

516 Pontes, Rogério de Carvalho
P814m Geometria espacial : motivação para Olimpíadas de
Matemática / Rogério de Carvalho Pontes. - Rio Claro, 2016
101 f. : il., figs., tabs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Biociências de Rio Claro
Orientador: Rawlilson de Oliveira Araújo

1. Geometria. 2. Poliedros. 3. Geometria espacial. 4.
Deltaedros. 5. Bimedias. 6. Vetores. 7. Combinatória. 8.
Geometria analítica. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Rogério de Carvalho Pontes

GEOMETRIA ESPACIAL: MOTIVAÇÃO PARA OLIMPÍADAS DE
MATEMÁTICA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo
Orientador

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - IGCE - UNESP.

Prof. Dr. Cristiano Torezzan
Departamento de Matemática Aplicada- FCA - UNICAMP

Rio Claro, 31 de Agosto

Dedico este trabalho a minha querida esposa Maria Angélica, aos meus filhos Pedro Lucas e Pamela e aos meus sobrinhos Polyanna, Grabiely, Talita, Luciano, Marcelo Augusto e Paula Virgínia.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a DEUS pelo dom da vida, aos meus pais, Luciano e Lázara por me proporcionarem uma boa educação e ao meus queridos irmãos José Marcelo e Luciano por me apoiarem sempre. Agraço ainda, ao ex-aluno e amigo Eduardo Rocha Walchek pela ajuda prestada , a minha amada esposa Maria Angélica por estar comigo em todos os momentos difíceis, por ter me apoiado neste projeto sempre me motivando a seguir em frente. Acreditando que ninguém vence sozinho, agradeço a todos amigos ou colegas que tive o prazer de conviver, Gláucia, João Calixto, Alexandre, Antonio Lima, Luciano, Maria Cecília, Mariana, Sibeli, Paulo Ferrari, entre outros... E finalmente agradeço aos professores do Departamento de Matemática da Unesp Rio Claro que, dedicando-se muito, tornaram o PROFMAT realidade, e através de suas aulas nos motivaram a ser matemáticos e professores melhores, especialmente ao ao meu orientador Professor Dr. Rawlilson de Oliveira Araújo, pela dedicação, atenção e paciência. Não podia deixar de citar a querida Prof^a. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato pela imensa dedicação e atenção nessa jornada como discente. Ninguém vence sozinho...obrigado a todos!

"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."

Albert Einstein

Resumo

Neste trabalho, exploramos as definições mais usuais de Geometria Espacial, apresentamos um resultado sobre o volume de um icosaedro regular e um resultado envolvendo as bimedias de um poliedro de n vértices, com o objetivo de contribuir para preparação de alunos do 9º ano do ensino fundamental ao 3º do ensino médio para olimpíadas de matemática.

Palavras-chave: Vetores, Combinatória, Geometria Espacial, Geometria Analítica.

Abstract

In this work , we explore the most common definitions of spatial geometry , we present a result for the volume of a regular icosahedron and a result involving bimedians of a polyhedron with n vertices result in order to contribute to the preparation of students in the 9th year elementary school to 3th high school for mathematics Olympiads.

Keywords: Vectors, Combinatorial, Space geometry, Analytic Geometry.

Lista de Figuras

1.1	Orientação da reta	19
1.2	Coordenadas de um ponto	20
1.3	Distância entre dois pontos	21
1.4	Coordenadas do Baricentro	22
1.5	segmentos de reta	24
1.6	Intersecção das diagonais do paralelogramo $ABCD$	25
1.7	Coincidência dos pontos médios de AD e BC	25
1.8	Vetores equipolentes	26
1.9	Vetor transportado	26
1.10	Vetor posicionado na origem do sistema	27
1.11	Vetor soma	28
1.12	Soma de vetores 1	28
1.13	Soma de vetores 2	29
1.14	Produto de um número (escalar) por um vetor	30
1.15	Representação do produto de um número α por um vetor	30
1.16	Diferença entre vetores	33
1.17	Vetores ortogonais	34
1.18	Produto interno 1	35
1.19	Produto interno 2	35
1.20	Princípio aditivo	36
2.1	Poliedro convexo e Poliedro não convexo	40
2.2	Região iluminada e região sombria	43
2.3	Poliedro com faces iluminadas	44
2.4	Poliedros regulares	46
2.5	Família dos deltaedros convexos	47
2.6	Tabela 1	48
2.7	Vista superior do tetraedro	49
2.8	Tetraedro regular	50
2.9	Vista superior do octaedro	51

2.10	Octaedro Regular	51
2.11	Tetraedro inscrito no icosaedro regular	52
2.12	Secções planas no icosaedro regular	53
2.13	Intersecção das secções planas	53
2.14	Segmento áureo	54
2.15	Tetraedro	55
3.1	As medianas de um triângulo	57
3.2	As medianas de um tetraedro	60
3.3	As bimedias de um tetraedro	63
3.4	Um octaedro regular	73

Sumário

1	Alguns Resultados Matemáticos	19
1.1	Coordenadas no espaço	19
1.2	Distância entre dois pontos	20
1.3	Coordenadas do baricentro	21
1.4	Vetores no espaço	23
1.5	Operação com vetores	28
1.6	O produto interno	32
1.7	Combinações e Permutações	36
1.7.1	Princípios Aditivo e Multiplicativo	36
1.7.2	Permutações Simples	37
1.7.3	Combinações Simples	38
2	Poliedros	39
2.1	Definição	39
2.2	As primeiras relações	40
2.3	Desigualdades importantes	41
2.4	Teorema de Euler	42
2.5	Poliedros regulares	45
2.6	Deltaedros	47
2.7	Construção do tetraedro regular	49
2.7.1	Volume do tetraedro regular	50
2.8	Construção do octaedro regular	51
2.8.1	Volume do Octaedro Regular	52
2.9	Volume do icosaedro regular	52
3	Bimediana	57
3.1	Motivação	57
3.2	A fórmula geral	65
3.3	A demonstração da fórmula	67
3.4	Exemplo: Octaedro regular	73

4 Matemática Olímpica

75

Bibliografía

103

Introdução

Estudando o artigo [2] e pensando em uma contribuição para a matemática olímpica, desenvolvemos minuciosamente as relações entre medianas e bimedias num tetraedro regular, podendo estender-se a outros poliedros com n vértices.

No primeiro capítulo nos apropriamos de alguns resultados matemáticos em Geometria Analítica (no espaço) e combinações simples, conceitos estes, que utilizamos nas demonstrações dos teoremas enunciados em [2].

No segundo capítulo apresentamos a dedução formal e detalhada da Relação de Euler e mostramos também, que são apenas cinco os poliedros regulares (de Platão), de modo detalhado, como uma motivação para as aulas de geometria espacial no ensino médio. Apresentamos a família dos deltaedros, fazendo algumas referências e comentários. Ainda neste capítulo, inspirado nas aulas de Olimpíadas de Matemática, no qual estamos envolvidos nos últimos anos, mostramos as fórmulas de se calcular alguns elementos importantes dos deltaedros Platônicos (tetraedros, octaedro e icosaedro), como a distância entre um vértice e uma face, área superficial e volume.

No terceiro capítulo o nosso interesse foi estudar, analisar e provar os resultados encontrados em [2] envolvendo conceitos de medianas e bimedias num tetraedro regular e generalizando para um poliedro com n vértices.

Por fim, no quarto capítulo apresentamos algumas questões de geometria espacial como sugestões para aplicação nas aulas preparatórias para Olimpíadas de Matemática que contemplam alunos do 9º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.

1 Alguns Resultados Matemáticos

Neste capítulo, apresentamos conceitos matemáticos importantes que vão nos auxiliar nas provas dos teoremas que serão apresentados nos capítulo 3. Estes resultados encontram-se em [1], [4] e [7].

1.1 Coordenadas no espaço

Partindo dos conceitos e fatos referentes à Geometria Espacial, introduziremos o método das coordenadas, segundo o qual os pontos do espaço são representados por ternos ordenados de números. Uma **reta orientada** é uma reta na qual se escolheu um sentido de percurso, chamado **positivo**; o sentido inverso é chamado **negativo**. Numa reta orientada, diz-se que o ponto A está situado **à esquerda** do ponto B (e consequentemente, B está à direita de A) quando o sentido de A para B é positivo.

Observação: Consideremos apenas os sistemas de eixos ortogonais no espaço.

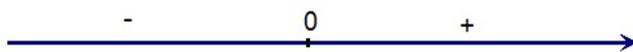


Figura 1.1: Orientação da reta

Um sistema de **eixos ortogonais** $OXYZ$ no espaço E determina, de modo natural, uma correspondência biunívoca entre os pontos do espaço e os ternos ordenados de números reais. A bijeção $E \rightarrow \mathbb{R}^3$ é obtida associando-se cada ponto P o terno (x, y, z) , formado pelas coordenadas de P relativas ao sistema $OXYZ$. A função inversa $\mathbb{R}^3 \rightarrow E$ associa cada terno $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ o ponto P do espaço assim obtido: tomam-se, sobre os eixos OX, OY e OZ , respectivamente, os pontos A, B , e C cujas as coordenadas nesses eixos são x, y e z . Os segmentos não-colineares OA, OB e OC determinam um paralelepípedo (reto-retângulo). P é o vértice oposto a O nesse paralelepípedo.

Como estamos considerando apenas o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, escrevemos $P = (x, y, z)$ para significar que x, y e z são as coordenadas do ponto P . As coordenadas do ponto O são $(0,0,0)$. Os pontos dos planos Π_{xy} , Π_{xz} e Π_{yz} tem coordenadas $(x, y, 0)$, $(x, 0, y)$ e $(0, y, z)$ respectivamente.

Um plano chama-se **vertical** quando é paralelo a OZ .

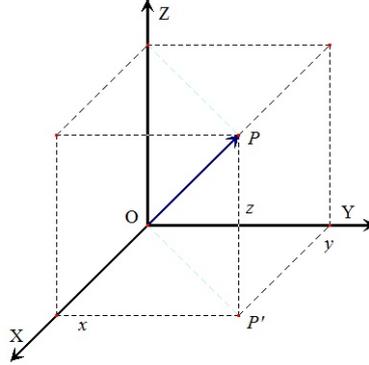


Figura 1.2: Coordenadas de um ponto

Um plano Π , paralelo a Π_{xy} , chama-se **plano horizontal**. Se Π intersecta o eixo OZ num ponto de coordenada c sobre esse eixo, os pontos de Π são todos da forma $P = (x, y, c)$. Diz-se então que a equação do plano Π tem a forma $z = c$. De modo análogo, as equações dos planos paralelos a Π_{xz} e Π_{yz} são respectivamente das formas $y = b$ e $x = a$

1.2 Distância entre dois pontos

Seja $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço E . Queremos obter uma fórmula que exprima a distância entre dois pontos de E em termos das coordenadas desses pontos no sistema $OXYZ$.

Sejam $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$ os pontos dados, consideremos os pontos auxiliares $R = (x_1, y_2, z_1)$ e $S = (x_2, y_2, z_1)$. Como os segmentos de reta PR , RS e SQ são respectivamente paralelos aos eixos OY , OX e OZ vê-se imediatamente que

$$d(P, R) = |y_1 - y_2|, \quad d(R, S) = |x_1 - x_2| \quad \text{e} \quad d(S, Q) = |z_1 - z_2|$$

Além disso, os triângulos PRS e PQS são retângulos. Logo,

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2$$

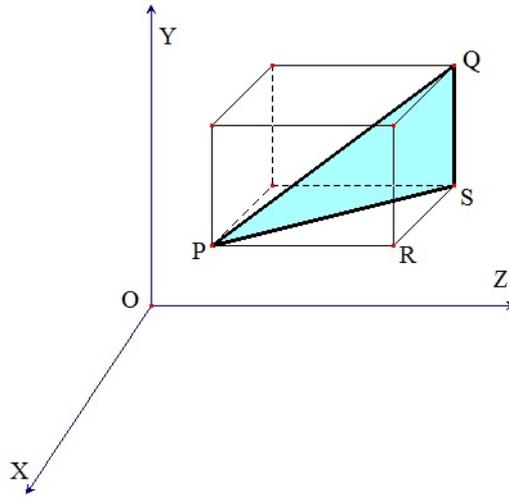


Figura 1.3: Distância entre dois pontos

$$d(P, Q)^2 = d(P, R)^2 + d(R, S)^2 + d(S, Q)^2$$

ou seja,

$$d(P, Q)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2.$$

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

para a distância entre dois pontos.

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y, z)$ à origem $O = (0, 0, 0)$ é $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1.3 Cooordenadas do baricentro

Da geometria plana, sabemos que o **baricentro** G de um triângulo é o encontro das três medianas e as divide na razão 2 para 1, sendo o segmento maior o que

possui extremidade no vértice do triângulo. Vamos considerar um sistema de eixos coordenados OXY ortogonais, isto é \mathbb{R}^2 , e mostrar que as coordenadas do baricentro são

$$x_g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \quad e \quad y_g = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Seja um triângulo ABC , cujas coordenadas dos vértices são respectivamente $A(x_1, y_1)$; $B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$. Seja o ponto médio referente ao lado BC aqui representado por $D(x_d, y_d)$. Sejam as coordenadas do baricentro representado por $G(x_g, y_g)$

O ponto médio de um segmento é dado pela metade da soma das coordenadas de

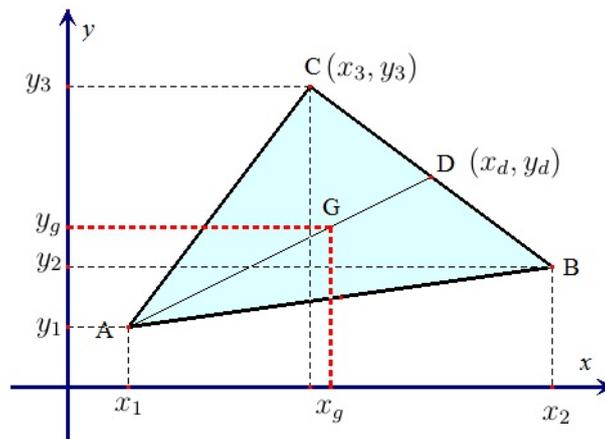


Figura 1.4: Coordenadas do Baricentro

seus extremos. Assim, as coordenadas do ponto médio do lado BC são dadas por:

$$\begin{cases} x_d = \frac{x_2 + x_3}{2} \\ y_d = \frac{y_2 + y_3}{2} \end{cases} \quad (1.1)$$

Como o ponto G divide uma mediana numa razão de dois para um, então temos a relação referente à mediana ao lado BC :

$$\frac{AG}{GD} = \frac{2}{1} \quad (1.2)$$

Coordenadas da abscissas

Considerando as abscissas dos pontos A, G e D em relação a igualdade (1.2), temos que:

$$\frac{x_g - x_1}{x_d - x_g} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow x_g - x_1 = 2x_d - 2x_g \Leftrightarrow 3x_g = x_1 + 2x_d \quad (1.3)$$

Das relações (1.1) e (1.3), obtemos:

$$3x_g = x_1 + 2 \left(\frac{x_2 + x_3}{2} \right)$$

$$x_g = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

Coordenadas da ordenadas

Analogamente ao que fizemos para encontrar a coordenada da abscissa do baricentro, a fazemos para a ordenada:

$$\frac{y_g - y_1}{y_d - y_g} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow y_g - y_1 = 2y_d - 2y_g \Leftrightarrow 3y_g = y_1 + 2y_d \quad (1.4)$$

Das relações (1.1) e (1.4), obtemos:

$$3y_g = y_1 + 2 \left(\frac{y_2 + y_3}{2} \right)$$

$$y_g = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

1.4 Vetores no espaço

Os vetores, que já se revelaram um instrumento muito útil no estudo da Geometria Analítica Plana, passam a tornar-se quase indispensáveis em três dimensões. Seu emprego facilita a compreensão, simplifica as fórmulas e dá mais eficácia aos cálculos. Por isso serão introduzidos logo de início. Eles serão definidos como classes

de equipolência de segmentos orientados. Deve-se observar que essa definição é intrínseca, isto é, apresenta os vetores como objetos que não dependem de um sistema de coordenadas. Usam-se as coordenadas para efetuar cálculos com vetores, mas as conclusões independem do sistema de eixos adotados.

Diz-se que um segmento de reta está **orientado** quando nele foi escolhido um sentido de percurso, chamado **sentido positivo**. Quando nos referirmos ao segmento de reta orientado AB , esta notação significará que o sentido positivo de percurso é de A para B . Assim, o sentido positivo do segmento orientado BA é de B para A .

Os segmentos de reta orientados AB e CD dizem-se **equipolentes** quando cumprem as seguintes condições:

1. Têm o mesmo comprimento;
2. São paralelos ou colineares;
3. Têm o mesmo sentido.

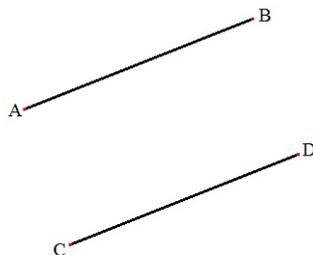


Figura 1.5: segmentos de reta

Quando AB e CD são equipolentes, escreve-se $AB \equiv CD$. A condição (1) significa que $d(A, B) = d(C, D)$. Quanto a (2) segmentos colineares são aqueles que se situam sobre a mesma reta. Quanto ao paralelismo, isto significa que as retas que contém AB e CD são paralelas e nunca é demais lembrar que, retas paralelas são aquelas que **estão sobre o mesmo plano** e não têm pontos em comuns. Finalmente a condição (3) (que tem significado evidente se AB e CD são colineares), no caso de AB e CD paralelos significa que os sentidos de percurso em AB e CD são tais que não apenas AB é paralelo a CD , mas AC e BD também são paralelos. Noutras palavras, (3) quer dizer que o quadrilátero $ABCD$ (vértices percorridos nesta ordem) é um paralelogramo.

Uma caracterização útil e interessante da equipolência se baseia no fato de que um quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo se, e somente se suas diagonais AD e BC intersectam mutuamente no meio, isto é, o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC .

Assim, os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes se, e

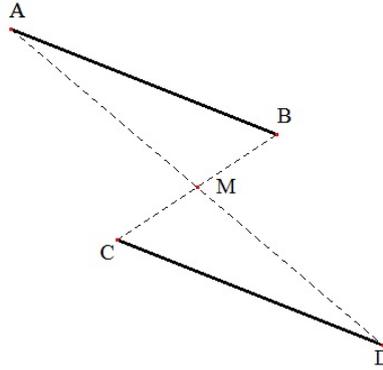


Figura 1.6: Intersecção das diagonais do paralelogramo $ABCD$

somente se, o ponto médio de AD coincide com o ponto médio de BC . Quando AB e CD são colineares, a coincidência de seus pontos médios de AD e BC nada tem a ver com paralelogramos mas traduz exatamente o fato de que esses segmentos orientados têm o mesmo comprimento e o mesmo sentido. São as

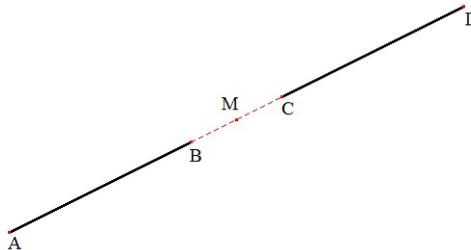


Figura 1.7: Coincidência dos pontos médios de AD e BC

seguintes relações de equipolência $AB \equiv CD$:

reflexiva, isto é, $AB \equiv AB$

simétrica, isto é, $AB \equiv CD \Rightarrow CD \equiv AB$

transitiva, isto é, se $AB \equiv CD$ e $CD \equiv EF \Rightarrow AB \equiv EF$

Quando dois segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes, diz-se que eles determinam o mesmo **vetor**. Indica-se com notação $v = \overrightarrow{AB}$ o vetor determinado pelo segmento orientado AB . Assim, a equipolência $AB \equiv CD$ significa a igualdade de vetores $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Portanto, o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é representado não somente pelo segmento orientado AB como também por qualquer segmento orientado CD equipolente a AB .

Por extensão, é conveniente considerar o **vetor zero (ou vetor nulo)** $0 = \overrightarrow{AA}$, representado por qualquer segmento degenerado AA , cuja origem coincide com a

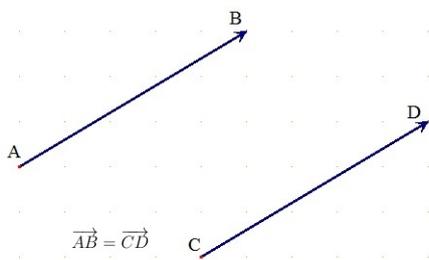


Figura 1.8: Vetores equipolentes

extremidade. O vetor nulo será indicado pelo mesmo símbolo $\mathbf{0}$ que denota o número zero. Isto não deve causar confusão.

Dados um vetor $v = \overrightarrow{AB}$ e um ponto P , existe um único ponto Q tal que o segmento orientado PQ é equipolente a AB , ou seja, tal que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$. Isto é óbvio quando P pertence a reta AB . Caso contrário, traça-se pelo ponto P a reta r paralela a AB e pelo ponto B a reta s , paralela a AP . O ponto procurado Q é a interseção das retas r e s .

Este fato significa que, dado um vetor v , pode-se representá-lo, na forma $v = \overrightarrow{PQ}$, por um segmento de reta PQ cuja origem pode estar num ponto qualquer P do espaço. Neste sentido, diz-se que os vetores são **livres**: podem ter sua origem colocada em qualquer ponto.

Outra interpretação é a seguinte: o vetor v transporta qualquer ponto P do espaço

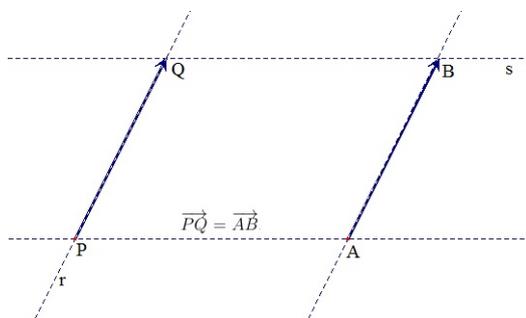


Figura 1.9: Vetor transportado

para um novo ponto Q , bem determinado a partir de P e v pela igualdade $v = \overrightarrow{PQ}$. Esta observação resgata o sentido original da palavra **vetor** (do Latim *vehere* = transportar). Por isso, usaremos às vezes a notação $Q = P + v$ para significar $v = \overrightarrow{PQ}$.

Observação. Um leitor mais exigente notaria que não foi explicitado o que é um vetor. Para satisfazê-lo, diríamos que o vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos segmentos orientados equipolentes ao segmento orientado AB . A seguir, caracterizaremos a equipolência em termos de coordenadas.

Em relação a um sistema de eixos ortogonais $OXYZ$ tomado no espaço, sejam $A = (x, y, z)$, $B = (x_1, y_1, z_1)$, $C = (r, s, t)$ e $D = (r_1, s_1, t_1)$.

Os segmentos de reta orientados AB e CD são equipolentes se, e somente se, $x_1 - x = r_1 - r$, $y_1 - y = s_1 - s$ e $z_1 - z = t_1 - t$.

Com efeito, os pontos médios de AD e BC têm coordenadas:

$$\left(\left(\frac{x + r_1}{2} \right), \left(\frac{y + s_1}{2} \right), \left(\frac{z + t_1}{2} \right) \right) \text{ e } \left(\left(\frac{x_1 + r}{2} \right), \left(\frac{y_1 + s}{2} \right), \left(\frac{z_1 + t}{2} \right) \right)$$

respectivamente. A fim de que esses dois pontos médios coincidam, é necessário e suficiente que:

$$\frac{x + r_1}{2} = \frac{x_1 + r}{2}, \quad \frac{y + s_1}{2} = \frac{y_1 + s}{2} \quad \text{e} \quad \frac{z + t_1}{2} = \frac{z_1 + t}{2}$$

ou seja:

$$x_1 - x = r_1 - r, \quad y_1 - y = s_1 - s \quad \text{e} \quad z_1 - z = t_1 - t.$$

Portanto as diferenças $\alpha = x_1 - x$, $\beta = y_1 - y$ e $\gamma = z_1 - z$ são iguais às diferenças de coordenadas das extremidades de qualquer segmento equipolente a AB . Por isso dizemos que esses números são as **coordenadas** do vetor $v = \overrightarrow{AB}$ relativamente ao sistema $OXYZ$.

Se escolhermos para representar o vetor $v = \overrightarrow{OP}$ o segmento orientado OP com a origem coincidente com a origem do sistema $OXYZ$ então, como $O = (0, 0, 0)$, as coordenadas do vetor $v = \overrightarrow{OP}$ coincidirão com as coordenadas (x, y, z) do ponto P .

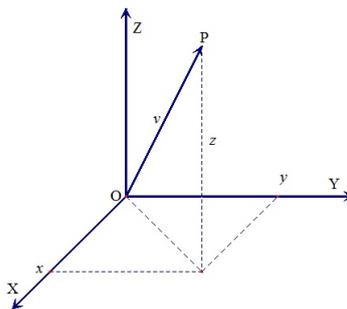


Figura 1.10: Vetor posicionado na origem do sistema

1.5 Operação com vetores

O que faz dos vetores um instrumento útil é principalmente o fato de que podemos efetuar operações entre eles, de forma que os resultados dessas operações não dependem de escolhas arbitrárias, como sistemas de eixos ou mesmo a fixação de uma origem. As coordenadas ocorrem como um importante auxiliar de cálculo, mas as respostas independem delas.

A **soma** $u + v$ de dois vetores u, v é definida assim: representam-se $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{BC}$ por segmentos orientados tais que o final do primeiro coincida com o começo do segundo e põe-se simplesmente $u + v = \overrightarrow{AC}$.

Quando os vetores u e v não são colineares (ou não são paralelos, o que dá no

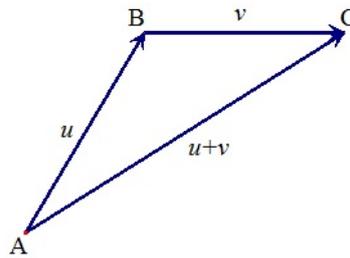


Figura 1.11: Vetor soma

mesmo já que se pode pôr a origem do vetor onde se quiser), há outra maneira de definir a soma $u + v$, com o mesmo resultado. Representam-se $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$ por segmentos orientados com a mesma origem A . Toma-se um ponto D de tal modo que $ABDC$ seja um paralelogramo e põe-se $u + v = \overrightarrow{AD}$.

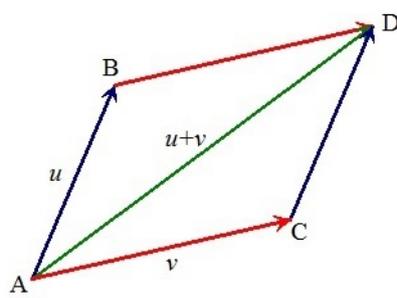


Figura 1.12: Soma de vetores 1

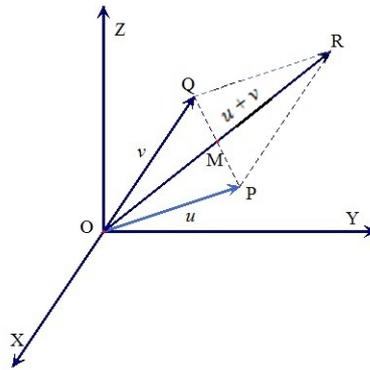


Figura 1.13: Soma de vetores 2

Fixado no espaço um sistema de eixos $OXYZ$, os vetores u, v passam a ser representados por suas coordenadas: $u = (x, y, z), v = (x_1, y_1, z_1)$. Afirmamos que a soma $u + v$ tem coordenadas $u + v = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$.

Para verificar isto, adotamos as representações $u = \overrightarrow{OP}, v = \overrightarrow{OQ}$, onde $O = (0, 0, 0), P = (x, y, z)$ e $Q = (x_1, y_1, z_1)$. Então $u + v = \overrightarrow{OR}$, sendo R o quarto vértice do paralelogramo que tem OP e OQ como lados. Como o ponto médio M da diagonal PQ é também ponto médio da diagonal OR , se chamarmos de r, s, t as coordenadas de R teremos por um lado, $M = (\frac{r}{2}, \frac{s}{2}, \frac{t}{2})$. Portanto $r = x + x_1, s = y + y_1, t = z + z_1$ são coordenadas de R . Noutras palavras, tem-se $u + v = \overrightarrow{OR} = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$, conforme alegado.

O fato de que as coordenadas do vetor soma $u + v = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$ são as coordenadas de $u = (x, y, z)$ e $v = (x_1, y_1, z_1)$ permite deduzir, de modo imediato, as propriedades da adição de vetores a partir das conhecidas propriedades de números reais. Elas são:

Comutatividade: $u + v = v + u$.

Associatividade: $(u + v) + w = u + (v + w)$.

Elemento neutro: $u + 0 = u$.

Inverso aditivo: todo vetor possui um inverso aditivo $-v$, tal que $-v + v = 0$.

O vetor $u + (-v)$ escreve-se $u - v$ e chama-se **diferença** entre u e v .

As propriedades acima são válidas para todos vetores u, v, w . O elemento neutro da adição é o vetor nulo 0 . O inverso aditivo do vetor $v = \overrightarrow{AB}$ é o vetor $-v = \overrightarrow{BA}$. Em termos de coordenadas, se $v = (x, y, z)$ então $-v = (-x, -y, -z)$.

Definiremos agora a **multiplicação** de um vetor v por um número real α , dando como resultado o vetor $\alpha \cdot v$.

Seja $v = \overrightarrow{AB}$. Se $\alpha = 0$ ou $v = 0$, poremos $\alpha \cdot v = 0$ (vetor nulo). Se $\alpha > 0$, definiremos $\alpha \cdot v = \overrightarrow{AC}$, onde C é o ponto da reta AB tal que os sentidos de A para B e de A para C coincidam e $d(A, C) = \alpha \cdot d(A, B)$. Se $\alpha < 0$ então $\alpha \cdot v = -\alpha \cdot v$ será

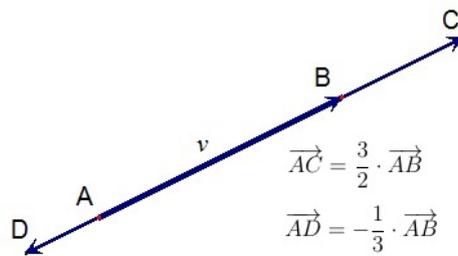


Figura 1.14: Produto de um número (escalar) por um vetor

positivo e definiremos $\alpha \cdot v = -\alpha_1 \cdot v$ (inverso aditivo do $\alpha_1 \cdot v$, já definido).

Fixando no espaço o sistema de eixos ortogonais $OXYZ$, seja $v = (x, y, z)$ a representação do vetor v por suas coordenadas. Afirmamos que $\alpha \cdot v = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$ é a representação de $\alpha \cdot v$.

Para verificar a validade dessa afirmação, seja $v = \overrightarrow{OP}$, onde O é a origem do

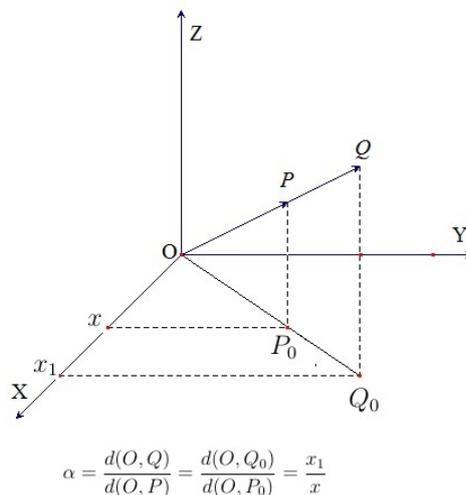


Figura 1.15: Representação do produto de um número α por um vetor

sistema de eixos e $P = (x, y, z)$. Se $\alpha > 0$, a figura acima ilustra que, escrevendo $\alpha \cdot v = \overrightarrow{OQ} = (x_1, y_1, z_1)$, tem-se $x_1 = \alpha \cdot x$, em virtude de um conhecido teorema de Geometria Plana. ("**Toda paralela à base de um triângulo divide outros dois lados em segmentos proporcionais**"). Figuras análogas mostram que $y_1 = \alpha \cdot y$ e $z_1 = \alpha \cdot z$, portanto $\alpha \cdot v = \overrightarrow{OQ} = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z)$.

Se $\alpha < 0$, então $\alpha_1 = -\alpha$ é positivo e

$$\alpha \cdot v = -(\alpha_1 \cdot v) = -(\alpha_1 \cdot x, \alpha_1 \cdot y, \alpha_1 \cdot z) = (-\alpha_1 \cdot x, -\alpha_1 \cdot y, -\alpha_1 \cdot z) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z).$$

Analogamente ao caso da soma, a expressão das coordenadas de $\alpha \cdot v$ em termos das coordenadas de v permite deduzir rapidamente as propriedades formais da multiplicação de um vetor por um número real, que são as seguintes:

Associatividade: $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$.

Elemento neutro: $1 \cdot v = v$.

Distributividade: $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$; $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$.

Prova: Consideremos um sistema de eixos $OXYZ$ na qual as coordenadas de u e v sejam $u = (x, y, z)$ e $v = (x_1, y_1, z_1)$. Então $u + v = (x + x_1, y + y_1, z + z_1)$. Portanto

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha(x + x_1), \alpha(y + y_1), \alpha(z + z_1))$$

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot x + \alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y + \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z + \alpha \cdot z_1)$$

$$\alpha \cdot (u + v) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y, \alpha \cdot z) + (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot y_1, \alpha \cdot z_1) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v.$$

Diz-se que o vetor v é **múltiplo** do vetor u quando existe um número real α tal que $v = \alpha \cdot u$.

É conveniente caracterizar o fato de um vetor ser múltiplo do outro em termos de suas coordenadas. Para isto, tomamos um sistema de eixos $OXYZ$ e consideremos os vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$, dados por suas coordenadas relativamente a esse sistema.

Teorema 1.1. A fim de que um dos vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ seja múltiplo um do outro é necessário e suficiente que $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1 = y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 = 0$.

Demonstração. Se um dos vetores é zero, nada há para provar.

Podemos então admitir que $v_1 \neq 0$ e $v_2 \neq 0$. Para prova que a condição é suficiente, supomos válidas as três igualdades do final do enunciado. Consideremos $\alpha = \frac{x_2}{x_1}$ portanto $x_2 = \alpha \cdot x_1$. De $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = 0$ deduzimos $y_2 = \alpha \cdot y_1$ e de $x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1 = 0$ deduzimos $z_2 = \alpha \cdot z_1$. Portanto $v_2 = \alpha \cdot v_1$. Reciprocamente se um dos vetores (digamos, v_2) é múltiplo do outro, de $v_2 = \alpha \cdot v_1$ deduzimos $x_2 = \alpha \cdot x_1, y_2 = \alpha \cdot y_1, z_2 = \alpha \cdot z_1$ e daí resulta imediatamente que

$$\alpha \cdot x_1 y_2 = \alpha \cdot x_2 y_1, \alpha \cdot x_1 z_2 = \alpha \cdot x_2 z_1 \text{ e } \alpha \cdot y_1 z_2 = \alpha \cdot y_2 z_1.$$

Se $\alpha = 0$, então $x_2 = y_2 = z_2 = 0$

Se $\alpha \neq 0$, por cancelamento obtemos $x_1 y_2 - x_2 y_1 = x_1 z_2 - x_2 z_1 = y_1 z_2 - y_2 z_1 = 0$.

Estas igualdades são óbvias, além de desconsiderarmos o caso em que $v_2 = 0$.

□

Observações:

1. Salvo o caso em que um desses vetores é zero, v_2 é múltiplo de v_1 se, e somente se, v_1 é um múltiplo de v_2 .
2. Dados dois vetores não-nulos, se um deles é múltiplo do outro, diz-se que esses

vetores são **colineares**. Esta terminologia é correta porque se $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$ então os pontos A, B e C estão sobre a mesma reta. E reciprocamente, se A, B, C são pontos distintos situados sobre a mesma reta então existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AC} = \alpha \cdot \overrightarrow{AB}$. Basta tomar $\alpha = \pm \frac{d(A, C)}{d(A, B)}$, escolhendo o sinal positivo se B e C estiverem no mesmo sentido de A e negativo no caso contrário.

3. Como pode-se perceber na demonstração, quando $x_1 \neq 0$, as igualdades $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1 = 0 \Rightarrow y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 = 0$.

4. Os números $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 = x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1 = 0 \Rightarrow y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 = 0$ são os determinantes (2×2) que podem se formar com as colunas da matriz

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}.$$

O Teorema pode também ser lido assim: a fim que os vetores v_1 e v_2 sejam não-colineares (ou **linearmente independentes**) é necessário e suficiente que pelo menos um desses determinantes (2×2) seja diferente de zero.

Dados os números reais $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e os vetores v_1, \dots, v_n , o vetor $v = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n$ chama-se uma **combinação linear** de v_1, \dots, v_n .

1.6 O produto interno

O produto interno de dois vetores é um número, a partir do qual, se pode exprimir a distância entre dois pontos, o ângulo entre duas retas orientadas e, em particular, seu perpendicularismo. A dedução das propriedades do produto interno, assim como o seu cálculo, fica mais fácil quando ele é expresso por meio de coordenadas. Entretanto, como veremos, o produto interno depende apenas dos vetores dados e não do sistema de eixo que se escolheu.

Seja, portanto, $OXYZ$ um sistema de eixos ortogonais no espaço, em relação a qual se tomam as coordenadas dos vetores $u = (x, y, z)$ e $v = (x_1, y_1, z_1)$.

Chama-se **produto interno** desses dois vetores (denotamos por $\langle u, v \rangle$) ao número $\langle u, v \rangle = x \cdot x_1 + y \cdot y_1 + z \cdot z_1$.

Para quaisquer vetores u, v, w e todo $\lambda \in \mathbb{R}$, todas as propriedades a seguir são válidas.

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$;
3. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$;
4. $\langle \lambda \cdot u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle$;
5. $\langle u, \lambda \cdot v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle$;
6. $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$;
7. $\langle u, u \rangle > 0$ se $u \neq 0$.

Se $u = \overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ então $\sqrt{\langle u, u \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a distância do ponto P à origem O . Escreve-se $\sqrt{\langle u, u \rangle} = \|u\|$ e chama-se este número de **módulo, norma ou comprimento** do vetor u . Tem-se $\|u\| = \|-u\|$ e $\|u\|^2 = \langle u, u \rangle$. Quando $\|u\| = 1$, diz-se que u é um vetor um **vetor unitário**. Como segmentos equipolentes têm mesmo comprimento e se $u = \overrightarrow{AB}$, então $\|u\| = d(A, B)$. Segue que o comprimento de $\|u\|$ não depende do sistema de eixos adotado. Mais geralmente, se $u = (x, y, z)$ e $v = (x_1, y_1, z_1) \Rightarrow u - v = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$, portanto:

$$\|u - v\| = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}.$$

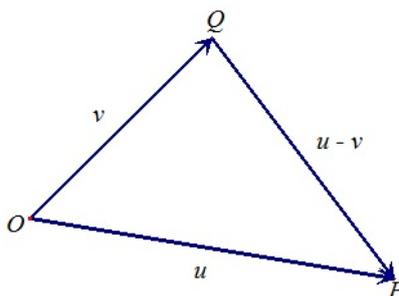


Figura 1.16: Diferença entre vetores

Fazendo $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$, vemos que $\|u - v\|$ é a distância entre os pontos P e Q . Diz-se também que $\|u - v\|$ é **a distância do vetor u ao vetor v** . Evidentemente, $\|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = d(P, Q)$.

Sejam u e v vetores não-nulos. Diz-se que u e v são **ortogonais** ou **perpendiculares**, e escreve-se $u \perp v$, quando, sendo $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$, as retas AB e AC são perpendiculares.

Lema 1.1. *Se os vetores u e v são ortogonais, então $\langle u, v \rangle = 0$.*

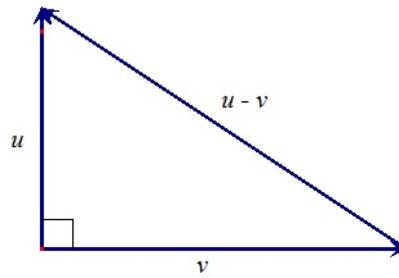


Figura 1.17: Vetores ortogonais

Demonstração. Sejam $u = \overrightarrow{OP}$ e $v = \overrightarrow{OQ}$, logo $v - u = \overrightarrow{PQ}$. Como u e v são ortogonais, PQ é a hipotenusa do triângulo retângulo OPQ .

Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d(P, Q)^2 = d(O, P)^2 + d(O, Q)^2, \text{ ou seja :}$$

$$\|v - u\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \quad (*)$$

De acordo com as propriedades do produto interno, temos:

$$\begin{aligned} \|v - u\|^2 &= \langle v - u, v - u \rangle \\ &= \langle v, v \rangle - \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle u, u \rangle \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2 \cdot \langle u, v \rangle. \quad (**) \end{aligned}$$

Comparando as igualdades (*) e (**) concluímos que $\langle u, v \rangle = 0$. □

Sejam $u = \overrightarrow{AB}$ e $v = \overrightarrow{AC}$ vetores não-nulos. O ângulo θ entre esses vetores é o menor ângulo de que é preciso girar a semirreta AB para fazê-la coincidir com a semirreta AC num plano Π que contenha os pontos A, B e C . Se $\alpha > 0$, nota-se que o ângulo entre $\alpha \cdot u$ e v é igual ao ângulo entre u e v .

Teorema 1.2. Seja θ o ângulo entre os vetores não-nulos u e v .

Tem-se $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \theta$

Demonstração. Suponhamos, inicialmente, que u e v sejam vetores unitários. Colocando $u = \overrightarrow{OA}$ e $v = \overrightarrow{OB}$. Num plano Π que contenha C, A e B , seja $u^* = \overrightarrow{OA^*}$ um vetor unitário ortogonal a u (Figura 1.18). A definição de seno e cosseno assegura que

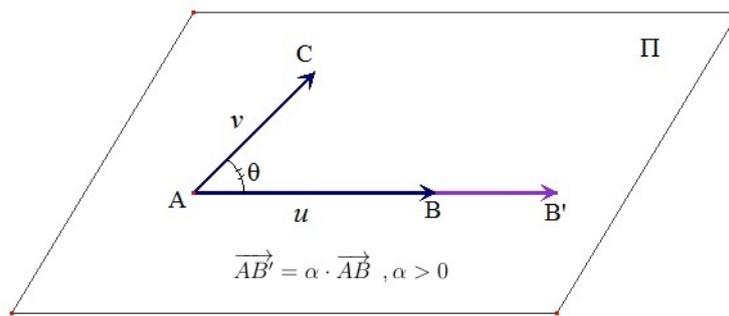


Figura 1.18: Produto interno 1

$$v = \cos\theta \cdot u + \sin\theta \cdot u^*$$

Tomando o produto interno de ambos os membros desta igualdade por u , levando em conta que $\langle u, u \rangle = 1$ e $\langle u, u^* \rangle = 0$ pelo **Lema 1.1**, concluímos que $\langle u, v \rangle = \cos\theta$. No caso geral (em que u e v podem não ser unitários), tomamos $u_1 = \frac{u}{\|u\|}$ e $v_1 = \frac{v}{\|v\|}$. (Isto significa $u_1 = \lambda \cdot u$, $v_1 = \mu \cdot v$ com $\lambda = \frac{1}{\|u\|}$ e $\mu = \frac{1}{\|v\|}$). Então $u = \|u\| \cdot u_1$ e $v = \|v\| \cdot v_1$ logo $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \langle u_1, v_1 \rangle$. Mas u_1 e v_1 são vetores unitários, portanto $\langle u_1, v_1 \rangle = \cos\theta$, donde $\langle u, v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$. \square

Três consequências resultam imediatamente do **Teorema 1.1**.

- (i) Vale a recíproca do **Lema 1.2**: se $\langle u, v \rangle = 0$ então os vetores não-nulos u e v são ortogonais, pois $\cos\theta$ obriga o ângulo entre u e v seja 90° .

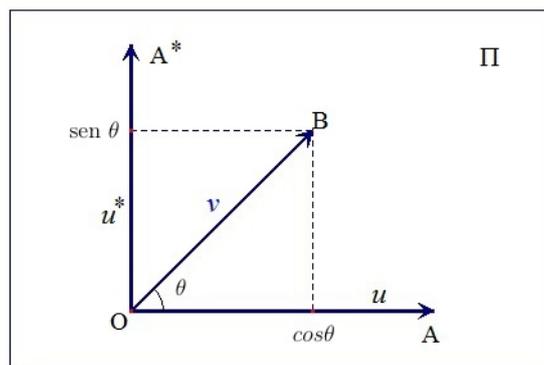


Figura 1.19: Produto interno 2

- (ii) O produto interno de dois vetores não depende do sistema de eixos ortogonais em relação ao qual as coordenadas desses vetores são tomadas.

(iii) **A desigualdade de Cauchy-Schwarz:**

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

em que a igualdade vale se, e somente se, u e v são colineares.

A desigualdade resulta de (1.5), juntamente com o fato de que $|\cos\theta| \leq 1$. A observação adicional provém de que $|\cos\theta| = 1$ se, e somente se, $\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$, casos esses, em que os dois vetores u e v são colineares.

1.7 Combinações e Permutações

1.7.1 Princípios Aditivo e Multiplicativo

A procura por técnicas de contagem está diretamente ligada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas tem primeiro contato com esse assunto. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é "**contar**", ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendida pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem.

Por exemplo, a operação de adição é sempre introduzida em conexão com um problema de contagem:

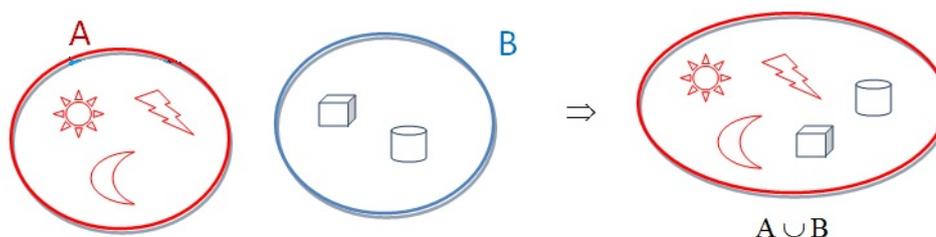


Figura 1.20: Princípio aditivo

A figura 1.19 ilustra um princípio básico de contagem, que podemos chamar de "**Princípio Aditivo**". Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com p e q elementos, respectivamente, então $A \cup B$ possui $p + q$ elementos.

A seguir apresentamos o "**Princípio Multiplicativo**", que, ao lado do "**Princípio Aditivo**", constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem abordados no ensino médio. Para ressaltar tal princípio, consideremos o seguinte

exemplo:

Numa sala há 3 homens e 4 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

Chamando os homens de h_1, h_2, h_3 e as mulheres de m_1, m_2, m_3, m_4 é fácil ver que há 4 casais nos quais o homem é h_1 , e outros 4 nos quais o homem é h_2 e outros 4 nos quais o homem é h_3 . O número de casais é portanto $4 + 4 + 4 = 3 \cdot 4 = 12$.

O exemplo acima ilustra o **Princípio da Multiplicação**, o qual diz:

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1 , a decisão d_2 puder ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 e d_2 é $x \cdot y$.

Assim, no exemplo, para formar um casal devemos tomar as decisões

d_1 : escolha do homem;

d_2 : escolha da mulher.

Como d_1 pode ser tomada de 3 maneiras e, depois disso, d_2 pode ser tomada de 4 maneiras, o número de maneiras de se formar um casal (isto é, de tomar as decisões d_1 e d_2) é $3 \cdot 4 = 12$.

Note que o uso do **Princípio Multiplicativo** permite obter o número de elementos do conjunto

$\{h_1m_1, h_1m_2, h_1m_3, h_1m_4, h_2m_1, h_2m_2, h_2m_3, h_2m_4, h_3m_1, h_3m_2, h_3m_3, h_3m_4\}$ constituído por todos os casais possíveis, sem que seja necessário enumerar seus elementos.

1.7.2 Permutatóes Simples

Dados n objetos distintos a_1, a_2, \dots, a_n , de quantos modos é possível ordená-los? Por exemplo, para os objetos 1,2,3 há 6 ordenatóes: 123, 132, 213, 231, 312, 321. No caso geral temos n modos de escolher o objeto que ocupará a primeira posição, $(n - 1)$ modos de escolher o que ocupará a segunda posição, ..., 1 modo de escolher o objeto que ocupará a última posição. Portanto, o **número de modos de ordenar n objetos distintos** é

$$n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 1 = n!$$

Cada ordenatóe dos n objetos é chamada uma **permutatóe simples** de n objetos e o número de permutatóes simples de n objetos é representado por P_n . Assim, $P_n = n!$ (já que $0! = 1$, define-se $P_0 = 1$)

1.7.3 Combinações Simples

De quantos modos podemos escolher p objetos entre n objetos distintos dados? Ou, semelhantemente, quantos são os subconjuntos com p elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$?

Cada subconjunto com p elementos é chamado de uma **combinação simples** de classe p dos n objetos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 objetos dos elementos do conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ são :

$\{a_1, a_2, a_3\}; \{a_1, a_2, a_4\}; \{a_1, a_2, a_5\}; \{a_1, a_3, a_4\}; \{a_1, a_3, a_5\};$
 $\{a_1, a_4, a_5\}; \{a_2, a_3, a_4\}; \{a_2, a_3, a_5\}; \{a_2, a_4, a_5\}; \{a_3, a_4, a_5\}.$

O número de combinações simples de classe p de n objetos é representado por

$$C_n^p = C_{n,p} = \binom{n}{p}$$

Assim, $C_{5,3}=10$. Analisemos esta resposta: escolha do 1º elemento da combinação pode ser feita de 5 modos; a do 2º, de 4 modos e a do 3º, de 3 modos. A resposta parece ser $(5 \times 4 \times 3 = 60)$. Entretanto, se pensarmos numa combinação, por exemplo $\{a_1, a_2, a_3\}$, verificamos que as combinações $\{a_1, a_2, a_3\}; \{a_1, a_3, a_2\}; \{a_2, a_1, a_3\}; \dots$ etc são idênticas e foram contadas como se fossem diferentes. Com efeito, se dissermos que há 5 modos de escolher o 1º elemento da combinação é porque estamos considerando as escolhas a_1 e a_2 como diferentes e, portanto, estamos contando $\{a_1, a_2, a_3\}$ como diferente de $\{a_2, a_1, a_3\}$. Em suma, na resposta 60 estamos contando cada combinação uma vez para cada ordem de escrever seus elementos. Como em cada combinação foi encontrada 6 vezes, logo, a resposta é $\frac{60}{6} = 10$.

No caso geral temos

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(p-1))}{p!}, \quad 0 < p \leq n,$$

$$\text{e } C_n^0 = 1$$

Uma expressão alternativa pode ser obtida multiplicando o numerador e o denominador por $(n-p)!$. Obtemos

$$C_n^p = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-p+1) \cdot (n-p)!}{(n-p)! \cdot p!} \Leftrightarrow C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! \cdot p!}, \quad 0 \leq p \leq n.$$

□

2 Poliedros

Neste capítulo, apresentamos a dedução formal e detalhada da Relação de **Euler** e mostramos também que são apenas cinco os poliedros regulares (**Poliedros de Platão**), de modo detalhado como uma motivação para as aulas de geometria espacial no ensino médio. Apresentamos ainda, a família dos deltaedros, fazendo sucintas referências e comentários.

Ainda neste capítulo, mostramos as fórmulas para se calcular alguns elementos importantes dos deltaedros Platônicos (tetraedros, octaedro e icosaedro), como a distância entre um vértice e uma face, área superficial e volumes. Estes resultados encontram-se em [3], [5] e [6]

2.1 Definição

De modo geral, vamos estudar os sólidos formados por faces, os chamados poliedros. Do grego poly (vários) + edros (faces).

Definição 2.1. Poliedro é uma reunião de um número finito de polígonos planos chamados **faces**, onde:

- Cada lado de um desses polígonos é também lado de um, e apenas um, outro polígono.
- A interseção de duas faces quaisquer ou é um lado comum ou é um vértice ou é vazia.
- Cada lado de um polígono, comum a exatamente duas faces, é chamado **aresta** do poliedro e cada vértice de uma face é um **vértice** do poliedro. Em relação as definições dadas, todo poliedro limita uma região do espaço chamada de interior desse poliedro.

Definição 2.2. Um conjunto C , do plano ou do espaço, diz-se **convexo**, quando qualquer segmento de reta que liga dois pontos pertencentes a C , está inteiramente

contido em C .

Definição 2.3. Um poliedro é **convexo** se qualquer reta não paralela a uma das faces o corta em, no máximo, dois pontos.

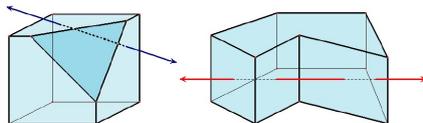


Figura 2.1: Poliedro convexo e Poliedro não convexo

2.2 As primeiras relações

Dado um poliedro, vamos contar o número de faces, vértices e arestas. Consideremos:

$$\begin{cases} A & \text{o número de arestas} \\ V & \text{o número de vértices} \\ F & \text{o número de faces.} \end{cases}$$

Ainda, como as faces podem ser de gêneros diferentes, representaremos $F_n (n \geq 3)$ o número de faces que possuem n lados. Da mesma forma como os vértices podem ser de gêneros diferentes, representaremos por V_n o número de vértices nos quais concorrem n arestas e pela definição de poliedro, cada vértice é um ponto comum a três ou mais arestas. Temos então, as seguintes relações:

$$F = F_3 + F_4 + F_5 \dots$$

$$V = V_3 + V_4 + V_5 \dots$$

Imaginando a planificação do poliedro em questão, quantos lados todos esses polígonos possuem? Bom, basta multiplicar o número de triângulos por 3, o número de quadriláteros por 4, o número de Pentágonos por 5 e assim por diante, e depois somar os resultados. Mas, como cada aresta do poliedro é lado exatamente duas faces, a soma anterior é igual ao dobro do número de arestas, ou seja:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots \quad (2.1)$$

De maneira análoga, podemos contar o número de arestas observando o número de vértices. Se em cada vértice, contarmos quantas são as arestas que nele concorrem,

somando os resultados obteremos também o dobro do número de arestas, desta forma:

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots \quad (2.2)$$

2.3 Desigualdades importantes

Das relações (2.1) e (2.2) podemos deduzir duas desigualdades importantes:

$$2A \geq 3F, \quad (2.3)$$

$$2A \geq 3V. \quad (2.4)$$

Justificando a desigualdade (2.3):

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \dots$$

$$2A = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \dots) + F_4 + 2F_5 + \dots$$

$$2A = 3F + F_4 + 2F_5 + \dots$$

$$2A \geq 3F$$

Notemos que a igualdade só vale se $F_4 = F_5 = \dots = 0$, ou seja, se o poliedro tiver apenas faces triangulares.

Justificando a desigualdade (2.4)

$$2A = 3V_3 + 4V_4 + 5V_5 + \dots$$

$$2A = 3(V_3 + V_4 + V_5 + \dots) + V_4 + 2V_5 + \dots$$

$$2A = 3V + V_4 + 2V_5 + \dots$$

$$2A \geq 3V$$

E a igualdade só vale se $V_4 = V_5 = \dots = 0$, ou seja, se o poliedro for formado por vértices, onde concorrem apenas 3 arestas.

Vejamos agora, um dos resultados clássicos da geometria espacial.

2.4 Teorema de Euler

Teorema 2.1. Em todo poliedro convexo com A arestas, V vértices e F faces, é válida a relação:

$$V - A + F = 2.$$

Demonstração. Iniciamos a demonstração calculando a soma dos ângulos internos de todas as faces de um poliedro convexo P . Enumerando-se as faces do poliedro de 1 até F e sendo n_k o gênero da k -ésima face ($1 \leq k \leq F$), usaremos o resultado em que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de gênero n , isto é, o polígono possui n vértice e n lados, é igual a $(n - 2)\pi$. Lembrando que, um poliedro convexo é formado por faces poligonais convexas. Logo, a soma S dos ângulos internos de todas as faces de P é dada por:

$$S = \pi(n_1 - 2) + \pi(n_2 - 2) + \dots + \pi(n_F - 2)$$

$$S = \pi[(n_1 - 2) + (n_2 - 2) + \dots + (n_F - 2)]$$

$$S = \pi[(n_1 + n_2 + \dots + n_F) - (2 + 2 + \dots + 2)]$$

Observamos que:

$$(n_1 + n_2 + \dots + n_F) = 2A,$$

$$-(2 + 2 + \dots + 2) = -2F$$

Assim:

$$S = \pi(2A - 2F),$$

$$S = 2\pi(A - F) \tag{2.5}$$

□

Consideremos uma reta r que não seja paralela a nenhuma das faces de P . Tomamos também um plano Π , que não intersecta P e que seja perpendicular a r .

O plano Π será chamado plano horizontal e as retas paralelas a r (perpendiculares a Π) serão chamadas retas verticais. Π divide o espaço em dois semi-espacos, um dos quais contém o poliedro P . Este será chamado semi-espaco superior e diremos que seus pontos estão acima de Π . Para ilustrar melhor este raciocínio, imaginaremos o sol brilhando a pino sobre o semi-espaco superior de modo que seus raios sejam retas verticais. A cada ponto C do semi-espaco superior corresponde um ponto X' em Π , chamado sombra de X . A sombra de qualquer conjunto C , contido no semi-espaco superior é, por definição, o conjunto C' , contido em Π , formado pelas sombras de C .

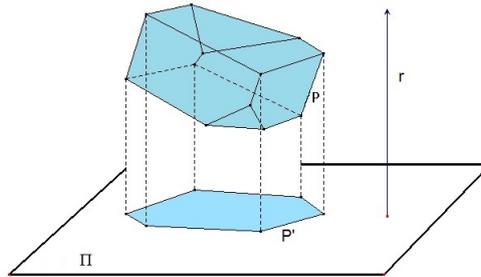


Figura 2.2: Região iluminada e região sombria

Consideremos então, a sombra P' do poliedro P . Como P é convexo, cada ponto de P' é sombra de um ou dois pontos de P . Ora, a sombra P' do poliedro P tem como contorno um polígono convexo K' , sombra de uma poligonal fechada K formada por arestas de P . Cada ponto K' é sombra de um único ponto de P . A poligonal K é chamada de contorno aparente do poliedro P . Cada ponto do interior de P' (não pertence a K') é sombra de exatamente dois pontos de P . Dados dois pontos de P que têm a mesma sombra, o mais alto (mais distante de Π) chamaremos de ponto iluminado e o mais baixo será chamado sombrio. Depois dessas considerações, vamos calcular novamente a soma de todos o ângulos das faces de P , observando que a soma dos ângulos internos de uma face é a mesma soma dos ângulos internos de sua sombra (ambos são polígonos de mesmo gênero). Sejam, V_1 o número de vértices iluminados, V_2 o número de vértices sombrios e V_0 o número de vértice do contorno aparente de K . Então:

$$V = V_0 + V_1 + V_2$$

Notemos ainda, que V_0 é o número de vértices (e de lados) da poligonal K' , contorno de P' . Consideremos então a sombra das faces iluminadas.

A sombra das faces iluminadas é o polígono convexo com V_0 vértices em seu contorno

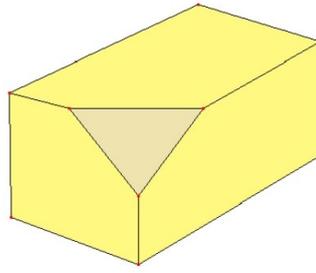


Figura 2.3: Poliedro com faces iluminadas

e V_1 pontos interiores, sombra dos vértices iluminados de P .

A soma de todos os ângulos da figura anterior é:

$$S_1 = 2\pi V_1 + \pi(V_0 - 2)$$

Por raciocínio inteiramente análogo, obteríamos para soma de todos os ângulos da sombra das faces sombrias,

$$S_2 = 2\pi V_2 + \pi(V_0 - 2)$$

Somando essas duas igualdades, temos:

$$S = 2\pi V_1 + 2\pi V_2 + 2\pi(V_0 - 2)$$

$$S = 2\pi(V_1 + V_2 + V_0 - 2)$$

Mas,

$$V_0 + V_1 + V_2 = V$$

Portanto,

$$S = 2\pi(V - 2) \tag{2.6}$$

Comparando as igualdades (2.5) e (2.6), temos:

$$S = 2\pi(A - F)$$

$$S = 2\pi(V - 2)$$

$$2\pi(A - F) = 2\pi(V - 2)$$

$$A - F = V - 2$$

$$V + F - A = 2$$

□

2.5 Poliedros regulares

Definição 2.4. Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas.

Teorema 2.2. Existem apenas cinco poliedros regulares convexos.

Demonstração: Seja n o número de lados de cada face e seja p o número de arestas que concorrem em cada vértice. Temos então:

$$2A = n \cdot F = p \cdot V$$

ou

$$A = \frac{n \cdot F}{2} \quad e \quad V = \frac{n \cdot F}{p}$$

Substituindo na relação de Euler, obtemos:

$$V - A + F = 2$$

$$\frac{n \cdot F}{p} - \frac{n \cdot F}{2} + F = 2$$

$$2n \cdot F - n \cdot F \cdot p + 2p \cdot F = 4p$$

$$F(2n - np + 2p) = 4p$$

$$F = \frac{4p}{(2n - np + 2p)}$$

Devemos ter $2p + 2n - np > 0$, ou seja:

$$2n > p(n - 2)$$

$$\frac{2n}{(n - 2)} > p$$

Como $p \geq 3$, chegamos a $n < 6$. Temos então, as seguintes possibilidades:

$$n = 3 \rightarrow F = \frac{4p}{6 - p} \rightarrow \begin{cases} p = 3 \rightarrow F = 4, (\text{tetraedro}), \\ p = 4 \rightarrow F = 8, (\text{octaedro}), \\ p = 5 \rightarrow F = 20, (\text{icosaedro}) \end{cases}$$

$$n = 4 \rightarrow F = \frac{2p}{4 - p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 6 (\text{cubo})$$

$$n = 5 \rightarrow F = \frac{4p}{10 - 3p} \rightarrow p = 3 \rightarrow F = 12 (\text{dodecaedro})$$

Portanto, só existem cinco poliedros regulares convexos, são eles:

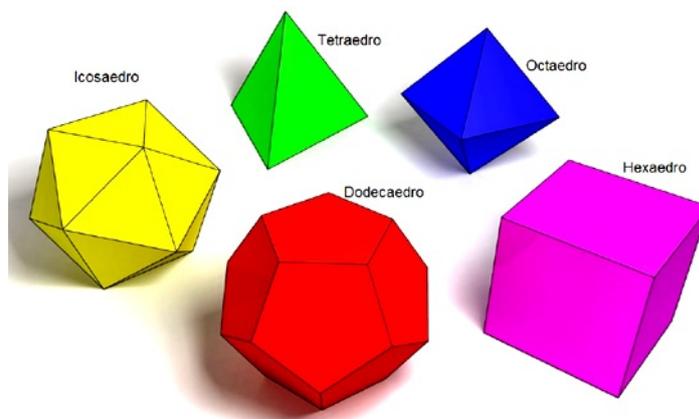


Figura 2.4: Poliedros regulares

2.6 Deltaedros

A família dos **deltaedros** é formada por poliedros cujas faces são triângulos equiláteros, chamam-se assim, porque a letra grega **delta** maiúscula (Δ) tem o formato de um triângulo equilátero. Os deltaedros são em número infinito, pois podemos imaginar por exemplo um octaedro e depois colar numa das suas faces um tetraedro, e depois na face deste tetraedro outro tetraedro, e assim sucessivamente, obtendo assim tantos deltaedros quantos quisermos. Mas os matemáticos **Freudenthal e Van der Waerden** demonstraram em 1947, que existem apenas oito **deltaedros** convexos. Nas figuras a seguir apresentamos os oito **deltaedros** convexos.

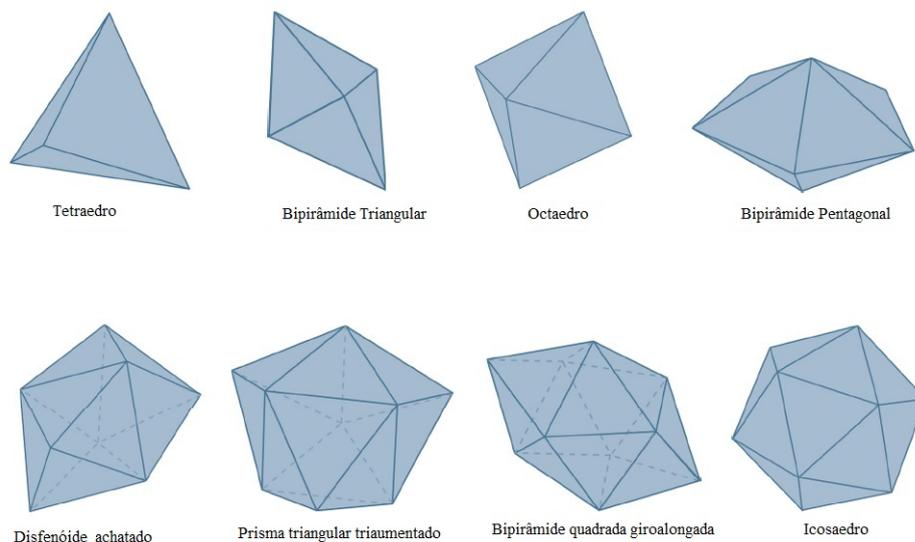
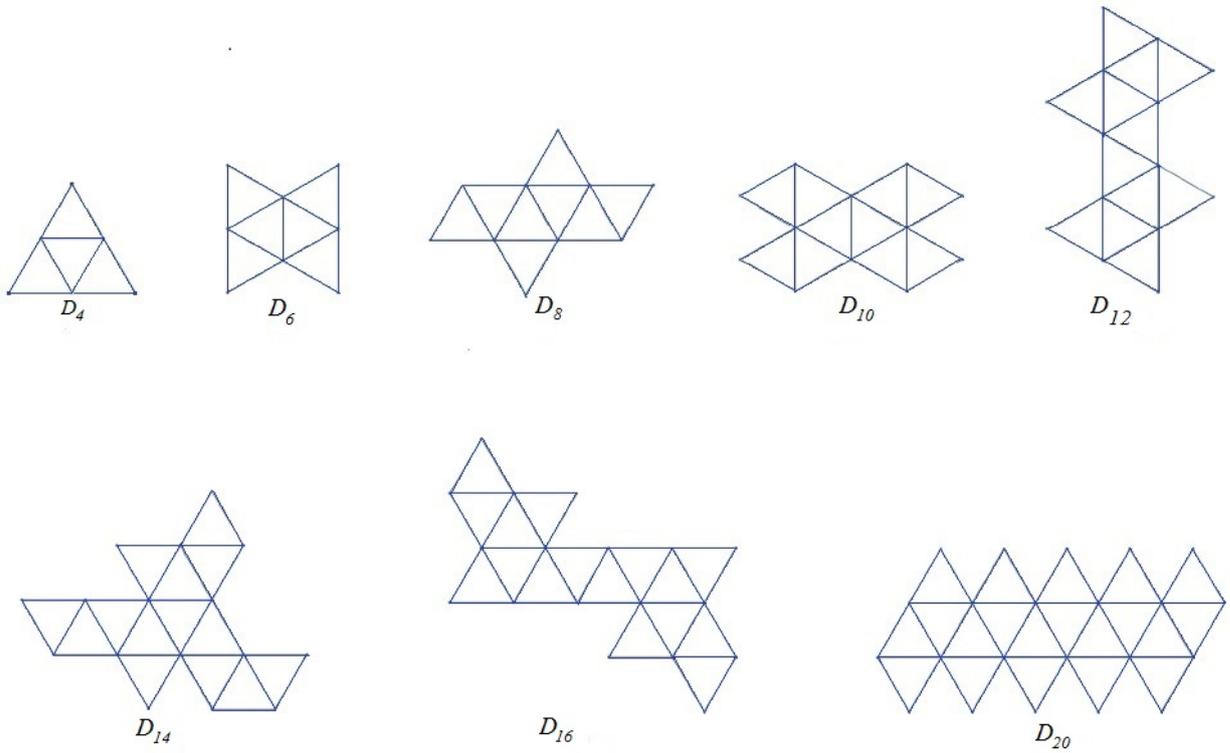


Figura 2.5: Família dos deltaedros convexos

Em segundo lugar, os **deltaedros** convexos têm um número par de faces. A demonstração deste fato é bem simples: se for F o número de faces e A o número de arestas, como as faces são triângulos, $A = 3F/2$ pois cada aresta tem duas faces adjacentes. Logo o número de faces tem que ser par (pois $F/2$ tem que ser inteiro). Assim, ficamos reduzidos teoricamente a 9 possibilidades, com 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18 e 20 lados. O fato de não existir o **deltaedro** com 18 faces, e portanto de existirem apenas 8 realmente, está demonstrado nas referências bibliográficas já indicadas. Julgamos que depois de encontrados os 8 **deltaedros** convexos, feitos

com Criat-Ímã ou analisando as respectivas planificações, é interessante contar as suas faces, arestas e vértices e elaborar uma tabela. Nessa tabela, Vamos designar todos por D_n , sendo n o número de faces.



Deltaedros convexos		Faces	Arestas	Vértices
D_4	<i>tetraedro</i>	4	6	4
D_6	<i>bipirâmide triangular</i>	6	9	5
D_8	<i>octaedro</i>	8	12	6
D_{10}	<i>bipirâmide pentagonal</i>	10	15	7
D_{12}	<i>disfenóide achatado</i>	12	18	8
D_{14}	<i>prisma triangular triaumentado</i>	14	21	9
D_{16}	<i>bipirâmide quadrada giroalongada</i>	16	24	10
D_{20}	<i>icosaedro</i>	20	30	12

Figura 2.6: Tabela 1

2.7 Construção do tetraedro regular

Consideremos um triângulo equilátero ABC de lado L e marcamos o baricentro E . Sabemos que o raio R de uma circunferência circunscrita a um triângulo equilátero equivale a $\frac{2}{3}$ de sua mediana. Portanto se \mathbf{a} é o apótema do triângulo equilátero ABC , então, a medida da mediana é $3\mathbf{a}$ e assim, calculamos \mathbf{a} em função de L . fazamos uma figura ilustrativa da situação.

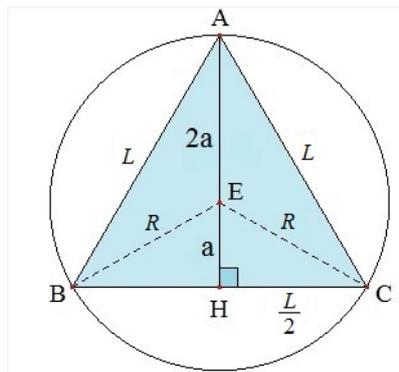


Figura 2.7: Vista superior do tetraedro

Sabemos também, que em um triângulo equilátero as medianas, as alturas e as bissetrizes coincidem, assim, os triângulo ABH e ACH são retângulos congruentes. Aplicando-se o teorema de Pitágoras no triângulo ABH , temos:

$$\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (3a)^2 = L^2 \implies 9a^2 = \left(\frac{4L^2 - L^2}{4}\right) \implies a^2 = \left(\frac{3L^2}{36}\right) \implies a^2 = \frac{L^2}{12},$$

Agora, aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo BEH , então:

$$R^2 = a^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2.$$

Fazendo $a^2 = \frac{L^2}{12}$, temos:

$$R^2 = \frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{4} \implies R^2 = \frac{4L^2}{12} \implies R^2 = \frac{L^2}{3} \implies R = \frac{L}{\sqrt{3}} \implies R = \frac{L\sqrt{3}}{3}.$$

Como, no triângulo equilátero, o ortocentro coincide com o baricentro, podemos calcular o apótema \mathbf{a} em função de L . Pelo baricentro E , equidistante de A, B e C , com medida $R = \frac{L\sqrt{3}}{3}$. Traçamos o segmento ED , perpendicular ao plano que contém o triângulo ABC , de medida \mathbf{h} conforme veremos a seguir:

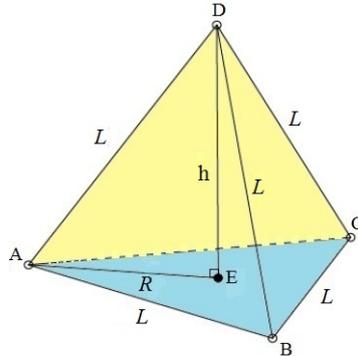


Figura 2.8: Tetraedro regular

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AED , calculamos \mathbf{h} em função de L , logo:

$$L^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = L^2 - \left(\frac{L\sqrt{3}}{3}\right)^2 \Rightarrow h^2 = \frac{9L^2}{9} - \frac{3L^2}{9} \Rightarrow h^2 = \frac{6L^2}{9} \Rightarrow h = \frac{L\sqrt{6}}{3}.$$

□

2.7.1 Volume do tetraedro regular

Como o volume de uma pirâmide é $\frac{1}{3}$ do volume do prisma correspondente, que por sua vez tem o seu volume obtido pelo produto da área da sua base pela sua altura, e a área de um triângulo equilátero é obtida por $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, é só calcularmos o volume (V_T) do tetraedro regular em função da medida de sua aresta (L).

$$V_T = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Leftrightarrow V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{L\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow V_T = \frac{L^3 \cdot \sqrt{18}}{36} \Leftrightarrow V_T = \frac{L^3 \cdot \sqrt{2}}{12}.$$

□

2.8 Construção do octaedro regular

Consideremos um quadrado $ABCD$ de lado L e marcamos o centro E , intersecção de suas diagonais. Sabemos que o raio R de uma circunferência circunscrita a um quadrado equivale a $\frac{L \cdot \sqrt{2}}{2}$, ou seja, metade de sua diagonal.

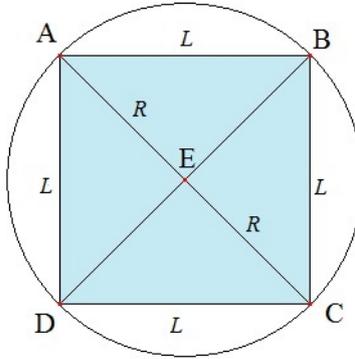


Figura 2.9: Vista superior do octaedro

Traçamos os segmentos EF e EG , perpendiculares ao plano que contém o quadrado $ABCD$, de medida $\frac{L\sqrt{2}}{2}$, conforme a figura:

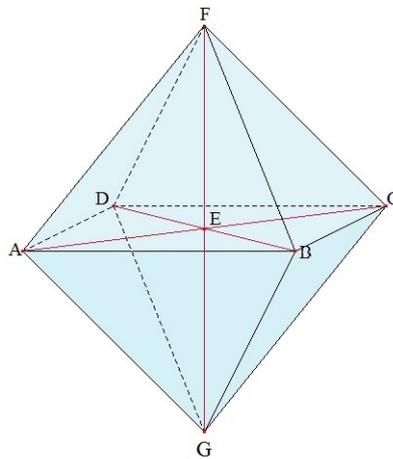


Figura 2.10: Octaedro Regular

2.8.1 Volume do Octaedro Regular

O octaedro regular é formado por duas pirâmides de base quadrangular, de lado L e altura $\frac{L\sqrt{2}}{2}$. Calculando-se o volume de uma das pirâmides e dobrando esse resultado, obtemos assim, o volume do octaedro regular. Então:

$$V = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Leftrightarrow V = \frac{2}{3} \cdot L^2 \cdot \frac{L\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow V = \frac{L^3\sqrt{2}}{3}.$$

□

2.9 Volume do icosaedro regular

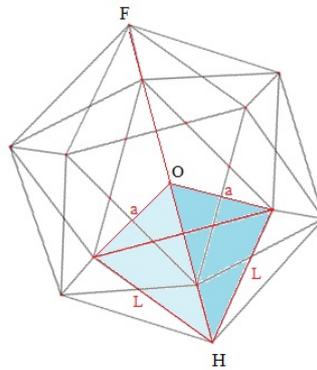


Figura 2.11: Tetraedro inscrito no icosaedro regular

Podemos inferir que o icosaedro é constituído por vinte tetraedros inscritos, porém, não regulares, com um triângulo equilátero de lado L na base. Nesse caso, restaria calcular a medida das arestas laterais e da altura para verificar se o cálculo levaria à fórmula do volume do icosaedro regular. Para que os tetraedros se encaixem perfeitamente, suas arestas laterais devem convergir no centro O do icosaedro. Assim, a diagonal maior d do icosaedro, partindo de um vértice F e chegando ao vértice oposto H , também passaria pelo centro O , e corresponderia a duas vezes a aresta lateral do tetraedro, apoiando-se na hipótese de simetria que, no caso do icosaedro regular, é bastante sugestiva para o aluno do Ensino Médio. Visualizando as figuras a seguir,

podemos destacar duas secções planas no icosaedro. A primeira é um pentágono regular (mais uma vez apoiando-se na intuição de simetria e regularidade) que forma a base de uma pirâmide pentagonal cujo vértice é um vértice do icosaedro

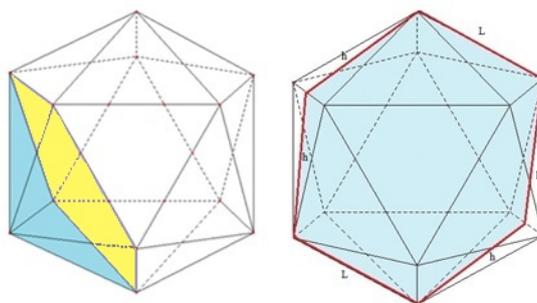


Figura 2.12: Secções planas no icosaedro regular

(figura 2.12). A segunda secção, um hexágono, é determinada a partir de um corte que divide o icosaedro pela metade através de dois vértices opostos. Tal hexágono possui duas arestas L e quatro arestas h , sendo h a altura dos triângulos equiláteros que formam as faces do icosaedro regular (veja figura 2.12). A intersecção entre as duas secções é o segmento i (figuras 2.13).

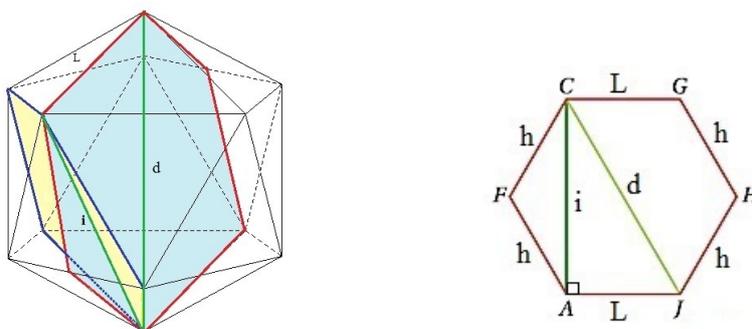


Figura 2.13: Intersecção das secções planas

O segmento áureo no pentágono regular

O segmento i nada mais é do que a diagonal do pentágono regular. O triângulo isósceles ABC é semelhante ao triângulo BOA (figura 2.14) pelo caso (AA), logo:

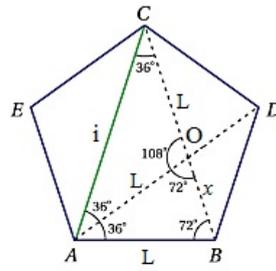
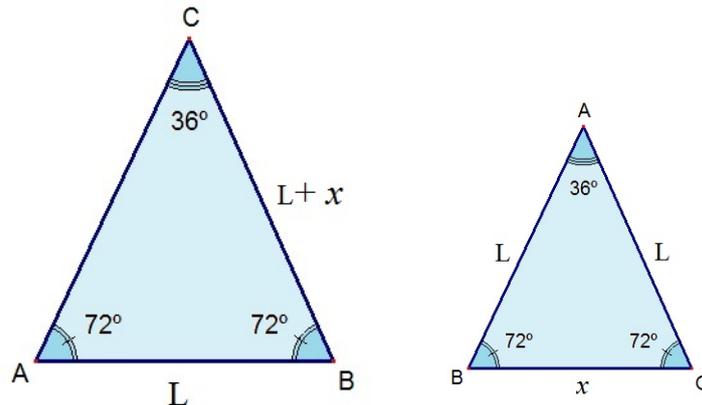


Figura 2.14: Segmento áureo



$$\frac{L}{x} = \frac{L+x}{L} \Leftrightarrow x^2 + Lx - L^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{(\sqrt{5}-1)L}{2}, x > 0$$

$$i = \overline{BC} = (x + L) = \frac{(\sqrt{5}-1)L}{2} + \frac{2L}{2} = \frac{(\sqrt{5}+1)L}{2}$$

Portando, i está na proporção áurea em relação ao lado L .

Cálculo da diagonal maior do icosaedro e da aresta lateral do tetraedro

Voltando ao hexágono, segue do Teorema de Pitágoras que a medida da diagonal maior do icosaedro d (ver figura 2.13):

$$d^2 = L^2 + \left(\frac{(\sqrt{5}+1)L^2}{2} \right)^2 \Leftrightarrow d^2 = L^2 + \frac{(6+2\sqrt{5})L^2}{4} \Leftrightarrow d^2 = \frac{4L^2}{4} + \frac{(6+2\sqrt{5})L^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$d^2 = \frac{10L^2 + 2\sqrt{5}L^2}{4} \Leftrightarrow d = \frac{L \cdot \sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{2}.$$

Conhecendo a diagonal \mathbf{d} do icosaedro, é possível calcular a aresta \mathbf{a} do tetraedro, uma vez que esta equivale à metade da diagonal (ver figura 2.11):

$$a = \frac{d}{2} = \frac{L \cdot \sqrt{2(5 + \sqrt{5})}}{4}.$$

Volume dos tetraedros

Conhecendo a medida da aresta \mathbf{a} e sabendo que a base do tetraedro (figura a seguir) é um triângulo equilátero de lado L , temos:

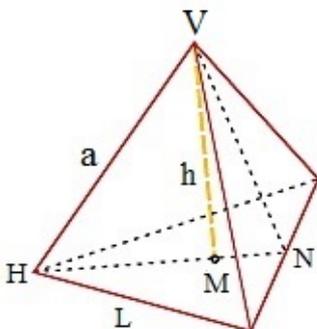


Figura 2.15: Tetraedro

$$\overline{HM} = \frac{L\sqrt{3}}{3}, \quad \overline{MN} = \frac{L\sqrt{3}}{6} \quad \text{e} \quad \overline{HN} = \frac{L\sqrt{3}}{2}.$$

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo HMV , temos:

$$a^2 = \overline{HM}^2 + \overline{MV}^2 \Leftrightarrow \left(\frac{L\sqrt{5 + \sqrt{5}}}{4} \right)^2 = \left(\frac{L\sqrt{3}}{3} \right)^2 + h^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2L(5 + \sqrt{5})}{16} = h^2 + \frac{3L\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow h^2 = \frac{18L^2(5 + \sqrt{5})}{144} - \frac{48L^2}{144} \Leftrightarrow$$

$$h^2 = \frac{(90 + 18\sqrt{5})L^2 - 48L^2}{144} \Leftrightarrow h^2 = \frac{(42 + 18\sqrt{5})L^2}{144} \Leftrightarrow$$

$$h = \sqrt{\frac{(42 + 18\sqrt{5})L^2}{144}} \Leftrightarrow h = \frac{L\sqrt{6(7 + 3\sqrt{5})}}{12}.$$

Conhecida a altura h e sabendo que a área da base do tetraedro (t) é $\frac{L^2\sqrt{3}}{4}$, obtemos seu volume:

$$V_t = \frac{1}{3} \cdot \frac{L^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{L\sqrt{6(7 + 3\sqrt{5})}}{12} \Leftrightarrow V_t = \frac{L^3\sqrt{2(7 + 3\sqrt{5})}}{48}.$$

O volume do icosaedro regular

Finalmente, obtem-se o volume do icosaedro (V_i), multiplicando-se o volume do tetraedro (V_t) por vinte, logo:

$$V_i = 20 \cdot V_t \Leftrightarrow V_i = 20 \cdot \frac{L^3\sqrt{2(7 + 3\sqrt{5})}}{48} \Leftrightarrow V_i = 5 \cdot \frac{L^3\sqrt{(14 + 6\sqrt{5})}}{12} \Leftrightarrow$$

$$V_i = 5 \cdot \frac{L^3\sqrt{9 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}}{12} \Leftrightarrow V_i = 5 \cdot \frac{L^3\sqrt{(3 + \sqrt{5})^2}}{12} \Leftrightarrow$$

$$V_i = 5 \cdot \frac{L^3(3 + \sqrt{5})}{12}.$$

□

3 Bimedias

Neste capítulo vamos apresentar alguns resultados gerais envolvendo n pontos em um Espaço Euclidiano, generalizando a conhecida fórmula para medianas do triângulo e, por outro lado, duas outras fórmulas envolvendo tanto as medianas quanto as bimedias do tetraedro. Estes resultados foram obtidos por Fonda [2].

3.1 Motivação

Proposição 3.1. Para qualquer triângulo, a soma dos quadrados das medidas de suas três medianas é igual a três quartos da soma dos quadrados das medidas de seus lados.

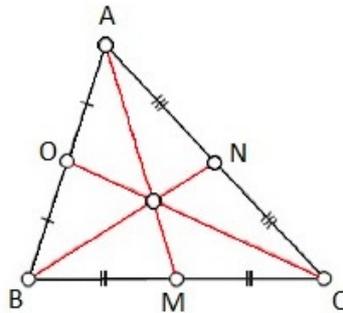


Figura 3.1: As medianas de um triângulo

Demonstração. De acordo com a figura 3.1, precisamos calcular a soma $\|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{BN}\|^2 + \|\overrightarrow{CO}\|^2$. Notemos que

- Como $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ e $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, então

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AM}\|^2 &= \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\|^2 = \langle \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{BM}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{AB}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BC}\|^2 + \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle\end{aligned}$$

- Como $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ e $\overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, então

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{BN}\|^2 &= \|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}\|^2 = \langle \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \|\overrightarrow{CN}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{CA}\|^2 + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{CB}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{CA}\|^2 - \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \rangle\end{aligned}$$

- Como $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, então

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{CO}\|^2 &= \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO}\|^2 = \langle \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AO} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{CA}\|^2 + \|\overrightarrow{AO}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AO} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{CA}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB} \rangle \\ &= \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\overrightarrow{BN}\|^2 + \|\overrightarrow{CO}\|^2 &= \|\overrightarrow{BA}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \langle \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC} \rangle + \\ &+ \|\overrightarrow{CB}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{CA}\|^2 - \langle \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \rangle + \\ &+ \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \frac{1}{4}\|\overrightarrow{AB}\|^2 - \langle \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB} \rangle\end{aligned}\quad (3.1)$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo ABC em cada um dos seus lados, temos:

- Em relação ao lado BC : $\|\vec{CB}\|^2 = \|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - 2\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|\cos(\hat{A})$

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{CB}\|^2}{2\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|}$$

- Em relação ao lado AC : $\|\vec{AC}\|^2 = \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{BA}\|^2 - 2\|\vec{BC}\|\|\vec{BA}\|\cos(\hat{B})$

$$\cos(\hat{B}) = \frac{\|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{BA}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2}{2\|\vec{BC}\|\|\vec{BA}\|}$$

- Em relação ao lado AB : $\|\vec{AB}\|^2 = \|\vec{CB}\|^2 + \|\vec{CA}\|^2 - 2\|\vec{CB}\|\|\vec{CA}\|\cos(\hat{C})$

$$\cos(\hat{C}) = \frac{\|\vec{CB}\|^2 + \|\vec{CA}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2}{2\|\vec{CB}\|\|\vec{CA}\|}$$

Logo,

- $\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle = \|\vec{AC}\| \cdot \|\vec{AB}\| \cdot \cos(\hat{A}) = \frac{1}{2} \left(\|\vec{AC}\|^2 + \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{CB}\|^2 \right)$

- $\langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle = \|\vec{BA}\| \cdot \|\vec{BC}\| \cdot \cos(\hat{B}) = \frac{1}{2} \left(\|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{BA}\|^2 - \|\vec{AC}\|^2 \right)$

- $\langle \vec{CB}, \vec{CA} \rangle = \|\vec{CB}\| \cdot \|\vec{CA}\| \cdot \cos(\hat{C}) = \frac{1}{2} \left(\|\vec{CB}\|^2 + \|\vec{CA}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 \right)$

e

$$\langle \vec{AC}, \vec{AB} \rangle + \langle \vec{BA}, \vec{BC} \rangle + \langle \vec{CB}, \vec{CA} \rangle = \frac{1}{2} \left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \right). \quad (3.2)$$

Portanto, das igualdades (3.1) e (3.2), obtemos

$$\begin{aligned} \|\vec{AM}\|^2 + \|\vec{BN}\|^2 + \|\vec{CO}\|^2 &= \left(\|\vec{BA}\|^2 + \frac{1}{4}\|\vec{AB}\|^2 \right) + \left(\|\vec{CB}\|^2 + \frac{1}{4}\|\vec{BC}\|^2 \right) + \\ &+ \left(\|\vec{AC}\|^2 + \frac{1}{4}\|\vec{CA}\|^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{BC}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 \right). \end{aligned}$$

□

Um pouco menos conhecidas são as fórmulas análogas para o tetraedro.

Definição 3.1. Uma mediana de um tetraedro é o segmento que liga um vértice ao baricentro da face oposta a este vértice.

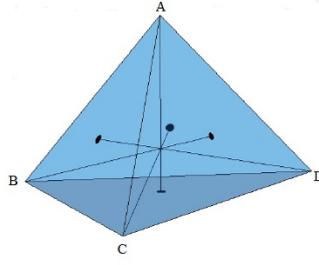


Figura 3.2: As medianas de um tetraedro

Proposição 3.2. Para qualquer tetraedro, a soma dos quadrados das medidas de suas quatro medianas é igual a quatro nonos da soma dos quadrados das medidas de suas arestas.

Demonstração. A distância do vértice A até o baricentro do triângulo BCD é:

$$\begin{aligned}
 d\left(A, \frac{(B+C+D)}{3}\right)^2 &= \left\langle A - \left(\frac{B+C+D}{3}\right), A - \left(\frac{B+C+D}{3}\right) \right\rangle \\
 &= \left\langle A - B + \frac{2B}{3} - \left(\frac{C+D}{3}\right), A - B + \frac{2B}{3} - \left(\frac{C+D}{3}\right) \right\rangle \\
 &= \left\langle (A-B) + \frac{1}{3} \cdot (B-C) + \frac{1}{3} \cdot (B-D), (A-B) + \frac{1}{3} \cdot (B-C) + \frac{1}{3} \cdot (B-D) \right\rangle \\
 &= \|A-B\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|B-C\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|B-D\|^2 + \frac{2}{3} \langle (A-B), (B-C) \rangle + \frac{2}{3} \langle (A-B), (B-D) \rangle + \\
 &\quad + \frac{2}{9} \langle (B-C), (B-D) \rangle.
 \end{aligned}$$

A distância do vértice B até o baricentro do triângulo ACD é:

$$\begin{aligned}
 d\left(B, \frac{(A+C+D)}{3}\right)^2 &= \left\langle B - \left(\frac{A+C+D}{3}\right), B - \left(\frac{A+C+D}{3}\right) \right\rangle \\
 &= \left\langle (B-C) + \frac{1}{3} \cdot (C-A) + \frac{1}{3} \cdot (C-D), (B-C) + \frac{1}{3} \cdot (C-A) + \frac{1}{3} \cdot (C-D) \right\rangle \\
 &= \|B-C\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|C-A\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|C-D\|^2 + \frac{2}{3} \cdot \langle (B-C), (C-A) \rangle + \frac{2}{3} \cdot \langle (B-C), (C-D) \rangle + \\
 &\quad + \frac{2}{9} \langle (C-A), (C-D) \rangle.
 \end{aligned}$$

A distância do vértice C até o baricentro do triângulo ABD é:

$$d\left(C, \frac{(A+B+D)}{3}\right)^2 = \left\langle C - \left(\frac{B+C+D}{3}\right), C - \left(\frac{B+C+D}{3}\right) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\langle (C - A) + \frac{1}{3} \cdot (A - B) + \frac{1}{3} \cdot (A - D), (C - A) + \frac{1}{3} \cdot (A - B) + \frac{1}{3} \cdot (A - D) \right\rangle \\
 &= \|C - A\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|A - B\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|A - D\|^2 + \frac{2}{3} \langle (C - A), (A - B) \rangle + \frac{2}{3} \langle (C - A), (A - D) \rangle + \\
 &\quad + \frac{2}{9} \langle (A - B), (A - D) \rangle.
 \end{aligned}$$

A distância do vértice D até o baricentro do triângulo ABC é:

$$\begin{aligned}
 d\left(D, \frac{(A + B + C)}{3}\right)^2 &= \left\langle D - \left(\frac{A + B + C}{3}\right), D - \left(\frac{A + B + C}{3}\right) \right\rangle = \\
 &\left\langle \left((D - C) + \frac{1}{3} \cdot (C - A) + \frac{1}{3} \cdot (C - B), (D - C) + \frac{1}{3} \cdot (C - A) + \frac{1}{3} \cdot (C - B) \right) \right\rangle \\
 &= \|D - C\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|C - A\|^2 + \frac{1}{9} \cdot \|C - B\|^2 + \frac{2}{3} \langle (D - C), (C - A) \rangle + \frac{2}{3} \langle (D - C), (C - B) \rangle + \\
 &\quad + \frac{2}{9} \langle (C - A), (C - B) \rangle.
 \end{aligned}$$

Somando as distâncias temos:

$$\begin{aligned}
 &d\left(A, \frac{(B + C + D)}{3}\right)^2 + d\left(B, \frac{(A + C + D)}{3}\right)^2 + d\left(C, \frac{(A + B + D)}{3}\right)^2 + \\
 &\quad + d\left(D, \frac{(A + B + C)}{3}\right)^2 = \\
 &= \frac{10}{9} \|A - B\|^2 + \frac{11}{9} \|B - C\|^2 + \frac{1}{9} \|B - D\|^2 + \frac{11}{9} \|C - A\|^2 + \frac{10}{9} \|C - D\|^2 + \frac{1}{9} \|A - D\|^2 + \\
 &\quad + \frac{2}{3} \langle (A - B), (B - C) \rangle + \frac{2}{3} \langle (A - B), (B - D) \rangle + \frac{2}{9} \langle (B - C), (B - D) \rangle + \\
 &\quad + \frac{2}{3} \langle (B - C), (C - A) \rangle + \frac{2}{3} \langle (B - C), (C - D) \rangle + \frac{2}{9} \langle (C - A), (C - D) \rangle + \\
 &\quad + \frac{2}{3} \langle (C - A), (A - B) \rangle + \frac{2}{3} \langle (C - A), (A - D) \rangle + \frac{2}{9} \langle (A - B), (A - D) \rangle + \\
 &\quad + \frac{2}{3} \langle (D - C), (C - A) \rangle + \frac{2}{3} \langle (D - C), (C - B) \rangle + \frac{2}{9} \langle (C - A), (C - B) \rangle \\
 &= \frac{10}{9} \|A - B\|^2 + \frac{11}{9} \|B - C\|^2 + \frac{1}{9} \|B - D\|^2 + \frac{11}{9} \|C - A\|^2 + \frac{10}{9} \|C - D\|^2 + \frac{1}{9} \|A - D\|^2 + \\
 &\quad - \frac{2}{3} \langle (A - B), (C - B) \rangle - \frac{2}{3} \langle (A - B), (D - B) \rangle + \frac{2}{9} \langle (C - B), (D - B) \rangle + \\
 &\quad - \frac{2}{3} \langle (B - C), (A - C) \rangle - \frac{2}{3} \langle (B - C), (D - C) \rangle + \frac{2}{9} \langle (A - B), (A - D) \rangle +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3}\langle(C-A), (B-A)\rangle - \frac{2}{3}\langle(C-A), (D-A)\rangle + \frac{2}{9}\langle(B-A), (D-A)\rangle + \\
& -\frac{2}{3}\langle(D-C), (A-C)\rangle - \frac{2}{3}\langle(D-C), (B-C)\rangle + \frac{2}{9}\langle(A-C), (B-C)\rangle \\
& = \frac{10}{9}\|A-B\|^2 + \frac{11}{9}\|B-C\|^2 + \frac{1}{9}\|B-D\|^2 + \frac{11}{9}\|C-A\|^2 + \frac{10}{9}\|C-D\|^2 + \frac{1}{9}\|A-D\|^2 + \\
& -\frac{2}{3}\langle(A-B), (C-B)\rangle - \frac{2}{3}\langle(A-B), (D-B)\rangle + \frac{2}{9}\langle(C-B), (D-B)\rangle + \\
& -\frac{4}{9}\langle(B-C), (A-C)\rangle - \frac{4}{3}\langle(B-C), (D-C)\rangle - \frac{4}{9}\langle(A-B), (A-D)\rangle + \\
& -\frac{2}{3}\langle(C-A), (B-A)\rangle - \frac{2}{3}\langle(C-A), (D-A)\rangle + \frac{2}{9}\langle(B-A), (D-A)\rangle.
\end{aligned}$$

Aplicando a lei dos cossenos, obtemos:

$$\begin{aligned}
& = \frac{10}{9}\|A-B\|^2 + \frac{11}{9}\|B-C\|^2 + \frac{1}{9}\|B-D\|^2 + \frac{11}{9}\|C-A\|^2 + \frac{10}{9}\|C-D\|^2 + \frac{1}{9}\|A-D\|^2 + \\
& + \frac{1}{3}\|A-C\|^2 - \frac{1}{3}\|A-B\|^2 - \frac{1}{3}\|B-C\|^2 + \frac{1}{3}\|A-D\|^2 - \frac{1}{3}\|A-B\|^2 - \frac{1}{3}\|B-D\|^2 \\
& - \frac{1}{3}\|C-D\|^2 - \frac{1}{9}\|B-C\|^2 + \frac{1}{9}\|B-D\|^2 + \frac{2}{9}\|A-B\|^2 - \frac{2}{9}\|A-C\|^2 - \frac{2}{9}\|A-C\|^2 \\
& + \frac{2}{3}\|B-D\|^2 - \frac{2}{3}\|B-C\|^2 - \frac{2}{3}\|C-D\|^2 + \frac{2}{9}\|A-D\|^2 - \frac{2}{9}\|A-C\|^2 - \frac{2}{9}\|C-D\|^2 \\
& + \frac{1}{3}\|B-C\|^2 - \frac{1}{3}\|A-C\|^2 - \frac{1}{3}\|A-B\|^2 + \frac{1}{3}\|C-D\|^2 - \frac{1}{3}\|A-C\|^2 - \frac{1}{3}\|A-D\|^2 \\
& - \frac{1}{3}\|B-D\|^2 + \frac{1}{9}\|A-B\|^2 + \frac{1}{3}\|A-D\|^2 \\
& = \frac{10}{9}\|A-B\|^2 + \frac{11}{9}\|B-C\|^2 + \frac{1}{9}\|B-D\|^2 + \frac{11}{9}\|C-A\|^2 + \frac{10}{9}\|C-D\|^2 + \frac{1}{9}\|A-D\|^2 + \\
& + \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)\|A-B\|^2 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} - \frac{2}{9} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\|A-C\|^2 + \\
& + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{9} - \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right)\|A-D\|^2 + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{2}{9} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right)\|B-C\|^2 + \\
& + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} - \frac{1}{9}\right)\|B-D\|^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3}\right)\|C-D\|^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{10}{9} - \frac{6}{9}\right) \|A - B\|^2 + \left(\frac{11}{9} - \frac{7}{9}\right) \|B - C\|^2 + \left(\frac{1}{9} + \frac{3}{9}\right) \|B - D\|^2 + \\
&\quad + \left(\frac{11}{9} - \frac{7}{9}\right) \|C - A\|^2 + \left(\frac{10}{9} - \frac{6}{9}\right) \|C - D\|^2 + \left(\frac{1}{9} + \frac{3}{9}\right) \|A - D\|^2 + \\
&= \frac{4}{9} (\|A - B\|^2 + \|B - C\|^2 + \|B - D\|^2 + \|C - A\|^2 + \|C - D\|^2 + \|A - D\|^2).
\end{aligned}$$

□

Um resultado análogo é obtido se consideramos as bimedias em vez das medianas.

Definição 3.2. Uma bimediana é o segmento que liga os pontos médios de duas arestas opostas do tetraedro.

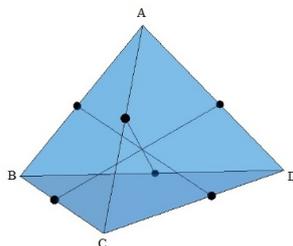


Figura 3.3: As bimedias de um tetraedro

Proposição 3.3. Para qualquer tetraedro, a soma dos quadrados das medidas de suas três bimedias é igual a um quarto da soma dos quadrados das medidas de suas arestas.

Demonstração. Notemos que

(i).

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{A+B}{2}, \frac{C+D}{2}\right) &= \left\langle \frac{1}{2}(A-C) + \frac{1}{2}(B-D), \frac{1}{2}(A-C) + \frac{1}{2}(B-D) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \|A-C\|^2 + \frac{1}{4} \|B-D\|^2 + \frac{1}{2} \langle A-C, B-D \rangle.
\end{aligned}$$

(ii).

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{A+C}{2}, \frac{B+D}{2}\right) &= \left\langle \frac{1}{2}(A-B) + \frac{1}{2}(C-D), \frac{1}{2}(A-B) + \frac{1}{2}(C-D) \right\rangle \\
&= \frac{1}{4} \|A-B\|^2 + \frac{1}{4} \|C-D\|^2 + \frac{1}{2} \langle A-B, C-D \rangle.
\end{aligned}$$

(iii).

$$\begin{aligned} \left(\frac{A+D}{2}, \frac{B+C}{2} \right) &= \left\langle \frac{1}{2}(A-B) + \frac{1}{2}(D-C), \frac{1}{2}(A-B) + \frac{1}{2}(D-C) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4}\|A-B\|^2 + \frac{1}{4}\|D-C\|^2 + \frac{1}{2}\langle A-B, D-C \rangle. \end{aligned}$$

Observando que

$$\begin{aligned} \bullet \langle A-C, B-D \rangle &= \langle (A-C) + (B-B), B-D \rangle = \langle (A-B) + (B-C), B-C \rangle \\ &= \langle A-B, B-D \rangle + \langle B-C, B-D \rangle = -\langle A-B, B-D \rangle + \langle C-B, D-B \rangle \\ &= \frac{1}{2}(\|A-D\|^2 - \|A-B\|^2 - \|B-D\|^2) + \frac{1}{2}(-\|C-D\|^2 + \|B-C\|^2 + \|B-D\|^2) \\ &= \frac{1}{2}(\|A-D\|^2 - \|A-B\|^2 - \|C-D\|^2 + \|B-C\|^2) \\ \bullet \langle A-B, C-D \rangle + \langle A-B, D-C \rangle &= \langle A+B, (C-D) + (D-C) \rangle = 0, \end{aligned}$$

então somando (i), (ii) e (iii), temos:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\|A-C\|^2 + \frac{1}{4}\|B-D\|^2 + \frac{1}{4}(\|A-D\|^2 - \|A-B\|^2 - \|C-D\|^2 + \|B-C\|^2) \\ &+ \frac{1}{2}\|A-B\|^2 + \frac{1}{2}\|C-D\|^2 \\ &= \frac{1}{4}(\|A-B\|^2 + \|A-C\|^2 + \|A-D\|^2 + \|B-C\|^2 + \|B-D\|^2 + \|C-D\|^2). \end{aligned}$$

□

Nosso objetivo é apresentar uma generalização destas três proposições para um número arbitrário de pontos (vértices), isto é, denotando a distância euclidiana entre dois pontos A e B por

$$d(A, B) = \|A - B\| = \sqrt{(A - B) \cdot (A - B)},$$

vamos generalizar as seguintes fórmulas:

1. Sejam A , B e C os vértices de um triângulo. Então,

$$d\left(A, \frac{B+C}{2}\right)^2 + d\left(B, \frac{A+C}{2}\right)^2 + d\left(C, \frac{A+B}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} [d(A, B)^2 + d(A, C)^2 + d(B, C)^2].$$

2. Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro. Então,

$$\begin{aligned} & d\left(A, \frac{B+C+D}{3}\right)^2 + d\left(B, \frac{A+C+D}{3}\right)^2 + d\left(C, \frac{A+B+D}{3}\right)^2 + d\left(D, \frac{A+B+C}{3}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} [d(A, B)^2 + d(A, C)^2 + d(A, D)^2 + d(B, C)^2 + d(B, D)^2 + d(C, D)^2]. \end{aligned}$$

3. Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro. Então,

$$\begin{aligned} & d\left(\frac{A+B}{2}, \frac{C+D}{2}\right)^2 + d\left(\frac{A+C}{2}, \frac{B+D}{2}\right)^2 + d\left(\frac{A+D}{2}, \frac{B+C}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} [d(A, B)^2 + d(A, C)^2 + d(A, D)^2 + d(B, C)^2 + d(B, D)^2 + d(C, D)^2]. \end{aligned}$$

Observação: Nesta última fórmula, poderíamos ter considerado seis bimedias, cada uma partindo de uma aresta até a aresta oposta. Nós escrevemos apenas três delas porque as outras coincidem com estas aos pares. Para evitar possíveis desentendimentos adiante, será preferível lidar com médias em vez de somas. Em geral, dado um conjunto finito de números reais $\mathcal{S} = \{x_1, \dots, x_N\}$, usaremos a notação

$$\text{Média } \mathcal{S} = \frac{x_1 + \dots + x_N}{N}.$$

3.2 A fórmula geral

A ideia da generalização das três proposições é a seguinte:

Dado um conjunto de n pontos

- (a) fixamos os inteiros j e k satisfazendo $j \geq 1$, $k \geq 1$ e $j + k \leq n$.
- (b) dos n pontos, tomamos dois subconjuntos distintos, um formado de j pontos e o outro formado de k pontos.
- (c) determinamos o baricentro de cada subconjunto e o quadrado da distância entre estes dois baricentros.
- (d) repetimos o item (c) para todas as possíveis escolhas dos dois subconjuntos.

Concluimos que existe uma constante α com a seguinte propriedade:

A média dos quadrados das distâncias entre os pares de baricentros assim obtidos é igual à constante α multiplicada pela média dos quadrados das medidas de todos os segmentos ligando os n pontos.

Teorema 3.1. Sejam n, j e k três inteiros tais que $n \geq 3, j \geq 1, k \geq 1, j + k \leq n$ e

$$\alpha_{j,k} = \frac{j+k}{2jk}.$$

Então, dados n pontos A_1, A_2, \dots, A_n ,

$$\begin{aligned} \text{Média} \left\{ \begin{array}{l} d \left(\frac{A_{i_1} + \dots + A_{i_j}}{j}, \frac{A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}}{k} \right)^2 : \\ 1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n, 1 \leq i_{j+1} < \dots < i_{j+k} \leq n \\ \{i_1, \dots, i_j\} \cap \{i_{j+1}, \dots, i_{j+k}\} = \emptyset \end{array} \right\} \\ = \alpha_{j,k} \text{ Média } \{d(A_p, A_q)^2 : 1 \leq p < q \leq n\} \end{aligned}$$

Observação: A respeito da fórmula acima, notamos que a média aritmética no primeiro membro envolve termos da forma $\binom{n}{j} \cdot \binom{n-j}{k}$, enquanto que no segundo membro temos a média quadrática das distâncias entre os pontos A_1, \dots, A_n tomados 2 a 2, que envolve termos da forma $\binom{n}{2}$. Notemos que, a constante α não depende de n , mas apenas de j e k .

Antes de apresentarmos a prova do teorema, consideremos alguns casos particulares.

O caso $n = 3, j = 1, k = 2$ nos dá a Proposição 3.1. Por outro lado, tomando $n = 4, j = 1, k = 3$ temos a Proposição 3.2, enquanto que com $n = 4, j = 2, k = 2$ obtemos a Proposição 3.3. Nestes casos, temos que

$$\alpha_{1,2} = \frac{3}{4}, \quad \alpha_{1,3} = \frac{2}{3}, \quad \alpha_{2,2} = \frac{1}{2}.$$

Definição 3.3. No caso geral de n pontos, uma *mediana* é um segmento que une um dos pontos ao baricentro dos $(n - 1)$ pontos restantes.

Assim, facilmente deduzimos a seguinte generalização das Proposições 3.1 e 3.2:

Corolário 3.1. Dados n pontos, a soma dos quadrados das medidas das n medianas é igual a $n/(n - 1)^2$ vezes a soma dos quadrados das medidas de todos os segmentos unindo os n pontos.

Definição 3.4. No caso geral de n pontos, uma *bimediana* é um segmento que une o ponto médio de um segmento ao baricentro dos $(n - 2)$ pontos restantes.

Portanto, vale a seguinte generalização da Proposição 3.3:

Corolário 3.2. Dados n pontos, a soma dos quadrados das medidas das $n(n - 1)/2$ bimedianas é igual a $n/(4n - 8)$ vezes a soma dos quadrados das medidas de todos os segmentos unindo os n pontos.

Observação: Notemos que, no caso $n = 4$, as seis bimedianaas consideradas no Corolário 3.2 coincidem duas a duas. Por isso, tem-se a metade da soma dos quadrados das medidas das arestas, em vez de um quarto, como enunciado na Proposição 3.3.

Vale mencionar que os resultados enunciados aqui valem em qualquer espaço com produto interno real ou complexo.

3.3 A demonstração da fórmula

Lema 3.1. Para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$,

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n} \|A_p - A_q\|^2 = (n-1) \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 - 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} A_p \cdot A_q$$

Demonstração. Utilizando a notação $A_p \cdot A_q = \langle A_p, A_q \rangle$, observamos que

$$\begin{aligned} \|A_p - A_q\|^2 &= \langle A_p - A_q, A_p - A_q \rangle = \langle A_p, A_p - A_q \rangle - \langle A_q, A_p - A_q \rangle \\ &= \langle A_p, A_p \rangle - \langle A_p, A_q \rangle - \langle A_q, A_p \rangle + \langle A_q, A_q \rangle \\ &= \|A_p\|^2 - 2\langle A_p, A_q \rangle + \|A_q\|^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p < q \leq n} \|A_p - A_q\|^2 &= \sum_{1 \leq p < q \leq n} (\|A_p\|^2 - 2\langle A_p, A_q \rangle + \|A_q\|^2) \\ &= \sum_{1 \leq p < q \leq n} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) - 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} \langle A_p, A_q \rangle. \end{aligned}$$

Assim, basta mostrar que, para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$,

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) = (n-1) \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2. \quad (3.3)$$

Vamos usar o princípio da indução finita sobre $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$.

- Suponhamos que $n = 3$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p < q \leq 3} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) &= (\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2) + (\|A_1\|^2 + \|A_3\|^2) + (\|A_2\|^2 + \|A_3\|^2) \\ &= 2(\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 + \|A_3\|^2) = (3-1) \cdot \sum_{p=1}^3 \|A_p\|^2. \end{aligned}$$

- Suponhamos que a igualdade (3.3) vale para n (hipótese de indução) e mostremos que igualdade (3.3) vale para $n + 1$. Observamos que

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n+1} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) = \sum_{1 \leq p < q \leq n} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) + \sum_{1 \leq p < q = n+1} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2). \quad (3.4)$$

Pela hipótese de indução,

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) = (n-1) \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p < q = n+1} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) &= \sum_{1 \leq p < n+1} (\|A_p\|^2 + \|A_{n+1}\|^2) \\ &= \sum_{p=1}^n (\|A_p\|^2 + \|A_{n+1}\|^2) \\ &= \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 + \sum_{p=1}^n \|A_{n+1}\|^2 \\ &= \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 + n \cdot \|A_{n+1}\|^2. \end{aligned}$$

Retornando à igualdade (3.4),

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p < q \leq n+1} (\|A_p\|^2 + \|A_q\|^2) &= (n-1) \cdot \sum_{p=1}^n (\|A_p\|^2) + \sum_{p=1}^n (\|A_p\|^2) + n \cdot \|A_{n+1}\|^2 \\ &= n \cdot \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 + n \cdot \|A_{n+1}\|^2 \\ &= n \cdot \left(\|A_{n+1}\|^2 + \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 \right) \\ &= n \cdot \sum_{p=1}^{n+1} \|A_p\|^2 = ((n+1) - 1) \cdot \sum_{p=1}^{n+1} \|A_p\|^2. \end{aligned}$$

Logo, a igualdade (3.3) é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$. Portanto, para todo $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$,

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n} \|A_p - A_q\|^2 = (n-1) \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 - 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} A_p \cdot A_q.$$

□

Vamos apresentar a demonstração do Teorema 3.1. Por simplicidade, a prova será feita apenas no caso real, mas apenas pequenas modificações são necessárias a fim de considerar um espaço com produto vetorial complexo. Provaremos que

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_{j+k}\}} \left\| \frac{A_{i_1} + \dots + A_{i_j}}{j} - \frac{A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}}{k} \right\|^2 = \nu_{n,j,k} \sum_{1 \leq p < q \leq n} \|A_p - A_q\|^2, \quad (3.5)$$

onde

$$\nu_{n,j,k} = \frac{\binom{n}{j} \binom{n-j}{k}}{\binom{n}{2}} \alpha_{j,k},$$

$\alpha_{j,k} = \frac{j+k}{2jk}$ e a primeira soma sendo tomada sobre todas as seqüências de índices distintos $\{i_1, \dots, i_{j+k}\}$ em $\{1, \dots, n\}$ de tal forma que $1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n$ e $1 \leq i_{j+1} < \dots < i_{j+k} \leq n$. Observamos que do Lema 3.1, segue que

$$\sum_{1 \leq p < q \leq n} \|A_p - A_q\|^2 = (n-1) \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 - 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} A_p \cdot A_q.$$

Agora, concentremos-nos no lado esquerdo da identidade (3.5). A soma que nele aparece, por motivos de simetria, será desenvolvida como

$$\sum_{\{i_1, \dots, i_{j+k}\}} \left\| \frac{A_{i_1} + \dots + A_{i_j}}{j} - \frac{A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}}{k} \right\|^2 = \beta_{n,j,k} \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 + \gamma_{n,j,k} \sum_{1 \leq p < q \leq n} A_p \cdot A_q$$

onde $\beta_{n,j,k}$ e $\gamma_{n,j,k}$ são constantes a serem determinadas.

A fim de encontrar a constante $\beta_{n,j,k}$, calculemos o coeficiente de $\|A_p\|^2$. Se A_p pertence ao subconjunto de j pontos, então $\|A_p\|^2$ terá um fator $1/j^2$, pois

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_{i_j}}{j} - \frac{A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}}{k} \right\|^2 &= \frac{1}{j^2} \|A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_{i_j}\|^2 + \\ &+ \left(\frac{-2}{jk} \right) (A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_{i_j} \cdot A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}) \\ &+ \frac{1}{k^2} \|A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}\|^2 \end{aligned}$$

e

$$\|A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_{i_j}\|^2 = \sum_{m=1}^j \|A_{i_m}\|^2 + 2 \sum_{m \neq h} A_{i_m} \cdot A_{i_h}$$

Isto pode acontecer $\binom{n-1}{j-1} \cdot \binom{n-j}{k}$ vezes, pois A_p pertence ao subconjunto de j pontos. Por outro lado, se A_p pertence ao subconjunto de k pontos, então $\|A_p\|^2$ terá um

fator $1/k^2$, pois desenvolvendo

$$\begin{aligned} \left\| \frac{A_{i_1} + \dots + A_{i_j}}{j} - \frac{A_{i_{j+1}} + \dots + A_p + \dots + A_{i_{j+k}}}{k} \right\|^2 &= \frac{1}{j^2} \|A_{i_1} + \dots + A_{i_j}\|^2 + \\ &+ \left(\frac{-2}{jk} \right) (A_{i_1} + \dots + A_{i_j} \cdot A_{i_{j+1}} + \dots + A_p + \dots + A_{i_{j+k}}) \\ &+ \frac{1}{k^2} \|A_{i_{j+1}} + \dots + A_p + \dots + A_{i_{j+k}}\|^2 \end{aligned}$$

e

$$\|A_{i_{j+1}} + \dots + A_p + \dots + A_{i_{j+k}}\|^2 = \sum_{m=1}^k \|A_{i_m}\|^2 + 2 \sum_{m \neq h} A_{i_m} \cdot A_{i_h}.$$

Isto pode acontecer $\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n-k}{j}$ vezes, pois A_p pertence ao subconjunto de j pontos. Assim, somando os dois e simplificando,

$$\begin{aligned} \beta_{n,j,k} &= \binom{n-1}{j-1} \binom{n-j}{k} \cdot \frac{1}{j^2} + \binom{n-1}{k-1} \binom{n-k}{j} \cdot \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-j-k)!k!} \cdot \frac{1}{j^2} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-j)!j!} \cdot \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-j-k)!} \cdot \left(\frac{1}{(j-1)!k!} \cdot \frac{1}{j^2} + \frac{1}{(k-1)!j!} \cdot \frac{1}{k^2} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-j-k)!} \cdot \left(\frac{1}{j!k!} \cdot \frac{1}{j} + \frac{1}{k!j!} \cdot \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-j-k)!j!k!} \cdot \left(\frac{1}{j} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-j-k)!j!k!} \cdot \left(\frac{k+j}{kj} \right) \\ &= (n-1) \left[\frac{(n-2)!}{(n-j-k)!j!k!} \cdot \left(\frac{k+j}{kj} \right) \right] \\ &= (n-1) \cdot \nu_{n,j,k}, \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\nu_{n,j,k} &= \left[\frac{\frac{n!}{(n-j)!j!} \frac{(n-j)!}{(n-j-k)!k!}}{n!} \cdot \frac{j+k}{2jk} \right] \\
&= \frac{n!}{j!(n-j-k)!k!} \cdot \frac{(n-2)! \cdot 2}{n!} \cdot \frac{j+k}{2jk} \\
&= \frac{(n-2)!(j+k)}{j!(j-n-k)!jk}.
\end{aligned}$$

Para determinar o valor de $\gamma_{n,j,k}$, calculemos o coeficiente de $A_p \cdot A_q$. Consideremos quatro casos distintos.

I. Considere $j \geq 2$ e $k \geq 2$. Se A_p e A_q pertencem ao subconjunto de j pontos, então $A_p \cdot A_q$ terá um fator $2/j^2$, pois

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_q + \dots + A_{i_j}}{j} - \frac{A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}}{k} \right\|^2 = \\
&= \frac{1}{j^2} \|A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_q + \dots + A_{i_j}\|^2 + \\
&+ \left(\frac{-2}{jk} \right) (A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_q + \dots + A_{i_j} \cdot A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}) + \\
&\quad + \frac{1}{k^2} \|A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}\|^2
\end{aligned}$$

e

$$\|A_{i_1} + \dots + A_p + \dots + A_q + \dots + A_{i_j}\|^2 = \sum_{m=1}^j \|A_{i_m}\|^2 + 2 \sum_{m \neq h} A_{i_m} \cdot A_{i_h}$$

Isto pode ocorrer $\binom{n-2}{j-2} \binom{n-j}{k}$ vezes. Se A_p pertence ao subconjunto de j pontos e A_q pertence ao subconjunto de k pontos, então $A_p \cdot A_q$ terá um fator $-2/(jk)$ e isto pode ocorrer $\binom{n-2}{j-1} \binom{n-j-1}{k-1}$ vezes. O mesmo ocorre se A_p pertence ao subconjunto de k pontos e A_q pertence ao subconjunto de j pontos. Se A_p e A_q pertencem ao subconjunto de k pontos, então $A_p \cdot A_q$ terá um fator $2/k^2$ e isto pode ocorrer $\binom{n-2}{k-2} \binom{n-k}{j}$ vezes. Somando e simplificando,

$$\begin{aligned}
\gamma_{n,j,k} &= \binom{n-2}{j-2} \binom{n-j}{k} \frac{2}{j^2} + 2 \binom{n-2}{j-1} \binom{n-j-1}{k-1} \frac{-2}{jk} + \binom{n-2}{k-2} \binom{n-k}{j} \frac{2}{k^2} \\
&= -2 \frac{(n-2)!}{j!k!(n-j-k)!} \frac{j+k}{jk} \\
&= -2\nu_{n,j,k}.
\end{aligned}$$

II. Considere $j = 1$ e $k \geq 2$. Se A_p pertence ao primeiro grupo e A_q pertence ao segundo, então $A_p \cdot A_q$ terá um fator $-2/k$ e isto pode ocorrer $\binom{n-2}{k-1}$ vezes. O mesmo ocorre se A_p pertence ao segundo grupo e A_q pertence ao primeiro. Se A_p e A_q pertencem ambos ao segundo grupo, então $A_p \cdot A_q$ terá um fator $2/k^2$ e isto pode ocorrer $\binom{n-2}{k-2}(n-k)$ vezes. Somando,

$$\begin{aligned}\gamma_{n,1,k} &= 2 \binom{n-2}{k-1} \frac{-2}{k} + \binom{n-2}{k-2} (n-k) \frac{2}{k^2} \\ &= -2 \frac{(n-2)!}{k!(n-1-k)!} \frac{1+k}{k} \\ &= -2\nu_{n,1,k}.\end{aligned}$$

III. Considere $j \geq 2$ e $k = 1$. Assim como no caso II, temos que

$$\gamma_{n,j,1} = -2\nu_{n,j,1}.$$

IV. Finalmente, assumamos $j = k = 1$. Se A_1 pertence ao primeiro grupo e A_2 pertence ao segundo grupo, então $A_1 \cdot A_2$ terá um fator -2 , e isto só pode ocorrer uma vez. O mesmo ocorre se A_1 pertence ao segundo grupo e A_2 pertence ao primeiro. Então

$$\gamma_{n,1,1} = 2(-2) = -4 = -2\nu_{n,1,1}.$$

Portanto, nos quatro casos temos que $\gamma_{n,j,k} = -2\nu_{n,j,k}$. Concluindo, observamos que

$$\begin{aligned}\sum_{\{i_1, \dots, i_{j+k}\}} \left\| \frac{A_{i_1} + \dots + A_{i_j}}{j} - \frac{A_{i_{j+1}} + \dots + A_{i_{j+k}}}{k} \right\|^2 &= \\ &= (n-1)\nu_{n,j,k} \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 - 2\nu_{n,j,k} \sum_{1 \leq p < q \leq n} A_p \cdot A_q \\ &= \nu_{n,j,k} \left[(n-1) \sum_{p=1}^n \|A_p\|^2 - 2 \sum_{1 \leq p < q \leq n} A_p \cdot A_q \right] = \nu_{n,j,k} \sum_{1 \leq p < q \leq n} \|A_p - A_q\|^2.\end{aligned}$$

e, com isto, concluímos a demonstração. □

3.4 Exemplo: Octaedro regular

Vimos como a fórmula se aplica a triângulos e tetraedros. Agora, ilustraremos outro exemplo particular, considerando um octaedro regular.

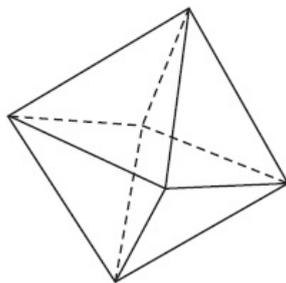


Figura 3.4: Um octaedro regular

Neste caso, temos seis pontos A_1, \dots, A_6 , portanto $n = 6$. Por simplicidade, consideraremos apenas os casos em que $j+k = 6$, e escreveremos as fórmulas para $j = 1, 2, 3$. Denotaremos por ℓ o comprimento das arestas do octaedro. Primeiramente, note que a distância quadrática média dos vértices é

$$\frac{1}{15} \sum_{1 \leq p < q \leq 6} \|A_p - A_q\|^2 = \frac{12\ell^2 + 3(\ell\sqrt{2})^2}{15} = \frac{6}{5}\ell^2.$$

Para fixar as ideias, assuma que A_1, A_2, A_3 determinem um face do octaedro (isto é, um triângulo equilátero), e sejam A_4, A_5, A_6 opostos a A_1, A_2 e A_3 , respectivamente.

O caso $j = 1, k = 5$. Denotemos por m o comprimento das seis medianas. Como $\alpha_{1,5} = \frac{3}{5}$, a fórmula nos dá que

$$\frac{6m^2}{6} = \frac{3}{5} \cdot \frac{6}{5}\ell^2,$$

de onde obtemos que

$$m = \frac{3}{5}\sqrt{2}\ell.$$

O caso $j = 2, k = 4$. Estamos lidando com bimedias, isto é, os segmentos que ligam o ponto médio de uma aresta ao baricentro dos quatro pontos restantes. Entre estas quinze bimedias, doze delas possuem comprimento positivo, que denotaremos por b , enquanto que as outras três possuem comprimento nulo, sendo reduzidas ao centro do octaedro. Como $\alpha_{2,4} = \frac{3}{8}$, a fórmula estabelece que

$$\frac{12b^2 + 3 \cdot 0^2}{15} = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{5}\ell^2,$$

donde

$$b = \frac{3}{4}\ell^2.$$

O caso $j = k = 3$. Aqui tomamos dois grupos com três vértices cada, e queremos calcular as distâncias entre seus baricentros. No entanto, temos que lidar com duas situações possíveis.

Como dito acima, os pontos A_1, A_2, A_3 determinam uma face, e os outros três pontos restantes A_4, A_5, A_6 determinam a face oposta. Existe oito dessas situações (onde pares de faces estão envolvidos), que coincidem dois a dois. Denotemos por d a distância entre estas duas faces.

Por outro lado, os pontos A_1, A_2 e A_4 , por exemplo, não determinam uma face, mas um triângulo reto, bem como os pontos complementares A_3, A_5, A_6 . Existem doze desses pares de triângulos, mesmo que eles coincidam dois a dois. Denotemos por δ a distância entre os baricentros desses dois triângulos, Usando as simetrias do tetraedro regular, é fácil ver que

$$\delta = \frac{\ell\sqrt{2}}{3}$$

Como $\alpha_{3,3} = \frac{1}{3}$, a fórmula determina que

$$\frac{8d^2 + 12\delta^2}{20} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5}\ell^2,$$

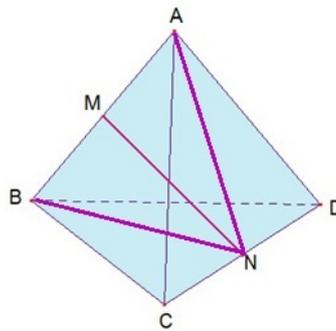
e deduzimos que

$$d = \sqrt{\frac{2}{3}}\ell.$$

Resolução:

- (a) Sabemos que a superfície total é dada por $S_t = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.
- (b) Primeiro traçamos os segmentos \overline{NA} , \overline{BN} e \overline{MN} . Como M e N são pontos médios, então o triângulo ANB é isósceles de base \overline{AB} , M é o pé da altura em relação a base \overline{AB} e portanto os triângulos AMN e BMN são congruentes pelo caso (LLL) e também são triângulos retângulos. Temos $\overline{NA} = \overline{BN}$ são as alturas dos triângulos ACD e BCD respectivamente, e sabemos que a altura de um triângulo equilátero é calculada pela fórmula

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

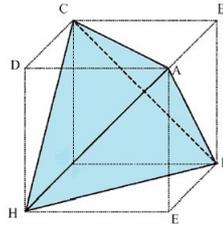


então, aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo AMN , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{MN})^2 + (\overline{AM})^2 &= (\overline{AN})^2 \Leftrightarrow (\overline{MN})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow (\overline{MN})^2 = \left(\frac{3a^2 - a^2}{4}\right) \\ &\Leftrightarrow \overline{MN} = \sqrt{\left(\frac{2a^2}{4}\right)} \\ &\Leftrightarrow \overline{MN} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, para $a = 1$, $\overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. (UFSCar/02) Na figura, os pontos $ACFH$ são os vértices de um tetraedro inscrito em cubo de aresta 3. O volume do tetraedro é:



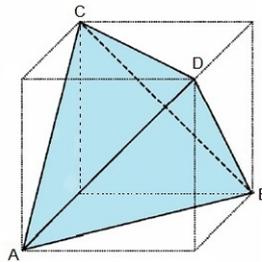
- (a) $\frac{27}{8}$ (b) $\frac{9\sqrt{39}}{8}$ (c) 9 (d) $\frac{27\sqrt{13}}{8}$ (e) 18

Resolução:

Temos $\overline{CH} = \overline{CF} = \overline{HF} = \overline{AF} = \overline{AC} = \overline{AH}$, pois são diagonais das faces do cubo. Logo, o tetraedro $ACFH$ é regular de aresta igual a $3\sqrt{2}$. Como o volume de um tetraedro regular é dado pela seguinte identidade matemática: $V = \frac{a^3 \cdot \sqrt{2}}{3}$, então

$$V = \frac{(3\sqrt{2})^3 \cdot \sqrt{2}}{3} = \frac{54 \cdot \sqrt{4}}{12} = \frac{108}{12} = 9.$$

3. (UNIFESP/07) Quatro dos oito vértices de um cubo de aresta unitária são vértices de um tetraedro regular. As arestas do tetraedro são diagonais das faces do cubo, conforme mostra a figura.



- (a) Obtenha a altura do tetraedro e verifique que ela é igual a dois terços da diagonal do cubo.
 (b) Obtenha a razão entre o volume do cubo e o volume do tetraedro.

Resolução:

- (a) Consideramos a_4 e a_6 , respectivamente, as arestas do tetraedro e do hexaedro. Então, $a_4 = a_6\sqrt{2}$. Como a altura do tetraedro é dada por

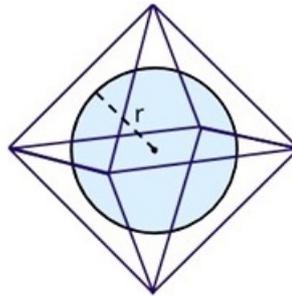
$h = \frac{a_4\sqrt{6}}{3}$ e a diagonal do cubo é dada por $D = a_6\sqrt{3}$, então

$$h = \frac{a_4\sqrt{6}}{3} = \frac{a_6\sqrt{2}\sqrt{6}}{3} = \frac{2a_6\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3} \cdot D.$$

(b) Seja k a razão entre os volumes do cubo e do tetraedro. Então:

$$k = \frac{V_C}{V_T} = \frac{(a_6)^3}{\frac{(a_4)^3\sqrt{2}}{12}} = \frac{(a_6)^3}{\frac{(a_6\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{12}} = \frac{(a_6)^3}{\frac{(a_6)^3(2\sqrt{2})\sqrt{2}}{12}} = \frac{1}{\frac{4}{12}} = \frac{12}{4} = 3$$

4. (UEL/06) Um joalheiro resolveu presentear uma amiga com uma jóia exclusiva. Para isto, imaginou um pingente, com o formato de um octaedro regular, contendo uma pérola inscrita, com o formato de uma esfera de raio R , conforme representado na figura a seguir.

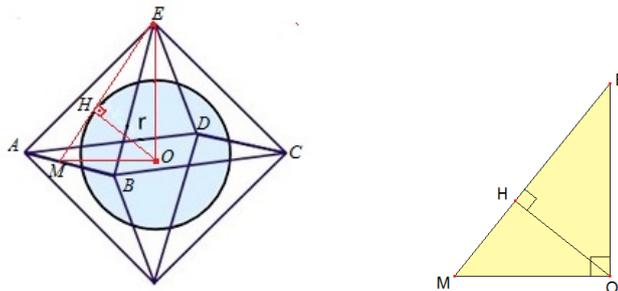


Se a aresta do octaedro regular tem 2 cm de comprimento, o volume da pérola, em cm^3 , é:

- a) $\frac{\sqrt{2}\pi}{3}$ b) $\frac{8\pi}{3}$ c) $\frac{8\sqrt{2}\pi}{9}$ d) $\frac{4\sqrt{6}\pi}{9}$ e) $\frac{8\sqrt{6}\pi}{27}$

Resolução:

Traçando os segmentos \overline{EO} , \overline{OM} e \overline{EM} de acordo com a figura seguinte, teremos:



- O triângulo EOM é retângulo em O e \overline{OH} é a sua altura em relação à hipotenusa \overline{EM} . Assim:
- \overline{EM} é a altura do triângulo equilátero ABE , então:
- $\overline{EM} = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$ cm
- $\overline{OM} = 1$ cm (metade da medida da aresta)
- $\overline{EO} = \sqrt{2}$ cm que é a metade da medida da diagonal do quadrado $ABCD$.
- $\overline{OH} = R$ (raio da esfera), pois H é o ponto de tangência entre a face ABE e a esfera inscrita.

Aplicando-se a relação métrica no triângulo retângulo, na qual o produto entre a hipotenusa e a altura é igual ao produto dos catetos, então:

$$\begin{aligned}\overline{EM} \cdot \overline{OH} &= \overline{OM} \cdot \overline{OE} \\ \sqrt{3} \cdot \overline{OH} &= 1 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

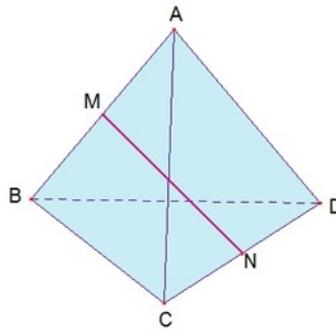
Portanto:

$$\overline{OH} = R = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

5. (**Unicamp/99**) Cada aresta de um tetraedro regular mede 6 cm. Para este tetraedro, calcule:
- a distância entre duas arestas opostas, isto é, entre duas arestas que não têm ponto comum;
 - o raio da esfera inscrita no tetraedro.

Resolução:

- Da questão 1 temos:

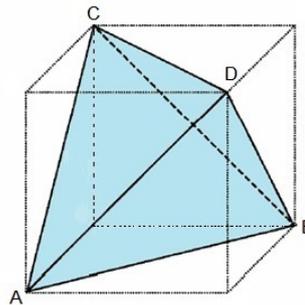


$$\overline{MN} = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \text{ cm.}$$

- (b) Da relação matemática a seguir, podemos calcular o volume da esfera inscrita em um tetraedro regular de aresta igual a a :

$$V_{(esfera)} = \frac{a\sqrt{6}}{12} = \frac{6\sqrt{6}}{12} = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ cm}^3.$$

6. (UERJ/96) Com os vértices A , B , C e D de um cubo de aresta a , construiu-se um tetraedro regular, como mostra a figura abaixo:

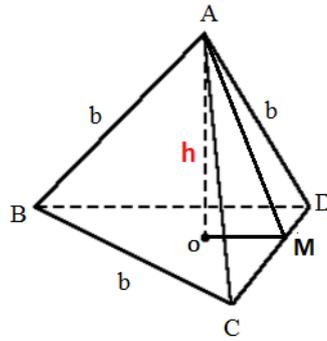


Calcule:

- (a) O volume da pirâmide $ABCD$ em função de a .
 (b) A razão entre os volumes do tetraedro $ABCD$ e do cubo.

Resolução:

- (a) Considerando a figura a seguir, temos:



$\overline{VM} = b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, pois é altura da face equilátera.

$\overline{OM} = \frac{1}{3} \cdot \overline{VM} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b \cdot \sqrt{3}}{2} \right) = \frac{b \cdot \sqrt{3}}{6}$, pois O é o baricentro

$\overline{OV} = h$, é a altura do tetraedro.

Aplicando-se o Teorema de Pitágoras no triângulo OMV , temos:

$$\begin{aligned} (\overline{OV})^2 + (\overline{OM})^2 &= (\overline{VM})^2 \Leftrightarrow h^2 + \left(\frac{b \cdot \sqrt{3}}{6} \right)^2 = \left(\frac{b \cdot \sqrt{3}}{2} \right)^2 \\ \Leftrightarrow h^2 &= \frac{3 \cdot b^2}{4} - \frac{3 \cdot b^2}{36} \\ \Leftrightarrow h^2 &= \frac{27 \cdot b^2}{36} - \frac{3 \cdot b^2}{36} \\ \Leftrightarrow h^2 &= \frac{24b^2}{36} \\ \Leftrightarrow h &= \sqrt{\frac{24b^2}{36}} = \frac{2b\sqrt{6}}{6} = \frac{b\sqrt{6}}{3} \text{ cm.} \end{aligned}$$

Considere A_b a área da base e V_T o volume do tetraedro:

$$A_b = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{e} \quad V_T = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h.$$

Assim,

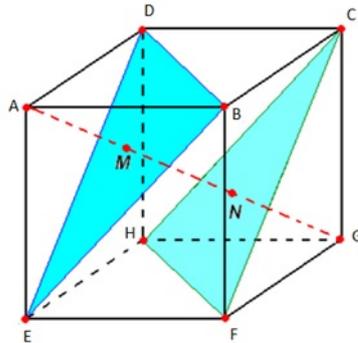
$V_T = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b^2\sqrt{3}}{4} \right) \cdot \left(\frac{b\sqrt{6}}{3} \right)$, $V_T = \frac{b^3\sqrt{2}}{12}$. Como $b = \sqrt{2}a$, temos:

$$V_T = \frac{(\sqrt{2}a)^3\sqrt{2}}{12} \Leftrightarrow V_T = \frac{(\sqrt{2})^4 a^3}{12} \Leftrightarrow V_T = \frac{4a^3}{12} \Leftrightarrow V_T = \frac{a^3}{3}.$$

Sendo V_C o volume do cubo e k a razão entre os volumes, temos:

$$k = \frac{V_T}{V_C} \Leftrightarrow k = \frac{a^3}{a^3} = \frac{1}{3}.$$

7. Considere um hexaedro regular $ABCDEFGH$ de arestas iguais a 1 e os planos que contêm os pontos BDE e CGH respectivamente:



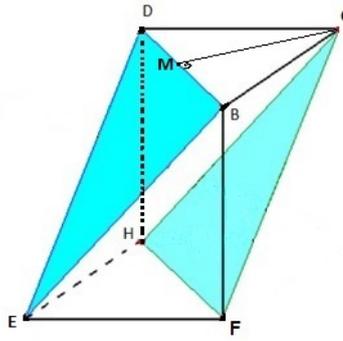
- Determine a área dos triângulos CFH e BDE .
- Determine o volume do sólido $BCDEFH$.
- Determine a distância entre os planos BDE e CFH .

Resolução:

- Notemos que os triângulos CFH e BDE são equiláteros de lado $L = \sqrt{2}$. Logo a suas áreas são:

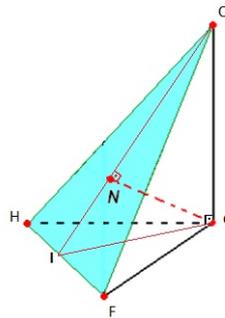
$$A = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- O volume do sólido $BCDEFH$ é obtido somando-se os volumes das pirâmides $CBFHD$ e $EBFHD$, em que $BFHD$ é a base retangular comum de medidas $\sqrt{2}$ e 1. A altura da pirâmide em relação a base retangular $BFHD$ é a metade da diagonal da face do cubo, ou seja, $\overline{CM} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim,



$$\begin{aligned}
 V &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \\
 &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

- (c) Basta encontrar \overline{MN} para determinar a distância entre os planos BDE e CFH . Como $\overline{MN} = \overline{AG} - (\overline{AM} + \overline{GN})$ e $\overline{AG} = \sqrt{3}$, então precisamos calcular \overline{AM} e \overline{GN} . Para tal, consideremos a pirâmide $CFGH$.



Traçando as alturas \overline{CI} do triângulo CFH e \overline{GI} do triângulo FGH e como $\overline{CG} = \overline{FG} = \overline{GH} = 1$, então, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\overline{IC} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad e \quad \overline{GI} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Observando o triângulo CGI , obtemos $\overline{CI} \cdot \overline{GN} = \overline{CG} \cdot \overline{GI}$. Logo,

$$\frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \overline{GN} = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \overline{GN} &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{2}{6}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.
 \end{aligned}$$

Como a diagonal $\overline{AG} = \sqrt{3}$ e $\overline{AM} = \overline{GN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, então $\overline{MN} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

8. (**Profmat/11**) O poliedro P que inspirou a bola da Copa de 70 é formado por faces pentagonais e hexagonais, e é construído da seguinte forma: Considere um icosaedro regular de aresta a conforme a figura abaixo.



A partir de um vértice e sobre cada uma das 5 arestas que concorrem nesse vértice, assinale os pontos que estão a uma distância desse vértice. Esses 5 pontos formam um pentágono regular (Fig. 2).

I) Retirando a pirâmide de base pentagonal que ficou formada obtemos a (Fig.3).

II) Repetindo a mesma operação para todos os vértices do icosaedro obtém-se o poliedro P .

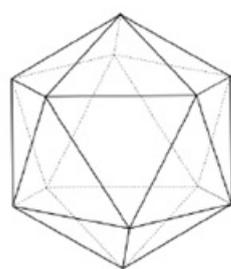


Fig. 1

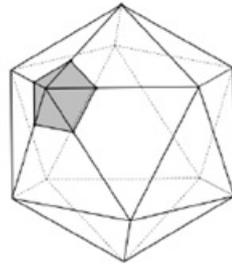


Fig. 2

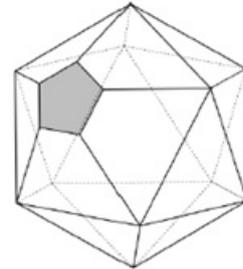


Fig. 3

- (a) Determine quantas são as faces pentagonais e quantas são as faces hexagonais de P .
- (b) Determine os números de arestas, faces e vértices de P .
- (c) Sabendo que uma diagonal de um poliedro é todo segmento que une dois vértices que não estão na mesma face, determine o número de diagonais de P .

Resolução:

(a) Cada face pentagonal de P apareceu onde havia um vértice do icosaedro. Como o icosaedro tem 12 vértices então P tem 12 faces pentagonais. Cada face (triangular) do icosaedro deu origem a uma face hexagonal de P . Como o icosaedro tem 20 faces triangulares então P tem 20 faces hexagonais.

(b) Do item anterior temos $F_5=12$ e $F_6=20$. O número total de faces de P é:
 $F=F_5+F_6=12+20=32$.

Contando as arestas temos: $2A=5F_5+6F_6$

$$2A=5.12+6.20$$

$$2A=180$$

$$A=90$$

Como P é convexo então vale a relação de Euler $V - A + F = 2$.

$$V - 90 + 32 = 2$$

Portanto,

$$V = 60.$$

(c) Seja d_n o número de diagonais de um polígono de n lados. O número de diagonais de um pentágono é $d_5=5$ e o de um hexágono é $d_6= 9$.

A soma dos números de diagonais de todas as faces é

$$S=F_5.d_5 + F_6.d_6 = 12.5 + 6.20 = 240.$$

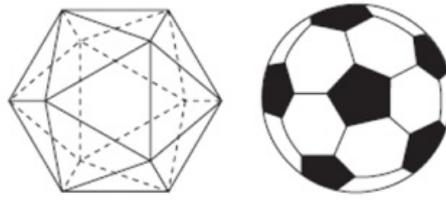
Vamos agora construir todos os segmentos cujas extremidades são os V vértices do poliedro P .

A quantidade de diagonais de P é

$$\begin{aligned} D &= \binom{V}{2} - A - S \\ &= \binom{60}{2} - 90 - 240 \\ &= \frac{60.59}{2} - 330 \\ &= 1.170 - 330 = 1.440 \end{aligned}$$

9. (UERJ/99) Um icosaedro regular tem 20 faces e 12 vértices, a partir dos quais retiram-se 12 pirâmides congruentes. As medidas das arestas dessas pirâmides são iguais a $1/3$ da aresta do icosaedro. O que resta é um tipo de poliedro

usado na fabricação de bolas. Observe as figuras abaixo:



Para confeccionar uma bola de futebol, um artesão usa esse novo poliedro, no qual cada gomo é uma face. Ao costurar dois gomos para unir duas faces do poliedro, ele gasta 7 cm de linha. Depois de pronta a bola, o artesão gastou, no mínimo, um comprimento de linha igual a:

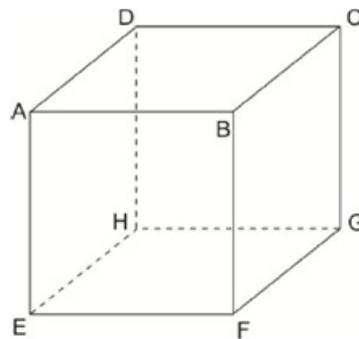
- a) 7,0 m b) 6,3 m c) 4,9 m d) 2,1 m e) 4,5 cm

Resolução:

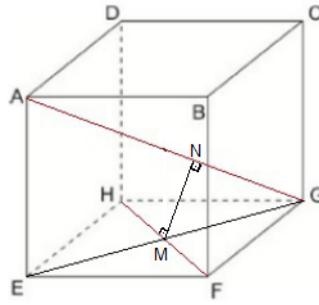
Após a resolução da questão 8 fica fácil, basta multiplicar 7cm, que é o comprimento do barbante usado para unir duas arestas pelo número total de arestas, que é 90, logo:

O comprimento mínimo é: $7\text{cm} \cdot 90 = 630\text{cm} = 6,3\text{m}$

10. Considere o cubo $ABCDEFGH$ abaixo, de arestas a . Determine a distância entre os segmentos AG e HF .



- a) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ c) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ e) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

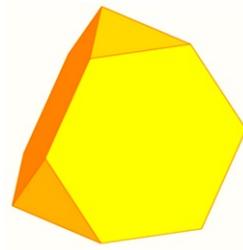
**Resolução:**

Considerando o cubo $ABCDEFGH$, traçamos os segmentos AG , EG e HF . Para obtermos a distância entre \overline{HF} e \overline{AG} , traçamos \overline{MN} perpendicular a \overline{AG} e \overline{FH} .

Como os triângulos AEG e MNG são semelhantes (caso AA), temos:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AG}}{\overline{AE}} &= \frac{\overline{GM}}{\overline{MN}} \\ \overline{MN} &= \frac{\overline{AE}}{\overline{AG}} \cdot \overline{GM} \\ \overline{MN} &= \frac{a}{a\sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \overline{MN} &= \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{a\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

11. Determine o volume do tetraedro truncado de 6 cm de aresta.



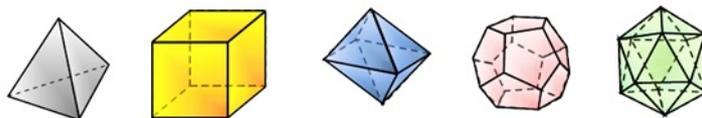
Para calcular o volume do tetraedro truncado, basta calcular o volume do tetraedro a qual ele foi obtido, cujo a medida da aresta (A) é 18 cm e subtrair os volumes dos quatro tetraedros retirados dos seus vértices, cujo aresta(a) mede 6cm . Portanto:

REsolução:

$$\begin{aligned} V_{Ttruncado} &= \frac{A^3 \cdot \sqrt{3}}{12} - 4 \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} \\ &= \frac{18^3 \sqrt{3}}{12} - 4 \cdot \frac{6^3 \sqrt{3}}{12} \end{aligned}$$

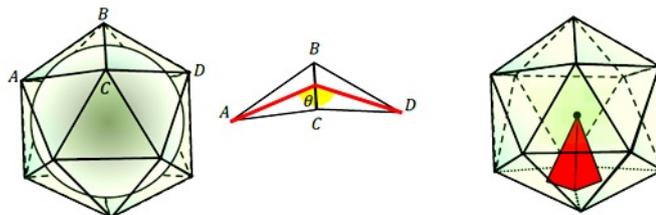
$$\begin{aligned} V_{Ttruncado} &= \frac{18 \cdot 324 \cdot \sqrt{3}}{12} - 4 \cdot \frac{216 \sqrt{3}}{12} \\ &= 486 \sqrt{3} - 72 \sqrt{3} \\ &= 414 \sqrt{3} \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

12. (OPM-13) Os sólidos de Platão têm faces com mesmas quantidades de arestas e, além disso, de cada vértice sai a mesma quantidade de arestas. Se todas as arestas têm a mesma medida, o sólido de Platão é regular. Pode-se provar que há cinco sólidos de Platão: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, dodecaedro e o icosaedro



Você já deve conhecer bem os dois primeiros sólidos, e quem sabe o terceiro. Nesse problema, daremos uma atenção especial aos outros dois.

- a) Primeiro calcularemos o raio da esfera inscrita no icosaedro regular, que é o sólido de Platão com 20 faces triangulares.



- (a.1) Sendo θ o ângulo diédrico entre as faces e do icosaedro regular, calcule-o.

- (a.2) Considere o quadrilátero destacado na figura da direita, que tem como vértices o centro do icosaedro, dois centros de faces adjacentes e o ponto médio de uma das arestas. Sendo a medida da aresta do icosaedro, calcule o raio da esfera inscrita no icosaedro.

b) Os centros das faces do icosaedro regular são os vértices de um dodecaedro regular. Sendo a medida da aresta do dodecaedro, calcule o raio da esfera circunscrita ao dodecaedro regular.

Você pode querer utilizar os seguintes dados: (*) A diagonal do pentágono de

$$\text{lado } x \text{ é } x \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right);$$

$$(**) \operatorname{tg} \left(\frac{\theta}{2} \right) = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}}$$

Resolução:

(a.1) Nota-se que o triângulo formando o ângulo θ , possui dois lados que são alturas das faces triangulares do icosaedro e o terceiro lado sendo a diagonal de um pentágono regular. Sabe-se que a altura do triângulo equilátero é $\frac{L \cdot \sqrt{3}}{2}$

e, como dado na dica, a diagonal do pentágono é $\frac{L \cdot (1 + \sqrt{5})}{2}$.

Para calcularmos a medida do cosseno do ângulo θ , utilizaremos a Lei dos Cossenos no triângulo AMD , onde M é ponto médio do segmento BC . Daí:

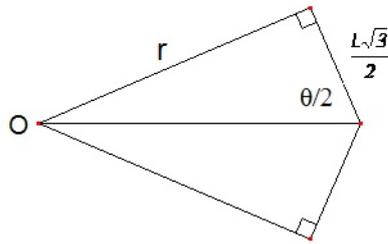
$$\begin{aligned} \left[L \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right]^2 &= 2 \cdot \left(\frac{L\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{L\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cos \theta \\ L^2 \left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} \right) &= 2 \left(\frac{3L^2}{4} \right) - 2 \left(\frac{3L^2 \cos \theta}{4} \right) \\ \frac{2L^2}{4} (3 + \sqrt{5}) &= \frac{6L^2}{4} (1 - \cos \theta) \\ 3 + \sqrt{5} &= 3 \cdot (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

$$3 + \sqrt{5} = 3 - 3 \cos \theta$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

(a.2) Observando o quadrilátero formado pelos centros de faces, o centro da

circunferência inscrita é o ponto onde forma-se um ângulo θ entre as duas faces, temos a figura a seguir. Notemos que os dois triângulos são congruentes (Caso *LLL*). Portanto, o ângulo θ será dividido ao meio.



Notemos que o centro do triângulo equilátero divide a altura na razão 2 para 1, pois nesse caso o centro coincide com o baricentro e a altura com a mediana. Usando a 2ª dica, temos:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\frac{r}{1}}{\frac{L\sqrt{3}}{6}} \Leftrightarrow r = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Leftrightarrow r = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$$

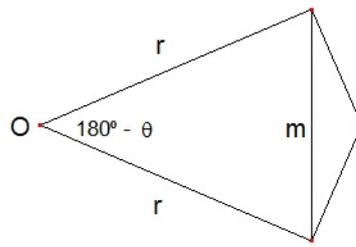
Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 - \cos\theta}}{\sqrt{1 + \cos\theta}} &= \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)}}{\sqrt{1 + \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{3}}}{\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3}}} = \\ &= \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{3 - \sqrt{5}}} \cdot \frac{\sqrt{3 + \sqrt{5}}}{\sqrt{3 + \sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{(3 + \sqrt{5})^2}}{\sqrt{4}} = \frac{(3 + \sqrt{5})}{2} \end{aligned}$$

Portanto:

$$r = L \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{(3 + \sqrt{5})}{2}$$

(b) Notemos que usando o mesmo quadrilátero em (a.2) mas traçando a outra diagonal e nomeando-a de **m**.



Aplicando a lei dos cossenos, teremos:

$$m^2 = r^2 + r^2 - 2 \cdot r \cdot r \cdot \cos(180^\circ - \theta)$$

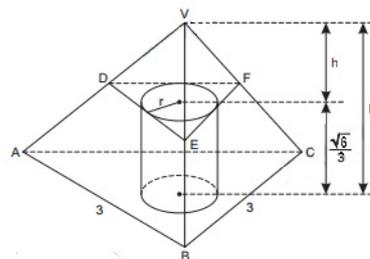
$$m^2 = 2r^2 + 2r^2 \cdot \cos \theta$$

$$m^2 = 2r^2(1 + \cos \theta)$$

Substituindo $\cos \theta$ encontrado no item (a.1), temos:

$$\begin{aligned} m^2 &= 2r^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \Leftrightarrow m^2 = 2r^2 \cdot \left(\frac{3}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \Leftrightarrow \\ m^2 &= r^2 \cdot \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{3}\right) \Leftrightarrow m^2 = r^2 \cdot \left(\frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{3}\right) \Leftrightarrow \\ m^2 &= r^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow m = r \cdot \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{3}}\right) \Leftrightarrow \\ r &= m \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 1} \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} \Leftrightarrow r = m \cdot \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5} + 1)}{4} \end{aligned}$$

13. (ITA/09) Um cilindro reto de altura $\frac{\sqrt{6}}{3}$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm, determine o volume do cilindro.



Resolução:

Sejam H e h as medidas, em centímetros, das alturas dos tetraedros regulares $VABC$ e $VDEF$. Assim:

$$H = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} \quad \text{e} \quad h = H - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{3\sqrt{6}}{3} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

Sendo a a medida, em centímetros, da aresta do tetraedro $VDEF$, temos:

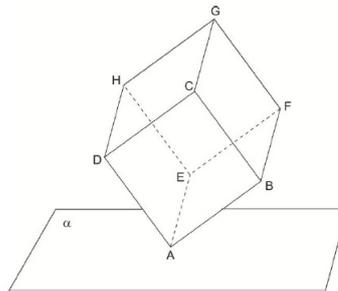
$$h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \frac{2\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow a = 2$$

A medida r , em centímetros, do raio da base do cilindro é $\frac{1}{3}$ da altura do triângulo equilátero DEF . Assim, $r = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Logo, o volume do cilindro em cm^3 é:

$$V = A_b \cdot h \Rightarrow V = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{9}$$

14. (OPM/06) Na figura a seguir, $ABCDEFGH$ é um cubo de aresta 5, sendo que o vértice A pertence a um plano α . As distâncias dos vértices B e E ao plano α são iguais a 3.



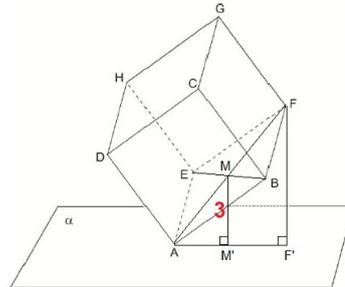
- a) Calcule a distância do vértice F ao plano α .
- b) Mostre que o plano determinado pelos pontos A , D e F é perpendicular ao plano α .

Resolução:

- a) A face $ABFE$ é um quadrado, logo os pontos médios de \overline{BE} e \overline{AF} coincidem.

Seja M tal ponto. Como E e B estão à mesma distância de α , então \overline{EB} é paralelo a α , de tal modo que a distância de M a α é igual a 3.

Sendo M' e F' as projeções ortogonais de M e F em α , respectivamente, os triângulos AMM' e AFF' semelhantes (caso AA). Como mostra a figura a seguir:



Logo:

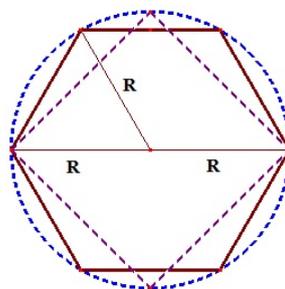
$$\frac{\overline{FF'}}{\overline{MM'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{MA}} = 2 \Rightarrow \overline{FF'} = 2 \cdot \overline{MM'} = 2 \cdot 3 = 6, \text{ que é a distância } F \text{ a } \alpha.$$

b) Temos que \overline{BE} é paralelo a α e que o plano ADF é o plano mediador de \overline{BE} , já que $\overline{AE} = \overline{AB}$, $\overline{DE} = \overline{DB}$ e $\overline{FE} = \overline{FB}$. Assim, esse plano é perpendicular a \overline{BE} e, conseqüentemente ao plano α

15. (Olimpíada Cearense/06) Duas pirâmides regulares, uma quadrangular e outra hexagonal, têm bases inscritas numa mesma circunferência de raio R e volumes iguais. Determine a relação entre as alturas das duas pirâmides.

Resolução:

Vamos considerar h e H , respectivamente, as alturas das pirâmides de base quadrada e hexagonal. A figura a seguir, mostra um quadrado e um hexágono inscritos numa mesma circunferência de raio R .



Vamos escrever os lados do quadrado L_4 e do hexágono L_6 em função do raio R da circunferência. Temos :

(*)No quadrado

$$\sqrt{2} \cdot L_4 = 2 \cdot R \Leftrightarrow L_4 = \frac{2R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow L_4 = \sqrt{2}R$$

(**)No hexágono:

$$L_6 = R$$

Vamos Considerar também V_1 e V_2 , respectivamente, os volumes das pirâmides quadrangular e hexagonal. Do enunciado, temos:

$$V_1 = V_2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot A_b h = \frac{1}{3} \cdot A_B H \Leftrightarrow A_b h = A_B H \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{A_B}{A_b} \Leftrightarrow$$

$$\frac{h}{H} = \frac{\frac{\pi 6(R)^2 \sqrt{3}}{4}}{\pi(R\sqrt{2})^2} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{6\pi R^2 \sqrt{3}}{8\pi R^2} \Leftrightarrow \frac{h}{H} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

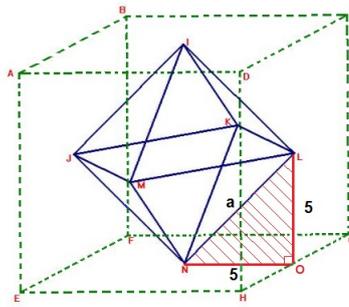
16. (**Unicamp/03**) Considere um cubo cuja aresta mede 10 cm. O sólido cujos vértices são os centros das faces do cubo é um octaedro regular, cujas faces são triângulos equiláteros congruentes.

(a) Calcule o comprimento da aresta desse octaedro regular.

(b) Calcule o volume do mesmo octaedro.

Resolução:

- (a) De acordo com a figura abaixo, temos o cubo $ABCDEFGH$ e o octaedro $IJKLMN$ inscrito.



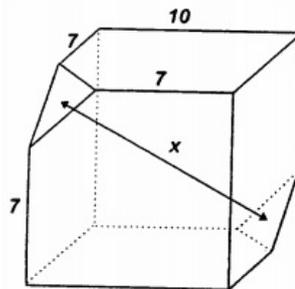
O triângulo LNO é retângulo em O , sendo $\overline{LO} = \overline{ON} = 5$ cm, os pontos L e N são centros das faces do cubo. Portanto, pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$a = 5\sqrt{2} \text{ cm.}$$

(b) Usando a fórmula a seguir, temos:

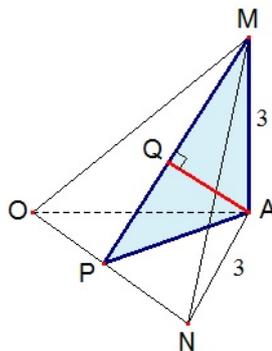
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow V = \frac{(5\sqrt{2})^3\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow V = \frac{5^3(\sqrt{2})^4}{3} \Leftrightarrow V = \frac{500}{3} \text{ cm}^3$$

17. (UFPE/02) Um cubo de lado 10 cm é cortado por dois planos como mostra a figura. Cada corte intercepta três arestas do cubo em pontos distantes 3 cm do vértice mais próximo. Se a distância entre as faces triangulares do sólido resultante é x cm, calcule $\sqrt{3}x$:



Resolução:

Após o cubo ser seccionado, retirou-se dele dois tetraedros idênticos. Fazendo o desenho de um dos tetraedros que foram retirados do cubo após as secções, nomeamos os seus vértices de $AMNO$. Nomeamos também, o ponto médio do segmento NO de P e o pé da altura do tetraedro $AMNO$, baixada a partir de A (em relação ao segmento MP) de Q , conforme mostra a figura a seguir:



Como a diagonal do cubo é $a\sqrt{3}$ basta subtrair dela o dobro da altura do tetraedro $AOMN$, em relação a base OMN .

- O triângulo MNO é equilátero $\Rightarrow \overline{MO} = \overline{MN} = \overline{ON} = 3\sqrt{2}$
- Arestas laterais do tetraedro $AMNO$: $\overline{AM} = \overline{AN} = \overline{AO} = 3$
- Altura do triângulo equilátero MNO : $\overline{MP} = \frac{L\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$
- \overline{AQ} é a altura do tetraedro $AMNO$ em relação a base MNO
- O triângulo ANP é retângulo em P , $\overline{AN} = 3$, $\overline{NP} = \frac{1}{2}$ e $\overline{ON} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- O triângulo ANP é retângulo e isósceles e $\overline{AP} = \overline{NP} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

Aplicando-se a relação métrica no triângulo retângulo, na qual o produto entre a hipotenusa e a altura é igual ao produto dos catetos, então:

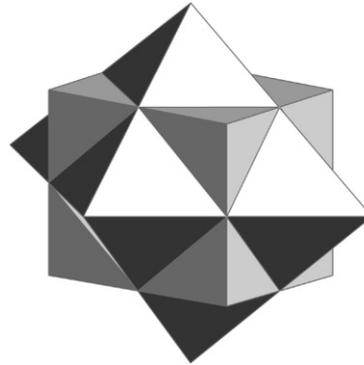
$$\overline{MP} \cdot \overline{AQ} = \overline{AP} \cdot \overline{AM} \Leftrightarrow \frac{3\sqrt{6}}{2} \cdot \overline{AQ} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$\overline{AQ} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \overline{AQ} = \sqrt{3}$$

$$\text{Como } x = 10\sqrt{3} - 2 \cdot \overline{AQ} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot x = \sqrt{3} \cdot (10\sqrt{3} - 2\sqrt{3}) = \sqrt{3} \cdot 8\sqrt{3} = 24$$

18. (UEL/02) As superfícies de um cubo e de um octaedro regular interpenetram-se, dando origem à figura **F** mostrada abaixo. Sobre cada face do cubo elevam-se pirâmides que têm a base quadrada e as faces em forma de triângulos equiláteros. Os vértices das bases das pirâmides estão localizados nos pontos médios

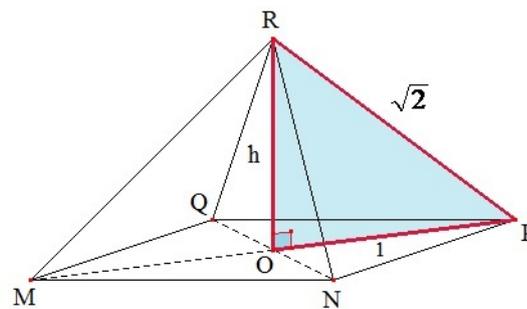
das arestas do cubo e do octaedro. A aresta do cubo mede 2 cm. Qual o volume do sólido limitado pela figura **F** ?



- (a) 12cm^3 (b) 14cm^3 (c) 16cm^3 (d) 18cm^3 (e) 20cm^3

Resolução:

Cada uma das seis pirâmides que estão sobre as faces do cubo, como mostra a figura acima, têm arestas iguais a $\sqrt{2}$ cm.



Escolhendo-se uma das pirâmides que estão sobre as faces do cubo e nomeando seus vértices de $MNPQR$ (como mostrado a figura acima), traçamos as diagonais MP e NQ obtemos a interseção O (pé da altura a partir de R). Temos que, o triângulo ROP retângulo em O . Aplicando o Teorema de Pitágoras para obtermos o valor de $h=OR$, temos: Como $\overline{OP}=1$ cm (metade da diagonal $MP=2$) ; $\overline{RP} = \sqrt{2}$ cm, então:

$$\overline{OR}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{RP}^2 \Leftrightarrow \overline{OR}^2 + 1^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \overline{OR}^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow \overline{OR} = 1$$

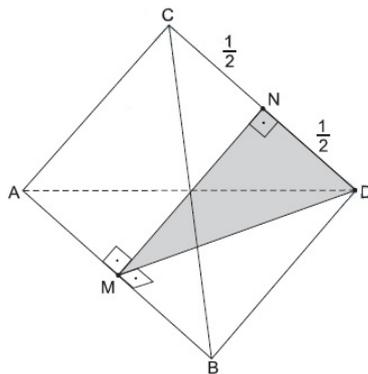
Calculando o volume (V_p) da pirâmide:

$$V_p = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h \Leftrightarrow V_p = \frac{1}{3} \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot 1 \Leftrightarrow V_p = \frac{2}{3} \text{ cm}^3.$$

Como o volume do cubo é $V_c = 2^3 = 8 \text{ cm}^3$ e temos 6 pirâmides de mesmo volume $\left(6 \cdot \frac{2}{3} = 4 \text{ cm}^3\right)$. Daí, $8 + 4 = 12 \text{ cm}^3$.

19. (ITA/09) Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento AB e N é o ponto médio do segmento CD , então a área do triângulo MND , em cm^2 , é igual a:

- (a) $\frac{\sqrt{2}}{6}$ (b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (d) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ (e) $\frac{\sqrt{3}}{9}$



Resolução:

\overline{DM} é altura do triângulo equilátero ABD e portanto:

$$\overline{DM} = \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo MND aplicamos o Teorema de Pitágoras, então:

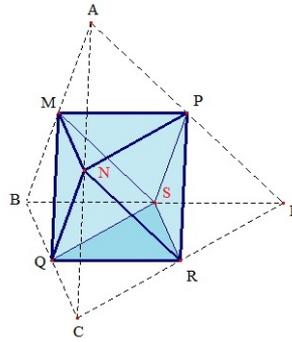
$$\overline{MN}^2 = \overline{DN}^2 + \overline{DM}^2 \Leftrightarrow \overline{MN}^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \overline{MN}^2 = \frac{2}{4} \Leftrightarrow \overline{MN} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, a área S do triângulo MND em centímetros quadrados é:

$$S = \frac{1}{2} \cdot \overline{MN} \cdot \overline{ND} \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow S = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

20. (Profmat/13) Considere um tetraedro $ABCD$ e sejam M, N, P, Q, R e S os pontos médios das arestas AB, AC, AD, BC, CD e BD , respectivamente. Prove que o volume do octaedro $MNPQRS$ é metade do volume do tetraedro

$ABCD$.



Resolução:

O volume do octaedro $MNPQRS$ é obtido retirando-se, do volume do tetraedro $ABCD$, os volumes dos tetraedros $APMN$, $BMQS$, $CNRQ$ e $DPRS$

Considere o tetraedro $APMN$. Como M , N e P são pontos médios de AB , AC e AD , respectivamente, $APMN$ é semelhante ao tetraedro $ABCD$, com razão $\frac{1}{2}$. Com isso,

$$\frac{V_{(APMN)}}{V_{(ABCD)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Pelo mesmo raciocínio, os tetraedros $BMQS$, $CNRQ$ e $DPRS$ serão também semelhantes a $ABCD$ com razão $\frac{1}{2}$, logo:

$$\frac{V_{(BMQS)}}{V_{(ABCD)}} = \frac{V_{(SNRQ)}}{V_{(ABCD)}} = \frac{V_{(DPRS)}}{V_{(ABCD)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}, \text{ com isso,}$$

$$V_{(APMN)} = V_{(BMQS)} = V_{(SNRO)} = V_{(DPRS)} = \frac{1}{8} \cdot V_{(ABCD)}, \text{ e então}$$

$$V_{(MNPQRS)} = V_{(ABCD)} - (V_{(APMN)} + V_{(BMQS)} + V_{(SNRO)} + V_{(DPRS)})$$

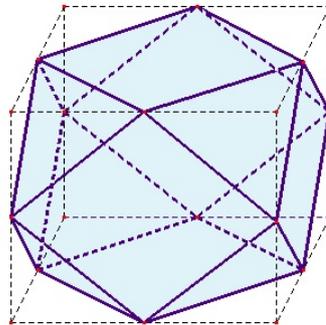
$$V_{(MNPQRS)} = V_{(ABCD)} - 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot V_{(ABCD)}$$

$$V_{(MNPQRS)} = \frac{1}{2} \cdot V_{(ABCD)}$$

21. (OBM/10) Seja $X \subseteq \mathbb{R}^3$ o poliedro convexo cujo os vértices são todos os pontos $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ com $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Calcule o volume de X .

Resolução:

Os vértices de X são os doze pontos $(\pm 1, \pm 1, 0)$; $(\pm 1, 0, \pm 1)$ e $(0, \pm 1, \pm 1)$, que são os pontos médios das arestas do cubo $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, donde X é obtido a partir do cubo retirando-se oito tetraedros de cada um de seus vértices.



O volume do cubo é $2^3 = 8$

O volume dos tetraedros é $8 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1^3 = \frac{8}{3}$

Assim o volume do sólido é $8 - \frac{8}{3} = \frac{24 - 8}{3} = \frac{16}{3}$

Bibliografia

- [1] L. R. Dante, **Matemática - Contextos e Aplicações**, Ed. Ática, São Paulo, 2004.
- [2] A. Fonda, *On a Geometrical Formula Involving Medians and Bimedians*, Mathematics Magazine, vol. 86(5), 2013, 351-357.
- [3] C. E. S. C. Granja & M. P. M. Costa, *A fórmula do volume do icosaedro*, RPM, vol. 74, 2011.
- [4] E. L. Lima, **Coordenadas no Espaço**, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2007.
- [5] E. L. Lima et al, **A Matemática do Ensino Médio**, Coleção do Professor de Matemática, vol. 2, SBM, Rio de Janeiro, 2007.
- [6] E. L. Lima et al, **A Matemática do Ensino Médio**, Coleção do Professor de Matemática, vol. 3, SBM, Rio de Janeiro, 2007.
- [7] A. C. Morgado et al, **Análise Combinatória e Probabilidade**, Coleção do Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2007.
- [8] E. Veloso, *Deltaedros há muitos...*, APM, EM 98, 2008, 35-39.