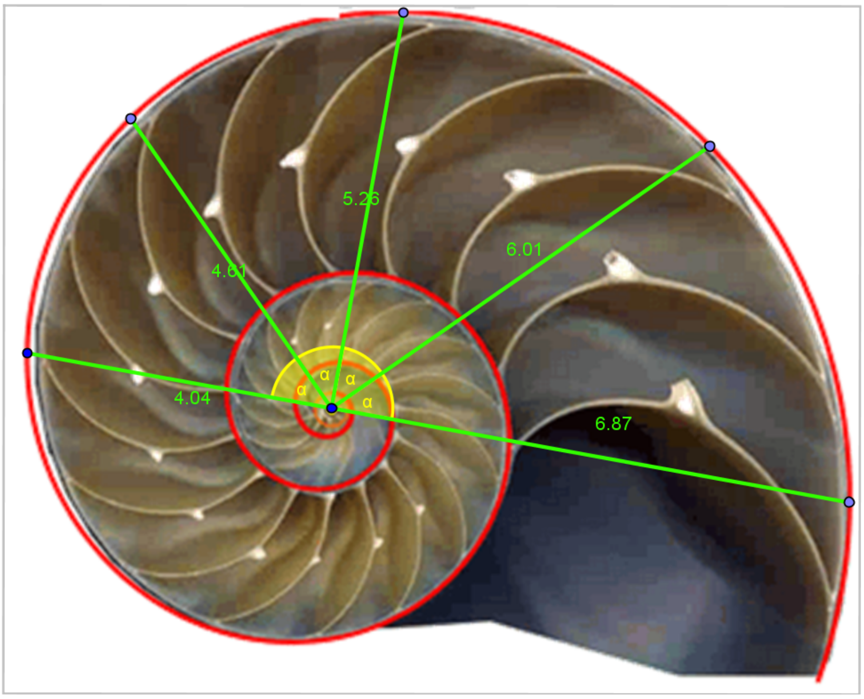


Figura 27: Construção de raios consecutivos na concha do Nautilus

1. Marque o polo O e um ponto P_1qualquer sobre a curva formada pela concha do Naultilus, em seguida trace o raio R_1.
2. Escolha e preecha na tabela uma medida para o ângulo α. Com o auxílio de um transferidor construa a partir do raio R_1 e com centro no polo O mais quatro raios que formam o ângulo α entre eles, marcando os pontos $P_2, P_{3,}\ P_4, P_5$ e seus respectivos raios. Pronto você acaba de construir cinco raios consecutivos.

Ângulo	**Medida (em graus)**
$\boldsymbol{\alpha}$	**45°**

Figura 28: Ilustração da tabela 1 preenchida

3. Com o auxílio de uma régua, preencha na Tabela 2a coluna referente as medidas dos raios consecutivos que você construiu na concha do Nautilus.

Raio	**Medida (cm)**	**ln $\boldsymbol{R_n}$**
$\boldsymbol{R_1}$	**4,0**	**1,40**
$\boldsymbol{R_2}$	**4,6**	**1,53**
$\boldsymbol{R_3}$	**5,3**	**1,66**
$\boldsymbol{R_4}$	**6,0**	**1,79**
$\boldsymbol{R_5}$	**6,9**	**1,92**

Figura 29: Ilustração da tabela 2 preenchida

4. Com o auxílio de uma calculadora científica, determine os lagoratimos naturais das medidas obtidas no item anterior e anote-os na coluna referente aos logarítmos naturais (ln R_n)da Tabela 2.

5. Preencha a Tabela 3, determinando as medias aritméticas indicadas.

Média aritmética	Valor
$\frac{\ln R_1 + \ln R_3}{2}$	$\frac{1,40 + 1,66}{2} = 1,53$
$\frac{\ln R_2 + \ln R_4}{2}$	$\frac{1,53 + 1,79}{2} = 1,66$
$\frac{\ln R_3 + \ln R_5}{2}$	$\frac{1,66 + 1,92}{2} = 1,79$

Figura 30: Illustração da tabela 3 preenchida

6. Compare os valores das médias calculadas na Tabela 3 com os valores dos logaritmos da Tabela 2. Qual conclusão você pode tirar a partir das informações obtidas nas tabelas 2 e 3?

A média aritmética entre $\ln R_1$ e $\ln R_3$ da tabela 3 é igual ao valor de $\ln R_2$ da tabela 2. Assim como a média aritmética entre $\ln R_2$ e $\ln R_4$ da tabela 3 é igual ao valor de $\ln R_3$ da tabela 2 e a média aritmética entre $\ln R_3$ e $\ln R_5$ da tabela 3 é igual ao valor de $\ln R_4$ da tabela 2. Concluímos que a cada três raios consecutivos, a média aritmética dos logaritmos naturais das medidas dos raios extremos é igual ao logaritmo natural da medida do raio intermediário.

7. Troque ideias com os seus colegas e elabore uma expressão matemática que represente a relação entre três raios consecutivos de uma espiral logarítmica.

Para três raios consecutivos R_1, R_2 e R_3 podemos afirmar que:

$$\boxed{\frac{\ln R_1 + \ln R_3}{2} = \ln R_2}$$

8. Preencha a tabela 4considerando somente até a 1ª casa decimal, as razões entre os pares de raios consecutivos.

Razão	Valor
$\frac{R_2}{R_1}$	$\frac{\mathbf{4,6}}{\mathbf{4,0}} = \mathbf{1,1}$
$\frac{R_3}{R_2}$	$\frac{\mathbf{5,3}}{\mathbf{4,6}} = \mathbf{1,1}$
$\frac{R_4}{R_3}$	$\frac{\mathbf{6,0}}{\mathbf{5,3}} = \mathbf{1,1}$
$\frac{R_5}{R_4}$	$\frac{\mathbf{6,9}}{\mathbf{6,0}} = \mathbf{1,1}$

Figura 31: Ilustração da tabela 4

9. Observe os valores encontrados na tabela 4. Com a medida de $\boldsymbol{R_5}$, é possível encontrar o comprimento de $\boldsymbol{R_6}$sem construí-lo? Justifique com cálculos.

Sim. Como todas as razões entre dois raios consecutivos tiveram o mesmo resultado, podemos concluir que a razão entre os raios consecutivos R_6 **e** R_5 também será igual a 1,1. Então:

$$\frac{R_6}{R_5} = 1{,}1$$

$$R_6 = 1{,}1 \cdot R_5$$

$$R_6 = 1{,}1 \cdot 6{,}9$$

$$\boxed{\boldsymbol{R_6 = 7,6}}$$

10. Há relação do que foi feito nos itens 8 e 9 comalgum conteúdo estudado anteriormente? Caso haja, descreva esta relação apontando o assunto estudado.

Sim. A razão entre as medidas dos raios da espiral logarítmica é igual a razão entre termos consecutivos de uma progressão geométrica.

11. Se continuarmos traçando raios consecutivos com o mesmo ângulo α, é possivel calcular a medida de um raio $\boldsymbol{R_n}$ consecutivo qualquer? Elabore uma expressão matemática que dê a medida de $\boldsymbol{R_n}$ sem a necessidade de fazer a construção geométrica.

Sim. Para encontrar a medida de um raio basta multiplicar a medida do raio anterior por $\mathbf{1,1}$. Assim:

$$R_2 = R_1 \cdot 1{,}1$$

$$R_3 = R_2 \cdot 1{,}1 \Rightarrow R_3 = (R_1 \cdot 1{,}1) \cdot 1{,}1 \Rightarrow R_3 = R_1 \cdot 1{,}1^2$$

$$R_4 = R_3 \cdot 1{,}1 \Rightarrow R_4 = (R_1 \cdot 1{,}1^2) \cdot 1{,}1 \Rightarrow R_4 = R_1 \cdot 1{,}1^3$$

Fazendo este processo sucessivas vezes, podemos concluir que a partir de R_1 basta multiplicar a razão $1{,}1(n-1)$ vezes para encontrar a medida de R_n.
Assim,

$$\boxed{R_n = R_1 \cdot 1{,}1^{n-1}}$$

4. Resultados da Aplicação da Atividade

Percebemos que grande parte dos alunos apresentam dificuldades em expressar seus raciocínios ou relacionar os conteúdos estudados com a realidade. Esta atividade faz parte de uma estratégia de ensino que utiliza fenômenos da natureza como uma forma de encurtar a distância existente entre a matemática escolar formal e a matemática da vida real.

Esta atividade objetiva utilizar os conceitos de logaritmo e progressão geométrica para explorar geometricamente uma foto da espiral formada a partir da concha do Nautilus. Desejamos discutir suas características e, através da abstração, formular equações matemáticas que descrevem a relação existente entre os raios consecutivos deste tipo de espiral.

Neste capítulo vamos discutir os resultados da aplicação desta atividade em duas turmas.A atividade foi aplicada na turma da 2ª série do Ensino Médio do Instituto Braga Carneiro, colégio particular localizado na Barra da Tijuca, zona oeste da cidade do Rio de Janeiro e em uma das turmas da 2ª série do Ensino Médio do Colégio Estadual Professor Clóvis Monteiro, localizado em Higienópolis, zona norte da cidade do Rio de Janeiro.

Em ambas as turmas, o professor de Matemática é o autor deste trabalho, fato que colabora para uma melhor análise dos alunos. De maneira geral os resultados foram semelhantes, assim abordaremos as dificuldades e resultados de cada item de maneira geral, salientado, quando necessário,as especificidades de cada um no momento da execução da tarefa.

Em ambas as turmas foi montado um projetor de multimídia com sistema de áudio. Os alunos se posicionaram livremente na sala para assistirem a apresentação introdutória da atividade que durou aproximadamente 12 minutos. Ressaltamos como ponto positivo da apresentação a animação em geogebra da construção da espiral, ela foi fundamental para que os alunos pudessem entender como ela é formada.

Apesar de terem sido mostradas algumas fotos da natureza em que a espiral logarítmica está presente, tais como flores, plantas e fenômenos climáticos, os alunos ficaram mais empolgados quando foi mostrado o formato da espiral numa onda do mar.

Considerando que para o carioca o contato com o mar é frequente, esse fato evidencia que a atividade se torna mais interessante para os alunos quando é abordado algo que faz parte de suas vidas.

Na parte final da apresentação introdutória mostramos o vídeo Espiral Logarítmica. Observamos que alguns alunos não conseguiram compreender a parte final do vídeo que aborda a demonstração da equação da espiral na forma logarítmica, prontamente intervimos solicitando que continuassem assistindo, tentando absorver as informações mais básicas, pois o objetivo era que o aluno conseguisse identificar os elementos de uma espiral, tais como: foco, raio e ângulo do raio, presentes nos fenômenos da natureza.

Após a apresentação introdutória, a turma foi dividida em grupos de 5 alunos. Cada grupo tinha a sua disposição as fichas dos alunos com as orientações e transferidores.

No primeiro item da atividade foi solicitado que eles marcassem o polo O e traçassem o raio R_1 na figura da espiral do Nautilus. Observamos que alguns grupos marcaram o ponto P_1 em uma das voltas internas da espiral, o que no futuro dificultaria a realização dos outros itens da atividade pelo instrumento de medida utilizado. Orientamos então que marcassem o pontoP_1 na volta mais externa da figura e então traçassem o raio R_1.

No item 2, basicamente era solicitado que escolhessem um ângulo e traçassem mais quatro raios consecutivos ao feito no item anterior. Os grupos escolheram ângulos entre 40° e 60°, porém em geral tiveram dificuldades para traçar os raios consecutivos. Para sanar dúvidas projetamos a ficha do aluno e fizemos uma explanação para a turma sobre como traçar o primeiro raio e marcar o ângulo desejado para construir o próximo raio. Feito isto, eles construíram tranquilamente os cinco raios consecutivos solicitados pelo item 2 da atividade, como vemos adiante:

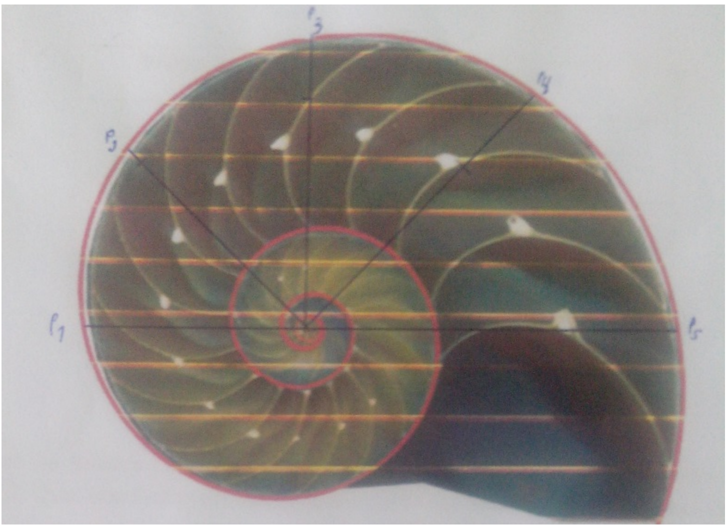


Figura 32 - Raios consecutivos, ângulo de 45°

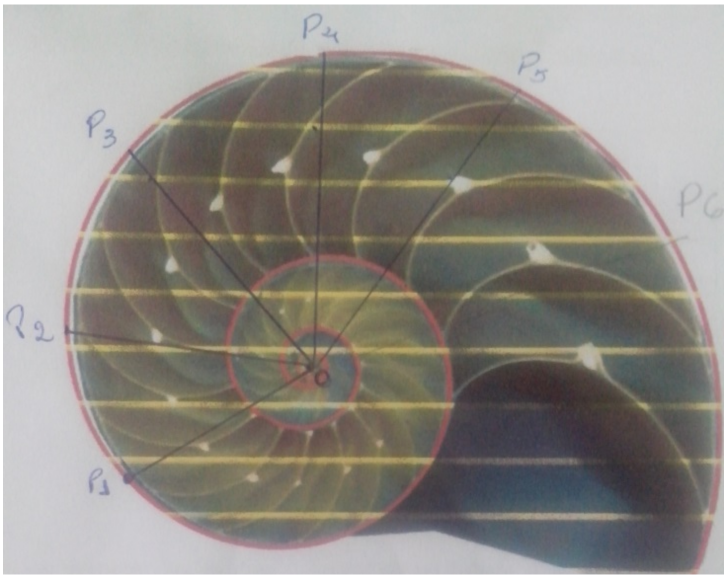


Figura 33 - Raios consecutivos, ângulo de 40°

No item 3 era pedido que preenchessem uma tabela com as medidas dos raios construídos, neste momento chamamos a atenção que deveriam ser o mais precisos possível, levando em consideração que o próprio ato de medir carrega um erro pois o instrumento utilizado possilibita a precisão até a unidade dos milímetros.

Durante o item 4, um fato que nos chamou atenção foi que ao pedirmos que calculassem o logarítmo natural das medidas, os alunos ficaram supresos em relação a existência da função lnna calculadora dos seus celulares, função esta que realiza o cálculo do logarítmo natural do número digitado. Este ponto da atividade foi um grande motivador, pois conseguiu agregar a tecnologia à atividade, os grupos preencheram a tabela sem dificuldades e bastante empolgados.

Raio	Medida (cm)	$\ln R_n$
R_1	5,6	1,72
R_2	5,0	1,60
R_3	4,5	1,50
R_4	4,0	1,38
R_5	3,5	1,25

Tabela 2 - Medidas

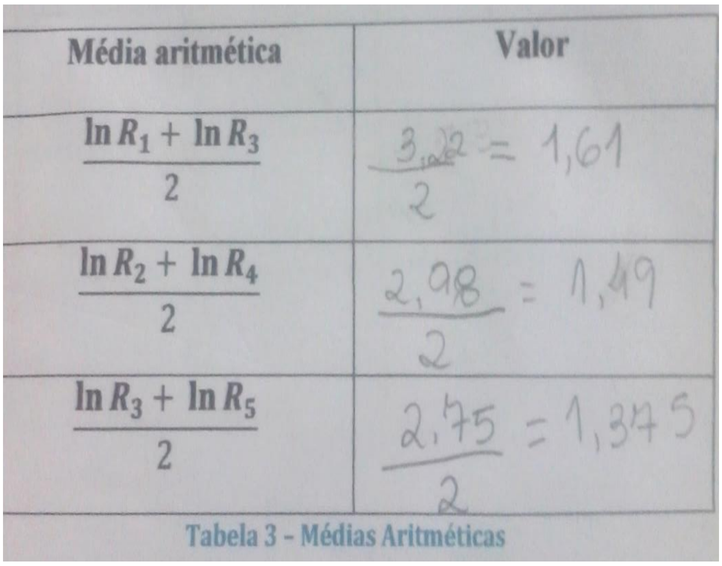
Figura 34 - Medidas dos raios consecutivos no sentido anti-horário

Raio	Medida (cm)	$\ln R_n$
R_1	3,5	1.25
R_2	4	1.38
R_3	4,5	1.50
R_4	5	1.60
R_5	5,5	1.70

Tabela 2 - Medidas

Figura 35 - Medidas dos raios construídos no sentido horário

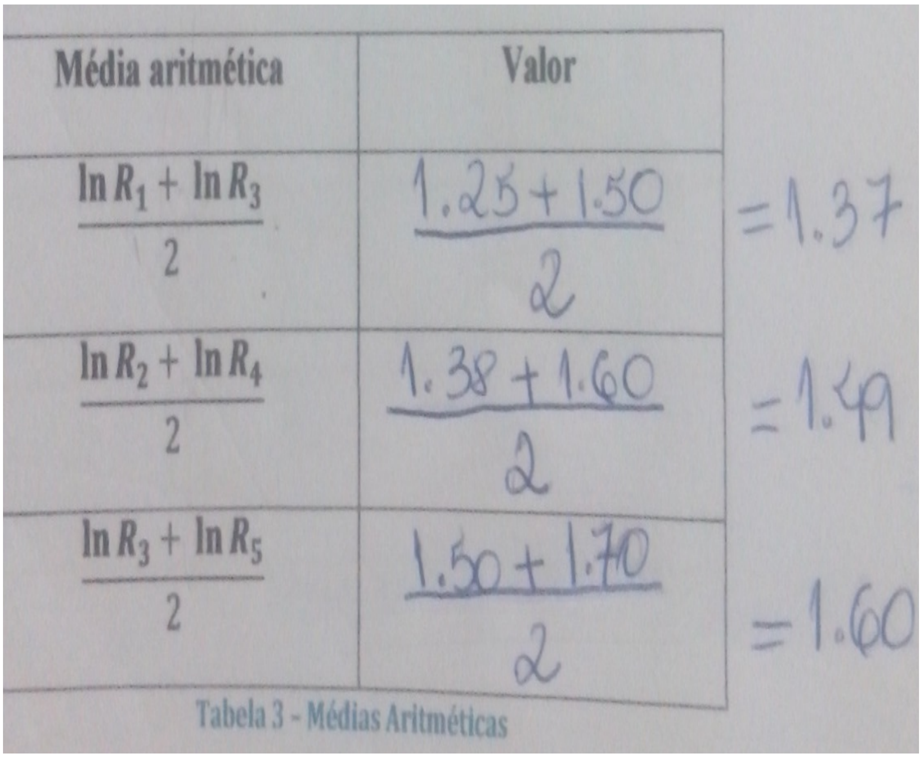
No item 5, os grupos realizaram os cálculos sem dificuldades, pois estão bem familiarizados com cálculos de média aritmética, como podemos ver a nas ilustrações a seguir.



Média aritmética	Valor
$\frac{\ln R_1 + \ln R_3}{2}$	$\frac{3,22}{2} = 1,61$
$\frac{\ln R_2 + \ln R_4}{2}$	$\frac{2,98}{2} = 1,49$
$\frac{\ln R_3 + \ln R_5}{2}$	$\frac{2,75}{2} = 1,375$

Tabela 3 - Médias Aritméticas

Figura 36: cálculo das médias aritméticas 1



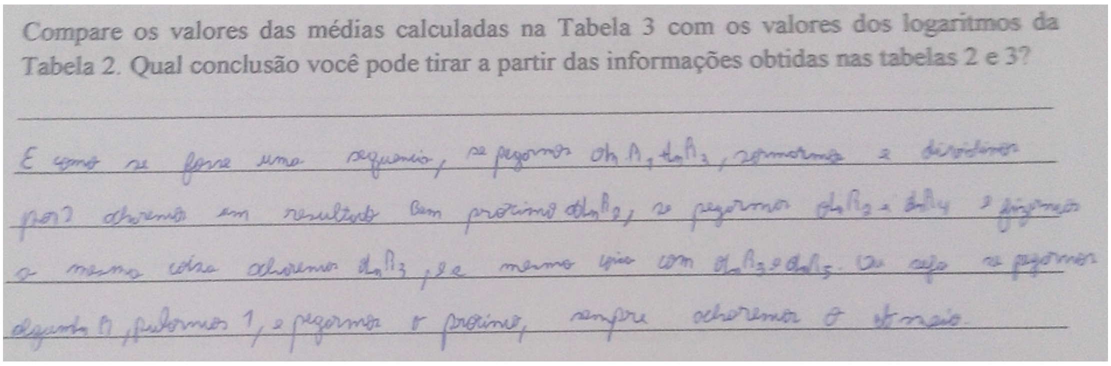
Média aritmética	Valor	
$\frac{\ln R_1 + \ln R_3}{2}$	$\frac{1.25 + 1.50}{2}$	$= 1.37$
$\frac{\ln R_2 + \ln R_4}{2}$	$\frac{1.38 + 1.60}{2}$	$= 1.49$
$\frac{\ln R_3 + \ln R_5}{2}$	$\frac{1.50 + 1.70}{2}$	$= 1.60$

Tabela 3 - Médias Aritméticas

Figura 37: cálculo das médias aritméticas 2

No item 6, a maioria dos grupos rapidamente reconheceu que cada uma das médias aritméticas era bem aproximada do raio que esta entre eles. Porém os grupos solicitaram uma melhor explicação deste item, visto que não eram exigidos cálculos e sim um texto. Após o esclarecimento, os alunos elaboraram o texto solicitado chegando a excelentes conclusões, na maioria deles apontando para uma generalização a partir do experimento realizado.

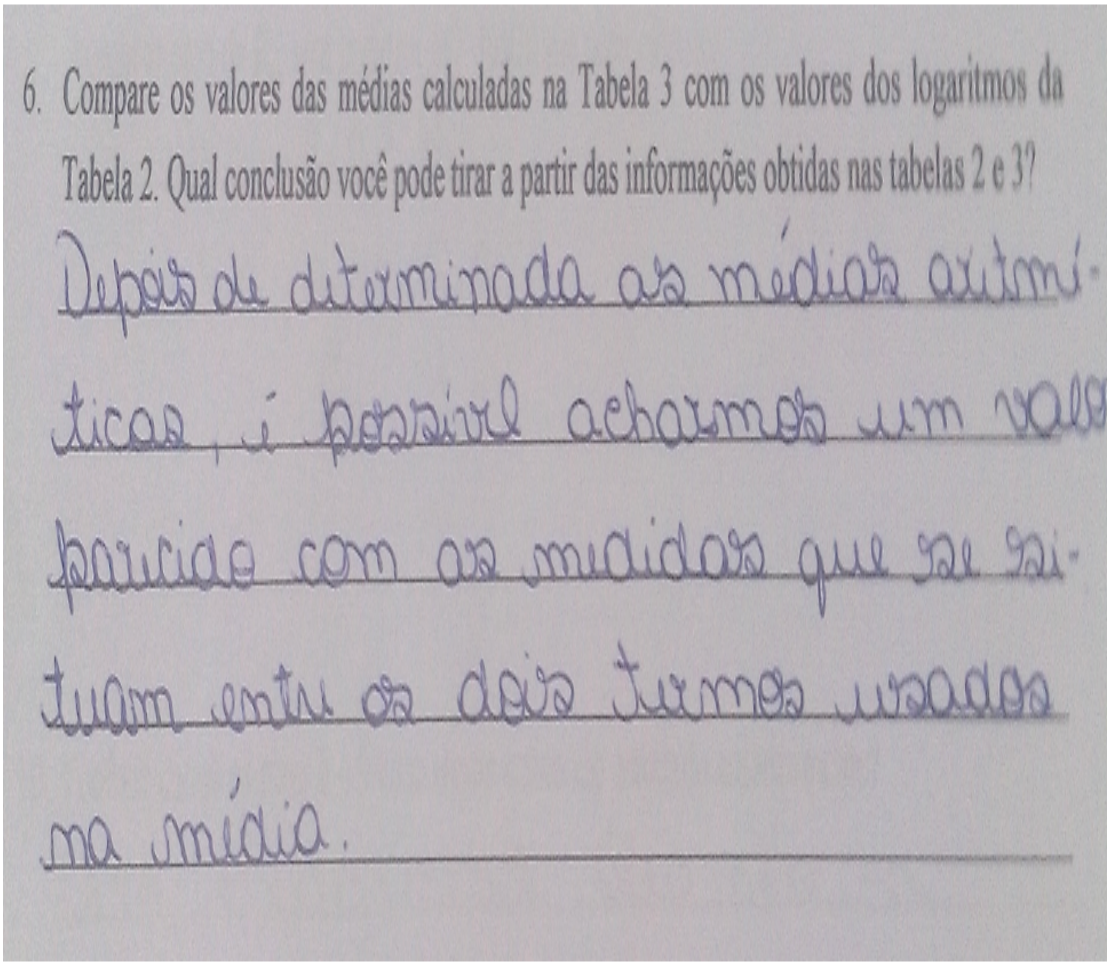
“É como se fosse uma sequência, se pegarmos o $\ln R_1 + \ln R_3$*, somarmos e dividirmos por 2, acharemos um resultado bem próximo a* $\ln R_2$*. Se pegarmos o* $\ln R_2 + \ln R_4$ *e fizermos a mesma coisa, acharemos o* $\ln R_3$*, e a mesma coisa com o* $\ln R_3 + \ln R_5$*. Ou seja, se pegarmos algum* $\ln R$*, pularmos um, e pegarmos o próximo, sempre acharemos o do meio.”*


Compare os valores das médias calculadas na Tabela 3 com os valores dos logaritmos da Tabela 2. Qual conclusão você pode tirar a partir das informações obtidas nas tabelas 2 e 3?

É como se fosse uma sequência, se pegarmos o $\ln R_1 + \ln R_3$, somarmos e dividirmos
por 2 acharemos um resultado bem próximo do $\ln R_2$, se pegarmos o $\ln R_2 + \ln R_4$ e fizermos
a mesma coisa acharemos o $\ln R_3$, e a mesma coisa com o $\ln R_3 + \ln R_5$. Ou seja se pegarmos
algum R, pularmos 1, e pegarmos o próximo, sempre acharemos o ~~do~~ meio.

Figura 38: Resposta 1 do item 6

“Depois de determinadas as média aritmética é possível acharmos um valor parecido com a medida que se situa entre os dois termos usados na média.”

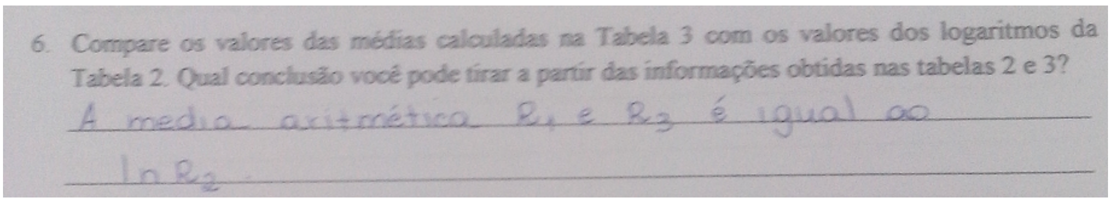


6. Compare os valores das médias calculadas na Tabela 3 com os valores dos logaritmos da Tabela 2. Qual conclusão você pode tirar a partir das informações obtidas nas tabelas 2 e 3?

Depois de diterminada as médias aritmé-
ticas, é possível acharmos um valo
parcido com as medidas que se si-
tuam entre os dois termos usados
na média.

Figura 39: Resposta 2 do item 6

“A média aritmética entre $ln\ R_1$ e $ln\ R_3$ é igual ao $ln\ R_2$.”



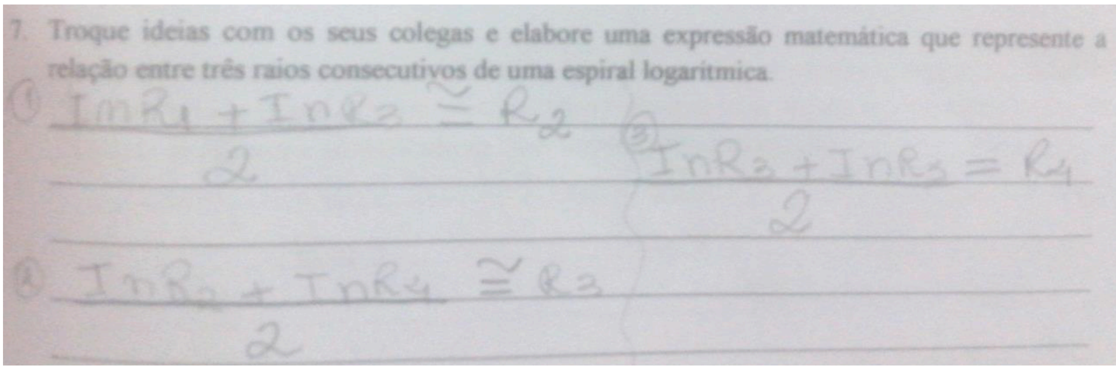
6. Compare os valores das médias calculadas na Tabela 3 com os valores dos logaritmos da Tabela 2. Qual conclusão você pode tirar a partir das informações obtidas nas tabelas 2 e 3?

A media aritmética R_1 e R_3 é igual ao
$ln\ R_2$.

Figura 40: Resposta 3 do item 6

Apontamentos como estes evidenciaram que os alunos estavam num processo de investigação na busca de uma relação entre raios consecutivos de uma espiral logarítmica. Isto nos deixa bastante satisfeito, pois foram evidências como estas observadas pelos alunos nesta simples atividade que orientaram os pensadores matemáticos na busca da prova matemática desta relação. Neste momento ficou claro para o aplicador que conseguimos estimular as capacidades de análise, investigação, reflexão e argumentação nos alunos através desta atividade.

Analisamos as evidências de todos os grupos para mostrar a validade de tal relação de forma geral, pois mesmo com os grupos utilizando raios consecutivos diferentes entre eles, a conclusão chegada era a mesma. Sendo assim, no item 7, eles expressaram de forma algébrica aquilo que haviam acabado de concluir, como podemos ver nas ilustrações a seguir.

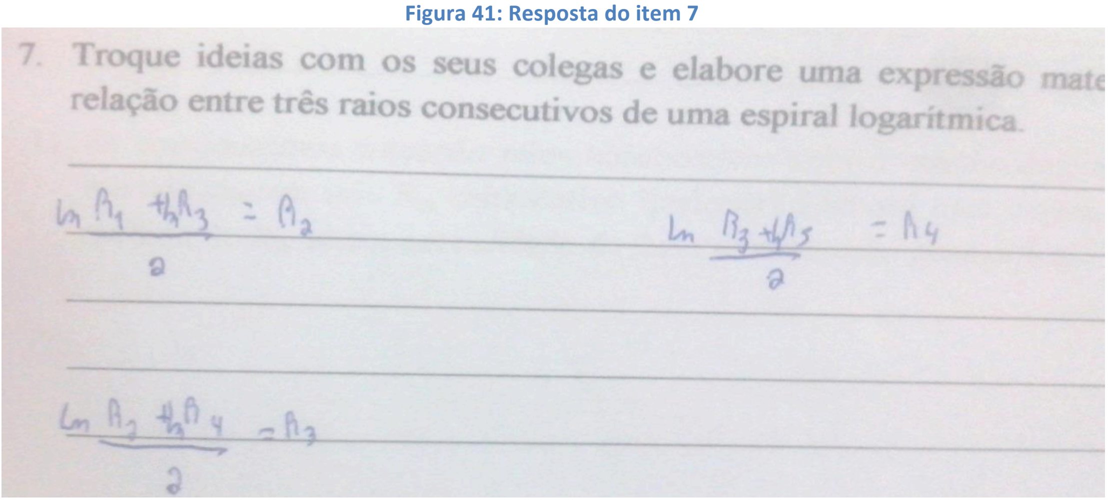

7. Troque ideias com os seus colegas e elabore uma expressão matemática que represente a relação entre três raios consecutivos de uma espiral logarítmica.

① $\frac{InR_1 + InR_3}{2} \cong R_2$

③ $\frac{InR_3 + InR_5}{2} = R_4$

② $\frac{InR_2 + InR_4}{2} \cong R_3$

Figura 41: Resposta do item 7


7. Troque ideias com os seus colegas e elabore uma expressão mate
relação entre três raios consecutivos de uma espiral logarítmica.

$\frac{\ln R_1 + \ln R_3}{2} = R_2$

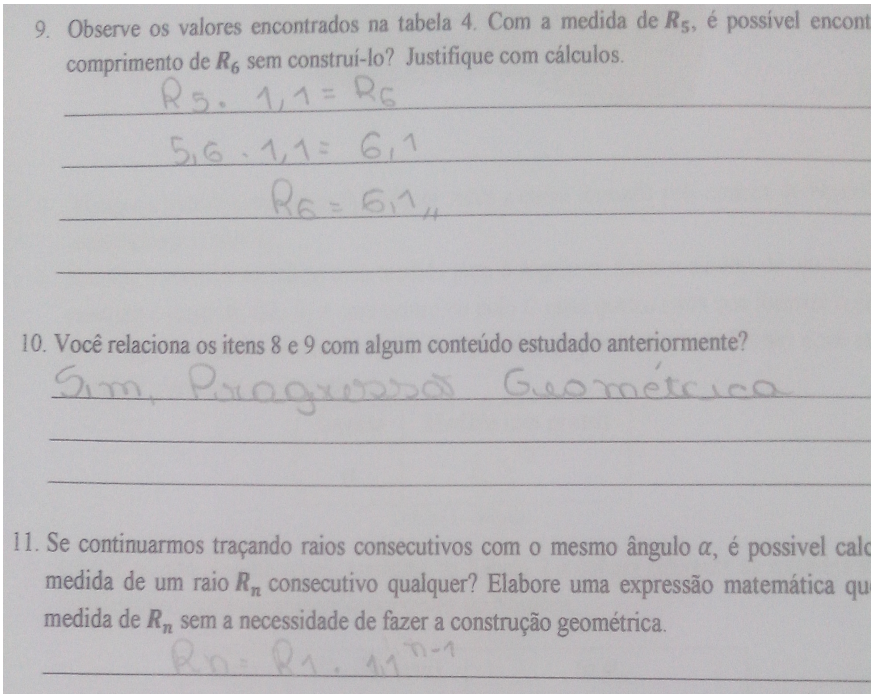
$\frac{\ln R_3 + \ln R_5}{2} = R_4$

$\frac{\ln R_2 + \ln R_4}{2} = R_3$

Figura 42: Resposta do item 7

Com relação à primeira parte da atividade (itens de 1 a 7), destacamos que 80% realizaram com aproveitamento, ou seja, chegaram à conclusão de que tomando quaisquer três raios consecutivos de uma espiral logarítmica a média dos logaritmos naturais dos extremos é igual ao logaritmo natural do intermediário.

Nos itens de 8 a 11, a maioria foi bem sucedida, porém alguns grupos por falhas decorrentes da medição não estavam conseguindo encontrar o mesmo valor para todas as razões da tabela 4. No momento em que foi detectado este tipo de erro, os orientamos a conferir suas medições e cálculos para que pudessem chegar a um único valor para todas as razões solicitadas, pois este tipo de erro influenciaria diretamente nos demais itens.



9. Observe os valores encontrados na tabela 4. Com a medida de R_5, é possível encont
comprimento de R_6 sem construí-lo? Justifique com cálculos.

$R_5 \cdot 1,1 = R_6$

$5,6 \cdot 1,1 = 6,1$

$R_6 = 6,1$

10. Você relaciona os itens 8 e 9 com algum conteúdo estudado anteriormente?

Sim, Progressão Geométrica

11. Se continuarmos traçando raios consecutivos com o mesmo ângulo α, é possivel calc
medida de um raio R_n consecutivo qualquer? Elabore uma expressão matemática qu
medida de R_n sem a necessidade de fazer a construção geométrica.

$R_n = R_1 \cdot 1,1^{n-1}$

Figura 43 - Respostas dos itens 9, 10 e 11

Destacamos que 70% dos grupos completaram a tabela com sucesso encontrando o mesmo valor para as razões das medidas dos raios consecutivos. Metade dos grupos conseguiu elaborar uma equação que permitia calcular a medida de R_6, a outra metade ou não respondeu ou respondeu de forma insatisfatória.

Verificamos que de maneira geral os alunos tiveram maior dificuldade neste ponto da atividade, havia a expectativa que todos associassem as razões iguais da tabela 4 com a razão q de uma progressão geométrica, pois quando trabalhamos este tema em sala fizemos muitos exercícios deste tipo. Este fato aponta para a necessidade de maior atenção do aplicador e a possivelmente inserir mais um passo que aponte com mais clareza para a progressão geométrica entre os raios consecutivos.

É notório que nos itens em que foi solicitada uma descrição do que haviam entendido os alunos tiveram dificuldades para iniciar o texto. Entendemos que isto ocorre pelo fato de estarem acostumados com uma cultura de resolver problemas, todavia quando solicitamos que seja feita uma reflexão e descrição há certa estranheza em relação ao item.

As expectativas em relação a atividade foram superadas, apesar de ser uma atividade complexa no tocante a capacidade de formular hipóteses e criar conjecturas, as respostas atenderam aos objetivos específicos de cada item da atividade, conseguimos extrair das turmas um espírito de investigação e reflexão em relação a problemática proposta, e conseguindo por fim tirar conclusões matemáticas precisas a respeito dos conceitos abordados.

O trabalho em grupo propiciou um ambiente favorável a este tipo de atividade porque a troca de conhecimento é constante, isto colabora para um melhor resultado final e multiplica o alcance e qualidade da execução do trabalho.

Os resultados pós atividade foram muitos, notamos os alunos mais entusiasmados, mais atentos, mais participativos e, sobretudo conseguimos atrair para a aula de matemática alunos que estavam desestimulados, estes conseguiram enxergar que são capazes de pensar matematicamente.

Após a atividade pedimos que os alunos individualmente escrevessem em uma folha de papel, sem se identificar, as suas opiniões sobre a mesma. Porém alguns fizeram questão de assinar suas opiniões, vejamos algumas delas.

"Essa atividade foi um pouco difícil de entender, mas bem produtiva, consegui interagir com meus colegas de sala."

"Foi uma boa aula, aprendi matemática onde eu não imaginava que tinha"

"Interessante, informativo, gostei."

"Gostei, foi algo muito construtivo e interessante."

"Achei diferente e legal ao mesmo tempo, meio complicado de se aprender mas foi uma boa ideia, isso pode ser essencial no meu futuro"

"Obtive mais conhecimento em relação geometria."

5. Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos uma proposta de atividade que relacionou a matemática com alguns fenômenos observados na natureza tendo como foco principal o estudo da espiral logarítmica. Abordamos a relação entre a espiral e a natureza, fizemos uma explanação teórica de todos os conceitos que envolvem a espiral logarítmica, propomos uma atividade para ser aplicada em sala de aula com material de suporte ao professor e um relatório sobre a aplicação em turmas do Ensino Médio.

Muitos enxergam o logarítmo como um dos assuntos mais difíceis de serem contextualizados no Ensino Médio. Ao aceitar este desafio, acreditamos que ao utilizar a espiral logarítmica para abordar propriedades de logarítmos propiciamos ao aluno a oportunidade de se profundar no estudo do tema, desenvolvendo ao mesmo tempo habilidades como: observar matematicamente fenômenos, fazer inferências, analisar dados, discutir em grupo seus pensamentos, estimular o raciocínio, transformar ideias em liguagem matemática e elaborar e testar conjecturas.

Por meio de um elemento presente na natureza conseguimos trabalhar propriedades de logarítmo e progressão geométrica dentro de apenas uma atividade, ou seja, trabalhamos de forma interdisciplinar e conectamos conteúdos que na maioria das vezes é vista pelos alunos de maneira desassociada.

Esta atividade influenciou de maneira positiva a aula de matemática, se colacando como um instrumento motivador para os alunos. Foi claro o aumento da participação dos que antes estavam apáticos durante as aulas e que, após a atividade, se tornaram mais participativos e interessados, influenciando até no aumento da presença.

Ficamos satisfeitos com os resultados que o trabalho alcançou pois, além de ter sido uma experiência única para autor deste trabalho, conseguiu estimular nos alunos um lado crítico a respeito do mundo que os cercam. Este deve ser o objetivo macro de todo educador, formar cidadãos conscientes de que através do conhecimento podem tornar suas ideias relevantes e suas opiniões ouvidas na sociedade.

Referências Bibliográficas

AUGUSTO, C. G. **O número de ouro: representação da beleza matemática.** Dissertação de Pós-graduação. Belo Horizonte: UFMG, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (PCN). Parte III: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, pp. 46. 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. PCN+, Ensino Medio. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Ciências da Natureza, Matematica e suas Tecnologias, pp.117-118. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientaçõescurriculares para o ensino médio:** ciências da natureza, matemática e suastecnologias. vol. 02. Brasília: MEC, 2008.

DANTE, L.R. **Matemática: Contexto e Aplicações**, vol. 2. 2.ed. São Paulo: Ática,2013.

FERREIRA, Aurélio B. de H. **Miniaurélio Século XXI Escolar: O minidicionário da língua portuguesa.** 4. Ed. rev. Ampliada. – Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2001.

HUNTLEY, H. E. **A Divina Proporção – Um Ensaio sobre a Beleza na Matemática.** Brasília:Editorada Universidade de Brasília, 1985.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; DEGENSZAJN, D.; PÉRIGO, R. **Matemática: Volume único.** 5. ed. – São Paulo, 2011.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio – volume 1.**9. ed. – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, Elon L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio – volume 2.**9. ed. – Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LIMA, E. L. **Logaritmos.** 4. ed.– Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

LIVIO, Mario. **Deus é matemático?**Tradução Jesus de Paula Assis. – Rio de Janeiro: Record, 2010.

LIVIO, Mario. **Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente.** Tradução Marco Shinobu Matsumura. – Rio de Janeiro: Record, 2006.

OLIVEIRA,E. de; FERREIRA, T. E.**O número de ouro e suas manifestações na natureza e na arte**. RevistaComplexus –Instituto Superior De Engenharia Arquitetura E Design – Ceunsp, Salto-Sp,Ano. 1, N.2, P. 64-81 , Setembro de 2010. Disponível em:www.Engenho.Info.

PROVIDÊNCIA, Natália B. da.**2 + 2 = 11.** – Espanha: Gradiva Publicações, Lda., 2001.

PUPIM, C. E. **A matemática na natureza.**Dissertação de Mestrado. Dourados: UEMS, 2013.

SOUZA, J. **Novo olhar matemática**, vol. 2 e 3. 2.ed. São Paulo: FTD, 2013.

TAVARES, D. dos S. **As Espirais na Obra de Francisco Gomes Teixeira**.Dissertação de mestrado, Universidade de Aveiro.Portugal, 2006.

ZIATDINOV, Rushan; MIURA, Kenjiro T.**On the Variety of Planar Spirals and Their Applications in Computer Aided Design.** EuropeanResearcher, Vol.(27), Nº 8-2, 2012.

Anexos

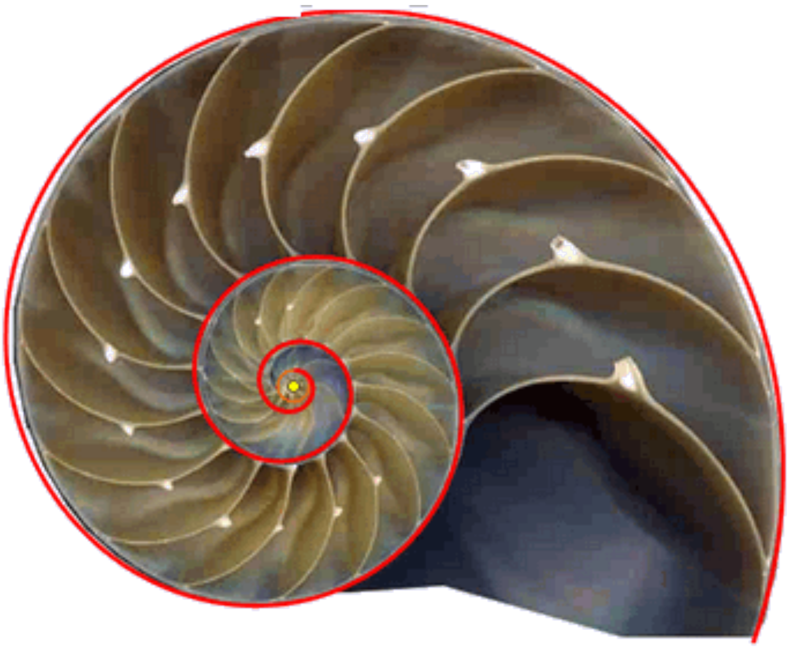
Anexo I

Atividade em grupo: Na curva do Nautilus

Turma:_________

Nomes: ____

____



1. Marque o polo O e um ponto P_1qualquer sobre a curva formada pela concha do Naultilus, em seguida trace o raio R_1.
2. Escolha e preecha na tabela uma medida para o ângulo α. Com o auxílio de um transferidor construa a partir do raio R_1 e com centro no polo O mais quatro raios que formam o ângulo α entre eles, marcando os pontos $P_2, P_{3,} P_4, P_5$ e seus respectivos raios. Pronto você acaba de construir cinco raios consecutivos.

Ângulo	Medida (em graus)
α	

Tabela 1 - Ângulo

3. Com o auxílio de uma régua, preencha na Tabela 2a coluna referente as medidas dos raios consecutivos que você construiu na concha do Nautilus.

Raio	Medida (cm)	$\ln R_n$

$\boldsymbol{R_1}$		
$\boldsymbol{R_2}$		
$\boldsymbol{R_3}$		
$\boldsymbol{R_4}$		
$\boldsymbol{R_5}$		

Tabela 2 - Medidas

4. Com o auxílio de uma calculadora científica, determine os lagoratimos naturais das medidas obtidas no item anterior e anote-os na coluna referente aos logarítmos naturais ($\ln R_n$)da Tabela 2.

5. Preencha a Tabela 3, determinando as medias aritméticas indicadas.

Média aritmética	**Valor**
$\dfrac{\ln \boldsymbol{R_1} + \ln \boldsymbol{R_3}}{2}$	
$\dfrac{\ln \boldsymbol{R_2} + \ln \boldsymbol{R_4}}{2}$	
$\dfrac{\ln \boldsymbol{R_3} + \ln \boldsymbol{R_5}}{2}$	

Tabela 3 – Médias Aritméticas

6. Compare os valores das médias calculadas na Tabela 3 com os valores dos logaritmos da Tabela 2. Qual conclusão você pode tirar a partir das informações obtidas nas tabelas 2 e 3?

____

____

____

____

____

____

____

7. Troque ideias com os seus colegas e elabore uma expressão matemática que represente a relação entre três raios consecutivos de uma espiral logarítmica.

8. Preencha a tabela 4considerando somente até a 1ª casa decimal, as razões entre os pares de raios consecutivos.

Razão	Valor
$\frac{R_2}{R_1}$	
$\frac{R_3}{R_2}$	
$\frac{R_4}{R_3}$	
$\frac{R_5}{R_4}$	

Tabela 4 – Razões

9. Observe os valores encontrados na tabela 4. Com a medida de $\boldsymbol{R_5}$, é possível encontrar o comprimento de $\boldsymbol{R_6}$sem construí-lo? Justifique com cálculos.

10. Você relaciona os itens 8 e 9 com algum conteúdo estudado anteriormente?

11. Se continuarmos traçando raios consecutivos com o mesmo ângulo α, é possivel calcular a medida de um raio $\boldsymbol{R_n}$ consecutivo qualquer? Elabore uma expressão matemática que dê a medida de $\boldsymbol{R_n}$ sem a necessidade de fazer a construção geométrica.

Anexo II

Quem nunca observou nos noticiários de televisão fenômenos climáticos conhecidos como furacões ou tornados? Um exemplo bem conhecido é o furacão Katrina que ocorreu em Agosto de 2005 nos Estados Unidos causando cerca de 2 bilhões de dólares de prejuízo aos moradores do sul da Flórida. Vejamos uma foto de Katrina obtido pelas sondas espaciais.

Figura 1

Observando a imagem do furacão Katrina, é possível perceber o formato de uma espiral. Você já observoualgum outro fenômeno natural que tenha o formato de uma espiral? Nas imagens a seguir, apresentamos mais alguns deles.

Figura 2

Figura 3

Imagine um ponto D sobre a origem do sistema cartesiano que começa a se mover para a direita sobre uma semirreta, ao mesmo tempoque a mesma descreve uma rotação no sentido anti-horário. A curva descrita pelo ponto P é chamada de espiral. No link http://tube.geogebra.org/student/m86373 é possível observar a construção de parte de uma espiral.

Na espiral descrita no link, é interessante observar que a velocidade que o ponto D se desloca sobre o segmento de reta $\overline{AC}$ e a velocidade de rotação deste mesmo segmento são constantes. Isto é o que a defini matematicamente e todas as espirais assim construídas são chamadas de ***Espiral de Arquimedes***. É importante saber que existem diversos tipos de espirais, cada uma estando associada a uma propriedade geométrica da curva, em que as velocidades variam de forma diferente.

Vamos agora entender os conceitos básicos de uma curva espiral genérica.

4) A origem da espiral é chamada de **polo**, sendo representado pela letra O;

5) **Raio** é o segmento de reta formado entre um ponto P pertencente à espiral e o polo O;

6) Três pontos $P1$, $P2$ e $P3$ são **pontos consecutivos** de uma espiral se os ângulos $\boldsymbol{\alpha}$ entre os raios determinados pelos pontos P1, P2 e P3 e o polo possuírem a mesma medida.

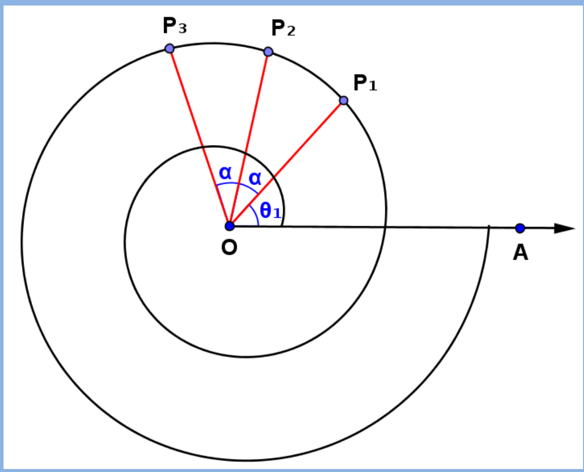


Figura 4

Na atividade proposta, estudaremos a espiral logarítmica. Esta espiral temuma propriedade muito interessante estabelecida com o auxílio dos logaritmos, razão pela qual recebeu este nome. Escolhemos este tipo de espiral, pois a espiral logarítmica está muito presente na natureza. Agora, vamos identificar o polo, os pontos consecutivos, os raios consecutivos e os ângulos entre os raios deuma espiral logarítmica.

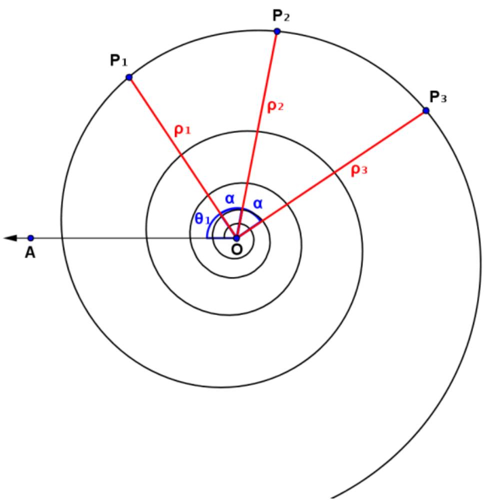


Figura 5

Para identificar de forma bem clara a presença desta espiral em diversos fenômenos da natureza, assistiremos ao vídeo Espiral Logarítmica em português, disponível em https://www.youtube.com/watch?v=KUSCxBIXm-c, adaptado de "Conceptos Numericos Espirales Logarítmica", produzido pelo Discovery Channel.

Em alguns momentos do vídeo foi possível observar esta figura. O que é isto?

Figura 6

É a concha do Nautilus,um cefalópode marinho arcaico. É uma concha formada por uma série de câmaras separadas, o animal ocupa a última câmara e as outras são cheias de gás. A concha de Nautilus descreve uma curva com o formato de uma espiral logarítmica. Por essa razão e visando a encontrar uma propriedadegeométrica da espiral, escolhemos esta concha para ser a fonte de nossos estudos.

Orientações para o Questionário:

- Item 1: solicitar que os grupos escolham locais diferentes da curva do Nautilus para marcar o ponto P_1;
- Item 2: solicitar que os grupos escolham ângulos de medidas diferentes;
- Item 3: solicitar que façam as medições de maneira mais precisa possível utilizando a unidade de milímetros;
- Item 4: solicitar que utilizem a calculadora científica para fazer os cálculos dos logaritmos naturais destas medidas. Orientar que os números preenchidos na coluna referente aos logaritmos da tabela 2 devem conter apenas as duas primeiras casas decimais;
- Item 5: solicitar que os alunos retirem da tabela 2 os números para fazer as médias da tabela 3;
- Item 6: orientar que os alunos a partir da tabela 3 comparem um a um os números encontrados nas médias com os resultados dos logaritmos da tabela 2 e escrevam um texto relatando a relação observada entre os resultados encontrados nas duas tabelas;
- Item 7: indicar que os alunos devem representar aquilo que observaram no item anterior na forma de uma expressão matemática;

- Item 8: falar para os grupos retirarem os valores das medidas dos raios da tabela 2 para fazer as razões, reforçar que o item pede que os valores encontrados devem ser considerados até a primeira casa decimal.
- Item 9: orientar que eles devem observar a tabela 4 para montar uma equação que seja possível calcular o valor de R_6;
- Item 10: levar os alunos a uma breve reflexão com a intenção de que eles relacionem aquilo que acabaram de manipular com o conceito de progressão geométrica;
- Item 11: levar os grupos a elaborar uma expressão matemática semelhante ao termo geral de uma progressão geométrica.