UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL (PROFMAT)

Jocemar Rodrigo Welter

CONTRIBUIÇÕES DO JOGO DO NIM PARA O ENSINO DE ARITMÉTICA

Santa Maria, RS
2016

Jocemar Rodrigo Welter

CONTRIBUIÇÕES DO JOGO DO NIM PARA O ENSINO DE ARITMÉTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Roberto Lazzarin

Santa Maria, RS
2016

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

WELTER, Jocemar Rodrigo
CONTRIBUIÇÕES DO JOGO DO NIM PARA O ENSINO DE ARITMÉTICA / Jocemar Rodrigo WELTER.- 2016.
80 p.; 30 cm

Orientador: João Roberto Lazzarin
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, RS, 2016

1. Aritmética 2. Jogo do Nim 3. Ensino Fundamental I. , João Roberto Lazzarin II. Título.

Jocemar Rodrigo Welter

CONTRIBUIÇÕES DO JOGO DO NIM PARA O ENSINO DE ARITMÉTICA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional de Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovado em 26 de Agosto de 2016:

João Roberto Lazzarin, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Ana Marli Bulegon

Ana Marli Bulegon, Dra. (UNIFRA)

Fidelis Bittencourt

Fidelis Bittencourt, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2016

DEDICATÓRIA

Dedico á minha esposa, Elaine Catarina Geist Tiecker, a meus pais Ilói e Lídia, minhas irmãs Jaqueline e Janaine, aos sogros José Ermeto e Rosa Tiecker, e a todos que em mim acreditaram.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela luz no meu caminho. Agradeço á minha esposa, pela valentia, companheirismo, compreensão e amor dedicados a mim nesta caminhada.

À minha família e amigos pelo apoio e compreensão, principalmente nos momentos em que me fiz ausente.

Ao professor João Roberto Lazzarin, por dispor de sua sabedoria, carinho e atenção na orientação deste trabalho.

Às professoras Karine Faverzani Magnago e Carmen Vieira Mathias, pelo esmero frente à coordenação do curso e a todos os professores do curso Mestrado Profissional em Matemática – PROFMAT da UFSM, pela amizade, paciência e pelos conhecimentos compartilhados.

À Sociedade Brasileira de Matemática - SBM pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pela concessão da bolsa de estudos.

Agradeço aos meus colegas de mestrado PROFMAT da turma de 2014 pela parceria nas muitas horas de estudos e pelas palavras amigas.

Aos professores da banca, por terem dedicado parte do seu tempo para examinarem meu trabalho e trazerem sugestões para aprimorá-lo.

À Secretaria Municipal de Educação de Santo Ângelo pela liberação da carga horária dedicadas ao curso e, aos meus alunos que participaram da proposta didática.

Aos professores Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Ledo Vaccaro Machado, Luciano Castro e todos que pelas videoaulas gravadas e transmitidas da SBM/IMPA no Rio de Janeiro, contribuíram muito em minha formação.

A todos aqueles que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste trabalho, e não estão nominalmente citados.

Mar Portuguez

“Ó mar salgado, quanto do teu sal
São lágrimas de Portugal!
Por te cruzarmos, quantas mães choraram,
Quantos filhos em vão rezaram!
Quantas noivas ficaram por casar
Para que fosses nosso, ó mar!

Valeu a pena? Tudo vale a pena
Se a alma não é pequena.
Quem quer passar além do Bojador
Tem que passar além da dor.
Deus ao mar o perigo e o abismo deu,
Mas nele é que espelhou o céu.”

(Fernando Pessoa)

RESUMO

A ARITMÉTICA DO JOGO DO NIM NO ENSINO FUNDAMENTAL

AUTOR: Jocemar Rodrigo Welter
ORIENTADOR: João Roberto Lazzarin

Com intuito de reavivar o interesse pela Matemática num grupo formado por alunos do Ensino Fundamental é que este trabalho foi concebido. Desejávamos ensinar os fundamentos de aritmética com o objetivo claro de revisar as quatro operações básicas de modo que os alunos percebessem que não estariam automatizando processos repetitivos e enfadonhos. Gostaríamos também de ampliar o conhecimento matemático para além dos livros didáticos, instigando-os á investigações históricas e na busca de resoluções de problemas correlatos.

A estratégia inicial foi ensinar o jogo do Nim, um tradicional jogo didático que apresenta várias versões, todas com objetivo único de entender e aplicar de vários modos o algoritmo da divisão. Aproveitamos esse estímulo inicial para introduzir durante treze aulas, vários assuntos (conteúdos) e fórmulas que são frequentemente obtidos via recorrência, critérios de divisibilidade e até conjecturas historicamente famosas.

Neste trabalho fazemos um relato de todas essas atividades, fazendo reflexões sobre a teoria e a prática pedagógica e dando pareceres sobre a receptividade dos alunos do sexto ano da E.M.E.F. Doutor Ulisses Rodrigues, a cada etapa, além de apresentar várias outras versões do jogo do Nim para possíveis aplicações em aulas práticas de aritmética básica.

Palavras-chave: Aritmética. Jogo do Nim. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

THE ARITHMETIC OF NIM GAME FOR ELEMENTARY SCHOOL

AUTHOR: Jocemar Rodrigo Welter
ADVISOR: João Roberto Lazzarin

With intention to revive the interest in mathematics in a group of elementary school students is that this work was conceived. We had the wish to teach the fundamentals of arithmetic with the clear purpose of reviewing the four basic operations, without the students realized they would be doing repetitive and tedious processes. We would also like to extend mathematical knowledge beyond textbooks and, instigate them to do historical researches and asking for resolutions of related problems.

The initial strategy was teach the Nim game, a traditional didactic game that has several versions, all with unique instructional purposes, understand and apply in various ways the division algorithm. We took advantage of this initial stimulus to introduce for thirteen classes, various ingredients and formulas that are often obtained via recurrence, divisibility criteria and even historically famous conjectures.

In this work we make an account of all these activities, making reflections on the theory and pedagogical practice and giving opinions on the receptivity of the students of the sixth year of E.M.E.F. Doutor Ulisses Rodrigues, at each step, and present several other Nim game versions for possible applications in practical classes on basic arithmetic.

Keywords: Arithmetic. Game Nim. Elementary School.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Matemática é dentre todas as disciplinas, talvez a que apresente menos prestígio entre os alunos. Considerada muitas vezes de difícil entendimento, muito por sua linguagem própria que exige perseverança aos iniciantes, mas também por ser imposta aos alunos por meio de metodologia pedagógica conservadora, de forma superficial, sem um mínimo de ligação com a realidade ou com o uso excessivo de atividades repetitivas, sem desafios apropriados as diferentes faixas etárias a que se destinam.

Propomos um processo de aprendizagem em matemática realizado de forma não fragmentada, onde os conceitos são construídos e reconstruídos constantemente. Ao apresentarmos os conceitos básicos da Aritmética aos alunos do Ensino Fundamental, entendemos que se deve romper com a metodologia tradicional, reconduzindo ao próprio aluno a responsabilidade de reconstruir soluções ou até, construir algumas novas, desmitificando alguns conceitos da aritmética, trazendo-os para mais próximo da vivência dos alunos, sem assim, desmerecer a beleza e grandiosidade das descobertas, trazendo uma contribuição prática com algum aprofundamento abstrato de possíveis generalizações de resultados.

Sair das soluções prontas e dar a chance para os alunos construírem seus conhecimentos com pequenas intervenções do professor, de modo que com isso, percebam como as soluções são obtidas de maneira natural, quebrando a barreira metodológica padrão por hora instaurada, causando empatia e um maior desfrute da matemática é um desafio constante a nossos professores. O problema é como contribuir para que isso ocorra? Nossa parcela de contribuição consiste em apresentar uma proposta pedagógica que favoreça um melhor aprendizado das propriedades dos números inteiros, destacando dentre estas, a divisibilidade e a fatoração em primos.

Ao aprofundar os conhecimentos fundamentais da aritmética, usando do lúdico e do material concreto, pretendemos tirar da aritmética a memorização de fórmulas mostrando a beleza e a simplicidade dos problemas introdutórios aqui expostos como mecanismos capazes de atingir os objetivos de ensino.

O objetivo geral deste trabalho é ensinar os fundamentos da aritmética, mais especificadamente os números primos e os critérios de divisibilidade para alunos do ensino fundamental, aliado ao ideal de buscar também, a melhoria da relação ensino aprendizagem no campo da aritmética ampliando o conhecimento matemático para além do livro didático e, instigar o aluno á investigação e ao interesse por resolver problemas dessa ordem e grandeza. Objetivamos também: contribuir para a melhoria do aprendizado dos números primos, divisibilidade e fatoração no ensino fundamental; ampliar o conhecimento sobre a teoria matemática envolvida; criar uma empatia dos alunos para com a matemática; tornar as aulas interessantes e lúdicas; contribuir para o crescimento individual e coletivo na resolução de problemas semelhantes aos da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP.

Com o aprofundamento no campo da aritmética queremos contribuir de tal maneira que se transforme de uma disciplina pouco atraente, em uma que traga estímulo de aprender, satisfação em descobrir ou redescobrir os conhecimentos de uma maneira lúdica, estimulante.

Com o uso de problemas matemáticos, a destacar aqui, a busca por vencer o jogo do Nim[1] e descobrir uma estratégia que garanta vencer sempre, e uma intervenção pedagógica com o uso de conjecturas historicamente conhecidas, tais como a Conjectura de Goldbach, acreditamos alcançar os objetivos trazendo a curiosidade e o interesse matemático escondido na simplicidade de seus enunciados.

Este trabalho ocorreu nos meses de março e abril de 2016, na Escola Municipal de Ensino Fundamental Doutor Ulisses Rodrigues, município de Santo Ângelo-RS, em 13 encontros na turma do 6º ano, turma regular com 15 alunos, onde o mestrando é professor titular.

O campo da aritmética estudado no sexto ano é um dos últimos elos com atividades mais práticas e concretas dentro do ensino fundamental, aproveitando-se desse momento profícuo e utilizando-se de um jogo bastante conhecido na literatura de jogos educativos chamado Jogo do Nim, a ideia era introduzir vários algoritmos

[1] Acredita-se ser de origem milenar chinesa jogado com palitos, paus ou pedras. Mais detalhes no capítulo 1.8, página 32.

aritméticos de forma natural e lúdica. O desafio de descobrir uma estratégia vencedora para o Jogo do Nim desencadeou uma curiosidade adormecida na maioria dos alunos e foi crucial como ferramenta instigadora para o aprendizado dos fundamentos da aritmética pertinentes ao sexto ano do ensino fundamental.

Dividimos o trabalho em três seções. Na primeira seção está presente o projeto idealizado com os objetivos, questionamento norteador e a justificativa, além de um breve estudo das referências teóricas pedagógicas e matemáticas.

Os planos de aula preparados com os temas de estudo, datas de aplicações, os seus objetivos e abordagens metodológicas e pedagógicas, contendo ainda um breve e crítico relato dos acontecimentos pertinentes das aulas são apresentados na segunda seção.

Na terceira seção aprofundamos e trazemos como forma de incentivo, inspiração de outros jogos semelhantes ao jogo do Nim como ferramentas capazes de atingir objetivos semelhantes aos aqui apresentados ou que possam conduzir ao ensino da aritmética de forma mais eficaz.

Por fim oferecemos uma análise do presente trabalho com as considerações das reflexões teóricas, da prática pedagógica e sobre os demais jogos citados como ferramentas que possam contribuir para o aprimoramento da prática com um significativo aprendizado da aritmética.

1. PROJETO

1.1 TEMA

Números Primos, Divisibilidade, Teoremas e Conjecturas: uma experiência de ensino com o Jogo do Nim.

1.2 DELIMITAÇÕES DO TEMA

Números Primos, Teoremas e Conjecturas: uma proposta de ensino.

1.3 PROBLEMA

Como melhorar o aprendizado do conceito dos números primos e suas operações: divisibilidade e fatoração?

1.4 HIPÓTESES

O uso de problemas/conjecturas matemáticas que perduram por anos junto aos alunos trará a curiosidade e o interesse matemático escondido na simplicidade de seus enunciados.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 Objetivo Geral

Ensinar o conceito de Números Primos e suas operações matemáticas por meio do Jogo do Nim.

1.5.2 Objetivos Específicos

O presente projeto visa a melhoria da relação ensino aprendizagem no campo da aritmética, além de ampliar o conhecimento matemático para além do livro didático instigando o aluno á investigação e ao interesse por resolver problemas dessa ordem e grandeza. Mais especificamente queremos:

a) Contribuir para a melhoria do aprendizado dos números primos, divisibilidade e fatoração no ensino fundamental.

b) Ampliar o conhecimento sobre a teoria matemática envolvida no jogo do Nim.

c) Criar uma empatia dos alunos para com a matemática.

d) Tornar as aulas interessantes e lúdicas.

e) Contribuir para o crescimento individual e coletivo na resolução de problemas semelhantes aos da OBMEP.

1.6 JUSTIFICATIVA

A matemática praticada na escola por vezes é superficial, tecnicista e monótona. Trazer de forma lúdica e concreta algum aprofundamento em assuntos essenciais que fundamentam a aritmética tirando dela o caráter atual de memorização de fórmulas e com isso conduzir aos olhos dos alunos a beleza e a simplicidade que estão por trás da aparência ingênua dos problemas que envolvem a aritmética, nos levou a propor nova abordagem aos conhecidos problemas introdutórios aritméticos que em sua grande maioria já possuem soluções prontas, soluções estas que são despejadas em nossas salas de aulas, sem ao menos darmos uma chance aos alunos de tentarem construir suas próprias soluções ou pelo menos perceberem que as soluções clássicas são obtidas de modo natural. Vimos nisso uma oportunidade que quebrar com essa barreira metodológica padrão, provocando com isso, uma maior empatia e o desfrute do conhecimento matemático envolvido de maneira divertida e trazendo para o aluno a condução do processo de aprendizagem e a construção do conhecimento.

1.7 FUNDAMENTAÇÕES TEÓRICAS

Nessa seção faremos um estudo das relações que envolvem toda a prática pedagógica a destacar os ideais da teoria de ensino aprendizagem e a matemática conceitual que é base das relações aplicadas em sala de aula.

1.7.1 Fundamentação Pedagógica

Ao contrário do que a maioria dos livros didáticos atuais podem nos fazer acreditar, sabemos que o aprender matemática é um processo continuo e não fragmentado, ela exige uma necessidade permanente de construir e reconstruir conceitos. Os atuais paradigmas que regem o ensino da matemática a colocam no patamar de disciplina não preferida e alimentam os índices de reprovação escolar. Acreditamos que isto ocorra principalmente por ela estar relacionada a conceitos abstratos e metodologias pedagógicas conservadoras com atividade não atrativas e pouco divertidas fazendo das aulas, um modo enfadonho de transmissão de resultados prontos. Nossa pretensão é romper com esta metodologia e reconduzir ao aluno a responsabilidade de reconstruir soluções ou até, construir algumas novas, desmistificando alguns conceitos da aritmética a tal ponto de trazer uma contribuição prática de ensino com algum aprofundamento neste campo da matemática.

Para isso, dentro da teoria dos números trouxemos o jogo do Nim, ferramenta que nos auxiliará a atingir os objetivos deste projeto prático.

No que concerne aos “caminhos para “fazer Matemática” na sala de aula” os Parâmetros curriculares nacionais (PCN) (BRASIL, 1997, p.32 e p. 35) destaca “o recurso aos jogos”. Através do jogo “mediante a articulação entre o conhecido e o imaginado, desenvolve-se o autoconhecimento - até onde se pode chegar - e o conhecimento dos outros - o que se pode esperar e em que circunstâncias”.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ainda reforçam que “a situação-problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição” e, com o desenvolvimento de “algum tipo de estratégia para resolvê-los” o professor deve fundamentar sua prática pedagógica. (BRASIL, 1997, p. 32). “O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica”, fugindo assim do fazer por repetição, das atividades mecânicas, sem uso do pensar lógico, dedutivo. (Idem, p. 32).

A inclusão dos jogos na prática matemática faz com que:

> [...] as crianças aprendem a lidar com situações mais complexas (jogos com regras) e passam a compreender que as regras podem ser combinações arbitrárias que os jogadores definem; percebem também que só podem jogar em função da jogada do outro [...] Os jogos com regras tem um aspecto importante, pois neles o fazer e o compreender constituem faces de uma mesma moeda. (BRASIL, 1997, p.35).

O uso dos jogos como dinâmica didática é corroborada na fala de D'Ambrósio (2005, p. 102), pois “o conhecimento se dá de maneira diferente em culturas diferentes e em épocas diferentes”. Em seguida, D'Ambrósio (2005, p. 102) afirma que “o acesso a um maior número de instrumentos e de técnicas intelectuais dão, quando devidamente contextualizadas” capacidade para o enfrentamento de novas situações e problemas, contribuindo para “uma possível solução ou curso de ação”.

Em sua dissertação, Carvalho (2009, p. 31) destaca:

> O uso dos jogos como recurso às aulas de matemática favorece um ambiente adequado para resolução de problemas, aplicação e exploração de conceitos matemáticos e/ou para um aprofundamento destes. Assim, torna-se relevante a prática de jogos nas aulas de matemática, pois esses propiciam momentos de desbloqueio dos estudantes que, normalmente, apresentam aversão a esta disciplina.

Carvalho destaca o fato de tornar a aula “estimulante, desafiadora, provocativa” e para Marco (2004 apud CARVALHO, 2009, p. 31) “o jogo propicia o desenvolvimento de habilidades, como análise de possibilidades, tomada de decisão, trabalho em grupo, saber ganhar e saber perder”. O jogo é essencial para a diversidade didática e constitui fonte motivadora, essencial no ato de quem é educado.

Cabe ao professor identificar qual é a melhor maneira de inserir o jogo em sua prática didática desde que observados os critérios necessários para alcançar os objetivos do ensino.

Para Muniz (2010, p. 13):

> Nesta perspectiva, o jogo é concebido como importante instrumento para favorecer a aprendizagem na criança e, em consequência, a sociedade deve favorecer o desenvolvimento do jogo para favorecer as aprendizagens, em especial as aprendizagens matemáticas. (MUNIZ, 2010, apud PARANÁ, 2012).

E continua:

> Entre as diferentes possibilidades metodológicas para o ensino da matemática os jogos tem-se mostrado um caminho ou uma alternativa de grande relevância para o desenvolvimento do pensar matemático, da criatividade e da autonomia do educando. A ideia dos jogos nos conduz a experiências significativas, denotando a importância do aprofundamento teórico acerca da proposta que envolve os jogos. (PARANÁ, 2012, não paginado).

O Jogo do Nim é indicado como ferramenta pedagógica para ensinar a divisão com resto, gerando “grande expectativa para saber se era possível aprender matemática brincando” (PARANÁ, 2012, sem paginação).

O desenvolvimento de habilidades de raciocínios lógico e dedutivo indutivo, o desenvolvimento da linguagem e da criatividade e ainda, a atenção e a concentração são, segundo Borin (2004, p. 100), habilidades essenciais para o aprendizado e podem ser resultantes do uso de jogos.

A escolha do jogo do Nim como norteador deste trabalho acentua-se, pois o PCN (1998, p. 27), aponta para o fato de que o jogo é como um agente auxiliar no desenvolvimento do indivíduo, quando “estimula o crescimento coletivo e individual” e o respeito mútuo, introduzindo uma forma diferenciada de abordar os problemas.

O PCN (BRASIL, 1997, p. 33) destaca para a resolução de um problema que o aluno elabore um ou vários problemas correlatos de resolução “como, por exemplo, realizar simulações, fazer tentativas, formular hipóteses” e ainda, “compare seus resultados com o de outros alunos” além de validar seus procedimentos.

> Resolver um problema não se resume em compreender o que foi proposto e em dar respostas aplicando procedimentos adequados. Aprender a dar uma resposta correta, que tenha sentido, pode ser suficiente para que ela seja aceita e até seja convincente, mas não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido. (BRASIL, 1997, p. 33)

Segundo Dante (1999, p. 11), um dos objetivos principais da matemática é “fazer o aluno pensar produtivamente” e destaca que para isso “nada melhor” do que as situações problema, pois elas envolvem, desafiam e motivam o aluno a “querer resolvê-las”.

Para Polya (1978, prefácio):

> Por trás do desejo de resolver este ou aquele problema que não resulta em nenhuma vantagem material, pode haver uma curiosidade mais profunda, um desejo de compreender os desejos e as maneiras, as motivações e os procedimentos da resolução.

Ao colocar a fala de Dante e de Polya, Adilson de Campos (2015, p. 13) em sua dissertação conclui que o professor de matemática no uso de um problema tem “uma grande oportunidade de desafiar a curiosidade de seus estudantes”. Pondera que tais desafios devem ser compatíveis aos seus alunos “orientando-os através de indagações incentivadoras, podendo assim incutir-lhes o gosto pela descoberta e pelo raciocínio independente”.

Os principais erros no ensino da matemática, o que justifica ainda mais a escolha do tema de nosso trabalho, segundo PCN (BRASIL, 1998, p. 97), são:

> • ausência de situações-problema envolvendo números “grandes”;
> • desestímulo ao uso dos procedimentos aritméticos, considerados como “raciocínios inferiores” quando comparados aos procedimentos algébricos;
> • ausência de um trabalho com estimativas e com cálculo mental e o abandono da exploração dos algoritmos das operações fundamentais;
> • trabalho centrado nos algoritmos, como o cálculo do mmc e do mdc sem a compreensão dos conceitos e das relações envolvidos e da identificação de regularidades que possibilitem ampliar a compreensão acerca dos números.

E ainda:

> O estímulo à capacidade de ouvir, discutir, escrever, ler ideias matemáticas, interpretar significados, pensar de forma criativa, desenvolver o pensamento indutivo/dedutivo, é o caminho que vai possibilitar a ampliação da capacidade para abstrair elementos comuns a várias situações, para fazer conjecturas, generalizações e deduções simples como também para o aprimoramento das representações, ao mesmo tempo que permitirá aos alunos irem se conscientizando da importância de comunicar suas ideias em concisão. (PCN, 1998, p. 63).

Os jogos na matemática são ferramentas adequadas para o processo ensino aprendizagem na faixa etária que compreende o projeto, a saber, entre 11 e 12 anos, porque, segundo Piaget, estas idades estão associadas a dois ciclos: o operatório concreto e o operatório formal. O primeiro necessita do toque, do fazer para que ocorra a construção do conhecimento: desequilíbrio, assimilação, acomodação, equilíbrio; e o segundo, onde o uso do raciocínio lógico e sistemático se faz presente e, material concreto serve de base para as deduções lógicas que se ampliam nesta transição etária.

O jogo do Nim é inserido com o objetivo de auxiliar o aprendizado e, com o crescimento e desenvolvimento intelectual nesta faixa etária, onde a criança começa a ser capaz de modificar as regras do jogo, moldá-las conforme suas necessidades fazendo com que o aprendizado e os padrões matemáticos existentes possam ser analisados, discutidos e venham á tona.

Já Vygotsky considera que todos têm o seu tempo para aprender sem destacar uma idade limite para a aprendizagem ocorrer.

> [...] a aprendizagem não é, em si mesma, desenvolvimento, mas uma correta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental, ativa todo um grupo de processos de desenvolvimento, e esta ativação não poderia produzir-se sem a aprendizagem. Por isso, a aprendizagem é um momento intrinsecamente necessário e universal para que se desenvolvam na criança essas características humanas não-naturais, mas formadas historicamente. (VYGOSTSKY, 1988, p. 115).

Para Vygotsky (1988, p. 18) “o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros”.

Segundo Oliveira (1999, p. 67), a criança através do jogo “comporta-se de forma mais avançada do que nas atividades da vida real e também aprende a separar objeto e significado [...]”.

Para Charnay (1996, p. 46) “só há problema se o aluno percebe uma dificuldade... Há então, uma ideia de obstáculo a ser superado [...].” Em nosso caso, como vencer o jogo do Nim é o problema que propomos aos nossos alunos, a dificuldade e, a regra matemática associada à dinâmica do jogo é a solução do obstáculo a ser superado.

Ao fazer isso, o professor:

> [...] organiza a aula para que o aluno resolva o problema individualmente ou em grupo e para que essa resolução seja feita com recurso de uma operação, que pode ser identificada por palavras do enunciado (ou não). Esse meio também abrange instrumentos ou objetos e podem ser elementos que favorecem ou dificultem a aprendizagem. (MEDEIROS, 2012, p. 3).

A “mera transmissão de explicações e teorias” e o “adestramento em técnicas e habilidades” são pilares da educação formal, segundo D’AMBRÓSIO (2005, p. 117). Assim, a proposta aqui inserida contribui como uma nova ferramenta afirmativa e comprobatória das teorias tratadas e das afirmações dos diversos pensadores didático-pedagógicos.

No entanto, não devemos deixar de lado a capacidade do ser usufruir e intentar dos preceitos matemáticos da indução e da dedução lógica:

> O exercício da indução e da dedução Matemática reveste-se de importância no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, de formular e testar hipóteses, de induzir, de generalizar e de inferir dentro de determinada lógica, o que assegura um papel de relevo ao aprendizado dessa ciência e em todos os níveis de ensino. PCN (1998, p. 26).

Cabe, com o auxílio de ferramentas pedagógicas e, neste projeto com o uso do jogo do Nim, de fazer valer das bases matemáticas acima citadas. Insere-se aqui o que cita a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDBEN) (BRASIL, 1996, Art. 2) onde é necessário, na prática docente, alcançar o “pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho”.

1.7.3 Fundamentação Matemática

Os preceitos e bases matemáticas que se seguem estão fundamentados, nos livros de Hefez (2013) e de Milies & Coelho (1996). Notadamente, seguem as contribuições extraídas de outros autores.

Assumiremos de forma axiomática a existência do conjunto totalmente ordenado de números inteiros, que denotaremos por $\mathbb{Z}$, munido com operações usuais de adição e multiplicação, onde valem todas as propriedades básicas bem difundidas entre os alunos do ensino fundamental, tais como, associativas, comutativas, leis de cancelamentos, as existências dos elementos neutros “0” e “1” da adição e multiplicação respectivamente, além de propriedades tais como a distributiva da multiplicação em relação à soma; compatibilidades em relação às desigualdades, etc. Também utilizaremos notações do tipo $\mathbb{N} = \mathbb{Z}_+$ para indicar o conjunto dos inteiros não negativos e $\mathbb{Z}_-$ para indicar o conjunto dos inteiros não positivos.

Lembremos que um conjunto S contido em $\mathbb{Z}$ é limitado inferiormente quando existe um inteiro tal que $a \leq s$ para todo $s \in S$, e possui um menor elemento ou um elemento mínimo se existir $u \in S$ talque $u \leq s$ para todo $s \in S$. Notação: $u = min(S)$.

Princípio da Boa Ordenação (PBO)

Axioma 1 (Princípio da Boa Ordenação): Se S é limitado inferiormente com $S \subseteq \mathbb{Z}_+$ e $S \neq \emptyset$, então S possui um menor elemento.

Teorema 2: $\nexists \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < n < 1$.

Demonstração: Supomos por absurdo que $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < n < 1$. Assim temos que $S = \{x \in \mathbb{Z} | 0 < x < 1\}$ é um conjunto $S \neq \emptyset$ e limitado inferiormente, ou seja, existe $min(S) = a \in S$, com $0 < a < 1$. Multiplicando por a obtemos $0 < a^2 < a$, mas como $0 < a < 1$ então temos que $0 < a^2 < a < 1$ e, portanto $a^2 \in S$ com $a^2 < a = min(S)$ o que é uma contradição. Portanto $S \neq \emptyset$. ■

Corolário 2.1: Para todo a inteiro, $\nexists \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$ tal que $\mathrm{a} < n < \mathrm{a} + 1$.

Demonstração: Se existisse tal n, então $a - a < n - a < a + 1 - a$ fornece $0 < n - a < 1$ o que contradiz o Corolário 1.1. ■

Corolário 2.2: (Propriedade Arquimediana): Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então $\exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $nb > a$.

Demonstração: Seja $S = \{m|b| - a \geq 0 | m \in \mathbb{N}\}$ logo S é subconjunto de $\mathbb{Z}_+$ e ainda, $S \neq \emptyset$ pois desde que $|b| \geq 1$ para $m = |a|$ temos $|a||b| - a = |a|(|b| \pm 1) \in S$. Pelo Axioma acima podemos tomar $min(S) = r|b| - a$ em S. Como $(r-1)|b| - a < rb - a$, segue-se que $(r+1)a - |b|$ deverá ser negativo, logo $n = r - 1$ satisfaz o corolário, caso b seja positivo e $n = 1 - r$ satisfaz o teorema caso b seja negativo. ■

Princípio de Indução Matemática

O próximo teorema é conhecido como Primeiro principio de indução cuja prova pode encontrar em Hefez (2013, p. 15).

Teorema 3 (Princípio de Indução Matemática): Seja $a \in \mathbb{Z}$ e $S \subseteq \mathbb{Z}$ tais que:

i) $a \in S$.

ii) Se para qualquer $n \geq a$, tivermos: $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$.

Então $\{x \in \mathbb{Z} \ / \ x \geq a\} \subset S$.

Demonstração: Seja $S' = \{x \in \mathbb{Z}; x \geq a\}$ e suponhamos por absurdo que $S' \not\subset S$, logo $S' \backslash S \neq \emptyset$. Como esse conjunto é limitado inferiormente (por a), existe um menor elemento $c \neq a$ em $S' \backslash S$. Como $c - 1$ é menor que esse mínimo c, então $c - 1$ não pertence a $S' \backslash S$. Porém, $c - 1 \notin S$, pois se pertencesse, pela hipótese sobre S, teriamos que $c = (c - 1) + 1 \in S$, o que contradiria o fato de $c \in S' \backslash S$. Resta, portanto que $c - 1 \notin S'$, que é o mesmo que dizer que $c - 1 < a$. Logo, obtemos um inteiro a que satisfaz $c - 1 < a < c$ o que contradiz o corolário 1.2. ■

Teorema 4 (Prova pelo Princípio de Indução Matemática): Seja $a \in \mathbb{Z}$ e $p(n)$ uma sentença aberta em n. Suponha que:

i) $p(a)$ é verdadeiro, e que.

ii) Se $\forall n \geq a$, $p(n)$ $verdadeiro \Rightarrow p(n + 1)$ é verdadeiro.

Então, $p(n)$ é verdadeiro para todo $n \geq a$.

Demonstração: Utilizaremos a prova de Hefez (2013, p. 15).

Seja $\mathcal{V} = \{n \in \mathbb{Z} \,|p(n) \text{ é } verdadeira\}$, ou seja, $\mathcal{V}$ é o subconjunto dos elementos de $\mathbb{Z}$ para os quais e $p(n)$ é verdadeiro.

Como por (i) $a \in \mathcal{V}$ e por (ii)

$\forall n$, $n \in \mathcal{V} \Rightarrow n + 1 \in \mathcal{V}$,

Segue-se pelo Princípio de Indução Matemática que $\{x \in \mathbb{Z} \,|x \geq a\} = \mathcal{V}$. ■

Observação 5: Podemos trocar o item ii) do teorema acima por uma condição equivalente:

ii') Se, para todo $n \geq a$, as hipóteses $p(a)$, $p(a + 1)$,..., $p(n)$ verdadeiras implicar que $p(n + 1)$ é verdadeiro.

Então o Teorema 4 continua válido e é muitas vezes chamado de Princípio de Indução Completa.

Divisibilidade

Definição 6: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, diremos que a divide b ou que a é divisor ou fator de b, ou ainda, que b é um múltiplo de a, quando existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$.

Notação: $a|b$

Quando não existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$. Usaremos a notação $a \nmid b$.

Exemplo 6.1: Temos que 5 divide 20, isto é, 5 é divisor de 20, ou ainda 20 é múltiplo de 5, onde $c = 4$ é um número inteiro.

Proposição 7 (Propriedades da Divisibilidade): Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que:

i) $1|a$, $a|a$, e $a|0$.

ii) $0|a \Leftrightarrow a = 0$.

iii) a divide b se, e somente se, $|a|$ divide $|b|$.

iv) se $a|b$ e $b|c$, então $a|c$.

Demonstração: (i) Pela Definição 6 temos que $1|a$, $a|a$, e $a|0$ pois existem $c, d, e \in \mathbb{Z}$ tais que $a = c \cdot 1$, $a = d \cdot a$ e $0 = e \cdot a$, basta tomarmos $c = a$, $d = 1$ e $e = 0$.

(ii) Se $0|a$ então $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = c \cdot 0 = 0$. Portanto 0 só divide 0.

(iii) Se $a|b$, então $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ca$, assim $b = (-c)(-a)$ e $-b = (-c)a = c(-a)$ fornecem as condições para que $|a|$ divida $|b|$.

(iv) Se $a|b$ e $b|c$, temos que $\exists d \in \mathbb{Z}$ tal que $b = da$ (I) e $\exists e \in \mathbb{Z}$ tal que $c = eb$ (II). Substituindo (I) em (II), obtemos $c = e(da) = (ed)a$, ou seja, $a|c$. ■

Proposição 8: Se $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, então $a|b$ e $c|d$ e, portanto $ac|bd$.

Demonstração: Se $a|b$ então $\exists\ e \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ea$. Da mesma forma, se $c|d$ então $\exists\ f \in \mathbb{Z}$ tal que $d = fc$. Logo podemos escrever $bd = (ea)(fc) = (ef)(ac)$, portanto $ac|bd$. ■

Proposição 9: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tais que $a|(b \pm c)$, então $a|b \Leftrightarrow a|c$.

Demonstração: Se $a|(b \pm c)$ então $\exists\ e \in \mathbb{Z}$ tal que $b \pm c = ea$. Se $a|b$ então $\exists\ f \in \mathbb{Z}$ tal que $b = fa$. Assim, podemos escrever $fa \pm c = ea \Rightarrow c = ea \pm fa = (e - f)a$, ou seja, $a|c$. A recíproca é análoga. . ■

Proposição 10: Sejam $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a|b$ e $a|c$ então, para $m, n \in \mathbb{Z}$, $a|(mb + nc)$.
Demonstração: Veja que se $a|b$ e $a|c$ então $\exists\ e \in \mathbb{Z}$ tal que $b = ea$ e $\exists\ f \in \mathbb{Z}$ tal que $c = fa$. Desta forma escrevemos $mb + nc = m(ea) + n(fa) = (me + nf)a$. Portanto, $a|(mb + nc)$. ■

Adaptado de HEFEZ (2013, p. 53) obtém-se a demonstração do próximo resultado, conhecido na literatura como teorema da divisão euclidiana ou Algoritmo de Euclides.
Teorema 11 (Divisão Euclidiana): Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Existem dois únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$.
Demonstração: Considere o conjunto $S = \{x = a - by | y \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}$. Existência: Pela Propriedade Arquimediana (Corolário 2.2, p. 21), $\exists\ n \in \mathbb{Z}$ tal que $n(-b) > -a$, logo $a - nb > 0$, o que mostra que S é não vazio. O conjunto S é limitado inferiormente por 0, logo, pelo Princípio da Boa Ordenação (Axioma 1, p. 21), temos que S possui um menor elemento r, o que garante também a existência de um inteiro q tal que $a - bq = r$. Como $r \geq 0$ resta provar que $r < |b|$. Suponhamos por absurdo que $r \geq |b|$. Portanto $\exists\ s \in \mathbb{N}$ tal que $r = |b| + s$, logo $0 \leq s < r$. Mas isto contradiz o fato de r ser o menor elemento de S, pois $s = a - (q + 1)b \in S$ ou $s = a - (q - 1)b \in S$, com $s < r$.
Unicidade: Suponha que $a = bq + r = bq' + r'$, onde $q,\ q',\ r,\ r' \in \mathbb{Z}$, $0 \leq r < |b|$ e $0 \leq r' < |b|$. Assim, temos que $-|b| < -r \leq r' - r \leq r' < |b|$. Logo, $|r' - r| < |b|$. Por outro lado, $b(q - q') = r' - r$, o que implica que $|b||q - q'| = |r - r'| < |b|$, o que só é possível se $q = q'$ e consequentemente, $r = r'$. ■

O Teorema da Divisão Euclidiana nos fornece o quociente q e o resto r da divisão de a por b.
Exemplo 11.1: Na divisão de 23 por 5 obtemos o quociente $q = 4$ e o resto $r = 3$. Já a divisão de -23 por 5 obtemos o quociente $q = -5$ e o resto $r = 2$.

Sistemas de Numeração

O Sistema de Numeração usual é o Sistema de Numeração Decimal. Mas ele não é o único que faz parte de nossas vidas. Há também o sistema de contagem dos minutos e das horas: o sexagesimal; e o binário, um sistema que norteia a lógica matemática das tecnologias da informação.

Conforme Hefez (2013, p. 68), através do algoritmo da divisão e o princípio da indução completa (ver Observação 5, p. 22 e 23) obtemos a representação da expansão relativa à base b, que está claramente definida pelo seguinte resultado:

Teorema 12: Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a > 0,\ b > 1$. Existem números inteiros tais que $n \geq 0$ e $0 \leq r_0, r_1, r_2 \cdots, r_n < b$, com $r_n \neq 0$, univocamente determinados, onde $a = r_0 + r_1 b + r_2 b^2 + \cdots + r_n b^n$.

Demonstração: Inicialmente vamos à existência da expansão de a na base b, para isso usaremos indução completa sobre a.

(i) Se $0 < a < b$, tomando $n = 0$ e $r_0 = a,$ temos nosso resultado.

(ii) S Suponhamos válido para todo $a' \in \mathbb{N}$ menor do que a com $a \geq b$. Vamos mostrar que vale para a. Pelo Teorema 11 acima, existem q e r únicos tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < |b|$. Então $a = bq + r \geq b \Rightarrow a = bq - b + r \geq 0$ mas como $a \geq b$, obtemos que $a > b(q-1) + r > 0 \Rightarrow a - r = bq - b \geq 0$, ou seja, $a - r = b + \cdots + b - b > 0$ com $q - 1$ parcelas, o que nos faz concluir que $a > q > 0$. Pela hipótese de indução temos que para $a' = q$ o teorema é válido isto é existem $n' \geq 0$ e $0 \leq r'_1, r'_2, \cdots, r'_{n'+1} < b$ com $r'_{n'+1} \neq 0,$ tais que $a' = q = r'_0 + r'_1 b + r'_2 b^2 + \cdots + r'_{n'} b^{n'}$. Assim temos $a = bq + r = b\left(r'_0 + r'_1 b + r'_2 b^2 + \cdots + r'_{n'} b^{n'}\right) + r$ e, portanto para $r_0 = r$, $r_, = r'_0$,... e $n = n' + 1$ garantem a expansão de a na base b.

A unicidade desta expansão é garantida pela unicidade do resto no algoritmo da divisão. ∎

Com a expansão decimal podemos provar critérios imediatos de divisibilidade por 2, 5 e 10, por 3 e 9 e por 6.

Critérios de Divisibilidade

Proposição 13 (Critérios de Divisibilidade): Seja $a \in \mathbb{Z}_+$, de forma que $a = a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 a_0$, então:

(i) a é divisível por 2 se, e somente se, a_0 for par.

(ii) a é divisível por 5 se, e somente se, a_0 for igual a 0 ou 5.

(iii) a é divisível por 10 se, e somente se, a_0 for igual a 0.

(iv) a é divisível por 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é divisível por 3.

(v) a é divisível por 9 se, e somente se, a soma de seus algarismos é divisível por 9.

(vi) a é divisível por 6 se, e somente se, a_0 é for par e $a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ for divisível por 3.

Demonstração: Em todos os itens usaremos a expansão decimal

$$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

Desde que $a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10$ é múltiplo de 2, 5 e 10 então pela Proposição 9, temos que $2|a$, $5|a$ ou $10|a$ se, e somente se, $2|a_0$, $5|a_0$ ou $10|a_0$ respectivamente, o que prova (i),(ii) e (iii).

Desde que para todo natural n, tem-se $9|(10^n - 1)$ (prova-se indutivamente) segue-se pelo item iv) da Proposição 7 que, tanto 3 quanto 9 dividem $a_n(10^n - 1) + \cdots + a_1(10 - 1)$. Como: $a - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0) = a_n(10^n - 1) + \cdots + a_1(10 - 1)$, temos pela Proposição 9, que $3|a$ ou $9|a$ se, e somente se, $3|(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$ ou $9|(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 + a_0)$ respectivamente, o que prova (iv) e (v). O item (vi) é mera aplicação dos itens (i) e (iv). ■

Números Primos

Definição 14: Um número $p \in \mathbb{N}$ diferente de 0, 1 que só possui como divisores positivos o 1 e ele próprio é chamado de número primo; caso contrário, é chamado de número composto. No caso de $n \in \mathbb{N}$ ser composto, devem existir dois naturais $1 < a, b < n$ tais que $n = a.b$.

Teorema 15 (Lema de Euclides): Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$, com p primo. Se $p|ab$, então $p|a$ ou $p|b$.

Demonstração: Se $p|ab$ então $\exists c \in \mathbb{Z}$ tal que $ab = pc$. Se $p|a$ nada temos a demonstrar, se p não divide a, considere $S = \{ax + py > 0 : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Temos que S é não vazio e limitado inferiormente, portanto pelo Principio da Boa Ordenação, existe em S um inteiro $d = ax_0 + py_0 = min(S)$. Observemos que d divide a, pois pelo algoritmo da divisão $a = dq + r$ onde $0 \leq r < d$ Caso $r = a(1 - x_0) + p(y_0) > 0$ então $r \in S$ e $r < \min(S)$, seria uma contradição, resta que $r = 0$. De modo análogo provamos que d divide p. Ora, d divide p, portanto $d = 1$ ou $d = p$, mas d também divide a, e p não divide a, logo $d = 1$. Como $ax_0 + py_0 = d = 1$, multiplicando os dois membros por b, isto é, $axb + pyb = b \Rightarrow abx + pby = b$. Substituindo ab por pc na última igualdade, temos que $pcx + pby = b$ o que implica $p(cx + by) = b$ mostrando assim que b é múltiplo de p, isto é, $p|b$. ■

O seguinte resultado é imediato e sua prova é feita utilizando o Primeiro Princípio de Indução.

Corolário 15.1: Se $p, p_1, \cdots, p_n$ são números primos e, se $p|p_1 \cdots p_n$ então $p = p_i$, para algum $i = 1, \cdots, n$.

Teorema 16 (Teorema Fundamental da Aritmética): Todo número natural n maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único, a menos da ordem dos fatores, como produto de números primos.

Demonstração: Existência dos primos que fatoram n: Usaremos o princípio de indução completa sobre n (Observação 5). Para $n = 2$ vemos que a afirmação é verdadeira, pois 2 é primo. Suponhamos válido o resultado para todo número natural $2 \leq k < n$. Vamos provar que o resultado vale para n. Se o número n é primo, nada temos a demonstrar. Suponhamos então que n seja composto. Assim, existem números naturais n_1 e n_2 tais que $n = n_1 n_2$, onde $1 < n_1 < n$ e $1 < n_2 < n$ que, pela hipótese de indução, existem números primos $p_1 \cdots p_r$ e $q_1 \cdots q_s$, tais que $n_1 = p_1 \cdots p_r$ e $n_2 = q_1 \cdots q_s$ e, portanto $n = p_1 \cdots p_r q_1 \cdots q_s$.

Unicidade dos primos que fatoram n:

Para provar a unicidade suponhamos que $n = p_1 \cdots p_r = q_1 \cdots q_s$ onde $p_1, \cdots, p_r$, $q_1, \cdots, q_s$ são primos, então temos que pelo Corolário 14.1, dado o número primo p_1, $p_1 | q_1 \cdots q_s$ obtendo $p_1 = q_j$ para algum $j = 1, \cdots, s$. Portanto $p_1 = q_j$. Sem perder a generalidade, reordenando os q_j podemos fazer $p_1 = q_1$. Repetindo este processo uma quantidade finita de vezes chegamos a $r = s$ e $p_i = q_i$ para todo $i = 1, \cdots, r$, pois do contrário, por exemplo, se tivermos $r < s$ então chegaríamos a $1 = q_{r+1} \ldots q_s$ o que é contraditório. ■

Exemplo 16.1: O número 201 é composto, pois $2 + 0 + 1 = 3$. Podemos escrevê-lo como produto de número primos, de fato, $201 = 3 \cdot 67$.

Observação 17: É possível provar que existem infinitos números primos. (veja demonstração na página 150 do livro intitulado Aritmética de Hefez).

Crivo de Erastótenes

Segundo Oliveira e Fernández (2010, p. 127), o Crivo de Erastótenes é um algoritmo que nos permite achar todos os números primos que são menores ou iguais que um natural n dado. O próximo resultado fornece uma condição suficiente para verificar a primalidade de um número n, para tanto basta que o número em questão não seja divisível por nenhum número primo p que seja menor ou igual a $\sqrt{n}$. O próximo resultado demonstra este resultado interessante que estimula a curiosidade dos estudantes mais jovens.

Proposição 18 (Crivo de Erastótenes) Se um número natural $n > 1$ não é divisível por nenhum número primo p tal que $p^2 \leq n$, então ele é primo.
Demonstração: Suponha que n seja composto e considere p o menor divisor primo de n. Portanto $n = pq$ para certo $q > p$. Multiplicando ambos os lados da desigualdade por p, temos $n = pq > p^2$, portanto existe um primo p tal que p divide n e $n > p^2$, o contradiz a hipótese. ■

Erastótenes (285-194 a.C.) usou este critério para criar o método que consiste em primeiramente, escrever os números de forma ordenada a partir de 2. Em seguida, por ser o 2 o primeiro primo da sequência escrita, eliminamos todos os seus múltiplos desta listagem. Na sequência, o primeiro número que sobrar é primo, isto é, 3 é primo e repete-se o processo de eliminar todos os múltiplos de p enquanto tivermos $p \leq \sqrt{n}$. Conclui-se pela Proposição 16, todos os outros números não eliminados da sequência serão primos.

Exemplo 18.1: Para procurar os números primos para $n = 35$, temos que $\sqrt{35} \cong 5{,}9$. Logo, aplicando o crivo de Erastótenes, eliminamos os múltiplos de 2, os múltiplos de 3 e os múltiplos de 5, pois como $6^2 = 36 > 35$ e então paramos. Restam os primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 e 31.

Conjectura de Goldbach

As seguintes proposições são decorrência de uma carta enviada, em 1742, pelo matemático prussiano Christian Goldbach a seu colega suíço Leonhard Euler na qual propunha que todo número par maior do que dois podia ser expresso como a soma de dois números primos e que todo número ímpar maior do que cinco podia ser expresso como a soma de três números primos.

Nem Goldbach nem Euler foram capazes de provar as afirmações, por isso permaneceram como suposições, ou conjecturas. A seguir enunciamos tais conjecturas:

Proposição 19 (Conjectura de Goldbach): Todo inteiro par maior que 2 pode ser escrito como a soma de 2 números primos (distintos ou não).

Observação 20: Para a aplicação em sala de aula utilizamos a seguinte afirmação para a Conjectura de Goldbach: Todo inteiro par maior que 5 pode ser escrito como a soma de 3 números primos.

Exemplo 20.1: Alguns números segundo a conjectura.

$6 = 2 + 2 + 2$; $8 = 2 + 3 + 3$; $10 = 2 + 3 + 5$; $12 = 2 + 3 + 7$ ou $12 = 2 + 5 + 5$;

Proposição 21 (Conjectura Fraca de Goldbach): Todo inteiro ímpar maior que 7 pode ser escrito como a soma de 3 números primos.

Exemplo 21.1: Alguns números segundo a conjectura fraca.

$7 = 2 + 2 + 3$; $9 = 3 + 3 + 3$; $11 = 3 + 3 + 5$; $13 = 3 + 3 + 7$ ou $13 = 3 + 5 + 5$;

Recentemente, em junho de 2013, o matemático peruano Harald Helfgott, em um trabalho publicado com 79 páginas[2], afirma ter demonstrado que a Conjectura Fraca de Goldbach, porém ainda não se sabe se sua prova é correta.

Sistemas de Congruências - Aritmética dos Restos

É baseada no Teorema da Divisão Euclidiana onde os restos da divisão por um número fixo são analisados.

Definição 22: Seja $m \in \mathbb{N}$. Dois números $a, b \in \mathbb{Z}$ são ditos congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Escrevemos $a \equiv b \; mod \; m$.

Exemplo 22.1: $17 \equiv 5 \; mod \; 2$ pois os restos de 17 e 5 por 2 são iguais a 1.

A negação da relação é escrita $a \not\equiv b \; mod \; m$ e refere-se quando a e b são incongruentes ou simplesmente não congruentes módulo m.

Proposição 23: Sejam $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$, temos que se $a \equiv b \; mod \; m$ se, e somente se, se $m|b - a$.

Demonstração: Sejam as divisões euclidianas de a e b por m, $a = mq + r$ e $a = mq' + r'$, com $0 \leq r, r' < m$, temos que $b - a = m(q - q') + (r - r')$. Assim, $a \equiv b \; mod \; m$ se, e somente se, $r = r'$ o que equivale a $b - a$ ser múltiplo de m. ■

Proposição 24: Seja $m \in \mathbb{N}$. Dados $a, b, c \in \mathbb{Z}$, temos que:

i) $a \equiv a \; mod \; m$,

ii) se $a \equiv b \; mod \; m$, então $b \equiv a \; mod \; m$,

iii) se $a \equiv b \; mod \; m$ e $b \equiv c \; mod \; m$, então $a \equiv c \; mod \; m$.

Demonstração:

(i) Pela Proposição 5 sabemos que $m|0$. Portanto $m|a - a$. Logo $a \equiv a \; mod \; m$.

(ii) Pela hipótese temos $m|b - a$, isto é, $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$ tal que $b - a = m\alpha$. Desde que $a - b = -(b - a) = m(-\alpha)$ e $-\alpha$ ainda é inteiro, portanto $m|a - b$. Logo vale a tese.

---

[2] Fonte: <https://www.researchgate.net/publication/236688229_Major_arcs_for_Goldbach's_theorem> Acesso em: 3 mar. 2016.

(iii) Se $a \equiv b \bmod m$ então $m|b-a$, isto é, existe alfa inteiro tal que $b-a=m\alpha$ (I). Se $b \equiv c \bmod m$ então $m|c-b$, isto é, existe beta inteiro tal que $c-b=m\beta$ (II). Somando membro a membro (I) e (II): $(b-a)+(c-b)=m\alpha+m\beta \Rightarrow c-a=m(\alpha+\beta) \Rightarrow c-a=m\gamma$, o que implica que $a \equiv c \bmod m$, pois $\alpha+\beta \in \mathbb{Z}$. ■

Sistema Completo de Resíduos Módulo m.

Proposição 25: Sejam $a,b,c,d,m \in \mathbb{Z}$, com $m>1$, então se:

i) $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então $a+c \equiv b+d \bmod m$,

ii) $a \equiv b \bmod m$, $c \equiv d \bmod m$, então $ac \equiv bd \bmod m$.

Demonstração: Supondo $a \equiv b \bmod m$ e $c \equiv d \bmod m$, então temos que $m|b-a$ e $m|d-c$. Assim pela Proposição 7,

(i) $m|(b-a)+(d-c)$, e por consequência $m|(b+d)-(a+c)$ e,

(ii) $m|(b-a)(c)$ e $m|(b)(d-c)$, daí pela Proposição 7, $m|(b-a)(c)+(b)(d-c)$ e assim $m|bd-ac$. ■

Corolário 25.1: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a,b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \bmod m$ então temos que $a^n \equiv b^n \bmod m$.

Demonstração: Vamos mostrar por indução sobre n. Seja $P(n)$: $\forall n \in \mathbb{N}$, $a,b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \bmod m$ então temos que $a^n \equiv b^n \bmod m$.

i) Para $n=1$ a afirmação é verdadeira pois $a^1 \equiv a \equiv b \equiv b^1 \bmod m$.

ii) Seja $P(n)$: $a^n \equiv b^n \bmod m$ verdadeira. Vamos mostrar que $P(n+1)$: $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \bmod m$ é válida. Ora, como $a \equiv b \bmod m$ e assumimos que $a^n \equiv b^n \bmod m$ é verdade, então pelo item (ii) da Proposição 22, temos que $a \cdot a^n \equiv b \cdot b^n \bmod m$ e, portanto $a^{n+1} \equiv b^{n+1} \bmod m$. ■

Teorema Chinês dos Restos

Finalmente, enunciamos sem prova um teorema bastante conhecido cuja prova podemos encontrar no livro Aritmética, de Hefez (2013), página 253. Este teorema será usado para apresentação de exemplo de aplicação que pode ser usado alternativamente em sala de aula (ver Seção 3.4.4: Adivinhando um número entre 1 a 1000, p. 71).

Teorema 26 (Teorema Chinês dos Restos): Se $(m_i, m_j) = 1$, $\forall\, m_i, m_j$ com $i \neq j$ então o sistema $X \equiv c_i \, mod(m_i)$, com $i = 1, \cdots, r$, possui uma única solução módulo $M = m_1 \cdot m_2 \cdots m_r$. As soluções são dadas por

$$x = M_1 y_1 c_1 + M_2 y_2 c_2 + \cdots + M_r y_r c_r + tM$$

onde $t \in \mathbb{Z}$, $M_i = \frac{M}{m_i}$ e y_i é solução de $M_i Y \equiv 1 \, mod(m_i)$.

1.8 A MATEMÁTICA ENVOLVIDA NO JOGO DO NIM

O jogo do Nim é um jogo milenar de origem chinesa. Foi explorado matematicamente por Charles L. Bouton[3]. O jogo é composto de dois adversários que retiram palitos, um após o outro até que se saiba o perdedor que é aquele que retirar o último da quantidade de palitos estipulada para o jogo.

Cabe aos dois adversários definir quem começa jogando através de sorteio ou de comum acordo. Cada jogada é realizada retirando-se no mínimo um palito e no máximo uma quantidade também a ser combinada. Alternando as jogadas entre os dois adversários denominados aqui de jogador A e jogador B, até que acabem os palitos.

Há várias versões do jogo do Nim. Vamos descrever aqui a versão utilizada como desafio no projeto.

1.8.1 Jogo do Nim

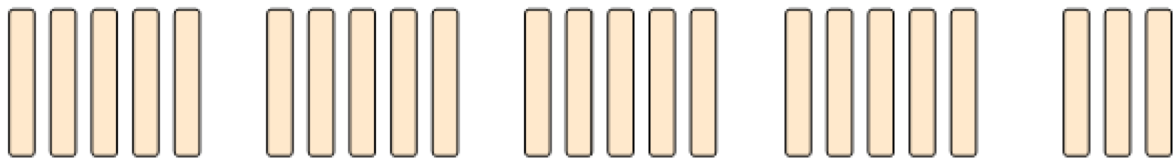
A versão que descrevemos a seguir, denotada por **Versão 1** é a que usamos neste projeto nos jogos aplicados em sala de aula.

Versão 1: Nesta versão os palitos são dispostos juntos de maneira que se pode retirar, conforme combinado, um número máximo de palitos e o mínimo de um palito por jogada por jogador. O perdedor é aquele que retirar o último palito.

---

[3] Professor da Universidade de Harvard, em 1902 descobriu que o jogo Nim pode ser jogado com uma estratégia matemática.

Figura 1 - Jogo do Nim Versão 1



A versão 1 foi a utilizada para desafiar os alunos e os estimular a buscar uma solução para vencer. Ao utilizarmos esta versão a quantidade disposta de palitos por partida foi de $N = 23$, retirados no mínimo um palito e no máximo 4 palitos por jogada para cada jogador.

Mas como devemos proceder para vencer uma partida? Existe uma estratégia vencedora para ganhar? Sim. Vejamos um exemplo com as quantidades de palitos utilizadas no projeto.

Enumeremos os jogadores por A e B, suporemos que o jogador A iniciará o jogo e com isso façamos uma simulação de situações de jogadas com um número menor de palitos.

Veja que se tivermos 1 palito apenas no jogo, o jogador A perde pois retira este último palito. Se a quantidade de palitos for 2, 3, 4 ou 5, bastará que o jogador A retire, respectivamente, 1, 2, 3 ou 4 palitos para que vença a partida pois deixará um palito para o jogador B.

Observe que com 6 palitos o jogador A mesmo que retire 1, 2, 3 ou 4 palitos perderá o jogo quando o jogador B retirar, 4, 3, 2 ou 1 palitos respectivamente, pois restará um único palito ao jogador A. Portanto, a quantidade de 6 palitos é um objetivo a ser alcançado e chamaremos tal situação de **posição segura** (também chamada de posição favorável na literatura) pois, ao controlar o jogo deixando 6 palitos ao seu adversário, ele tirando s palitos você tirará $5 - s$ palitos, restando 1 último para ele retirar e assim, você ganhará o jogo.

Continuando o mesmo raciocínio, ao iniciar a partida com 7, 8, 9 ou 10 palitos basta que o jogador A retire 1, 2, 3 ou 4 palitos respectivamente, ficando numa posição segura, deixando ao seu adversário 6 palitos. Obviamente repete-se o processo visto anteriormente para vencer a partida.

Com 11 palitos, o jogador A, mesmo que retire 1, 2, 3 ou 4 palitos perderá o jogo quando o jogador B retirar, 4, 3, 2 ou 1 palitos, porque restará a quantidade de 6 palitos, o que lhe garante uma posição segura ao jogador B. Assim temos que 6 e 11 palitos são posições seguras.

Já percebemos então que, ao formar grupos de 5 palitos podemos controlar o jogo a partir de uma posição segura. Seguindo os procedimentos que nos levaram a perceber que 6 e 11 são posições seguras, podemos verificar rapidamente que os números da sequência 1,6,11,16, 21, 26,..., ou seja, números da $1 + 5q < N$ para todo $q \in \mathbb{N}$, fornecem posições seguras.

Mas o jogo começa com 23 palitos, então utilizando a divisão euclidiana (ver Teorema 9, Capítulo 1, página 22) obtemos, $23 = 5.4 + 3 = (1 + 5 \cdot 4) + 2$, onde $1 + 5.4$ parece em nossa lista de posições seguras.

1.8.2 O caso geral

Generalizando essa ideia, para vencermos o jogo do Nim, onde o número N é o total inicial de palitos e n a quantidade máxima de palitos a ser retirados a cada jogada, devemos fazer a divisão de N por $n+1$ obtendo assim:

$$N = (n + 1) \cdot q + r = (n + 1).q + 1 + (r - 1)$$

e no caso de $r > 1$, desde que

$$S = N + 1 - r = (n + 1) \cdot q + 1$$

é uma posição segura, devemos retirar a quantidade $r - 1$ que sobra para obter uma posição segura e assim, no restante do jogo, a cada retirada s de seu adversário, bastará retirar $(n + 1) - s$ para voltarmos a uma posição segura até vencermos o jogo. Se na divisão de N por $n + 1$ o resto for 1, o jogador que começar a partida não estará numa posição segura e, se o resto da divisão for zero, basta retirar a quantidade n de elementos para voltar a uma posição segura. Devemos pensar o que ocorre quando $r = 1$ e $r = 0$ separadamente.

Se $r = 1$, então $S = N + 1 - r = N + 1 - 1 = N$, ou seja, se for a sua vez de jogar você está numa posição desfavorável e o adversário tem o controle do jogo neste momento e, basta que faça as devidas retiradas contrapondo as suas jogadas, de maneira a formar grupos de $n + 1$ palitos, fazendo com que você perca. Em outras palavras, quem for o segundo a jogar poderá controlar e ganhar o jogo.

Se $r = 0$, então a posição segura é alcançada retirando n palitos, pois temos que $(n + 1)|N$ e então em vez de q como quociente, tomemos $q - 1$ obtendo $r = n + 1$. Assim a posição segura S é alcançada subtraindo-se 1 de cada membro da equação anterior, isto é, $r - 1 = n + 1 - 1 \Rightarrow r - 1 = n$ e, portanto $S = N - |r - 1| = N - n$. Nesta situação o jogador que começar a partida tem a vantagem.

2. PLANOS DE AULA E CONSIDERAÇÕES

O presente projeto foi aplicado no 6º ano da Escola Municipal de Ensino Fundamental Doutor Ulisses Rodrigues, município de Santo Ângelo/RS, turma regular na qual somos professores.

O trabalho de aplicação do projeto metodológico inicialmente previa dez aulas adicionadas de uma atividade avaliativa final, porém, houve a necessidade de intervenção por parte do professor, motivada por problemas externos á aplicação do projeto a fim de sanar dificuldades de aprendizagem inicialmente não previstas, fazendo com que as aulas ficassem distribuídas conforme a tabela abaixo.

Tema Abordado em cada Plano de Aula

Plano de Aula	Data	Tema abordado
Plano de Aula I	*18/3/2016*	*O Jogo do Nim*
Plano de Aula II	*21/3/2016*	*Divisibilidade dos Números* *Critérios de Divisibilidade por 2, por 3*
Plano de Aula III	*23/3/2016*	*Critérios de Divisibilidade por 6, por 5 e por 10*
Plano de Aula IV	*28/3/2016*	*Atividades de Revisão/Reforço* *A divisibilidade e o Jogo de Nim* *Jogo do Nim (atividade lúdica)*
Plano de Aula V	*30/3/2016*	*Números Primos*
Plano de Aula VI	*1º/4/2016*	*Números Primos (continuação)*
Plano de Aula VII	*4/4/2016*	*Números Compostos*
Plano de Aula VIII	*6/4/2016*	*Atividades de Revisão/Reforço* *Números Primos e Números Compostos*
Plano de Aula IX	*8/4/2016*	*Fatoração por Números Primos*
Plano de Aula X	*11/4/2016*	*Fatoração por Números Primos* *Problemas Matemáticos*
Plano de Aula XI	*13/4/2016*	*Conjectura de Goldbach*
Plano de Aula XII	*15/4/2016*	*O Jogo do Nim: estratégias para vencer*
Plano de Aula XIII	*18/4/2016*	*Atividade de encerramento/avaliação*

Nas próximas seções faremos um relato completo de todas as aulas ocorridas, data de aplicação, tempo de aplicação, seus objetivos, conteúdo, desenvolvimento metodológico e a aplicação, seguindo-se de um relatório analítico dos acontecimentos pós-aplicação com o objetivo de deixar uma visão pessoal dos pontos positivos e negativos da experiência pedagógica alcançada a fim de contribuir em novas práticas pedagógicas na linha de ação deste projeto.

2.1 PLANO DE AULA I

Data: 18/3/2016

Período: 1h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Jogo do Nim

Objetivos: Capacitar os alunos para o jogo de Nim; Despertar a curiosidade matemática através de atividade lúdica orientada; Incentivar o pensar matemático.

Desenvolvimento metodológico

A apresentação foi expositiva dialogada relembrando as aulas anteriores sobre os números em nossas vidas: os números Indo-Arábicos. Na sequência introduzir o Jogo do Nim, um jogo milenar chinês que consiste em, depois de dispor uma quantidade finita pré-fixada de palitos numa fila, cada jogador deve retirar uma quantidade desejada de palitos limitados a um número máximo e um número mínimo, Jogado entre duas pessoas, aquela que retirar o último palito é o perdedor.

A aula seguirá seu curso com os alunos jogando entre si e contra o professor, onde o professor, detentor de todo o saber do jogo, sempre ganha.

A curiosidade estimulada em saber o porquê o professor sempre ganha o jogo, não importando a forma que se inicia ou contra quem jogue, será base dos questionamentos ao término da aula. O ponto de interrogação será lançado e as respostas surgirão no decorrer do processo pedagógico.

Abordagem didático-teórica

Em aulas anteriores, vimos que o homem criou seus próprios mecanismos de medir, de escrever e que a matemática aparece inicialmente para suprir as necessidades básicas de contagem. Desta forma surgiram vários sistemas de numeração. Os babilônios, os egípcios, os maias e os romanos, são exemplos de povos que assim o fizeram, mas de todos os sistemas o que se sobressaiu aos outros foi o Sistema de Numeração Indo-Arábico, que é o nosso sistema de numeração.

As sociedades evoluíram, assim como a matemática com os números e os seus sistemas de numeração e a matemática deixa de ser ferramenta simples de contagem e avança na direção de resolver toda ordem de problemas, explicar fenômenos naturais e estabelecer estratégias que aumentem a produtividade em vários campos, dentre eles, por exemplo, o de fornecer métodos vitoriosos em jogos de estratégia. Da cultura chinesa veio um jogo milenar, o jogo do Nim, que nos ajudará a entender melhor como funciona algumas operações matemáticas e as relações aritméticas existentes no jogo, cuja estratégia vitoriosa é bem estabelecida desde que o jogador tenha plenos conhecimentos de aritmética básica.

O Jogo do Nim

O jogo do Nim é um jogo milenar chinês que consiste em retirar palitos, jogado entre duas pessoas e o último a retirar o último palito é o perdedor. Vamos às regras:

- A quantidade de palitos deve ser um número ímpar;
- Cada jogador, na sua vez, retira uma quantidade de palitos restringidos a um número máximo por jogada;
- Quem retirar o último palito perde.

A quantidade de palitos utilizada foi 23 e o máximo por retirada de cada jogador é 4.

Formadas as duplas são iniciados os jogos. No primeiro momento o professor auxilia nas regras e, depois começa a jogar com os alunos.

Após muitos jogos e trocas entre alunos, com a participação do professor, que sempre ganha, antes do término da aula, o professor estimulará os alunos a se questionar como cada um ganhou ou por que perdeu. Alguns questionamentos a serem realizados:

- Por que o professor sempre ganha?
- Ele (o professor) conhece alguma estratégia vencedora?
- O que precisamos saber para vencer?

- Precisamos somar e/ou subtrair?
- Precisamos multiplicar e/ou dividir?

Outros questionamentos a serem apontados pelos alunos serão anotados para que possam ser respondidas ao longo do curso.

Análise/relato da aula I:

Os alunos reagiram com entusiasmo em saber que aprenderiam um jogo até então desconhecido e, que depois de aprender os movimentos básicos, jogando com o colega teriam a possibilidade de duelar com o professor. Aliás, este último fato foi o aspecto mais relevante e motivador.

Como destacado no planejamento desta aula, o professor fez a sua abordagem inicial, instruiu sobre o jogo do Nim, regras, jogadas e, com o auxílio de um dos alunos simulou uma batalha para que todos entendessem a dinâmica do jogo.

Após os primeiros jogos o professor realizou os questionamentos planejados e, percebeu-se que os alunos verificaram que se deixassem 6 palitos para o adversário jogar, ganhariam o jogo. Então o professor pediu que simulassem jogadas para ver como poderiam ganhar do educador.

O momento final ocorreu quando as duplas jogaram contra o professor que ganhou todas as partidas. Os alunos acreditam que o professor é sabedor da estratégia vencedora.

2.2 PLANO DE AULA II

Data: 21/3/2016

Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Divisibilidade dos Números; Critérios de Divisibilidade por 2 e por 3.

Objetivos: Reconhecer múltiplos e divisores de um número; Compreender os critérios de divisibilidade; Usar os critérios de divisibilidade como ferramenta para a resolução de problemas; Calcular mentalmente, pelo uso dos critérios de divisibilidade, quando o resto de uma divisão é zero.

Desenvolvimento metodológico

Ao rememorar o jogo de Nim, suas regras e, os questionamentos vindouros da aula anterior explicitar que uma das ferramentas necessárias para construir uma estratégia vencedora é estudar o conceito de divisibilidade dos números naturais.

A aula abordará, além do conceito de divisibilidade, os critérios de divisibilidade por 2 e por 3 através de exemplos e, culminará em atividades de fixação dos referidos critérios e resolução de problemas.

Abordagem didático-teórica

Introduziremos o conceito matemático de divisibilidade através do problema: “Em uma classe, há 28 alunos. Para um trabalho em equipe, o professor vai dividir os alunos dessa classe ou em grupos de exatamente 4 alunos ou em grupos de exatamente 5 alunos, de modo que nenhum aluno fique sem grupo. Nessas condições, como o professor deve organizar a turma para que todos os grupos tenham o mesmo número de alunos?” (retirado do livro-base do 6º ano).

Veja que para resolver o problema é necessário saber se 28 alunos podem ser distribuídos em grupos de 4 alunos cada, ou seja, se 28 é divisível por 4. Analogamente, 28 é divisível por 5.

Comparando as duas divisões, vemos que a primeira deixa resto 3, enquanto que a segunda possui resto zero. A primeira trata-se de uma divisão não exata; a segunda, de uma divisão exata.

Dizemos que um número natural é divisível por outro quando a divisão é exata, logo como a divisão de 28 por 4 é exata (ver Definição 6, p. 22), podemos afirmar que 28 é divisível por 4.

Em contrapartida, como a divisão de 28 por 5 é não exata, podemos afirmar que 28 não é divisível por 5 (ver Divisão Euclidiana, Teorema 11, p. 24).

Para o problema em questão, a resposta correta é: o professor deve organizar a turma de 28 alunos em grupos de 4 alunos.

Isto nos leva a afirmar que:

Um número natural a é divisível por um número natural b, diferente de zero quando a divisão de a por b é exata, ou seja, possui resto igual a zero (ver Divisão Euclidiana, Teorema 11, p. 24). Denominamos assim que o número natural a é múltiplo de b.

Critérios de Divisibilidade

Sabemos que para um número ser divisível por outro é necessário obtermos uma divisão exata, ou seja, resto zero. Mas é possível verificar, sem fazer a divisão, se um número é divisível por outro? (ver Critérios de Divisibilidade, Proposição 13, p. 26). Sim, é possível!

Mas para sabermos quais são os critérios de divisibilidade é importante observarmos algumas características ou padrões que se repetem.

Critérios de Divisibilidade por 2

Vejamos se os números abaixo são divisíveis por 2:

a) 10 b) 27 c) 45 d) 64 e) 65 f) 66

Resposta: São divisíveis por 2 os números 10, 64 e 66.

Observe também uma sequência numérica e quais deles são divisíveis por 2. Verificamos facilmente que os números que possuem tal característica são os múltiplos do número 2.

Com isso percebemos um padrão que estabelecido e podemos afirmar que: Um número natural é divisível por 2 quando for par, ou seja quando seu último algarismo terminar em 0, 2, 4, 6 ou 8.

Critérios de Divisibilidade por 3

De maneira semelhante analisemos alguns números cuja divisibilidade se verifica por 3, ou seja, que sua divisão por 3 é exata:

Vejamos se os números abaixo são divisíveis por 3:

a) 10 b) 27 c) 45 d) 64 e) 65 f) 66

A divisão por 3 é exata para os números 27, 45 e 66. Mas qual é a característica ou propriedade que se verifica em todos os divisíveis por 3? A resposta é simples se observarmos os referidos números junto a tabela de multiplicação por 3. A soma dos algarismos dos números divisíveis por 3 dá um números divisível por 3.

Em geral, podemos afirmar que o padrão estabelecido funciona de fato: Um número natural é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos for um número divisível por 3 (ver prova do item iv da Proposição 13, p. 26).

Exemplos:

a) 321 é divisível por 3 pois, 3+2+1=6.

b) 457842 é divisível por 3, pois 4+5+7+8+4+2=30.

Seguiram-se de atividades do livro texto do 6º ano relativas ao assunto com objetivo de fixar o conteúdo.

Análise/relato da aula II:

A aula previa inicialmente a abordagem do critério de divisibilidade por 6 o que não foi possível pois o professor percebeu que não havia clareza suficiente dos alunos para tal conceito nesta aula. Esclareceu uma vez mais sobre os critérios de divisibilidade por 2 e por 3, relembrando os números pares os números ímpares além das atividades de fixação dos conceitos estudados.

A abordagem inicial foi a de questionar em que estes critérios poderiam ajudar para saber como ganhar no jogo do Nim, mas nada novo foi colocado.

2.3 PLANO DE AULA III

Data: 23/3/2016

Período: 2h/aula

Conteúdo: Critérios de Divisibilidade por 6, por 5 e por 10

Objetivos: Reconhecer múltiplos e divisores de um número; Compreender os critérios de divisibilidade; Usar os critérios de divisibilidade como ferramenta para a resolução de problemas; Calcular mentalmente pelo uso dos critérios de divisibilidade.

Desenvolvimento metodológico:

Iniciar a aula através da correção das atividades propostas ao final da última aula, dos critérios de divisibilidade por 2 e por 3 questionando se é possível achar mecanismos que visualizem a divisibilidade para outros números, tais como, para os números 5, 6 e para o número 10.

Abordagem para alcançar estes critérios é pela observação de uma sequência de números ou a tabuada dos mesmos.

Para finalizar a aula utilizaremos exercícios que questionam se um número pode ser divisível por um ou mais números.

Abordagem didático-teórica

Critérios de Divisibilidade por 6

O critério de divisibilidade por 6 é observado quando da análise dos resultados de sua tabela de multiplicação: 6, 12, 18, 24, ... Todos os números obtidos são pares, ou seja, divisível por 2 mas, veja que nem todos os pares são divisíveis por 6. Como então identificar qual número par é divisível por 6?

A resposta é simples: aquele que além de par é também divisível por 3. Note que o número 312 é divisível por 2 e a soma dos seus algarismos, 3+1+2=6, é um número divisível por 3. Podemos então afirmar: Um número natural é divisível por 6 quando acontecem simultaneamente as duas situações: quando for par, ou seja, quando for divisível por 2 e, quando a somas dos seus algarismos dá um número divisível por 3, isto é, quando o número natural for divisível ao mesmo tempo por 2 e por 3.

Seguiram-se exemplos para fixar o entendimento.

Critérios de Divisibilidade por 5

Ao observarmos a tábua de múltiplos de 5, facilmente induziremos um padrão que se repete a cada cinco dígitos. Assim temos:

Um número natural é divisível por 5 quando termina em 0 ou 5.

Critérios de Divisibilidade por 10

De modo similar, se observarmos a divisão de alguns números por 10 obteremos um padrão que se repete a cada 10 dígitos. Assim temos:

Um número natural é divisível por 10 quando termina em 0.

Em seguida foram feitos diversos tipos de exercícios de fixação.

Análise/relato da aula III:

Ao relembrar os assuntos tratados na aula anterior aproveitamos para reforçar os conceitos de divisibilidade e multiplicidade entre inteiros. Os critérios de divisibilidade por 2 e por 3 foram novamente explorados dando ênfase para a continuação e descoberta dos critérios de divisibilidade por 6.

Já a divisibilidade por 5 e por 10 foi de fácil entendimento e rápida constatação. Seguiram-se com atividades de reforço dos assuntos tratados nas últimas duas aulas.

2.4 PLANO DE AULA IV

Data: 28/3/2016
Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)
Conteúdo: A divisibilidade e o Jogo de Nim.
Objetivos: Reconhecer múltiplos e divisores de um número; Compreender os critérios de divisibilidade; Usar os critérios de divisibilidade como ferramenta para a resolução de problemas; Calcular mentalmente pelo uso dos critérios de divisibilidade.

Desenvolvimento metodológico:

Esta aula está inserida como um momento para autoavaliação do aluno e do professor retomando assim os conceitos estudados para uma melhor aprendizagem e também para uma nova rodada de jogos de Nim para verificar se o conhecimento matemático até aqui apresentado foi suficiente para que algum aluno garantisse que saberia a estratégia para vencer sempre.

Aproveitar o momento para refazer os questionamentos advindos da aula inicial e de outras aulas verificando aí hipóteses que os alunos tenham como método para ganhar.

Abordagem didático-teórica

Inicialmente, de forma expositiva dialogada através dos questionamentos abaixo, retomando assim os assuntos tratados até o presente momento, com anotação das respostas no caderno:

- O que significa dizer que um número é divisível por outro?
- O que significa dizer que um número é múltiplo de outro?
- O número 100 é divisível por 2? Por quê?
- Quais são os critérios de divisibilidade por 2? E por 3? E por 6? E por 5? E por 10?

Um último questionamento será feito:

- Você já descobriu uma forma de ganhar o jogo de Nim?

Como consequência das respostas pedir que preenchessem um relatório e que formando par com um colega disputem algumas partidas do jogo de Nim e simulem os resultados para que cheguem a alguma conclusão.

Análise/relato da aula IV:

Nesta aula os alunos puderam exercitar a divisibilidade de forma a tirar dúvidas e fixar os conceitos matemáticos envolvidos, mas, notou-se persistente dificuldade por parte de alguns alunos em identificar quando um número é par ou ímpar e, de usar os mecanismos de verificação corretamente associados a cada critério de divisibilidade. Exemplo: usaram o fato de o número ser ímpar um critério para ser divisível por 3. O professor fez interferências a ponto de solucionar os erros e dirimir as dificuldades.

Ao final da aula programada os alunos duelaram entre si no jogo do Nim. O professor disputou algumas partidas sagrando-se vencedor em todas. Alguns alunos venceram suas partidas porque utilizaram o conhecimento vivenciado anteriormente: intuitivamente deixavam a quantidade de 6 palitos para o adversário jogar.

2.5 PLANO DE AULA V

Data: 30/3/2016
Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)
Conteúdo: Números Primos
Objetivos: Identificar quando um número é primo;

Desenvolvimento metodológico:

Ao iniciar a aula relembrar que já sabemos alguns critérios de divisibilidade de um número por outro, mas que há alguns números que possuem apenas dois divisores conforme exemplos. Tratam-se dos números primos. Com o conceito em mãos e dada uma sequência numérica questionar qual é o próximo número primo e por quê.

Após um período de adaptação e conclusões mostrar as maneiras de como descobrir se um número é primo. Com uma tabela numerada do 2 ao 100 usar o chamado Crivo de Erastótenes (ver Proposição 18, p. 28) para identificar números primos. Com base em um dado número N e fazendo seguidas divisões identificar o chamado Teste de Primalidade.

Concluir com exercícios para que descubram, através dos dois métodos, se o número dado é ou não um primo.

Abordagem didático-teórica

Ao verificar por quais números um determinado número é divisível nos deparamos com alguns números que possuem poucos divisores. Comparando, por exemplo, a sequência de números: 15, 16 e 17. Além do 1 (comum a todos) o primeiro possui como divisores 3, 5 e o próprio 15. O segundo possui como divisores 2, 4, 8 e o próprio 16. O terceiro só tem como divisores o 1 e o próprio 17. Como isso acontece? Há outros números que possuem a mesma característica do 17? Que tipo de número é esse?

Esses números naturais maiores que 1 que tem apenas dois divisores são classificados conforme definição abaixo.

Definição: Quando um número maior que 1 possui somente dois divisores, isto é, o 1 e ele mesmo, dizemos que é um número primo (ver Definição 14, p. 26).

Tal característica dentre os números naturais já era conhecida na Antiguidade pelo matemático grego Erastótenes (276 a.C.-194 d.C.) (ver p. 28, Capítulo 1).

Análise/relato da aula V:

A aula não teve o desempenho desejado, pois alguns alunos estavam agitados por problemas externos não relacionados com o encaminhamento da aula e, o professor teve que fazer algumas intervenções organizando o bom andamento da aula. Devido ao fato esclarecido acima, não houve a finalização das práticas pedagógicas programadas acarretando a necessidade de acréscimo de mais um plano de aula para finalizar o programado.

2.6 PLANO DE AULA VI

Data: 1/4/2016

Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Números Primos (finalização)

Objetivos: Identificar quando um número é primo;

Desenvolvimento metodológico:

Retomar o conceito de número primo, reforçando e corrigindo com os alunos o Crivo de Erastótenes.

Em seguida mostrar que há um método para verificar se um determinado número N é ou não primo. O chamado Teste de Primalidade, que nada mais é que fazer divisões sucessivas com primos menores $\sqrt{N}$ (ver Proposição 18, p. 28) para identificar se o número N é primo.

Concluir com exercícios para que descubram, usando o Crivo de Erastótenes ou o método das divisões sucessivas, se o número dado é ou não primo.

Abordagem didático-teórica

Após retomar o conceito de número primo, relembrar o chamado Crivo de Erastótenes e completar, corrigir verificando quais dos números da sequência numérica são números primos.

Mas e toda vez necessito verificar número a número e utilizar o Crivo de Erastótenes para descobrir se um determinado número N é primo? A resposta é não.

Como já sabemos que alguns números são primos, pelo Crivo de Erastótenes, basta verificar se o número N é um múltiplo dos números primos menores que a raiz dele, isto é, se a divisão não for exata para todo número menor que N, então o número N é primo.

Vejamos um exemplo. Verificar se 29 é primo.

Resolução: Como 29 é ímpar pelos critérios de divisibilidade temos que 29 não é divisível por 2 então, continuamos a dividir.

Como $2 + 9 = 11$, significa que 29 não é divisível por 3 então continuamos a dividir.

Ora, 29 também não é divisível por 5 então vamos para o próximo número primo.

Fazendo a divisão obtemos como quociente o número 4 e resto o número 1, logo divisão não exata e vamos para o próximo número primo.

Ao longo das divisões percebemos que se dividirmos 29 por números primos maiores que 5, os quociente ficarão cada vez menores. Por já termos testado os primos menores que 7, não encontraremos um número primo pelo qual 29 seja divisível. Portanto, 29 é um número primo.

Finalizamos a aula com atividades e correções posteriores.

Análise/relato da aula VI:

Os alunos gostaram de descobrir os números primos através do Crivo de Erastótenes. Soou para eles como uma brincadeira. Verificaram também que nem todos os números que eles imaginavam serem primos o são. Aqueles que tiveram dificuldades nos critérios de divisibilidade necessitaram de maior apoio do professor para concluir a tabela.

As dificuldades mais evidentes surgiram no método das divisões sucessivas para identificar um número primo, pois os alunos não dominavam bem os processos de multiplicação e divisão. Lembramos que os conteúdos abordados neste projeto são normalmente desenvolvidos depois do estudo dos Números Naturais e suas operações que poderia contribuir no método das divisões sucessivas.

2.7 PLANO DE AULA VII

Data: 4/4/2016

Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Números Compostos

Objetivos: Identificar quando um número é primo ou quando é composto; Calcular quais são os divisores de um número composto.

Desenvolvimento metodológico:

No início da aula retomar a definição de número primo maior que 1, em seguida identificar como composto todo número maior que 1 que não é primo.

Através de exemplos, do conhecimento dos números primos, classificar quando o número for composto e identificar de quais primos ele se compõe.

Concluir a aula com atividades comparando números primos e compostos reforçando o uso dos critérios de divisibilidade, do crivo de Erastótenes e do teste de primalidade como mecanismos de classificação.

Abordagem didático-teórica

Retomar o conceito de número primo. Relembrar a sequência dos 10 primeiros números primos.

Que tipo de número são os números que não são primos? Os números que tem mais de dois divisores são chamados de números compostos.

Exemplos:

a) 4 possui como divisores 1, 2 e 4, logo é composto.

b) 27 possui como divisores 1, 3, 9 e 27, logo é composto.

Trabalhar atividades correlatas.

Análise/relato da aula VII:

A forma utilizada para classificar os números entre primos e compostos foi o teste de primalidade, onde, novamente as dificuldades apareceram nas divisões pelo fato de os alunos não dominarem os conceitos de multiplicação e divisão. Faltou-lhes também, interpretar corretamente os resultados das divisões efetuadas. Tais dificuldades foram trabalhadas mais detalhadamente a fim de saná-las.

2.8 PLANO DE AULA VIII

Data: 6/4/2016

Período: 1h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Números Compostos; Números Primos; Atividades de Revisão/Reforço.

Objetivos: Identificar quando um número é primo; Calcular quais são os divisores de um número composto.

Desenvolvimento metodológico:

No início da aula retomar a definição de número primo.

Concluir a aula com atividades de revisão comparando número primos e números compostos reforçando o uso dos critérios de divisibilidade, do crivo de Erastótenes e do teste de primalidade como mecanismos de classificação.

Abordagem didático-teórica

A aula começou com a correção das atividades propostas na aula anterior concomitantemente com a retomada dos conceitos de número primo e número composto.

Após esse momento algumas atividades foram propostas como revisão.

Análise/relato da aula VIII:

As atividades contribuíram para um melhor aprofundamento dos conceitos estudados. Aparentemente ao realizar as tarefas propostas de revisão os alunos dirimiram suas dúvidas e tiveram menos dificuldade em realizá-las.

2.9 PLANO DE AULA IX

Data: 8/4/2016

Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Fatoração por Números Primos (ver Teorema 16, p. 27)

Objetivos: Escrever os números compostos em produto de números primos; Fatorar os números compostos em números primos.

Desenvolvimento metodológico

Ao iniciar a aula reforçamos o conceito de número primo, lembramos ainda que todo número não primo é chamado de composto, pois se origina da multiplicação entre números primos. Com o auxílio de problemas extraídos do Banco de Questões da OBMEP 2013, trouxemos os princípios de fatoração de números compostos, mostrando que existem várias maneiras de escrever tais números como um produto de números primos.

Abordagem didático-teórica

Visando melhorar a aptidão dos alunos na decomposição de um número natural em fatores primos, lançamos mão do seguinte problema retirado do BANCO DE QUESTÕES OBMEP 2013, Nº 23, página 29:

Pirâmide de números

Aline gosta de brincar com números naturais. Em uma de suas brincadeiras, ela coloca um número natural em cada um dos blocos da pirâmide ilustrada abaixo. Além disso, os números são colocados de modo que o produto dos números em dois blocos vizinhos do mesmo nível coincida com o número colocado no bloco acima desses. Por exemplo, na figura abaixo, caso Aline coloque os números a e b nos blocos vizinhos indicados então ela deverá colocar o número a×b naquele bloco que se localiza acima desses. Encontre uma maneira na qual Aline possa colocar os números de modo que os 5 números colocados na base da pirâmide sejam distintos e o número colocado no bloco do topo seja o 140026320.

A partir de o problema questionar:

a) o número 140026320 é primo? Por quê?

b) Se ele é divisível por outro número além do 2 e do 10?

c) Como otimizar o processo sem torná-lo longo e cansativo? (mostrar que se um número é divisível por 5, por exemplo, o dobro desse número também o será, assim como a metade desse número).

Após esse momento algumas atividades foram propostas como revisão.

Análise/relato da aula IX:

Gostaram de completar a pirâmide com os números primos que formavam o número composto. Assustaram-se inicialmente quando surgiu como problema a possível fatoração de um número aparentemente grande: 140026320, mas quando orientados a verificar os critérios de divisibilidade não tiveram dificuldades em concluir corretamente o exercício.

2.10 PLANO DE AULA X

Data: 11/4/2016

Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Problemas Matemáticos (Congruências)

Objetivos: Calcular problemas matemáticos envolvendo o conceito de congruências.

Desenvolvimento metodológico

A aula será baseada em alguns problemas matemáticos que envolvem relação de congruência (ver Seção Sistemas de Congruências - Aritmética dos Restos, p. 30) que, embora necessitem muitas vezes de um aprofundado conhecimento do assunto, aqui, as atividades necessitam de poucas e pequenas abordagens do professor que, através do princípio de indução (ver Seção Princípio de Indução Matemática, p. 21 a 23) que implicitamente estão ligadas. Tais problemas foram extraídos do Portal da Matemática - OBMEP[4] cujo autor é Ângelo Papa Neto.

Abordagem didático-teórica

Como resolver os seguintes problemas matemáticos?

1) Qual é o último algarismo do número 3^{2016}?

2) Descubra qual é o último algarismo de 5^{125}.

3) Qual é algarismo das unidades de 7^{77}?

Para resolver as questões acima precisamos analisar algumas multiplicações verificando qual é o último algarismo de cada conta.

Veja: $3^1 = 3$

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 729$

O próximo resultado que obtemos tem como último algarismo 7:

$$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2187$$

E o seguinte é o 1, depois 3, 9, 7, 1 formando assim uma sequência que a cada 4 fatores do 3 começam a se repetir os valores do último algarismo. Logo basta dividir 2016 por 4 e obtemos que o resto dessa divisão é a posição que fica o último algarismo do número 3^{2016}. Como a divisão é exata o último algarismo é 1.

Já para o segundo problema, temos que:

---

[4] Fonte: <http://matematica.obmep.org.br/uploads/material_teorico/c97tsutkvgp4.pdf>. Ou em: <http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=23>. Material teórico Portal da Matemática - OBMEP. Acesso em: 25 jan. 2016.

$5^1 = 5$

$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$

$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

O próximo resultado que obtemos é também 5, e indutivamente é fácil acreditar que (ver Teorema 3, Princípio de Indução, página 22) todos os outros também. Portanto, 5^{125} tem como último algarismo o número 5.

No terceiro problema temos:

$7^1 = 7$

$7^2 = 7 \cdot 7 = 49$

$7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$

$7^4 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2401$

$7^5 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 16807$

$7^6 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 117649,$

e assim obtemos uma sequência que ser repete: 7, 9, 3, 1. Logo basta dividir 77 por 4 e obtemos que o resto dessa divisão é a posição que fica o último algarismo do número 7^{77}. Como a divisão possui resto 1, o último algarismo é o 7.

Seguiram-se atividades adaptadas de Neto (Portal da Matemática - OBMEP).

1) Determine o algarismo das unidades de $N = 5^{2014} \cdot 7^{2015}$

2) Encontre o algarismo das unidades do número $N = 2 \cdot 5^{2014} + 6^{2015} + 4^{2012}$

3) Prove que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

Análise/relato da aula X:

A reação inicial foi a de que não conseguiriam calcular, mas resignaram-se ao fato de que a resolução envolvida passava-se por fazer algumas contas e finalizava-se com uma análise dos resultados obtidos. Os alunos expressaram encantamento ante a possibilidade de achar o último algarismo de um número sem necessariamente precisar fazer toda a conta.

2.11 PLANO DE AULA XI

Data: 13/4/2016

Período: 2h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Conjecturas de Goldbach

Objetivos: Ampliar o conhecimento histórico matemático no campo da Aritmética; Incutir o gosto pela matemática; Fazer da experimentação matemática uma ferramenta de auxílio ao estímulo pela matemática; Construir o conhecimento matemático pela experimentação e resolução da Conjectura de Goldbach.

Desenvolvimento metodológico

Mostrar que o encantamento que a aritmética (ou a matemática em geral) proporciona está relacionado não só na sua linguagem técnica, ou com a capacidade dos que lidam com ela de decifrar questões de modo elaborado e elegante, mas também, de colocar em “xeque” até os grandes especialistas na área, propondo problemas de enunciados de fácil entendimento para leigos ou doutos, cujas soluções perduram obscuras por séculos e alguns até sem quaisquer perspectivas de ao menos uma solução parcial. Um exemplo deste tipo de problema é a chamada Conjectura de Goldbach (Ver Seção Conjectura de Goldbach, p. 29). Iniciaremos com exercício simples, fazendo os alunos testarem a Conjectura para alguns números. Em seguida, falar um pouco da história e dos avanços recentes tais como a de maio de 2013, quando o matemático peruano Harald Andrés Helfgott publicou artigo com uma provável prova da conjectura de Goldbach fraca (ver Proposição 21, p. 29), trazendo a tona um pouco da história envolvida nesta proposição que perdurou por anos sem uma prova real de sua efetividade.

Abordagem didático-teórica

Conjectura Fraca de Goldbach: Todo inteiro ímpar maior que 7 pode ser escrito como a soma de 3 números primos.

Estimular alguns questionamentos acerca do problema apresentado:

a) Você acha que a Conjectura de Goldbach está correta?

b) Como provar a conjectura?

c) Que instrumentos matemáticos são necessários para resolver o problema?

d) O que precisamos saber para resolver o problema?

Com o auxílio das respostas dadas pelos alunos utilizar o método de tentativa e erro chegar a conclusão que precisaríamos um conhecimento matemático antes de nos aventurar em busca de uma resposta definitiva para tal problema.

Após as conclusões relatadas e discutidas revelar que o que os alunos fizeram foi na verdade dar uma lista de números naturais para os quais a conjectura funciona e que infelizmente rigorosamente falando, isto não serve de prova de que a conjectura é válida, na tentativa de esclarecer bem a diferença entre um exemplo que funciona e uma prova de fato. Concluiremos a aula com breve relato sobre o matemático peruano Harald Helfgott que diz ter descoberto a prova de tal conjectura. “O matemático peruano que resolveu um problema de quase 300 anos”[5] é o título do texto adaptado de do portal BBC Brasil.

Por que 0,99999 até o infinito pode ser igual a 1? Como achar a raiz quadrada de -1? Como achar a raiz quadrada de um número imaginário? Essas eram questões que Harald Helfgott fez para si mesmo aos 8 anos de idade. Harald encontrava as respostas e se sentia maravilhado: "Era um grande prazer responder às minhas próprias perguntas no colégio", disse ele, em entrevista à BBC Mundo.

O matemático Helfgott, nascido em Lima, em 1977, frequentou uma escola na capital peruana e, com o passar dos anos, potencializou sua curiosidade matemática. O resultado disso foi uma carreira brilhante.

Uma bolsa de estudos na Universidade Brandeis, nos Estados Unidos, acabou resultando em um doutorado em Princeton e um pós-doutorado em Yale, essas últimas, duas das mais respeitadas universidades do país. Depois disso, Helfgott tornou-se pesquisador do Centre National de la Recherche Scientifique, em Paris, na França.

Em 2015, Helfgott tornou-se o primeiro latino-americano e também o cientista mais jovem a ganhar o Prêmio de Pesquisa Humboldt, concedido pela Fundação Alexander von Humboldt, da Alemanha. Ele receberá US$ 3,9 milhões por ter respondido uma pergunta que vinha desafiando matemáticos do mundo inteiro há quase trezentos anos: É verdade que todo número ímpar maior do que cinco pode ser expresso como uma soma de três números primos?

"O trabalho sério para provar a conjectura fraca começou no início do século 20", disse Helfgott. "Antes, não se sabia nem por onde começar". Em 2005, o matemático começou a estudar o trabalho de outros cientistas que haviam provado a

---

[5] Fonte: <http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/10/151004_matematico_peruano_helfgott_mv>. Acesso em: 16 fev. 2016.

conjectura fraca para determinados números. O enunciado de Goldbach soava simples, mas prová-lo para todos os números ímpares até o infinito era algo muito complexo. Helfgott começou a buscar uma prova em 2006.

Em fevereiro de 2012, já bem perto de encontrar a prova, a rotina do matemático era a seguinte: levantava-se muito cedo para se dedicar à sua missão e chegava ao laboratório durante a tarde. Só então conferia a caixa de entrada do correio eletrônico e fazia buscas de informações. Isso porque havia suspendido a conexão com a internet em casa. Não queria se distrair. À noite, voltava a se concentrar no trabalho da conjectura até a hora de dormir.

Em junho de 2013, sete anos depois de ter iniciado a busca, Helfgott finalmente encontrou a resposta. Em um trabalho com 79 páginas, demonstrou que a Conjectura Fraca de Goldbach estava certa.

Mas para que serve a conjectura? A demonstração da conjectura, por si só, talvez não sirva para nada, ele explicou. "Por outro lado, as ideias e ferramentas usadas para se obter a demonstração serão úteis para a teoria dos números - entre outros usos adicionais", disse Helfgott.

Graças ao seu trabalho, o matemático peruano foi convidado para dar aulas na Austrália e em vários outros países da América, Europa e Ásia. Agora, está fazendo pesquisas sobre a teoria dos números no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), no Rio de Janeiro.

Em seu tempo livre, o matemático pretende cozinhar pratos peruanos para os amigos e voltar às aulas de tango. E será que ele pretende tentar demonstrar a Conjectura Forte de Goldbach? "Falta desenvolver ferramentas, ideias para que possamos prová-la", explicou. "Não acredito que isso esteja ao alcance da comunidade matemática no momento."

Análise/relato da aula XI:

Os alunos gostaram da aula principalmente por saber que “tentaram provar” uma conjectura tão famosa.

2.12 PLANO DE AULA XII

Data: 15/4/2016

Período: 1h/aula (50 minutos por h/aula)

Conteúdo: Jogo do Nim: estratégias para vencer

Objetivos: Incentivar o pensar indutivo matemático; Mostrar estratégia para vencer o jogo do Nim; Estimular o cálculo mental.

Desenvolvimento metodológico

As estratégias para vencer o jogo do Nim serão aqui induzidas pelo professor a fim de identificar quais mecanismos matemáticos estão presentes e fazem a diferença entre ser o vencedor ou o perdedor.

Em um segundo momento, de posse da estratégia vencedora, os alunos jogam uns contra os outros em outras situações iniciais de jogo, pondo em prática as revelações adquiridas no jogo do Nim.

Abordagem didático-teórica

Nas aulas anteriores estudamos muitas coisas da matemática que se referem à aritmética e, tem a relação com o jogo do Nim. Sabidamente, lembrando que com 23 palitos e 4 retirados por jogador a cada jogada, descobrimos, conjuntamente, uma posição vencedora quando deixamos nosso oponente com 6 palitos. Mas e, se não conseguimos fazê-lo? O que mais devemos saber para garantir nossa vitória?

Ao deixar 6 palitos ao nosso oponente ganhamos o jogo. Digamos que você esteja jogando com alguém que sabe tal estratégia. Se você deixar 7 palitos para o seu oponente o que vai acontecer?

E se deixar 8 palitos? E se deixar 9 palitos? E 10? 11?

Ao responder as questões acima facilmente concluímos que perdemos o jogo quando deixarmos: 7 palitos e o oponente retira 1, 8 palitos e o oponente retira 2, 9 palitos e o oponente retira 3, 10 palitos e o oponente retira 4.

Quando deixarmos para o oponente 11 palitos temos uma posição favorável, á medida que, quando o oponente retira 1 palito retiramos 4, quando o oponente retira 2 palitos retiramos 3, quando o oponente retira 3 palito retiramos 2 e quando o oponente retira 4 palitos retiramos 1, deixando assim, em todas as situações citadas nosso oponente com 6 palitos, o que nos traz uma posição favorável.

Mas como matematicamente isso se explica? Ficaremos simulando nossa última retirada conforme situação ou existe um modo de nos encaminharmos a partir da nossa primeira retirada, a uma estratégia vencedora?

Lembre-se que para ganhar a partida deve deixar um palito para o seu adversário retirar, o último palito. Num jogo com 23 palitos restam, portanto 22. Destes 22 devemos organizar tal quantidade de maneira que consigamos contrapor cada jogada do adversário e ficar sempre em uma posição favorável, isto é, em condições de ganhar a partida. Mas qual é essa quantidade? A quantidade é dada avaliando todas as quantidades de palitos que cada um retira e, assim concluímos que podemos controlar o jogo, e manter-se em posição favorável, quando somamos as quantidades de palitos de cada jogador em cada jogada. Ou seja, podemos controlar o jogo quando analisamos cada rodada de jogadas. Consideremos os jogadores A e B. Digamos que o jogador B deixou para seu adversário 2, 3, 4 ou 5 palitos. Para o jogador A ganhar basta retirar 1, 2, 3 ou 4 palitos. Se o jogador B deixar para o jogador A 6 palitos, não há maneira de ganhar, pois retirando 1,2,3 ou 4 palitos, B deverá responder para ganhar retirando 4, 3, 2 ou 1 palitos, deixando seu oponente o jogador A com o último palito. Ao seguir a mesma análise quando o jogador B deixar para seu adversário 7, 8, 9 ou 10 palitos verificamos que o jogador A poderá ficar numa posição segura, isto é, deixando seu adversário com 6 palitos quando retirar 1, 2, 3 ou 4 palitos. Facilmente verificamos que deixando 11 palitos a seu adversário também estará numa posição segura.

Veja que $6 - 1 = 5$ e $11 - 1 = 10 = 2 \cdot 5 - 1$

Se continuarmos com o mesmo raciocínio obtemos $16 - 1 = 15 = 3 \cdot 5 - 1$

Assim, podemos obter tal controle formamos grupos de 5 palitos. Logicamente temos que o número máximo que se pode retirar a cada jogada é 4 que acrescido de 1 nos dá 5.

Ao formar grupos de 5 palitos, isto é, dividindo 22 por 5, obtemos 4 grupos de 5 palitos e sobram outros 2. O que fazer então com estes 2 palitos restantes? Simples, é a quantidade de palitos que quem começar jogando deverá tirar para que tenha uma posição favorável.

Seguindo a lógica matemática envolvida mantidos os 23 palitos e 4 a serem retirados no máximo a cada jogada, os números de palitos em que se mantêm a posição favorável para a vitória é 6, 11, 16 e 21 palitos.

Na finalização da aula os alunos formaram duplas e jogaram com o objetivo de utilizar a estratégia vencedora.

Análise/relato da aula XII:

Poucos foram os alunos que compreenderam e usaram a estratégia de formar “grupos” de palitos organizando assim, sua jogada a fim de ganhar a partida.

Salta aos olhos do professor a imaturidade da maioria dos alunos do projeto, que mesmo com o gabarito para vencer o jogo do Nim, não conseguem fazerem-se vencedores mesmo saindo da posição favorável.

Tornou-se necessária, ao final da aula, depois de algumas partidas entre os alunos, nova intervenção e fim de esclarecer a lógica matemática da aula.

2.13 PLANO DE AULA XIII

Data: 18/4/2016
Período:
Conteúdo: Divisibilidade dos Números; Critérios de Divisibilidade por 2, 3, 5, 6 e 10; Números Primos e Números Compostos; Fatoração por Números Primos; Problemas Matemáticos (Congruências); O Jogo do Nim: estratégias para vencer.
Objetivos: Avaliar o processo de ensino-aprendizagem; Corrigir os rumos da aprendizagem; Refletir sobre as práticas pedagógicas.

Desenvolvimento metodológico

Através de uma atividade avaliativa individual encerrar o projeto.

Abordagem didático-teórica

Foi aplicada a seguinte atividade com objetivo de evidenciar o aprendizado individual dos assuntos estudados para intervenções futuras de ações pedagógicas de correção das aprendizagens.

EMEF. DOUTOR ULISSES RODRIGUES

ATIVIDADE DE MATEMÁTICA - 6º ANO - 1º TRIMESTRE

Prof. Jocemar Rodrigo Welter

Nome:____ Data:___/___/______

1) Marque V para verdadeiro ou F para falso com relação ao número 512:

( ) a) É um número divisível por 2.

( ) b) É um número divisível por 3.

( ) c) É ímpar e, portanto é divisível por 5.

( ) d) É divisível por 10.

( ) e) É composto.

2) Usando o teste de primalidade verifique se 137 é primo.

3) Alana assou 50 pães de queijo e necessita armazená-los em 5 bandejas com quantidades iguais. Qual opção está correta?

a) Em cada bandeja ficará 8 pães de queijo.

b) Em cada bandeja ficará 10 pães de queijo.

c) Em cada bandeja ficará 20 pães de queijo.

d) Alana não conseguirá dividir os pães de queijo em 5 bandejas.

4) Qual é o último algarismo de 23^{23}?

5) Qual dos números abaixo é divisível por 3?

a) 331 b) 723 c) 434

6) Escreva em fatores primos os números compostos abaixo:

a) 135 b) 242 c) 840

7) Se você jogasse com um amigo o Jogo do Nim usando 19 palitos e retira no máximo 4 palitos de cada vez, responda aos questionamentos a seguir:

a) Quem começar jogando estará com a posição favorável ou desfavorável?

b) Se você fosse o primeiro a jogar quantos palitos retiraria?

8) Marque um X nas aulas que mais gostou(marque quantas vezes quiser).

( ) a) Aprendendo o Jogo do Nim.

( ) b) Critérios de divisibilidade por 2 e por 3.

( ) c) Critérios de divisibilidade por 6, por 5 e por 10.

( ) d) Números Primos.

( ) e) Números Compostos.

( ) f) Os números compostos em fatores primos.

( ) g) Determinando o último algarismo de uma multiplicação com muitos fatores primos.

( ) h) Conjectura de Goldbach.

( ) i) Estratégia para vencer o Jogo do Nim.

Análise/relato da aula XIII:

A aplicação da avaliação transcorreu normalmente e, o professor, através do pedido dos alunos, fez intervenções de auxílio individualizado na tarefa.

3. DA APLICAÇÃO DO PROJETO E OUTRAS POSSIBILIDADES

Apresentamos neste capítulo uma breve análise das atividades que desenvolvemos no capítulo 2 destacando algumas das implicações do uso do jogo do Nim, dos motivos da escolha do jogo do Nim para a realização do projeto, outras versões que podem ser usada para atingir os mesmos objetivos ou objetivos semelhantes, além de outros jogos que também podem contribuir num trabalho voltado para o aprofundamento da aritmética.

Na seção 3.2 abordamos alguns aspectos da escolha do jogo do Nim e os relatos de outras experiências que solidificaram a nossa escolha. A seção 3.3 trata de outras versões do jogo que podem contribuir de maneira idêntica ao que foi aplicado, a destacar a versão 2, que exige o estudo sobre potenciação e a base binária de numeração, aprofundando um pouco mais os estudos contemplados no projeto. Há ainda algumas alternativas de jogos que são considerados na seção 3.4, como passíveis de sua utilização para atingir os objetivos identificados deste projeto.

3.1 DA ABRANGÊNCIA DO TEMA

A aplicação do presente projeto teve por base oportunizar empatia dos alunos para com a aritmética e, para isso foi necessário adiantar conceitos matemáticos e postergar outros que poderiam ter preparado os alunos de uma forma melhor. O tema escolhido e aplicado neste projeto é normalmente inserido após o estudo dos Números Naturais e suas operações.

Embora fora da ordem normal, da maioria dos livros didáticos, o presente projeto mostra que é possível fazer matemática atrativa, diferenciada com uso dos jogos e brincadeiras.

Na aplicação pudemos verificar o quanto contribuem os jogos, particularmente o Jogo do Nim, na motivação dos alunos para descobrir e aprender matemática, motivação esta, baseada no desafio de vencer seu colega num jogo e, no decorrer do processo, na identificação de uma estratégia. Foi com esse ímpeto desafiador que se protagonizou o avanço que queríamos alcançar com os alunos.

A prática não se fez apenas no jogo do Nim, mas também no desafio de problemas matemáticos presentes na OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Através do Portal da Matemática[6] alguns problemas foram trabalhados. Destacamos os problemas envolvendo expressões com potências de expoente de valores altos, os quais, por lógica, raciocínio e processos indutivo-dedutivos as respostas surgiram evidenciando que na matemática, não necessariamente um problema envolvendo números grandes, necessita de cálculos extensos e de difícil conclusão.

Oportunizar aos alunos além daquilo que está contemplado nos livros didáticos foi nosso caminho. Na atividade proposta de testarmos para alguns números a conjectura de Goldbach (ver Conjectura de Goldbach, p. 29), que apesar da simplicidade do enunciado perdura cerca de 250 anos sem uma provável resposta (ver Harald Helfgott, Plano de Aula XII, páginas 55 a 58), trouxemos á tona um problema matemático famoso que muito provavelmente não estaria na escala de nível de ensino fundamental, mas que pode despertar uma curiosidade enorme dentre os alunos deste nível, fazendo com que estes aproveitem melhor os conteúdos programáticos curriculares obrigatórios.

3.2 PORQUE O JOGO DO NIM

A escolha do jogo do Nim veio através da contribuição dada por Hefez (2013, p. 77) que é o livro base dos estudos da aritmética do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Profmat - e reforçado por Grando (2000, p. 188) que afirma tratar-se de um jogo de lógica e que para descobrir a estratégia vencedora é necessário “construir habilidades de resolução de problemas, explorar o raciocínio hipotético-dedutivo, generalizar soluções e procedimentos, observar regularidades e descrever os resultados através de um modelo matemático”.

Assim pudemos realizar uma intervenção pedagógica que ajudasse no cumprimento de nossos objetivos.

Grando (2000, p. 188) afirma que para “sempre vencer é necessário a construção da estratégia vencedora”. Afirma ainda que para tal formulação “são identificados os vários conceitos matemáticos a serem construídos e/ou aplicados

---

[6] Fonte: <http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=23>, material teórico Portal da Matemática - OBMEP. Acesso em: 25 jan 2016.

pelos sujeitos”. Por sua vez, Magri (ano 2012, p. 24) afirma que “o desafio envolve concentração e raciocínio lógico para a descoberta do número de palitos a ser retirado em cada jogada de modo que o adversário fique sempre com o último palito a ser retirado”. O contexto inserido com o jogo do Nim não foi o de somente jogar. Caberia a eles descobrir uma estratégia que vislumbrasse vencer todo jogo que disputasse (consideremos aqui a necessidade de obter, ou no início do jogo ou durante ele a possibilidade da posição favorável).

Segundo Cabral (2004, p. 138) ao buscar a estratégia vencedora os alunos “necessitam relacionar suas ações com os resultados obtidos e testar possibilidades de ações que lhes levassem a resultados favoráveis [...] refletir sobre como fazer para ganhar todas às vezes”.

As habilidades matemáticas necessárias para tal feito são as subtrações, divisão euclidiana, com destaque ao resto dessa divisão, conceito de múltiplo de um número e cálculo mental.

O professor é o mediador da construção do conhecimento no jogo e, cabe a ele, regular o nível de ajuda de acordo com as percepções produzidas pelos alunos.
Surgem deste projeto muitas informações trocadas entre os alunos de maneira que essas interações são importante material na construção do conhecimento, cooperando todos entre si: aluno com aluno, adversários e professor. O raciocínio brota nessas interações e assim surgem respostas e novas perguntas que geram conhecimento.

3.3 JOGO DO NIM: OUTRAS VERSÕES

Vimos uma versão do jogo do Nim (ver Versão 1, Capítulo 1.8, página 32) mas, há outras versões que aqui vamos destacar. A versão mais consagrada do jogo do Nim é a da separação da quantidade de palitos em grupos com diferentes quantidades. Da mesma maneira que a versão simples, o jogador retira uma quantidade máxima de palitos e aquele que retirar o último palito é o perdedor.

3.3.1 Jogo do Nim (Versão 2)

O jogo do Nim utilizado como base inicial para aplicação deste projeto é uma versão mais simples. Agora apresentaremos outra que exige conhecimento mais amplo sobre sistema de numeração, em especial o sistema binário de numeração.

Nesta versão, dispomos uma quantidade de palitos que são divididos em m grupos de maneira que deve ser retirado no mínimo um palito e, no máximo a quantidade existente no grupo escolhido para a retirada dos palitos. Aquele que retirar o último palito é o perdedor.

Para exemplificar utilizaremos a quantia de 21 palitos distribuídos em três grupos, um primeiro com 6 palitos, segundo com 7 e o terceiro grupo com 8 palitos. Para a estratégia vencedora utilizamos números binários (ver Teorema 12, p. 25).

A ideia da posição segura/favorável é pertinente aqui também. Para isso devemos escrever cada número de palitos que compõem cada grupo em um número binário. Escrevemos, então,

$$6 = (110)_2$$

$$7 = (111)_2$$

$$8 = (1000)_2$$

A posição segura é encontrada quando, através da soma desses números escritos na forma binária como se decimais fossem, obtivermos apenas dígitos pares, isto é, 0 e 2. Com os números do exemplo a soma é dada por:

$$110 + 111 + 1000 = 1221$$

Se retirarmos 6 palitos do segundo grupo ficaremos com:

$$6 = (110)_2$$

$$1 = (1)_2$$

$$8 = (1000)_2$$

Somando obtemos $110 + 1 + 1000 = 1111$, o que não representa uma posição segura. Para obter a posição segura devemos identificar em uma das colunas o número de palitos que satisfaça uma das seguintes expressões que sejam iguais aos dígitos 0 ou 2.

$$abc + 111 + 1000 = 1111 + abc = 1(a+1)(b+1)(c+1) \leftrightarrow$$

$$110 + def + 1000 = 1221 + def = 1(d+2)(e+2)(f+1) \leftrightarrow$$

$$221 + ghi = (g+2)(h+2)(i+1) \qquad \text{Eq. (I)}$$

Como não podemos inserir palitos para atingir a posição segura, nos resta apenas que resolvamos a Equação (I). Basta igualar a 0 ou 2 as relações de

$(1+g)(2+h)(1+i)$, o que nos dá que $1+i=2 \Rightarrow i=1$, $2+h=0 \Rightarrow h=0$ e $1+g=2 \Rightarrow g=1$. Portanto $ghi=101$, que nos dá a posição segura/favorável $110+111+101=222$, onde 101= $1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = (5)_2$, logo devemos retirar 3 palitos do grupo formado por 8 palitos.

Cabe ao adversário responder com a sua jogada, mas qualquer que seja não conseguirá garantir uma posição segura para si, pois nos números binários só temos duas condições, 0 ou 1, e quando diminuímos uma unidade de 1 temos 0, e, se de 2 tirarmos 1 obtemos 1, que não é um dígito de combinação segura. Assim, depois de uma posição segura/favorável o jogador adversário não poderá alcançar para si uma posição segura/favorável.

De maneira semelhante, após a jogada do adversário, bastará fazer os mesmos cálculos para que se tenha 0 ou 2 como resultados da soma dos números na forma binária da quantidade de palitos que sobraram.

Mas nesta configuração do jogo do Nim há exceções a regra acima. Veja que é uma posição segura/favorável quando a soma for 3, isto é, três grupos com 1 palito cada. É segura também quando tivermos somente 1 palito em algum dos grupos.

Mais detalhes podem ser encontrados na RPM – Revista do Professor de Matemática Vol 6. Sociedade Brasileira de Matemática 1º semestre de 1985.

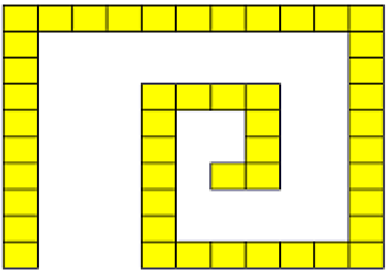
3.3.2 Jogo do Nim (Outras versões)

Algumas maneiras de obter outras versões para o jogo do Nim é variar o número de palitos, o número máximo de palitos a retirar e a meta, ou seja, quem retirar o último palito é o vencedor.

Segundo Rodrigues (2004, p. 4 a 6, apud Rego&Rego) há ainda outras versões do jogo do Nim conhecidas: “jogo das correntes”, “tabuleiro circular”, “tabuleiro em estrela”, “jogo das torres (Nim II)” e o “jogo da rainha”. Destacamos aqui o primeiro e o último dos acima descritos.

O jogo das correntes é uma disputa entre dois oponentes e utiliza uma peça (palito, botão, etc.) para a marcação da posição que será modificada conforme cada jogada movendo um número limitado de casas, ganhando aquele que colocar a peça na última casa.

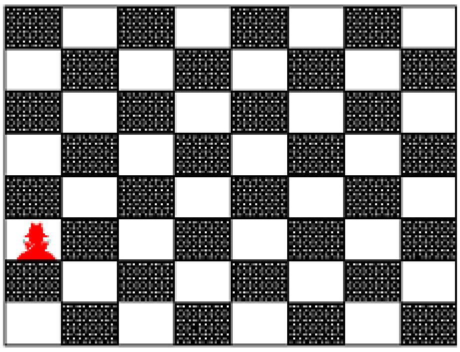
Figura 1 - Jogo das correntes



Fonte: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/2MC06193102434.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2016.

O jogo da rainha usa uma peça que possua os mesmos movimentos da rainha do jogo de xadrez onde alternadamente os dois oponentes movem a peça, que pode estar em qualquer lugar do tabuleiro, de tal maneira que ganha aquele que colocar a peça no local indicado.

Figura 2 - Jogo da rainha



Fonte: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/2MC06193102434.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2016.

3.4 OUTROS JOGOS QUE PODERIAM SER UTILIZADOS COM O MESMO EFEITO.

O jogo do Nim é um exemplo de atividade lúdica que pode ser explorado e contribuir para o processo de ensino aprendizagem da aritmética. Nesta seção vamos trazer alguns outros jogos que podem auxiliar o professor nos seus objetivos.

3.4.1 O Nove Misterioso

O Nove Misterioso citado por Hefez (2013, p. 72) é um jogo que visa descobrir um dos algarismos de um número inicial desconhecido. Você pede a uma pessoa para que escolha um número decimal natural com 3 algarismos. Após isso você pede para a pessoa permutar, isto é trocar de posição os algarismos, gerando assim outro número. Desses dois números peça para a pessoa subtrair o maior do menor. Por último, peça para a pessoa esconder um dos algarismos do resultado obtido, desde que não seja o zero e, que divulgue os demais números.

Para descobrir o número retido é necessário levar em consideração a demonstração da Proposição 13, item (v) (Capítulo 1.7.3, página 26). Pela demonstração sabemos que o número secreto e aquele obtido da permutação de seus algarismos, podemos escrevê-los como a soma de seus algarismo acrescidos de um número q inteiro e multiplicado por 9. Quando subtraímos um número do outro verificamos que o resultado é um número divisível por 9. Basta então, adivinhar um número que entre 1 e 9 que somado com os dois algarismos divulgados seja divisível por 9.

Devemos excluir o zero, pois, em caso contrário, poderíamos obter duas respostas, já que a soma dos algarismos divulgados pode ser múltiplo de 9. Se assim ocorresse teríamos duas opções de números escondidos: o 9 ou o zero.

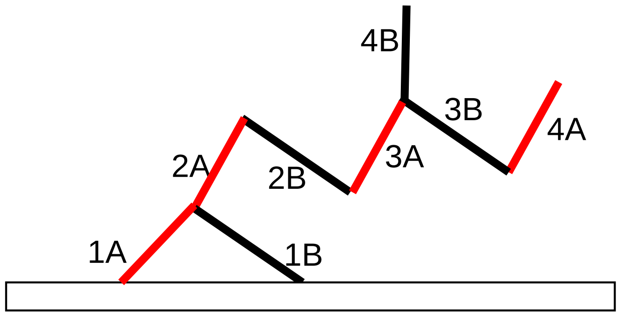
Exemplo: Digamos que o número escolhido seja 248. Uma permutação possível é 824. Subtraindo a maior da menor obtemos $824 - 248 = 576$. Uma opção de retenção é o número 5. Assim com os números 7 e 6 devemos somar um número inteiro x, entre 1 e 9, de tal maneira que consigamos um múltiplo de 9. Facilmente obtemos como resposta o número 5, já que o único resto da divisão de 13 por 9 é 4, e que precisamos de 5 para completar mais 9 na soma, já que pelo Algoritmo da Divisão (Capítulo 1.7.3, Teorema 11, página 24), temos $9.1 + 4 = 13$ e $13 + 5 = (9.1 + 4) + 5 = 18$, onde 18 é divisível por 9.

3.4.2 Hackenbush (versão 1 e versão 2)

O Hackenbusch[7] (versão 1) é um jogo que através de uma figura com traços de duas cores, revezando-se dois jogadores, cada um com sua cor, devem ir apagando traços de tal maneira que quem apagar (eliminar) o último traço ganha o jogo. Se algum traço ficar desconexo do chão é automaticamente apagado.

Vejamos um exemplo. Seja a figura a seguir:

Figura 3 - Exemplo 1 do Hackenbusch (versão 1)



Denominemos A o jogador com a cor vermelha e B o jogador com a cor preta. O Jogador A começará o jogo. Vejamos as possibilidades:

a) Se A eliminar sua vara 1A, B deverá responder para ganhar eliminando sua vara 1B, pois todas as outras varas ficarão sem contato com o chão, desconexas do chão.

b) Se A eliminar sua vara 2A, B responde eliminando sua vara 1B, o que dará a vitória para A, pois exceto 1A todas as outras varas ficarão sem contato com o chão.

c) Se A eliminar sua vara 3A garante a vitória: pois se B retirar 2B, basta na sequência A retirar sua vara 2A, restando somente para B a vara 1B sobrando para A sua vara 1A; se B retirar 1B basta A retirar 1A.

d) Se A eliminar sua vara 4A e B responder retirando 3B ou 4B segue-se o processo do item anterior e A vence.

e) Se A eliminar sua vara 4A e B responder retirando 2B basta na sequência para garantir sua vitória, retirar sua vara 2A, restando somente para B a vara 1B e sobrando 1A de A.

---

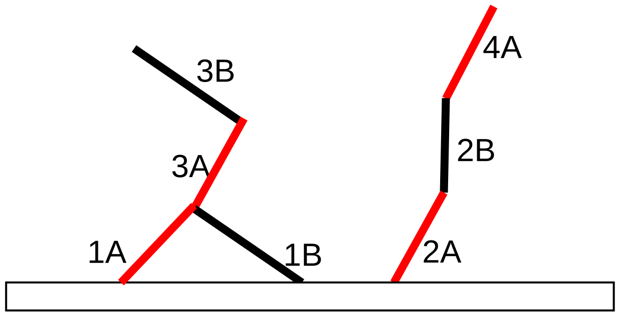
[7] Fonte: <https://jogoseeducacao.mat.ufg.br/p/2138-hackenbush>. Acesso em: 18 jan. 2016.

Assim A só perde se retirar sua vara 1A.

O Hackenbusch (versão 2), também chamado de Hackenbush Infantil[8] é um jogo que através de uma figura com traços de duas cores, revezando dois jogadores cada um com sua cor devem apagando seus traços de maneira que não desconecte nenhum outro traço de sua ligação com o chão. Vencerá quem retirar a última vara ou então perde o jogo aquele que não puder retirar suas varetas que ainda tiver ligadas ao solo.

Vejamos um exemplo. Seja a figura a seguir:

Figura 4 - Exemplo do Hackenbusch (versão 2) ou Hackenbush Infantil



Denominemos A o jogador com a cor vermelha e B, o jogador com a cor preta. O jogador A começa o jogo. Vejamos as possibilidades:

a) Se A eliminar suas varas em ordem decrescente, isto é, 4A, 3A, 2A e 1A, quaisquer que sejam as jogadas de B, o jogador A vence o jogo.

b) Se A eliminar sua vara 3A, também garante sua vitória, quaisquer que seja a resposta de B.

c) Se A eliminar sua vara 2A garante a vitória: pois se B retirar 3B, basta na sequência A retirar sua vara 3A, restando somente para B a vara 1B sobrando para A sua vara 1A; se B retirar 1B basta A retirar 1A.

d) Se A eliminar sua vara 1A e B responder retirando 2B, sobram para o jogador A as varas 3A e 2A. Se A retirar 2A, perderá.

---

[8] Fonte: <https://jogoseeducacao.mat.ufg.br/p/2139-hackenbush-infantil>. Acesso em 18 jan. 2016.

e) Se A eliminar sua vara 1A e B responder retirando 2B, sobram para o jogador A as varas 3A e 2A. Se A retirar 3A garante sua vitória sobrando apenas para B a vara 1B, e para A vara 2A.

Assim A só perde se A e B seguirem as retiradas do item d.

3.4.3 Adivinhando a idade do amigo[9]

Para adivinhar a idade do amigo é necessário pedir para que ele escreva dois dígitos cuja diferença entre eles seja maior do que um. Escreva um número com três algarismos utilizando os dois anteriores nas extremidades. Peça que escreva o número encontrado na ordem inversa e, depois que diminua o menor do maior. Some este número com o seu inverso. Por fim some o valor encontrado a idade que o amigo tem.

Exemplo 1: Suponhamos que os dois primeiros números sejam 3 e 8. Coloquemos entre eles o número 1 formando assim o número 318. A ordem inversa é 813. Subtraindo o maior do menor, obtemos $813 - 318 = 495$. Somamos a este número o seu inverso: $495 + 594 = 1089$. Basta agora somar a idade do amigo. Desta maneira o amigo lhe dirá o resultado encontrado. Suponhamos ainda que o resultado da soma dê 1102. Daí basta dizer a idade do amigo, que no exemplo é 13.

A lógica envolvida nesta questão é que quaisquer que sejam os três números iniciais, observadas as restrições descritas sempre se chegará á soma 1089. Basta, portanto que o adivinho faça a subtração do número final por 1089 que achará a idade do amigo.

3.4.4 Adivinhando um número entre 1 a 1000

Este jogo consiste em adivinhar um número entre 1 e 1000. Para fazê-lo basta que o detentor do número forneça os restos da divisão por 7, por 11 e por 13 do número escolhido quando divididos, respectivamente, por 7, por 11 e por 13.

---

[9] Fonte: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgxW4AI/teoria-dos-numeros-benedito-tadeu-freire-2?part=3>. Acesso em: 17 fev. 2016.

Para adivinhar o número devemos usar o Teorema Chinês dos Restos (ver Seção Teorema Chinês dos Restos, p. 31).

Ou seja, devemos resolver o sistema $\begin{cases} X \equiv r_7 \, mod(7) \\ X \equiv r_{11} \, mod(11) \\ X \equiv r_{13} \, mod(13) \end{cases}$.

Pelo Teorema Chinês dos Restos e chamando de $M = 1001 = 7 \times 11 \times 13$ obtemos $M_1 = \frac{M}{m_1} = \frac{7\times11\times13}{7} = 143$, $M_2 = \frac{M}{m_2} = \frac{7\times11\times13}{11} = 91$ e $M_3 = \frac{M}{m_3} = \frac{7\times11\times13}{13} = 77$.

Assim, buscamos números inteiros y_1, y_2 e y_3 tais que satisfaçam as congruências $143y_1 \equiv 1 \, mod(7)$, $91y_2 \equiv 1 \, mod(11)$ e $77y_2 \equiv 1 \, mod(11)$. São soluções $y_1 = 5$, $y_2 = 4$ e $y_3 = 12$. Portanto o sistema tem por solução:

$$715r_7 + 364r_{11} + 924r_{13} \, mod(1001)$$

Se por exemplo, os restos da divisão de um determinado número desconhecido dão resto 4, 4 e 1, respectivamente por 7, 11 e 13, substituindo na equação acima obtemos: $715 \cdot 4 + 364 \cdot 4 + 924 \cdot 1 = 2860 + 1456 + 924 = 5240$ e, $5240 = 1001 \cdot 5 + 235$, ou seja, $5240 \equiv 235 \;\; mod(1001)$, portanto o número 235 é o número desconhecido.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo geral deste trabalho consistia na ampliação dos conhecimentos matemáticos no campo da aritmética de alunos do ensino fundamental. Para isso usamos o bem conhecido jogo do Nim como ferramenta instigadora, capaz de interferir diretamente como agente motivacional de aprendizado. Aplicado numa turma de sexto ano do ensino fundamental da Escola Municipal de Ensino Fundamental Doutor Ulisses Rodrigues, o projeto visou extrapolar para além do livro didático, inibindo um pouco o ensino centralizado no professor e estimulando de forma lúdica a aprendizagem não somente de uma técnica para vencer um jogo, mas num melhor preparo de todos os algoritmos aritméticos até conhecidos pelos alunos, mas que pareciam distantes de alguma necessidade imediata destes, ou seja, a tarefa por trás da brincadeira era transformar uma matemática superficial, tecnicista e monótona, em algo lúdico e concreto, com um algum aprofundamento no campo da aritmética, tornando as questões repetitivas de reforço ou de memorização de relações como algo necessário para atingir um objetivo lúdico que era o de tornar-se vencedor de um jogo.

Após colocarmos as regras do jogo do Nim aos alunos, eles perceberam que era um jogo de poucas regras e fácil de jogar, mas obviamente, a matemática por trás do jogo passou-se despercebida, nenhum aluno arriscou palpite do porque o professor vencia todas as partidas, talvez pensassem que era uma questão de treino e sorte. Ficaram interessados quando souberam que existia uma estratégia sempre vencedora e queriam se apoderar rapidamente desta técnica. Não houve discordância quando avisados que precisaríamos relembrar algumas técnicas aritméticas e conhecer alguns novos conceitos matemáticos, o que mostrou que nosso objetivo inicial de estimulo deu certo.

Assim, começamos pelo estudo da definição de divisor de um número acompanhado do conceito de múltiplo de um número. Até aí nada de novo. O novo foi descobrir os critérios de divisibilidade por 2, por 3, por 6, por 5 e por 10. O critério de divisibilidade por dois foi rapidamente descoberto pela análise da multiplicação dos números por 2 e, bem assimilado pois, basta saber se o número é par para que seja divisível por 2. A divisibilidade por 3 não foi obtida com a mesma facilidade. Enxergar a lógica da tabuada, contada de três em três, para números pequenos ajudou, mas as dificuldades surgiram quando tratamos com números de maior envergadura. Só com a intervenção do professor foi possível perceber, indutivamente, uma regra geral que quando somamos os algarismos de um número divisível por 3, temos que esta soma também é um múltiplo de 3, o mesmo não ocorrendo aos não divisíveis por 3. Para séries iniciais sugerimos uma prova simples para números de dois dígitos utilizando-se a base decimal: $a \cdot 10 + b = a \cdot 9 + (a + b)$, desde que $9a$ é múltiplo de 3, $a + b$ deverá ser múltiplo de 3.

O critério de divisibilidade por 6 surgiu como um elemento desafiador para os alunos pois eles queria propor uma saída indutiva que pudesse ser observada diretamente na tabua de múltiplos de 6. A aplicação de dois critérios anteriormente estudados parecia estafante e confuso, fazendo-se necessária uma aula não programada inicialmente com o intuito de reforçar os ensinamentos sobre divisibilidade e possibilidades de um número ser múltiplo de 2 e de 3 conjuntamente. Em seguida, após o estudo dos critérios de divisibilidade por 5 e por 10 que foram facilmente deduzidos pelos alunos ao observar as respectivas tabuadas, aproveitamos para questionar se os estudos alcançados até aquele momento seriam suficientes para descobrir uma estratégia vencedora do Jogo do Nim. Naturalmente, os alunos não perceberam relação entre critérios de divisibilidade e uma estratégia vencedora.

O estudo dos números primos se deu com o auxílio dos questionamentos feitos pelo professor ante a comparação da diferença da quantidade de divisores que um número pode ter: Todos os números possuem quantidades iguais de divisores? Qual é o número mínimo de divisores de um número maior ou igual a dois? Ao verificarem que alguns números possuem somente dois divisores o conceito de número primo se estabeleceu.

Ao desafiarmos os alunos a descobrir, utilizando-se do crivo de Erastótenes, quais são os números primos entre 2 e 50, algumas dificuldades de divisibilidade foram observadas. A divisibilidade entre inteiros deixou de ser uma simples ferramenta para obtenção de resultados para ganhar destaque de desafio aritmético importante, ou seja, os estudantes nessa altura estavam de fato interessados em aprender os algoritmos de divisibilidade, coisa que já deveriam ter aprendido a contento em anos anteriores. Isto nos faz pensar se ao ensinarmos alguns algoritmos mecânicos não deveríamos inicialmente lançar algum problema desafio inicial lúdico e darmos tempo aos alunos propor suas próprias soluções, para aí sim, darmos uma solução definitiva e que os alunos poderão, aí sim, exercitá-la com exercícios de fixação mecanizados.

Da mesma maneira, o critério das divisões sucessivas ocorreu com intensa ação do professor para dirimir as dificuldades que se verificaram posteriormente quando os alunos não conseguiram interpretar corretamente os resultados concluindo erroneamente ou parando os cálculos antes do fim. Houve a necessidade da realização uma aula com atividades de reforço, reconceituação, revisão que surtiram efeitos positivos.

O pedido por um espaço para o jogo do Nim esteve presente quase que a cada encontro realizado e a cada pergunta do professor se os alunos já tinham alguma ideia para a estratégia vencedora. O entusiasmo, portanto permaneceu inserido nos alunos pelo tempo necessário para a aplicação do projeto. Neste meio tempo os estudantes vislumbraram uma possibilidade de vencer quando chegaram a conclusão que se deixassem seis palitos ao adversário ganhariam a partida. Nova motivação de vencer o professor surgiu, mas persistiram as derrotas neste embate com o professor que, aproveitando-se da situação lançou mão de elevar ainda mais o entusiasmo trazendo á tona outros conhecimentos em aritmética necessários para a construção de uma estratégia vencedora. Assim, em uma atividade, propusemos as duplas que simulassem situação com quantidades menores de palitos com o objetivo de “achar” a resposta que buscavam. As simulações sugeridas pelo professor foram com quantidades maiores ou iguais a sete palitos e, assim o número de 11 palitos surgiu como uma posição ruim ao adversário que assim recebesse, de tal maneira que bastava responder com os movimentos corretos para alcançar a quantia de seis palitos (posição segura), vencendo a partida.

A pirâmide de números contribuiu com a ideia de número composto antes estudado e, de maneira lúdica, trouxe uma forma de fatorar o número composto 140026320, em produto de números primos. O impacto inicial perante os alunos foi a de que o número era muito grande para saber se era primo ou composto. Quando o professor afirmou ser um número composto e sugeriu testar por quais números primos era divisível, facilmente verificaram que se tratava de um número par e, portanto divisível por 2. Assim desconstruíram o número usando os critérios de divisibilidade conhecidos e testando com outros números primos conseguiram finalizar a fatoração.

Outra ferramenta que acreditamos que quebrou preconceitos de que problemas matemáticos são sempre difíceis ou muito complicados de resolver foi o uso de problemas envolvendo calcular o algarismo das unidades de expressões com potências de expoentes grandes. Tais problemas foram resolvidos usando a lógica dedutiva. Assim o uso do raciocínio se fez presente com o uso do pensar e não com resoluções mecânicas associadas a problemas em que o aluno apenas repete os procedimentos e técnicas desenvolvidas pelo professor. Não que isso não deva se fazer, mas ao fazer isso tiramos do aluno a condição de por si próprio construir o conhecimento, ser dono do seu aprendizado potencializando sua autonomia.

Ao trazermos aos alunos o problema proposto por Christian Goldbach, oportunizamos a eles trabalhar concretamente num problema que lhes pertencia. A atividade lúdica foi muito bem recebida pelos alunos que não conseguiram esconder a sua satisfação quando descobriam as combinações de três números primos que somados entre si davam o número natural pedido. Os alunos surpreenderam-se quando souberam que se tratava de um problema matemático de fácil entendimento até mesmo para eles, mas que grandes especialistas na área não conseguiram decifrá-lo por séculos e que somente em 2013, Harald Helfgott afirma ter provado a veracidade desta conjectura.

A ansiedade por desvendar a estratégia vencedora estava presente em cada jogo. Logo no início das atividades descobriram que se deixassem seu adversário com 6 palitos venceriam a batalha, no entanto, mesmo sabendo disso não garantiam sempre a vitória. Ao simularem com 7, 8, 9, 10 e 11 palitos verificaram que deixando 11 palitos garantiriam a vitória sobre colegas que não detinham desse saber. Mas outra vez, nem mesmo com esta informação, conseguiam ganhar sempre, apenas controlavam melhor o jogo e com isso as vitórias vinham em número bem maior do que as derrotas. Os alunos se surpreenderam ao descobrirem que para que uma estratégia seja vencedora basta tecnicamente uma divisão e uma subtração. Os cálculos necessários para descobrir a estratégia vencedora soaram simples para os estudantes, no entanto, não conseguiram por em prática a estratégia, talvez pela ansiedade em poder jogar e rapidamente ganhar do colega. Além disso, entendemos que o que mais tenha contribuído para a dificuldade de por em prática a estratégia, foi o fato de o professor propor jogarem partidas com 25 palitos onde só poderiam ser retirados no máximo 4 palitos por jogada, pois neste caso, ao realizar a divisão de 25 por 5 o resto encontrado é zero quando o quociente é 5 mas a forma correta de fazer a conta é achar um "resto" não nulo e, para isso deveriam ao dividir 25 por 5, obter "quociente" 4 e "resto" não nulo igual a 5 que, subtraído de 1 (palito para o perdedor) nos dá a quantia que deveria ser retirada para vencer: 4 palitos. Poderiam simplesmente, partindo da situação já estudada para vencer com 23 palitos iniciais, onde retira 2 palitos quem começa, observar que temos dois palitos a mais e para começar deverá ser retirado dois palitos a mais. Esta ideia de congruência em turmas iniciais é de difícil assimilação, por isso acreditamos que este fato contribuiu para que os alunos não construíssem uma estratégia vencedora, independentemente da quantidade inicial de palitos ou número máximo de palitos a serem retirados a cada rodada. Incluímos aí que podemos nos utilizar de fragmentos históricos da matemática de forma contextualizada, provocando reflexões e questionamentos de maneira a enxergar os problemas matemáticos sobre aspecto no mínimo interessante, curioso e desafiador.

Ao possibilitarmos ao aluno tentar construir suas próprias soluções, demos a chance de perceberem que as soluções clássicas são obtidas de modo natural, e que algumas delas são obtidas por análise de padrões repetitivos.

Assim aconteceu com nosso grupo de alunos. Acreditamos que houve empatia nas atividades propostas e, cada aluno conduziu de maneira divertida seu processo de aprendizagem e construção do conhecimento. Acreditamos que com isto, boa parte dos objetivos foi alcançada e, que o presente trabalho servirá como ferramenta base para introduzirmos não somente conceitos aritméticos e as propostas de aplicações contidas no capítulo 3, mas também, muitos outros conceitos introdutórios que fazem parte do currículo regular de nossas escolas.

Não podemos afirmar que as atividades descritas e usufruídas são uma garantia em qualquer outra experiência pedagógica semelhante, pois muitas são as condições que interferem nos processos de aprendizagem onde podem, em outras aplicações, divergirem os objetivos e as repostas dos alunos quanto à condução do professor.

Entendemos que todo o processo educativo proposto neste projeto é válido, pois os alunos obtiveram desempenho satisfatório observado cada uma das dificuldades individuais e coletivas e, observados a faixa etária e a maturidade os resultados podem ser diferentes.

Ponderamos que o domínio dos conteúdos e, particularmente de todas as nuances envolvidas dos jogos utilizados, citando aqui todas as possibilidades e variações, são necessários para o bom andamento do objeto de estudos. Salientamos ainda que, sempre que possível, fazer uso dos mais variados recursos didáticos, por exemplo, o uso das tecnologias da informação realçou para mais e melhor a qualidade das aulas e o entusiasmo dos estudantes.

No decorrer das aulas programadas percebeu-se que foi possível construir uma relação salutar entre problemas desafios e atividades desenvolvidas e, que todas estas etapas faziam sentido para os alunos, visto que as conclusões eram feitas à medida que as relações eram descobertas. Algumas lacunas ficaram em função do tempo de aplicação e dos conhecimentos prévios de cada aluno.

Acreditamos ainda que ao ampliarmos aulas bem direcionadas e especificas no campo da aritmética, contribuímos para a resolução de problemas que envolvem questões semelhantes aos da OBMEP e que os programas de Mestrado Profissional, tais como o PROFMAT, tem contribuído e podem contribuir ainda mais para a melhoria da qualidade do ensino da matemática no Brasil.

Por fim, destacamos que também é objetivo deste trabalho dar sugestões, ideias e que possa servir de inspiração para professores do Ensino Fundamental no planejamento de suas atividades no estudo da aritmética. O professor desejar poderá fazer uso das sugestões de atividades aqui descritas conforme sua necessidade e o desdobramento do que está sendo proposto pode ser feito e aplicado a outras situações matemáticas pertinentes. Pode-se ainda, aplicar essas atividades ou outras, com objetivos semelhantes, e acompanhar o desempenho dos estudantes de uma turma regular do Ensino Fundamental na execução das mesmas.

REFERÊNCIAS

BANCO DE QUESTÕES 2013. Rio de Janeiro: IMPA. ISBN 978-85-244-0384-4. Disponível em: < http://www.obmep.org.br/bq/bq2013.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2016.

BORIN, Júlia. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de matemática.** 5ª ed., São Paulo: CAEM/IME-USP, 2004.

BOYER, Carl Benjamin. **História da matemática.** 2ª ed. São Paulo, Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Lei nº 9394/1996. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática**/Secretaria de Educação Fundamental. Brasília, DF, 1997.

CAMPOS, Adilson de. **Equações Diofantinas Lineares: Possibilidades Didáticas Usando a Resolução de Problemas.** 2015. 86p. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), UFSM-RS, 2015.

CHARNAY, Roland. **Aprendendo (com) a resolução de problemas.** In: PARRA, C. (Org.) Didática da Matemática: Reflexões Psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas. 1996.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática.** 12ª ed. São Paulo, Ática, 1999.

FREIRE, Benedito Tadeu Vasconcelos. **Teoria dos Números.** Disponível em: <http://www.ebah.com.br/content/ABAAAgxW4AI/teoria-dos-numeros-benedito-tadeu-freire-2?part=3>. Acesso em: 17 fev. 2016.

GRANDO, Regina Celia. **O conhecimento matemático e o uso de jogos em sala de aula.** Dissertação de doutorado, 224 páginas.

IMPA. Portal da Matemática OBMEP. Disponível em: <http://matematica.obmep.org.br/index.php/modulo/ver?modulo=23>. Material teórico Portal da Matemática - OBMEP. Acesso em: 25 jan. 2016.

LEONARDO, Fabio Martins de. (Org.). **Matemática (Ensino Fundamental): Projeto Araribá, Matemática, 6º ano.** São Paulo: Moderna, 2010.

MAGRI, Marcela Arantes. **Explorando Geometria Elementar através de jogos e desafios.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Exatas) - Universidade Federal de São Carlos, 2012.

MEDEIROS, Kátia Maria de. **O Contrato Didático e a Resolução de Problemas Matemáticos em Sala de Aula.** Disponível em:

<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/setembro2012/matematica_artigos/artigo_medeiros.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2016

MENEZES, J. E. Procurar: **a interação jogo matemático-aluno em ambientes extraclasse: o jogo do Nim.** 1996 Dissertação de mestrado.

MÜLLER, Gecilda Cavalheiro. **Dificuldades de Aprendizagem na Matemática: um estudo de intervenção pedagógica com alunos do 4º ano do ensino fundamental.** 186 p. Tese (Doutorado em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: <http://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/40482>. Acesso em: 28/4/2016.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática.** Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

OLIVEIRA, Marta Kohl de. **Vygotsky: aprendizado e desenvolvimento, um processo sócio-histórico.** 4.ed. São Paulo: Scipione, 1999.

PIGHI, Pierina. O matemático peruano que resolveu um problema de quase 300 anos. **BBC**, 4 out. 2015. Disponível em: <http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2015/10/151004_matematico_peruano_helfgott_mv>. Acesso em: 16 fev. 2016.

POLYA, George. **A arte de Resolver Problemas.** Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de janeiro. Interciência, 1978.

REVISTA DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM Vol 6. 1º Semestre de 1985. Disponível em: <http://www.rpm.org.br/cdrpm/6/13.htm>. Acesso em: 17 jan. 2016.

RODRIGUES, Hélio Oliveira; Silva, José Roberto da. **Anais do VIII ENEM – Minicurso: O Jogo do nim e os conceitos de MDC e MMC.** 2004, 14 páginas. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/02/2MC06193102434.pdf>. Acesso em 15 mar. 2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS. **Hackenbush**. Goiânia. Disponível em: <https://jogoseeducacao.mat.ufg.br/p/2138-hackenbush>. Acesso em: 18/1/2016.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS. **Hackenbush Infantil**. Goiânia. Disponível em: <https://jogoseeducacao.mat.ufg.br/p/2139-hackenbush-infantil>. Acesso em: 18/1/2016.

VIGOTSKII, Lev Semenovich, LURIA, Alexander Romanovich e LEONTIEV, Alex N. **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.** São Paulo: Ícone, 1988.