



Universidade Federal do Triângulo Mineiro  
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional -  
PROFMAT

**Equações Diferenciais Ordinárias: uma  
proposta de aplicação em problemas de  
vazão e mistura de fluidos.**

por

**Alexandre da Silva Pedroso**

Uberaba - MG

2016

Universidade Federal do Triângulo Mineiro

# **Equações Diferenciais Ordinárias: uma proposta de aplicação em problemas de vazão e mistura de fluidos.**

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA

por

**Alexandre da Silva Pedroso**

**Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza**

12 de Agosto de 2016

**Catálogo na fonte: Biblioteca da Universidade Federal do  
Triângulo Mineiro**

P415e      Pedroso, Alexandre da Silva  
Equações diferenciais ordinárias: uma proposta de aplicação em problemas de vazão e mistura de fluidos / Alexandre da Silva Pedroso. -- 2016.  
53 f. : il., fig., graf., tab.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)  
-- Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Uberaba, MG, 2016  
Orientador: Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza

1. Equações diferenciais ordinárias. 2. Teoremas de existência. 3. Solução de problemas. I. Souza, Bruno Nunes de. II. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. III. Título.

CDU 517.91

Universidade Federal do Triângulo Mineiro

# Equações Diferenciais Ordinárias: uma proposta de aplicação em problemas de vazão e mistura de fluidos.

por

Alexandre da Silva Pedroso

*Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT, da Universidade Federal do Triângulo Mineiro como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de*

**MESTRE EM MATEMÁTICA**

12 de Agosto de 2016

Comissão Examinadora:

  
Prof. Dr. Bruno Nunes de Souza (UFTM)

  
Profa. Dra. Adriana de C. Inforzato (UFTM)

  
Profa. Dra. Thaynara Arielly de Lima (UFG)

”A memória guarda também as relações e inumeráveis leis dos números e dimensões, sendo que nenhuma dessas ideias foi impressa em nós pelos sentidos do corpo, porque não têm cor, nem som, nem têm cheiro, nem gosto, nem são tangíveis. Ouço, quando delas se fala, os sons das palavras que as exprimem; mas uma coisa são os sons, e outra bem diferente são as ideias que eles significam. As palavras soam de modo diferente em grego e em latim; mas as ideias nem são gregas, nem latinas, nem de nenhuma outra língua.”

*Confissões, de Santo Agostinho.*

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus.

Agradeço ao meu orientador Bruno pela paciência e por dividir comigo seus conhecimentos.

Aos professores da banca: Thaynara e Adriana, pelos conselhos importantíssimos e contribuições para melhoria do presente trabalho.

Agradeço aos meus pais, Benedito e Gildete, pelos exemplos de vida e honestidade.

Agradeço aos amigos que foram meus companheiros nessa jornada de dois anos e meio em que buscamos um sonho comum em que nos ajudamos muito.

# Resumo

Neste trabalho estudaremos duas modelagens matemáticas para aplicações das equações diferenciais

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

tal que o problema de valor inicial possui a condição inicial

$$y(x_0) = y_0$$

em que  $x_0$  pertença a um intervalo dado. Queremos aplicar as equações diferenciais no problema da determinação da superfície da clepsidra egípcia e o comportamento de uma mistura de fluidos, para isso utilizaremos o teorema de existência e unicidade para solução de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

Palavras-chave: problema de valor inicial. solução geral. solução particular. clepsidra.

# Abstract

In this study we are going to analyse two mathematical models for applications of differential equations

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

given the initial value problem for the initial condition

$$y(x_0) = y_0$$

where  $x_0$  belongs to a given interval. We want to apply the differential equations in the problem of determining the area of the Egyptian clepsydra and the behavior of a mixture of fluids, for that, we are gone to use the theorem of existence and uniqueness to solve of ordinary differential equations of first order.

Keywords: initial value problem. general solution. particular solution. clepsydra.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>8</b>
<b>1 Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis</b>	<b>13</b>
1.1 Equação Diferencial de Variáveis Separáveis . . . . .	13
1.2 Equação Diferencial de Variáveis Separáveis Exata . . . . .	14
1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem . . . . .	15
<b>2 Relógio d'água</b>	<b>21</b>
2.1 Recipiente Cilíndrico . . . . .	21
2.2 Recipiente Cônico . . . . .	26
2.3 Recipiente com um formato qualquer . . . . .	29
<b>3 Mistura de Fluidos</b>	<b>33</b>
3.1 Concentração de Sal em um Tanque D'água . . . . .	33
<b>4 Existência e Unicidade de Solução</b>	<b>41</b>
<b>5 Considerações Finais</b>	<b>49</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>50</b>
<b>Apêndice B</b>	<b>52</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# Introdução

O presente estudo tem como motivação o desejo de aperfeiçoamento e o gosto pelo Cálculo Diferencial provocado pelas aulas de Cálculo I ainda na graduação. Nessa perspectiva estudaremos as Equações Diferenciais e algumas de suas aplicações por meio de modelagem matemática.

Antes de falarmos do trabalho podemos elencar alguns acontecimentos históricos do desenvolvimento da Matemática, os quais nos possibilitou obter ferramentas matemáticas avançadas para descrever fenômenos por meio de uma linguagem científica, o que nos proporcionou uma visão de como as variáveis de um dado fenômeno se comportam com o passar do tempo. Vale lembrar que foi principalmente nos séculos XVII e XVIII que tivemos as principais referências para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Iniciemos falando de Isaac Newton. Acredita-se que durante o período em que Londres era assolada pela peste bubônica nos anos de 1665 e 1666, quando Newton voltou para a casa onde nascera para fugir da peste e desenvolveu seu método para resolver problemas de Cálculo. Nesse período, Newton também compreendeu a importância da gravitação universal e fez suas descobertas acerca da composição da luz branca [8].

Newton utilizou-se do seu método das fluxões, como ele mesmo chamava, o que hoje pra nós é o Cálculo Diferencial para aplicar em diversos problemas, tais como, determinar máximos e mínimos, retas tangentes a curvas, curvaturas de curvas, pontos de inflexão e convexidade e concavidade de curvas, aplicando também a quadraturas e ratificações de curvas, demonstrando exímia habilidade para encontrar soluções de equações diferenciais através de integração [3].

Na mesma época, o filósofo e matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz também fez várias descobertas acerca do cálculo, chegando às mesmas conclusões [2], embora com objetivos e motivações diferentes. Atribui-se a Leibniz a notação  $\frac{dy}{dx}$  que usamos nas equações diferenciais.

Em 1672 Leibniz já havia desenvolvido grande parte de sua notação para o cálculo, descoberto o Teorema Fundamental do Cálculo e várias fórmulas elementares de diferen-

ciação [3].

Após as descobertas de Newton e Leibniz no século XVIII vários matemáticos se dedicaram ao estudo das equações diferenciais, segundo Eves [3], várias contribuições foram dadas pela família Bernoulli, Abraham De Moivre, Brook Taylor, Colin Maclaurin, Leonhard Euler, Alexis Claude Clairaut, Jean-le-Rond d'Alambert, Johann Heinrich Lambert, Joseph Louis Lagrange, Pierre-Simon Laplace, Adrien-Marie Legendre, Gaspard Monge e Lazare Carnot, dentre eles vamos destacar as contribuições de alguns.

Os irmãos Jakob Bernoulli e Johann Bernoulli também contribuíram bastante para o desenvolvimento do Cálculo, ambos mantiveram contato constante com Leibniz por cartas, em que discutiam e propunham problemas para serem resolvidos com os recursos do cálculo *summatorius*, como era chamado por Leibniz e mais tarde foi proposto por Jakob em um artigo o nome de *cálculo integralis*. Dentre as contribuições dos irmãos Bernoulli temos os estudos de várias curvas tais como a cicloide, que é uma curva determinada por um ponto em uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta, sua equação foi corretamente demonstrada por Johann.

Jakob também contribuiu com o uso de coordenadas polares para determinação de curvas planas, o estudo da catenária para fios de densidade variável e fios sob a ação de uma força central. Estudou também a isócrona, curva ao longo da qual um corpo cai sob velocidade constante.

Johann Bernoulli teve três filhos que também se dedicaram ao estudo da matemática e a lecionar. Dentre eles o mais promissor era Nicolaus, que escreveu sobre curvas, equações diferenciais e probabilidade, mas este veio a falecer precocemente por afogamento.

No início do século XVIII os matemáticos Brook Taylor e Colin Maclaurin foram os britânicos mais promissores no campo da Matemática, ambos empregaram tempo no estudo da expansão de funções e das séries de potências, dentre elas temos o Teorema de Expansão de Taylor.

Maclaurin deu continuidade ao estudo começado por Newton e Stirling sobre as curvas planas e a série conhecida pelo seu nome nada mais é do que a série de Taylor para  $a = 0$ . Já em seu tratado sobre as fluxões ele estudou sobre a atração mútua de dois elipsóides de revolução.

Embora Taylor tenha desenvolvido seu teorema para expansão em 1715, este só obteve o reconhecimento de sua importância em 1755 quando Euler o aplicou ao cálculo diferencial e um pouco mais tarde quando Lagrange usou a série com um resto como base de sua teoria das funções.

Temos ainda o matemático francês Alexis Claude Clairaut, nascido em Paris em 1713. Tendo publicado um tratado sobre curvas de terceira ordem, Clairaut se revelou um dos matemáticos mais precoce de todos os tempos. Posteriormente foi o mais jovem a ocupar um lugar na Academia de Ciências da França com apenas dezoito anos devido a este trabalho e um outro em que tratou de geometria diferencial de curvas reversas no espaço. Em 1752 Clairaut ganhou um prêmio da Academia de São Petersburgo com um estudo matemático sobre o movimento lunar, o qual ele aplicou o processo de diferenciação à equação

$$y = px + f(p), \quad p = \frac{dx}{dy},$$

conhecida como equação de Clairaut.

Dentre esses acontecimentos citados do século XVIII sucederam-se vários outros de igual importância para o desenvolvimento da Matemática nos séculos seguintes até os dias atuais. Grande parte do desenvolvimento das Equações Diferenciais tem como finalidade a aplicação da Matemática à Física, daí o termo utilizado para tais estudos de Física Matemática, bastante difundidos atualmente.

Na perspectiva de compreender o desenvolvimento científico da Matemática observamos que a "ciência é uma atividade essencialmente desenvolvida pelo ser humano que procura entender a natureza por meio de teorias adequadas" [1]. Essas teorias geram modelos matemáticos e estes modelos como produto do desenvolvimento e maturação do pensamento humano nos diz como determinados elementos de um sistema, seja ele estático, ou dinâmico, se comportam com o decorrer do tempo.

Bassanezi [1] chama de modelo matemático a um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. Os modelos matemáticos constituem um campo riquíssimo de estudo e aplicação da Matemática.

Ainda discutindo os modelos matemáticos, que na maior parte das vezes são descritos por meio de equações diferenciais, vale salientar que tais modelos podem ser divididos entre os modelos empíricos e modelos teóricos. De acordo com Gondar [5] os modelos empíricos têm, como ponto de partida, um processo sistemático de medição donde tiram-se conclusões e formula-se equações que vinculam as grandezas envolvidas. Já os modelos teóricos são pautados por hipóteses, ficando sujeito às leis e restrições por elas impostas.

Os modelos matemáticos podem ser utilizados em diversos campos da ciência, tais como, a Física, a Biologia, a Química, a Sociologia, o Mercado de Capitais, a Astronomia, a Saúde e os mais variados campos do conhecimento humano, que podem ser descritos por uma Equação Diferencial ou um Sistema de Equações Diferenciais.

Dada a importância e aplicabilidade da Matemática através dos modelos que representam fenômenos ligados a tantos ramos do conhecimento é sugerido por Bassanezi que em cursos de formação de professores possam ser discutidos vários tópicos de Modelagem Matemática afim de enfatizar aplicações matemáticas através das técnicas de modelagem para desenvolver no futuro professor capacidades e atitudes criativas na resolução de problemas desenvolvendo o espírito crítico e a capacidade de entender e interpretar a Matemática em todas as suas facetas [1].

Para iniciar o estudo de modelagem matemática, Bassanezi [1] sugere que se comece pelos modelos clássicos mais simples a fim de proporcionar melhor compreensão do processo de modelagem e aumento gradual na capacidade de aplicar a Matemática a modelos mais complexos.

Dentre os modelos clássicos, podemos destacar o modelo determinístico de populações proposto em 1798 pelo economista inglês T. R. Malthus, conhecido como modelo malthusiano que tinha por objetivo prever o crescimento da população humana. Seu estudo é recomendado pela simplicidade do modelo devido ao pequeno número de variáveis que influenciam o crescimento da população.

Segundo o modelo malthusiano, o número  $P$  de indivíduos em uma população está em função do tempo  $t$  e pode ser descrito por

$$\frac{dP}{dt} = KP(t).$$

Existem também os modelos de interação entre espécies, dentre eles destacamos o modelo presa predador, que apareceu em 1925 com Lotka e Volterra. O modelo Lotka-Volterra trata da interação entre duas espécies, em que uma delas serve de alimento (presa) para a outra (predador) que tem como alimento exclusivo a população de presas.

De modo simplificado, o modelo Lotka-Volterra é descrito por um sistema de duas equações diferenciais que relaciona a taxa de variação de presas com a diferença entre aumento natural das presas e as presas abatidas pelos predadores. Na outra equação, temos a taxa de variação de predadores que é dada pela diferença entre o aumento na população causado pelo alimento disponível e pela morte natural na ausência de um predador natural

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} = -\alpha y + \beta xy \end{cases}$$

em que  $x$  é a população de presas,  $y$  a população de predadores e  $a, b, \alpha, \beta$  são constantes positivas.

A Lei de Resfriamento de Newton é um modelo matemático que diz que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio em que o corpo se encontra. Supondo que  $T(t)$  seja a temperatura do corpo no instante  $t$  e  $T_m$  a temperatura do meio, a lei de resfriamento pode ser descrita por

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m),$$

em que  $k$  é uma constante de proporcionalidade.

Na perspectiva de estudar modelos matemáticos, em nosso estudo tratamos de dois problemas que foram traduzidos por modelos matemáticos: o problema da clepsidra egípcia (relógio d'água) e o problema da mistura de soluções com diferentes concentração de sal.

Considerando que sejam necessários alguns métodos para encontrar a solução de Equações Diferenciais, trataremos no primeiro capítulo das Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis e das Equações Diferenciais que podem ser resolvidas com o auxílio de uma fator integrante.

No segundo capítulo estudamos o problema da clepsidra egípcia que consiste em um conjunto de dois recipientes sobrepostos, no recipiente de cima coloca-se água e esta escoar por um orifício em sua porção inferior de modo que a coluna d'água baixa linearmente com o passar do tempo. Nosso objetivo é determinar qual o formato da superfície que permite tal comportamento.

Já no terceiro capítulo, temos um problema de uma mistura de água e certa concentração de sal em um tanque que recebe outra mistura com concentração diferente de sal ao mesmo tempo que escoar a mistura formada. Estudaremos como se comporta a concentração de sal na mistura formada no tanque.

Já no quarto capítulo, temos um estudo acerca da solução de uma Equação Diferencial. Queremos nesta etapa, mostrar que uma Equação Diferencial  $\frac{dy}{dt} = f(y, t)$  tem solução e que, quando impomos uma condição inicial  $y(t_0) = y_0$  temos o que chamamos de Problema de Valor Inicial, esta solução é única. Faremos isso demonstrando o Teorema de Existência e Unicidade da Solução de Equações Diferenciais.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

### 1.1 Equação Diferencial de Variáveis Separáveis

Seja  $F : \Omega \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de duas variáveis. A equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

é dita de variáveis separáveis sempre que for possível escrever a função de duas variáveis  $F(x, y)$  da forma

$$F(x, y) = \frac{g(x)}{h(y)},$$

em que  $g$  e  $h$  são duas funções reais integráveis. A equação acima seria de fácil resolução se pudéssemos escrevê-la sob a forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \implies h(y)dy = g(x)dx,$$

para depois integrarmos ambos os lados da igualdade acima, primeiro com relação a variável  $y$  e do lado direito da igualdade com relação à variável  $x$ .

No entanto, a expressão

$$\frac{dy}{dx}$$

não se trata, a princípio, de um quociente, mas sim de uma notação (de Leibniz), que representa a derivada da função  $y$  com respeito à variável  $x$ .

No entanto, podemos utilizar um pouco de teoria matemática para verificar que de fato a notação de Leibniz faz sentido, ou seja, podemos olhar para a expressão  $\frac{dy}{dx}$  de fato como um quociente.

Observemos inicialmente que a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$$

pode ser reescrita sob a forma:

$$h(y) \frac{dy}{dx} = g(x). \quad (1.1)$$

Se  $y = f(x)$ , então o lado esquerdo da equação acima é o mesmo que

$$h(f(x)) \frac{df}{dx}(x).$$

Assim, substituindo a igualdade acima na Equação (1.1) e integrando ambos os lados, temos que

$$\begin{aligned} h(f(x)) \frac{df}{dx}(x) &= g(x), \\ \int h(f(x)) \frac{df}{dx}(x) dx &= \int g(x) dx + c. \end{aligned}$$

Mas uma mudança de variável na última integral do tipo

$$y = f(x) \Rightarrow h(f(x)) \frac{df}{dx}(x) dx = h(y) dy,$$

donde concluímos que

$$\int h(y) dy = \int g(x) dx + c, \quad (1.2)$$

da maneira como gostaríamos.

## 1.2 Equação Diferencial de Variáveis Separáveis Exata

A equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

é dita de variáveis separáveis sempre que for possível reescrevê-la na forma

$$M(x) + N(y) \frac{dy}{dx} = 0 \quad (1.3)$$

em que  $M(x) = -f(x, y)$  e  $N(y) = 1$ . Podemos ainda escrever a Equação 1.3 na forma diferencial

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (1.4)$$

que podemos resolver de forma direta integrando  $M$  e  $N$ .

Sejam  $H_1$  e  $H_2$ , duas primitivas quaisquer de  $M$  e  $N$ , respectivamente. Logo

$$H_1'(x) = M(x), \quad H_2'(y) = N(y). \quad (1.5)$$

Substituindo 1.5 na Equação 1.3,

$$H_1'(x) + H_2'(y) \frac{dy}{dx} = 0. \quad (1.6)$$

Se  $y$  é função de  $x$ , aplicamos a regra da cadeia, e então

$$H_2'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy} H_2(y) \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} H_2(y)$$

e consequentemente, podemos escrever 1.6 como

$$\frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] = 0$$

que integramos

$$\int \frac{d}{dx} [H_1(x) + H_2(y)] dx = 0$$

e obtemos

$$H_1(x) + H_2(y) = c \quad (1.7)$$

em que  $c$  é uma constante arbitrária. Dizemos que a Equação (1.7) é uma solução implícita de (1.3), que pode ser obtida de forma prática integrando as parcelas da Equação (1.4),  $M(x)$  em relação a  $x$  e  $N(y)$  em relação a  $y$ , obtendo

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = H_1(x) + H_2(y) = c.$$

### 1.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

A forma geral das equações diferenciais lineares de primeira ordem é a seguinte

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \quad (1.8)$$

em que  $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  e  $q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções reais contínuas definidas em um intervalo aberto  $(a, b)$ . Uma função  $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução de (1.8) se ela for diferenciável e satisfizer a equação. No estudo da equação acima aparecem dois problemas básicos:

(i) obter a solução geral da equação, isto é, uma expressão que englobe todas as suas soluções; (ii) obter a solução do problema de valor inicial (PVI)[4]

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.9)$$

em que  $x_0 \in (a, b)$  e  $y_0$  são dados iniciais.

**Caso 1:** Uma das equações diferenciais mais simples que veremos é a equação de crescimento exponencial [4]

$$\frac{dy}{dx} = ky, \quad (1.10)$$

em que  $k$  é uma constante. Esse tipo de equação aparece em diversas aplicações tais como o estudo de crescimento populacional, modelos presa predador, corpo em queda livre, sistemas massa-mola, pêndulo simples, corda giratória, circuitos em série, esfriamento de Newton, cabo suspenso e deflexão de vigas. Vamos encontrar uma solução geral para (3.3). Para tal, a partir da equação

$$\frac{dy}{dx} = ky$$

escreveremos simplesmente

$$y' = ky$$

e equivalentemente

$$\frac{y'}{y} = k.$$

Observe que a equação acima pode ser reescrita sob a forma

$$\frac{d}{dx} \ln |y(x)| = k,$$

uma vez que a igualdade acima é verdadeira devido à regra da cadeia. Integrando ambos os lados da equação, obtemos

$$\begin{aligned} \int \frac{d}{dx} \ln |y(x)| dx &= k \int dx, \\ \ln |y(x)| &= kx + c_1 \end{aligned}$$

em que  $c_1$  é uma constante de integração arbitrária. Assim, aplicando exponencial em ambos os lados da equação acima, teremos

$$\begin{aligned} e^{\ln |y|} &= e^{kx+c_1} \\ |y(x)| &= e^{kx} e^{c_1} \end{aligned}$$

então

$$y(x) = ce^{kx}$$

é solução geral da equação (1.10), em que  $c = \pm e^{c_1}$ .

Vamos encontrar agora uma solução para o problema de valor inicial.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = ky, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.11)$$

Como  $y(x) = ce^{kx}$  é solução geral da equação (1.10), para a condição inicial dada  $y(x_0) = y_0$ , podemos determinar a constante  $c$  para alcançarmos uma solução única para (1.10). Assim, teremos

$$y(x_0) = ce^{kx_0} = y_0.$$

Logo, o valor da constante é dado por

$$c = y_0 e^{-kx_0}$$

e assim, portanto

$$y(x) = y_0 e^{k(x-x_0)}$$

é a única solução do problema de valor inicial (1.11).

**Caso 2:** Agora, queremos encontrar uma solução geral para

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y \quad (1.12)$$

ou seja, quando  $p(x)$  não é constante e  $q(x) = 0$ . Utilizando o método de separação de variáveis, escrevemos a Equação (1.12) como

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx,$$

e integramos ambos os lados da equação para obtermos

$$\ln |y| = \int p(x)dx + c_1$$

em que  $c_1$  é uma constante arbitrária de integração. Assim, aplicando exponencial em ambos os lados da igualdade acima, temos

$$e^{\ln |y|} = e^{\int p(x)dx + c_1}$$

que nos dá

$$|y(x)| = e^{c_1} e^{\int p(x)dx},$$

ou seja,

$$y(x) = ce^{\int p(x)dx},$$

em que  $c = \pm e^{c_1}$ , que é solução geral da equação (1.12).

Vamos encontrar uma solução para o PVI a seguir

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = p(x)y, \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (1.13)$$

Como  $y(x) = ce^{\int p(x)dx}$  é solução geral da equação (1.12), utilizando as condições iniciais, escrevemos

$$y(x_0) = ce^{\int_0^{x_0} p(s)ds}$$

e assim

$$c = y_0 e^{-\int_0^{x_0} p(s)ds}$$

que substituindo na Equação (1.12) e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo como descrito no Apêndice A, obtemos

$$\begin{aligned} y(x) &= y_0 e^{-\int_0^{x_0} p(s)ds} e^{\int_0^x p(s)ds} \\ &= y_0 e^{\int_0^x p(s)ds - \int_0^{x_0} p(s)ds} \\ &= y_0 e^{\int_{x_0}^x p(s)ds} \end{aligned}$$

que é solução do problema de valor inicial (1.13).

**Caso 3:** Para encontrarmos a solução do PVI (1.9), com  $p$  e  $q$  sendo funções contínuas no intervalo  $(a, b)$ , suponhamos inicialmente que o problema de valor inicial possua solução. Para isso multiplicamos ambos os lados da equação

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

por uma função  $\mu(x)$  que chamaremos de fator de integrante, e assim

$$\mu(x) \frac{dy}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x).$$

Observando a seguinte relação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[y\mu(x)] &= \frac{dy}{dx}\mu(x) + y \frac{d\mu}{dx} \\ \mu(x) \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}[y\mu(x)] - y \frac{d\mu}{dx} \end{aligned}$$

e substituindo na equação anterior, temos

$$\frac{d}{dx}[y\mu(x)] - y\frac{d\mu}{dx} + \mu(x)p(x)y = \mu(x)q(x)$$

e fazendo

$$-y\frac{d\mu}{dx} + \mu(x)p(x)y = 0 \iff \frac{d\mu}{dx} = \mu(x)p(x)$$

e assim, observando que a equação anterior é separável, escrevemos

$$\begin{aligned}\frac{d\mu}{\mu} &= p(x)dx \\ \mu(x) &= ce^{\int p(x)dx}\end{aligned}$$

que fazendo  $c = 1$ , obtemos

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}.$$

A função  $\mu(x)$  encontrada é um fator de integração para a equação diferencial linear do PVI (1.9).

Multiplicando a equação pelo fator de integração  $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$  encontrado, obtemos

$$e^{\int p(x)dx}\frac{dy}{dx} + p(x)e^{\int p(x)dx}y = e^{\int p(x)dx}q(x)$$

e como o primeiro membro é igual à derivada do produto  $e^{\int p(x)dx}y$ , escrevemos

$$\frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx}y] = e^{\int p(x)dx}q(x)dx$$

e integrando os dois lados da equação, obtemos

$$e^{\int p(x)dx}y = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1$$

em que  $c_1$  é uma constante arbitrária, desse modo, obtemos

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1]$$

que é a solução geral da equação.

Para o problema de valor inicial (1.9) encontramos uma solução para as condições iniciais. Como

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1]$$

é solução geral de

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x),$$

obtemos

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds} \left[ \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{x_0}^s p(s)ds} ds + c \right]. \quad (1.14)$$

A Equação (1.14) nos permite obter a solução do PVI, constituído pela Equação (1.8) e da condição inicial  $y(x_0) = y_0$ , bastando fazer a substituição  $c = y_0$  [7] e obtendo

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(s)ds} \left[ \int_{x_0}^x q(s) e^{\int_{x_0}^s p(s)ds} ds + y_0 \right].$$

# Capítulo 2

## Relógio d'água

As clepsidras (relógios d'água) já eram utilizadas por volta do ano 100 a.C. no Império Romano para medição de tempo. As clepsidras consistem em um recipiente com graduação em suas paredes laterais, que possibilitam que se possa medir o tempo através da altura da coluna de água que diminui linearmente com o tempo através da vazão por um orifício que é feito na parte inferior do recipiente.

Neste capítulo vamos determinar o formato que deve ter a superfície de uma clepsidra, para que a coluna de água contida em seu interior tenha uma taxa de variação constante, ou seja, em intervalos de tempo iguais a altura da coluna de água varia na mesma medida.

### 2.1 Recipiente Cilíndrico

Vamos inicialmente verificar se o recipiente que possui a propriedade de que a altura da coluna do líquido contido em seu interior possa variar linearmente com o tempo ao assumir que este escoar por um orifício em sua porção inferior possui formato cilíndrico.

Consideremos inicialmente um recipiente cilíndrico com água, o volume de água que flui como um único tubo de escoamento com atrito interno desprezível situado em sua porção inferior. Podemos, portanto, aplicar o princípio de Bernoulli e verificar que a velocidade com que a água escoará pelo tubo é a mesma que um objeto adquire quando está se movendo em queda livre.

A seguir vamos aplicar o princípio de Bernoulli e mostrar que a velocidade  $v_0$  com que o líquido escoar pelo furo em sua parte inferior é dada por  $v_0 = \sqrt{2gh}$ , em que  $g$  é a aceleração da gravidade e  $h = h(t)$  é a altura do líquido no recipiente num instante de tempo  $t$  qualquer.

Sejam  $y_1, v_1$  e  $p_1$  a altura, a velocidade e a pressão da superfície de fluido contido em um recipiente, e  $y_0, v_0$  e  $p_0$  os valores correspondentes do fluido que sai do recipiente

através de um orifício em sua porção inferior. Aplicando a lei de conservação de energia esses valores estão relacionados entre si pela Equação de Bernoulli

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1)^2 = p_0 + \rho g y_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0)^2, \quad (2.1)$$

em que  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\rho$  é a massa específica do fluido.

Os pontos  $P_0$  e  $P_1$  na Figura 2.1 estão no tubo de saída e na superfície da água, respectivamente e  $h$  é a altura do líquido contido no recipiente.

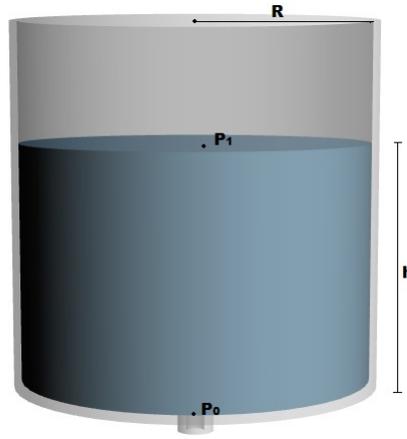


Figura 2.1: Recipiente Cilíndrico

No ponto  $P_1$ , a pressão é a atmosférica  $P_{atm}$ , e no ponto  $P_0$  é  $P$ . Como a superfície da água  $A_1$  é muito maior do que a superfície do orifício  $A_0$ , a superfície superior da água se moverá muito lentamente, e podemos encarar  $v_1$  praticamente igual a zero. Fazendo  $y_0 = 0$  no tubo de saída e  $y_1 = h$  a altura da água no instante  $t$ , encontramos a variável procurada  $v_0$ , utilizando a equação de Bernoulli

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho (v_1)^2 = p_0 + \rho g y_0 + \frac{1}{2} \rho (v_0)^2, \quad (2.2)$$

em que  $p_0$  e  $p_1$  são as pressões  $P$  e  $P_{atm}$  respectivamente. Aplicadas na superfície da água e no tubo de saída,  $y_1$  e  $y_0$  são as alturas da coluna de água nos pontos  $P_1$  e  $P_0$ ,  $g$  é a aceleração da gravidade e  $\rho$  é a massa específica do líquido.

Aplicando a equação de Bernoulli aos pontos  $P_0$  e  $P_1$  da Figura 2.1, obtemos

$$\begin{aligned} P + \frac{1}{2} \rho (v_1)^2 + \rho g h &= P_{atm} + \frac{1}{2} \rho (v_0)^2 + \rho g y_0 \\ \frac{1}{2} \rho (v_0)^2 &= \frac{1}{2} \rho (v_1)^2 + \rho g h - P_{atm} + P \\ (v_0)^2 &= (v_1)^2 + 2gh + 2 \left( \frac{P - P_{atm}}{\rho} \right). \end{aligned}$$

Como  $v_1 = 0$ , a velocidade inicial  $v_0$  depende da altura  $h$  da água no tanque e considerando que o tanque esteja aberto para a atmosfera, teremos  $P = P_{atm}$  e  $P - P_{atm} = 0$ . Nesse caso

$$v = \sqrt{2gh} \quad (2.3)$$

é a velocidade de vazão com que a água passa pelo tubo de saída.

Como  $v = \frac{\Delta h}{\Delta t}$ , podemos utilizar a equação (2.3) e obter

$$\begin{aligned} \sqrt{2gh} &= \frac{\Delta h}{\Delta t}, \\ \Delta h &= \Delta t \sqrt{2gh}. \end{aligned}$$

Além disso sabemos que o volume de água no tanque é dado por

$$V(t) = \pi R^2 h(t),$$

em que  $R$  é o raio da seção transversal do tanque.

Por outro lado, se denotarmos por  $A_0$  a área da seção transversal no orifício de saída, num espaço de tempo  $\Delta t$ , o volume de água que passa por este orifício será

$$A_0 \Delta t \sqrt{2gh}.$$

Assim

$$V(t + \Delta t) = \pi R^2 h(t) - A_0 \Delta t \sqrt{2gh}$$

nos dá a variação do volume do líquido no interior do tanque num dado intervalo de tempo.

Calculando a derivada de  $V$  com respeito ao tempo  $t$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V(t + \Delta t) - V(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\pi R^2 h(t) - A_0 \Delta t \sqrt{2gh} - \pi R^2 h(t)}{\Delta t} \\ &= -A_0 \sqrt{2gh}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Como  $V(t) = \pi R^2 h(t)$ , pela regra da cadeia temos que

$$\frac{dV}{dt} = \pi R^2 \frac{dh}{dt}. \quad (2.5)$$

Igualando as equações (2.4) e (2.5), obtemos

$$\pi R^2 \frac{dh}{dt} = -A_0 \sqrt{2gh},$$

e conseqüentemente

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-A_0}{\pi R^2} \sqrt{2gh}, \quad (2.6)$$

ou seja, a variação da altura no tempo depende da própria altura, o que nos dá uma equação diferencial de variáveis separáveis.

Como (2.6) é uma equação separável, escrevemos

$$\frac{1}{\sqrt{h}} dh = \frac{-A_0 \sqrt{2g}}{\pi R^2} dt. \quad (2.7)$$

Integrando a equação (2.7), teremos

$$\begin{aligned} \int \frac{dh}{\sqrt{h}} &= - \int \frac{A_0 \sqrt{2g}}{\pi R^2} dt \\ 2\sqrt{h} &= - \frac{A_0 \sqrt{2g}}{\pi R^2} t + c_1, \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que  $c_1$  é uma constante de integração arbitrária e (2.8) é solução da Equação (2.6). Vemos que  $h$  não é linear em função de  $t$ , ou seja, a altura não aumenta ou diminui com a mesma velocidade que o tempo, como veremos no exemplo que se segue.

Mas antes de passarmos para o exemplo, observe que a Equação (2.8) pode ser reescrita sob a forma

$$h(t) = \left( - \frac{A_0 \sqrt{2g}}{2\pi R^2} t + c_2 \right)^2 \quad (2.9)$$

em que  $c_2 = \frac{c_1}{2}$ .

Para a condição inicial  $t = 0$ , vamos denotar  $h(0) = h_0$  e, portanto,  $c_2 = \sqrt{h_0}$ , e assim (2.9) se resume a

$$h(t) = \left( - \frac{A_0 \sqrt{2g}}{2\pi R^2} t + \sqrt{h_0} \right)^2. \quad (2.10)$$

**Exemplo 1:** Um tanque cilíndrico com  $5,0m$  de altura e raio  $1,0m$ , possui um orifício em sua porção inferior de raio  $5,0 \times 10^{-3}m$  por onde um líquido contido no tanque será drenado. Supondo que o tanque esteja completamente cheio, verifique que a altura da coluna do líquido não varia linearmente com o tempo.

**Solução:** Pelas condições iniciais  $h(0) = 5$ , utilizando a Equação (2.10), obtemos

$$h(t) = (-5,53 \times 10^{-5}t + \sqrt{5})^2 \quad (2.11)$$

e substituindo  $t$  em (2.11) obtemos os valores aproximados por arredondamento da variação do volume descritos na Tabela 2.1.

Tabela 2.1: Variação de volume do cilindro

t[s]	h [m]
0	5
500	4,877
1000	4,756
1500	4,636
2000	4,518
2500	4,401

Pela solução da Equação (2.6) foi verificado que a altura do líquido não varia linearmente com o tempo, e pela Tabela 2.1 pudemos observar com que rapidez a altura varia com o tempo em um recipiente cilíndrico.

Desse modo fica mais evidente ao leitor que a altura  $h$  da coluna do líquido contido em um tanque cilíndrico não varia linearmente com o tempo.

**Exemplo 2:** Considerando o recipiente do exemplo anterior, em quanto tempo a altura d'água estará pela metade? Em quanto tempo o tanque estará completamente vazio?

**Solução:** A lâmina d'água estará pela metade quando sua altura for de  $h(t) = 2,5 \text{ m}$ , sendo assim utilizando (2.11), escrevemos

$$\begin{aligned}
 2,5 &= (-5,53 \cdot 10^{-5}t + \sqrt{5})^2 \\
 1,58 &= -5,53 \cdot 10^{-5}t + \sqrt{5} \\
 -5,53 \cdot 10^{-5}t &= 1,58 - \sqrt{5} \\
 t &= 11\,934,9 \text{ s.}
 \end{aligned}$$

Utilizando (2.11) e fazendo  $h(t) = 0$  verificamos que o tanque estará totalmente vazio em

$$\begin{aligned}
 0 &= (-5,53 \cdot 10^{-5}t + \sqrt{5})^2 \\
 5,53 \cdot 10^{-5}t &= \sqrt{5} \\
 t &= 40\,435,2 \text{ s.}
 \end{aligned}$$

Desse modo concluímos que a água no tanque estará pela metade em 11934,9 s e o tanque estará totalmente vazio em 40435,2 s.

## 2.2 Recipiente Cônico

Como o recipiente em formato de um cilindro não apresenta variação da altura do líquido linear com o tempo como queríamos, suponhamos agora que o recipiente tenha o formato de um cone como mostra a Figura 2.2 e vamos verificar como é que a altura do líquido vai se comportar com o passar do tempo e verificaremos se essa variação da altura num recipiente cônico é linear com o tempo.

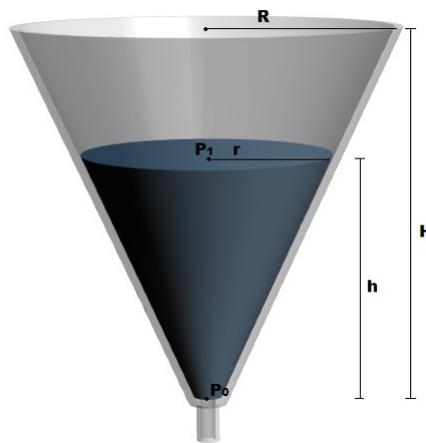


Figura 2.2: Recipiente Cônico

O volume do cone é dado pela equação

$$V = \frac{\pi R^2 H}{3}$$

em que  $R$  é o raio do cone e  $H$  a altura do cone. Suponhamos que a superfície da água tenha raio  $r$  e a altura da água seja  $h$ . Assim, utilizando semelhança de triângulos escrevemos a relação

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H},$$

ou, de uma maneira mais simplificada

$$r = \frac{hR}{H}. \quad (2.12)$$

Assim, substituindo (2.12) o volume  $V(t)$  do recipiente cônico será dado em função do tempo pela função

$$V(t) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{hR}{H}\right)^2 h,$$

e obtemos

$$V(t) = \frac{1}{3} \frac{\pi R^2}{H^2} h^3. \quad (2.13)$$

Calculando a derivada de (2.13) em relação ao tempo, utilizando a regra da cadeia, obtemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^2}{H^2} h^2 \frac{dh}{dt} \quad (2.14)$$

e, substituindo (2.4) em (2.14), obtemos

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0 H^2 \sqrt{2g}}{\pi R^2} h^{-\frac{3}{2}}$$

que é uma equação de variáveis separáveis. Sendo assim, podemos escrever

$$\frac{-A_0 H^2}{\pi R^2} \sqrt{2g} dt = h^{\frac{3}{2}} dh$$

e integrando ambos os lados,

$$\int \frac{-A_0 H^2}{\pi R^2} \sqrt{2g} dt = \int h^{\frac{3}{2}} dh$$

obtemos

$$\frac{-A_0 H^2 \sqrt{2g}}{\pi R^2} t + c_1 = \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}}$$

e assim concluímos que

$$h^{\frac{5}{2}} = \frac{-5A_0 H^2 \sqrt{2g}}{2\pi R^2} t + c_2, \quad (2.15)$$

em que  $c_2$  é uma constante arbitrária. Podemos observar também que  $h$  não é linear em função do tempo, ou seja, a medida que o tempo varia, a altura da lâmina d'água não varia na mesma velocidade.

Para as condições iniciais  $t = 0$  e  $h(0) = h_0$ , utilizando a equação (2.15) concluímos que  $c = [h_0]^{\frac{5}{2}}$ . Então obtemos

$$h^{\frac{5}{2}} = \frac{-5A_0 H^2 \sqrt{2g}}{2\pi R^2} t + h_0^{\frac{5}{2}}. \quad (2.16)$$

**Exemplo 1:** Um tanque com formato cônico de 2,0 m de altura e raio 1,0m está quase cheio com água. A altura da coluna de água é de 1,95 m e o raio da superfície da água é 0,975 m. Supondo que em sua parte inferior tenha um orifício de  $5 \times 10^{-3}$  m de raio, por onde a água escoar, verifique se a altura da água contida no tanque varia linearmente com o tempo.

**Solução:** Pelas condições iniciais  $h(0) = 1,95$ , utilizando a equação (2.16) obtemos

$$h^{\frac{5}{2}} = -1,11 \times 10^{-3} t + 1,95^{\frac{5}{2}} \quad (2.17)$$

Tabela 2.2: Variação de volume do cone

t[s]	h [m]
0	1,95
500	1,866
1000	1,775
1500	1,678
2000	1,570
2500	1,451

e substituindo  $t$  em (2.17) obtemos os valores da variação do volume descritos na tabela 1.2.

Conforme já havíamos concluído pela Equação (2.15) que a altura  $h$  da coluna do líquido contido em um tanque de formato cônico não varia linearmente com o tempo, a Tabela 2.2 nos mostra com que rapidez a água varia com o tempo no recipiente cônico.

**Exemplo 2:** Considerando o recipiente do exemplo anterior, em quanto tempo o a altura d'água estará pela metade? Em quanto tempo o tanque estará completamente vazio?

**Solução:** A lâmina d'água estará pela metade quando sua altura for de  $h(t) = 0,975$  m, sendo assim utilizando (2.17), escrevemos

$$\begin{aligned} 0,975^{\frac{5}{2}} &= -1,11 \cdot 10^{-3}t + 1,95^{\frac{5}{2}} \\ 1,11 \cdot 10^{-3}t &= 1,95^{\frac{5}{2}} - 0,975^{\frac{5}{2}} \\ t &= 3\,936,9 \text{ s.} \end{aligned}$$

Utilizando (2.17) e fazendo  $h(t) = 0$  verificamos que o tanque estará totalmente vazio em

$$\begin{aligned} 0 &= -1,11 \cdot 10^{-3}t + 1,95^{\frac{5}{2}} \\ 1,11 \cdot 10^{-3}t &= 1,95^{\frac{5}{2}} \\ t &= \frac{1,95^{\frac{5}{2}}}{1,11 \cdot 10^{-3}} \\ t &= 4\,783,7 \text{ s.} \end{aligned}$$

Desse modo concluímos que a água no tanque estará pela metade em 3 936,9 s e o tanque estará totalmente vazio em 4 783,7 s.

## 2.3 Recipiente com um formato qualquer

Como os recipientes cilíndrico e cônico não satisfazem nossa hipótese de que a altura do líquido contida no recipiente ao escoar por um orifício em sua porção inferior, vamos considerar um recipiente com formato qualquer cuja secção transversal circular é gerada pela revolução de uma curva  $h = h(x)$  em torno do eixo  $h$  como mostra a Figura 2.3 . Queremos determinar a forma que deve ter essa curva para que a taxa de variação da altura  $h$  (da água que escoar) seja constante com o decorrer do tempo.

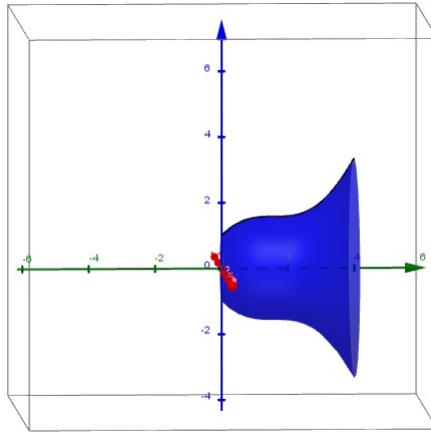


Figura 2.3: Recipiente Qualquer

Supondo que o recipiente esteja cheio e que exista um escoamento do líquido por um orifício de área  $A_0$  em sua parte inferior, sendo  $h(t)$  e  $V(t)$  respectivamente a altura e o volume do líquido em um instante qualquer, da Equação (2.4), temos que

$$\frac{dV}{dt} = -A_0 \sqrt{2gh}.$$

Supondo que a variação da altura com o tempo  $\frac{dh}{dt}$  seja constante, e o volume varia de acordo com a equação

$$\frac{dV}{dt} = -A_0 \sqrt{2gh} \quad (2.18)$$

e usando a regra da cadeia, a taxa de variação do volume em relação ao tempo é dada por

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt}.$$

Dada uma função  $A : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ , o volume  $V$  da superfície gerada pela revolução do gráfico da função  $A$  é dada por

$$V = \int_0^h \pi [A(u)]^2 du.$$

A explicação da fórmula acima é uma aplicação imediata das somas de Riemann, e pode ser vista no Apêndice B. Observe que o volume, da maneira que foi definido acima, depende da altura  $h$ . Derivando a equação acima com respeito à  $h$ , pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\frac{dV}{dh} = \pi[A(h)]^2.$$

Mas se  $h$  é uma função que depende do tempo  $t$ , podemos usar a regra da cadeia para que a equação acima possa ser reescrita sob a forma

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{dV}{dh} \frac{dh}{dt} \\ &= \pi[A(h)]^2 \frac{dh}{dt}. \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade acima na equação (2.18) concluímos que, para um recipiente arbitrário, cuja geometria é representada pela rotação do gráfico de uma função  $A$ , a equação diferencial que modela a variação da altura com respeito ao tempo é dada por

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0\sqrt{2gh}}{\pi[A(h)]^2}. \quad (2.19)$$

Observe que, como queremos determinar uma função que faz com que

$$\frac{dh}{dt}$$

seja constante, é suficiente que a função  $A(h)$  seja do tipo

$$A(h) = \lambda\sqrt[4]{h},$$

para qualquer  $\lambda > 0$ , tendo em vista que a função deve ser positiva. De fato, sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= -\frac{A_0\sqrt{2gh}}{\pi[\lambda\sqrt[4]{h}]^2} \\ &= -\frac{A_0\sqrt{2g}}{\pi\lambda^2}, \end{aligned}$$

ou seja, a variação da altura no tempo é constante, aumenta a medida que  $\lambda$  diminui e diminui a medida que  $\lambda$  aumenta.

Resolvendo a equação separável acima, encontramos

$$h(t) = -\frac{A_0\sqrt{2g}}{\pi\lambda^2}t + c \quad (2.20)$$

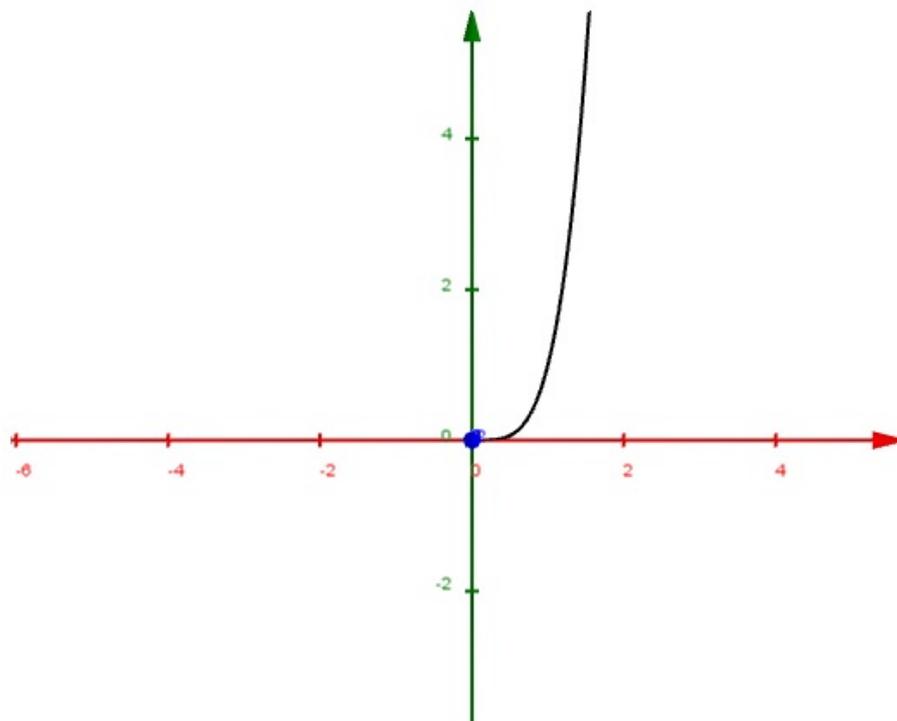


Figura 2.4: Curva geradora

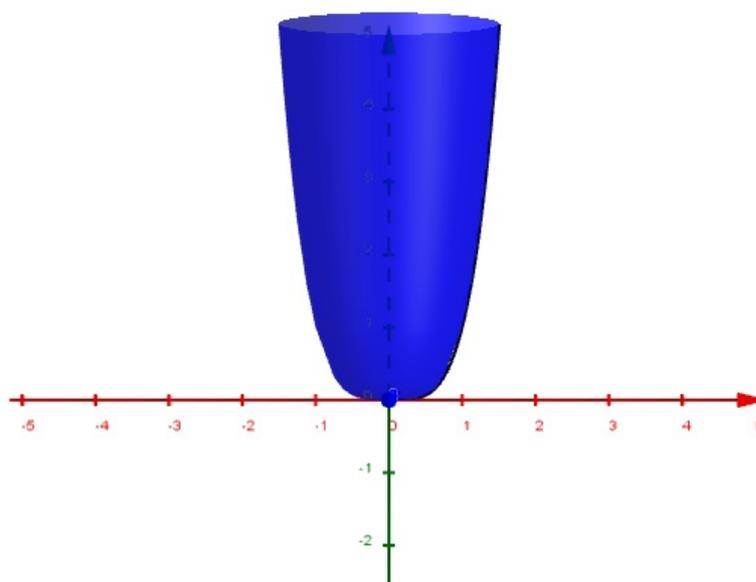


Figura 2.5: Clepsidra

em que  $c$  é uma constante arbitrária.

Invertendo a função  $y = \sqrt[4]{x}$  obtemos  $y = x^4$  e rotacionando a curva geradora da superfície da clepsidra em torno do eixo  $y$ , obtemos.

**Exemplo 1:** Suponha que queiramos construir um relógio d'água utilizando uma clepsidra como a superfície que acabamos de modelar. Façamos com que a altura do recipiente seja de  $1,2\text{ m}$  e que a cada uma hora a variação de sua altura seja de  $0,1\text{ m}$ . Determine a equação linear  $h(t)$  utilizando o resultado obtido em (2.20).

**Solução:** Utilizando (2.20) e fazendo  $h(0) = 1,2$ , obtemos

$$h(t) = -\frac{A_0\sqrt{2g}}{\pi\lambda^2}t + 1,2, \quad (2.21)$$

e como a cada uma hora a altura da água baixa  $0,1\text{ m}$ , para  $h(1) = 1,1$  escrevemos

$$\begin{aligned} 1,1 &= -\frac{A_0\sqrt{2g}}{\pi\lambda^2} + 1,2 \\ -0,1 &= -\frac{A_0\sqrt{2g}}{\pi\lambda^2} \\ \lambda^2 &= \frac{10A_0\sqrt{2g}}{\pi} \end{aligned}$$

e finalmente substituindo  $\lambda^2$  na Equação (2.21), obtemos

$$h(t) = -\frac{1}{10}t + 1,2$$

que é solução do problema.

# Capítulo 3

## Mistura de Fluidos

Faremos neste capítulo o estudo de um modelo matemático chamado modelo comportamental, o qual envolve um procedimento válido para equações diferenciais lineares de qualquer ordem [1].

No nosso estudo, estamos interessados em como se comporta a variação da concentração de sal na água contida em um reservatório, ou seja, analisaremos um único compartimento que está ligado por tubos nos quais se recebe uma solução de água com sal e pelo outro tubo escoam a mistura contida no reservatório.

Ainda de acordo com Bassanezzi veremos que o fluxo da mistura que sai do reservatório é proporcional à quantidade da mistura contida no reservatório em cada instante  $t$ .

Para o nosso estudo, representaremos a quantidade de sal no tanque por  $Q(t)$  que vai variar com o tempo  $t$ . Representaremos ainda a taxa de entrada com que a água com certa concentração de sal entra no reservatório e a taxa de saída com que a mistura contida no reservatório irá deixar o reservatório.

Sendo assim, podemos interpretar a taxa de variação da concentração de sal na água contida no compartimento como a derivada de  $Q$  em relação ao tempo  $t$  e, dessa forma, teremos

$$\frac{dQ}{dt} = \text{taxa de entrada} - \text{taxa de saída}$$

como um modelo matemático do processo[6].

### 3.1 Concentração de Sal em um Tanque D'água

Suponhamos em nosso estudo que dentro de um reservatório tenha inicialmente  $V$  litros de água com certa concentração de sal, e que nesse reservatório a uma razão constante de  $n$  litros por segundo, acrescentamos uma mistura de água com sal, com concentração de

$c$  quilogramas de sal por litro. Consideramos ainda que exista uma vazão constante de  $n$  litros por segundo da mistura formada no reservatório que escoar.

Tomemos  $Q(t)$  para representar a quantidade de sal no reservatório e escrevemos a razão

$$\frac{Q}{V}$$

para a concentração de sal na mistura.

A partir dessas informações podemos escrever uma relação entre os  $n$  litros de salmoura que entra no reservatório e entre os  $n\frac{Q}{V}$  litros da mistura contida no reservatório que escoar. Desse modo escrevemos a equação

$$\frac{dQ}{dt} = nc - n\frac{Q}{V} \quad (3.1)$$

em que  $\frac{dQ}{dt}$  é a variação da quantidade de sal no reservatório em função do tempo.

Para resolver a Equação (3.1) vamos determinar um fator integrante  $\mu(t)$ . Para isso reescrevemos a equação e multiplicamos ambos os lados por  $\mu(t)$  e obtemos

$$\mu(t)\frac{dQ}{dt} + \mu(t)n\frac{Q}{V} = \mu(t)nc. \quad (3.2)$$

Observando a relação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[Q\mu(t)] &= \frac{dQ}{dt}\mu(t) + Q\frac{d\mu}{dt} \\ \frac{dQ}{dt}\mu(t) &= \frac{d}{dt}[Q\mu(t)] - Q\frac{d\mu}{dt} \end{aligned}$$

e substituindo na Equação (3.2), vem que

$$\frac{d}{dt}[Q\mu(t)] - Q\frac{d\mu}{dt} + \mu(t)n\frac{Q}{V} = \mu(t)nc$$

e fazendo

$$-Q\frac{d\mu}{dt} + \mu(t)n\frac{Q}{V} = 0 \iff \frac{d\mu}{dt} = \mu(t)\frac{n}{V}$$

e assim, observando que a equação anterior é separável, escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{\mu} &= \frac{n}{V}dt \\ \mu(t) &= ce^{\frac{n}{V}t} \\ \mu(t) &= ce^{\frac{n}{V}t} \end{aligned}$$

que fazendo  $c = 1$ , obtemos

$$\mu(t) = e^{\frac{n}{V}t}. \quad (3.3)$$

A função  $\mu(t)$  encontrada é o fator de integração que substituímos na Equação (3.2) e obtemos

$$e^{\frac{n}{V}t} \frac{dQ}{dt} + e^{\frac{n}{V}t} n \frac{Q}{V} = e^{\frac{n}{V}t} nc$$

escrevendo

$$e^{\frac{n}{V}t} \left[ \frac{dQ}{dt} + n \frac{Q}{V} \right] = e^{\frac{n}{V}t} nc.$$

Observando que o primeiro membro da equação é a derivada do produto de  $Q$  por  $e^{\frac{n}{V}t}$  escrevemos

$$\frac{d}{dt} [Qe^{\frac{n}{V}t}] = e^{\frac{n}{V}t} nc.$$

Integrando os dois lados

$$\int \frac{d}{dt} [Qe^{\frac{n}{V}t}] dt = nc \int e^{\frac{n}{V}t}$$

obtemos

$$Q(t) = cV + ke^{-\frac{n}{V}t} \quad (3.4)$$

que é solução geral da Equação (3.1) em que  $k$  é uma constante arbitrária.

Vale observar que, pela Equação (3.4) se fizermos  $t \rightarrow \infty$  temos que a concentração de sal no reservatório é  $c$ .

Se tivermos um problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = nc - n \frac{Q}{V} \\ Q(t_0) = q_0 \end{cases} \quad (3.5)$$

em que  $Q(t_0) = q_0$  é a quantidade de sal inicial dentro do reservatório podemos, determinar qual é a concentração de sal num dado instante ou até mesmo saber em que instante a concentração de sal do reservatório será igual à concentração da mistura que entra no tanque.

Para resolver o problema de valor inicial (3.5), queremos inicialmente determinar o valor da constante  $k$ , para isso substituímos  $t_0$  em (3.4) e escrevemos

$$Q(t_0) = q_0 \Rightarrow cV + ke^{-\frac{n}{V}t_0} = q_0$$

que resulta em

$$k = (q_0 - cV)e^{\frac{n}{V}t_0}$$

que substituímos em (3.4) e fazendo  $t_0 = 0$  vem que

$$Q(t) = cV + (q_0 - cV)e^{-\frac{n}{V}t} \quad (3.6)$$

que é solução da Equação (3.5).

**Exemplo 1:** Um tanque contém 400L de salmoura na qual estão dissolvidos 24 Kg de sal. Uma salmoura contendo 1Kg de sal a cada 4L, é derramada no tanque à razão de  $12\frac{L}{min}$ . A mistura, formada no tanque, escoo do tanque na mesma razão. Qual a quantidade de sal existente na solução do tanque, ao final de 20 minutos?

**Solução:**

Utilizando (3.6), substituímos  $c = 0,25 \text{ Kg/L}$ ,  $V = 400 \text{ L}$ ,  $q_0 = 24 \text{ Kg}$  e  $n = 12 \text{ L/min}$ , obtemos

$$Q(t) = 100 - 76e^{-0,03t}$$

que substituindo  $t = 20 \text{ min}$  encontramos

$$\begin{aligned} Q(20) &= 100 - 76e^{-0,6} \\ &= 58,3. \end{aligned}$$

Assim concluímos que ao final dos primeiros 20 minutos haverá 58,3 quilogramas de sal no tanque.

**Exemplo 2:** Com os dados do Exemplo 1, em quanto tempo a concentração de sal na salmoura contida no tanque será igual a 0,2475 Kg/L?

**Solução:**

Primeiramente verificamos que a concentração de sal na salmoura de entrada é  $c = \frac{1 \text{ Kg}}{4 \text{ L}} = 0,25 \text{ Kg/L}$  e que para os 400 litros de salmoura contidos no tanque tenha uma concentração de sal igual a 0,2475 Kg/L deve-se ter 99 Kg de sal no tanque. Assim utilizando a equação

$$Q(t) = 100 - 76e^{-0,03t}$$

que encontramos no Exemplo 1, e substituindo  $Q(t) = 99$ , obtemos

$$\begin{aligned} 99 &= 100 - 76e^{-0,03t} \\ 76e^{-0,03t} &= 1 \\ e^{-0,03t} &= \frac{1}{76} \\ \ln e^{-0,03t} &= \ln \frac{1}{76} \\ -0,03t &= -4,33 \\ t &= 144,3. \end{aligned}$$

Assim concluímos que após 144,3 minutos a concentração de sal na mistura é de 0,2475 Kg/L.

**Exemplo 3:** Em tanque com 100 litros de água é diluído 5 quilogramas de sal. Injeta-se no tanque, à razão de 6 litros por minuto uma mistura de água com sal, contendo 0,25 quilogramas de sal por litro. Sabendo que a mistura formada no tanque escoava à razão de 6 litros por minuto, encontre uma equação que represente a quantidade de sal no tanque no instante  $t$ ?

**Solução:**

Primeiramente vamos determinar a taxa de entrada de sal no tanque que é dada por  $(6L/min)(0,25Kg/L) = 1,5Kg/min$ .

Em segundo lugar, vamos determinar a taxa de saída de sal do tanque que é dada por  $(6L/min)(\frac{Q(t)}{100}Kg/L) = \frac{3Q(t)}{50}Kg/min$ .

Inicialmente o tanque continha  $Q(0) = 5kg$  de sal. Assim escrevemos a equação

$$\frac{dQ}{dt} = 1,5 - \frac{3Q}{50}$$

como um modelo matemático para o problema proposto, dado pelo problema de valor inicial a seguir.

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 1,5 - \frac{3Q}{50} \\ Q(0) = 5 \end{cases}$$

Resolvendo a equação acima utilizando um fator multiplicativo, encontramos

$$Q(t) = 25 + ke^{-0,06t}$$

e usando a condição inicial para encontrar a constante  $k$ , obtemos

$$Q(t) = 25 - 20e^{-0,06t} \tag{3.7}$$

que é solução do problema.

**Exemplo 4:** Uma solução de salmoura flui a uma vazão constante de 6 L/min para um tanque grande que inicialmente mantinha 50 L de solução em que foi dissolvido 0,5 Kg de sal. A solução dentro do tanque é mantida bem agitada e sai do tanque na mesma velocidade. Se a concentração de sal na salmoura que entra no tanque é de 0,05 Kg/L, determine a massa do sal após  $t$  minutos. Quando a concentração atingirá 0,03 Kg/L?

**Solução:**

Sendo  $Q(t)$  a massa de sal da solução no instante  $t$ , pelas condições iniciais temos  $Q(0) = 0,5$ .

A taxa de sal na salmoura que entra no tanque é dada por

$$\text{Taxa de entrada} = (6 \text{ L/min})(0,05 \text{ Kg/L}) = 0,3 \text{ Kg/min.}$$

A taxa de sal que sai na mistura contida no tanque é dada por

$$\text{Taxa de saída} = \left( \frac{Q(t)}{50} \text{ Kg/L} \right) (6 \text{ L/min}) = \frac{3Q(t)}{25} \text{ Kg/min.}$$

Assim escrevemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 0,3 - \frac{3Q}{25} \\ Q(0) = 0,5 \end{cases}$$

Utilizando a equação (3.6), encontramos

$$Q(t) = 2,5 - 2e^{-0,12t}$$

que nos dá a concentração de quantidade de sal na mistura no instante  $t$ .

Para que a concentração de sal no tanque seja de  $0,03 \text{ Kg/L}$ , fazemos  $Q(t) = 50 \times 0,03 = 1,5 \text{ Kg}$  e escrevemos

$$1,5 = 2,5 - 2e^{-0,12t}$$

e resolvemos para encontrar  $t$

$$\begin{aligned} 1,5 &= 2,5 - 2e^{-0,12t} \\ e^{-0,12t} &= \frac{1}{2} \\ \ln e^{-0,12t} &= \ln \frac{1}{2} \\ t &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{0,12} \\ t &= 5,8 \text{ min.} \end{aligned}$$

E encontramos que aproximadamente aos  $5,8 \text{ min}$  a concentração de sal no tanque será de  $0,03 \text{ Kg/L}$ .

**Exemplo 5:** Uma solução de salmoura flui a uma vazão constante de  $4 \text{ L/min}$  para um tanque grande que inicialmente mantinha  $100 \text{ L}$  de água pura. A solução no tanque é mantida bem agitada e sai a uma vazão de  $3 \text{ L/min}$ . Se a concentração de sal na salmoura entrando no tanque é de  $0,2 \text{ Kg/L}$ , determine a massa do sal após  $t$  minutos.

**Solução:**

Sendo  $Q(t)$  a massa de sal da solução no instante  $t$ , pelas condições iniciais temos  $Q(0) = 0$ .

A taxa de sal na salmoura que entra no tanque é dada por

$$\text{Taxa de entrada} = (4 \text{ L/min})(0,2 \text{ Kg/L}) = 0,8 \text{ Kg/min.}$$

Para determinar a concentração de sal no tanque no instante  $t$  devemos observar que o volume da solução no tanque irá variar com o tempo, visto que há uma entrada de  $4 \text{ L/min}$  de salmoura e a vazão de saída da solução contida no tanque é de apenas  $3 \text{ L/min}$ . Assim o volume  $V(t)$  de solução no tanque após  $t$  minutos será de

$$V(t) = V(0) + (4 - 3)t = 100 + t.$$

A taxa de sal que sai na mistura contida no tanque será dada por

$$\text{Taxa de saída} = \left( \frac{Q(t)}{v(t)} \text{ Kg/L} \right) (3 \text{ L/min}) = \frac{3Q(t)}{100 + t} \text{ Kg/min.}$$

Assim escrevemos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} + \frac{3Q}{100+t} = 0,8 \\ Q(0) = 0. \end{cases}$$

Utilizando (3.3) para determinar um fator integrante para resolver o problema de valor inicial acima, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{100+t} dt} = (100 + t)^3$$

e assim

$$\frac{d}{dt}[(100 + t)^3 Q] = 0,8(100 + t)^3$$

integrando os dois lados vem

$$(100 + t)^3 Q = 0,2(100 + t)^4 + c$$

em que  $c$  é uma constante arbitrária, e então

$$Q(t) = 0,2(100 + t) + c(100 + t)^{-3}.$$

Utilizando a condição inicial  $Q(0) = 0$ , obtemos

$$0 = 20 + 10^{-6}c \Rightarrow c = -2 \cdot 10^7.$$

E assim temos que no instante  $t$  a quantidade de sal no tanque é dado pela equação

$$Q(t) = 0,2(100 + t) - 2 \cdot 10^7(100 + t)^{-3} \text{ (Kg)}.$$

**Exemplo 6:** Para o problema anterior, represente graficamente a família de curvas da Equação (3.7), suponha  $k = \{0, 2, 5, 10, 15, 20, 25\}$ .

**Solução:**

Fazendo  $k = \{0, 2, 5, 10, 15, 20, 25\}$  obtemos a seguinte família de curvas, que nos leva a observar que a quantidade de sal no tanque tende a 25 Kg sempre que  $t \rightarrow \infty$ .

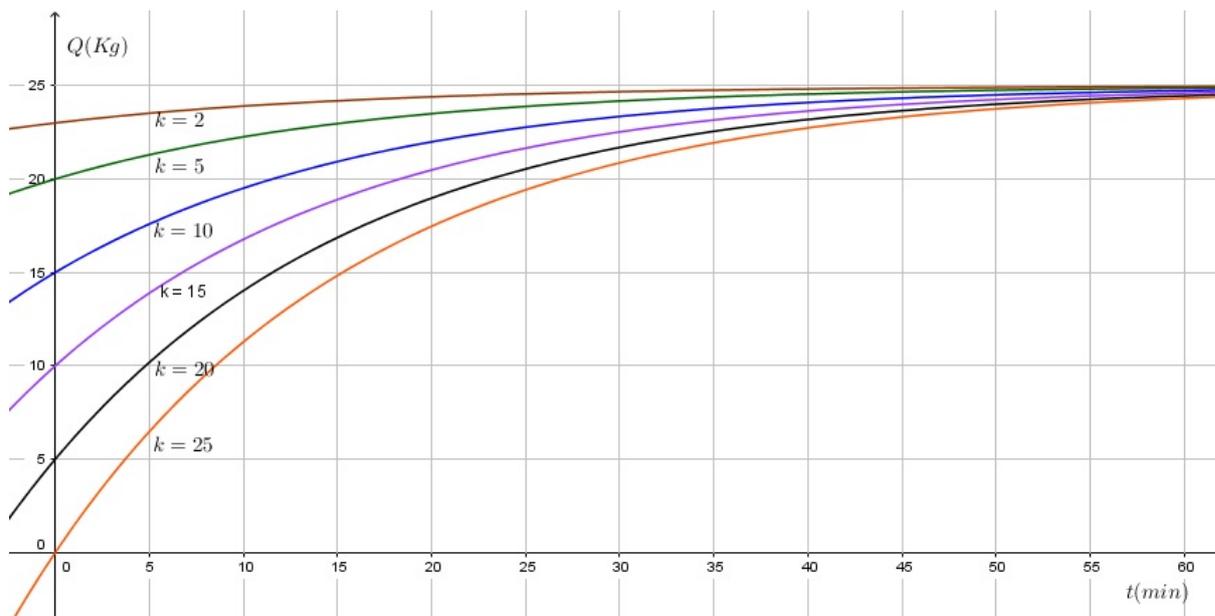


Figura 3.1: Família de curvas

# Capítulo 4

## Existência e Unicidade de Solução

Neste capítulo vamos demonstrar o teorema da existência e unicidade, que é uma condição suficiente para que possamos determinar uma solução única do problema de valor inicial, como encontrada em [4] e [9]. Ou seja, estudaremos sob quais condições existe uma única função  $y = y(x)$  satisfazendo problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} .$$

**Teorema 4.1 (Existência e Unicidade)** *Seja  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  tal que a derivada  $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seja contínua. Então, para cada  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , existem um intervalo aberto  $I$  contendo  $x_0$  e uma única função diferenciável  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $(x, \phi(x)) \in \Omega$ , para todo  $x \in I$ , que é solução do PVI*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} . \quad (4.1)$$

A demonstração do Teorema acima requer a utilização de alguns resultados preliminares. Nosso primeiro passo será mostrar que resolver o PVI é equivalente a resolver uma equação integral, o que faremos utilizando o lema a seguir.

**Lema 4.1** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua num aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}$ . Então, uma função diferenciável  $\phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma solução do PVI (2.19) se, e somente se, for uma solução da equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad x \in I. \quad (4.2)$$

**Demonstração:** Se  $y(x)$  é solução da equação integral para todo  $x \in I$ , então podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para obter

$$y' = f(x, y(x)),$$

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^x y'(s)ds &= \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds, \\ y(x) - y(x_0) &= \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds, \\ y(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds,\end{aligned}$$

uma vez que  $y(x_0) = y_0$ .

Reciprocamente, se

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds,$$

derivando ambos os lados com respeito à variável  $x$  e utilizando mais uma vez o Teorema Fundamental do Cálculo, temos que

$$\begin{aligned}y'(x) &= \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds \\ &= f(x, y(x)),\end{aligned}$$

o que conclui nossa afirmação. □

Para provar o Teorema de Existência e Unicidade, vamos precisar de alguns conceitos e resultados.

Dado  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , tomemos  $a$  e  $b$  positivos tais que o retângulo

$$B = B(a, b, x_0, y_0) = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja contido em  $\Omega$ . Como  $f$  é contínua e  $B$  é compacto, temos que  $f$  é limitada em  $B$ , como visto em [4], ou seja, existe uma constante  $M_1 > 0$  tal que

$$|f(x, y)| \leq M_1,$$

para todo  $(x, y) \in \Omega$ , temos

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in B\}.$$

Sejam  $0 < \bar{a} \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$  e  $J_{\bar{a}}$  o intervalo fechado  $[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$ . Vamos definir agora o seguinte conjunto

$$C = \{g : J_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R} : g(x_0) = y_0, |g(x) - y_0| \leq b\}.$$

Graficamente,  $C$  é o conjunto de todas as funções contínuas em  $J_{\bar{a}}$  cujos gráficos passam pelo ponto  $(x_0, y_0)$  e que estejam contidas no retângulo  $B$ .

Definimos em  $C$  a seguinte métrica:

$$d = d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in J_{\bar{a}}\}.$$

Sabendo que a métrica que acabamos de definir é a distância entre duas funções contidas em  $C$  conforme provaremos a seguir.

**Proposição 4.0.1**  $d$  é uma métrica.

**Demonstração:** De fato,  $d$  está bem definida, pois sejam  $g_1, g_2$  e  $g_3 \in C$  e  $J_{\bar{a}}$  é compacto e satisfaz a seguintes propriedades:

$$(i) \quad d(g_1, g_2) \geq 0 \text{ e } d(g_1, g_2) = 0 \iff g_1 = g_2;$$

$$(ii) \quad d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1);$$

$$(iii) \quad d(g_1, g_2) \leq d(g_1, g_3) + d(g_3, g_2).$$

De fato. Prova de (i):

$$d(g_1, g_2) = 0 \iff \max\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in J_{\bar{a}}\} = 0 \iff |g_1(x) - g_2(x)| = 0, x \in J_{\bar{a}}$$

$$\iff g_1(x) - g_2(x) = 0 \iff g_1(x) = g_2(x), \forall x \in J_{\bar{a}}$$

Prova de (ii):

$$d(g_1, g_2) = \max|g_1(x) - g_2(x)| = |g_2(x) - g_1(x)| = d(g_2, g_1)$$

Prova de (iii)

$$|g_1(x) - g_2(x)| = |g_1(x) - g_3(x) + g_3(x) - g_2(x)|$$

$$|g_1(x) - g_3(x) + g_3(x) - g_2(x)| \leq |g_1(x) - g_3(x)| + |g_3(x) - g_2(x)|$$

$$\iff \max|g_1(x) - g_2(x)| \leq \max(|g_1(x) - g_3(x)| + |g_3(x) - g_2(x)|)$$

$$\iff \max|g_1(x) - g_2(x)| \leq \max|g_1(x) - g_3(x)| + \max|g_3(x) - g_2(x)|.$$

Portanto,  $d$  é métrica.

□

**Definição 1** Sendo  $C$  um conjunto dotado da métrica  $d$  que acabamos de mostrar, dizemos que  $C$  é um espaço métrico. Suponhamos então que  $(g_n)$  é uma sequência de Cauchy se, para todo  $\varepsilon > 0$  existir  $n_0$  tal que  $d(g_n, g_m) < \varepsilon$  para todo  $n, m \geq n_0$ . Um espaço métrico  $C$  é completo se toda sequência de Cauchy for convergente para algum elemento de  $C$ .

**Lema 4.2**  $C$  é um espaço métrico completo.

**Demonstração:** Considere  $(g_n)$  uma sequência de Cauchy em  $C$ , isto é, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n, m > n_0$  temos  $d(g_n, g_m) < \varepsilon$ , o que implica

$$\max |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon,$$

para todo  $x \in J_{\bar{a}}$ .

Segue que para cada  $x$ ,  $(g_n(x))$  é de Cauchy em  $\mathbb{R}$  e como  $\mathbb{R}$  é completo, então existe, para cada  $x \in J_{\bar{a}}$  uma função  $g$  tal que

$$g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x).$$

Provemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$  em  $C$ , em que  $g : J_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R}$  dada acima. De fato, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que:

$$d(g_n, g_m) = \max |g_n(x) - g_m(x)| < \varepsilon,$$

em que  $x \in J_{\bar{a}}$ , para todo  $n, m > n_0$ .

Fixando  $n$  na desigualdade acima e fazendo  $m \rightarrow \infty$ , lembrando que  $g_m(x) \rightarrow g(x)$ , obtemos

$$|g_n(x) - g_m(x)| \leq |g_n(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

para todo  $x \in J_{\bar{a}}$ .

Então para todo  $n > n_0$  temos  $d(g_n, g) \leq \varepsilon$ . Portanto  $g_n \rightarrow g$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Concluimos assim que  $C$  é um espaço métrico completo.

□

Para dar prosseguimento à demonstração do nosso resultado principal vamos usar o teorema do ponto fixo de Banach através do conceito de contração que, a grosso modo é uma função que "encolhe" um conjunto.

**Definição 2** *Seja  $C$  um espaço métrico completo. Dizemos que  $\phi : C \rightarrow C$  é uma contração se existe uma constante  $0 \leq K < 1$ , tal que*

$$d(\phi(y_1), \phi(y_2)) \leq Kd(y_1, y_2),$$

*para quaisquer  $y_1, y_2 \in C$ .*

**Teorema 4.2 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)** *Considere  $C$  um espaço métrico completo. Suponha que  $\phi : C \rightarrow C$  é uma contração. Então, existe um e somente um  $y \in C$  tal que  $\phi(y) = y$ .*

Demonstração: Dado um ponto arbitrário  $y_0 \in C$ , consideremos a sequência  $(y_n)$  definida do seguinte modo:

$$y_1 = \phi(y_0), \quad y_2 = \phi(y_1), \dots, y_{n+1} = \phi(y_n).$$

Admitamos por enquanto, que a sequência  $y_n$  convirja para um ponto  $a \in C$ . Então, como  $\phi$  é contínua, temos

$$\phi(a) = \phi(\lim y_n) = \lim \phi(y_n) = \lim y_{n+1} = a,$$

logo  $a$  é ponto fixo de  $\phi$ . Mostremos agora que  $\phi$  não admite dois pontos fixos distintos. De fato, se  $\phi(a) = a$  e  $\phi(b) = b$ , e vale

$$d(\phi(x), \phi(y)) \leq cd(x, y),$$

com  $0 < c < 1$ , para  $x, y \in C$  quaisquer, então

$$d(a, b) = d(\phi(a), \phi(b)) \leq cd(a, b)$$

donde  $(1 - c)d(a, b) \leq 0$ . Como  $1 - c > 0$ , concluímos que  $d(a, b) = 0$ , ou seja  $a = b$  já que  $d$  é uma métrica. Só nos resta, portanto, mostrar que  $(y_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $C$ . Ora,

$$\begin{aligned} d(y_1, y_2) &= d(\phi(y_0), \phi(y_1)) \leq cd(y_0, y_1) \\ d(y_2, y_3) &= d(\phi(y_1), \phi(y_2)) \leq cd(y_1, y_2) \leq c^2d(y_0, y_1) \end{aligned}$$

e em geral, temos

$$d(y_n, y_{n+1}) \leq c^n d(y_0, y_1)$$

para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Segue-se que, para  $n, p \in \mathbb{N}$  quaisquer:

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+p}) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \dots + d(y_{n+p-1}, y_{n+p}) \\ &\leq [c^n + c^{n+1} + \dots + c^{n+p-1}] \cdot d(y_0, y_1) \\ &= c^n [1 + c + \dots + c^{p-1}] \cdot d(y_0, y_1) \\ &\leq \frac{c^n}{1-c} \cdot d(y_0, y_1). \end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} c^n = 0$ , pois  $0 \leq c < 1$ , concluímos que  $(y_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $C$ , o que completa a demonstração. □

Para provar que a Equação (4.2) tem uma única solução mostraremos que

$$\phi(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, y \in C$$

satisfaz o teorema do ponto fixo de Banach. Para isso utilizamos o seguinte resultado.

**Lema 4.3** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e tal que a derivada parcial  $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seja também contínua. Dado um subconjunto limitado  $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ , existe uma constante  $K > 0$  tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

para todos  $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{\Omega}_0$ .

Sejam dois conjuntos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , em que seus elementos são respectivamente  $x$  e  $y$ , vamos definir a distância  $d$  entre esses conjuntos como

$$d(\Omega_1, \Omega_2) = \inf\{d(x, y) : x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}.$$

**Demonstração do Lema 4.3 :** Vamos definir um número  $\delta > 0$  que satisfaz

$$\delta \leq d(\bar{\Omega}_0, \partial\Omega),$$

de fato, existe  $\delta > 0$  tendo em vista que  $\partial\Omega_0 \cap \partial\Omega = \emptyset$  em que  $\partial\Omega$  representa a fronteira de  $\Omega$ , e designemos por

$$\Omega_\delta = \left\{ (x, y) \in \Omega : d((x, y), \bar{\Omega}_0) < \frac{\delta}{2} \right\}$$

uma  $(\frac{\delta}{2})$ -vizinhança de  $\bar{\Omega}_0$ . É importante observar que  $\partial\Omega_\delta \cap \partial\Omega = \emptyset$ . Dados  $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{\Omega}_0$  com  $|y_1 - y_2| < \delta$  temos que o segmento  $[x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2], 0 \leq \lambda \leq 1$  é o segmento que liga os pontos  $(x, y_1)$  e  $(x, y_2)$ , e este está contido em  $\Omega_\delta$ . Aplicando o teorema do valor médio

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1 - y_2), y_1 > y_2 \quad (4.3)$$

em que  $\xi$  está no segmento descrito acima. Usando

$$M_1 = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in \bar{\Omega}_\delta\},$$

obtemos de (4.3),  $M_1$  está bem definido tendo em vista que  $f_y$  é contínua no compacto  $\bar{\Omega}_\delta$ . Assim é claro que  $|f_y(x, y)| \leq M_1, \forall (x, y) \in \bar{\Omega}_\delta$ .

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |f_y(x, \xi)| \cdot |y_1 - y_2| \\ &\leq M_1 |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

que é válida para  $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{\Omega}_0$  com  $|y_1 - y_2| < \delta$ .

Para os pontos com  $|y_1 - y_2| < \delta$ , temos

$$\begin{aligned} |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq |f(x, y_1)| + |f(x, y_2)| \\ &< M + M = 2M \leq 2M \frac{|y_1 - y_2|}{\delta} \\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq \max\left\{\frac{2M}{\delta}, M\right\} |y_1 - y_2| \\ |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq 2M \leq \frac{2M}{\delta} |y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

em que  $M$  é o  $\max\{|f(x, y)|$  para  $(x, y) \in \bar{\Omega}_0\}$ .

Assim, basta tomar  $K = \max\{M_1, \frac{2M}{\delta}\}$ . Portanto

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K |y_1 - y_2|$$

o que finaliza a demonstração. □

Agora, podemos provar que o P.V.I. (4.1) tem solução e que ela é única ou seja, provaremos que existe uma única função que satisfaz a equação integral a seguir.

Consideremos a função  $\phi$  definida em  $C(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  e que associa a cada  $y \in C(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  uma função

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, x \in I.$$

Note que  $y(x)$  é uma função contínua para  $x \in J_{\bar{a}}$ ,  $y(x_0) = y_0$  e que

$$\begin{aligned} |y(x) - y_0| &\leq \left| \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{x_0}^x |f(s, y(s))| ds \\ &\leq M \int_{x_0}^x dx = M(x - x_0) \leq M\bar{a} \leq b \end{aligned}$$

lembrando que  $\bar{a}$  foi definido anteriormente como  $0 < \bar{a} \leq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$  e  $J_{\bar{a}}$ .

Assim  $\phi(y(x)) \in C(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  pois, o conjunto  $C(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  foi definido anteriormente como

$$C = \{g : J_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R} : g(x_0) = y_0, |g(x) - y_0| \leq b\}.$$

Logo  $\phi : C(J_{\bar{a}}, \mathbb{R}) \rightarrow C(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$ . Note que as soluções de (4.1) são os pontos fixos de  $\phi$ . Resta provar que  $\phi$  satisfaz o teorema do ponto fixo de Banach. Para isto, calculamos

$$\begin{aligned} |\phi(y_1(x)) - \phi(y_2(x))| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))] ds \right| \\ &\leq k \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_2(s)| ds \\ &\leq K\bar{a}d(y_1, y_2) \end{aligned}$$

em que  $k$  e  $K$  são dados como no lema anterior. Daí, segue que

$$d(\phi(y_1), \phi(y_2)) \leq K\bar{a}d(y_1, y_2).$$

Logo  $\phi$  é uma contração se  $K\bar{a} < 1$ , desta forma, basta escolher  $\bar{a} < \frac{1}{K}$ . Então existe um e somente um  $y \in C(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  tal que  $y = \phi(y)$ , que é solução da equação integral. Portanto, é solução do P.V.I. no intervalo  $I = (x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a})$ .

□

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Fizemos em nosso estudo uma análise de como podemos modelar fenômenos ligados à Dinâmica de Fluidos aplicando os conceitos de Equações Diferenciais afim de proporcionar aprofundamento dos conhecimentos adquiridos desde a formação inicial no curso de Licenciatura em Matemática.

Pensamos ainda que este texto possa ser utilizado em cursos introdutórios sobre Modelagem Matemática na formação inicial de professores em cursos de Licenciatura em Matemática afim de que tais profissionais tenham maior compreensão da importância e da aplicabilidade da Matemática nos mais diversos campos do conhecimento.

# Apêndice A

## Apêndice A - Teorema Fundamental do Cálculo

**Teorema 5.1 (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Se  $f$  for integrável em  $[a, b]$  e se  $F$  for uma primitiva de  $f$  em  $[a, b]$ , então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

**Demonstração:** De acordo com a definição de integral, se  $f$  for integrável em  $[a, b]$ , o valor do limite

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i \quad (5.1)$$

será sempre o mesmo, independente da escolha dos  $c_i$ , e igual a  $\int_a^b f(x)dx$ . Assim, se, para uma particular escolha dos  $c_i$ , tivermos

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = L$$

então teremos  $L = \int_a^b f(x)dx$ .

Suponhamos, agora, que  $f$  seja integrável em  $[a, b]$  e que admita uma primitiva  $F(x)$  em  $[a, b]$  isto é,  $F'(x) = f(x)$  em  $[a, b]$ . Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . Já vimos que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Segue então, do Teorema do Valor Médio, que, para uma conveniente escolha de  $c_i$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , teremos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n F'(\bar{c}_i)\Delta x_i$$

ou

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i)\Delta x_i.$$

Se, para cada partição  $P$  de  $[a, b]$ , os  $c_i$  forem escolhidos como em 5.1, teremos

$$\lim_{\text{máx}\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{c}_i) \Delta x_i = F(b) - F(a)$$

e, portanto,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

□

# Apêndice B

## Volume de Sólido de Revolução

Seja  $f$  uma função contínua em  $[a, b]$ , com  $f(x) \geq 0$  em  $[a, b]$ ; seja  $B$  o conjunto obtido pela rotação, em torno do eixo  $x$ , do conjunto  $A$  do plano limitado pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ , pelo eixo  $x$  e pelo gráfico de  $y = f(x)$ . Estamos interessados em definir o volume  $V$  de  $B$ .

Seja  $P : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  uma partição qualquer de  $[a, b]$  e, respectivamente,  $\bar{c}_i$  e  $\bar{\bar{c}}_i = x_i$ . Temos:  $\pi[f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i = \text{volume do cilindro de altura } \Delta x_i \text{ e base de raio } f(\bar{c}_i)$  (cilindro de "dentro").  $\pi[f(\bar{\bar{c}}_i)]^2 \Delta x_i = \text{volume do cilindro de altura } \Delta x_i \text{ e base de raio } f(\bar{\bar{c}}_i)$  (cilindro de "fora").

Uma boa definição para o volume de  $V$  deverá implicar

$$\sum_{i=1}^n \pi[f(\bar{c}_i)]^2 \Delta x_i \leq \text{volume} \leq \sum_{i=1}^n \pi[f(\bar{\bar{c}}_i)]^2 \Delta x_i$$

para toda partição  $P$  de  $[a, b]$ . Para máx  $\Delta x_i \rightarrow 0$ , as somas de Riemann que comparecem nas desigualdades tendem a  $\int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$ ; nada mais natural, então, do que definir o volume  $V$  de  $B$  por

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

ou

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx, \text{ em que } y = f(x).$$

# Referências Bibliográficas

- [1] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia*. São Paulo, Contexto, 2014.
- [2] BOYER, C. B. *História da Matemática*, 2ª ed. São Paulo, Edgard Blucher, 1996.
- [3] EVES, H. *Introdução à História da Matemática*, 1ª ed. Campinas-SP, Editora da Unicamp, 2004.
- [4] FIGUEIREDO, D. G. D., AND NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*, 3ª ed. Rio de Janeiro, IMPA, 2014.
- [5] GONDAR, J. L., AND CIPOLATTI, R. *Iniciação à Física Matemática: modelagem de processos e métodos de solução*. Rio de Janeiro, IMPA, 2011.
- [6] NAGLE, R. K., SAFF, E. B., AND SNIDER, A. D. *Equações Diferenciais*, 8ª ed. São Paulo, Pearson, 2012.
- [7] OLIVEIRA, E. C. D., AND TYGEL, M. *Métodos Matemáticos para Engenharia*, 2ª ed. Rio de Janeiro, SBM, 2010.
- [8] STEWART, I. *Dezessete Equações que Mudaram o Mundo*, 1ª ed. Rio de Janeiro, Zahar, 2013.
- [9] TEIXEIRA, F. L. Modelos descritos por equações diferenciais ordinárias. Master's thesis, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2012.