



**PROFMAT**

UNIVERSIDADE FEDERAL DO TRIÂNGULO MINEIRO  
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

**CÁLCULO DE DUAS VARIÁVEIS:  
DO RETÂNGULO E DO CUBO  
À ÁREAS E VOLUMES MAIS GERAIS**

Ana Luíza de Oliveira

Uberaba - MG  
2016

Ana Luíza de Oliveira

**CÁLCULO DE DUAS VARIÁVEIS:  
DO RETÂNGULO E DO CUBO  
À ÁREAS E VOLUMES MAIS GERAIS**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob orientação do Prof. Dr. Heron Martins Félix.

Uberaba - MG  
2016

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do  
Triângulo Mineiro**

O48c Oliveira, Ana Luíza de  
Cálculo de duas variáveis: do retângulo e do cubo à áreas e volumes mais  
gerais / Ana Luíza de Oliveira. -- 2016.  
77 f. : il., fig., graf.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)  
-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016  
Orientador: Dr. Heron Martins Félix

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria. 3. Cálculo diferencial. 4.  
Cálculo integral. I. Félix, Heron Martins. II. Universidade Federal do Triân-  
gulo Mineiro. III. Título.

CDU 51(07)

Ana Luíza de Oliveira

Cálculo de duas variáveis: do retângulo e do cubo à áreas e volumes mais  
gerais

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro, como parte das atividades para obtenção do título de Mestre em Matemática.

26 de agosto 2016.

Banca Examinadora

Heron M. Félix

Prof. Dr. Heron Martins Félix  
Orientador  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Leonardo de Amorim e Silva

Prof. Dr. Leonardo de Amorim Silva  
Universidade Federal do Triângulo Mineiro

Marcos P. de Almeida

Prof. Me. Marcos Proença de Almeida  
Instituto Federal do Triângulo Mineiro

*“Tenho a impressão de ter sido uma criança brincando à beira-mar, divertindo-me em descobrir uma pedrinha mais lisa ou uma concha mais bonita que as outras, enquanto o imenso oceano da verdade continua misterioso diante dos meus olhos.”*

*Isaac Newton*

*Dedico este trabalho:  
aos meus alunos e ex alunos que dedicam  
seu tempo e seus esforços aos estudos,  
na busca do conhecimento e do crescimento;  
aos meus professores que me serviram de  
inspiração e tanto me incentivaram nos estudos.*

## AGRADECIMENTOS

*Agradeço, em primeiro lugar, a Deus, pelo dom maravilhoso de ensinar. Agradeço por ter me protegido e guiado até aqui, por ter me dado forças para persistir nos estudos e por ter tornado esse momento possível.*

*Ao meu orientador, Heron, acima de tudo pela paciência; pelas horas de estudo de Cálculo; por ter acreditado em meu potencial e por me fazer lembrar, muitas vezes, de que eu era capaz; e pela dedicação despreendida para que esse trabalho fosse concretizado.*

*Aos meus familiares: minha mãe, Dulce e meu pai, Reinaldo pela vida e pela educação que me deram e por terem me ensinado a lutar pelos meus objetivos através dos estudos e da honestidade; meus irmãos, Jaqueline e Paulo Sérgio, por terem sempre me incentivado nos meus estudos.*

*Aos amigos que fazem parte da minha vida, em especial, à Leila, Kelly e Lilian, por me darem força e incentivo e por sempre fazerem parte dos bons e maus momentos.*

*Aos meus professores do ensino fundamental e médio, que me deram a base necessária para continuar os meus estudos.*

*A todos os professores da graduação em Matemática do Unicerp e do Mestrado Profissional da UFTM, pelo grande aprendizado e experiências a mim transmitidos.*

*Aos amigos que fiz no Mestrado, em especial, à Natália, Gisele, Robson, Wysner e Alexandre. A alegre companhia desses amigos tornou os dias de sextas-feiras muito mais agradáveis, apesar da carga que é um Mestrado.*

*À CAPES, pelo apoio financeiro, que me deu tranquilidade e tempo para cursar o mestrado com muita dedicação.*

## RESUMO

O objetivo deste estudo é oferecer a alunos graduandos de cursos como Matemática, Física ou Engenharia e a professores de matemática, um texto que facilite o estudo dos principais conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis e algumas de suas aplicações. Este trabalho foi elaborado através de uma pesquisa bibliográfica sobre Cálculo Diferencial e Integral, ferramentas de resolução de problemas de áreas e volumes e tipos de asas de aeronaves. O texto se inicia com o contexto histórico do tema, mostrando a evolução da Geometria no cálculo de áreas e volumes, até se chegar ao surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, que possibilitou resultados mais precisos para o cálculo de áreas e volumes. Em seguida, são abordados os principais conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis, com definições, exemplos, gráficos e uso de softwares matemáticos como ferramenta na interpretação e na resolução de problemas. Através dos principais conceitos, é dado ao leitor um exemplo de aplicação do conteúdo: o cálculo da área da superfície da asa do tipo retangular de uma aeronave. Em seguida, o texto traz uma proposta de atividade a ser aplicada a alunos do Ensino Médio. Através do conceito de área sob curvas pelo Axioma das Somas de Riemann; da aplicação de uma fórmula de cálculo de volume de cilindro deduzida no capítulo três e de ferramentas computacionais, como o GeoGebra e o Riemann Sum, propõe-se que o aluno calcule o volume de um cilindro cuja base é uma região formada pela interseção de duas curvas. A partir dessa proposta de atividade, poderá o professor usar os softwares aqui apresentados (ou buscar por outros que o melhor atenda) em diversos conteúdos da matemática, a fim de tornar as aulas mais dinâmicas e contextualizadas.

**Palavras-chave:** Área; Volume; Software; Contextualização.

## ABSTRACT

The aim of this study is to provide graduate students in courses such as mathematics, physics or engineering and mathematics teachers, a text that facilitates the study of the major concepts of Differential and Integral Calculus of functions of two variables and some of its applications. This paper was done through a literature search on Differential and Integral Calculus, areas of problem-solving tools and volumes and types of aircraft wings. The text begins with the historical background of the subject, showing the evolution of geometry to calculate areas and volumes, until reaching the emergence of differential and integral calculus, which provided more accurate results for the calculation of areas and volumes. Next, the main concepts of Differential and Integral Calculus of functions of two variables, with definitions, examples, graphics and use of mathematical software as a tool in the interpretation and problem solving are presented. Through the main concepts, the reader is given an example of application of the substance: calculating the surface area of rectangular type of an aircraft wing. Then, the text brings a practical activity to be applied to high school students. Through the concept of area under curves by Axiom of Riemann Sums; applying a cylinder volume calculation formula deduced in chapter three and computational tools like GeoGebra and Riemann Sum, it is proposed that the student calculate the volume of a cylinder whose base is a region formed by the intersection of two curves. From this proposed activity, the teacher can use the software presented here (or search for better ones) on mathematics content, in order to make the classes more dynamic and contextualized.

**Keywords: Area, Volume, Software, Contextualization.**

# LISTA DE FIGURAS

1.1	Função de duas variáveis . . . . .	4
2.2	Tábula de argila . . . . .	6
2.3	O papiro de Rhind . . . . .	7
2.4	O papiro de Moscou . . . . .	7
3.5	Gráfico de $z = x^2 + y^2$ . . . . .	11
3.6	Parametrização da circunferência de centro na origem e raio $r$ . . . . .	13
3.7	Parametrização da hélice circular . . . . .	13
3.8	Gráfico da função $\sigma(t) = (t^3, 2t^2)$ . . . . .	16
3.9	Gráfico da função $u(t) = (2t^2, t + 1, t^2)$ , $-3 \leq t \leq 3$ . . . . .	16
3.10	Orientação de uma curva . . . . .	17
3.11	Gráfico de $\sigma(t)$ . . . . .	18
3.12	Representação geométrica da derivada parcial . . . . .	20
3.13	Gráfico do exemplo 1.8 . . . . .	21
3.14	Interpretação geométrica da integral dupla . . . . .	25
3.15	Gráfico do exemplo 3.13 . . . . .	27
3.16	Região do tipo I . . . . .	28
3.17	Gráfico do exemplo 3.14 . . . . .	28
3.18	Gráfico da superfície . . . . .	29
3.19	Região do tipo II . . . . .	31

---

3.20	Gráfico do exemplo 2.15 . . . . .	32
3.21	Gráfico da região $R$ . . . . .	33
3.22	Gráfico para cálculo de $I$ . . . . .	35
3.23	Gráfico do parabolóide $z = x^2 + y^2$ . . . . .	38
4.24	A asa retangular . . . . .	41
4.25	Modelo de asa retangular . . . . .	41
4.26	Interseção entre $F_s(x)$ e $F_i(x)$ . . . . .	42
4.27	Gráfico de $\vec{r}(u, v)$ . . . . .	43
4.28	Cálculo de integral usando WolframAlpha . . . . .	44
4.29	Gráfico de $\vec{s}(u, v)$ . . . . .	45
4.30	Cálculo de integral usando WolframAlpha . . . . .	46
5.31	Área sob uma curva . . . . .	48
5.32	Área sob uma curva: aproximação por retângulos . . . . .	49
5.33	Volume do cilindro . . . . .	50
5.34	Esboço do cilindro . . . . .	51
5.35	Janela de visualização do GeoGebra . . . . .	52
5.36	Passos 1 e 2 . . . . .	53
5.37	Passos 3 e 4 . . . . .	53
5.38	Resultado final da área . . . . .	54
5.39	Área no Riemann Sum . . . . .	55
5.40	Área do Exemplo 5.22 no Riemann Sum . . . . .	57
5.41	Área do Exemplo 5.23 no Riemann Sum . . . . .	58
5.42	Área do Exemplo 3.23 no Riemann Sum . . . . .	59

# SUMÁRIO

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1: Justificativa e objetivos</b>	<b>3</b>
<b>CAPÍTULO 2: Contexto histórico</b>	<b>6</b>
<b>CAPÍTULO 3: Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis: principais conceitos</b>	<b>10</b>
3.1 Funções de duas variáveis . . . . .	10
3.2 Gráficos . . . . .	11
3.3 Função vetorial e parametrização de curvas . . . . .	12
3.4 Limite, continuidade e derivada . . . . .	14
3.5 Curvas suaves . . . . .	15
3.5.1 Orientação de curvas . . . . .	16
3.6 Comprimento de arco . . . . .	17
3.7 Derivadas parciais . . . . .	19
3.7.1 Interpretação geométrica das derivadas parciais . . . . .	20
3.8 Diferenciabilidade . . . . .	21
3.9 Regra da cadeia . . . . .	22
3.10 Vetor gradiente . . . . .	23

---

3.11	Derivadas parciais de funções vetoriais . . . . .	24
3.12	Integrais duplas . . . . .	24
3.13	Integrais duplas sobre regiões mais gerais . . . . .	27
3.14	Mudança de variáveis na integral dupla . . . . .	34
3.14.1	Coordenadas polares . . . . .	34
3.15	Área de uma superfície . . . . .	36
<b>CAPÍTULO 4: Aplicação - a asa retangular</b>		<b>40</b>
4.1	A asa retangular . . . . .	40
4.2	Área da superfície superior . . . . .	42
4.3	Área da superfície inferior . . . . .	45
4.4	Área total . . . . .	46
<b>CAPÍTULO 5: O volume do cilindro</b>		<b>47</b>
5.1	Cálculo de áreas . . . . .	48
5.2	Cilindro . . . . .	49
5.3	Volume do cilindro . . . . .	50
5.4	Problema: o cálculo do volume de um cilindro . . . . .	51
5.4.1	Usando o GeoGebra . . . . .	51
5.4.2	Usando o Riemann Sum . . . . .	54
5.4.3	Usando a fórmula . . . . .	55
5.5	Conclusão da atividade . . . . .	59
<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>		<b>61</b>
<b>APÊNDICE</b>		<b>63</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>		<b>64</b>

# INTRODUÇÃO

Um dos maiores desafios do professor da Educação Básica é apresentar aos alunos justificativas e aplicações de conceitos matemáticos. Introduzir o conceito de área e volume através de aproximação por polígonos e apresentar softwares matemáticos, despertarão, sem dúvidas, a curiosidade e o interesse do aluno pela matemática e áreas correlatas, como Física e Engenharia.

O ensino de Cálculo Diferencial e Integral em cursos superiores se justifica pelas inúmeras aplicações da matemática para resolver problemas cotidianos, principalmente na área de física e engenharia. No entanto, mesmo se tratando de uma disciplina de Ensino Superior, alguns conceitos de Cálculo Diferencial e Integral podem ser aplicados no Ensino Médio, a fim de apresentar aos alunos resolução de problemas de áreas que a Geometria vista até então não resoluciona.

O trabalho foi dividido em cinco capítulos: Justificativa e objetivos (capítulo 1), Contexto Histórico (capítulo 2), Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis: principais conceitos (capítulo 3), Aplicação: a asa retangular (capítulo 4), O volume do cilindro (capítulo 5).

No primeiro capítulo, serão apresentadas as justificativas e os objetivos para a elaboração desse trabalho. Será feita uma análise da necessidade de contextualização e aplicabilidade dos conteúdos matemáticos, assim como da necessidade de utilização de recursos computacionais.

Em seguida, no segundo capítulo, será feito um contexto histórico do cálculo da área: surgimento, conceitos, métodos e técnicas de 2000 a.C. até os dias atuais.

Adiante, no capítulo 3, serão estudados os principais conceitos, definições e exemplos no estudo de Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis. Este capítulo será a base para os capítulos seguintes, que são aplicações para este. A leitura do capítulo é recomendada a graduandos das disciplinas de Cálculo superfície e a professores de matemática.

No capítulo 4, é apresentada uma aplicação de Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis na área da aviação. Trata-se do cálculo da área da superfície da asa de uma aeronave de competição construída por alunos de cursos de Engenharia Elétrica ou Engenharia Aeronáutica.

Por fim, no quinto capítulo, temos uma aplicação do Capítulo 3 para alunos e professores do Ensino Médio. Trata-se do cálculo do volume de um cilindro cuja base é delimitado por uma reta e uma curva de função polinomial de terceiro grau. Para isso, é usado um importante Axioma, a dedução de uma fórmula do capítulo 3 e dois softwares matemáticos.

O trabalho se encerra com as considerações finais, na intenção de ter deixado ao aluno graduando uma outra fonte de estudos e aos professores do Ensino Médio, uma atividade produtiva para seus alunos, a busca pela elaboração de outras atividades e o incentivo à pesquisa e criação de outros métodos de ensino.

# CAPÍTULO 1: Justificativa e objetivos

Segundo alguns historiadores, a Geometria surgiu da necessidade de medição de áreas de terrenos. O historiador grego Heródoto (484 - 420 a.C.) atribuiu a origem da geometria egípcia à necessidade de, após cada inundação do Rio Nilo, redistribuir os campos cultiváveis entre seus proprietários. Por meio de tentativas e aproximações, obtinham métodos eficazes do ponto de vista da aplicação [13]. Com o passar do tempo, viu-se a necessidade da generalização, surgindo, assim, fórmulas mais precisas e elaboradas para cálculo de áreas.

Alguns problemas só puderam ser resolvidos com precisão, com o surgimento do Cálculo Diferencial e Integral, que possibilitou o cálculo da área de figuras que não eram possíveis de serem feitos na Geometria. Como, por exemplo, o cálculo da área de uma elipse.

Outra aplicação do Cálculo Diferencial e Integral, o cálculo de volumes, é utilizado na Engenharia e possibilita a construção de barragens, pontes, e tantas outras construções imprescindíveis ao mundo moderno.

Para o cálculo do volume, como se tratam de grandezas tridimensionais, há a necessidade de se usar mais de uma variável. Por exemplo: O Volume "V" do cone circular é dado por  $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ , onde  $r$  é o raio e  $h$  é a altura. Dizemos que o volume "V" é determinado em função das variáveis independentes  $r$  e  $h$ . Ou seja,

$$V = V(r, h),$$

que representa uma função de duas variáveis, conforme ilustra a figura 1.1.

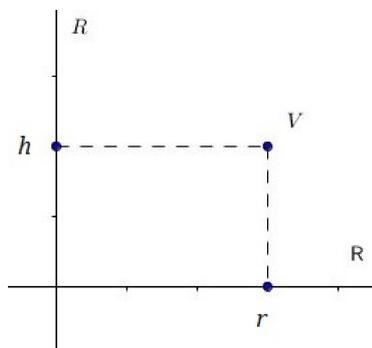


Figura 1.1: Função de duas variáveis

Um dos grandes desafios do professor de matemática é o de contextualizar e exemplificar aplicações do conteúdo. Tratar os conteúdos de forma contextualizada significa aproveitar ao máximo as relações existentes entre esses conteúdos e o contexto pessoal e social do aluno, de modo a dar significado ao que está sendo aprendido [4]. Além disso, tornar a matemática mais interessante ao aluno poderá ajudá-lo a descobrir suas vocações profissionais.

Segundo os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) [12], os objetivos da contextualização sócio-cultural na área da matemática são:

- desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real;
- aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento;
- relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade;
- utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Diante desses objetivos, foi elaborada, no capítulo cinco, uma adaptação e aplicação de conteúdo de nível superior no ensino médio. O objetivo da

atividade é calcular o volume de um cilindro cuja área base não pode ser calculada diretamente pelo uso de fórmulas da Geometria Analítica ou Geometria Plana.

O objetivo desse trabalho é o de mostrar aplicações do Cálculo de superfície, através de alguns conceitos e softwares matemáticos, abordando contexto histórico e conceitos básicos de cálculo diferencial e integral de funções de duas variáveis.

Diante do exposto, conclui-se que o estudo do tema Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis é muito relevante para alunos do nível superior na área de ciências exatas, além de se tratar de um tema com muitas aplicações no Ensino Médio. Não se pode deixar de lado o estudo de informática básica, pois a tecnologia tem muito a contribuir para a construção do conhecimento e aplicação do conteúdo.

O presente trabalho foi dividido de tal forma que alguns capítulos são destinados a alunos do nível superior e a professores de matemática, e outros destinados a alunos e professores do 3º ano do Ensino Médio. Como ferramenta para os cálculos de integrais e para a construção de gráficos, são utilizados softwares matemáticos livres.

## CAPÍTULO 2: Contexto histórico

A matemática primitiva originou-se em certas áreas no Oriente Médio, inicialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. A ênfase inicial da Matemática ocorreu na aritmética e na mensuração prática. (Veja [6].)

Não há exatidão quanto às datas e registros das descobertas matemáticas feitas no Oriente Antigo devido, principalmente em relação aos materiais de escrita utilizados na época. Os babilônios usavam tábulas de argila cozida e os egípcios, pedra e papiro, materiais mais resistentes ao tempo e ao clima. Já os primitivos chineses e indianos usavam casca de árvore e bambu, materiais muito perecíveis. (Veja [14].)



Figura 2.2: Tábula de argila

A geometria babilônica se relacionava intimamente com a mensuração prática. Há registros de que no período de 2000 a. C. a 1600 a. C., os babilônios já deviam estar familiarizados com as regras gerais de áreas de algumas figuras planas.

Alguns registros matemáticos importantes são datados da época do Oriente Antigo, como por exemplo, o papiro de Moscou e o papiro de Rhind. O primeiro contém 25 problemas e remonta aos anos de 1850 a. C. Já o segundo, escrito aproximadamente em 1650 a. C., representa um texto matemático na forma de manual prático com 85 problemas em escrita hierática, escrita hieroglífica simplificada. (Veja [14].)



Figura 2.3: O papiro de Rhind

No papiro da figura 2.4, é apresentada uma forma de cálculo do volume do tronco de uma pirâmide de base quadrada. O problema é "Um tronco de pirâmide tem 6 cúbitos de altura, 4 cúbitos de base por 2 cúbitos de topo. Qual o volume?". Os egípcios teriam chegado à fórmula  $V = \frac{h(a^2 + b^2 + ab)}{3}$ .

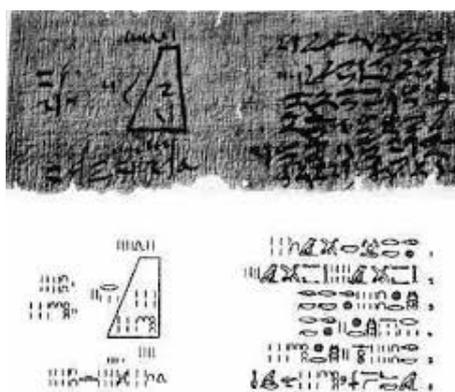


Figura 2.4: O papiro de Moscou

Vinte e seis dos 110 problemas dos dois papiros são geométricos. Além

da fórmula para o volume do tronco de pirâmide, há registros da solução para um problema que alguns acreditam tratar-se da área de um hemisfério. Há também problemas de medidas sobre áreas de figuras planas mais familiares, com várias resoluções muito precisas. Calculava-se com precisão áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras. (Veja [6].)

Mais tarde, surge a necessidade de calcular a área de figuras curvilíneas. De acordo com [3], temos:

"Os primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais são os problemas de quadratura. [...] Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão. A palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas."

Quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas. Hipócrates de Chios realizou as primeiras quadraturas, ou cálculo de áreas, da história por volta de 440 A.C.

O matemático procurou encontrar a quadratura do círculo através de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado, depois um octógono, em seguida um hexadecágono, e assim por diante. Havia, entretanto, um problema: essa sequência nunca poderia ser concluída. Apesar disso, essa foi uma ideia genial que deu origem ao MÉTODO DA EXAUSTÃO.

Por volta de 225 a.C., Arquimedes provou um teorema para a quadratura da parábola, que pode ser encontrado em [20]. Arquimedes gerou também uma soma com infinitos termos e conseguiu provar rigorosamente o seu resultado através do MÉTODO DA EXAUSTÃO. Este é o primeiro exemplo conhecido de soma infinita que foi resolvido. Outra contribuição de Arquimedes foi a utilização desse método para encontrar a área do círculo, obtendo uma das primeiras aproximações para o número  $\pi$ .

Contribuições seguintes para o Cálculo Integral apareceram somente ao final do século XVI e início do XVII. Nesse período, Simon Stevin (1548 - 1620) e Luca Valerio (c. 1552 - 1618) tentaram evitar a "redução por absurdo" no método da exaustão. Kepler (1571 - 1630), em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, também desenvolveu ideias relativas a infinitésimos, quando teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica, provando a segunda lei do movimento planetário. (Veja [3].)

Só a partir desse período é que foram construídos conceitos de cálculos que possibilitaram calcular áreas de figuras curvilíneas, com os matemáticos Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, *Geometria indivisibilibus continuorum nova*, Cavalieri desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Fermat obteve resultados a respeito de áreas sob curvas, produzindo um método para calcular, na notação moderna,  $\int_a^b x^n dx$ , para  $n$  fracionário, com  $n \neq 1$ .

A partir das grandes contribuições de matemáticos ao longo dos séculos, aliado aos avanços da tecnologia, hoje é possível construir modelos que permitem calcular, medir, otimizar, analisar o desenvolvimento e performance de projetos grandiosos, como aviões, navios, pontes, viadutos, dentre outros. Um exemplo de aplicação é o cálculo da área da superfície de uma asa do tipo retangular de uma aeronave, um dos problemas propostos nesse trabalho.

# CAPÍTULO 3: Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis: principais conceitos

Neste capítulo, serão estudados alguns conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis. O público ao qual se destina o capítulo é o de alunos de graduação de cursos de Matemática, Física ou Engenharia do 2º ou 3º período e professores de matemática. São pré-requisitos para concretização de tais conceitos: geometria analítica, álgebra linear e noções de cálculo diferencial de uma variável real.

Serão apresentados neste capítulo definições, exemplos e aplicações. As demonstrações podem ser consultadas nas referências [16] e [8].

## 3.1 Funções de duas variáveis

**Definição 3.1.1 (Função de duas variáveis:).** *Seja  $D$  um subconjunto do  $\mathbb{R}^2$ . Denomina-se função de  $D$  em  $\mathbb{R}$  toda relação que associa a cada par ordenado  $(x, y)$  pertencente a  $D$  um único número real indicado por  $f(x, y)$ . O conjunto  $D$  é chamado domínio da função e  $f(x, y)$  é chamado de imagem de  $(x, y)$  ou valor de  $f$  em  $(x, y)$ . (Veja [2].)*

## 3.2 Gráficos

O gráfico de funções de duas variáveis representa uma superfície no espaço tridimensional. A visualização geométrica auxilia na interpretação do problema e no estudo de tais funções. Todos os gráficos constantes neste trabalho foram plotados no programa GeoGebra, um software gratuito de matemática dinâmica que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. O software pode ser usado online ou baixado através do site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org).

De acordo com a referência [8], temos a seguinte definição:

**Definição 3.2.1 (Gráfico):**. *O gráfico de uma função de duas variáveis  $z = f(x, y)$  é o conjunto de todos os pontos  $(x, y, z)$  pertencentes a  $\mathbb{R}^3$ , tais que  $(x, y) \in D(f)$  e  $z = f(x, y)$ .*

Simbolicamente, escrevemos:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}.$$

Considere, por exemplo, para  $x, y$  e  $z$  reais, a função  $z = x^2 + y^2$ . Percebe-se que, tanto  $x$  quanto  $y$ , podem receber quaisquer valores reais. Mas  $z$  assume apenas valores não negativos, por se tratar da soma de quadrados. Veja o gráfico da função na figura 3.5.

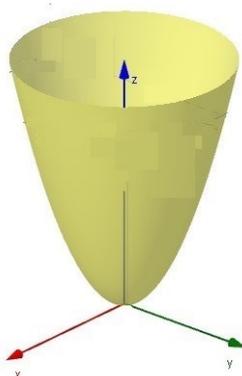


Figura 3.5: Gráfico de  $z = x^2 + y^2$

### 3.3 Função vetorial e parametrização de curvas

Segundo [16], temos a seguinte definição:

**Definição 3.3.1 (Função vetorial:).** *Uma função cujo domínio é um conjunto de números reais e cuja imagem é um conjunto de vetores é chamada de função vetorial.*

Uma função vetorial definida em um intervalo real  $I$ , com valores em  $\mathbb{R}^3$ , é expressa por

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad t \in I, \quad (3.1)$$

onde  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $z(t)$  são funções reais definidas no intervalo real  $I$ .

Geometricamente, o vetor  $\sigma(t)$  é representado pelo vetor  $\overrightarrow{OP}$ , tal que  $P = (x(t), y(t), z(t))$ , quando  $\sigma$  é contínua em  $I$ . Ou seja, para cada  $t \in I$ , obtemos um ponto  $P = (x, y, z) \in C$ , onde

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (3.2)$$

A equação 3.1 é denominada **parametrização** da curva  $C$ . As equações 3.2 são chamadas **equações paramétricas** da curva  $C$ . A variável  $t$  é chamada de parâmetro. Podemos definir também equações paramétricas no  $\mathbb{R}^2$ , basta considerar a terceira componente do vetor nula. Como veremos no exemplo 1.1 a seguir.

**Exemplo 3.1.** *Uma parametrização da função da circunferência de centro na origem e raio 1 pode ser  $\sigma(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . De fato, como a equação da circunferência é  $x^2 + y^2 = 1$ , e pela Relação Fundamental da Trigonometria, temos que  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ . Multiplicando ambos os membros da igualdade por  $r > 0$ , obtem-se  $r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$ . Portanto, sendo uma circunferência de centro na origem e raio  $r$ , uma parametrização da curva é  $\sigma(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ , com  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , conforme figura 3.6.*

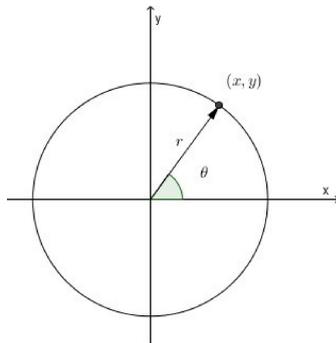


Figura 3.6: Parametrização da circunferência de centro na origem e raio  $r$

**Exemplo 3.2.** *A hélice circular reta é o lugar geométrico descrito por um ponto que se move sobre um cilindro circular reto de raio  $a$ , de modo que a distância por ele percorrida, paralelamente ao eixo do cilindro, é diretamente proporcional ao ângulo segundo o qual gira em torno do referido eixo.*

Se  $\theta$  é o ângulo de rotação, então a hélice tem parametrização:

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta \quad \text{e} \quad z = b\theta, \quad \text{com } a, b > 0.$$

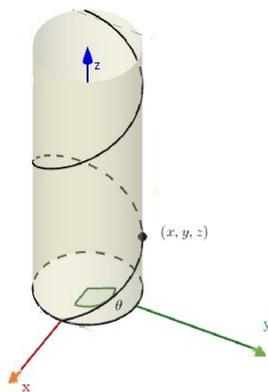


Figura 3.7: Parametrização da hélice circular

### 3.4 Limite, continuidade e derivada

**Definição 3.4.1 (Limite:).** *Seja  $\sigma(t)$  uma função vetorial definida em um intervalo aberto  $I$ , contendo  $t_1$ , exceto possivelmente o próprio  $t_1$ . O limite de  $f(t)$  quanto  $t$  se aproxima de  $t_1$  é definido por*

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \sigma(t) = (\lim_{t \rightarrow t_1} x(t), \lim_{t \rightarrow t_1} y(t), \lim_{t \rightarrow t_1} z(t)),$$

se  $\lim_{t \rightarrow t_1} x(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_1} y(t)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_1} z(t)$  existirem.

De acordo com [16], seguem as definições:

**Definição 3.4.2 (Continuidade:).** *A função  $\sigma(t)$  é contínua em  $t_1 \in I$  se, e somente se,*

$$\lim_{t \rightarrow t_1} \sigma(t) = \sigma(t_1).$$

**Definição 3.4.3 (Derivada:).** *A derivada da função vetorial  $\sigma(t)$ , com  $t \in I$  é a função vetorial denotada por  $\sigma'(t)$ , assim definida:*

$$\sigma'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)}{\Delta t}$$

nos pontos  $t \in I$  para os quais o limite acima existe.

Das definições 3.4.1 e 3.4.3, podemos concluir que:

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)),$$

se  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  e  $z'(t)$  existirem.

**Exemplo 3.3.** *Determinar equações paramétricas da reta tangente à elipse de centro na origem e equação  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ , no ponto  $P = \left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ .*

Solução: A parametrização da elipse de centro na origem e equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  é  $\sigma(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . (Veja [8].)

Assim, uma parametrização da elipse do exemplo é  $\sigma(t) = (2 \cos t, 3 \operatorname{sen} t)$ , com  $0 \leq t \leq 2\pi$ . O ponto  $P$  é o ponto final do vetor  $\sigma\left(\frac{\pi}{3}\right)$ , pois:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= \left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\ (2 \cos t, 3 \operatorname{sen} t) &= \left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \\ (\cos t, \operatorname{sen} t) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ t &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

O vetor  $\sigma'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(-2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3}, 3 \cos \frac{\pi}{3}\right) = \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$  é tangente à elipse em  $P$ . Dessa forma, se  $Q = (x, y)$  pertence à reta  $r$  tangente à elipse, então, determinando a equação paramétrica da reta tangente à elipse no ponto  $P$ , vem:

$$\begin{aligned}(x, y) &= P + \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right) t \\ &= \left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right) t \\ &= \left(1 - t\sqrt{3}, \frac{3(\sqrt{3} + t)}{2}\right), t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

### 3.5 Curvas suaves

**Definição 3.5.1 (Curva suave).** *Uma curva  $C : r(t)$ ,  $t \in I \subset \mathbb{R}$ , denomina-se curva regular ou suave, se tiver derivada  $r'(t)$  contínua e  $r'(t) \neq 0$  em todo o intervalo  $I$ . Esse tipo de curva é caracterizada pela ausência de pontos angulosos.*

**Exemplo 3.4.** Considere a curva parametrizada  $r(t) = (t^3, 2t^2)$ , com  $-\sqrt[3]{5} \leq t \leq \sqrt[3]{5}$ . A figura 3.8 mostra essa curva. O ponto  $(0, 0)$ , correspondente a  $t = 0$ , é um ponto angular (ou "bico"), ou seja, a curva não é suave. Reparemos que  $r'(0) = (0, 0) = \vec{0}$ .

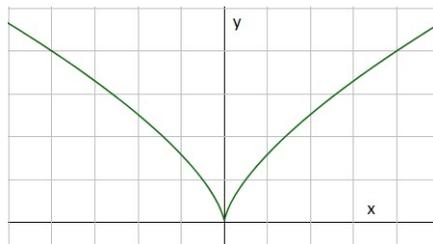


Figura 3.8: Gráfico da função  $\sigma(t) = (t^3, 2t^2)$

**Exemplo 3.5.** A função vetorial  $u(t) = (2t^2, t + 1, t^2 + 1)$ ,  $-3 \leq t \leq 3$  representa uma curva suave, já que  $u'(t) = (4t, 1, 2t)$  é contínua em todo o intervalo  $I = [-3, 3]$  e  $u'(t) \neq 0, \forall t \in I$ . Veja figura 3.9.

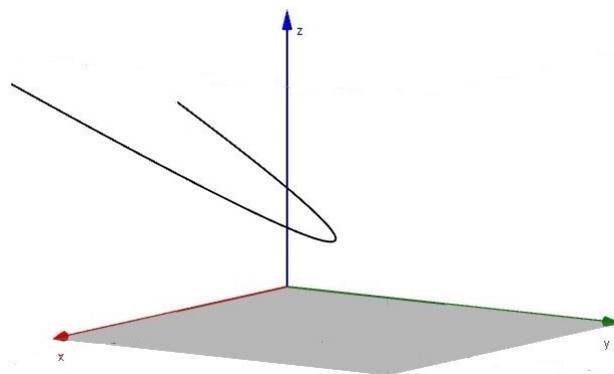


Figura 3.9: Gráfico da função  $u(t) = (2t^2, t + 1, t^2)$ ,  $-3 \leq t \leq 3$

### 3.5.1 Orientação de curvas

Em geral, as curvas são **orientadas**. Se um ponto material se desloca sobre a curva  $C$ , temos dois sentidos possíveis. Supondo que a curva tenha função vetorial

$$\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b],$$

por convenção será chamado de sentido positivo sobre  $C$ , o sentido no qual a curva é traçada quando o parâmetro  $t$  varia de  $a$  até  $b$ . O sentido oposto é chamado de sentido negativo sobre  $C$ . A figura 3.10 representa o sentido positivo da curva  $C$ .

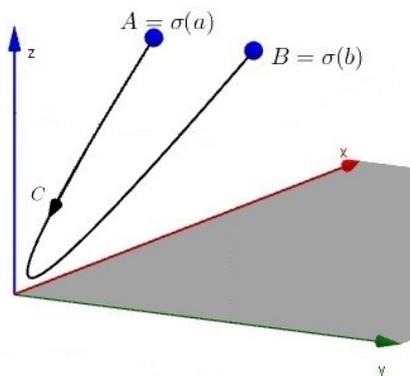


Figura 3.10: Orientação de uma curva

### 3.6 Comprimento de arco

Consideremos uma curva definida por  $\sigma(t), t \in [a, b]$ . Podemos pensar que esta curva é a trajetória descrita por uma partícula se movendo com velocidade  $v(t) = \|\sigma'(t)\|$ . Qual o comprimento desta curva quando  $t$  varia de  $a$  até  $b$ ? Intuitivamente, isto nada mais é do que o espaço percorrido pela partícula no intervalo de tempo  $[a, b]$ , isto é,  $\int_a^b v(t) dt$  (Veja [16]).

Dessa forma, definimos:

**Definição 3.6.1 (Comprimento da curva):** Se  $C$  é uma curva suave parametrizada por  $\sigma(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , o comprimento da curva  $C$  é definido por

$$L(C) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt \quad (3.3)$$

A fórmula 3.3 também é válida se  $\sigma(t)$  for suave por partes, ou seja, se o intervalo  $[a, b]$  pode ser dividido em um número finito de intervalos fechados, tais que, nesses intervalos, as curvas sejam suaves.

**Exemplo 3.6.** *Calcular o comprimento da curva definida pela função vetorial  $\sigma(t) = \left(\frac{t^3}{3}, t^2\right)$ , com  $t \in [1, 2]$ .*

Solução: A figura 3.11 representa o gráfico de  $\sigma(t)$ .

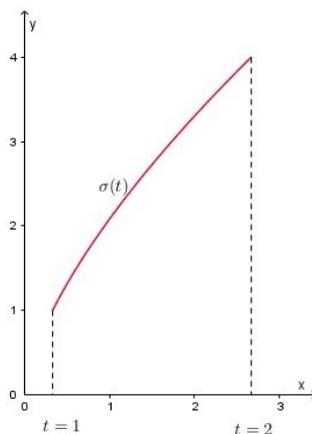


Figura 3.11: Gráfico de  $\sigma(t)$

Para calcular o comprimento da curva, devemos, primeiramente, derivar a função  $\sigma(t)$ :

$$\sigma'(t) = (t^2, 2t)$$

Como  $\sigma'(t)$  é contínua e  $\sigma'(t) \neq (0, 0)$  em todo o intervalo  $I = [1, 2]$ , então a curva é suave. A norma do vetor  $\sigma'(t)$  é

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{t^4 + 4t^2} = t\sqrt{t^2 + 4}.$$

Dessa forma, o comprimento da curva é

$$L(C) = \int_1^2 \|\sigma'(t)\| dt = \int_1^2 t\sqrt{t^2+4} dt = \left. \frac{\sqrt{(t^2+4)^3}}{3} \right|_1^2$$

$$L(C) = \frac{\sqrt{(2^2+4)^3}}{3} - \frac{\sqrt{(1^2+4)^3}}{3} = \frac{40\sqrt{5}}{3} \text{ u.m.}$$

### 3.7 Derivadas parciais

Para funções reais de uma variável real, supondo  $y = f(x)$ , sua derivada é definida por

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

que pode ser interpretada como a taxa de variação de  $y$  em relação a  $x$ .

Consideremos, agora, uma função  $z = f(x, y)$  de duas variáveis independentes. Quando calculamos a derivada parcial de  $z$  em relação a  $x$ , devemos tomar  $y$  como constante. De forma análoga, quando calculamos a derivada parcial de  $z$  em relação a  $y$ , devemos tomar  $x$  como constante.

Ou seja, a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir. Indicamos essa derivada parcial por um dos símbolos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, f_x, z_x.$$

A derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$  no ponto  $(x_0, y_0)$  é definida por

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

se este limite existir. Indicamos essa derivada parcial por um dos símbolos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial z}{\partial y}, f_y, z_y.$$

Na maioria dos casos não é necessário usar os limites acima. Podemos usar as regras de derivação de funções de uma variável.

**Exemplo 3.7.** Seja  $f(x, y) = 2x^2 - 3xy$ . Calculemos  $\frac{\partial f}{\partial x}(-1, 3)$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}(-1, 3)$ .

Solução: Para calcular a derivada parcial de  $f$  em relação a  $x$  em um ponto  $(x_0, y_0)$ , basta considerar o  $y$  como uma constante. Assim:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4x_0 - 3y_0 \implies \frac{\partial f}{\partial x}(-1, 3) = -13.$$

Analogamente, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -3x_0 \implies \frac{\partial f}{\partial y}(-1, 3) = 3.$$

### 3.7.1 Interpretação geométrica das derivadas parciais

O gráfico de uma função de equação  $z = f(x, y)$  é uma superfície. Seja  $Q = (x_0, y_0)$  um ponto no  $\mathbb{R}^2$  e  $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  um ponto no  $\mathbb{R}^3$ . Se  $y$  não variar, ou seja, se manter  $y$  igual a  $y_0$ , o plano  $y = y_0$  interceptará a superfície. Essa interseção será uma curva de equação  $z = f(x, y_0)$  neste plano. O número  $\frac{\partial f}{\partial x}$  será o coeficiente angular da reta tangente a esta curva quando  $x = x_0$  (Veja [16]). Veja figura 3.12.

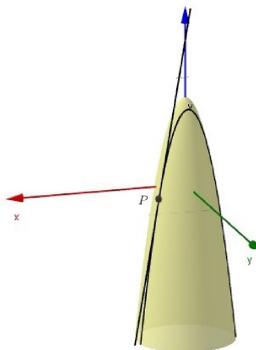


Figura 3.12: Representação geométrica da derivada parcial

**Exemplo 3.8.** Dados o parabolóide  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  e o plano  $y = 1$ , cuja visualização é obtida por meio da figura 3.13 a. A curva  $C$  resultante da interseção entre  $f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$  e  $y = 1$  é dada pela equação  $g(x) = 8 - x^2$ , representada na figura 3.13 b.

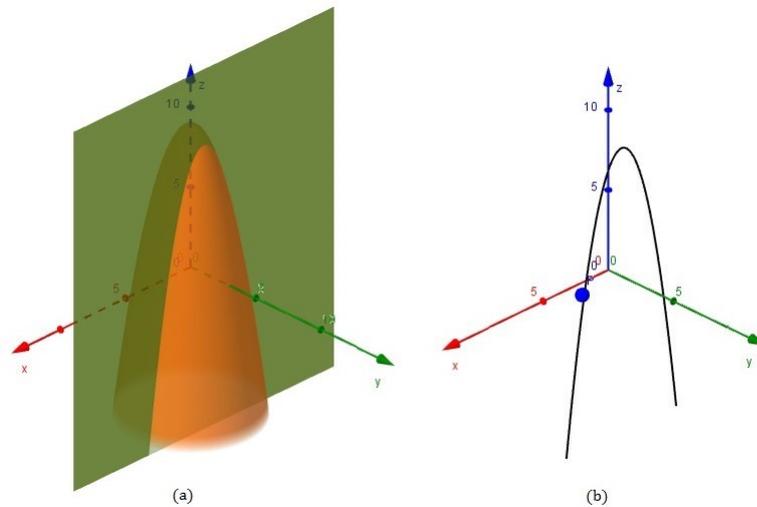


Figura 3.13: Gráfico do exemplo 1.8

Solução: Deve ser calculada a inclinação da reta tangente à curva  $C$  no ponto  $P = (3, 1)$ . Como  $g$  é uma função em  $x$ , a inclinação da reta tangente a  $C$  no ponto  $P$  é dada por  $g'(1)$  ou  $\frac{\partial f}{\partial x}(3, 1)$ . Tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -2x \implies \frac{\partial f}{\partial x}(3, 1) = -6.$$

## 3.8 Diferenciabilidade

**Definição 3.8.1 (Diferenciabilidade).** *Uma função  $f$  é diferenciável em um ponto  $(x_0, y_0) \in D_f$  se as derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  existirem e forem contínuas nesse ponto. (Veja [9].)*

Como consequência dessa definição, temos:

**Teorema 3.1.** *Seja  $f$  uma função com duas variáveis. Se as duas derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\frac{\partial f}{\partial y}$  são contínuas num conjunto aberto  $A$ , então  $f$  é diferenciável em todos os pontos de  $A$ . (Veja [2].)*

**Exemplo 3.9.** A função  $f(x, y) = 9x^3 - 2y^2 - 5$  é diferenciável em todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$ , pois as derivadas parciais  $f_x = 27x^2$  e  $f_y = -4y$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ .

### 3.9 Regra da cadeia

No estudo de funções de uma variável, a regra da cadeia é utilizada para calcular a derivada de funções compostas. Agora, vamos usar a regra da cadeia para o caso de funções de duas variáveis, conforme definição.

**Definição 3.9.1 (Regra da cadeia:).** Se  $z = f(x, y)$  tem derivadas parciais  $\frac{\partial z}{\partial x}$  e  $\frac{\partial z}{\partial y}$  contínuas e se as funções  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  são diferenciáveis em  $t$ , então a função composta  $z = f(x(t), y(t))$  é uma função diferencial de  $t$  e:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

**Exemplo 3.10.** Sejam as funções reais  $f(x, y) = xy^2 - x^2$ ,  $x(t) = t - 1$ ,  $y(t) = 2t$ . Vamos calcular a derivada  $\frac{dh}{dt}$  da função  $h(t) = f(x(t), y(t))$ .

Solução: Temos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 - 2x, & \frac{dx}{dt} &= 1, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2xy, & \frac{dy}{dt} &= 2; \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= (y^2 - 2x) \cdot (1) + (2xy) \cdot (2) \\ \frac{dh}{dt} &= 4t^2 - 2 \cdot (t - 1) + 2 \cdot (t - 1) \cdot 2t \cdot 2 \\ \frac{dh}{dt} &= 4t^2 - 2t + 2 + 8t^2 - 8t \\ \frac{dh}{dt} &= 12t^2 - 10t + 2. \end{aligned}$$

Note que, se fizermos as substituições das variáveis antes de derivar, teremos:  $h(t) = f(x(t), y(t)) = f(t - 1, 2t) = (t - 1) \cdot (2t)^2 - (t - 1)^2 = 4t^3 - 5t^2 + 2t - 1$ .

Derivando  $h$  em função de  $t$ , temos:

$$\frac{dh}{dt} = 12t^2 - 10t + 2,$$

o que resulta em um cálculo mais simples para a derivada de  $h$  com respeito a  $t$ .

## 3.10 Vetor gradiente

**Definição 3.10.1 (Vetor Gradiente):** *Seja  $f$  uma função de duas variáveis que admite derivadas parciais no ponto  $(x_0, y_0)$ , denomina-se gradiente de  $f(x, y)$  nesse ponto, denotado por  $\text{grad } f(x_0, y_0)$  ou  $\nabla f(x_0, y_0)$ , o vetor:*

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right).$$

Se estamos trabalhando com um ponto genérico  $(x, y)$ , representamos o vetor gradiente por:

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

De acordo com [8], interpretamos geometricamente  $\nabla f$  como um vetor aplicado no ponto  $(x_0, y_0)$ , isto é, transladado da origem para o ponto  $(x_0, y_0)$ .

**Exemplo 3.11.** *Determine o vetor gradiente das funções:*

a)  $z = 5xy - \frac{y^2}{x^3};$

b)  $z = x^2y^3.$

Solução:

a) Temos:  $\nabla z = \left( 5y + \frac{3y^2}{x^4}, 5x - \frac{2y}{x^3} \right).$

b) Temos:  $\nabla z = (2xy^3, 3y^2x^2).$

### 3.11 Derivadas parciais de funções vetoriais

**Definição 3.11.1 (Derivada parcial):** *Seja a função vetorial  $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$ . A derivada parcial de  $\vec{r}$  em relação a  $x$ , que denotamos por  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$  é definida por:*

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, \frac{\partial f_3}{\partial x} \right).$$

Analogamente,

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial y}, \frac{\partial f_2}{\partial y}, \frac{\partial f_3}{\partial y} \right) \quad e \quad \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \left( \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_3}{\partial z} \right)$$

são, respectivamente, a derivada parcial de  $\vec{r}$  em relação a  $y$  e a derivada parcial de  $\vec{r}$  em relação a  $z$ .

**Exemplo 3.12.** *Dada a função vetorial  $\vec{r} = (\sqrt{x}, 2x + y, x - y + 2z)$ , determine suas derivadas parciais.*

Solução:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} &= \left( \frac{1}{2\sqrt{x}}, 2, 1 \right) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} &= (0, 1, -1) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} &= (0, 0, 2) \end{aligned}$$

### 3.12 Integrais duplas

Esta seção se destina ao estudo de integral dupla, que é extensão natural do conceito de integral definida para as funções de duas variáveis. Apresentamos também sua interpretação geométrica, exemplos e aplicações.

Para se chegar à definição de integral dupla como volume de determinada região  $W$ , é necessário definir a integral dupla através de somas de Riemann. Tal demonstração pode ser consultada em [23]. Nos ateremos apenas às definições.

Considere uma função real de duas variáveis  $z = f(x, y)$  definida e contínua no retângulo  $R = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$ . Segue definição:

**Definição 3.12.1 (Integral dupla):** Se  $f(x, y) \geq 0$  em  $R$ , o gráfico de  $z = f(x, y)$  é uma superfície situada acima do retângulo  $R$ . Esta superfície, o retângulo  $R$  e os quatro planos  $x = a, x = b, y = c, y = d$  formam a fronteira de uma região  $W$  do espaço. Assumindo que a região  $W$  assim definida possui um volume, chamamos esse volume de integral dupla de  $f$  sobre  $R$ , que denotamos por  $\int \int_R f(x, y) dx dy$ .

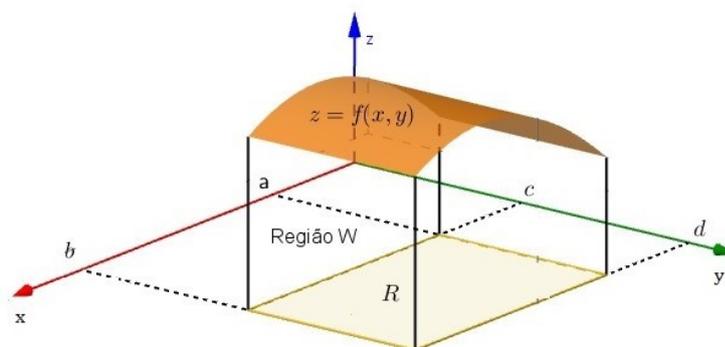


Figura 3.14: Interpretação geométrica da integral dupla

De acordo com [21], as propriedades básicas da integral dupla são similares às aquelas para integral simples e o seguinte resultado, admitido sem demonstração, é, na verdade, consequência das propriedades de limite:

**Proposição 3.1.** Se  $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas no retângulo finito  $R$  e  $k$  é uma constante real, então, são válidas as seguintes propriedades para a integral dupla:

$$\text{i)} \int \int_R k f(x, y) dx dy = k \int \int_R f(x, y) dx dy.$$

$$\text{ii)} \int \int_R [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \int \int_R f(x, y) dx dy + \int \int_R g(x, y) dx dy.$$

$$\text{iii)} \text{ Se } f(x, y) \geq 0 \text{ para todo } (x, y) \in R, \text{ então } \int \int_R f(x, y) dx dy \geq 0.$$

**iv)** Se  $f(x, y) \geq g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in R$ , então

$$\int \int_R f(x, y) dx dy \geq \int \int_R g(x, y) dx dy.$$

$$\text{v)} \int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_{R_1} f(x, y) dx dy + \int \int_{R_2} f(x, y) dx dy, \text{ sendo } R = R_1 \cup R_2 \text{ e } R_1 \text{ e } R_2 \text{ têm apenas pontos de fronteira em comum.}$$

A seguir, um importante Teorema que nos ajudará a calcular as integrais duplas.

**Teorema 3.2 (Teorema de Fubini):** *Seja  $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua no retângulo  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$ . Então,*

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx.$$

**Exemplo 3.13.** *Calcule o volume do sólido  $\Omega$  abaixo do plano de equação  $2x - 3y + 2z = 2$  e acima da região  $R = [0, 1] \times [0, 1]$ .*

Solução: O sólido  $\Omega$  é delimitado superiormente pelo plano cuja equação é  $z = -x + \frac{3y}{2} + 1$  e está ilustrado na figura 3.15.

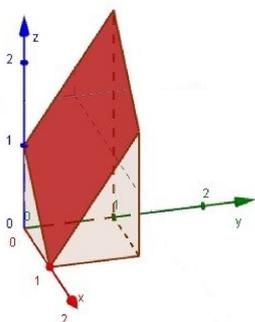


Figura 3.15: Gráfico do exemplo 3.13

O volume do sólido pode ser calculado através da integral dupla a seguir:

$$\begin{aligned}
 V_{\Omega} &= \int_0^1 \left[ \int_0^1 \left( -x + \frac{3y}{2} + 1 \right) dx \right] dy \\
 V_{\Omega} &= \int_0^1 \left[ \frac{-x^2}{2} + \frac{3xy}{2} + x \right] \Bigg|_{x=0}^{x=1} dy \\
 V_{\Omega} &= \int_0^1 \left( \frac{1}{2} + \frac{3y}{2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 (3y + 1) dy \\
 V_{\Omega} &= \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3y^2}{2} + y \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{5}{4} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

### 3.13 Integrais duplas sobre regiões mais gerais

Estudaremos nesta seção os casos em que a região  $R$  não é uma região retangular. As integrais são calculadas de forma simples, por meio de duas integrações sucessivas (Veja [16], página 165).

#### 1º caso: $R$ é do tipo I

Nesse caso, teremos  $f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$  e  $a \leq x \leq b$ , com  $f_1(x)$  e  $f_2(x)$  contínuas em  $a, b$ , conforme ilustra figura 3.16.

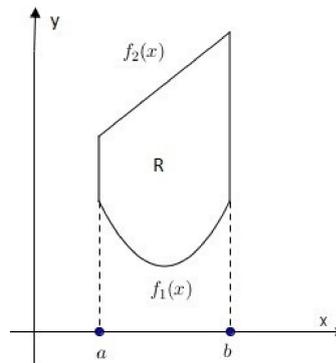


Figura 3.16: Região do tipo I

Nesse caso, a integral dupla  $\int \int_R f(x, y) dx dy$  é calculada por meio da integral iterada:

$$\int_a^b \left[ \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

**Exemplo 3.14.** Calcule o volume do sólido delimitado superiormente pelo plano de equação  $z = 3 - x - y$ , inferiormente pela região  $R$  delimitada por  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ,  $y = \frac{x+2}{4}$  e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de  $R$ .

Solução: Veja o esboço do gráfico da superfície do sólido na figura 3.17 a e da região  $R$  em 3.17 b.

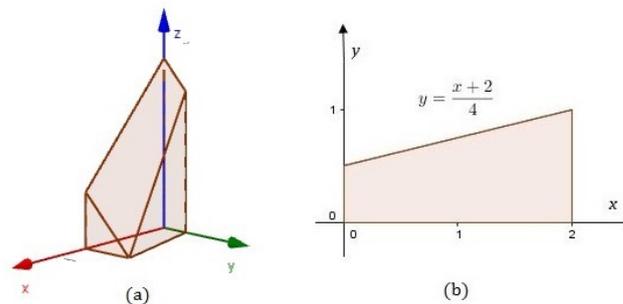


Figura 3.17: Gráfico do exemplo 3.14

Para calcular o volume da superfície, usaremos a integral dupla:

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R (3 - x - y) \, dx \, dy \\
 V &= \int_0^2 \left[ \int_0^{\frac{x+2}{4}} (3 - x - y) \, dy \right] dx \\
 V &= \int_0^2 \left( 3y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{x+2}{4}} dx \\
 V &= \int_0^2 \frac{-9x^2 + 4x + 44}{32} dx \\
 V &= \frac{1}{32} \int_0^2 (-9x^2 + 4x + 44) dx \\
 V &= \frac{1}{32} \cdot \left[ (-3x^3 + 2x^2 + 44x) \Big|_0^2 \right] \\
 V &= \frac{1}{32} \cdot 72 = \frac{9}{4}.
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.15.** Calcule o volume do sólido delimitado superiormente pelo plano  $z = 4$ , inferiormente pela região  $R$  delimitada por  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$  e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de  $R$ .

Solução: O gráfico do sólido está representado na figura 3.18.

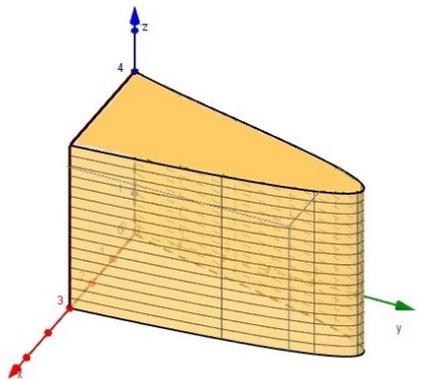


Figura 3.18: Gráfico da superfície

O volume do sólido é

$$\begin{aligned}
 V &= \iint_R 4dx dy \\
 V &= \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=-x^3+2x^2+3x} 4dy dx \\
 V &= 4 \int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=-x^3+2x^2+3x} dy dx \\
 V &= 4 \int_{x=0}^{x=3} y \Big|_0^{-x^3+2x^2+3x} dx \\
 V &= 4 \int_{x=0}^{x=3} -x^3 + 2x^2 + 3x dx \\
 V &= 4 \left( \frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Big|_0^3 \right) \\
 V &= 4 \cdot \left( \frac{-3^4}{4} + \frac{2 \cdot (3)^3}{3} + \frac{3 \cdot (3)^2}{2} \right) \\
 V &= 4 \cdot \frac{45}{4} = 45 \text{ unidades de volume.}
 \end{aligned}$$

**Exemplo 3.16.** Calcule o volume do sólido delimitado superiormente pelo plano  $z = h$ , inferiormente pela região  $R$  e lateralmente pelo cilindro vertical cuja base é o contorno de  $R$ . Sendo a região  $R$  delimitada por  $x = k_1$ ,  $x = k_2$ ,  $y = 0$ ,  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , de modo que não existam raízes de  $f(x)$  pertencentes a  $[k_1, k_2]$ , exceto possivelmente  $k_1$  ou  $k_2$ .

Solução: Este exemplo é uma generalização para o exemplo anterior, sendo que uma delimitação de  $y$  é uma função polinomial de terceiro grau qualquer e o eixo  $x$ .

A restrição de que não existem raízes da curva  $f$  no intervalo  $[k_1, k_2]$ , exceto possivelmente  $k_1$  ou  $k_2$ , é importante. Se existir uma raiz  $k_3$  no intervalo, deveríamos dividir a região  $R$  em duas regiões: uma com  $x \in [k_1, k_3]$ , e outra com  $x \in [k_3, k_2]$  e somarmos os módulos dos resultados.

Como não sabemos se o gráfico da função está abaixo ou acima de  $y = 0$

e nem o sinal de  $h$ , usaremos módulo para o cálculo do volume. Segue que:

$$\begin{aligned}
 V &= \left| \int \int_R h \, dx \, dy \right| \\
 V &= \left| \int_{x=k_1}^{x=k_2} \int_{y=0}^{y=ax^3+bx^2+cx+d} h \, dy \, dx \right| \\
 V &= \left| h \int_{x=k_1}^{x=k_2} \int_{y=0}^{y=ax^3+bx^2+cx+d} dy \, dx \right| \\
 V &= \left| h \int_{x=k_1}^{x=k_2} y \Big|_0^{ax^3+bx^2+cx+d} dx \right| \\
 V &= \left| h \int_{x=k_1}^{x=k_2} (ax^3 + bx^2 + cx + d) dx \right| \\
 V &= \left| h \left( \frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} + dx \Big|_{k_1}^{k_2} \right) \right| \\
 V &= \left| h \left[ \left( \frac{ak_2^4}{4} + \frac{bk_2^3}{3} + \frac{ck_2^2}{2} + dk_2 \right) - \left( \frac{ak_1^4}{4} + \frac{bk_1^3}{3} + \frac{ck_1^2}{2} + dk_1 \right) \right] \right|
 \end{aligned}$$

## 2º caso: $R$ é do tipo II

Nesse caso, teremos  $g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$  e  $c \leq y \leq d$ , com  $g_1(y)$  e  $g_2(y)$  contínuas em  $c, d$ , conforme ilustra figura 3.19.

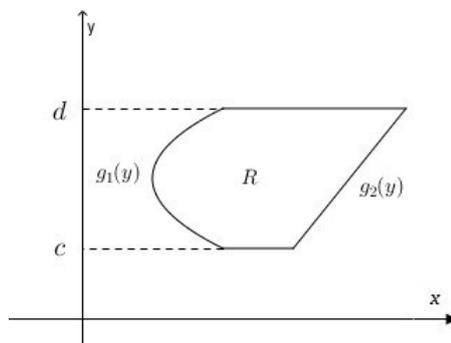


Figura 3.19: Região do tipo II

Nesse caso, a integral dupla  $\int \int_R f(x, y) dx dy$  é calculada por meio da integral iterada:

$$\int_c^d \left[ \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

**Exemplo 3.17.** Calcule  $\int \int_R (x + 2y) dx dy$ , onde  $R$  é o triângulo de vértices  $(-2, 0)$ ,  $(0, 2)$  e  $(2, 0)$ .

Solução: Analisemos, primeiramente o esboço da região  $R$  na figura 3.20.

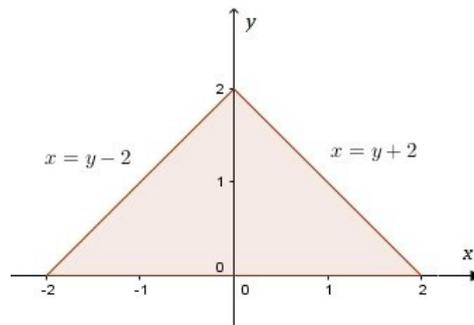


Figura 3.20: Gráfico do exemplo 2.15

Determinamos as equações das retas que delimitam o valor de  $x$ . Ou seja,  $y - 2 \leq x \leq y + 2$  e  $0 \leq y \leq 2$ . Assim, temos:

$$\begin{aligned} I &= \int \int_R (x + 2y) dx dy = \int_0^2 \left[ \int_{y-2}^{y+2} (x + 2y) dx \right] dy \\ I &= \int_0^2 \left( \frac{x^2}{2} + 2xy \right) \Big|_{x=y-2}^{x=y+2} dy = \int_0^2 12y dy = 12 \int_0^2 y dy \\ I &= 12 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 = 12 \cdot 2 = 24. \end{aligned}$$

**Observação 3.1.** Se  $f(x, y) = 1$  para todo  $(x, y)$  pertencente à região de integração  $R$ , a integral  $\int \int_R 1 dx dy$  é a área de  $R$ .

**Exemplo 3.18.** Determine a área da região limitada pelas curvas  $x = y^3$ ,  $x + y = 10$  e  $y = 0$ .

Solução: A representação gráfica da região está ilustrada na figura 3.21.

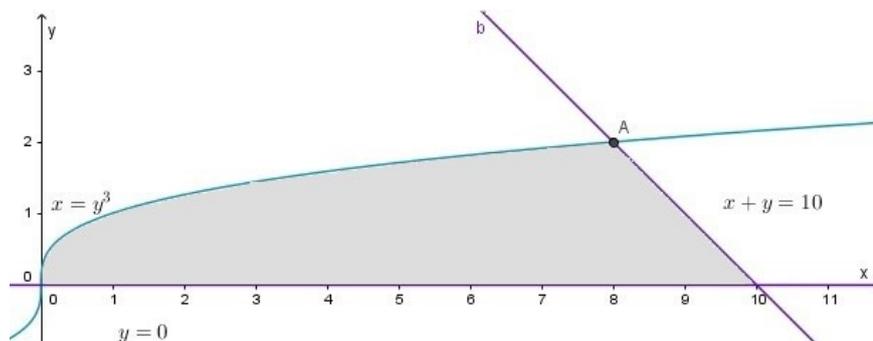


Figura 3.21: Gráfico da região  $R$

As funções  $x = y^3$  e  $x + y = 10$  se interceptam em  $y = 2$ . Assim,  $R$  é uma região do tipo 2 com  $y^3 \leq x \leq 10 - y$  e  $0 \leq y \leq 2$ . Dessa forma, a área da região  $R$  é

$$\begin{aligned}
 A(R) &= \int \int_R 1 \, dx dy \\
 A(R) &= \int_{y=0}^{y=2} \int_{x=y^3}^{x=10-y} 1 \, dx dy \\
 A(R) &= \int_{y=0}^{y=2} x \Big|_{y^3}^{10-y} dy \\
 A(R) &= \int_{y=0}^{y=2} (10 - y - y^3) dy \\
 A(R) &= 10y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 \\
 A(R) &= 14.
 \end{aligned}$$

## 3.14 Mudança de variáveis na integral dupla

Um dos objetivos de se mudar as variáveis na integral dupla é facilitar o cálculo da integral, quando o integrando ou a região  $R$  não é simples de ser calculado diretamente. Transformaremos  $\int \int_R f(x, y) dx dy$ , onde  $R$  é uma região do plano  $xy$  em  $\int \int_Q F(u, v) du dv$ , tal que  $Q$  será uma região do plano  $uv$ . Para isso, usaremos uma mudança de variáveis:

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v).$$

Considerando que as funções  $f(x, y)$  e  $F(u, v)$  são contínuas em  $R$  e  $Q$  respectivamente, temos:

$$\int \int_R f(x, y) dx dy = \int \int_Q f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (3.4)$$

onde

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

é o determinante **jacobiano** de  $x$  e  $y$  em relação a  $u$  e  $v$ .

### 3.14.1 Coordenadas polares

As equações

$$x = r \cos \theta \quad e \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

forneem as coordenadas cartesianas de um dado ponto em termos de suas coordenadas polares podem ser vistas como uma transformação que leva os pontos de  $(r, \theta)$  do plano  $r\theta$  a pontos  $(x, y)$  do plano  $xy$ . (Veja [8].)

Nesse caso, o determinante jacobiano é dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Assim, a fórmula 3.4 pode ser expressa por:

$$\int \int_R f(x, y) \, dx dy = \int \int_Q f(r \cos \theta, r \operatorname{sen} \theta) r \, dr \, d\theta \quad (3.5)$$

**Exemplo 3.19.** Calcule  $I = \int \int_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy$ , sendo  $R$  o círculo de centro na origem e raio 3.

Solução: Calcular  $I$  é o mesmo que calcular o volume do sólido delimitado superiormente pela superfície  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ , inferiormente pelo plano  $xy$  e lateralmente pelo cilindro de equação  $x^2 + y^2 = 9$ . O sólido está representado graficamente na figura 3.22.

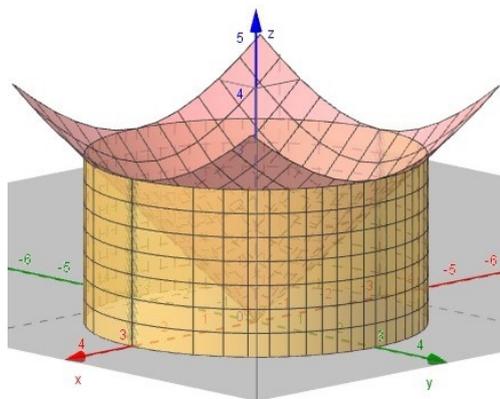


Figura 3.22: Gráfico para cálculo de  $I$

Para calcular  $I$ , vamos utilizar as coordenadas polares e aplicar a fórmula 3.5. Para isso, devemos identificar a região  $R'$  no plano  $r\theta$ , que corresponde à região  $R$  no plano  $xy$ .

O contorno de  $R$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = 3^2$ . Em coordenadas polares, temos:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 3.$$

Assim, calculando  $I$ , temos:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy \\ I &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=3} \sqrt{r^2} r dr d\theta \\ I &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=3} r^2 dr d\theta \\ I &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^3 d\theta \\ I &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} 9 d\theta \\ I &= 9 \cdot \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \\ I &= 9 \cdot \left( \theta \Big|_0^{2\pi} \right) \\ I &= 18\pi. \end{aligned}$$

### 3.15 Área de uma superfície

**Definição 3.15.1 (Área de superfície).** *Seja  $S$  uma superfície paramétrica suave, representada por  $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , onde  $(u, v) \in R$ , definimos a área  $A(S)$  de  $S$  pela fórmula*

$$A(S) = \iint_R \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv \quad (3.6)$$

onde  $\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\|$  é a norma do vetor  $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ .

**Exemplo 3.20.** *Determine a área da superfície esférica de raio  $r$ .*

Solução: Vamos utilizar a equação vetorial da esfera de centro na origem e raio  $r$ , cuja demonstração pode ser consultada em [8] nas páginas 358 e 359, isto é:

$$\sigma(u, v) = (r \cos(v) \cos(u), r \cos(v) \sin(u), r \sin(v)), 0 \leq u \leq 2\pi \text{ e } \frac{-\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}.$$

As derivadas parciais são

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial u} &= (-r \cos(v) \sin(u), r \cos(v) \cos(u), 0) \\ \frac{\partial \sigma}{\partial v} &= (-r \cos(u) \sin(v), -r \sin(u) \sin(v), r \cos(v)), \end{aligned}$$

sendo que, o produto vetorial é

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \times \frac{\partial \sigma}{\partial v} = (r^2 \cos^2(v) \cos(u), r^2 \cos^2(v) \sin(u), r^2 \cos(v) \sin(v)).$$

Usando a fórmula 3.6, vem

$$\begin{aligned} A(S) &= \int \int_R \|(r^2 \cos^2(v) \cos(u), r^2 \cos^2(v) \sin(u), r^2 \cos(v) \sin(v))\| \, dudv \\ &= \int \int_R \sqrt{r^4 \cos^4(v) \cos^2(u) + r^4 \cos^4(v) \sin^2(u) + r^4 \cos^2(v) \sin^2(v)} \, dudv \\ &= \int \int_R \sqrt{r^4 \cos^4(v) + r^4 \cos^2(v) \sin^2(v)} \, dudv \\ &= \int \int_R \sqrt{r^4 \cos^2(v) \cdot (\cos^2(v) + \sin^2(v))} \, dudv \\ &= \int \int_R \sqrt{r^4 \cos^2(v)} \, dudv \\ &= \int \int_R r^2 \cos(v) \, dudv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cos(v) \, dudv \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 u \cos(v) \Big|_{u=0}^{u=2\pi} dv = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\pi r^2 \cos(v) dv = 2\pi^2 \sin(v) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi r^2 \left[ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \right] = 2\pi r^2 \cdot (1 + 1) = 4\pi r^2. \end{aligned}$$

Um caso particular ocorre quando a superfície  $S$  é descrita, na forma explícita, pela equação  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in R$ , e o plano  $\pi$  é o plano  $xy$ . Assim, a área de  $S$  pode ser calculada pela fórmula a seguir, cuja demonstração pode ser consultada em [16], página 255.

$$A(S) = \int \int_R \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dx dy. \quad (3.7)$$

**Exemplo 3.21.** Calcule a área do parabolóide  $z = x^2 + y^2$  limitado superiormente pelo plano  $z = 3$ .

Solução: A representação do gráfico do parabolóide segue na figura 3.23.

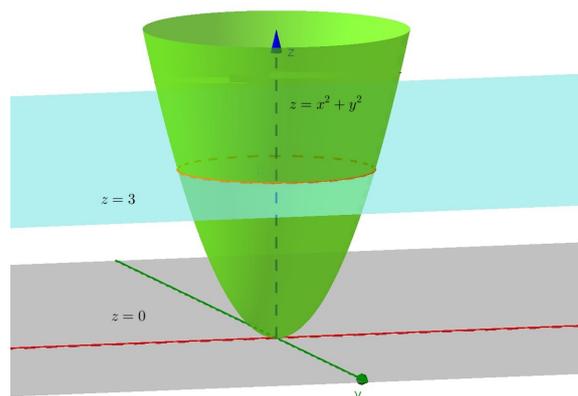


Figura 3.23: Gráfico do parabolóide  $z = x^2 + y^2$

A parametrização da superfície é  $\vec{r}(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$ , sendo que  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 3$ . Como  $z = x^2 + y^2$ , as derivadas parciais são  $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2y$ . Aplicando a fórmula 3.7, vem:

$$A(S) = \int \int_R \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy.$$

Passando para coordenadas polares, temos  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , com  $0 \leq r \leq \sqrt{3}$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Aplicando a fórmula 3.5, vem:

$$\begin{aligned}
 A(S) &= \int \int_R f(x, y) \, dx dy = \int \int_Q f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \\
 A(S) &= \int \int_Q r \sqrt{1 + 4(r \cos \theta)^2 + 4(r \sin \theta)^2} \, dr \, d\theta \\
 A(S) &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=\sqrt{3}} r \sqrt{1 + 4r^2} \, dr \, d\theta \\
 A(S) &= \frac{1}{12} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \sqrt{(1 + 4r^2)^3} \Big|_0^{\sqrt{3}} \right) d\theta \\
 A(S) &= \frac{1}{12} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (13\sqrt{13} - 1) \, d\theta \\
 A(S) &= \frac{13\sqrt{13} - 1}{12} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \\
 A(S) &= \frac{(13\sqrt{13} - 1)\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

# CAPÍTULO 4: Aplicação - a asa retangular

Para calcularmos o arrasto<sup>1</sup> gerado pela asa de um avião, precisamos, dentre uma série de outros fatores, do valor da área de superfície dessa asa. É necessário, também, calcular a área para se saber, aproximadamente, a quantidade de material utilizado para se revestir a asa.

Veremos, então, nesse capítulo, uma aplicação dos conhecimentos adquiridos através do capítulo 3: o cálculo da superfície da asa do tipo retangular de um avião.

## 4.1 A asa retangular

A forma geométrica adotada para a asa pode ser fruto da criação e imaginação do projetista. Normalmente, a superfície horizontal da asa (a vista superior ou inferior) assume uma forma geométrica retangular, elíptica ou trapezoidal (veja [17]).

A asa retangular é a asa cujo perfil superior é um retângulo. Esse formato apresenta menor estabilidade durante o voo se comparada aos outros tipos de asa, porém, é muito mais fácil de ser construída. Veja na figura 4.24 uma fotografia de uma miniatura de avião com asa retangular.

---

<sup>1</sup> A força que faz resistência ao movimento de um objeto sólido através de um fluido (um líquido ou um gás) [24].

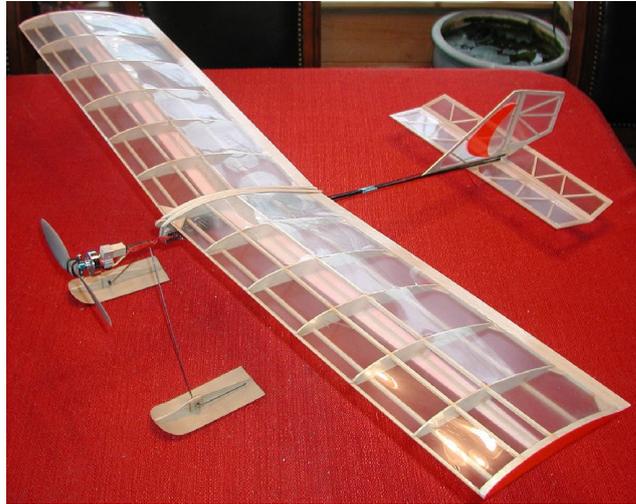


Figura 4.24: A asa retangular

Agora, consideremos o problema: calcular a área da superfície de uma asa retangular. Para esse cálculo, devemos dividir este problema em duas partes: cálculo da área da superfície superior e cálculo da área da superfície inferior. Veja na figura 4.25 um esboço da asa.

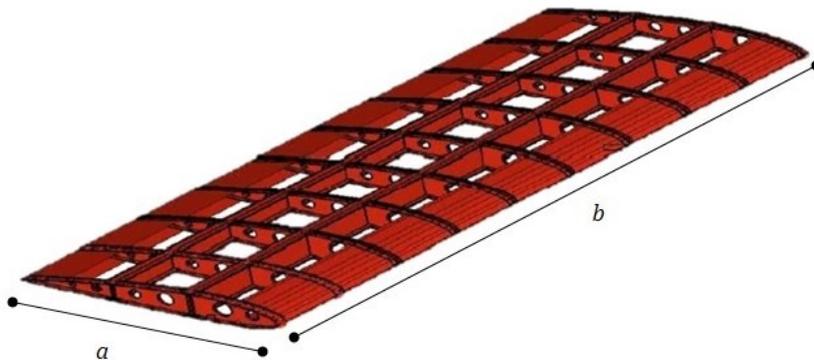


Figura 4.25: Modelo de asa retangular

Serão adotadas aqui algumas medidas de comprimento e largura e equações das curvas da parte superior e da inferior. Essas medidas e as equações das funções podem variar conforme o modelo ou tamanho da aeronave. Nesse exemplo, a asa tem largura  $a = 326,79$  mm e comprimento de  $b = 757$  mm.

A equação da função no  $\mathbb{R}^2$  da superfície superior é polinomial do sexto grau e tem equação:

$$F_s(x) = -2,1275 \times 10^{-12}x^6 + 2,1360 \times 10^{-9}x^5 - 8,5806 \times 10^{-7}x^4 + \\ + 1,7801 \times 10^{-4}x^3 - 2,1160 \times 10^{-2}x^2 + 1,3899x + 3,5200$$

e função da superfície inferior também é polinomial do sexto grau e tem equação:

$$F_i(x) = -1,906 \times 10^{-12}x^6 + 2,0196 \times 10^{-9}x^5 - 8,3411 \times 10^{-7}x^4 + \\ + 1,7364 \times 10^{-4}x^3 - 1,9508 \times 10^{-2}x^2 + 9,9980 \times 10^{-1}x + 1,9200.$$

Através do software GeoGebra, vamos definir os pontos de interseção das duas funções, conforme figura 4.26.

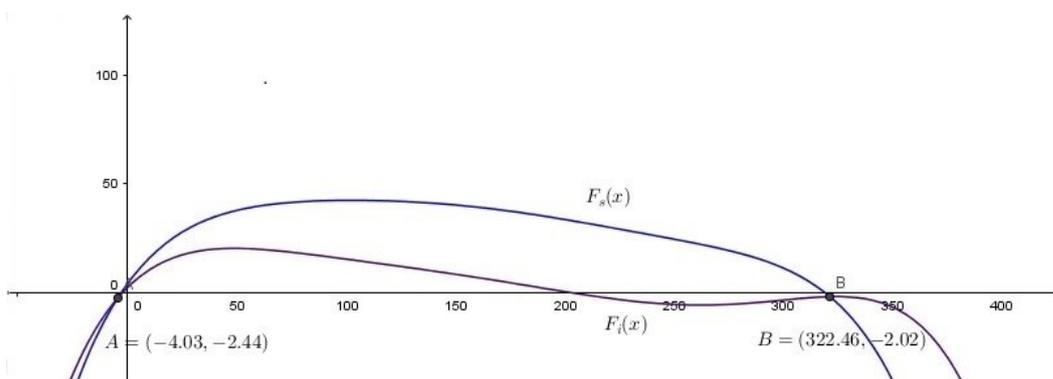


Figura 4.26: Interseção entre  $F_s(x)$  e  $F_i(x)$

Dessa forma, a superfície da asa é definida no intervalo  $x \in [-4, 33; -322, 46]$ .

## 4.2 Área da superfície superior

Deve-se, primeiramente, parametrizar a superfície no  $\mathbb{R}^3$ , a fim de se calcular a sua área. Dessa forma, teremos:

$$\vec{r}(u, v) = (u, F_s(u), v), \text{ com } -4,03 \leq u \leq 322,46 \text{ e } 0 \leq v \leq 757.$$

As medidas de  $u$  e  $v$  estão em milímetros. Temos na figura 4.27 o gráfico da superfície  $\vec{r}(u, v)$ .

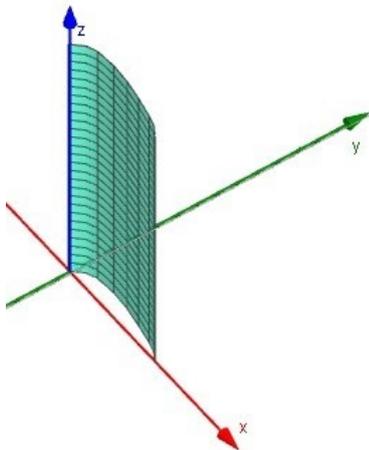


Figura 4.27: Gráfico de  $\vec{r}(u, v)$

A área pode ser calculada usando a definição 3.15.1:

$$A(S) = \int \int_R \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| du dv.$$

As derivadas parciais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} &= (1, F'_s(u), 0) \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

onde  $F'_s(u) = -1,2765 \times 10^{-11}u^5 + 1,0680 \times 10^{-8}u^4 - 3,43224 \times 10^{-6}u^3 + 5,3403 \times 10^{-4}u^2 - 4,2320 \times 10^{-2}u + 1,3899$ .

O produto vetorial é calculado:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = (1, F'_s(u), 0) \times (0, 0, 1) = (F'_s(u), 1, 0).$$

Calculando a norma do vetor acima, temos:

$$\left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + (F'_s(u))^2}.$$

Finalmente, calculando a área da superfície, temos:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int \int_R \sqrt{1 + (F'_s(u))^2} \, dudv \\ A(S) &= \int_{v=0}^{v=757} \left( \int_{u=-4,03}^{u=322,46} \sqrt{1 + (F'_s(u))^2} \, du \right) dv \end{aligned}$$

Com o auxílio do software WolframAlpha [25], a integral  $\int_{u=-4,03}^{u=322,46} \sqrt{1 + (F'_s(u))^2} \, du$  pode ser calculada, conforme figura 4.28.

Definite integral:

$$\int_{-4.03}^{322.46} \sqrt{1 + (-1.2765 \times 10^{-11})x^5 + 1.068 \times 10^{-8}x^4 - 3.43224 \times 10^{-6}x^3 + 5.3403 \times 10^{-4}x^2 - 4.2320 \times 10^{-2}x + 1.3899)^2} \, dx = 348.948$$

Visual representation of the integral:

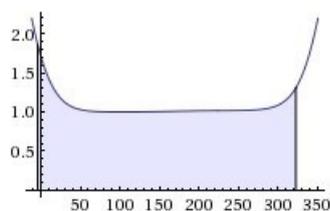


Figura 4.28: Cálculo de integral usando WolframAlpha

Assim,

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{v=0}^{v=757} 348,948 \, dv \\ A(S) &= 348,948v \Big|_0^{757} \\ A(S) &= 264153,636 \, \text{mm}^2 \end{aligned}$$

### 4.3 Área da superfície inferior

A parametrização da superfície é

$$\vec{s}(u, v) = (u, F_i(u), v), \text{ com } -4,03 \leq u \leq 322,46 \text{ e } 0 \leq v \leq 757,$$

sendo que  $u$  e  $v$  estão em milímetros. O gráfico da superfície está representado na figura 4.29.

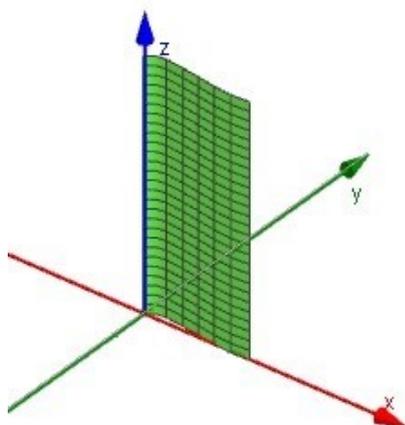


Figura 4.29: Gráfico de  $\vec{s}(u, v)$

De maneira análoga ao cálculo da área da superfície superior, teremos as derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} &= (1, F'_i(u), 0) \\ \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} &= (0, 0, 1), \end{aligned}$$

onde  $F'_i(u) = -1,1 \times 10^{-11}u^5 + 1,0098 \times 10^{-8}u^4 - 3,33644 \times 10^{-6}u^3 + 5,2092 \times 10^{-4}u^2 - 3,9016 \times 10^{-2}u + 9,9980 \times 10^{-1}$ .

A norma do produto vetorial das derivadas parciais é

$$\left\| \frac{\partial \vec{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{s}}{\partial v} \right\| = \sqrt{1 + (F'_i(u))^2}.$$

Assim,

$$A(S) = \int \int_R \sqrt{1 + (F'_i(u))^2} du dv$$

$$A(S) = \int_{v=0}^{v=757} \left( \int_{u=-4,03}^{u=322,46} \sqrt{1 + (F'_i(u))^2} du \right) dv.$$

Com o auxílio do WolframAlpha e conforme figura 4.30, temos:

Definite integral:

$$\int_{-4.03}^{322.46} \sqrt{(1 + (-1.1 \times 10^{-11})x^5 + 1.0098 \times 10^{-8}x^4 - 3.33644 \times 10^{-6}x^3 + 5.2092 \times 10^{-4}x^2 - 3.9016 \times 10^{-2}x + 0.99998)^2} dx = 363.214$$

Visual representation of the integral:

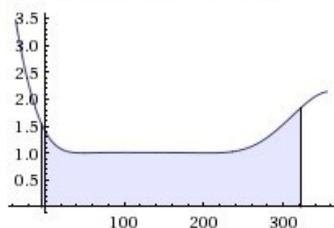


Figura 4.30: Cálculo de integral usando WolframAlpha

Dessa forma:

$$A(S) = \int_{v=0}^{v=757} 363,214 dv$$

$$A(S) = 363,214v \Big|_0^{757}$$

$$A(S) = 274952,998 \text{ mm}^2$$

## 4.4 Área total

Após calcular a área das superfícies superior e inferior, obtemos a soma  $A = 264.153,636 + 274.952,998 = 539.106,634 \text{ mm}^2$  de área total.

# CAPÍTULO 5: O volume do cilindro

Será estudada, neste capítulo, uma aplicação da integral de duas variáveis para o Ensino Médio. Como pré-requisitos, o aluno deve ter conhecimentos de funções, Geometria Plana, Geometria Analítica e Geometria Espacial. Serão utilizados recursos computacionais para a aplicação da atividade proposta, de forma que os alunos e o professor devem possuir conhecimentos básicos de informática.

A atividade deve ser aplicada, preferencialmente, a alunos do 3º ano do Ensino Médio. O objetivo é estender o conceito de volume do cilindro circular reto para o volume de um cilindro reto cuja base é delimitada por uma curva de função polinomial de grau 3. Não é necessário que se use integrais nem funções de duas variáveis, já que os alunos ainda não possuem tais conhecimentos prévios.

Através de uma definição simples e importante usada no Cálculo Diferencial e Integral (Somadas de Riemann), o exemplo 3.16 da página 30 deste trabalho e alguns recursos computacionais, o aluno irá aprender que há figuras das quais podem ser calculadas áreas e volumes antes inacessíveis ao contexto do ensino médio.

Ao final da atividade, espera-se que o aluno tenha ampliado seu conceito de área e volume e tenha construído uma intuição de limite e de somas infinitas convergindo para um número. Mais do que isso, espera-se despertar no aluno a curiosidade pela busca de aplicações da matemática nas diversas áreas, especialmente engenharia, física e computação.

## 5.1 Cálculo de áreas

Pelos conceitos de Geometria analítica, sabemos como calcular área de polígonos e do círculo. Tal conhecimento pode ser estendido para o cálculo de áreas de regiões que possam ser subdivididas em um número finito de polígonos ou setores circulares. Quando a região não pode ser decomposta deste modo, outros métodos devem ser usados. (Veja [19].)

A própria área do círculo foi definida através da inscrição e da circunscrição de polígonos regulares, o chamado método da exaustão (veja em [7]). Para definir a área de uma figura plana qualquer, procedemos de maneira análoga, ou seja, aproximamos a figura por polígonos cujas áreas possam ser calculadas pelos métodos da geometria elementar.

Para isso, define-se primeiramente:

**Definição 5.1.1 (Área sob uma curva).** *Sejam  $a$  e  $b$  dois números tais que  $a \leq b$  e  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  para todo  $x$  desse intervalo. A área sob a curva  $f$  entre  $a$  e  $b$  é a área da região delimitada pelo gráfico da função  $f$ , pelas retas verticais  $x = a$  e  $x = b$  e pelo eixo horizontal, conforme ilustra a figura 5.31.*

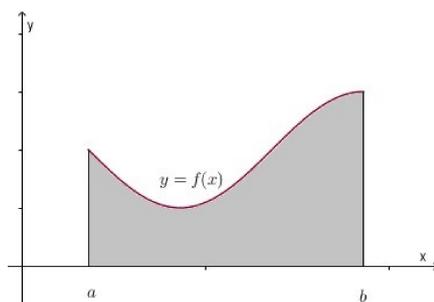


Figura 5.31: Área sob uma curva

Considera-se agora o problema de calcular a área sob a curva de uma função não negativa e contínua  $f$ . Para isso, faz-se uma partição no intervalo  $[a, b]$ , ou seja, divide-se o intervalo em  $n$  subintervalos, conforme mostra a figura 5.32.

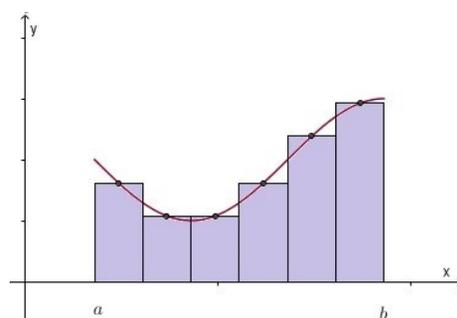


Figura 5.32: Área sob uma curva: aproximação por retângulos

A soma das áreas dos  $n$  retângulos é a chamada soma de Riemann da função de  $f$ . À medida que  $n$  cresce muito e cada intervalo de subdivisão se torna muito pequeno, a soma das áreas retangulares aproxima-se do que intuitivamente entendemos como a área sob a curva  $f$ .

No caso de a função ser negativa, essa área deve ser calculada em módulo. Além disso, caso a curva seja, ora positiva, ora negativa, ela deve ser subdividida, de forma que as partes negativas estejam em módulo. Nesse caso, a área sob a curva será o somatório dessas áreas subdivididas.

Para facilitar a compreensão da definição de área sob uma curva, o professor pode explicá-la a seus alunos de uma maneira menos formal e rigorosa. Em [11], o autor apresenta algumas atividades para o Ensino Médio que ajudarão na construção dessa definição.

## 5.2 Cilindro

**Definição 5.2.1 (Cilindro).** *Um cilindro é uma superfície gerada por uma reta  $L$  que se move ao longo de uma curva plana  $C$  dada, de tal modo que ela permaneça sempre paralela a uma reta fixa não situada no plano da curva dada. A reta  $L$  é chamada de **geratriz** do cilindro e a curva  $C$  é chamada **diretriz** do cilindro. [16]*

A atividade será restrita a cilindros cuja diretriz  $C$  está contida em um

dos planos coordenados e a geratriz  $L$  é paralela ao eixo coordenado exterior ao plano.

### 5.3 Volume do cilindro

**Axioma 5.1 (Princípio de Cavalieri).** *São dados dois sólidos e um plano. Se todo plano paralelo ao plano dado secciona os dois sólidos segundo figuras de mesma área, então esses sólidos têm o mesmo volume.*

No cilindro, toda seção paralela à base é congruente com essa base. Esse fato permite concluir, pelo Princípio de Cavalieri, que o volume do cilindro é o produto entre a área de sua base pela sua altura, assim como ocorre nos prismas [10]. A figura 5.33 ilustra essa situação.

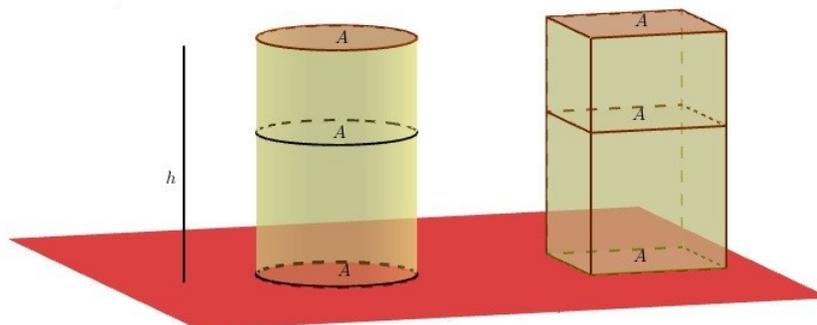


Figura 5.33: Volume do cilindro

Se o cilindro tem base circular, o seu volume é  $V = \pi r^2 h$ , sendo  $r$  o raio do círculo da base e  $h$  a altura do cilindro. Porém, a área da curva que delimita o cilindro nem sempre pode ser calculada com tanta facilidade quanto a área de um círculo ou de uma elipse. Em alguns casos, como no enunciado no problema a seguir, é necessário usar definições do cálculo integral para se calcular a área da base.

## 5.4 Problema: o cálculo do volume de um cilindro

Veremos nessa seção a resolução de um problema de cálculo do volume de um cilindro cuja base é delimitada por uma curva  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ . Este problema já foi resolvido no exemplo 3.15. Daremos aqui uma abordagem a nível médio para um problema que precisou do cálculo de uma integral dupla para ser resolvido.

Usaremos somas de Riemann e a demonstração do exemplo 3.16. Serão utilizadas também, duas ferramentas computacionais de fácil operacionalização: o programa GeoGebra e o programa online Riemann Sum, disponível no site <http://mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html>. Antes de fazer a atividade com os alunos, seria interessante uma aula anterior para que eles possam conhecer os comandos básicos do GeoGebra.

**Problema:** Calcule o volume do cilindro reto de altura 4 cuja base é uma superfície delimitada por  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$ .

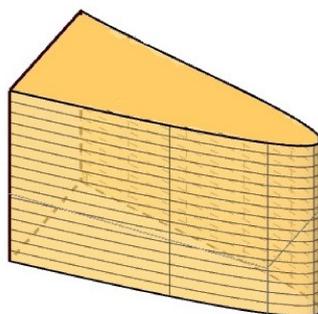


Figura 5.34: Esboço do cilindro

### 5.4.1 Usando o GeoGebra

GeoGebra é um software matemático que reúne recursos de geometria, álgebra e cálculo. É um sistema dinâmico, pois permite realizar construções geométricas como pontos, vetores, segmentos, planos, sólidos geométricos que

podem ser alterados posteriormente. O software pode ser usado online ou baixado gratuitamente através do site [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org). Veja na figura 5.35 a janela de visualização do GeoGebra.

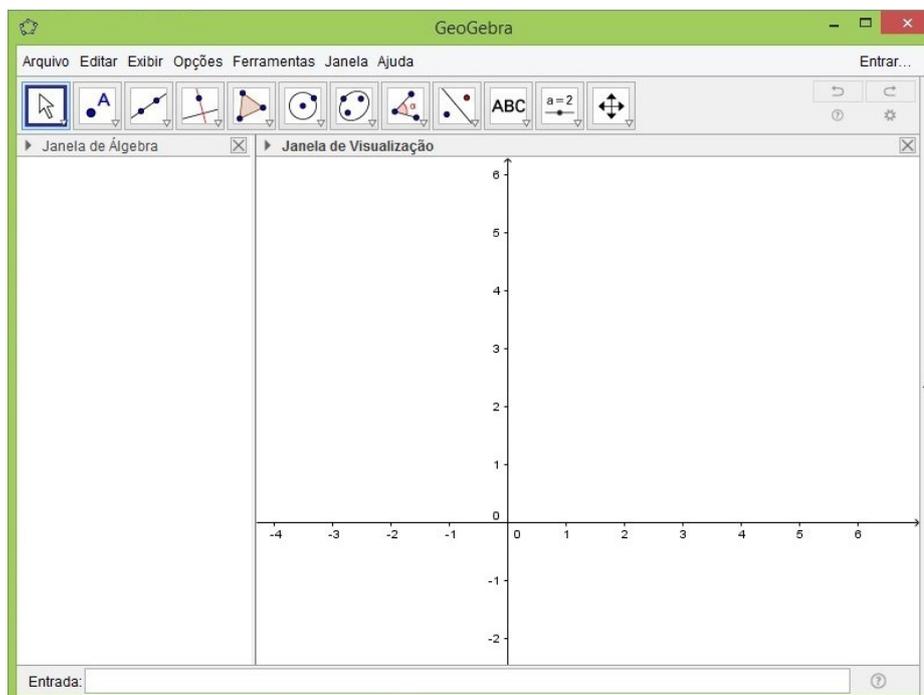


Figura 5.35: Janela de visualização do GeoGebra

Para se resolver o problema proposto, deve-se calcular, primeiramente, a área da superfície plana delimitada por  $x = 0$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ,  $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$ , através dos passos a seguir.

**Passo 1:** O aluno deve gerar a curva digitando  $y = -x^3 + 2x^2 + 3x$  no campo de "ENTRADA", e teclar ENTER. Para restringir essa curva ao intervalo  $[0, 3]$ , deve digitar  $Curva[u, f(u), u, 0, 3]$ . A segunda curva ficará sobreposta à primeira. Para excluir a figura da primeira, basta clicar sobre a curva e desabilitar a opção "exibir objeto". A figura obtida está representada em 5.36 a.

**Passo 2:** A curva será dividida em três intervalos. Para isso, deve-se marcar três pontos sobre a curva:  $A = (0.5, f(0.5))$ ,  $B = (1.5, f(1.5))$ ,  $C = (2.5, f(2.5))$ . O resultado está representado na figura 5.36 b.

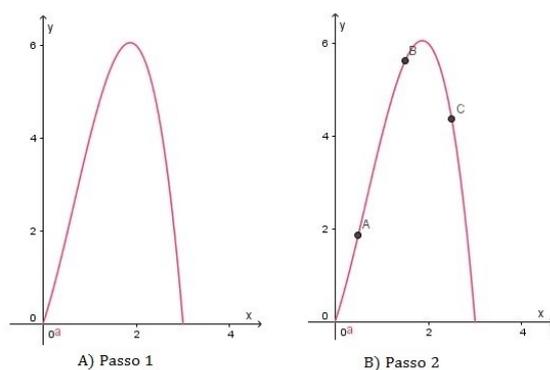


Figura 5.36: Passos 1 e 2

**Passo 3:** Deve-se construir retângulos de mesma largura, de modo que  $A$ ,  $B$  e  $C$  sejam pontos médios dos lados dos retângulos. Ou seja, marcar  $D = (0, f(0.5))$  e  $E = (1, f(0.5))$  e suas respectivas projeções no eixo  $X$  para que seja formado o primeiro retângulo. O resultado está na figura 5.37 a.

**Passo 4:** O aluno deve ter percebido no passo anterior que o ponto à esquerda de  $A$  tem mesma ordenada e a abscissa  $0,5$  unidade menor que a abscissa de  $A$ . Analogamente, o ponto à direita tem mesma ordenada e a abscissa  $0,5$  unidade maior. Assim, nesse passo, deve seguir da mesma forma para completar os retângulos que estão faltando. Veja figura 5.37 b.

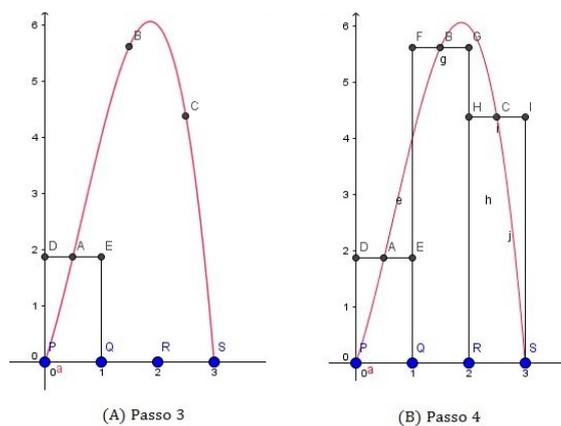


Figura 5.37: Passos 3 e 4

**Passo 5:** O aluno deve calcular a área dos três retângulos formados e somá-las. Essa soma será a área aproximada da área sob a curva. Fazendo os cálculos, o aluno encontrará o resultado 11,89 unidades de área.

**Passo 6:** Como a altura do cilindro é igual a 4, agora basta multiplicar 11,89 por 4, encontrando como resultado 47,56 unidades de volume. O professor deve explicar ao aluno que esse valor é aproximado. Em quanto mais retângulos for dividido o intervalo, maior a precisão da área da curva. Veja figura 5.38.

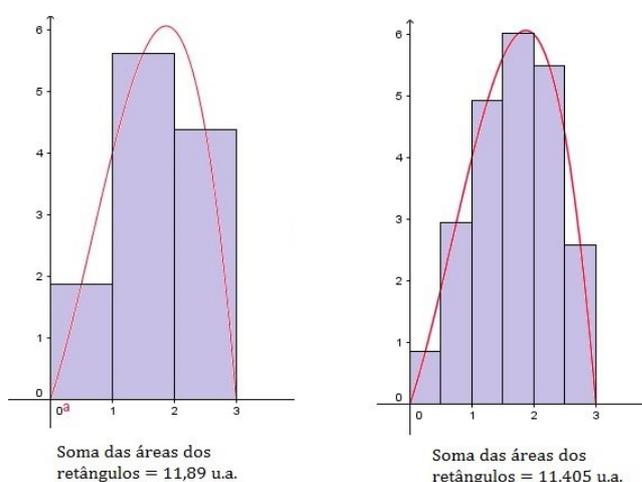


Figura 5.38: Resultado final da área

Como tarefa, o professor pode pedir ao aluno que faça a divisão da figura em seis intervalos, seguindo todos os passos. Como resultado, o aluno encontrará uma área de 11,405 u.a. e, finalmente, um volume de 45,62 u.v. Este resultado está mais próximo do real.

## 5.4.2 Usando o Riemann Sum

Riemann Sum [26], somas de Riemann em inglês, é uma calculadora de áreas sob curvas usando o famoso axioma. É um dos recursos do Wolfram.Alpha, um mecanismo de conhecimento computacional online capaz de resolver problemas de matemática, estatística, finanças, dentre outros.

O Riemann Sum pode ser acessado gratuitamente através do endereço eletrônico <http://mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html>. Na primeira janela deve digitar a função  $-x^3 + 2x^2 + 3x$ . Na próxima janela, o valor inicial de  $x$ , na outra, o valor final. Irá escolher a quantidade de retângulos, que pode ser de até 29, e plotar o gráfico. Vejo o resultado na figura 5.39.

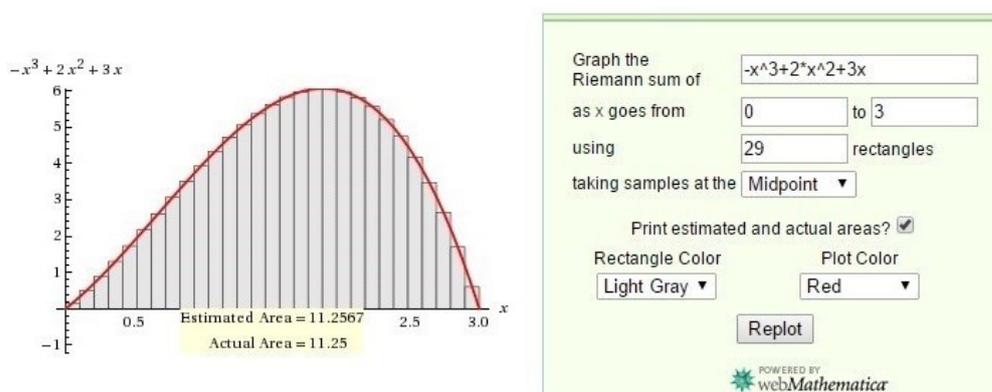


Figura 5.39: Área no Riemann Sum

Para 29 retângulos, aparece abaixo da figura plotada a área estimada de 11,2567 u.a. Essa é a soma das áreas dos retângulos. Aparece também a área real de 11,25 u.a. Assim, o volume aproximado, quando usados 29 retângulos, é de 45,0268 u.v. e o volume real é de 45 u.v.

Com esse programa, o aluno pode colocar a quantidade de retângulos que ele quiser e irá perceber o somatório das áreas dos retângulos se aproximando da área real sob a curva à medida em que se aumenta o número de retângulos. O aluno também poderá plotar o gráfico de outras figuras.

### 5.4.3 Usando a fórmula

No capítulo 3, Exemplo 3.16, foi deduzida uma fórmula para o cálculo do volume do cilindro reto nas seguintes condições:

**Definição 5.4.1 (Volume do cilindro):** *Seja um cilindro reto de altura  $h$  cuja base seja uma superfície delimitada pelo eixo  $x$  e pela curva  $f(x) =$*

$ax^3 + bx^2 + cx + d$ , tal que  $x \in [k_1, k_2]$ , de modo que não existam raízes de  $f(x)$  pertencentes a  $[k_1, k_2]$ , exceto, possivelmente,  $k_1$  ou  $k_2$ . O volume desse cilindro é dado pela fórmula

$$V = \left| h \left[ \left( \frac{ak_2^4}{4} + \frac{bk_2^3}{3} + \frac{ck_2^2}{2} + dk_2 \right) - \left( \frac{ak_1^4}{4} + \frac{bk_1^3}{3} + \frac{ck_1^2}{2} + dk_1 \right) \right] \right|. \quad (5.8)$$

A forma fatorada da função é  $f(x) = -x(x+1)(x-3)$ . Ou seja, as raízes de  $f(x)$  são  $-1, 0$  e  $3$ , De modo que duas de suas raízes são os extremos do intervalo. Assim, a fórmula 5.8 pode ser aplicada:

$$\begin{aligned} V &= \left| 4 \left[ \left( \frac{-1 \cdot 3^4}{4} + \frac{2 \cdot 3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 0 \cdot 3 \right) - \left( \frac{-1 \cdot 0^4}{4} + \frac{2 \cdot 0^3}{3} + \frac{3 \cdot 0^2}{2} + 0 \cdot 0 \right) \right] \right| \\ V &= \left| 4 \left( -\frac{81}{4} + 18 + \frac{27}{2} \right) \right| \\ V &= \left| 4 \cdot \frac{45}{4} \right| \\ V &= 45 \text{ u.v.} \end{aligned}$$

O professor pode propor aos alunos que calculem outros volumes usando a fórmula e conferindo os resultados no Riemann Sum. Seguem mais dois exemplos que podem ser aplicados em sala de aula.

**Exemplo 5.22.** Calcule o volume de um cilindro de altura  $h = 5$  cuja base é uma superfície delimitada pelo eixo  $x$  e pela curva  $g(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$  tal que  $x \in [1, 2]$ .

Solução: A forma fatorada da função é  $g(x) = (x^2+1)(x-3)$ , ou seja,  $g(x)$  possui apenas uma raiz real, que não pertence ao intervalo. Aplicando a fórmula 5.8, temos:

$$\begin{aligned} V &= \left| 5 \left[ \left( \frac{2^4}{4} + \frac{-3 \cdot 2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 3 \cdot 2 \right) - \left( \frac{1^4}{4} + \frac{-3 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) \right] \right| \\ V &= \left| 5 \left[ (4 - 8 + 2 - 6) - \left( \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) \right] \right| \end{aligned}$$

$$V = \left| 5 \cdot \left( -\frac{19}{4} \right) \right|$$

$$V = \frac{95}{4} \text{ u.v.}$$

Usando o Riemann Sum para conferir o resultado da área da base do cilindro, tem-se, conforme figura 5.40:

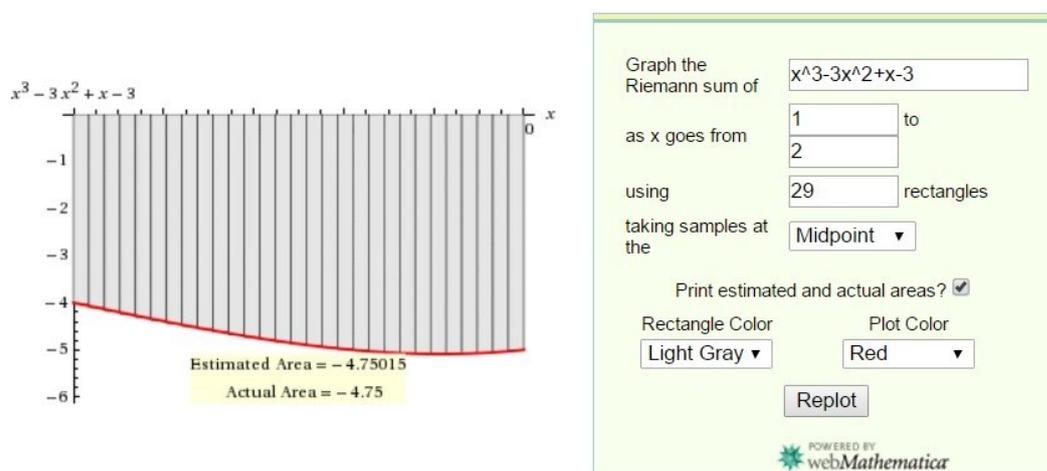


Figura 5.40: Área do Exemplo 5.22 no Riemann Sum

O aluno irá observar que o resultado da área gerada no Riemann Sum é negativo. Isso ocorre no programa porque a curva está abaixo do eixo  $x$ . Sendo assim, deve-se usar o módulo, já que a área não pode ser negativa.

Como a altura do cilindro é 5, o aluno irá efetuar  $V = 5 \times 4,75 = 23,75 = \frac{95}{4}$  u.v., conforme havia sido calculado pela fórmula 5.8.

**Exemplo 5.23.** Calcule o volume de um cilindro de altura  $h = 5$  cuja base é uma superfície delimitada pelo eixo  $x$  e pela curva  $y = x^3 - 3x^2 + x - 3$  tal que  $x \in [1, 5]$ .

Solução: Como visto no exemplo anterior, a curva possui uma raiz real,  $x = 3$ . Como  $3 \in [1, 5]$ , não se pode aplicar diretamente a fórmula 5.8. Uma alternativa será subdividir o intervalo em  $x \in [1, 3] \cup [3, 5]$  e somar os resultados.

Para o intervalo  $x \in [1, 3]$ , vem:

$$A = \left| 5 \left[ \left( \frac{3^4}{4} + \frac{-3 \cdot 3^3}{3} + \frac{3^2}{2} - 3 \cdot 3 \right) - \left( \frac{1^4}{4} + \frac{-3 \cdot 1^3}{3} + \frac{1^2}{2} - 3 \cdot 1 \right) \right] \right|$$

$$A = \left| 5 \left[ \left( \frac{81}{4} - 27 + \frac{9}{2} - 9 \right) - \left( \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} - 3 \right) \right] \right|$$

$$A = |5 \cdot (-8)| = 40 \text{ u.v.}$$

Calculando o volume no intervalo  $x \in [3, 5]$ , vem:

$$B = \left| 5 \left[ \left( \frac{5^4}{4} + \frac{-3 \cdot 5^3}{3} + \frac{5^2}{2} - 3 \cdot 5 \right) + \left( \frac{3^4}{4} + \frac{-3 \cdot 3^3}{3} + \frac{3^2}{2} - 3 \cdot 3 \right) \right] \right|$$

$$B = \left| 5 \left[ \left( \frac{625}{4} - 125 + \frac{25}{2} - 15 \right) - \left( \frac{81}{4} - 27 + \frac{9}{2} - 9 \right) \right] \right|$$

$$B = |5 \cdot (40)| = 200 \text{ u.v.}$$

Portanto, o volume total é  $V = 40 + 200 = 240$  unidades de volume. Agora, resolucionando a área no Riemann Sum, com  $x$  variando de 1 a 5, a área encontrada é 32. Multiplicando pela altura 5 do cilindro, obtemos 160 u.v., o que não corresponde com os cálculos feitos acima. Veja figura 5.41.

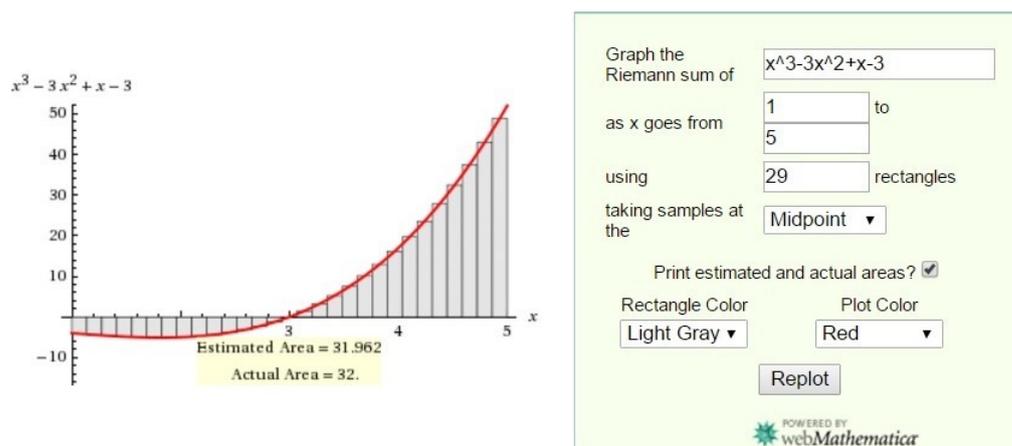


Figura 5.41: Área do Exemplo 5.23 no Riemann Sum

Porém, se os cálculos forem feitos separadamente, como na aplicação da fórmula, a primeira área encontrada será igual ao módulo de 8 e segunda área igual a 40. A soma é 48. Multiplicando pela altura 5 do cilindro, obtém-se o volume igual a 240, como havia sido calculado pela fórmula. Veja figura 5.42.

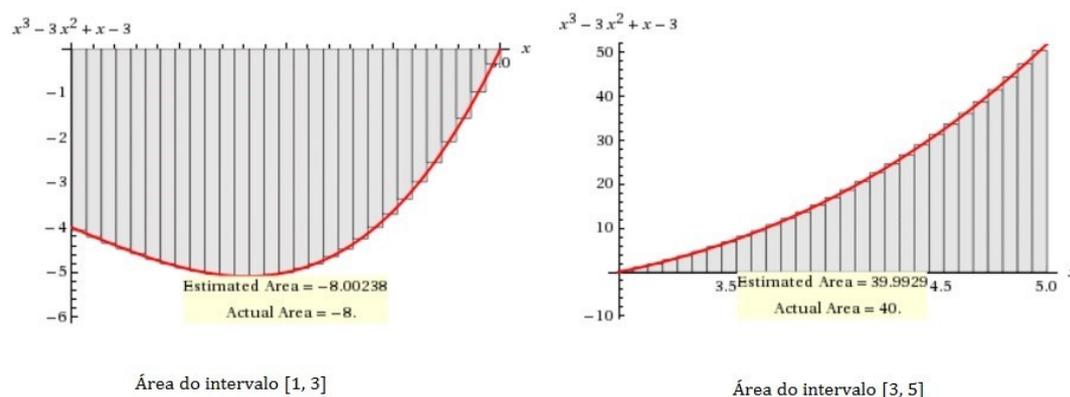


Figura 5.42: Área do Exemplo 3.23 no Riemann Sum

O erro do primeiro cálculo do Riemann Summ se deve ao fato de que o software não operacionaliza com módulo. Ao invés de somar 40 e 8, somou 40 e  $-8$ . Logo, tanto a fórmula quanto o Riemann Sum não calculam diretamente a área se a função possui alguma raiz no intervalo aberto. Assim, deve-se subdividir o intervalo de modo que não haja raízes nos subintervalos, exceto nos seus extremos.

## 5.5 Conclusão da atividade

Além de usar funções do terceiro grau, o professor pode elaborar atividades como essa usando outras curvas, como funções polinomiais, trigonométricas, exponenciais, dentre outras. Pode calcular, também, volumes de cones, e adaptar as atividades de acordo com o nível de conhecimento dos alunos.

Como forma de conclusão do trabalho, esses cilindros (e outros possíveis sólidos) podem ser construídos e serem feitas maquetes ou exposições.

Além disso, o professor pode fazer uso dos softwares em inúmeras outras atividades, levando mais tecnologia, criatividade e interatividade para as suas aulas de matemática.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Tendo em vista a importância da contextualização sócio-cultural na área da matemática, observa-se uma necessidade de adequação das aulas, tão teóricas, a fim de se aplicar os conhecimentos e métodos em situações reais, utilizando, por exemplo, recursos computacionais. Nesse sentido, esse trabalho teve, como objetivo, oferecer a alunos graduandos de cursos como Matemática, Física ou Engenharia e a professores de matemática um texto que facilite o estudo dos principais conceitos de Cálculo Diferencial e Integral de funções de duas variáveis, bem como algumas de suas aplicações.

Com texto conciso, diversos exemplos, ilustrações e - o mais importante - com um exemplo de aplicação do conteúdo (cálculo da área da asa de um avião), este trabalho busca servir como material de apoio na disciplina de Cálculo de duas variáveis, tanto para professores quanto para alunos, e também oferecer uma adaptação de conteúdo, possibilitando aplicação de uma atividade diferenciada no Ensino Médio.

Os softwares utilizados nesse trabalho são livres e de fácil utilização. O GeoGebra pode ser instalado pela internet em questão de minutos. Já o Riemann Sum e o Wolfram Alpha, são softwares online, ou seja, sem a necessidade de instalação. Essa acessibilidade possibilita maior dinamismo na aplicação da atividade proposta.

Espera-se que essa atividade sirva de inspiração a professores do Ensino Médio na elaboração de atividades de contextualização, de forma que o conteúdo extrapole o espaço da sala de aula, ao explorar o uso de tecnologias. Dessa forma, viabiliza-se o despertar de interesse dos alunos pela matemática e suas aplicações.

---

Para a realização desse trabalho, foi feito um longo estudo dos principais conceitos de Cálculo de duas variáveis através de várias obras, a fim de se compreender as demonstrações e definições e a fim de se chegar a uma padronização da escrita e a uma sequência lógica na construção dos conceitos. Foi feita também uma pesquisa detalhada sobre a história da Matemática no âmbito da Geometria, com o objetivo de mostrar a evolução científica nos cálculos de áreas e volumes.

A partir desse estudo, concluímos que é cada vez mais necessário e importante contextualizar os conteúdos e inserir recursos computacionais às práticas de ensino. Observamos, também, que para que isso ocorra, é preciso que o professor se empenhe em uma pesquisa que se inicia no contexto histórico e deve abranger problemas do cotidiano e uso de tecnologias.

# APÊNDICE

## Referências das figuras

A figura 2.2 foi retirada da fonte [5]; a figura 2.3, da fonte [1]; a 2.4, da fonte [15]; a 4.24, de [18] e a figura 4.25, da fonte [22], com adaptações.

As figuras 4.28 e 4.30 foram geradas a partir da fonte [25].

As figuras 5.39, 5.40, 5.41 e 5.42 foram geradas a partir da fonte [26].

As demais figuras foram geradas a partir do software GeoGebra.]

## Referências Bibliográficas

- [1] BLOGSPOST. **A tutta matemática**. Disponível em:  
<<http://atuttamatematica.blogspot.com.br>>. Acesso em: 26 abr. 2016.
- [2] BUSSAB, W. O.; HAZZAN, S.; MORETTIN, P. A. **Cálculo: Funções de uma e várias variáveis**. São Paulo: Saraiva, 2010.
- [3] CENTRO CIENTÍFICO CONHECER. **Curso de cálculo. módulo 3: Derivadas**. Centro científico conhecer. Disponível em:  
<<http://www.conhecer.org.br/download/cp/CURSO%20CALCULO/Modulo%203.pdf>> Acesso em 27 fev. 2016.
- [4] DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 4. ed. Rio de Janeiro: Ática, 2011. 736 p.
- [5] DWELLING in the word. Disponível em:  
<<https://dwellingintheword.wordpress.com>>. Acesso em: 19 abr. 2016.
- [6] GASPAR, M. T.; MAURO, S. **Explorando a geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática**. Disponível em:  
<<http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/07/MC10721746500.pdf>>. Acesso em 26 fev. 2015.
- [7] GONÇALVES, M. S.; FLEMMING, D. V. **Cálculo A: Funções, limite, derivação, integração**. 6. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2007. 617 p.
- [8] \_\_\_\_\_. **Cálculo B: Funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007. 435 p.
- [9] GONÇALVES, R. M. M. **Notas de aula de funções de várias variáveis**. São Luís: UEMA, 2011. 47 p.
- [10] LIMA, E. L. et al. **A matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2004, v. 2. 308 p.

- [11] LUÍS, F. **Cálculo no Ensino Médio**: área sob o gráfico de uma curva. 2013. 59 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro. Disponível em: <[http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho\\_conclusao\\_curso/2013/fabio\\_luis.pdf](http://www.impa.br/opencms/pt/ensino/downloads/PROFMAT/trabalho_conclusao_curso/2013/fabio_luis.pdf)>. Acesso em: 15 mai. 2016.
- [12] MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>> Acesso em 02 mai. 2016.
- [13] MOL, R. S. **Introdução à História da Matemática**. Belo Horizonte: CAED - UFMG, 2014. 140 p.
- [14] NUNES, J. M. V. **História da matemática e aprendizagem significativa da área do círculo**: uma experiência de ensino-aprendizagem. 2007. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Núcleo Pedagógico de apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém. 2007.
- [15] PAPIRO DE MOSCOVO. Disponível em: <<http://webpages.fc.ul.pt/~ommartins/seminario/rhind/moscovo.htm>>. Acesso em 12 mai. 2016.
- [16] PINTO, D.; MORGADO, M.C.F. **Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis**. Rio de Janeiro: UFRJ, 2014. 364 p.
- [17] RODRIGUES, L. E. M. J.; DANTAS, L. C. Configurações e Dimensionamento da Empenagem. **Revista Eletrônica AeroDesign Magazine**, São Paulo, 2010, v. 2. Disponível em: <<http://www.engbrasil.eng.br/revista/v212010/artigos/artigo11v212010.pdf>>. Acesso em: 08 abr. 2016.
- [18] RC AIRCRAFT DESIGNING, BUILDING, & FLYING. Disponível em: <<http://stenulson.net/rcflight/index.htm>>. Acesso em 20 jul. 2016.
- [19] ROGÉRIO, M. U.; SILVA, H. C.; BADAN, A. A. F. A. **Cálculo diferencial e integral**: funções de uma variável. Goiânia: UFG, 2008. 343 p.
- [20] SIMMONS, G. F. **Cálculo com Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson, 1996, v. 2. 828 p.

- [21] SILVA, A. A.; MATOS, M. P. **Cálculo de várias variáveis**. Paraíba: UFPB - CCEN, Departamento de Matemática. Disponível em: <<http://www.mat.ufpb.br/hinojosa/disciplinas/2012-2/Calculo%20III/Calculo-III%20Andrade-Marivaldo.pdf>>. Acesso em 02 dez. 2015.
- [22] Simulation Analysis and Material Optimization of an Aircraft Wing Leading Edge When Subjected to an Artificial Bird Strike. Disponível em: <<http://computationalnonlinear.asmedigitalcollection.asme.org/article.aspx?articleid=2089736>>. Acesso em 20 jul. 2016.
- [23] VILCHES, M. A.; CORRÊA, M. L. **Cálculo**: volume II. Rio de Janeiro: Departamento de Análise - IME. UERJ. Disponível em: <<http://www.ime.uerj.br/calculo/pdfpsiuII.html>>. Acesso em 06 jan. 2016.
- [24] WIKIPÉDIA. A enciclopédia livre. **Arrasto**. Disponível em <<https://pt.wikipedia.org/wiki/Arrasto>>. Acesso em 02 mai. 2016.
- [25] WOLFRAM ALPHA. **Online Integral Calculator**. Disponível em <<http://www.wolframalpha.com/calculators/integral-calculator/>>. Acesso em 10 mar. 2016.
- [26] WOLFRAM MATH WORLD. **Riemann Sum**. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/RiemannSum.html>>. Acesso em 02 mar. 2016.