UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Reflexões sobre a representação gráfica no ensino da Matemática

André Mendes Cardoso Sequeira

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de Rio Claro.

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

2016

510.07 Sequeira, André Mendes Cardoso
S479r Reflexões sobre a representação gráfica no ensino da Matemática / André Mendes Cardoso Sequeira. - Rio Claro, 2016
75 f. : il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Thiago de Melo

1. Matemática - estudo e ensino. 2. Gráficos. 3. Funções. I. Título.

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Câmpus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

André Mendes Cardoso Sequeira

Reflexões sobre a representação gráfica no ensino da Matemática

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Departamento de Matemática - Unesp Rio Claro

Profa. Dra. Andréa Cristina Prokopczyk Arita
Departamento de Matemática - Unesp São José do Rio Preto

Rio Claro, 30 de agosto de 2016

Dedico este trabalho à minha esposa Carolina e aos meus filhos: Pedro e João.

Agradecimentos

A Deus pelo dom e mistério da vida.

A CAPES, ao Centro Estadual de Educação Tecnológica Paula Souza e à Secretaria de Educação do Estado de São Paulo pelo apoio financeiro concedido.

Ao meus Professores do PROFMAT, em especial ao meu orientador Prof. Dr. Thiago de Melo, por ter aceitado me orientar e por ter proporcionado momentos de efetivo aprendizado. Pela paciência e pela dedicação em sempre buscar formas diferentes e claras de explicar os conteúdos.

Aos meus familiares, em especial aos meus pais Antonio (in memorian) e Idalina pelo apoio durante toda a minha trajetória escolar, oferecendo boas escolas e acompanhamentos nos estudos. Ao meu sogro Jaime e à minha sogra Suzana por estarem sempre apoiando, incentivando e orando pelas minhas escolhas.

À minha esposa querida, Carolina, companheira em todos os momentos, na alegria e na tristeza. Para mim, a Professora mais completa que conheci. Aos meus filhos Pedro e João, por serem os maiores presentes que tenho.

Aos meus irmãos, Ricardo e Denise, pelo convívio e pelo incentivo.

Aos educadores que tive ao longo da trajetória escolar, aos meus colegas do PROFMAT, aos meus alunos, aos meus colegas de magistério, a Pedro Leopoldo e Silva Lopes; enfim, a todos que colaboraram para a conclusão deste trabalho.

No dever jamais há outra dificuldade além de cumpri-lo.
Émile-Auguste Chartier

Resumo

Neste trabalho verificamos as dificuldades apresentadas pelos alunos da E.E. Romeu de Moraes (São Paulo/SP) com relação às representações gráficas. Quando questionados sobre o porquê desta deficiência, foi difícil obter clareza sobre os fatos que os impedem de trabalhar com gráficos. De maneira geral, nesta escola, os alunos argumentaram que viram poucas vezes o uso desta linguagem e que o uso de tabelas era mais frequente. Precisamos reverter esta situação, mostrando as vantagens que a comunicação via gráficos nos traz, pois deles podemos retirar informações importantes na solução de problemas.

Ao longo desta dissertação mostraremos alguns conteúdos propostos para o 3º ano de Ensino Médio (estudo dos coeficientes de uma reta, análise das taxas de variação para a função afim e gráficos estatísticos buscando as medidas de tendência central) e retomaremos outros (par ordenado, plano cartesiano, razão, porcentagem, gráficos de setores, gráfico de barras, histograma e gráfico de linhas).

Na maior parte destes assuntos, a representação gráfica ocorre e procuramos oferecê-la aos estudantes de diversas maneiras, seja construindo gráficos, seja observando-os e interpretando-os ou ainda, coletando dados para resolver os problemas propostos.

Não pretendemos dar conta de todas as dificuldades apresentadas pelo corpo discente, mas apresentaremos algumas sugestões de atividades que podem facilitar o aprendizado.

Palavras-chave: Gráficos, Funções, Ensino.

Abstract

In this work we analyze some difficulties when dealing with graphs which were presented by the students from E.E. Romeu de Moraes (São Paulo/SP). When we ask for the reason of this deficiency, it is difficult to get clear on the facts that prevent them working with graphics. In general, the students confirm that very rarely they make use of this feature and also say that dealing with tables is more common. We can change this situation showing the advantages which graphs communication brings to us, because it can derive important information for troubleshooting.

Throughout this dissertation we show some proposed content for the 3rd year of high school (the study of coefficients of a straight line, analysis of growth rates for the statistical function and graphs seeking the central tendency) and other subjects (ordered pair, Cartesian plane, ratio, percentage, pie charts, bar graph, histogram and line graph).

In most of these issues, the graphical representation occurs and we try to offer it to students in many ways, even drawing graphic, analyzing and interpreting it, or collecting data to solve the problems proposed.

We do not intend to solve all the difficulties presented by the students, but we bring some suggestions for activities that can make learning easier to them.

Keywords: Graphs, Functions, Teaching.

Lista de Figuras

1 Adaptado de [1] 18

1.1 Imagem de Fundamentos de Matemática Elementar [2] 22
1.2 Imagem para o Exemplo 1.1 23

2.1 Associação de alguns elementos $x \in X$ aos elementos $y \in Y$ tais que $y = x + 2$ 26
2.2 Associação de cada elemento $x \in X$ ao elemento $y \in Y$ tal que $y = x - 1$ 27
2.3 Função decrescente em $(-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty)$ 28
2.4 Imagem de Fundamentos de Matemática Elementar [2] 29
2.5 Representação Gráfica do Coeficiente b 30
2.6 Representação gráfica de uma reta que passa pela origem 31
2.7 Representação gráfica de uma reta que não passa pela origem 31

3.1 Componentes estruturais da ponte estaiada. Ponte de Strömsund, na Suécia 34
3.2 Configuração longitudinal dos estais 34
3.3 Registro dos alunos 35
3.4 Alunos montando um protótipo da ponte estaiada 36
3.5 Tabela com as medidas obtidas no protótipo da ponte estaiada 36
3.6 Representação dos estais por meio de equações de reta no plano cartesiano 37
3.7 Soluções apresentadas por alunos na avaliação 37
3.8 Soluções apresentadas por alunos na avaliação 38
3.9 Resultados obtidos com as questões 1 e 2 das figuras 3.7 e 3.8 38
3.10 Solução apresentada por poucos alunos na avaliação 39
3.11 Resultados obtidos com o teste da figura 3.10 39
3.12 Solução apresentada na avaliação de sondagem de forma incorreta . . . 40
3.13 Solução apresentada na avaliação de sondagem de forma correta 40
3.14 Exercício envolvendo gráficos referente às situações propostas nas figuras 3.12 e 3.13 41
3.15 Soluções expressas por meio de generalização a partir do exercício proposto nas figuras 3.12 e 3.13 42
3.16 Resultados obtidos com as soluções apresentadas para a questão da figura 3.15 42
3.17 Enunciado elaborado pelo professor 43
3.18 Solução apresentada pelo aluno para o exercício da figura 3.17 43
3.19 Solução apresentada pelo aluno e enunciado do exercício 43
3.20 Preenchimento de tabelas com os dados propostos 43
3.21 Gráfico construído pelo aluno de acordo com os dados propostos 44

3.22 Solução expressa por meio de generalização a partir do exercício proposto 44
3.23 Exercício envolvendo análise de gráfico em uma avaliação 46
3.24 Expressão de regularidades por meio de uma linguagem matemática . . 46
3.25 Enunciado e solução apresentada pelo aluno 47
3.26 Resultados obtidos na avaliação 48

4.1 Gráfico de setores 53
4.2 Gráfico de barras horizontais para o consumo de energia elétrica 54
4.3 Histograma para análise do rendimento da turma na Avaliação de Matemática 55
4.4 Censo 2010. Fonte: IBGE 55

5.1 Primeira questão da atividade 1 57
5.2 Primeira questão resolvida por um dos alunos 58
5.3 Segunda questão resolvida por um dos alunos 58
5.4 Terceira questão resolvida por um dos alunos 59
5.5 Quarta questão resolvida por um dos alunos 59

7.1 Respostas apresentadas pelos alunos na última questão da avaliação de sondagem 65
7.2 Atividade desenvolvida sobre consumo de energia elétrica 66
7.3 Atividade desenvolvida sobre consumo de energia elétrica 67
7.4 Gráfico elaborado para demonstrar redução no consumo de energia elétrica 68
7.5 Registro feito pelo aluno no cálculo do consumo médio de energia elétrica 68
7.6 Tabela fornecida aos alunos 69
7.7 Solução apresentada para a obtenção da mediana e da moda 69

A.1 Anexo 73
A.2 Anexo 74
A.3 Anexo 75

Sumário

I Relações, funções e sequência didática 19

1 Relações 21
1.1 Par ordenado 21
1.2 Plano cartesiano 21
1.3 Produto cartesiano 23
1.4 Relação binária 24

2 Funções 25
2.1 Função afim 29

3 Relato e aplicação da sequência didática 33
3.1 Atividades voltadas ao estudo da eq. reduzida da reta e resultados obtidos 33
3.2 Retomada da equação de reta sob a perspectiva do ensino das funções de 1º grau com situações de modelagem 39

II Porcentagem, representação gráfica e atividades 49

4 Definições prévias 51
4.1 Razão 51
4.2 Porcentagem 51
4.3 Representações gráficas 52

5 Atividades desenvolvidas na sala de aula 57

III Medidas de centrabilidade e atividades propostas 61

6 Medidas de centrabilidade 63
6.1 Média aritmética 63
6.2 Média aritmética ponderada 63
6.3 Mediana 64
6.4 Moda 64

7 Atividades propostas 65

Referências 71

A Anexos 73

Introdução

Na Parte I, mais precisamente nos Capítulos 1 e 2, apresentamos conceitos de relações e funções, em especial, as particularidades da função afim, que fazem parte do trabalho realizado com os alunos de 3º ano (Ensino Médio) da Escola Estadual Romeu de Moraes (São Paulo/SP), durante o ano de 2014. No Capítulo 3, abordamos também a sequência didática aplicada para a turma em questão e apresentamos os resultados obtidos.

A princípio, iniciamos tradicionalmente com os conceitos de Geometria Analítica abordando conteúdos como distância entre dois pontos, ponto médio e condição de alinhamento de três pontos; enfim, seguindo uma ritualização que é típica da ementa para esta série.

Recorremos, em vários momentos, às representações gráficas, acreditando ser esta uma ferramenta necessária para o aprendizado desta matéria. Mas uma pergunta sempre esteve presente em todas as aulas: "Professor, precisa fazer o gráfico?". Este é um dos questionamentos mais ouvidos no nosso cotidiano, e que nos faz refletir sobre o porquê desta dúvida. Seria apenas uma forma de demonstrar certa aversão ao ato de fazer gráficos? Será que nossos alunos não percebem a importância da realização deste tipo de atividade ou sua relação com os assuntos abordados?

Posteriormente, quando começamos o estudo dos coeficientes de uma determinada reta, explicando as definições dos mesmos e procurando por meio de exercícios de fixação uma maneira de estudar e compreender estas questões, constatamos uma enorme dificuldade por parte dos alunos. Talvez a abordagem mecânica realizada em classe, por meio da memorização de regras e procedimentos, não tenha colaborado para o processo de aprendizagem dos nossos educandos.

Recorremos então às atividades práticas, que destacaremos a seguir na Seção 3.1 *Atividades voltadas ao estudo da equação reduzida da reta e resultados obtidos*, imaginando que um trabalho mais concreto colaboraria efetivamente para uma aprendizagem significativa em matemática. Porém, o rendimento não foi satisfatório. Houve muito envolvimento, participação, agitação e euforia, porém isto nem sempre é uma condição necessária e suficiente para que os estudantes compreendam os temas abordados. Como podemos destacar a posição dos autores em [4, p. 179] ao afirmarem que *"não precisamos de objetos na sala de aula, mas de situações em que a resolução de um problema implique a utilização dos princípios lógico-matemáticos a serem ensinados."*

De modo algum, queremos tirar o mérito de trabalhos que se utilizam de objetos como facilitadores de aprendizagem, mas no nosso caso este tipo de iniciativa não teve o alcance pretendido. Para a nossa realidade e dentro do contexto em que estamos inseridos, tivemos a necessidade de trabalhar de uma maneira em que a reflexão interiorizada sobre problemas propostos possibilitou a construção e a produção do próprio conhecimento.

Nesta perspectiva, retomamos os conceitos de funções de primeiro grau em que os estudantes, diante de diversas situações detalhadas na Seção 3.2 desta dissertação, foram capazes de pensar matematicamente, compreendendo os enunciados, manipulando os dados e construindo modelos, transitando entre as seguintes áreas da matemática:

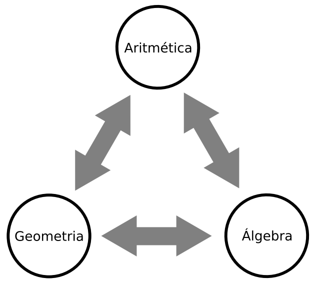


Figura 1: Adaptado de [1]

Nas primeiras atividades, esta transição ocorreu apenas em um único sentido (aritmética $\rightarrow$ álgebra $\rightarrow$ geometria), mas à medida que os trabalhos foram avançando, a ordem foi sendo alterada, demonstrando que os modelos aritmético, algébrico e geométrico podem e devem interagir mutuamente, sendo mobilizados concomitantemente.

Ao término da Parte I, concluímos que os conteúdos (Equações da reta e Funções de 1º grau) contemplados na 3ª série do Ensino Médio dentro da Proposta Curricular do Estado de São Paulo devem ser abordados em uma ordem invertida, já que o trabalho com funções de primeiro grau utilizando situações de modelagem alavancam positivamente o aprendizado com equações de reta na Geometria Analítica.

Prosseguimos na Parte II, Capítulo 4, com as definições de razão e porcentagem. Abordamos também os vários tipos de representações gráficas. No Capítulo 5, mostramos atividades ligadas à porcentagem e aos gráficos em virtude das reflexões feitas pela equipe gestora da E.E. Romeu de Moraes, professores, funcionários, alunos e familiares sobre os resultados obtidos por esta unidade de ensino no SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo). Percebeu-se a necessidade de aprofundar o conhecimento destes dados com os alunos em sala de aula e para isso, a equipe de Matemática e Ciências da Natureza propôs atividades envolvendo estas informações por meio de representação gráfica (gráfico de setores, de barras e de linhas), pois além de trocarmos ideias a respeito, trabalharíamos com os conteúdos da série em questão e aproximaríamos os estudantes deste tipo de linguagem.

E por último, na Parte III, Capítulo 6, definimos os valores médios: média, mediana e moda. No Capítulo 7, mostramos os trabalhos com um projeto da concessionária de energia elétrica em São Paulo–capital (Eletropaulo) envolvendo o consumo de energia elétrica, os perigos com a rede, conceitos físicos, representações gráficas e atividades propostas contendo as medidas de centrabilidade. Neste último capítulo, os estudantes trouxeram a conta do consumo de energia elétrica e com base nestes dados, buscamos encontrar os valores centrais.

Parte I

Relações, funções e sequência didática

1 Relações

1.1 Par ordenado

Seja A um conjunto qualquer com dois elementos. Podemos citar alguns conjuntos deste tipo, tais como:

- conjunto formado por duas figuras geométricas: $A = \{\triangle, \square\}$.

- conjunto formado por dois números inteiros: $A = \{-2, 3\}$.

Como são apenas conjuntos, não faz diferença a ordem como são escritos seus elementos e, portanto, $\{\triangle, \square\} = \{\square, \triangle\}$ e $\{-2, 3\} = \{3, -2\}$.

Porém, em algumas situações, temos a necessidade de ordenar os elementos, de modo que uma ordem distinta ofereça “algo” distinto, como no exemplo abaixo em que buscamos a solução para um sistema linear de duas equações com duas variáveis.

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Para este sistema teríamos como solução $x = 3$ e $y = 2$. Neste caso, o valor para uma variável não é o mesmo para a outra, ou seja, $x = 2$ e $y = 3$ não seria uma solução. Portanto, para representarmos uma solução é necessário adotarmos uma ordem para as variáveis.

Pela igualdade de conjuntos, temos que $\{3, 2\} = \{2, 3\}$, mas para a solução do nosso sistema, devemos fixar uma ordem para a escrita da solução colocando-as na forma de um par ordenado (x, y) e, nesta situação, a solução seria $(3, 2)$. Assim sendo, a ordem dos elementos é muito importante e por causa disso dizemos que a solução é o par ordenado $(3, 2)$, em que (por convenção aqui adotada) o primeiro elemento 3 refere-se ao valor de x e o segundo elemento 2 refere-se ao valor de y.

Com isso, para pares ordenados vale o seguinte:

$$(x, y) = (c, d) \Longleftrightarrow x = c \text{ e } y = d.$$

1.2 Plano cartesiano

Sejam α um plano e duas retas x e y perpendiculares em O contidas neste plano. Podemos pensar nas retas x e y como sendo retas reais, ou seja, existe uma “certa” bijeção de seus pontos com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais.

Dado $P \in \alpha$ um ponto qualquer, traçamos por este ponto duas retas: $x' \parallel x$ e $y' \parallel y$, em que x' é a perpendicular baixada de P sobre o eixo Oy e y' é a perpendicular

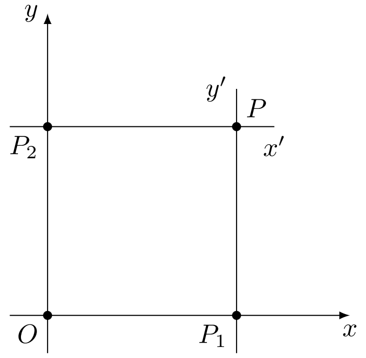


Figura 1.1: Imagem de [2]

baixada de P sobre o eixo Ox. Chamaremos de P_1 a interseção de x com y' e P_2 a interseção de y com x'.

Segundo [2, p. 60-A], definimos:

a) a abscissa de P como sendo o número real x_p representado por P_1.

b) a ordenada de P como sendo o número real y_p representado por P_2.

c) as coordenadas de P são os números reais x_p e y_p, indicados na forma de um par ordenado (x_p, y_p) em que x_p é o primeiro termo.

d) o eixo das abscissas é o eixo x (ou Ox).

e) o eixo das ordenadas é o eixo y (ou Oy).

f) o sistema de eixos cartesiano ortogonal é o sistema xOy.

g) a origem do sistema é o ponto O.

h) o plano cartesiano é o plano α.

i) os eixos Ox e Oy dividem o plano α em quatro quadrantes, caracterizados pelos sinais de seus pontos. No 1º quadrante, temos $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo quadrante, $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro, $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto, $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Exemplo 1.1. Vamos localizar os pontos $A(2,3)$, $B(-2,4)$, $C(-3,-2)$, $D(1,-3)$, $E(2,0)$ e $F(0,-1)$ no plano cartesiano lembrando que, no par ordenado, o primeiro número representa a abscissa e o segundo, a ordenada do ponto. A figura 1.2 apresenta a solução.

Teorema 1.1 ([2, p. 61-A])**.** *Entre o conjunto dos pontos P do plano cartesiano e o conjunto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dos pares ordenados (x_p, y_p) de números reais existe uma correspondência biunívoca, isto é, uma função bijetora $P \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

Demonstração. As definições dadas anteriormente indicam que a todo ponto $P \in \alpha$ corresponde um único par de pontos (P_1, P_2) sobre os eixos x e y, respectivamente e, portanto, um único par ordenado de números reais (x_p, y_p) tais que x_p e y_p são representados por P_1 e P_2, respectivamente.

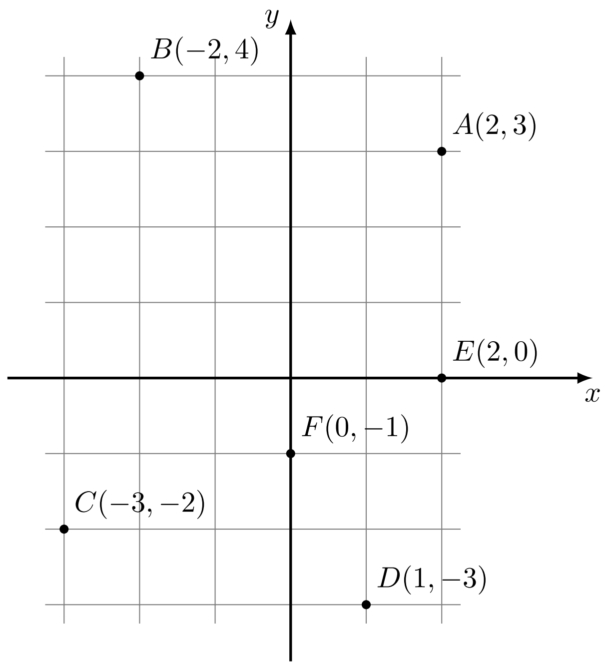


Figura 1.2: Imagem para o Exemplo 1.1

$$\textit{Esquema: } P \to (P_1, P_2) \to (x_p, y_p)$$

Por outro lado, dado o par ordenado de números reais (x_p, y_p), existem $P_1 \in x$ e $P_2 \in y$ tais que P_1 representa x_p e P_2 representa y_p.

Se traçarmos retas $x' \parallel x$ por P_2 e $y' \parallel y$ por P_1, essas retas concorrerão em P. Assim, a todo par (x_p, y_p) corresponde um único ponto $P \in \alpha$.

$$\textit{Esquema: } (x_p, y_p) \to (P_1, P_2) \to P$$

□

1.3 Produto cartesiano

Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Chama-se produto cartesiano de X por Y o conjunto denotado por $X \times Y$ (lê-se "X cartesiano Y" ou "produto cartesiano de X por Y") formado por todos os pares ordenados (x, y) em que o primeiro elemento de cada par ordenado pertence a X e o segundo elemento pertence a Y. Mais formalmente:

$$X \times Y = \{(x, y);\ x \in X, y \in Y\}.$$

Exemplo 1.2. Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{4, 5\}$, temos

$$A \times B = \{(1,4), (1,5), (2,4), (2,5), (3,4), (3,5)\} \quad \text{e}$$
$$B \times A = \{(4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)\}.$$

Note que, $A \times B \neq B \times A$ e portanto não vale a propriedade comutativa para o produto cartesiano de dois conjuntos não vazios.

Observação 1.1.

1. Se $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$ e $Y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ são conjuntos finitos com m e n elementos, respectivamente, então $X \times Y$ é um conjunto finito com $m \cdot n$ elementos.
2. Se $X = \emptyset$ ou $Y = \emptyset$, então $X \times Y = \emptyset$.
3. Se X e Y são não vazios e um deles é infinito, então $X \times Y$ é um conjunto infinito.

1.4 Relação binária

Consideremos os conjuntos $X = Y = \mathbb{R}$. O produto cartesiano de X por Y é o conjunto $X \times Y = \mathbb{R}^2$. Se considerarmos o conjunto de pares ordenados (x, y) de $X \times Y$ com a condição $y = x + 1$, teremos um exemplo de uma relação em $\mathbb{R}$. Em símbolos:

$$R = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = x + 1\}.$$

Em geral, uma relação binária em $\mathbb{R}$ é qualquer subconjunto $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Esta pode possuir outras propriedades que dão origem a alguns tipos importantes de relações.

A seguir, descrevemos algumas delas.

Relação Reflexiva. Seja R uma relação binária no conjunto A. Dizemos que R é reflexiva se $(x, x) \in R$, $\forall x \in A$. Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ vemos facilmente que

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$

é uma relação reflexiva em A.

Relação Simétrica. Seja R uma relação definida no conjunto A. Dizemos que R é simétrica quando

$$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R, \ \forall a, b \in A.$$

Por exemplo, no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4\}$ a relação

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1)\}$$

é simétrica.

Relação Transitiva. Seja R uma relação definida no conjunto A. Dizemos que R é transitiva quando

$$(a, b) \in R \text{ e } (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R, \ \forall a, b, c \in A.$$

Por exemplo, no conjunto $A = \{1, 2, 3\}$ a relação abaixo é transitiva.

$$R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (1, 3)\}.$$

Relação de Equivalência. Uma relação R em um conjunto A é chamada *relação de equivalência* se for reflexiva, simétrica e transitiva. Vale observar que tais relações são de grande importância em várias áreas da matemática.

2 Funções

Dados dois conjuntos não vazios X e Y, uma relação que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$ recebe o nome de função de X em Y.

Podemos citar alguns exemplos de funções em que relacionamos duas grandezas (entenda-se por grandeza toda característica que possa ser expressa por uma medida, como por exemplo, comprimento, área, volume, etc...) e que nos demonstram que relações deste tipo caracterizam-se como uma função:

- o preço pago em função da quantidade de carne adquirida;
- a distância percorrida por um ciclista em função do tempo decorrido;
- a pressão do mar que depende da profundidade e outros.

Portanto, uma função definida em um conjunto X e com valores em um conjunto Y é uma regra, ou um conjunto de instruções, que nos diz como associarmos a cada elemento $x \in X$ um único elemento $y \in Y$.

É comum, na literatura, denotar-se uma função de X para Y pelo esquema:

$$\begin{aligned} f : X &\to Y & &\text{(lê-se ‘}f\text{ de }X\text{ em }Y\text{’)} \\ x &\mapsto y = f(x) & &\text{(lê-se ‘a cada }x\text{ está associado um único }y\text{’)} \end{aligned}$$

Função via relação. Mais precisamente, uma função $f : X \to Y$ é uma relação binária R no produto cartesiano $X \times Y$ com duas características importantes:

- nenhum elemento do conjunto X fica sem correspondência com algum elemento do conjunto Y;
- cada elemento do conjunto X não pode ter correspondência com mais de um elemento do conjunto Y.

Portanto, temos que

$$\text{para cada } x \in X, \text{ existe um único } y \in Y \text{ tal que } (x, y) \in R.$$

A unicidade do elemento y acima nos permite escrever $y = f(x)$ para indicar que este depende do elemento x e que a função em questão é f.

Domínio, contradomínio e imagem

Dada uma função $f : X \to Y$, o conjunto X é chamado *domínio* de f e o conjunto Y, de *contradomínio* de f.

A *imagem* de f é representada pelos elementos do contradomínio Y que possuem correspondência com algum elemento do domínio X, ou seja, é o conjunto

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x);\, x \in X\}.$$

Como consequência, sempre tem-se $\mathrm{Im}(f) \subseteq Y$. Quando valer a outra inclusão, e portanto $\mathrm{Im}(f) = Y$, dizemos que f é uma função *sobrejetora* (ou *sobrejetiva*).

Outro tipo de função importante é uma função *injetora* (ou *injetiva*), sob a qual tem-se

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ sempre que } x_1 \neq x_2.$$

Gráficos

Em geral, os textos mais elementares apresentam uma relação entre conjuntos por meio de Diagramas de Venn, conforme os exemplos a seguir.

Dados os conjuntos

$$X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{e} \quad Y = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

relacionaremos alguns elementos de X ao seu valor somado com duas unidades, em Y, como ilustrado no seguinte Diagrama de Venn.

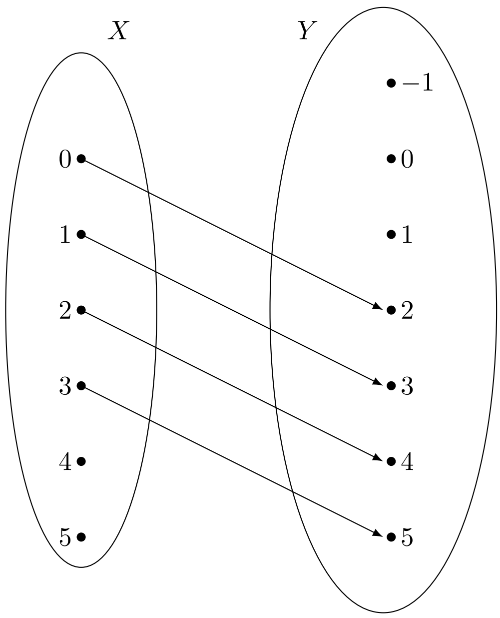


Figura 2.1: Associação de alguns elementos $x \in X$ aos elementos $y \in Y$ tais que $y = x + 2$

No entanto, como podemos ver, os elementos 4 e 5 do conjunto X não têm correspondente em Y, e portanto esta relação não define uma função com domínio X.

Ainda para os conjuntos X e Y citados acima, relacionaremos cada elemento de X ao seu valor subtraído de uma unidade, no conjunto Y.

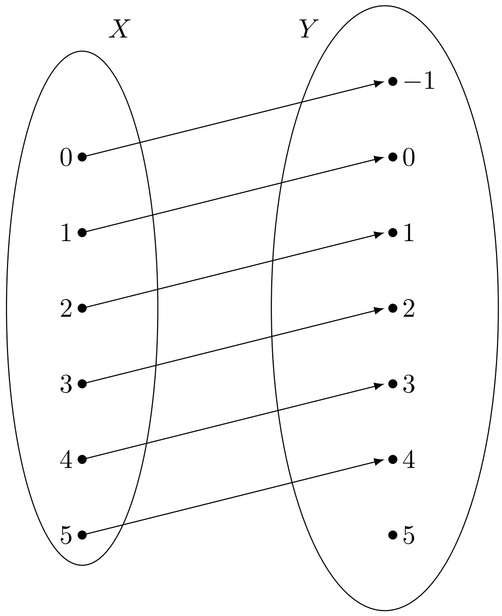


Figura 2.2: Associação de cada elemento $x \in X$ ao elemento $y \in Y$ tal que $y = x - 1$

Observe que, neste último Diagrama de Venn, todos os elementos de X têm um único elemento correspondente em Y e esta relação define uma função.

Sendo assim, é interessante sermos capazes de, para cada $x \in X$, obtermos um único elemento de Y, o qual diremos que está associado a x. Se fizermos isto, estaremos utilizando o conceito de função.

Não aprofundaremos a noção de função desta maneira pois, se os conjuntos apresentarem uma grande quantidade de elementos, ficará inviável o uso do Diagrama de Venn para representar esta situação. Para isto, a representação gráfica no plano cartesiano seria uma melhor alternativa.

Destacaremos, ao longo do trabalho, a importância de transmitir a ideia de função como uma correspondência e interdependência entre grandezas envolvidas. Antes de representá-las graficamente no plano cartesiano, citaremos a terminologia *gráfico* adotada por [6, p. 83–85] que considera:

> *"O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $X \times Y$ formado por todos os pares ordenados (x, y) onde x é um ponto qualquer de X e $y = f(x)$. Assim,*
>
> $$G(f) = \{(x, y) \in X \times Y;\ y = f(x)\} = \{(x, f(x));\ x \in X\}.$$
>
> *A fim de que um subconjunto $G \subset X \times Y$ seja o gráfico de alguma função $f : X \to Y$, é necessário e suficiente que G cumpra às seguintes condições:*
>
> G1. *Para todo $x \in X$ existe um par ordenado $(x, y) \in G$ cuja primeira coordenada é x.*
>
> G2. *Se $p = (x, y)$ e $p' = (x, y')$ são pares pertencentes à G com a mesma primeira coordenada x, então $y = y'$ (isto é, $p = p'$).*
>
> *Em suma, a terminologia que consideramos adequada é a seguinte: um subconjunto qualquer de $X \times Y$ é o gráfico de uma relação de X para Y se esse conjunto cumpre às condições* G1 *e* G2 *acima estipuladas."*

Crescimento e decrescimento de funções

Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que:

- f é *crescente* se, para quaisquer x_1 e x_2 em X distintos, tem-se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \text{ou} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

- f é *decrescente* se, para quaisquer x_1 e x_2 em X distintos, tem-se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \text{ou} \quad \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

- f é *monótona não-decrescente* se, para quaisquer x_1 e x_2 em X, tem-se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

- f é *monótona não-crescente* se, para quaisquer x_1 e x_2 em X, tem-se

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2).$$

Segundo [6, p. 91],

> "*em qualquer dos quatro casos, f diz-se monótona. Nos dois primeiros (f crescente ou f decrescente) diz-se que f é estritamente monótona. Nestes dois casos, f é uma função injetiva*".

Observação 2.1. É importante destacarmos que existem funções crescentes em um subconjunto do domínio e decrescentes em outro.

Por exemplo, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dada por $f(x) = x^2 - 2x - 3$, podemos buscar o conjunto dos pontos nos quais esta função é crescente ou decrescente. Notamos na figura 2.3 que f é decrescente no intervalo $(-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty)$.

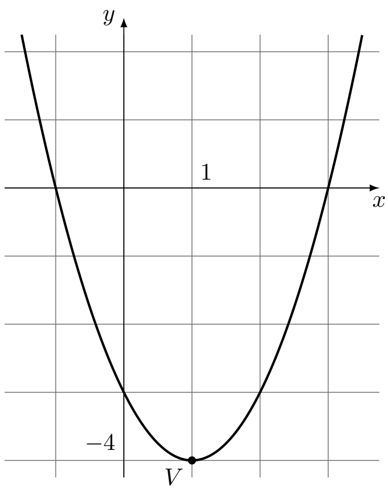


Figura 2.3: Função decrescente em $(-\infty, 1]$ e crescente em $[1, +\infty)$

Este tipo de comportamento de crescimento ou decrescimento de uma função pode ser estudado com elementos de Cálculo Diferencial.

2.1 Função afim

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Existem alguns casos particulares da função afim, tais como:

- a função identidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x$, para $x \in \mathbb{R}$.

- a função linear $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax$, para $0 \neq a \in \mathbb{R}$ fixado e $x \in \mathbb{R}$.

- a função constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b$, para $b \in \mathbb{R}$ fixado e $x \in \mathbb{R}$.

Proposição 2.1 ([2, p. 96-A e 97-A])**.** *O gráfico da função afim $f(x) = ax + b$ é uma reta.*

Demonstração. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ três pontos distintos do gráfico da função $y = f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ (ver figura 2.4). Portanto, devemos ter $x_1 \neq x_2 \neq x_3 \neq x_1$, pois caso contrário (por exemplo, se $x_1 = x_2$) teríamos uma igualdade também nas coordenadas y correspondentes, já que f é função, contrariando a hipótese de serem distintos os três pontos.

Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, mostremos inicialmente que os triângulos retângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCE$ (na figura 2.4) são semelhantes. De fato,

$$(x_1, y_1) \in G(f) \Rightarrow y_1 = ax_1 + b \tag{2.1}$$
$$(x_2, y_2) \in G(f) \Rightarrow y_2 = ax_2 + b \tag{2.2}$$
$$(x_3, y_3) \in G(f) \Rightarrow y_3 = ax_3 + b \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.2) de (2.3) e (2.1) de (2.2), temos:

$$\left.\begin{array}{l} y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2) \\ y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a.$$

Observamos que o quociente acima é possível, já que $x_1 \neq x_2 \neq x_3$.

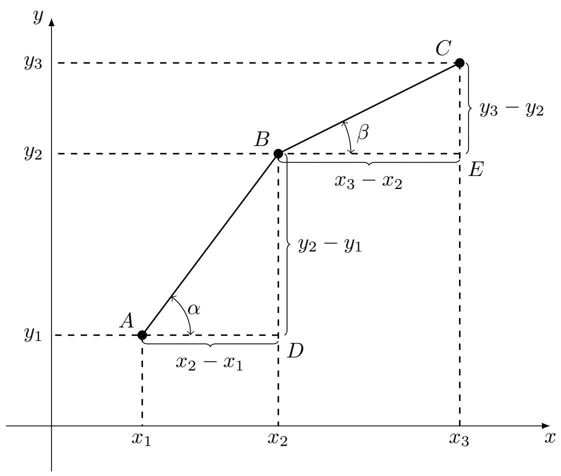


Figura 2.4: Imagem de [2]

Os triângulos $\triangle ABD$ e $\triangle BCE$ são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que pontos A, B e C estão alinhados. $\square$

Considerando que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja afim, podemos obter b como o valor que a função $f(x) = ax + b$ assume quando $x = 0$, ou seja, $b = f(0)$.

Este número b pode ser chamado de valor inicial da função. Do ponto de vista geométrico, como o gráfico da função afim é uma reta (não vertical), ela intersecta o eixo Oy em um ponto único, de onde entendemos que o coeficiente b corresponde à ordenada deste ponto.

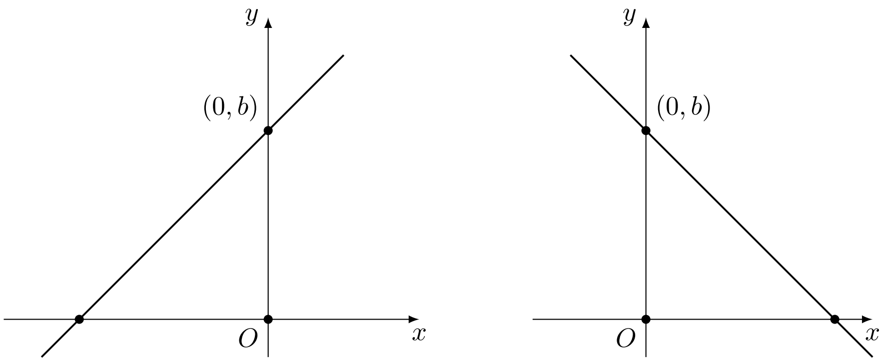


Figura 2.5: Representação Gráfica do Coeficiente b

Como o gráfico da função afim é uma reta e esta fica inteiramente determinada quando se conhece dois de seus pontos, o coeficiente a pode ser obtido a partir da relação dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função assume em dois pontos distintos x_1 e x_2, conforme processo descrito a seguir. Calculamos

$$f(x_1) = ax_1 + b, \tag{2.4}$$
$$f(x_2) = ax_2 + b. \tag{2.5}$$

Subtraindo (2.4) de (2.5) temos

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1),$$

e portanto

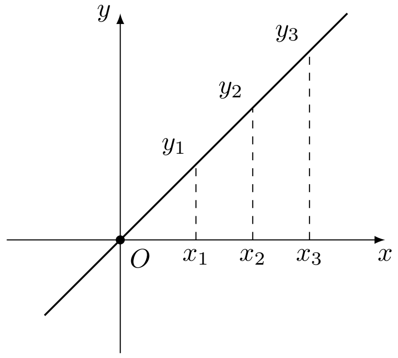
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Notamos que, para a determinação de a, precisamos que x_1 seja diferente de x_2 e com isso, podemos acrescentar que toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.

O número a é chamado de taxa de crescimento (ou taxa de variação) e pode ser compreendido como uma constante de proporcionalidade, pois considerando uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como afim, a variação Δy entre dois valores distintos de y relacionada à variação Δx entre dois pontos distintos de x, na forma $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, nos fornece a taxa de variação a. Neste caso, temos que

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \text{constante} = a, \text{ ou seja, } \Delta y = a\Delta x.$$

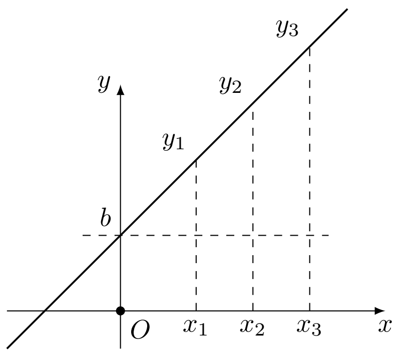
Dessa forma, obtemos um gráfico correspondente à uma reta que passa pela origem do sistema de coordenadas, conforme representação a seguir.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_2 - 0}{x_2 - 0} = \frac{y_3 - 0}{x_3 - 0} = \text{constante} = a$$

Figura 2.6: Representação gráfica de uma reta que passa pela origem

Quando duas grandezas x e y variam de tal forma que $y = ax + b$, ou seja, $f(x) = ax + b$, existe uma relação entre os valores de $y - b$ e os de x, o que nos fornece uma taxa de variação a. A representação gráfica correspondente é uma reta com inclinação a e com $b \neq 0$.



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - b}{x_1 - 0} = \frac{y_2 - b}{x_2 - 0} = \frac{y_3 - b}{x_3 - 0} = \text{constante} = a$$

Figura 2.7: Representação gráfica de uma reta que não passa pela origem

Crescimento e decrescimento da função afim

Abaixo, apresentamos um resultado interessante que justifica os termos *crescente* e *decrescente* para uma função, de acordo com o sinal de sua taxa de variação.

Teorema 2.1. *Uma função afim $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, é dita:*

1. *crescente se, e somente se, a taxa de variação for positiva.*

2. *decrescente se, e somente se, a taxa de variação for negativa.*

Demonstração. **(1)** f é crescente $\Leftrightarrow a > 0$.

($\Rightarrow$) Vamos supor que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$. Se tomarmos $x_1 = -\frac{b}{a}$, temos $f(x_1) = a \cdot (-\frac{b}{a}) + b = 0$. Se tomarmos $x_2 = -\frac{b}{a} + 1$, temos: $f(x_2) = a \cdot (-\frac{b}{a} + 1) + b = -b + a + b = a$. Portanto, $-\frac{b}{a} < -\frac{b}{a} + 1 \Rightarrow f(-\frac{b}{a}) < f(-\frac{b}{a} + 1) \Rightarrow 0 < a$.

($\Leftarrow$) Suponha que $a > 0$. Mostremos que f é crescente. Para isso, sejam $x_1 \neq x_2$ quaisquer. Assim, podemos concluir que

$$a > 0 \Rightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)} > 0 \Rightarrow \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 - x_2} > 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0.$$

Portanto, $f(x) = ax + b$ é crescente.

(2) f é decrescente $\Leftrightarrow a < 0$.

($\Rightarrow$) Suponhamos f decrescente, isto é, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$, $\forall x_1, x_2$. Se tomarmos $x_1 = -\frac{b}{a} - 1$, teremos $f(x_1) = a(-\frac{b}{a} - 1) + b = -a$. Se tomarmos $x_2 = -\frac{b}{a}$, teremos $f(x_2) = 0$. Portanto,

$$-\frac{b}{a} - 1 < -\frac{b}{a} \Rightarrow f(-\frac{b}{a} - 1) > f(-\frac{b}{a}) \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow a < 0.$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que $a < 0$. Daí, para $x_1 \neq x_2$,

$$a < 0 \Rightarrow \frac{a(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)} < 0 \Rightarrow \frac{ax_1 - ax_2}{x_1 - x_2} < 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} < 0 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0.$$

Portanto, $f(x) = ax + b$ é decrescente. $\square$

3 Relato e aplicação da sequência didática

3.1 Atividades voltadas ao estudo da equação reduzida da reta e resultados obtidos

Ao longo de 2014, os alunos da E.E. Romeu de Moraes (São Paulo/SP) do 3º ano (Ensino Médio - Turmas A e B) tiveram muitas dificuldades com assuntos voltados à Geometria Analítica, principalmente no que diz respeito ao estudo da equação da reta com os seus respectivos coeficientes. Mas os educandos, em sua maioria, não conseguiam explicar com clareza a origem de tais dificuldades, e apenas justificavam e classificavam este conteúdo como algo de difícil compreensão. Porém, observamos que os assuntos introdutórios de Geometria Analítica, como por exemplo, distância entre dois pontos, ponto médio de um segmento de reta e condição de alinhamento de três pontos, foram melhor compreendidos.

Desse modo, trabalhamos a equação reduzida da reta, estudando os seus coeficientes angular e linear. Além dos exercícios praticados, pensamos em uma atividade prática para auxiliar os alunos na compreensão do referido assunto.

Neste momento, demos início a um projeto realizado em grupos de 3 alunos, com o objetivo de trabalharmos representações gráficas a fim de encontrar os coeficientes linear e angular de uma reta em um plano cartesiano, para em seguida, determinarmos a equação geral da reta.

Para isso, os alunos dividiram-se em grupos ficando a critério dos mesmos a divisão destas equipes de trabalho. Este projeto foi dividido em três etapas, sendo que na primeira, os educandos tiveram como tarefa fazer uma pesquisa sobre as Pontes Estaiadas em Harpa e Radial. Nesta mesma pesquisa, deveriam constar os seguintes itens:

- Capa contendo os nomes dos integrantes do grupo, número, série, turma, nome da escola, professor e disciplina;

- Introdução (explicar o significado de um estai e do mastro em uma ponte estaiada, apresentar os detalhes da configuração dos estais tipo harpa e tipo radial);

- Desenvolvimento (descrever as relações que, em um primeiro momento, podemos estabelecer com a geometria analítica - gráficos, eixos x e y, coeficiente angular, coeficiente linear e equação de reta - por meio da observação da configuração de uma ponte estaiada);

- levantamento de Referências Bibliográficas.

Apenas para que tenhamos mais clareza sobre o assunto tratado nesta pesquisa, gostaríamos de explicar alguns conceitos presentes na ponte estaiada. A ponte estaiada é dividida em três elementos estruturais: tabuleiro, estai e mastro. O tabuleiro (pista), é executado em concreto, e suportado por planos de estais (o estai pode ser composto por uma única barra ou por um conjunto de barras paralelas entre si), ancorados no topo do mastro (o mastro equivale à torre existente sobre o tabuleiro, destinada a receber os carregamentos atuantes na superestrutura, transferidos para o mesmo através dos estais).

Figura 3.1: Componentes estruturais da ponte estaiada. Ponte de Strömsund, na Suécia. Imagem de `www.flickr.com/photos/ylvas/43342208`

Com relação à disposição dos estais, citaremos dois tipos: harpa e radial. A ponte estaiada harpa (b) é caracterizada pela fixação dos estais ao longo da altura do mastro de modo a manter o paralelismo entre os mesmos, enquanto que na ponte estaiada radial (a), os cabos encontram-se ancorados ao longo do tabuleiro em pontos igualmente espaçados, sendo fixados em um ponto comum situado no topo do mastro, conforme figura a seguir.

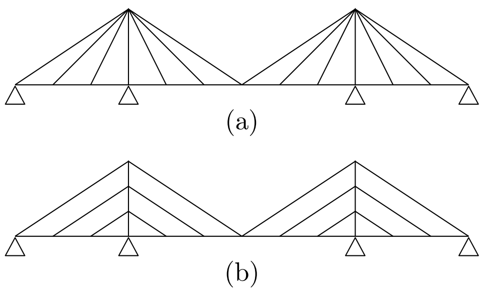


Figura 3.2: Configuração longitudinal dos estais. Adaptado de [7]

O uso da pesquisa teve a intenção de despertar o interesse do aluno para os conteúdos da Equação Geral da Reta e principalmente, por meio do uso da percepção, visualizar "retas" presentes em uma ponte estaiada. Logo na sequência, percebemos, nos registros feitos das pesquisas apresentadas, as relações estabelecidas entre os estais das pontes e as retas, conforme figura 3.3.

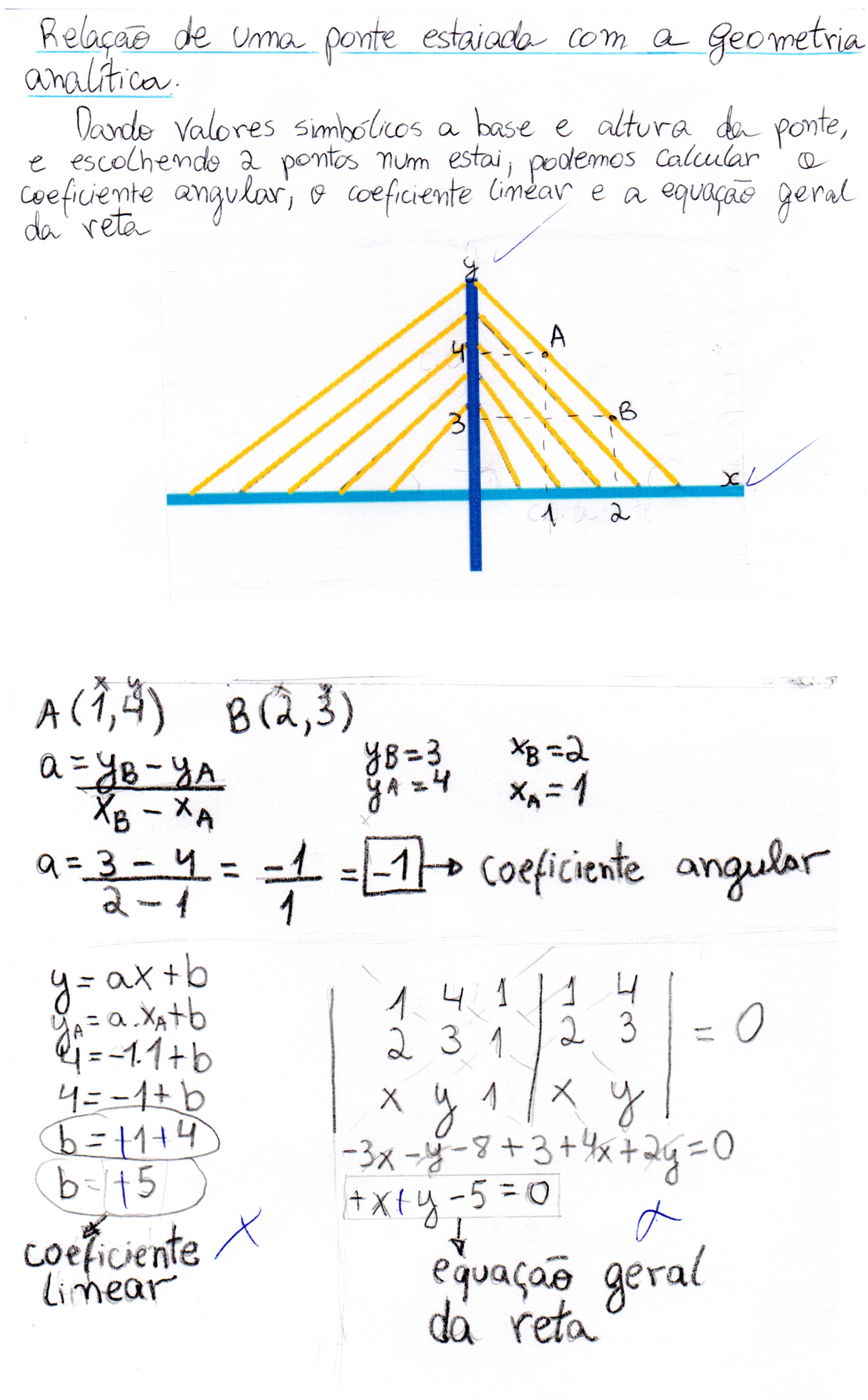


Figura 3.3: Registro dos alunos

Na segunda etapa, os alunos construíram um protótipo de ponte estaiada (figura 3.4) medindo distâncias a partir deste modelo, calculando o coeficiente angular, observando o coeficiente linear e escrevendo a equação da reta correspondente a cada estai.

Os alunos receberam uma tabela (figura 3.5) para preenchimento com os dados obtidos em campo.

Figura 3.4: Alunos montando um protótipo da ponte estaiada

Os alunos deverão registrar na tabela abaixo os valores verticais e horizontais para calcular o coeficiente angular e estabelecer relações entre as equações de retas obtidas, bem como observar o coeficiente linear nas pontes estaiadas.

Identificação dos estais	Vertical (Δy)	Horizontal (Δx)	m = tg $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ m $\rightarrow$ coeficiente angular	q $\rightarrow$ coeficiente linear	Equação da reta y = mx + q
Estai 1-nº	30	40	$\frac{30}{40}$ = 0,75	30	Y = 0,75x + 30
Estai 2-nº	60	80	$\frac{60}{80}$ = 0,75	60	Y = 0,75x + 60
Estai 3-nº	90	120	$\frac{90}{120}$ = 0,75	90	Y = 0,75x + 90
Estai 4-nº	90	120	$\frac{90}{120}$ = 0,75	90	Y = 0,75x + 90
Estai 5-nº	90	80	$\frac{90}{80}$ = 1,125	90	Y = 1,125x + 90
Estai 6-nº	90	40	$\frac{90}{40}$ = 2,25	90	Y = 2,25x + 90

Figura 3.5: Tabela com as medidas obtidas no protótipo da ponte estaiada

Por último, representaram graficamente (figura 3.6, p. 37) os estais em um plano cartesiano e com base nos dados obtidos, encontraram as equações de reta correspondentes a cada um dos estais.

Podemos dizer que, nesta atividade, houve comprometimento pela maior parte da sala, porém vale ressaltar que isto não é garantia de aprendizado.

Assim como no ensino da Geometria que, segundo [1, p. 150],

> "*. . . é possível caracterizar o conhecimento geométrico através do que consideramos suas quatro faces: a Percepção, a Construção, a Representação e a Concepção. Não são fases, como as da Lua, que se sucedem linear e periodicamente, mas faces, como as de um tetraedro, que se articulam mutuamente, configurando uma estrutura a partir da qual, de modo metafórico, pode-se apreender o significado e as funções do ensino da Geometria*",

de forma análoga, podemos aplicar estas atividades sensoriais (percepção, construção e representação) e cognitivas (concepção) no ensino da Geometria Analítica. Fica evidente que as atividades sensoriais foram mobilizadas durante esta atividade das Pontes Estaiadas, mas a compreensão dos conceitos da Equação Geral da Reta é duvidosa.

Represente as equações encontradas, por meio das observações e dos cálculos feitos na tabela, no gráfico a seguir:

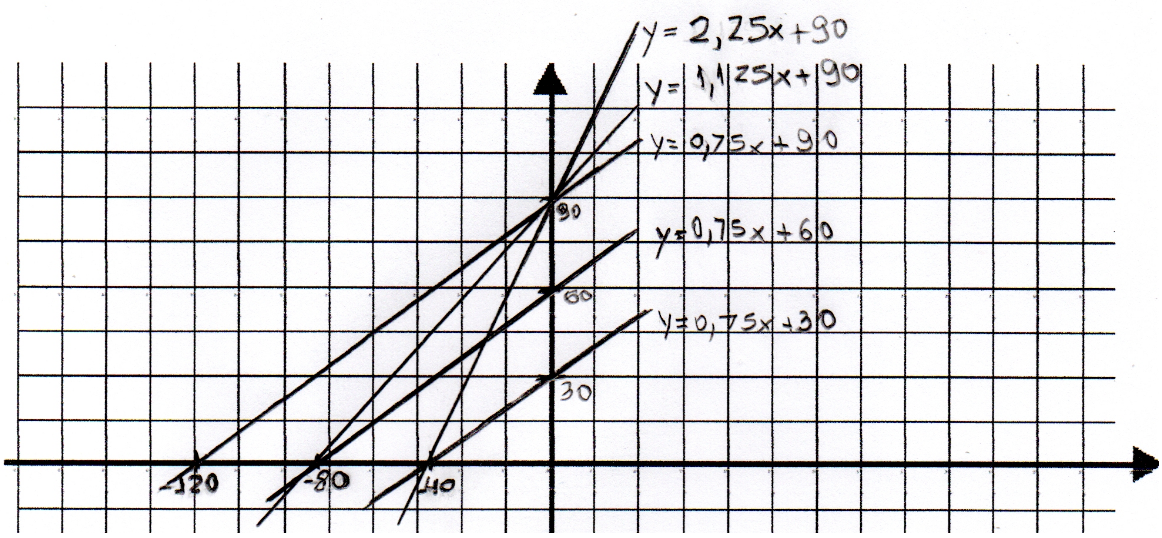


Figura 3.6: Representação dos estais por meio de equações de reta no plano cartesiano

Desse modo, realizamos uma avaliação para certificarmos o grau de entendimento das turmas de 3º ano sobre este assunto e verificarmos quais seriam as próximas providências a serem tomadas. Na sequência, analisaremos parte das questões envolvidas nesta avaliação e apresentaremos os resultados obtidos em uma das turmas (3ºA), conforme as figuras 3.7, 3.8 e 3.9.

1) Existe alguma semelhança entre as retas apresentadas no gráfico abaixo? Caso exista tal semelhança, é possível relacioná-la com algum dado das equações da reta fornecidas? Justifique a sua resposta.

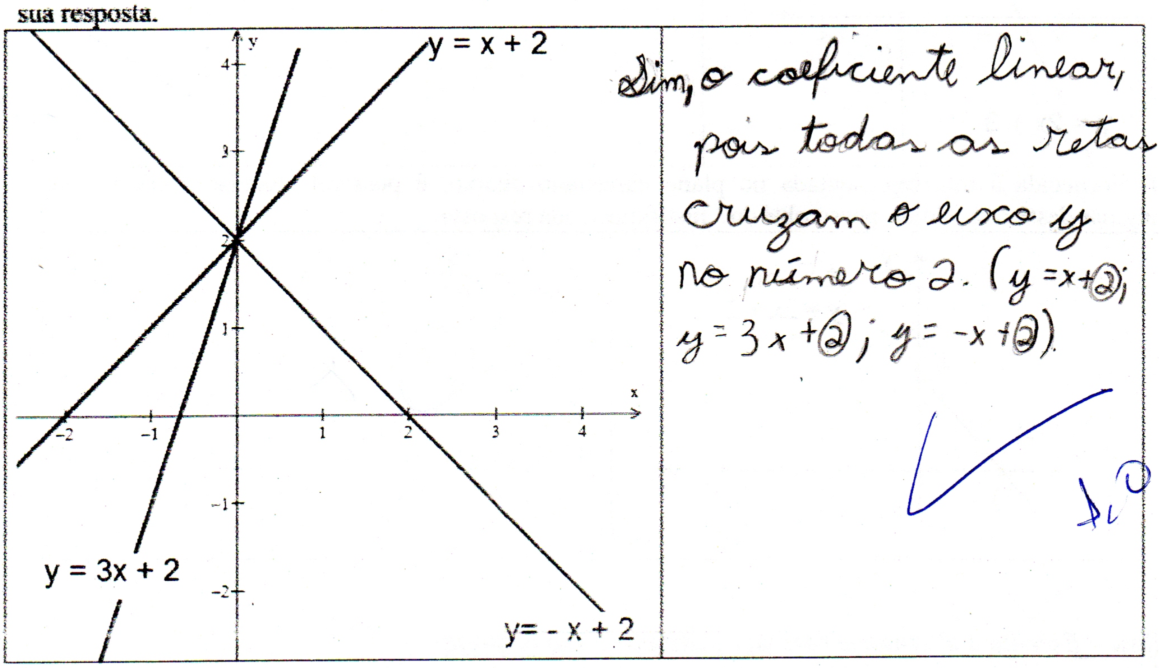


Figura 3.7: Soluções apresentadas por alunos na avaliação

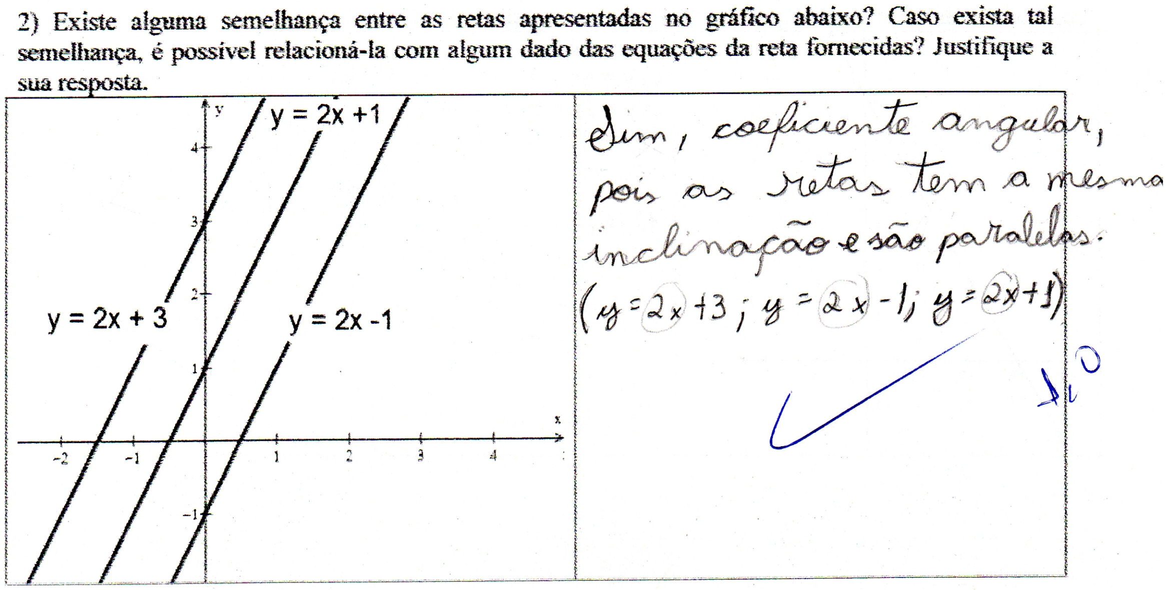


Figura 3.8: Soluções apresentadas por alunos na avaliação

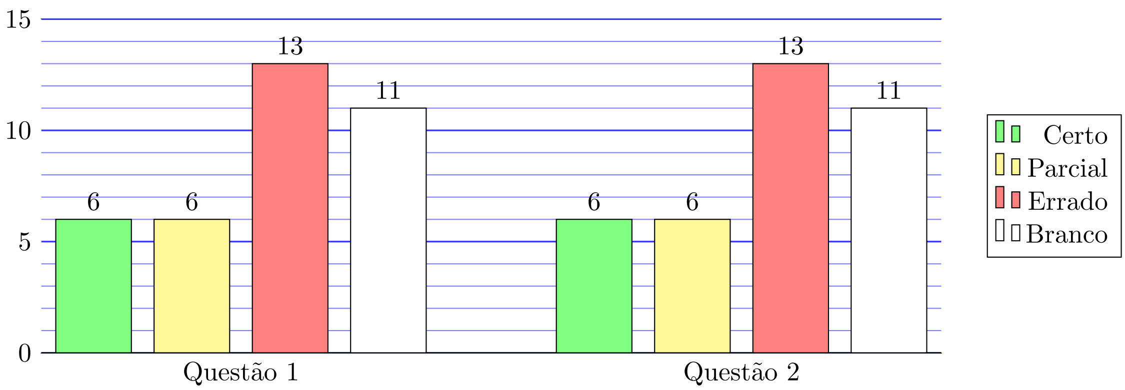


Figura 3.9: Resultados obtidos com as questões 1 e 2 das figuras 3.7 e 3.8

Por meio dos resultados obtidos, nota-se que os alunos, em sua maioria, não percebiam que as informações presentes nos gráficos destas duas questões subsidiavam as suas resoluções. Alguns estudantes percebiam as semelhanças nas retas envolvidas, porém não encontravam argumentos que justificavam as suas respostas. Neste momento, era necessário que apenas eles identificassem o coeficiente angular e linear das retas dadas.

Na próxima questão, apresentada na figura 3.10, foi solicitada a equação da reta e percebe-se que os educandos não usaram a representação gráfica como uma fonte de dados para identificar, por exemplo, o coeficiente angular por meio da tangente do ângulo que a reta faz com o eixo das abscissas. Aqueles poucos que acertaram esta questão, reproduziram uma técnica aprendida em sala de aula, usando o determinante de uma matriz para encontrar a equação da reta solicitada, conforme figura 3.10. Os outros que erraram, colocaram a alternativa “c” como resposta, acreditando que o valor -3 do eixo das abscissas seria o coeficiente de x. Muitos entregaram esta questão em branco e nenhum aluno apresentou uma resolução próxima àquilo que foi trabalhado na atividade prática da ponte estaiada.

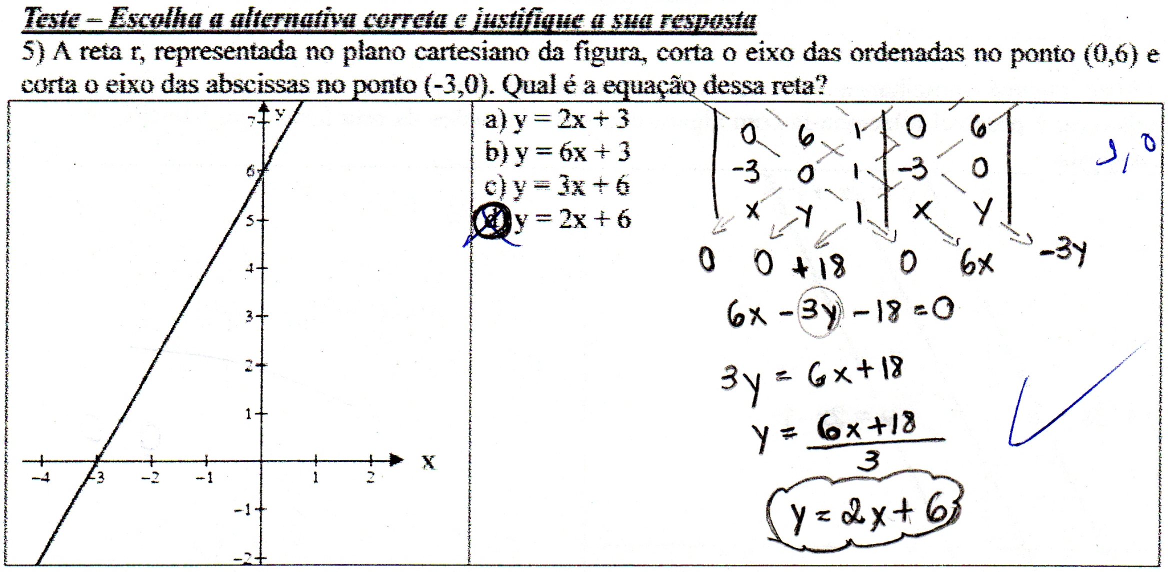


Figura 3.10: Solução apresentada por poucos alunos na avaliação

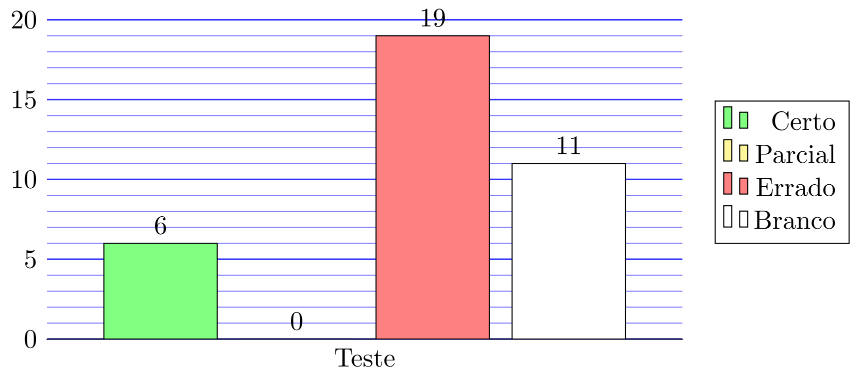


Figura 3.11: Resultados obtidos com o teste da figura 3.10

As atividades propostas nesta sequência didática e a forma como esta avaliação foi elaborada tiveram a intenção de oferecer subsídios aos alunos para concluírem as soluções dos problemas apresentados e, ao mesmo tempo, prepará-los para análise de gráficos. Porém, os resultados apresentados nas figuras 3.9 e 3.11 mostram claramente que o objetivo inicial de reconhecer a equação da reta e o significado de seus coeficientes não foi alcançado.

3.2 Retomada da equação de reta sob a perspectiva do ensino das funções de 1º grau com situações de modelagem

Diante dos resultados citados na Seção 3.1 desta sequência didática, foram levantados questionamentos sobre o baixo rendimento apresentado pela turma (3ºA), em que alguns alunos argumentaram, mesmo com dificuldade em explicitar com clareza a origem de suas dificuldades, que a falta de familiaridade com o uso de representações gráficas se deve ao fato de que este referido assunto não fora abordado com frequência ao longo das séries anteriores.

Isto nos exigiu uma reflexão profunda de como poderíamos retomar este assunto sob outra perspectiva, mas não ignorando o fato de que o uso dos gráficos deveria novamente ser abordado.

Nas ATPC's (Aula de Trabalho Pedagógico Coletivo - desenvolvida semanalmente nas escolas públicas do Estado de São Paulo) temos uma parceria com o C.E.E.V. (Centro de Estudos da Escola da Vila), onde em diversas reuniões discutimos atividades voltadas ao ensino de funções de 1º grau.

Pensou-se em um trabalho voltado às situações de modelagem por acreditarmos em atividades que alavancariam a construção do saber matemático pelo próprio jovem, em que os mesmos criariam meios e soluções para os exercícios propostos, pois segundo [8, p. 30] *"a ideia de modelagem implica a ideia de produção de conhecimento, o que possibilita focar o aspecto central visado pelo ensino"*.

Propusemos uma avaliação de sondagem baseada em questões do C.E.E.V. e percebemos uma pré-disposição dos alunos em realizar esta atividade, mostrando os seus pensamentos e as suas ideias matemáticas conforme figuras a seguir.

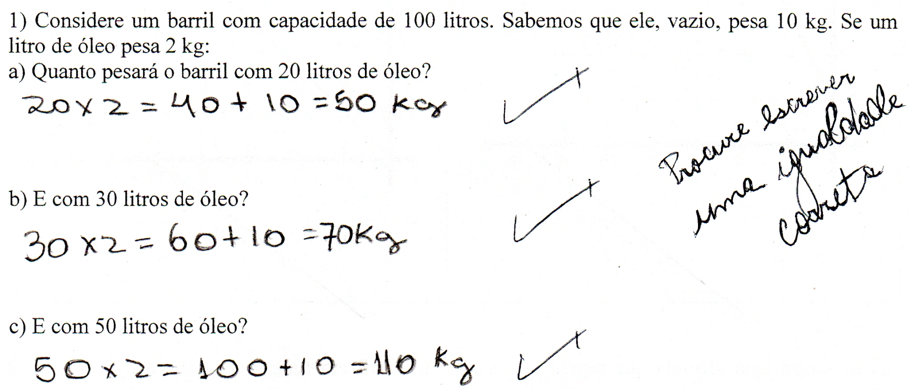

1) Considere um barril com capacidade de 100 litros. Sabemos que ele, vazio, pesa 10 kg. Se um litro de óleo pesa 2 kg:
a) Quanto pesará o barril com 20 litros de óleo?
20x2 = 40 + 10 = 50 kg
b) E com 30 litros de óleo?
30 x2 = 60+10 = 70Kg
c) E com 50 litros de óleo?
50x2= 100+10 = 110 kg
Procure escrever uma igualdade correta

Figura 3.12: Solução apresentada na avaliação de sondagem de forma incorreta

É notória a necessidade de encontrar uma solução para este exercício, porém as igualdades apresentadas na figura 3.12 demonstram alguns equívocos, sendo necessária uma retomada sobre uma escrita matemática adequada para estas equivalências.

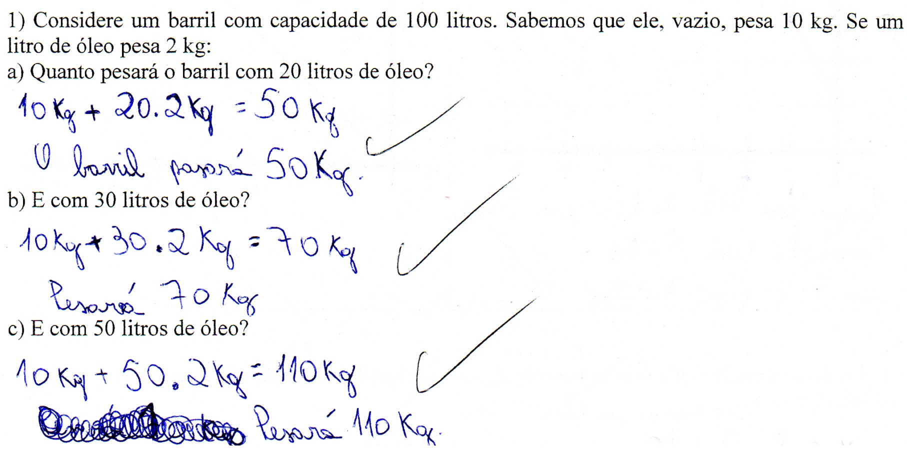

1) Considere um barril com capacidade de 100 litros. Sabemos que ele, vazio, pesa 10 kg. Se um litro de óleo pesa 2 kg:
a) Quanto pesará o barril com 20 litros de óleo?
10 Kg + 20.2Kg = 50 Kg
O barril pesará 50 Kg.
b) E com 30 litros de óleo?
10 Kg + 30.2 Kg = 70 Kg
Pesará 70 Kg
c) E com 50 litros de óleo?
10 Kg + 50.2 Kg = 110 Kg
~~[illegible]~~ Pesará 110 Kg.

Figura 3.13: Solução apresentada na avaliação de sondagem de forma correta

Nesta solução já percebemos uma resposta apresentada de forma correta, mostrando a existência de constantes e de variáveis.

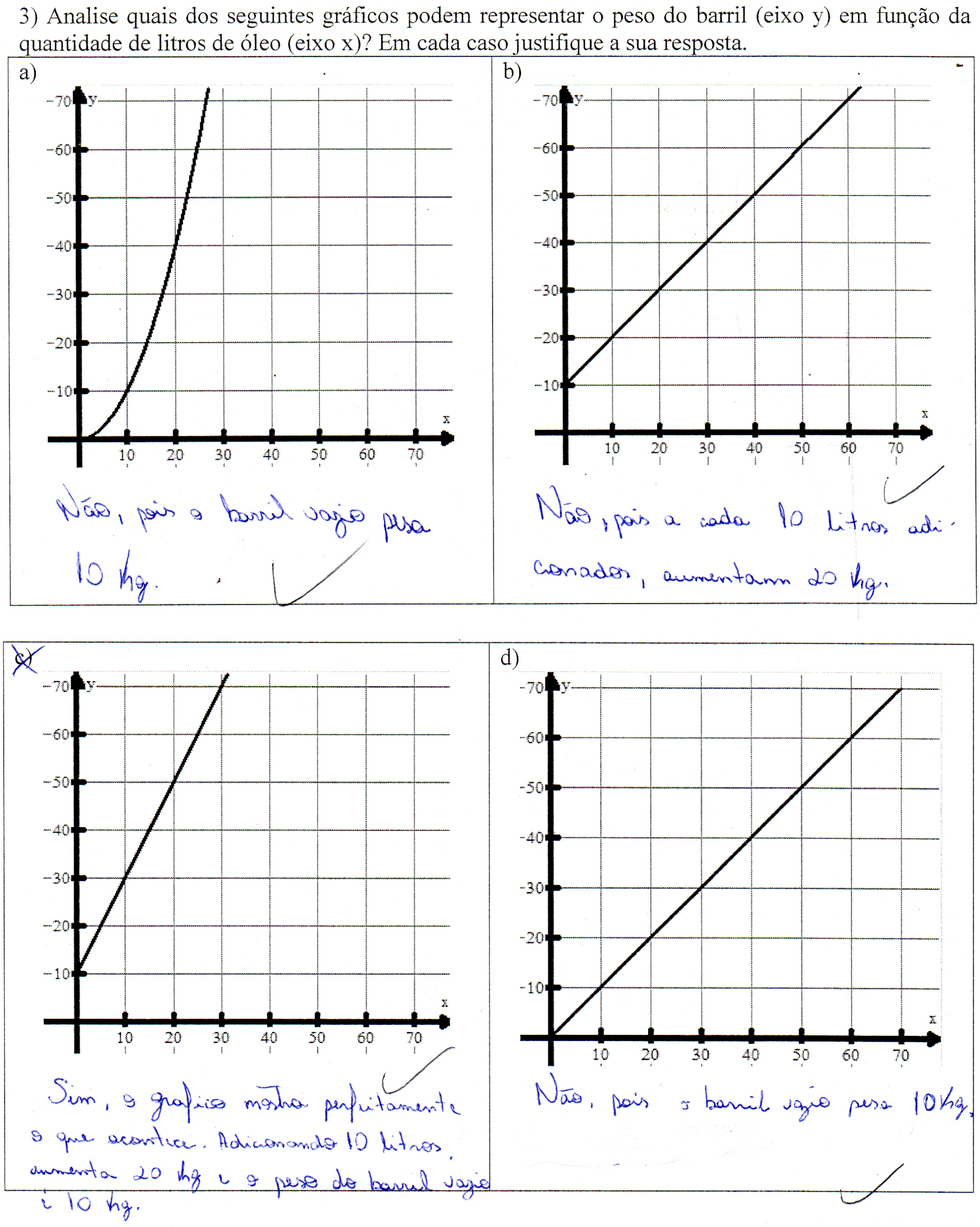
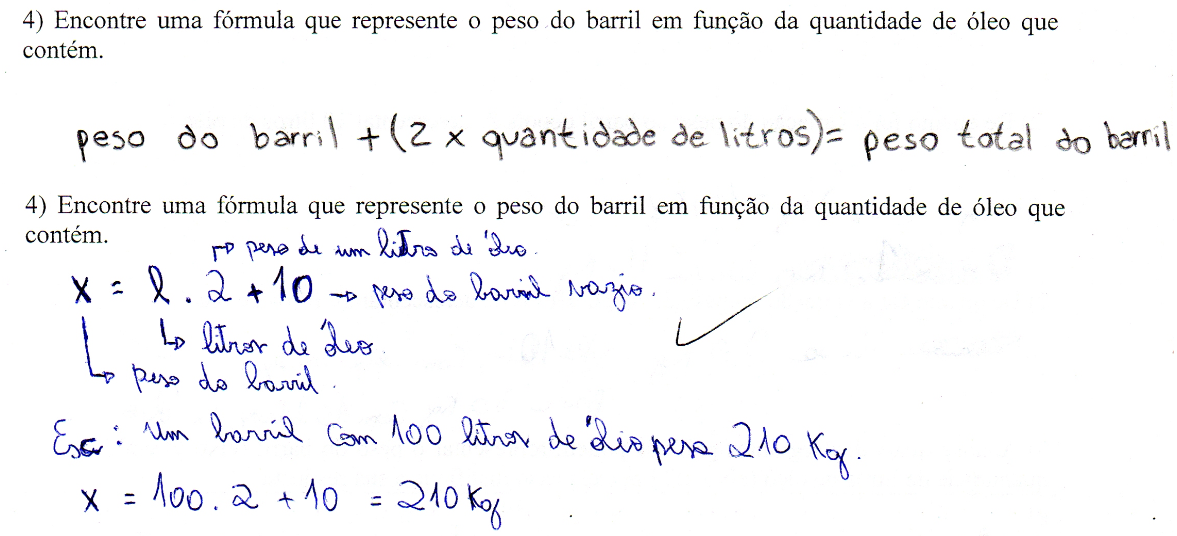


Figura 3.14: Exercício envolvendo gráficos referente às situações propostas nas figuras 3.12 e 3.13

Abordamos também nesta avaliação uma situação envolvendo gráficos a fim de possibilitar uma relação entre o pensamento aritmético e o geométrico. Oferecemos gráficos já construídos e pedimos uma análise de quais destas situações representariam o exercício 1 (citado anteriormente na figuras 3.12 e 3.13). Esta avaliação de sondagem tinha apenas o objetivo, como o próprio nome diz, de identificar os conhecimentos prévios dos alunos sobre os conceitos de funções de primeiro grau e, no entanto, mostrou-se como uma atividade potente e motivadora, convidando a todos para uma situação de modelos matemáticos conforme figuras a seguir. Assim como [3, p. 20], neste nosso trabalho *"chamaremos simplesmente de Modelo Matemático um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado"*.



4) Encontre uma fórmula que represente o peso do barril em função da quantidade de óleo que contém.

peso do barril + (2 x quantidade de litros) = peso total do barril

4) Encontre uma fórmula que represente o peso do barril em função da quantidade de óleo que contém.

→ peso de um litro de óleo.

X = l . 2 + 10 → peso do barril vazio.

↳ litros de óleo.

↳ peso do barril.

Ex: Um barril com 100 litros de óleo pesa 210 Kg.

X = 100 . 2 + 10 = 210 Kg

Figura 3.15: Soluções expressas por meio de generalização a partir do exercício proposto nas figuras 3.12 e 3.13

No gráfico da figura 3.16 (pg. 42) percebemos que vários estudantes foram capazes de generalizar uma determinada situação e reconhecer nela algumas regularidades conforme dados indicados na correção da questão 4 (enunciada e resolvida na figura 3.15).

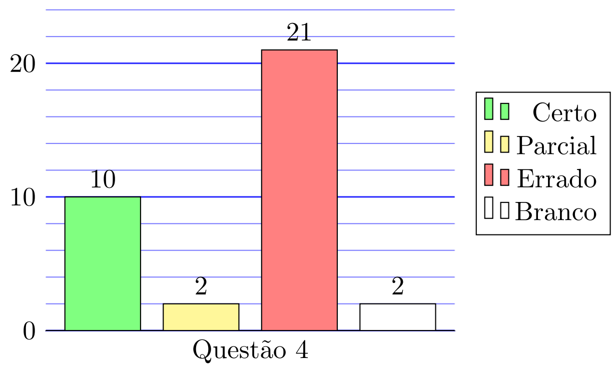


Figura 3.16: Resultados obtidos com as soluções apresentadas para a questão da figura 3.15

Esta avaliação serviu para sinalizar que o trabalho com modelagem matemática poderia colaborar para o aprendizado da turma, visto que a partir de uma situação de aritmética chegou-se em uma representação abstrata, validando os modelos matemáticos. Esta turma foi questionada se os gráficos auxiliaram no encontro da fórmula solicitada na questão 4 e os mesmos responderam que nem sequer olharam para este tipo de representação. Desse modo, devemos variar o trabalho feito com o plano cartesiano, criando outras situações concretas de aprendizagem para construção de gráficos.

Na próxima atividade, continuando com o desenvolvimento das funções de primeiro grau, retomamos o trabalho com situações de interdependência em que uma grandeza varia dependendo de outra.

Na primeira questão, de acordo com a figura 3.17, aparece uma pergunta voltada à taxa de variação que, neste caso, relacionamos a uma quantidade de litros de água que escoam por uma torneira durante um determinado período de tempo, fazendo uma analogia desta taxa encontrada com o coeficiente angular de uma reta dada, citada na primeira parte desta sequência didática. Na figura 3.18 apresentamos uma resolução.

1) Um tanque está cheio com certa quantidade de água e às 12 hs abre-se uma torneira para esvaziá-lo (ele esvazia de forma constante). Contamos com os seguintes dados:

Horário	Litros que o tanque contém
12:10	150 litros
12:25	120 litros
12:35	100 litros

Com base nos dados da tabela e no enunciado do exercício, responda as seguintes questões:
a) Quantos litros o tanque perde por minuto? (O valor encontrado será chamado de vazão e a sua unidade será dada em litros/min.)

Figura 3.17: Enunciado elaborado pelo professor

12h35
12h25
00h10 min

120
−100
020 l

20 | 10
2 l/min

R: o tanque perde 2 l por minuto.

Figura 3.18: Solução apresentada pelo aluno para o exercício da figura 3.17

Nesta primeira questão, criamos o item (b), solicitando a quantidade inicial em litros que havia no tanque quando este começou a esvaziar, em que podemos fazer um comparativo com o coeficiente linear da equação da reta abordada anteriormente. Na figura 3.19 apresentamos uma solução para este exercício.

b) Quantos litros tinha o tanque quando começou à esvaziar? E aos 15 minutos de esvaziamento?
Começou a esvaziar com 170 litros
Ao 12h15 ficou com 140 l.

15 min
× 2 l/min
30 l

170 l
− 30 l
140 l

Figura 3.19: Solução apresentada pelo aluno e enunciado do exercício

Dando sequência a esta atividade, solicitamos o preenchimento de uma tabela com os dados envolvidos nesta questão e também a construção de um gráfico (ver figuras 3.20 e 3.21).

e) Preencha a tabela a seguir:

Quantidade inicial de litros do tanque.	Vazão(Q) (litros/min)	Tempo(t) transcorrido em minutos	Quantidade de litros que se perde. (Q x t)	Quantidade de litros que o tanque contém.
170	2	0	2·0=0	170 − 0 = 170
170	2	10	2·10=20	170 − 20 = 150
170	2	20	2·20=40	170 − 40 = 130
170	2	30	2·30=60	170 − 60 = 110
170	2	40	2·40=80	170 − 80 = 90
170	2 2	50	2·50=100	170 − 100 = 70
170	2	60	2·60=120	170 − 120 = 50
170	2	70	2·70=140	170 − 140 = 30
170	2	85	2·85=170	170 − 170 = 0

Figura 3.20: Preenchimento de tabelas com os dados propostos

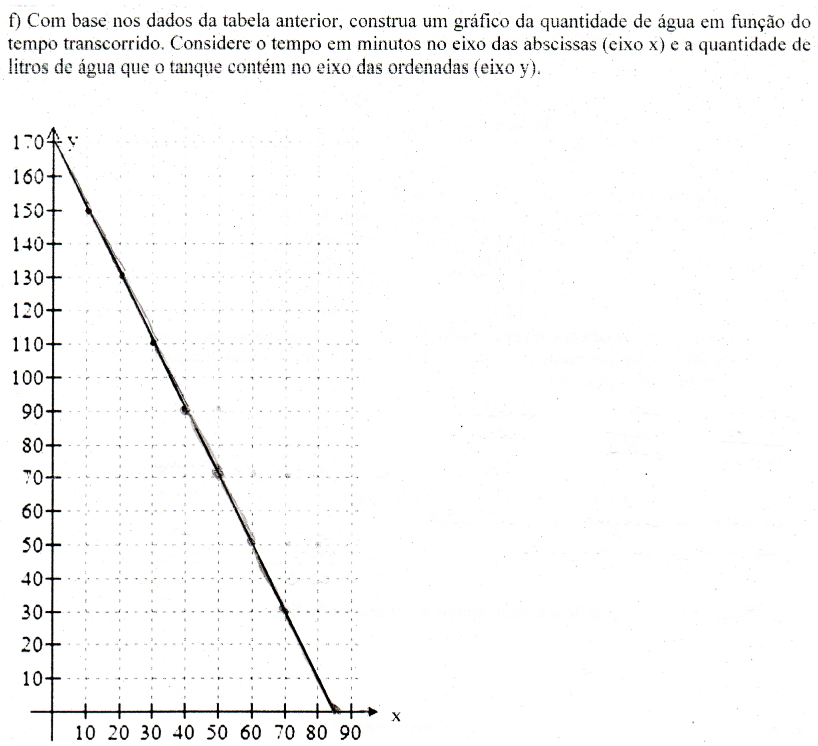


Figura 3.21: Gráfico construído pelo aluno de acordo com os dados propostos

Na próxima figura observamos uma capacidade de simplificar a parte fundamental da situação-problema por meio de uma linguagem matemática. Ficou-se evidente que o pensamento matemático pode ser construído mediante uma atividade bem planejada e que a modelagem matemática propicia este tipo de aprendizado, possibilitando aos educandos uma forma de prever tendências.

Outro fato que podemos verificar na figura abaixo é o modo de como a escrita foi feita de maneira simples e clara, adequando-se ao objetivo proposto nesta atividade e contribuindo para que o discente compreenda o fenômeno analisado, checando a veracidade da fórmula encontrada.

g) Encontre a fórmula que representa a quantidade de água em que o tanque contém em função do tempo transcorrido. Sabemos que a água é medida em litros e o tempo em minutos.

litros = 170 - (tempo x2)

Ex. quantos litros sobrarão em 30 minutos

litros = 170 - (30x2)

litros = 170 - 60

litros = 110

Figura 3.22: Solução expressa por meio de generalização a partir do exercício proposto

Observamos novamente que a construção do gráfico nesta atividade não fora utilizada para a representação de uma generalização solicitada no exercício (g) (figura 3.22) pois os estudantes mostraram certa intimidade com o uso de tabelas (figura 3.20) e este esquema teria os auxiliado na resolução deste problema.

Propusemos diversos exercícios em que, a partir de registros em língua materna, a classe levantasse os dados do problema e elaborasse estratégias para os registros em tabela, transitando também para as representações geométricas e algébricas.

A próxima atividade, que merece um destaque neste artigo, se trata de uma experimentação desenvolvida no laboratório desta unidade de ensino. Criamos situações práticas que ofereciam possibilidades para uma obtenção de dados a fim de se criar um modelo matemático. Foi uma atividade rica tanto para os professores que formularam esta atividade bem como para os alunos que a desenvolveram.

Primeiramente pegamos uma bureta graduada em mililitros (ml) com um volume de 30ml de água e, utilizando um cronômetro, medimos os intervalos de tempo necessários para esvaziar um ml deste recipiente. Coletados os dados das grandezas tempo e volume, montamos uma tabela. De posse das informações deste experimento, construímos um gráfico da quantidade de água em função do tempo, considerando o tempo no eixo das abscissas e o volume no eixo das ordenadas.

Na sequência foram feitos alguns questionamentos, como por exemplo, identificar o valor do volume inicial (análogo ao coeficiente linear da reta) e a taxa de variação dada pelo volume escoado de água por segundo (fazendo uma analogia ao coeficiente angular da reta). Encontrando, finalmente, a função da quantidade de água presente na bureta em relação ao tempo transcorrido, em que podemos fazer uma comparação com uma equação de reta. Foi citado aos alunos que apesar de montarmos uma tabela situando pontualmente alguns dados, teríamos um sistema contínuo, já que a taxa de variação $(\frac{\triangle \text{ volume}}{\triangle \text{ tempo}})$ era constante.

Esta atividade pode ser feita também de outra forma, caso a escola não tenha uma bureta para fazer este experimento, também podemos utilizar um copo de plástico graduado em mililitros, fazendo um furo próximo à base deste recipiente para escoamento do líquido e proceder da mesma forma conforme citado no experimento anterior.

Foram propostos diversos exercícios trabalhando sobre o conteúdo de funções de primeiro grau e sempre que possível, procurando estabelecer relações com o estudo das equações de reta apresentadas na Geometria Analítica. Gostaríamos de finalizar este trabalho mostrando uma avaliação individual feita pelos nossos estudantes a fim de verificar o nível de aprendizagem dos mesmos, mostrando os resultados obtidos ao final deste processo.

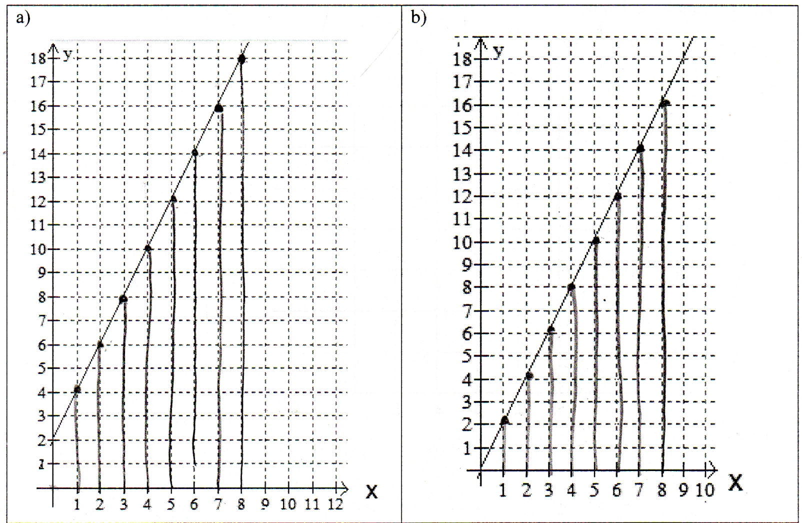
Colocamos como primeira questão nesta avaliação uma situação de aprendizagem semelhante às atividades anteriores, em que foi proposta uma análise de dois gráficos, pedindo ao corpo discente que verificasse qual das situações representadas graficamente se adequava ao enunciado da situação-problema.

Na figura 3.23, mostramos uma resposta apresentada por um dos nossos alunos.

Desta vez, invertemos a ordem das atividades solicitadas, pois oferecemos primeiramente o gráfico em que, a partir dele, os educandos deveriam completar uma tabela, obrigando-os a consultar o esquema correto apresentado na figura 3.23.

(espaço em branco intencional)

1) Um fabricante coloca seu produto ao início do mês zero com o preço p e aumenta mensalmente esse preço de R$2,00. No mês oito esse preço passou a ser de R$18,00.
Nestas condições, analise qual dos seguintes gráficos representa o preço do produto (eixo das ordenadas – eixo y) em função dos meses fornecidos (eixo das abscissas – eixo x). Em cada caso justifique a sua resposta.



a)	b)
nesse gráfico que está correto mostra os valores do mês 1 ao 8 acrescentando a cada um deles 2,00 reais chegando ao mês 8 com 18 reais	nesse gráfico que não corresponde o enunciado o mês 8 está com 16 sendo que o problema pede com 18 mas a ordem é crescente de 2 por mês.

Figura 3.23: Exercício envolvendo análise de gráfico em uma avaliação

Vemos a seguir na figura 3.24, uma tabela preenchida.

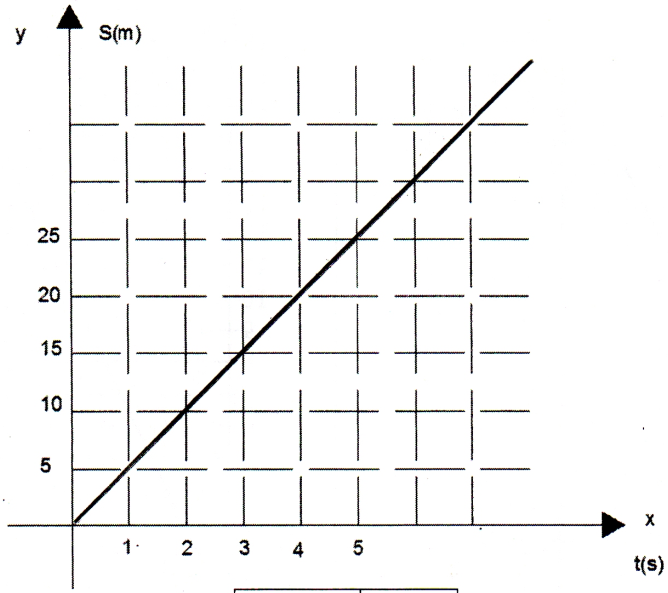
Com base no gráfico escolhido, complete a tabela e identifique uma equação do preço do produto em função dos meses transcorridos.

Mês	PREÇO FINAL
0	R$2,00
2	R$6,00
4	R$10,00
6	R$14,00
8	R$18,00
x	X.2+2

Figura 3.24: Expressão de regularidades por meio de uma linguagem matemática

No próximo exercício, temos uma situação semelhante ao primeiro problema, em que pedimos uma equação capaz de traduzir as ideias do registro gráfico/tabela por meio da linguagem algébrica. Vejamos a próxima figura.

2) Preencha a tabela com os dados de espaço (S) e tempo (t) com base no gráfico abaixo de S = f(t), espaço em função do tempo.



S (m)	t (s)
0	0
5	1
10	2
15	3
20	4
25	5

Com base na tabela acima, identifique uma equação do espaço S(m) em função do tempo t(s).

$S = 5 . t$

Figura 3.25: Enunciado e solução apresentada pelo aluno

Nesta avaliação, 60% da turma atingiu um rendimento satisfatório conforme os dados apresentados na figura 3.26. Conseguimos atingir um dos nossos principais objetivos que consistia em auxiliar os jovens a expressarem matematicamente padrões e regularidades em sequências numéricas ou gráficas, indo ao encontro do pensamento de Bassanezi [3, p. 18] que afirma que

> *"o objetivo fundamental do uso da matemática é de fato extrair a parte essencial da situação-problema e formalizá-la em um contexto abstrato onde o pensamento possa ser absorvido com uma extraordinária economia de linguagem".*

(espaço em branco intencional)

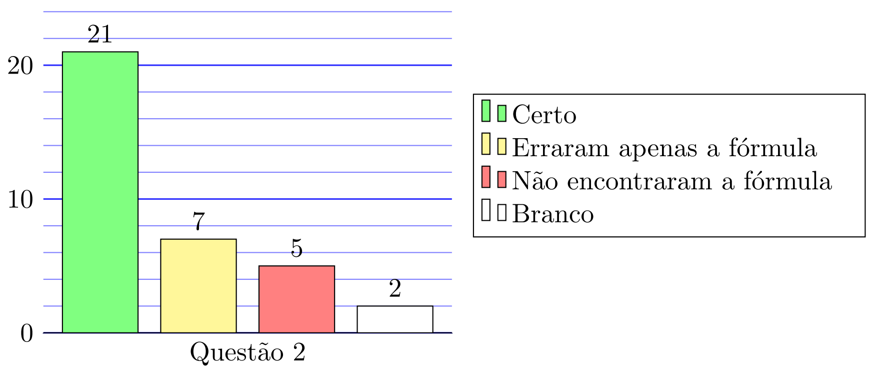


Figura 3.26: Resultados obtidos na avaliação

Apesar dos avanços registrados pela turma, percebemos que alguns alunos ainda não conseguem relacionar os pensamentos matemáticos envolvidos, porém é notório que partimos de uma situação em que $\frac{1}{3}$ da sala entregava a avaliação totalmente em branco e agora temos apenas 2 de um universo de 35.

Vemos que estes problemas, abordados na segunda parte da sequência didática, o qual chamamos de retomada da equação da reta sob a perspectiva do ensino da função de 1º grau com situações de modelagem, proporcionaram um bom início para aqueles que nem sequer se arriscavam a dar resposta às atividades oferecidas.

Restando ainda que os mesmos procurem seguir as orientações dadas pelos professores, buscando meios de estudos para se aperfeiçoarem nestes assuntos, pois muitos ainda chegavam a uma situação de avaliação sem um mínimo preparo necessário, contando apenas com aquilo que havia sido desenvolvido em sala de aula.

Parte II

Porcentagem, representação gráfica e atividades

4 Definições prévias

4.1 Razão

Pensando em um desenho de uma edificação, necessitamos usar uma relação entre as medidas reais e as medidas que caibam no pedaço de papel para a representação gráfica. Para isto, usamos uma relação entre dois valores de uma mesma gradeza, ou seja, adotamos uma escala (E) em que relacionamos dois valores, o real (D) e o do desenho (d). Assim,

$$E = d : D.$$

Assim, quando usamos a escala $1 : 100$ (lê-se 'um para cem'), cada cem unidades reais serão representadas, no papel, por uma unidade. Por exemplo, 100cm do real valerão, no desenho, apenas 1cm, ou seja, se dividirmos 100 por 1, chegaremos a conclusão que a medida do real é cem vezes maior que a do desenho.

Nesta situação, estabelecemos uma relação de divisão entre dois números que representam estas dimensões, a qual denominamos de razão.

Definição segundo [5, p. 1]:

> "*Dados dois números a e b, chamamos de razão de a para b, ou simplesmente razão entre a e b, nessa ordem, ao quociente $\frac{a}{b}$ que também pode ser indicado $a : b$.*
>
> *O número a é chamado de antecedente, e b é denominado consequente. Quando a e b forem medidas de uma mesma grandeza, elas devem ser expressas na mesma unidade de medida.*"

4.2 Porcentagem

A expressão porcentagem aparece com frequência em nosso cotidiano de diversas formas, entre elas podemos citar: os jornais, as revistas e os cupons fiscais. Ela vem do latim *per centum*, que significa por cento, por cem ou a cada centena. O símbolo %, que significa uma divisão por cem, equivale a expressão por cento.

Exemplificando uma situação de porcentagem, podemos dizer que quando realizamos uma compra em um estabelecimento comercial, parte do que pagamos é recolhido na forma de tributos, supondo que uma compra de R$ 200,00 feita em um mercado tenha um imposto cobrado equivalente a 30% do total da compra, ou seja, o tributo de 30% sobre o valor de R$ 200,00 equivale a divisão do valor em 100 partes iguais, e dessas 100 partes iguais, tomamos 30 partes, isto arrecadaria para os cofres públicos o montante de R\$ 60,00. Simbolicamente, temos:

$$30\% \text{ de } 200 \Longleftrightarrow 30 \cdot \frac{200}{100} = \frac{30}{100} \cdot 200 = 60.$$

Acrescentando, podemos dizer que toda razão escrita na forma $\frac{a}{b}$ cujo denominador b for igual a 100 é chamada de porcentagem. Voltando ao nosso exemplo:

$$30\% = \frac{30}{100}.$$

4.3 Representações gráficas

Os vários tipos de representação gráfica oferecem uma comunicação visual imediata, servindo como um instrumento facilitador para o entendimento daqueles que as observam e fazendo com que o leitor retire informações importantes das mesmas, analisando-as e interpretando-as.

Nesta seção, veremos quatro tipos de representação gráfica: gráfico de setores (ou "pizza"), gráfico de barras, histograma e gráfico de linhas (poligonal).

Gráfico de setores

De acordo com o Censo da Educação Superior 2013 divulgado pelo MEC (Ministério da Educação) e pelo INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira) em 9 de setembro de 2014, estavam matriculados 7.526.681 estudantes em instituições de ensino superior, considerando inclusive os alunos de pós-graduação *scricto sensu* (mestrado e doutorado). Deste total, 5.373.450 frequentam instituições privadas de ensino superior.

Esta quantidade de alunos matriculada na rede pública e privada de ensino superior pode ser representada por um gráfico de setores, ou também denominada por alguns como "gráfico de pizza". Para isto, verificaremos a frequência relativa de cada um dos dados.

Vale destacar que para esta variável, ou seja, para o item levantado nesta pesquisa, contaremos o número de vezes que este evento ocorreu dentro do estudo feito. A este número damos o nome de frequência absoluta e podemos indicar por FA. Neste exemplo, temos como $FA = 5.373.450$ para os estudantes de universidades privadas e $FA = 2.153.231$ para os alunos de universidades públicas. Observem que a soma das frequências absolutas é igual ao total n dos dados disponíveis. Neste caso, $n = 7.526.681$. A partir da razão entre a frequência absoluta (FA) e o número total de dados (n), obtemos a frequência relativa e a indicaremos por FR.

Para os discentes matriculados na **rede privada** de ensino superior, temos:

$$FR = \frac{FA}{n} = \frac{5.373.450}{7.526.681} = 0,7139 \cong 0,71.$$

Já para os discentes matriculados na **rede pública**, temos:

$$FR = \frac{FA}{n} = \frac{2.153.231}{7.526.681} = 0,2860 \cong 0,29.$$

É comum expressarmos a frequência relativa na forma de porcentagem.

Como o gráfico é formado por setores circulares (parte de um círculo limitada por dois raios e um arco), as medidas dos ângulos correspondentes aos arcos serão proporcionais às frequências relativas.

Podemos obter tais medidas por meio de uma proporção (entenda-se por proporção uma igualdade entre duas razões):

Universidade Pública

$$\frac{100\%}{29\%} = \frac{360°}{x}.$$

Como dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vale a propriedade $a \cdot d = b \cdot c$, então $100 \cdot x = 29 \cdot 360 \Rightarrow x = 104,4°$.

Universidade Privada

$$\frac{100\%}{71\%} = \frac{360°}{y}.$$

Como dada a proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, vale a propriedade de que o produto dos extremos $(a \cdot d)$ é igual ao produto dos meios $(b \cdot c)$, então $100 \cdot y = 71 \cdot 360 \Rightarrow y = 255,6°$.

Este procedimento acima também é chamado de regra de três simples, porém não precisaríamos tê-lo feito duas vezes, pois uma vez obtida a medida do ângulo referente aos indivíduos matriculados na Universidade Pública, poderíamos ter obtido:

$$y = 360° - x = 360° - 104,4° = 255,6°.$$

O gráfico de setores pode ser obtido por meio de desenho instrumentado à mão, utilizando régua, compasso e transferidor, ou ainda, através de *softwares*, como o Excel, por exemplo.

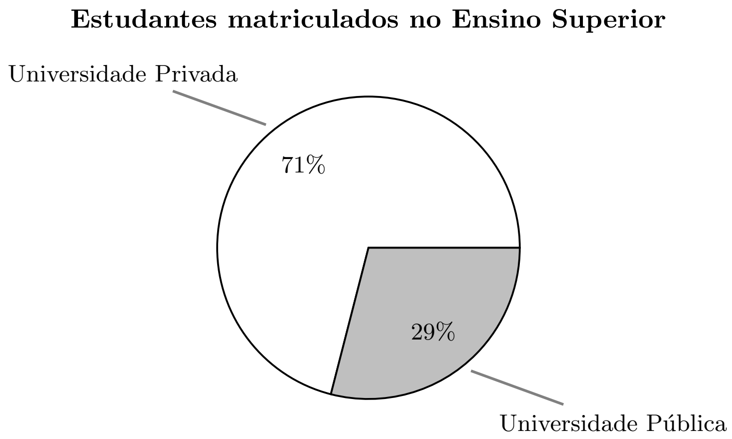


Figura 4.1: Gráfico de setores

De modo geral, o gráfico de setores serve para representar uma variável (entenda-se por variável, cada um dos itens levantados em uma pesquisa) com k realizações distintas, em que dividimos o círculo em k ângulos proporcionais às porcentagens das realizações analisadas. No nosso exemplo, a variável "estudantes matriculados no ensino superior" apresentavam dois tipos de respostas, pública ou privada. Sendo assim, o nosso círculo foi dividido em duas partes proporcionais às porcentagens obtidas pela pesquisa.

Gráfico de barras

A representação abaixo recebe o nome de gráfico de barras horizontais e apresenta o consumo de energia elétrica ao longo dos meses de um ano. Note que, para cada mês, temos uma barra horizontal que representa o consumo em kWh (quilowatt-hora) do período em questão. O comprimento desta barra segue uma escala em que para cada 1cm temos um consumo de 50kWh, ou seja, o comprimento é proporcional aos valores que ele representa.

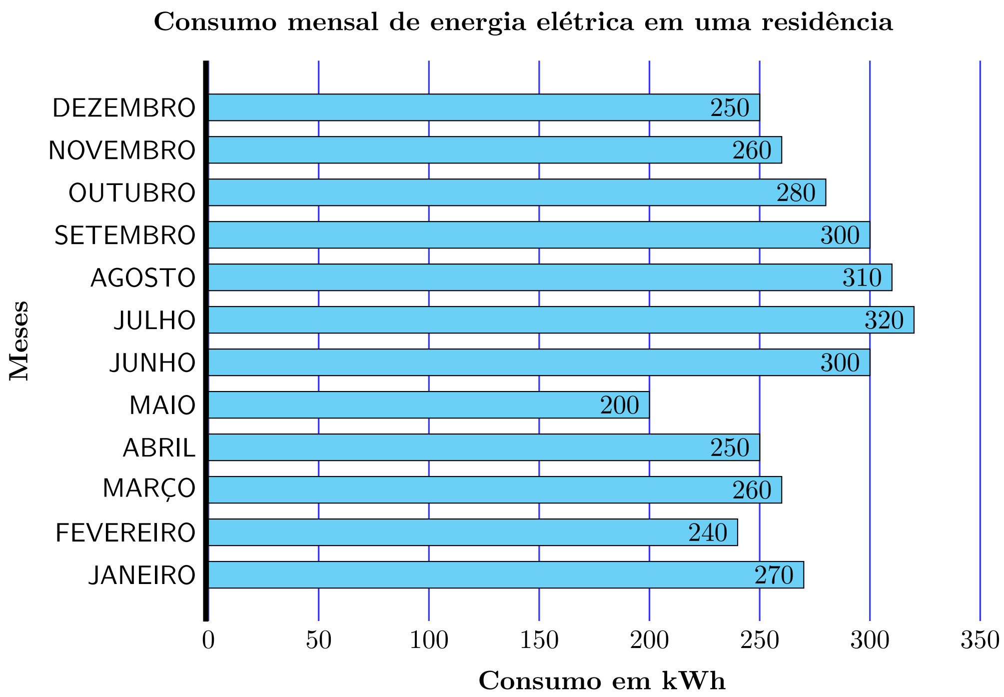


Figura 4.2: Gráfico de barras horizontais para o consumo de energia elétrica

Este tipo de representação gráfica é ideal para situações em que colocamos num só eixo aquilo que está sendo comparado e no outro eixo, os valores discretos.

O gráfico acima também poderia ser apresentado de outra forma, indicando os meses no eixo horizontal (eixo das abscissas) e o consumo em kWh no eixo vertical (eixo das ordenadas), mantendo a proporcionalidade do comprimento das barras aos valores que elas indicam. Este tipo de representação é chamada de gráficos de barras verticais, ou ainda, alguns autores a denominam como gráfico de colunas.

Histograma

A representação gráfica indicada na figura 4.3, nos mostra vários intervalos das notas que os alunos obtiveram em uma avaliação de matemática. Quando estamos diante de uma situação destas, o histograma é uma boa ilustração, pois ela consiste em uma representação semelhante ao gráfico de barras verticais, onde colocamos os limites das classes de intervalos no eixo das abscissas e a frequência (absoluta ou relativa) no eixo das ordenadas.

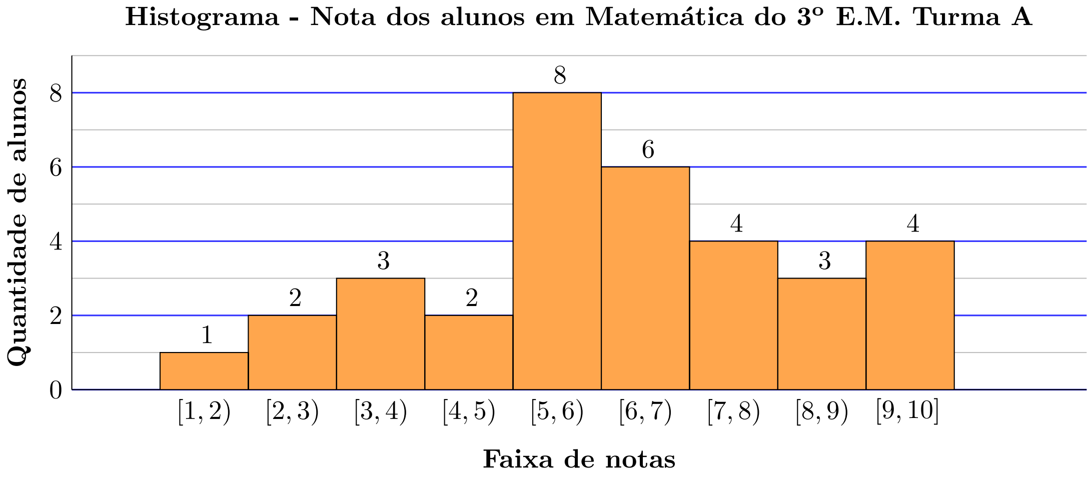


Figura 4.3: Histograma para análise do rendimento da turma na Avaliação de Matemática

Gráfico de linhas (poligonal)

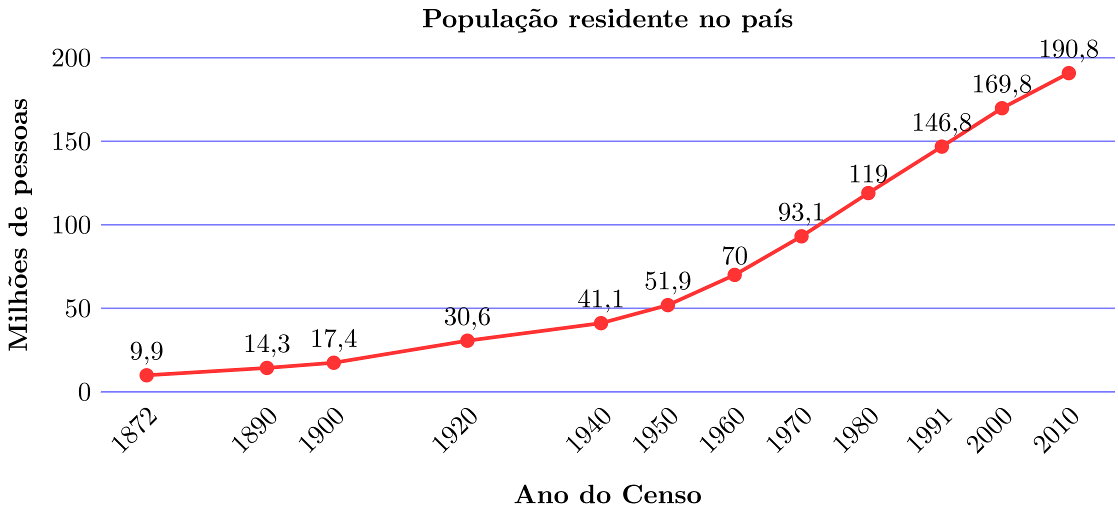


Figura 4.4: Censo 2010. Fonte: IBGE

Este gráfico nos mostra o crescimento da população brasileira ao longo dos anos de acordo com dados do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). Para cada ano indicado, associamos um número em milhões de habitantes residentes no Brasil e isto nos fornece um ponto. Unindo estes vários pontos por meio de segmentos de reta, temos o chamado gráfico de linhas ou gráfico de curva poligonal.

No capítulo 3 desta dissertação, mais precisamente na seção 3.2, analisamos algumas características dos gráficos para a função afim e este tipo de representação se assemelha ao gráfico de linhas, em que relacionamos uma grandeza em função de outra grandeza. No nosso exemplo, podemos dizer que existe uma função entre as grandezas envolvidas (ano e quantidade de pessoas) e este tipo de representação (poligonal) é muito útil quando queremos expor este tipo de situação, em que os valores assumidos para a quantidade em milhões de pessoas varia com o decorrer dos anos.

5 Atividades desenvolvidas na sala de aula

Nesta atividade, buscamos apresentar dados relacionados ao desempenho das turmas (3ºA e 3ºB) em uma avaliação externa chamada SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo) nos anos de 2009 e 2011. Nestes anos citados, este corpo discente estava cursando as 6ª e 8ª séries respectivamente.

Esta proposta surgiu do debate, feito na E.E. Romeu de Moraes e realizado no dia 20/08/2014, em que professores, funcionários, alunos, famílias e comunidade escolar refletiram maneiras de como abordar os indicadores de aprendizado para as turmas envolvidas. Por meio de sugestões dos professores das áreas de Matemática e Ciências da Natureza, criamos gráficos com estes dados obtidos, objetivando uma reflexão sobre estas informações e ao mesmo tempo o trabalho de interpretação destas representações, articulando os conteúdos da série envolvida.

Segue abaixo os exercícios propostos na primeira atividade realizada em 28/08/2014. Citaremos a primeira questão desta atividade, bem como os resultados envolvidos.

1) O IDESP – Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo é o indicador que avalia a qualidade das escolas estaduais paulistas em cada ciclo escolar e permite fixar metas anuais para o aprimoramento da qualidade da educação no Estado. Analisando os dados do IDESP (2009), apresentamos os níveis de desempenho dos alunos de 7º ano (6ª série) da E.E. Romeu de Moraes na tabela abaixo.

Distribuição da quantidade dos alunos em porcentagem por níveis de desempenho

		Abaixo do básico	Básico	Adequado	Avançado
7º Ano (6ª série)	Matemática	30,0%	47,9%	19,5%	2,6%

Baseado nos dados da tabela, complete o gráfico de pizza abaixo.

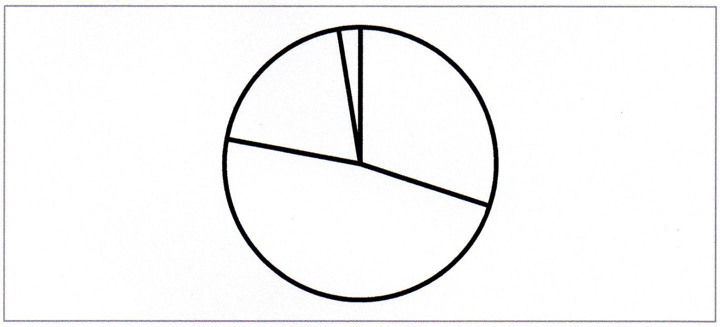


Figura 5.1: Primeira questão da atividade 1

Nesta primeira questão, em uma das turmas (3ºA) de um total de 32 alunos, temos que 30 alunos apresentaram a questão de forma correta. Enquanto que, na outra turma

(3ºB), todos os educandos de um total de 35 acertaram o referido exercício, conforme o exemplo a seguir.

1) O IDESP – Índice de Desenvolvimento da Educação do Estado de São Paulo é o indicador que avalia a qualidade das escolas estaduais paulistas em cada ciclo escolar e permite fixar metas anuais para o aprimoramento da qualidade da educação no Estado. Analisando os dados do IDESP (2009), apresentamos os níveis de desempenho dos alunos de 7º ano (6ª série) da E.E. Romeu de Moraes na tabela abaixo.

Distribuição da quantidade dos alunos em porcentagem por níveis de desempenho

		Abaixo do básico	Básico	Adequado	Avançado
7º Ano (6ª série)	Matemática	30,0%	47,9%	19,5%	2,6%

Baseado nos dados da tabela, complete o gráfico de pizza abaixo.

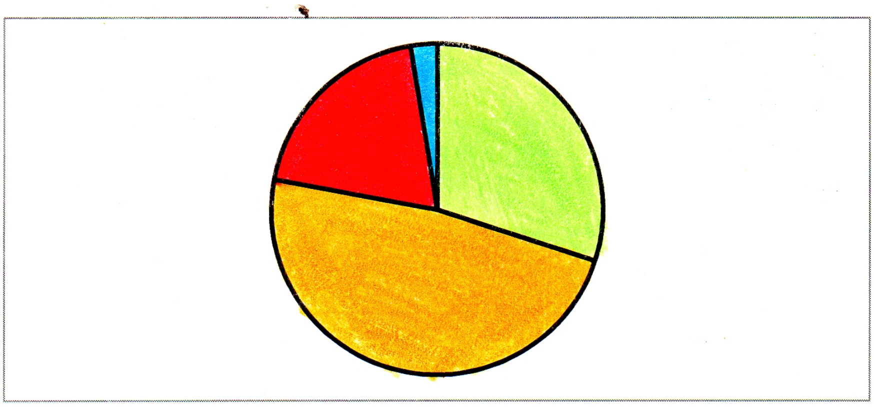


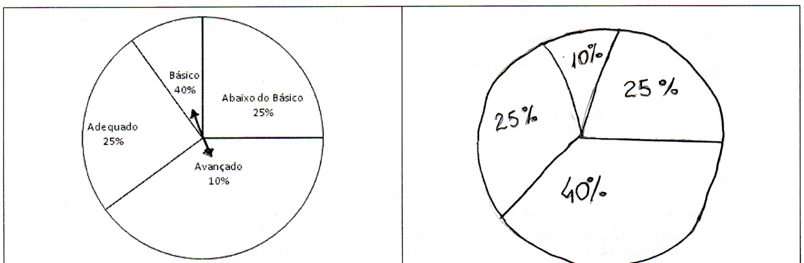
Figura 5.2: Primeira questão resolvida por um dos alunos

Analisando a segunda questão desta atividade de sondagem, os educandos deveriam comparar os dados da tabela com um gráfico de pizza, apontando os erros e justificando a sua resposta. Percebemos que 18 alunos acertaram esta questão no 3ºA, enquanto que o restante apresentou a resposta de forma parcialmente correta colocando o gráfico mas não apresentando a justificativa solicitada.

2) De acordo com a tabela dos níveis de desempenho da Escola X, analise o próximo gráfico e identifique os erros existentes nesta representação, justificando a sua resposta. Em seguida, desenhe um gráfico de pizza que represente estes dados de maneira correta.

Distribuição da quantidade dos alunos em porcentagem por níveis de desempenho

		Abaixo do básico	Básico	Adequado	Avançado
7º Ano (6ª série)	Matemática	25%	40%	25%	10%



Este gráfico de pizza está de forma incorreta, pois o avançado está na parte maior com 10% e o básico com 40% na menor.

Figura 5.3: Segunda questão resolvida por um dos alunos

Na terceira questão, solicitou-se que representassem os dados do exercício anterior por meio de um gráfico de barras. Tivemos um alto índice de acertos, cerca de 87%.

3) Veja um exemplo de gráfico de barras da reciclagem dos alunos do Ensino Fundamental com relação à participação dos alunos (62% reciclam e 38% não reciclam). Deste modo, construa um gráfico de barras que represente porcentagem por nível de desempenho de acordo com os dados da tabela citada no exercício anterior.

Participação dos alunos em recilagem.	Distribuição por níveis de desempenho

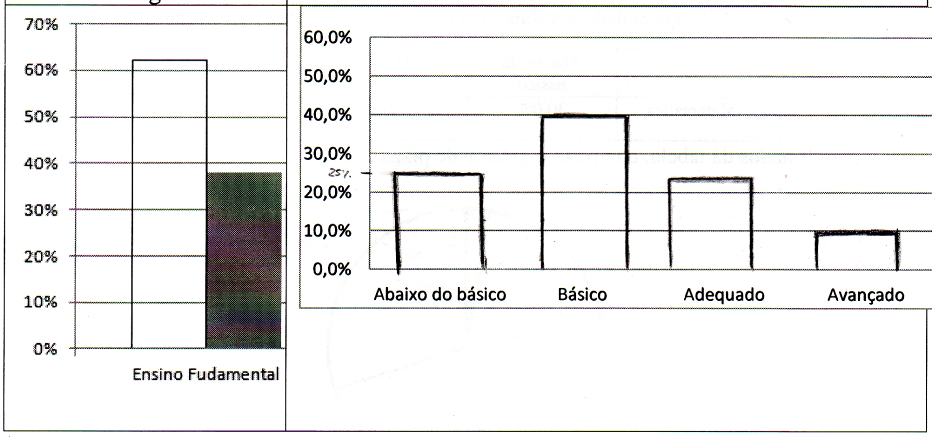
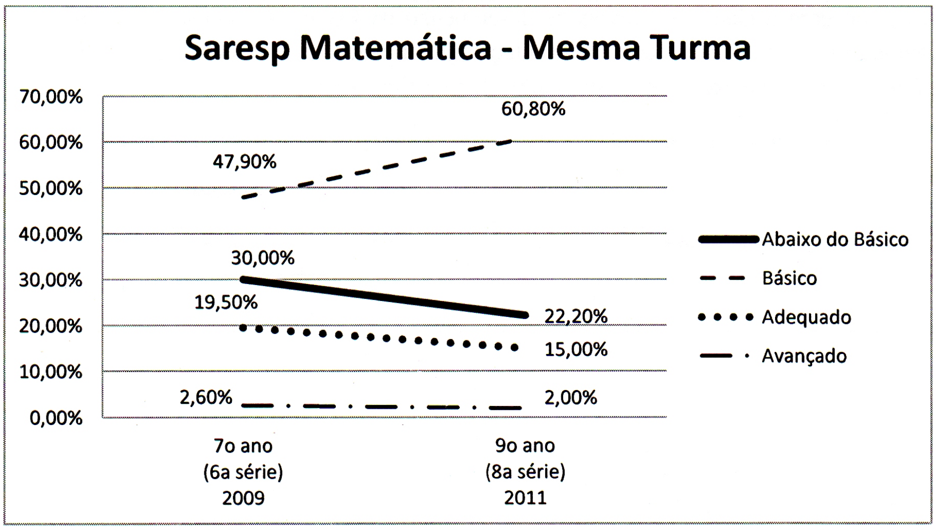


Figura 5.4: Terceira questão resolvida por um dos alunos

Na próxima questão temos um questionamento sobre o rendimento da turma nos anos de 2009 e 2011. Por meio do gráfico podemos tirar algumas conclusões, dentre elas vale destacar que a porcentagem do grupo no nível abaixo do básico diminuiu de 2009 para 2011 e consequentemente houve um indicador de melhora no rendimento desta turma, porém 23 estudantes de um total de 35 do 3°B responderam que, esta queda na porcentagem deste item, indica uma piora no aprendizado da turma conforme figura a seguir.

4) No próximo gráfico, temos um comparativo com a porcentagem de alunos da mesma turma nos anos de 2009 e 2011 e os seus respectivos níveis de desempenho na Prova do Saresp. Qual a sua opinião sobre o rendimento desta turma? Neste gráfico as informações estão claras?



Na minha opinião toda a turma decaiu de 2009 para 2011, menos os que estavam no básico, esses tiveram uma melhora.

Figura 5.5: Quarta questão resolvida por um dos alunos

Parte III

Medidas de centrabilidade e atividades propostas

6 Medidas de centrabilidade

Na seção 4.3 (Representações Gráficas) estudamos as formas de como representar um conjunto de dados e agora, neste capítulo, estudaremos o valor médio para as variáveis quantitativas, ou seja, calcular um valor central para aquelas variáveis que apresentam como resposta um número obtido por contagem (as chamadas variáveis quantitativas discretas são expressas por elementos de um conjunto finito) ou por mensuração (as chamadas variáveis quantitativas contínuas são expressas por valores pertencentes a um intervalo real).

Abordaremos a seguir os valores médios: média, mediana e moda.

6.1 Média aritmética

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a relação dos valores assumidos por uma determinada variável x. Definimos como média aritmética o quociente entre a soma desses valores e o seu número total n. Indicaremos a média aritmética por $\overline{x}$. Assim,

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n},$$

ou ainda, podemos escrever dessa forma

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

O símbolo $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ significa o somatório dos valores numéricos para x_i com i variando de 1 até n, ou seja, devemos somar os valores de x_1, x_2, x_3 e assim sucessivamente, até chegar no x_n.

6.2 Média aritmética ponderada

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ uma relação de valores com frequências absolutas respectivamente iguais a $n_1, n_2, \ldots, n_k$, ou seja, o evento x_1 ocorre n_1 vezes, x_2 ocorre n_2 vezes e assim por diante.

Desse forma, obtemos a média aritmética ponderada $\overline{x}$ destes valores da seguinte forma:

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot n_1 + x_2 \cdot n_2 + \cdots + x_k \cdot n_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}.$$

Ou podemos escrever de outro modo:

$$\overline{x} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i \cdot n_i}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k}.$$

Podemos também expressar $\overline{x}$ em termos de frequência relativa f_i de cada x_i ($i = 1, 2, \ldots, k$) em que $f_i = n_i \Big/ \sum\limits_{i=1}^{k} n_i$. Sendo assim, obtemos:

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot f_i = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + \cdots + x_k \cdot f_k.$$

6.3 Mediana

Considerando-se um conjunto de dados $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ dispostos em ordem crescente ou decrescente, chamamos de mediana o valor numérico que ocupa a posição central desses dados, ou seja, que divide o conjunto de dados em duas partes com o mesmo número de elementos. Em uma das partes, temos todos os elementos menores que (ou iguais) a mediana e na outra parte, temos a quantidade de todos os elementos maiores que (ou iguais) a mediana. Indicaremos a mediana por Me.

Temos dois casos a serem considerados no cálculo da mediana Me.

1º caso: Se o número de dados n for ímpar, o valor numérico que se encontrar na posição $\frac{n+1}{2}$ será considerado a mediana, ou em símbolos, temos:

$$Me = x_{\frac{n+1}{2}}.$$

2º caso: Se o número de dados n for par, a média aritmética dos valores numéricos que se encontrarem nas posições $\frac{n}{2}$ e $\frac{n}{2}+1$ será considerado a mediana, ou em símbolos, temos:

$$Me = \frac{x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}}{2}.$$

6.4 Moda

A moda de um conjunto de valores é aquele valor que ocorre mais vezes neste conjunto. Indicaremos a Moda por Mo.

Alguns casos particulares:

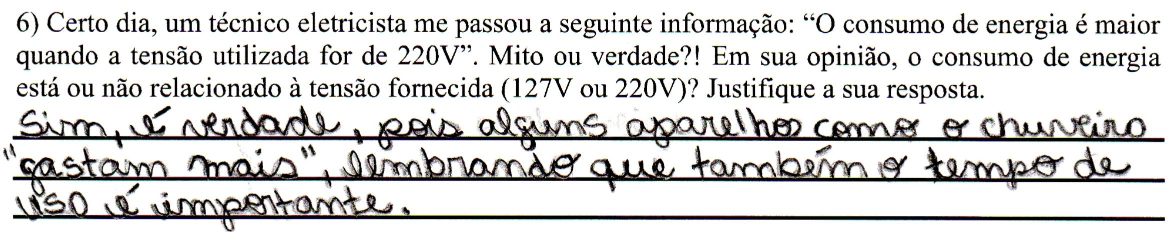
a) Quando temos uma relação de valores em que dois ou mais deles possuem maior e igual frequência absoluta, teremos nestas situações duas ou mais modas.

b) Em um conjunto de valores, quando todos ocorrem uma única vez, dizemos que não há moda nesta distribuição.

7 Atividades propostas

Neste capítulo destinado às atividades, assim como nos outros dois que foram citados, procuramos elaborá-las de maneira conjunta, orientando/orientador. Após diversos ajustes, as mesmas foram aplicadas em sala de aula. Este exercício também contou com a parceria do Instituto Agires e da companhia de distribuição de energia AES Eletropaulo, cuja finalidade é trabalhar com os alunos a conscientização sobre o bom uso e o consumo da energia elétrica. Iniciaremos com atividades envolvendo conceitos físicos, na sequência abordaremos as representações gráficas para as situações propostas e por último, mostraremos as atividades propostas envolvendo medidas de centrabilidade (média, mediana e moda).

A princípio, elaboramos um questionário de sondagem (vide Anexo A.1), a fim de verificarmos os conhecimentos prévios dos alunos sobre geração de energia e procedimentos sobre os cálculos do consumo de energia elétrica. Em média, 95% dos alunos reconhecem alguma forma de geração de energia, porém apenas 13% possuem alguma noção de como calcular o consumo. Vale ressaltar que, na última pergunta desta avaliação de sondagem, conforme resposta dos nossos estudantes na figura a seguir, 90% dos alunos acreditam que a tensão de 220V consome mais energia se comparada com a tensão de 127V, quando na verdade o consumo é medido pelo produto do tempo de uso em horas pela potência do aparelho medida em quilowatt.


6) Certo dia, um técnico eletricista me passou a seguinte informação: "O consumo de energia é maior quando a tensão utilizada for de 220V". Mito ou verdade?! Em sua opinião, o consumo de energia está ou não relacionado à tensão fornecida (127V ou 220V)? Justifique a sua resposta.

Sim, é verdade, pois alguns aparelhos como o chuveiro "gastam mais", lembrando que também o tempo de uso é importante.

Figura 7.1: Respostas apresentadas pelos alunos na última questão da avaliação de sondagem

Foi solicitada uma pesquisa aos alunos com relação ao tempo de uso de vários equipamentos com as suas respectivas potências. Além disso, durante dois dias, eles observaram em suas residências algumas rotinas de desperdício de energia, sendo que apenas 20% não apresentam hábitos negativos sobre o uso da energia, como por exemplo, ficar com a TV ligada e ninguém assistindo. Por meio de uma aula expositiva, apresentamos alguns *slides* fornecidos pelo Instituto Agires e AES Eletropaulo sobre o consumo consciente de energia e o uso seguro da energia elétrica. Foram abordados, ao longo desta aula, assuntos relacionados às grandezas de eletricidade, tais como corrente elétrica, tensão e potência, pois os alunos confundiam os conceitos e as unidades de tensão e potência. Além disso, foram trabalhados temas como transformação de unidades de potência, por exemplo, de kW (quilowatt) para W (watt) e também conversão de unidade de tempo em minutos para horas. Foram passadas orientações para o cálculo do consumo de energia, conforme sequência de atividades a seguir.

1) Apesar de muitos pensarem que a tensão 127V ou 220V influencia no consumo de energia, na verdade o consumo de energia elétrica depende do tempo de utilização dos aparelhos elétricos e da sua potência. A potência dos aparelhos é expressa em watts (W) e quase todos trazem essa informação impressa na embalagem, em chapinhas ou etiquetas de fabricação neles afixadas ou nos manuais de instrução. O quadro a seguir apresenta um exemplo de como essa informação aparece no manual de um forno de micro-ondas.

Dados Técnicos	Tensão (V)	Capacidade (litros)	**Potência (W)**	Peso (kg)	Altura (mm)	Largura (mm)	Profundidade (mm)
	127	17	**1050**	12,2	280	461	373

Quadro 1– Indicações das características de um micro-ondas, com destaque dado à potência. (Fonte: Eletropaulo.)

Qual é a potência do micro-ondas em kW (quilowatt)? 1,05 Kw

2) De acordo com a pesquisa solicitada pelo professor, preencha a tabela abaixo com os valores de potência encontrados.

Potência média de alguns aparelhos elétricos			
Aparelhos	Watts	Aparelhos	Watts
Aparelho de som	20 w	Computador	300 w
Batedeira	100 w	Torneira elétrica	3500 w
Secador de cabelo	600 w	Ferro elétrico	900 w
Chapinha (prancha)	75 w	Micro-ondas	1140 w
Chuveiro elétrico	5 500 w	TV	110 w
Liquidificador	200 w	Geladeira	46,4 w
Ventilador	150w	Máquina de lavar roupa	1000 w
DVD ou BLU-RAY	—	Videogame	20 w
Celeular	5 w	Fogão (gás)	18 a 42 w

3) De acordo com a pesquisa solicitada pelo professor, indique quantos minutos diários, em média a sua família utiliza os seguintes equipamentos.

Minutos diários de uso, em média, de alguns aparelhos elétricos			
Aparelhos	Minutos diários	Aparelhos	Minutos diários
Aparelho de som	—	Computador	10 minutos
Batedeira	5 minutos	Torneira elétrica	10 minutos
Secador de cabelo	5 minutos	Ferro elétrico	40 minutos
Chapinha (prancha)	—	Micro-ondas	5 minutos
Chuveiro elétrico	35 minutos	TV	12 Horas
Liquidificador	1 minuto	Geladeira	24 Horas
Ventilador	60 minutos	Máquina de lavar roupa	30 minutos
DVD ou BLU-RAY	—	Videogame	2 Horas
Celular	60 minutos	Fogão (gás)	1 segundo

Figura 7.2: Atividade desenvolvida sobre consumo de energia elétrica

Com base na pesquisa solicitada, o corpo discente preencheu estas tabelas citadas na figura 7.2 e por meio de uma sequência de questões/orientações, os alunos conseguiram estimar os aparelhos que consomem mais energia em suas residências, representando-os em um gráfico. Desse modo, buscaram focar, na redução do uso destes equipamentos.

Baseado nas informações dos exercícios 2 e 3, calcule o consumo diário de cada um dos eletrodomésticos presentes na tabela abaixo e cite cinco aparelhos responsáveis pelo maior consumo de energia em sua residência. Em seguida, monte um gráfico indicando os aparelhos no eixo das abscissas e o seu consumo diário em kWh no eixo das ordenadas.

Obs: Lembre-se que se o tempo de uso não atingir 1 hora, você deverá convertê-lo de minutos para hora, para isto basta dividir o tempo em minutos por 60, obtendo o valor em hora.

Consumo diário de energia elétrica					
Aparelhos	Tempo de uso (horas)	Consumo diário (kWh)	Aparelhos	Tempo de uso (horas)	Consumo diário (kWh)
Aparelho de som	0,66	0,0132	Computador	4	1,2
Batedeira	0,03	0,003	Torneira elétrica	—	—
Secador de cabelo	0,05	0,05	Ferro elétrico	0,009	0,0108
Chapinha (prancha)	—	—	Micro-ondas	0,03	0,06
Chuveiro elétrico	0,83	4,565	TV	16	3,168
Liquidificador	0,03	0,006	Geladeira	24	6
Ventilador	4	0,4	Máquina de lavar roupa	0,4	0,6
DVDouBLU-RAY	—	—	Videogame	5	0,1
Celular	8	0,04	Fogão (gás)	0,008	0,000336

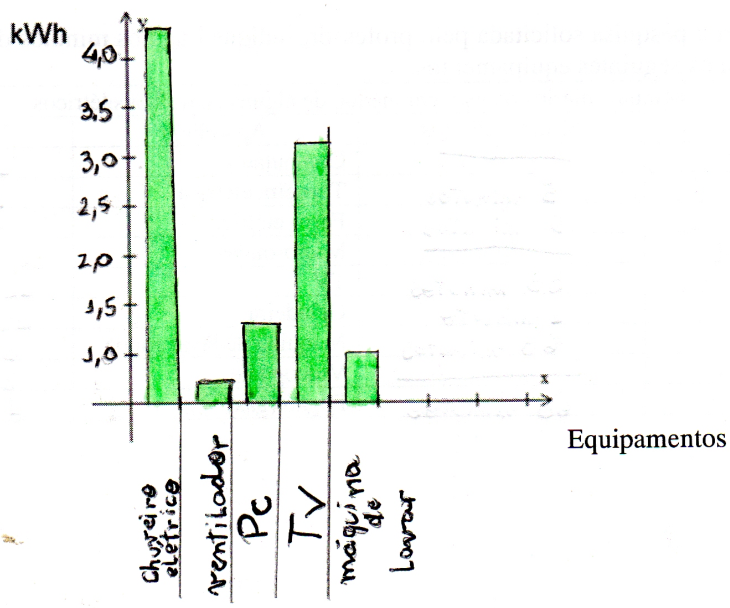


Figura 7.3: Atividade desenvolvida sobre consumo de energia elétrica

Dando continuidade à sequência didática, solicitamos que efetuassem o cálculo do consumo mensal de energia e que comparassem com o gasto apontado nas suas respectivas contas de energia.

Na sétima questão pedimos para que os jovens desta sala elaborassem um gráfico de consumo em quilowatt-hora em função do tempo de redução em um banho. Muitos começaram colocando o consumo relacionado ao tempo de duração do banho, mas após algumas orientações os mesmos corrigiram os seus gráficos, conforme demonstrado a seguir.

7) Vamos supor que o seu banho dure 30 minutos por dia e a potência de seu chuveiro elétrico vale 5500W. Desse modo, temos o consumo diário de 2,75kWh (5,5 kW x 0,5h). Represente com um gráfico o consumo diário (em kWh) em função do tempo de redução na duração de um banho, ou seja, quais os consumos ao reduzir o tempo do banho em 5, 10, 15 e 20 minutos.

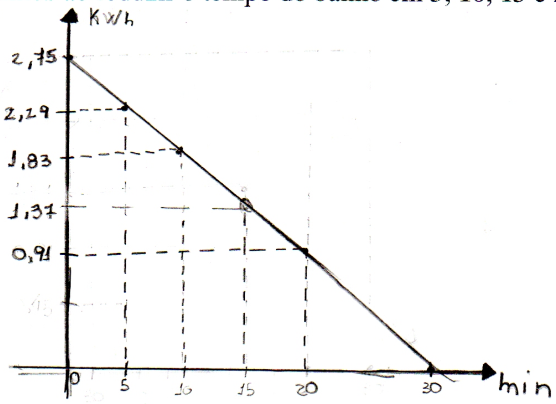


Figura 7.4: Gráfico elaborado para demonstrar redução no consumo de energia elétrica

E para finalizar esta atividade, solicitamos aos alunos que os mesmos trouxessem a conta de energia elétrica das suas residências e por meio da observação destes extratos, foi possível trabalhar com os valores médios: média, mediana e moda. As folhas de atividades encontram-se nos Anexos A.2 e A.3, p. 74 e 75.

No exemplo a seguir, temos o cálculo do consumo médio obtido a partir das informações que os alunos trouxeram. Eles deveriam extrair o consumo mensal baseado em suas respectivas contas e calcular a média aritmética.

c) Qual é o consumo médio (em kWh) na sua residência?

$$\frac{407+407+399+424+356+280+394+409+361+396+435+394+418}{13} =$$

$$\frac{4,828}{13} = 371.384 \text{ KWh}$$

Figura 7.5: Registro feito pelo aluno no cálculo do consumo médio de energia elétrica

Nesta atividade o uso da calculadora foi liberado, pois os alunos apresentam grandes dificuldades com o algoritmo da divisão, que neste momento era necessário para garantir que as definições das medidas de centrabilidade fossem compreendidas. Podemos observar, ainda na figura 7.5, que o resultado da média obtido é apresentado separando a parte inteira da parte decimal por meio de um ponto (371.384). Porém, no Brasil, é adotada a vírgula como separador (371, 384). Notamos também que, para o número 4, 828, deveria ser utilizado o ponto como separador de classes e, no entanto, uma vírgula foi utilizada.

Os alunos foram orientados a realizarem configurações nas calculadoras para obterem uma representação de acordo com as normas brasileiras.

Com base nos dados fornecidos pelos estudantes, montamos uma tabela com os consumos no último mês em quilowatt-hora de cada família, conforme apresentado na figura 7.6. Solicitamos os cálculos da média, mediana e moda.

2) Com base nos dados referentes à conta de energia elétrica, preenchemos os dados da tabela a seguir, com o consumo em kWh no último mês de cada um das famílias dos alunos desta sala.

Número do aluno	kWh	Número do aluno	kWh	Número do aluno	kWh
1	274	11	264	21	148
2	168	12	192	22	132
3	200	13	202	23	183
4	209	14	75	24	195
5	362	15	95	25	83
6	368	16	133	26	87
7	414	17	125	27	214
8	331	18	168	28	113
9	270	19	204	29	117
10	159	20	173	30	156

Figura 7.6: Tabela fornecida aos alunos

Neste tipo de exercício, tirando a dificuldade das operações com divisão na obtenção da média aritmética, a compreensão das definições de medidas de centrabilidade foi atingida por 93% do corpo discente, conforme solução apresentada para mediana e moda na figura 7.7

b) Com base nas informações da tabela, calcule a mediana (M_d) do consumo em kWh das famílias dos alunos desta sala.

75, 83, 87, 95, 113, 117, 125, 132, 133, 148, 156, 159, 168, 168, $\boxed{173, 183}$ 192, 195, 200, 202, 204, 209, 214, 264, 270, 274, 331, 362, 368, 414

$\frac{173+183}{2} = \frac{356}{2} = \boxed{178}$ mediana

c) Com base nos dados da tabela, identifique a moda (M_o)

a Mo é 168.

Figura 7.7: Solução apresentada para a obtenção da mediana e da moda

Referências

[1] MACHADO, N. J. *Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua*. São Paulo: Cortez, 1993.

[2] IEZZI, G.; MURAKAMI, C. *Fundamentos de Matemática Elementar. Conjuntos, funções*. 5. ed. São Paulo: Atual, 1977–1981.

[3] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo: Contexto, 2006.

[4] CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W.; SCHLIEMANN, A. D. *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo: Cortez, 1988.

[5] IEZZI, G.; HAZZAN, S.; DEGENSZJAN, D. *Fundamentos da Matemática Elementar. Matemática Comercial. Matemática Financeira. Estatística Descritiva*. 1a. ed. São Paulo: Atual, 2014. v. 11.

[6] LIMA, E. L. *Números e Funções Reais*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[7] NOGUEIRA NETO, H. A. *Contribuição ao projeto de pontes estaiadas com estudo dos casos da ponte sobre o rio Pinheiros e da ponte sobre o rio Guamá*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Civil, 2003.

[8] SADOVSKY, P. *O ensino de matemática hoje – enfoques, sentidos e desafios*. 1a. ed. São Paulo: Ática, 2017. Tradução de: Enseñar matemática hoy – miradas, sentidos y desafýos.

A Anexos

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO	E. E. Romeu de Moraes Atividade de Matemática 4º Bimestre – 3ª série (EM) Professor: André Mendes Cardoso Sequeira Nome:____nº___	GOVERNO DE SÃO PAULO

Projeto: Energia Elétrica e Matemática: usos, abusos e reflexões
Tema: Reflexões sobre o uso da energia elétrica residencial

1) De acordo com o seu conhecimento, explique como a energia elétrica é gerada.

2) Escreva os equipamentos utilizados em sua residência que precisam de energia elétrica para funcionar.

3) Quantos e quais aparelhos elétricos são considerados essenciais e de uso diário em sua residência?

4) Na sua opinião, quais dos aparelhos citados na questão anterior consomem mais energia?

5) Como você acha que é feito o cálculo do consumo de energia?

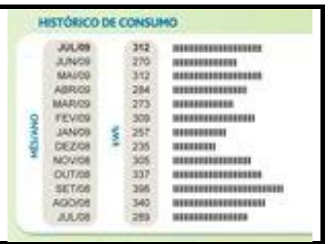
6) Certo dia, um técnico eletricista me passou a seguinte informação: "O consumo de energia é maior quando a tensão utilizada for de 220V". Mito ou verdade?! Em sua opinião, o consumo de energia está ou não relacionado à tensão fornecida (127V ou 220V)? Justifique a sua resposta.

Anexo A.1:

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO	E. E. Romeu de Moraes Atividade de Matemática 4º Bimestre – 3ª série (EM) Professor: André Mendes Cardoso Sequeira Nome:____nº___	GOVERNO DE SÃO PAULO

Projeto: Energia Elétrica e Matemática: usos, abusos e reflexões.
Tema: Consumo de energia

1) Segundo o demonstrativo da conta de energia fornecido pela Eletropaulo temos um histórico de consumo conforme o exemplo a seguir:



Com base nas informações no seu histórico de consumo, responda as seguintes questões:
a) Qual o valor máximo e mínimo para o consumo em kWh? Em quais meses eles ocorrem? Por que nestes meses ocorreu consumo máximo e mínimo?

b) A amplitude de um conjunto de dados é definida como a diferença entre o maior e o menor valor do conjunto. Qual é a amplitude do conjunto do consumo em kWh ao longo dos meses citados em seu histórico?

c) Qual é o consumo médio (em kWh) na sua residência?

d) O horário de verão é um ajuste feito nos horários marcados por nossos relógios em determinadas épocas do ano para que possamos adaptar nossa rotina ao tempo em que o sol nasce e se põe com o fim de aproveitar melhor as horas de sol para economizar a utilização de energia artificial. Embora, nesta questão de economia de energia, existam algumas controvérsias.
No Brasil, o horário de verão ocorre entre os meses de outubro a março. Verifique na sua conta se a média do consumo nestes meses é menor ou maior do que a média dos demais meses do ano.

Anexo A.2:

2) Com base nos dados referentes à conta de energia elétrica, preenchemos os dados da tabela a seguir, com o consumo em kWh no último mês de cada um das famílias dos alunos desta sala.

Número do aluno	kWh	Número do aluno	kWh	Número do aluno	kWh
1	274	11	264	21	148
2	168	12	192	22	132
3	200	13	202	23	183
4	209	14	75	24	195
5	362	15	95	25	83
6	368	16	133	26	87
7	414	17	125	27	214
8	331	18	168	28	113
9	270	19	204	29	117
10	159	20	173	30	156

a) De acordo com a tabela anterior, qual é o consumo médio em kWh das famílias dos alunos desta sala?

b) Com base nas informações da tabela, calcule a mediana (M_d) do consumo em kWh das famílias dos alunos desta sala.

c) Com base nos dados da tabela, identifique a moda (M_o)

Anexo A.3: