UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

JAIRO FERREIRA DA SILVA

TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS EM FUNÇÕES ELEMENTARES

JUAZEIRO DO NORTE
2015

JAIRO FERREIRA DA SILVA

TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS EM FUNÇÕES ELEMENTARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Ms. Júnio Moreira de Alencar.

JUAZEIRO DO NORTE

2015

JAIRO FERREIRA DA SILVA

TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS EM FUNÇÕES ELEMENTARES

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 26/ 09 / 2015.

BANCA EXAMINADORA

Júnio Moreira de Alencar

Prof. Ms. Júnio Moreira de Alencar (Orientador)
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Mario de Assis Oliveira

Prof. Ms. Mario de Assis Oliveira
Univ. Regional do Cariri (URCA) e
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará (IFCE)

Maria Silvana A. Costa

Profa. Dra. Maria Silvana Alcântara Costa
Universidade Federal do Cariri (UFCA)

Dedico este trabalho à minha mãe, Maria Selmy.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por me surpreender com sua providência durante estes anos de mestrado.

Ao professor Júnio Moreira, pela sua atenção, paciência, disponibilidade e sugestão do tema.

À minha família, minha mãe, minhas irmãs, meus avós por serem pilares em minha vida.

Aos meus amigos do mestrado pela ajuda e companheirismo em diversas horas de estudo e diversão, principalmente Fabiano Luiz, Israel Gomes, Francisco Lucas e George Ronan (in memorian).

Aos meus amigos Arilson Santos, Denisard Meneses, Diego Welesy, Maxwell Pitta, Marcos Morais, Marília Barbosa, Socorro Leandro e Vangleilson Diniz, por sempre me ajudarem nas situações impossíveis para mim.

A todos os professores do IFCE, UFCA E UFC, dentre eles destaco Cícero Barroso, Mário de Asssis , Juscelino Silva e Silvana Costa que contribuíram de forma ímpar para minha formação. À CAPES pelo apoio financeiro e a SBM pela idealização e implantação do PROFMAT.

A Arysa Cabral Barros, por seu amor, voz e sorriso, que me fazem um homem melhor.

Os símbolos são a língua do Invisível, falada no visível. (Gertrude Von Le Fort)

RESUMO

Na matemática um dos principais temas estudados são as funções, devido sua ampla associação e aplicabilidade em outras áreas de atuação matemática, diversas ciências ou até mesmo situações cotidianas, justificando o grande tempo dedicado ao seu aprendizado na educação básica. Este trabalho pretende apresentar certas transformações nos gráficos de funções elementares como ferramenta complementar ou modelo alternativo ao seu ensino, uma vez que o mesmo ocorre muitas vezes sob uma forma pouco dinâmica, incapaz de atingir o aprendizado esperado. Serão expostas considerações sobre algumas características das funções afim, quadrática, polinomiais, exponenciais e trigonométricas, como também a manipulação dos gráficos destas com enfoque na relação destas transformações com as variações dos parâmetros na sua forma algébrica. Dessa forma, é esperado que esta abordagem auxilie no processo de aprendizagem das funções no Ensino Médio, alcançando um conhecimento sólido, onde os estudantes sejam capazes de identificar as variações e compreender o comportamento gráfico, bem como o papel dos coeficientes.

Palavras-chave: Função. Transformação. Representação.

ABSTRACT

In mathematics one of the main topics studied are the functions due to its wide association and applicability in other areas of expertise mathematics, various sciences or even everyday situations, justifies the big time devoted to their learning in basic education. This work intends to represent some transformations in the elementary function graphs a qas a complementary tool or alternative model to their teaching, since it often occurs in a not very dynamic way to reach the expected learning. Will be exposed considerations on some characteristics of: order affine, quadratic, polynomial, exponential and trigonometric functions, and also the manipulation of graphs of these functions focusing on the relationship of these changes with variations of the parameters in its algebraic form. Thus it is expected that this approach assists in the learning process of functions in High School, reaching a solid knowledge, where students are able to identify the variations to understand the graphic behavior, as well as the role of the coefficients.

Keywords: Function. Transformation. Representation.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

É fato que dentre os temas mais importantes em Matemática está o estudo das funções. Isto ocorre devido sua presença em nosso cotidiano desde situações simples - o valor pago por uma conta de luz, que está relacionada ao seu consumo - até avançadas pesquisas em diversas áreas do conhecimento científico e tecnológico - estudo comportamental de fármacos em um individuo no decorrer do tempo ou, recentemente, em interface cérebro-máquina e cérebro-cérebro -, visando conceber uma descrição, representar e fazer análises sobre relações de dependência entre grandezas.

As funções apesar de presentes constantemente em nosso dia a dia, contudo, são dificilmente percebidas pelos alunos em muitas ocasiões; raras exceções podem ser citadas, como circunstâncias práticas, modeladas por meio de funções afins, devido a sua abordagem ser aplicada durante praticamente todo o ensino fundamental, em virtude da sua relação com o conceito de proporcionalidade.

Diante disto, a abordagem das funções no ensino básico, principalmente no nível médio, tem como objetivo fazer os alunos adquirirem uma linguagem algébrica necessária para expressar grandezas e modelar situações, destacando algumas características e propriedades, como também da construção, manipulação e interpretação de sua representação gráfica e aplicações dessas funções, obtendo, dessa forma, a apreensão do conceito função.

Em razão das diversas abordagens fragmentadas, surgem dificuldades no ensino e aprendizagem deste tema. Há apresentações em livros didáticos que fazem o uso de diferentes representações para estas funções, como: diagrama de setas, apresentação algébrica e gráfica, mas, muitas vezes, são ineficazes na realização de uma conexão apropriada, onde os diagramas de setas ou outras representações são geralmente abandonados logo nas primeiras aulas. Outro exemplo desta fragmentação consiste no tratamento das representações gráficas, onde o processo de construção é determinado por meio de um algoritmo ineficiente para tratar alguns aspectos nas funções.

Percebemos que as formas mais frequentes empregadas para apresentar funções são: o diagrama de setas, tabelas, expressão em linguagem natural, expressões algébricas e gráficas; pois cada uma tem capacidade de expor algum tipo de informações com maior facilidade. Assim, focamos nas representações algébricas e gráficas diante da sua praticidade em exprimir um grande número de dados, como primeira, dentre outras vantagens, destaca-se o fato de nos permitir encontrar com facilidade a imagem de qualquer elemento do domínio; já a segunda, nos oferece uma visão rápida e global do comportamento das funções.

Perante isto, este trabalho tem como objetivo explorar algumas transformações no gráfico das funções abordadas no ensino básico, por meio da verificação de várias consequências que surgem nas representações gráficas quando realizadas alterações em seu registro algébrico.

Este processo iniciará tratando das transformações gráficas em uma função qualquer e, logo em seguida, vendo sua verificação nas funções particulares estudadas no Ensino Médio, buscando reduzir a utilização da metodologia continuamente associada à matemática, que consiste no ato de memorizar inúmeros procedimentos para a construção dos gráficos das funções elementares, proporcionando ao aluno uma maior desenvoltura na capacidade de raciocinar e resolver diversos problemas diante da possibilidade de transitar entre diferentes formas representacionais.

2 FUNÇÕES

Nesse capítulo serão abordadas algumas definições importantes, como o produto cartesiano, as quais servirão de base para a extração de outras definições, como a de relação e, dentro desta última, a definição de função real de uma variável real como uma relação particular.

Em seguida, serão apresentados alguns tipos de funções e suas propriedades. Logo após, será abordada a definição do gráfico de uma função, um dos pontos centrais da abordagem desse trabalho.

Posteriormente, ainda serão abordados alguns aspectos sobre o ensino das funções, ressaltando sua relação com a tecnologia e apresentando uma abordagem do ensino que tem por foco a análise das conversões representacionais como ferramenta central de aprendizagem.

2.1 Considerações e definições iniciais

Definição 2.1. Dados dois objetos x e y, chamaremos $p = (x, y)$ de *par ordenado* , onde x será chamado de *primeira coordenada* de p e o objeto y de *segunda coordenada* de p.

É importante observar que dois pares ordenados $p = (x, y)$ e $q = (a, b)$ eles serão iguais apenas quando $x = a$ e $y = b$, isto é, a ordem das coordenadas são extremamente importantes, diferentemente do que ocorre em conjuntos, onde os conjuntos $\{x, y\}$ e $\{y, x\}$ são iguais mesmo que $x \neq y$.

Definição 2.2. Chamamos de *produto cartesiano* $X \times Y$, onde X e Y são dois conjuntos não vazios, o conjunto de todo os pares ordenados (x, y) onde a primeira coordenada x pertence a X e a segunda coordenada y pertence a Y. Em símbolos, temos:

$$X \times Y = \{(x, y); x \in X, y \in Y\}$$

Um fato destacável que decorre do princípio multiplicativo é que se os conjuntos X e Y forem finitos e possuírem a e b elementos respectivamente, o conjunto $X \times Y$ possuirá ab elementos.

O exemplo mais importante de produto cartesiano que temos é o $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pois foi deste caso particular que surgiu a generalização da ideia e definição.

Definição 2.3. Uma *relação* entre conjuntos X e Y é qualquer subconjunto do produto cartesiano $X \times Y$, isto é, um conjunto de pares ordenados $(x, y) \in X \times Y$.

Definição 2.4. Dados dois conjuntos X e Y não vazios, e f uma relação de X em Y, diz-se que f é uma *função* de X em Y se, e somente se, para todo $x \in X$ existe um único correspondente $y \in Y$ tal que $(x, y) \in f$.

Além disso temos que:

(i) Os conjuntos X e Y são chamados de *domínio* e *contradomínio*, respectivamente. O *domínio* será denotado por $D(f)$ e o *contradomínio* por $CD(f)$
(ii) Se $x \in X$, então o único $y \in Y$ associado a x será chamado de *imagem* de x, e será denotado por $f(x)$. o conjunto de todos os elementos de Y que são imagem de X denomina-se *imagem* de f e será denotado por $Im(f)$.

Podemos observar que esta definição de função apresentada acima não é a mais usual nos livros de ensino básico, mas acredito que não exista tanta dificuldade em associá-las. A definição mais encontrada é a seguinte:

Definição 2.5. Sejam X e Y dois conjuntos, uma *função* é uma relação $f : X \to Y$ que, a cada elemento $x \in X$, associa um e somente um elemento $y \in Y$. Além disso, temos que:

- Os conjuntos X e Y são chamados domínio e contradomínio de f, respectivamente;
- O conjunto $f(X) = \{y \in Y; \exists x \in X, f(x) = y\} \subset Y$ é chamado imagem de f;
- Dado $x \in X$, o (único) elemento $y = f(x)$ in Y correspondente é chamado imagem de x.

Observação. Para que o texto se torne mais simples, deixaremos muitas vezes de explicitar o domínio e o contradomínio de uma função; quando isto ocorrer, ficará implícito que o contradomínio é o conjunto dos números reais ($\mathbb{R}$) e o domínio o "maior"subconjunto de $\mathbb{R}$ para o qual faz sentido a regra em questão.

2.2 Gráfico

Os gráficos oferecem um entendimento praticamente imediato de diversas situações e fenômenos, pois de forma resumida conseguem exprimir detalhes importantes. Podemos identificar e analisar, dentre outras coisas, intervalos e taxa de crescimento ou decrescimento, valores de máximo e mínimo,além de tornar possível estabelecer comparações entre estas situações. Devido a estas características, os gráficos de funções possuem ampla utilização na exposição de dados, como podemos constatar por uma simples observação dos mais variados meios de comunicação que utilizam recursos visuais.

No estudo de função e na matemática em geral, a representação gráfica mostra-se como ferramenta extremamente importante, pois consegue estabelecer uma correspondência geométrica, fazendo com que várias informações sejam expressas com facilidade e de forma ágil. A definição do gráfico de uma função está expresso a seguir:

Definição 2.6. O gráfico de uma função $f : A \to B$ é o subconjunto $G(f)$ do produto cartesiano $A \times B$ formado por todos os pares $(x; y)$, onde x é o ponto qualquer de A e $y = f(x)$. Podemos escrever então $G(f) = \{(x; y) \in A \times B; y = f(x)\}$.

2.3 Tecnologia, matemática e ensino

A relação existente entre a matemática e a tecnologia é inquestionável, de forma semelhante a uma protocooperação, onde seus efeitos são benéficos para ambas. A tecnologia se apoia e necessita da estruturação matemática para seus avanços, já a matemática ganha ferramentas que variam desde a facilidade para operacionalização, ensino e até na realização de demonstrações, como ocorreu com o Teorema das Quatro Cores (mesmo que esta última utilização apresente resistência por alguns matemáticos), ou seja, contribui para o aperfeiçoamento das técnicas matemáticas.

O crescimento da informatização mundial equivale a outro ponto a ser analisado, pois se trata de um novo modo de produção, organização e difusão do conhecimento. Assim, a aquisição do mesmo deve ser visto por meio de uma perspectiva diferente da que prevalecia há pouco tempo, onde os meios tecnológicos eram abordados como uma ferramenta útil, mas dispensável. Desta forma o professor deve se inserir nesse processo inovador buscando qualificação para que a utilização destes recursos pertença a sua prática docente. A motivação dos alunos é essencial neste ponto, uma vez que possam expressar sua capacidade investigativa, já que o domínio de recursos tecnológicos apresentados pelos alunos, muitas vezes, supera o conhecimento do professor, cabendo a este, principalmente, mostrar um direcionamento e propor objetivos aos discentes.

Nos últimos anos vem ocorrendo ações voltadas à informatização nas escolas e em outros espaços dedicados ao aprendizado, como a implantação de laboratórios de informática, distribuição de notebooks e tablets munidos de programas educacionais livres, muitos voltados ao ensino de matemática.

Os softwares *winplot, mathematica, geogebra,* aplicativos para smartphones como o *mathlab calculadora* e a uma nova versão do *geogebra* - em desenvolvimento - são ferramentas destacadas para auxiliar uma grande parcela dos alunos que possuem estes recursos tecnológicos, muitas vezes pouco ou não explorados.

O geogebra é um software muito difundido, onde se encontram diversos trabalhos inclusive várias dissertações do PROFMAT que apresentam estudos e aplicações aprofundadas deste programa. Esse software tem uma ampla capacidade de proporcionar articulação entre diversos tipos de registros, dentre os quais os algébricos e gráficos. Dessa forma, os gráficos de funções deste trabalho foram construídos neste programa.

Utilizar a tecnologia como recurso de aprendizagem sólida na matemática pode ser bastante interessante para os alunos, sobretudo ao ensino de funções, já que esta é capaz de trazer uma visualização praticamente imediata de como é o comportamento das famílias de funções, quando variamos seus parâmetros, o que propicia ao estudante um olhar curioso influenciando na busca da ampliação do conhecimento e o que está por trás daquelas alterações, encontrando alguns resultados surpreendentes.

A proposta citada poderá levar os discentes a levantarem hipóteses sobre as propriedades das funções, provocando a sua curiosidade e o gosto pela Matemática, tornando-a mais significativa. A tecnologia apresenta um papel determinante no ensino das funções. Dependendo das tarefas propostas pelos professores, podendo levar ou ao aproveitamento das potencialidades dessa tecnologia, ou reduzindo a finalidade destes equipamentos para as atividades já praticadas.

2.4 O ensino de funções

Resultados divulgados pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) em julho de 2015 revelam resultados preocupantes. Dentre eles, um que chama nossa atenção enquanto estudantes e professores de matemática é que menos de 10 % dos egressos do ensino médio no Brasil (ressaltando que em alguns estados este número não chega a 3%) possuem uma proficiência adequada em matemática. Mesmo sendo uma notícia bastante grave, ela não nos provoca um choque maior, pois observamos esta situação ao ingressar nas salas de aula do ensino básico. Outro indicativo dessa defasagem educacional pode ser visto no número de reprovações em disciplinas de exatas no nível superior (como é o caso de Cálculo, por exemplo).

Este resultado se deve em grande parte a algumas políticas educacionais que foram empregadas em nosso país, principalmente no ensino básico, que são insustentáveis, onde ocorre uma nivelação por baixo do desejável da instrução exigida para o aproveitamento e aprovação dos alunos, priorizando certos números, em detrimento da qualidade do ensino.

Entretanto, é nosso papel como educadores procurar novos métodos e procurar pô-los em prática, com fim de sanar certos déficits. Acredito que devemos preferencialmente iniciar medidas que atinjam amplo público ou que estejam voltadas para assuntos chaves, isto é, que possuam conexão com um maior número de outros temas. O conceito de funções se mostra como um destes assuntos-chaves, que se bem consolidado, pode ser extremamente útil. Podemos verificar isto, na forma como este tema é apresentado nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEMs):

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções. (p.121).

Podemos observar que as orientações para o ensino de matemática reconhecem a importância deste tema para modelagem de situações, sendo fundamental para o progresso científico devido sua conexão com a linguagem matemática. Outro ponto que merece destaque é que ele explicita as representações algébricas e gráficas, bem como a forma de manipulação destas. Vejamos ainda outro fragmento do PCNEMs:

> ...o desenvolvimento de códigos e linguagens em ciência e tecnologia, deve ser tomado como um aspecto formativo de interesse amplo, ou seja, no ensino de cada disciplina científica, este desenvolvimento não está somente a serviço desta ciência ou das ciências, mas sim promovendo uma competência geral de Representação e Comunicação. De forma geral, o desenvolvimento de competências nesse domínio da representação e comunicação envolve, em todas as disciplinas da área: o reconhecimento, a utilização e interpretação de seus códigos, símbolos e formas de representação; a análise e síntese da linguagem científica presentes nos diferentes meios de comunicação e expressão; a elaboração de textos; a argumentação e posicionamento crítico perante temas da ciência e tecnologia. (p.26)

Esta outra citação deixa claro que uma das orientações referentes ao uso adequado de todo arsenal simbólico que construímos durante a história da humanidade deve ser tratado como uma grande conquista. Voltando nosso olhar para o estudo de funções vemos que este, apesar de favorecer um grande leque de representações, tal atributo é ainda pouco explorado.

Podemos citar, por exemplo, a construção de gráficos de funções na forma que vem apresentadas em grande parte dos livros didáticos e reproduzida pelos professores. Inicialmente, ensina-se os estudantes a atribuírem valores a variável x e obterem valores para y, com objetivo de encontrar diversos pontos (muitas vezes se utilizando de tabelas), que por sua vez serão postos no plano cartesiano e serão ligados, construindo assim o gráfico da função. Esta forma de apresentação, mesmo sendo um método útil (quando se escolhe pontos apropriados) para nos dar uma idéia do esboço do gráfico, se mostra mecanizada e deixa escapar que todos os pontos do gráfico satisfazem uma certa relação que pode ser identificada em seu formato algébrico, capaz de nos informar certas características gráficas da função.

Vemos ainda que este formato educacional mecanicista faz com que o aluno seja orientado a repetir diversos procedimentos até que os decore, o que não o faz tão diferente de uma máquina, tornando-o em um ser substituível por esta. Prática não desejável para o processo de ensino matemático, este exige trabalho, rigor intelectual e criatividade, proporcionando ao aluno a capacidade de trabalhar com ideias e em seguida visualizar aplicações reais, o que o fará capaz de superar suas limitações.

Com objetivo de tornar esta prática dinâmica, trata-se neste trabalho a apresentação das transformações gráficas atreladas às características expressas na formas algébricas das funções. Esta ferramenta possibilita que os estudantes construam conjecturas , sendo validadas ou não em sala de aula, tornando o conhecimento adquirido uma propriedade do estudante, onde ele dificilmente esquecerá. Outra característica notável é que elas, por serem praticadas nas mais diversas classes de funções, uma vez apresentadas no ensino básico, podem servir de conexão entre elas.

Este trabalho mostra também a relevância da capacidade de relacionar formas representacionais, que, segundo Duval, os conceitos são verdadeiramente obtidos por um indivíduo quando este é capaz de exprimi-lo sob diversas maneiras. Falaremos um pouco mais sobre este pensamento na próxima seção.

2.5 Representações semióticas

Associamos o termo representação a vários objetos, como palavras, imagens, gráficos, tabelas, diagramas, números, partituras, estados mentais, etc. Com efeito, estes artifícios tanto nos ajudam a expressar conceitos, como também nos fornecem informações sobre algo. Podemos, de forma simples, definir representações como estruturas que transportam informações.

Portanto, as representações funcionam como mediadores entre o que é representado e o indivíduo (ou outro sistema como um leitor óptico de CD que identifica as marcações expressas neste) que recebe esta informação. É interessante notar que diferentes modos de representar podem fornecer a mesma informação sobre algo, como também é possível que um indivíduo não possua capacidade de extrair uma mesma informação através de representações diferentes.

A Semiótica pode ser definida como a ciência que tem por objeto de estudo o conjunto de todas as formas de linguagem, enquanto que um sistema semiótico é um sistema de signos que possuem uma estrutura e articulação própria. As representações que podem ser veiculadas por intermédio de um sistema semiótico são definidas como representações semióticas. Note que os estados mentais são um tipo de representação que não podem ser expressos por intermédio de algum sistema lingüístico.

É inquestionável a particularidade da matemática diante das demais disciplinas, para muitas é possível obter uma visualização concreta, desde que lhe sejam disponíveis instrumentos adequados, um exemplo é a biologia, onde é possível verificar estruturas de uma célula com o auxílio de microscópio, ou na física, calculando a intensidade de corrente com um amperímetro.

Vemos que a capacidade de estabelecer novos sistemas representacionais está vinculada a história e ao desenvolvimento humano. Praticamente até a idade média, as formas representacionais em matemática eram limitadas a linguagem natural e representações geométricas. Basicamente esta era a maneira utilizada; a álgebra e a geometria analítica surgiram após a idade média. Podemos ver o avanço alcançado na matemática após estes novos sistemas de representação.

As representações semióticas são elementos chaves para a teoria representacional defendida por Raymond Duval e corroborada por muitos educadores, como uma abordagem essencial para o ensino de diversas ciências, sobretudo para a matemática. Podemos perceber na teoria deste autor a presença de duas formas distintas de apreensão; a primeira consiste na apreensão de representações semióticas (pode ser observada na capacidade de produção e manipulação em apenas um sistema semiótico), denominada semiósis; e a segunda faz referência à apreensão do conceito, chamada noésis. Vale destacar que estas duas formas apresentam uma relação inseparável e que não podemos desprezar uma sem causar prejuízo a outra. Duval afirma que:

> ...o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações. A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado.

Podemos extrair dois elementos importantes deste fragmento. O primeiro é que devemos ter certo cuidado em nossas exposições de forma que os conceitos que pretendemos transmitir aos estudantes não sejam confundidos com alguma de suas formas representacionais.Já o segundo é a exposição de um determinado objeto em múltiplos sistemas representacionais como mecanismo que permite acesso ao próprio objeto.

Vemos que os objetos matemáticos são abstratos (como a idéia de número, por exemplo). Talvez esta particularidade seja um dos motivos pelo qual a matemática seja relatada por muitos alunos como umas das disciplinas de mais difícil compreensão, o que faz necessário a utilização de um grande número de representações semióticas no ato de ensinar. O ato de transformação de uma representação semiótica em outra mudando a sua forma, mas preservando o seu conteúdo, é chamada de conversão.

Note ainda que, em nossa prática, ao tratar problemas matemáticos, por vezes decorremos no desenvolver do seu processo resolutivo, algumas transformações em suas formas representacionais, com a finalidade de propiciar uma visualização mais simples.

Em suma, segundo Duval, podemos perceber que a compreensão matemática implica no trânsito de diversos registros e na coordenação de ao menos dois registros de representação que se referem ao mesmo objeto matemático, manifestada pela rapidez e pela espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Isso ocorre de modo que nos casos da não verificação desta coordenação, a compreensão para este conceito ocorreu de forma limitada e incompleta.

No decorrer deste trabalho, nos deparamos com diversos exemplos onde podemos ver a associação entre a representação algébrica e gráfica em funções elementares, preocupando-se em apresentar de forma explícita esta coordenação entre os registros, utilizando transformações gráficas ao alterar seus parâmetros. Vemos, ainda, alguns exemplos que envolvem a conversão entre a linguagem natural e a representação algébrica.

A seguir apresentamos dois exemplos, um no qual consiste em um problema de análise combinatória onde o uso de conversões é tomado como ferramenta de auxílio para encontrar sua resposta, e o outro mostra diversas representações em química para a glicose.

Exemplo 2.1. De quantos modos é possível comprar 4 sorvetes em uma loja que os oferece em 7 sabores?

Podemos ver que para realizar a compra devemos escolher os valores de $x_1, x_2, x_3, ..., x_7$. Onde x_1 é a quantidade de sorvetes do primeiro sabor, x_2 a quantidade de sorvetes do segundo sabor e assim de forma sucessiva chegaríamos em todas as quantidades de todos os sabores possíveis nesta sorveteria. É importante perceber que estes valores só podem ser inteiros não negativos, e que podemos construir a seguinte equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4$$

De forma tal que realizar uma compra de 4 sorvetes numa sorveteria que dispõe de 7 sabores para escolha é escolher uma solução para esta equação.

Este problema pode ser visualizado ainda utilizando a representação conhecida como esquema bola-traço, onde cada bola expressa uma unidade no valor da incógnita e cada traço são separadores entre as incógnitas . Vejamos alguns exemplo desta representação:

$$\begin{array}{cccccccccccccc} x_1 & & x_2 & & x_3 & & x_4 & & x_5 & & x_6 & & x_7 & \\ \bullet\;\bullet & | & \bullet & | & & | & & | & & | & \bullet & | & & \text{(situação 1)} \\ & | & & | & \bullet & | & \bullet & | & & | & \bullet & | & \bullet & \text{(situação 2)} \end{array}$$

Onde a situação 1 representa a compra de quatro sorvetes sendo dois do primeiro sabor , um do segundo sabor e um do sexto, enquanto que a situação 2 expressa a escolha de um sorvete para cada um dos sabores: terceiro, quarto, sexto e sétimo. Para formar esta representação referente ao problema utilizamos 4 bolas, simbolizando os sorvetes, e apenas 6 traços (pois estes são suficientes para separar 7 incógnitas) como separadores para os sabores.

Mas vemos que o número de todas as formas possíveis para montar esta representação a permutação de dez símbolos, com um destes se repetindo quatro vezes e o outro seis vezes.

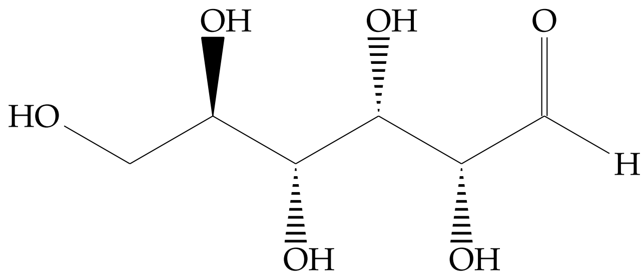
$$P_{4+6}^{4,6} = \frac{10!}{4!6!} = 210.$$

Exemplo 2.2. Observemos quatro diferentes formas para representação da glicose:

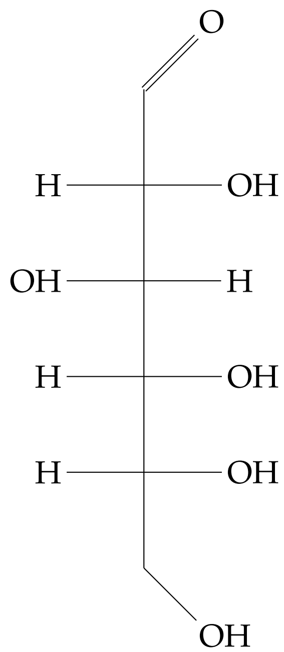
- Representação Molecular

$$C_6H_{12}O_6$$

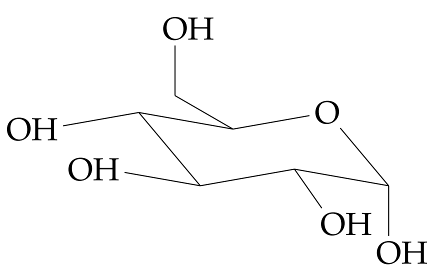
- Diagrama em esqueleto (Um forma estrutural)



- Representação de Fischer:



- Representação em ″cadeira″



3 TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS

Serão tratadas neste capítulo algumas transformações dos gráficos de funções reais quaisquer, assim como são as funções abordadas no ensino básico, com foco nas associações existentes entre estas transformações com as variações que ocorrem em sua representação algébrica. Este estudo mostra-se útil ao processo de ensino-aprendizagem, pois possibilita perceber similaridades entre diversas famílias de funções, visto que seu estudo tradicionalmente é realizado de forma desconexa, onde o processo de ensino em cada classe de função é buscado com um fim em si mesmo, com exposição limitada a suas características próprias.

Vemos ainda sua utilidade para construção de esboços gráficos de qualquer função pertencente a uma determinada família, conhecendo apenas o gráfico de sua representante mais simples desta mesma família.

A seguir, faremos uma exposição de algumas definições e resultados importantes:

Definição 3.1. Uma *transformação no plano* π é uma função $T : \pi \to \pi$ que a cada ponto P associa o ponto $T(P) \in \pi$ que chamaremos de *imagem de P por T* .

Como nosso objeto de estudo são funções de uma variável real a valores reais, trabalharemos apenas com transformações do tipo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que a cada ponto $P = (x; y)$ de $\mathbb{R}^2$ associa o ponto $P' = T(P) = (x'; y')$ de $\mathbb{R}^2$.

Definição 3.2. Uma transformação T do plano é uma *isometria* quando $d(T(P); T(Q)) = d(P; Q)$, para quaisquer pontos P e Q.

Isto é, uma transformação T é uma *isometria* se preserva distâncias entre pontos.

É notável perceber que as isometrias são os *movimentos rígidos* da Geometria Euclidiana. São exemplos de isometria as rotações, reflexões e translações. Versaremos nas seções a seguir as transformações : translações verticais e horizontais, homotetias verticais e horizontais (Veremos ainda que decorrentes destas últimas transformações conseguimos também as reflexões verticais e horizontais).Observe que ao aplicar as rotações em determinados gráficos de funções ,parábolas por exemplo, não encontramos como resultado outra função.

Definição 3.3. *Translação* é a transformação em que todos os pontos de uma figura apresentam um deslocamento na mesma direção, sentido e de uma mesma distância.

Definição 3.4. *Translação vertical* é a *translação* em que o deslocamento ocorre somente na direção vertical.

Seja a função $f : A \to B$ e seja k um número real, o gráfico da função definida por $g(x) = f(x) + k$ pode ser obtido do gráfico da função definida $f(x)$, fazendo este sofrer uma translação vertical de k unidades, $(x; y) \to (x; y + k)$.

Usaremos a seguinte notação $TV(f(x), k)$ para indicar uma translação vertical (na direção do eixo Oy) da função $f(x)$ em k unidades. Vimos que a translação vertical depende do valor de k, e podemos ver a seguinte relação:

- Se k for positivo, a translação é no sentido crescente do eixo Oy, isto é, "para cima".
- Se k for negativo, a translação é no sentido decrescente do eixo Oy, isto é, "para baixo".
- Se $K = 0$, não ocorre translação.

Exemplo 3.1. Na figura podemos ver a representação gráfica da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$ (esta função será utilizada para exemplificar as demais transformações, lembrando que poderia ser substituída por qualquer outra função real) bem como as translações verticais para um k positivo e outro negativo.

Tabela 1 – Representação algébrica das translações verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = x^4 - x^3 + x^2 - 1$	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2$	$g(x) = x^4 - x^3 + x^2 + 2$
Transformação	$TV(f(x), -1)$	-	$TV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

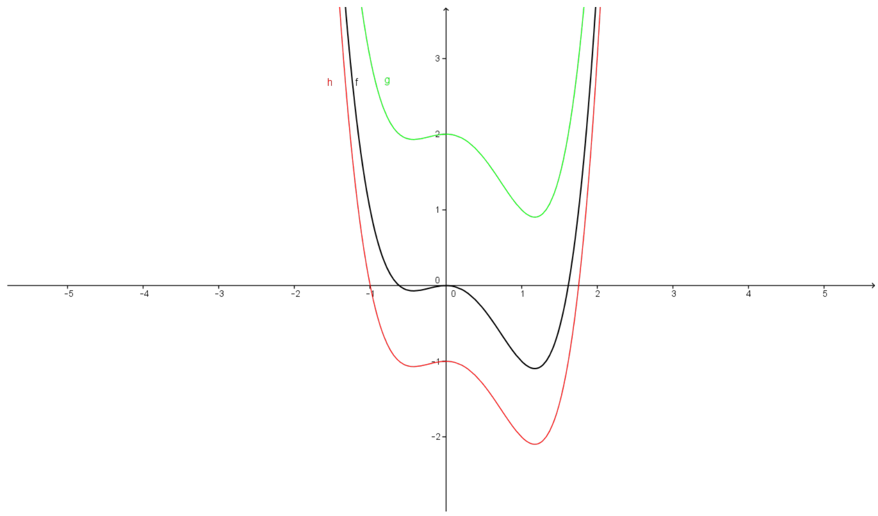
Podemos ver que, a partir do gráfico da função $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$, o gráfico da função $g(x) = f(x) + 2$ é uma translação vertical de duas unidades no sentido crescente de Oy, e o gráfico da função $h(x) = f(x) - 1$ é uma translação vertical no sentido decrescente de Oy de uma unidade.

Definição 3.5. A *translação horizontal* é uma *translação* na qual o deslocamento gráfico ocorre apenas na direção horizontal.

É importante observar que podemos fazer combinações entre as translocações verticais e horizontais, o que possibilita movimentações diagonais do gráfico de uma função no plano.

Sejam $f : A \to B$ uma função e k um número real, o gráfico da função definida por $g(x) = f(x + k) = (x - (-k))$ pode ser obtido do gráfico da função definida $f(x)$, fazendo este sofrer uma translação horizontal de k unidades,ou seja, $(x; y) \to (x + k; y)$.

Figura 1 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Usaremos a seguinte notação $TH(f(x), k)$ para indicar uma translação horizontal (na direção do eixo Ox) da função $f(x)$ em k unidades. Podemos ver que a translação horizontal depende do valor de k, e valem as seguintes relações:

- Se k for positivo, a translação é no sentido decrescente do eixo Ox, isto é, "para esquerda ".
- Se k for negativo, a translação é no sentido crescente do eixo Ox, isto é, "para direita".
- Se $K = 0$, não há translação.

Surge, neste ponto, algo importante que possivelmente seja capaz de gerar dúvidas nos alunos, pois diferente do que ocorria na translação vertical onde víamos que quando um $K > 0$ provocava no gráfico um deslocamento no sentido positivo do eixo Oy, verificação esta facilmente apreendida, a translação horizontal para um $k > 0$ provoca um deslocamento no sentido negativo. Vale apresentar para os alunos que isto se deve ao fato que na função $f(x + k)$ o valor $x = -k$ exerce o mesmo papel que $x = 0$ em $f(x)$, isto é, leva no mesmo valor da variável dependente. Para que fique claro, tomemos o exemplo das funções $y = x^2$ e $y_1 = (x - 2)^2$, onde em y e y_1, vemos que o uso respectivo de $x = 2$ e $x = 0$ faz a variável dependente seja 0. Uma análise para todos os demais valores de x mostra que o gráfico de y_1 pode ser obtido por uma translação horizontal de 2 unidades para direita, quando posto em comparação com y.

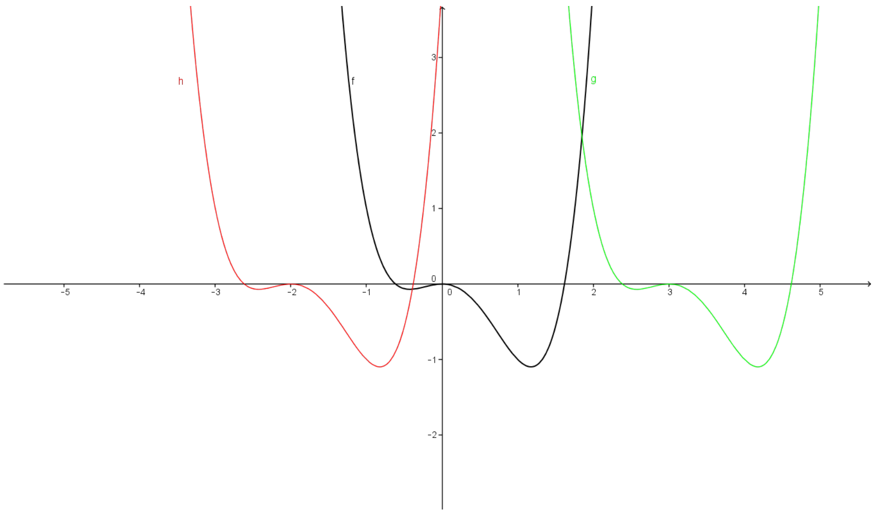
Exemplo 3.2. Na tabela 2 e figura 2 podemos ver a relação existente entre as representações algébricas e gráficas da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$. Observemos as translações horizontais para um k positivo e outro negativo em sua representação gráfica.

Tabela 2 – Representação algébrica das translações horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Repres. algébrica	$h(x) = f(x+2)$	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2$	$g(x) = f(x-3)$
Transformação	$TH(f(x), 2)$	-	$TH(f(x), -3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 2 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Verificamos que partindo do gráfico da função $f(x)$, os gráficos das funções $g(x) = f(x-3)$ e $h(x) = f(x+2)$ são translações horizontais, respectivamente, de três unidades no sentido crescente de Ox e duas unidades no sentido decrescente do mesmo eixo.

3.1 Homotetia vertical

Diferentemente das translações estudadas anteriormente, as *homotetias verticais* e *horizontais*, exceto no caso em que $k = 1$ ou $k = -1$, não preservam as distâncias entre os pontos do gráfico; não são isometrias. Devido a isto são conhecidas também por *deformações*.

Sejam $f(x)$ uma função e k um número real, o gráfico da função definida por $g(x) = k.f(x)$ pode ser obtido do gráfico da função definida $f(x)$, fazendo este sofrer uma contração ou dilatação. vertical, isto é, $(x; y) \to (x; k.y)$. Expressaremos por $HV(f(x), k)$ para indicar uma homotetia vertical da função $f(x)$. Percebemos que a homotetia vertical depende do valor de k e apresenta as seguintes relações:

- Se $k > 1$, a homotetia é de dilatação.

- Se $0 < k < 1$, a homotetia é de contração.
- Se $K = 1$, não há transformação gráfica.

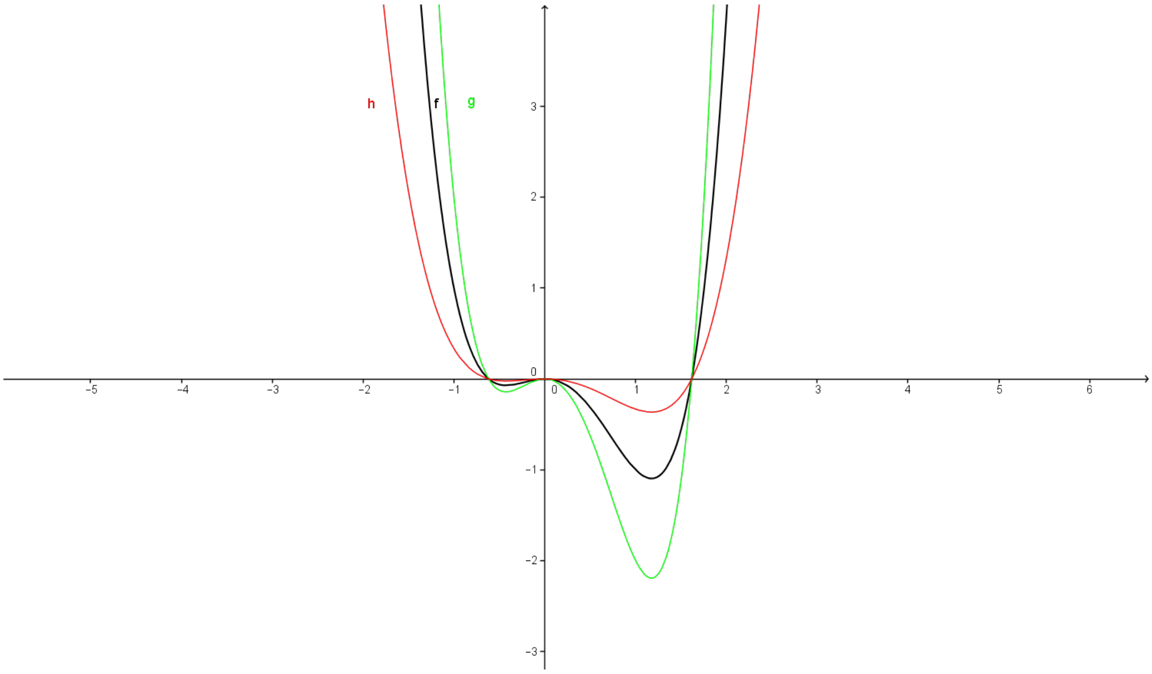
A visualização da transformação está expressa no exemplo abaixo:

Tabela 3 – Representação algébrica das homotetias verticais para $k > 0$.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = \frac{1}{3}.(x^4 - x^3 + x^2)$	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2$	$g(x) = 2.(x^4 - x^3 + x^2)$
Transformação	$HV\left(f(x), \frac{1}{3}\right)$	-	$HV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 3 – Representação gráfica das homotetias($g(x)$ e $h(x)$) sobre $f(x)$



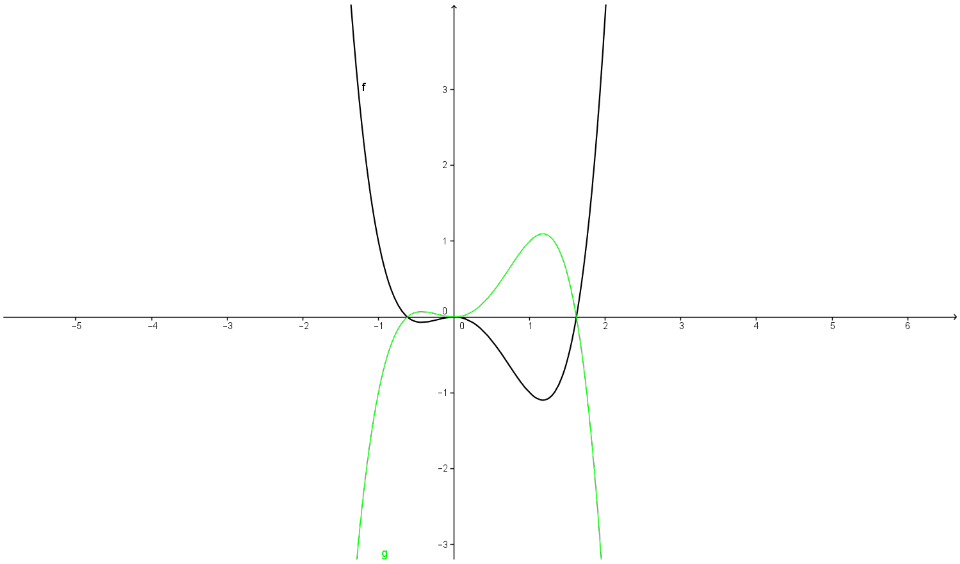
Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante notar aqui que se o $k = -1$ em $g(x)$, obtemos uma nova transformação: a *reflexão em torno do eixo* Ox, ou seja, $(x; y) \rightarrow (x; -y)$ que transforma o gráfico da função $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$ no gráfico da função $g(x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, como podemos visualizar na figura 4.:

Percebemos, ainda, os seguintes resultados decorrentes dos outros valores possíveis de K:

- Quando $k = 0$, obtemos como resultado para $g(x) = 0$ (função identicamente nula), a qual geometricamente corresponde ao eixo das abcissas.

Figura 4 – Representação gráfica de $f(x)$ e sua reflexão $g(x) = -f(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

- Quando $-1 < K < 0$, temos uma homotetia de contração simultânea a uma reflexão do gráfico de função f, em relação ao eixo Ox.
- Se $k < -1$, temos uma homotetia de dilatação simultânea a uma reflexão do gráfico de função f, em relação ao eixo Ox.

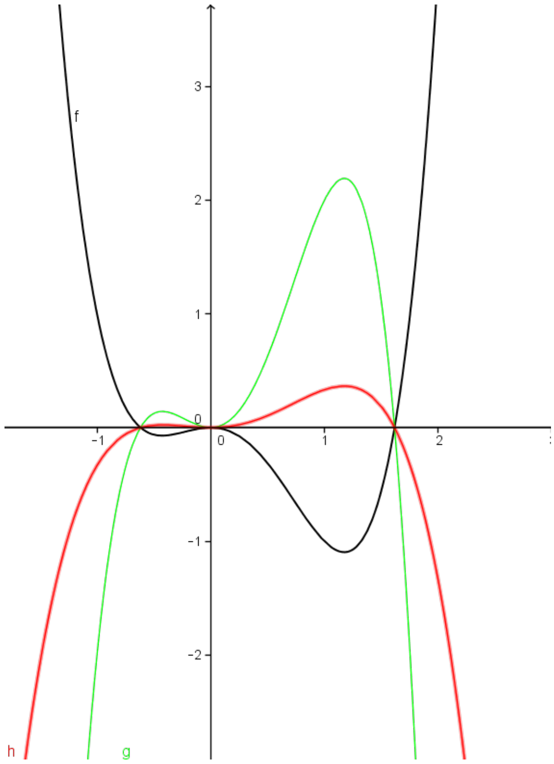
Um exemplo destas transformações está expresso na tabela 4 e figura 5.

Tabela 4 – Representação algébrica das homotetias verticais para $k < 0$.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Rep. algébrica	$h(x) = -\frac{1}{3}.(x^4 - x^3 + x^2)$	$f(x) = x^4 - x^3 + x^2$	$g(x) = -2.(x^4 - x^3 + x^2)$
Transformação	$HV\left(f(x), -\frac{1}{3}\right)$	-	$HV(f(x), -2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 5 – Representação gráfica de $f(x)$ e das homotetias $g(x)$ e $h(x)$ em $f(x)$ para $k < 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

3.2 Homotetia horizontal

Sejam a função $f(x)$ e k um número real, o gráfico da função definida por $g(x) = f(k.x)$ pode ser obtido do gráfico da função definida $f(x)$, fazendo este sofrer uma contração ou dilatação horizontal, isto é, $(x; y) \rightarrow (k.x; y)$. Expressaremos por $HH(f(x), k)$ para indicar uma homotetia horizontal da função $f(x)$. Percebemos que a homotetia horizontal depende do valor de k e respeita as seguintes relações:

- Se $k > 1$, a homotetia é de contração.
- Se $0 < k < 1$, a homotetia é de dilatação.
- Se $K = 1$, não ocorre deformação gráfica.

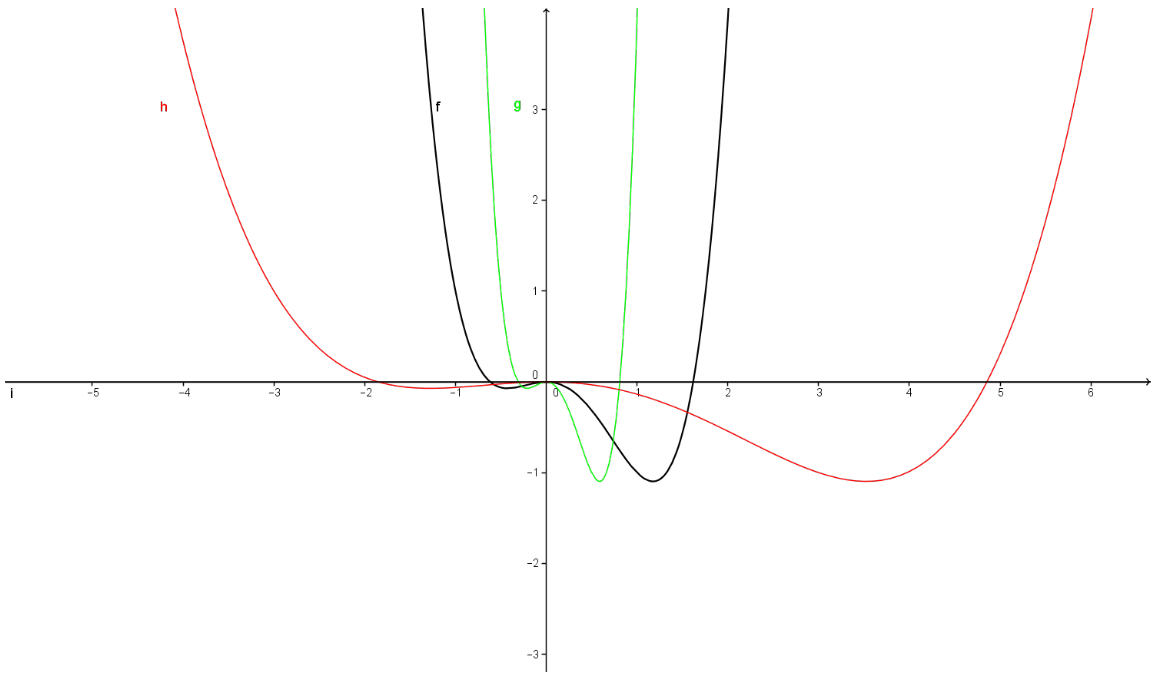
Podemos visualizar os efeitos da homotetia horizontal, onde $k > 0$, no exemplo a seguir.

Tabela 5 – Representação algébrica das homotetias horizontais para $k > 0$.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Rep. algébrica	$h(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^4 - \left(\frac{1}{3}x\right)^3 - \left(\frac{1}{3}x\right)^2$	$f(x) = x^4 - x^3 - x^2$	$g(x) = (2x)^4 - (2x)^3 - (2x)^2$
Transformação	$HH\left(f(x), \frac{1}{3}\right)$	-	$HH(f(x), 2)$
Indic. gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 6 – Representação gráfica das homotetias($g(x)$ e $h(x)$) sobre $f(x)$



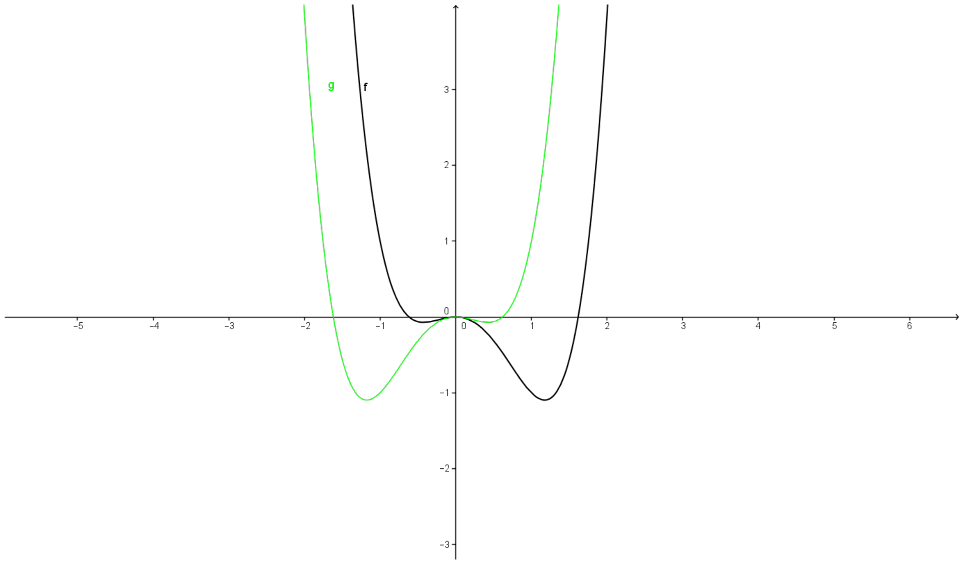
Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante notar aqui que se, o $k = -1$, em $g(x)$ obtemos uma *reflexão em torno do eixo* Oy, ou seja $(x; y) \rightarrow (-x; y)$, que transforma o gráfico da função $f(x) = x^4 - x^3 + x^2$ no gráfico da função $g(x) = f(-x)$ para todo x real, como podemos observar na figura 7:

Percebemos, ainda, os seguintes resultados decorrentes dos outros valores possíveis de K:

- Quando $k = 0$, obtemos como resultado para $g(x) = f(0)$ (função constante).
- Quando $-1 < K < 0$, temos uma homotetia de dilatação simultânea a uma reflexão do gráfico de função f, em relação ao eixo Oy.
- Se $k < -1$, temos uma homotetia de contração simultânea a uma reflexão do gráfico de função f, em relação ao eixo Oy.

Figura 7 – Representação gráfica de $f(x)$ e sua reflexão $g(x) = f(-x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

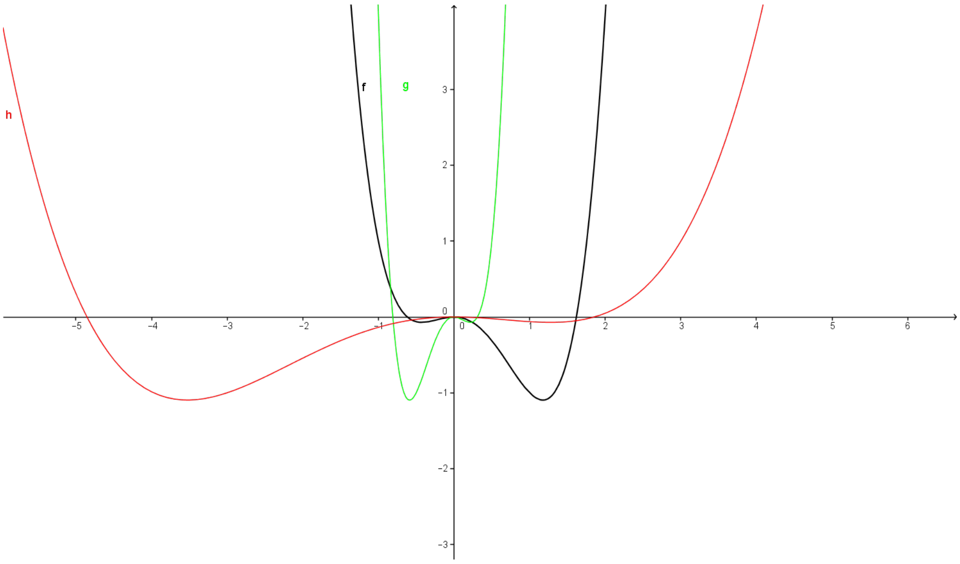
Um exemplo para estas transformações, onde o $k < 0$, está expresso na tabela 6 e figura 8.

Tabela 6 – Representação algébrica das homotetias verticais para $k < 0$.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Rep. algéb.	$\left(-\frac{1}{3}.x\right)^4 - \left(-\frac{1}{3}.x\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}.x\right)^2$	$x^4 - x^3 - x^2$	$(-2.x)^4 - (-2.x)^3 - (-2.x)^2)$
Transformação	$HV\left(f(x), -\frac{1}{3}\right)$	-	$HV(f(x), -2)$
cor do gráfico	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 8 – Representação gráfica de $f(x)$ e das homotetias $g(x)$ e $h(x)$ em $f(x)$ para $k < 0$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos perceber que todas as transformações acima podem ser resumidas na seguinte expressão:

$$g(x) = b.f(a.x + c) + d \tag{3.1}$$

Onde coeficiente a seria responsável pela homotetia horizontal, b pela homotetia vertical, c pela translação horizontal e d por a translação vertical.

4 FUNÇÕES PARTICULARES

Veremos neste capítulo uma apresentação das transformações gráficas, translações e homotetias, estudadas no capítulo anterior, aplicadas nos diversos tipos de funções elementares pertencentes ao currículo do ensino básico com objetivo principal de nos fazer perceber a existência de sua regularidade. Além disto, podemos verificar que o estudo e entendimento de várias propriedades de uma determinada família de função se resume a uma boa compreensão de sua forma mais simples. Por exemplo, uma função quadrática da forma $f(x) = 3x^2 + 5x - \sqrt{2}$ apresenta as mesmas propriedades (como possuir o mesmo tipo de gráfico, neste caso ser uma parábola) da função $f(x) = x^2$.

4.1 Função afim

Esta seção será dedicada à apresentação da função afim e algumas de suas propriedades. A função afim surge no Ensino Médio como a primeira função abordada na maior parte dos livros didáticos, decorrente destas possuírem representações, gráfica e algébrica, mais simples dentre as outras funções tratadas na educação básica, como também do fato de ser possível encontrar aplicações em diversas situações cotidianas do discente.

Desta forma, seu estudo mostra-se capaz de promover uma motivação nos estudantes, visto que um conhecimento simples possibilita resolver um grande número de problemas, abrindo caminho para as outras classes de funções.

Outro ponto que merece destaque e que deve ser levantado pelo professor é a relação que existe entre a função afim (mais especificamente as funções lineares, um caso particular) e a proporcionalidade (provavelmente é a noção matemática mais difundida em todos os povos desde a antiguidade), já que as funções lineares são capazes de modelar estas situações.

Definição 4.1. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existirem números reais a e b, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x) = ax + b$.

A seguir, exemplificamos um problema passível de ser modelado por meio de uma função afim:

Exemplo 4.1. Uma caixa d'água de 1000 litros tem um furo por onde escoa água a uma vazão constante. Ao meio dia de certo dia ela foi cheia e, às 18 horas, possuía apenas 850 litros. Quando esta caixa de água terá seu volume de água pela metade?

Representaremos o volume de água na caixa por $V(t)$ no instante t e vemos que $V(t) = 1000 - at$. onde a representa a vazão de água pelo furo.

Sabemos que $V(6) = 850$, logo $1000 - 6a = 850$ e concluímos que $a = 25$. Portanto temos $1000 - 25t = 500$ quando $t = 20$, isto é, a água irá ficar na metade após 20 horas, o que deve ocorrer às 8 da manhã do dia seguinte.

Desta definição existem casos particulares importantes, destacamos a seguir três destes. Observando $f(x) = ax + b$ quando o $a = 0$, diz que esta função é *constante* (por exemplo $f(x) = 3$), quando o $b = 0$ diz que a função é linear (por exemplo $f(x) = \frac{3}{4}x$) e quando $a = 1$ e $b = 0$ diz que a função é a identidade ($f(x) = x$).

Mostraremos a seguir um resultado importante para o estudo função afim, o teorema 4.1 nos diz que a representação gráfica específica para esta família de funções é uma reta.

É importante observar que estas informações são comuns a professores e muitos alunos, mas sua justificativa é pouco conhecida, e as vezes não ocorre, pois algumas destas demonstrações se utilizam de conhecimentos básicos, passíveis de serem assimiladas pelos alunos sem muita dificuldade.

Teorema 4.1. O gráfico da função afim é uma reta.

Demonstração. Para mostrar este resultado basta verificar que três pontos quaisquer do gráfico da função $f(x) = ax + b$ são colineares. Tomemos portanto os pontos:

$$P_1 = (x_1, ax_1 + b)\ ,\ P_2 = (x_2, ax_2 + b) \text{ e } P_3 = (x_3, ax_3 + b).$$

Para verificar a colinearidade dos pontos P_1,P_2 e P_3, é necessário e suficiente que a maior da três distâncias $d(P_1, P_2)$, $d(P_2, P_3)$ e $d(P_1, P_3)$ seja igual à soma das outras duas.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que as abscissas x_1 , x_2 e x_3 foram ordenadas de modo que $x_1 < x_2 < x_3$. Utilizando a fórmula para o cálculo de distância entre dois pontos, temos:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + a^2(x_2 - x_1)^2} \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2.(1 + a^2)} \\ &= (x_2 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} \qquad (4.1) \end{aligned}$$

De forma análoga temos:

$$d(P_2, P_3) = (x_3 - x_2)\sqrt{(1 + a^2)} \qquad (4.2)$$

$$d(P_1, P_3) = (x_3 - x_1)\sqrt{(1 + a^2)} \qquad (4.3)$$

Temos assim das equações 4.2, 4.2 e 4.3 que:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3) &= (x_2 - x_1)\sqrt{(1+a^2)} + (x_3 - x_2)\sqrt{(1+a^2)} \\ &= (x_2 - x_1 + x_3 - x_2)\sqrt{(1+a^2)} \\ &= (x_3 - x_1)\sqrt{(1+a^2)} \end{aligned}$$

Vemos portanto que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

como queríamos demonstrar. □

Veremos agora as transformações gráficas de translação vertical e homotetia vertical e algumas verificações para o caso das função afim. Mostraremos também o gráfico nos casos particulares: a função identidade, função constante e função linear.

Iniciemos com as funções constantes, isto é, que possuem a forma $f(x) = k$ e observemos que ao variarmos o valor de $k \in \mathbb{R}$, o gráfico da função desloca-se para cima ou para baixo. Este deslocamento depende de quanto se altera o K em uma função inicial. Vejamos esta situação no exemplo a seguir.

Exemplo 4.2. Na figura 9 está representado o gráfico da função definida por $f(x) = k$. Já na figura 10, vemos as funções $f(x) = 2$, $g(x) = 3$ e $h(x) = -2$.

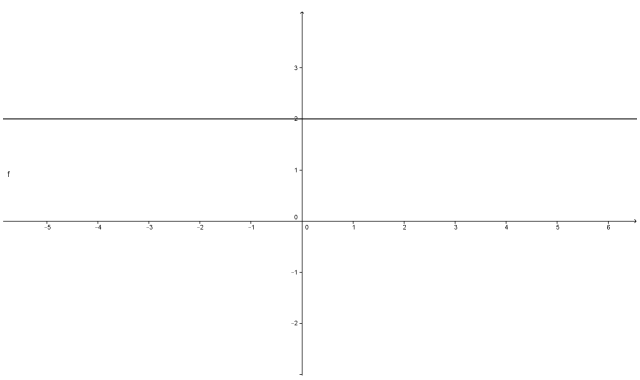
Podemos observar:

a. Para cada valor de k o gráfico intercepta o eixo Oy no ponto (0,k);

b. $g(x) = f(x) + 1$ e $h(x) = f(x) - 4$;

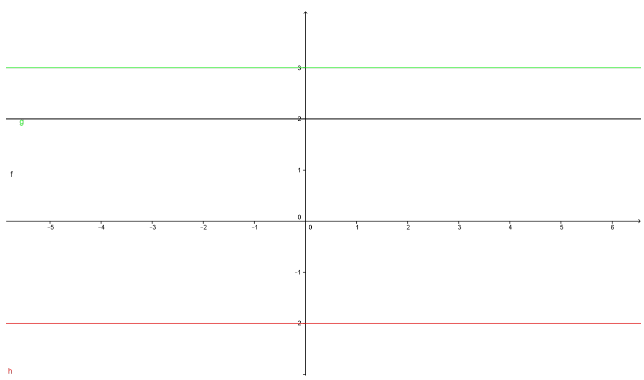
c. O gráfico da função g é o gráfico da função f deslocado uma unidade no sentido positivo do eixo Oy, e o gráfico da função h é o mesmo da função f deslocado quatro unidades no sentido negativo do eixo Oy.

Figura 9 – Gráfico da função $f(x) = k$



Fonte: Elaborada pelo autor.

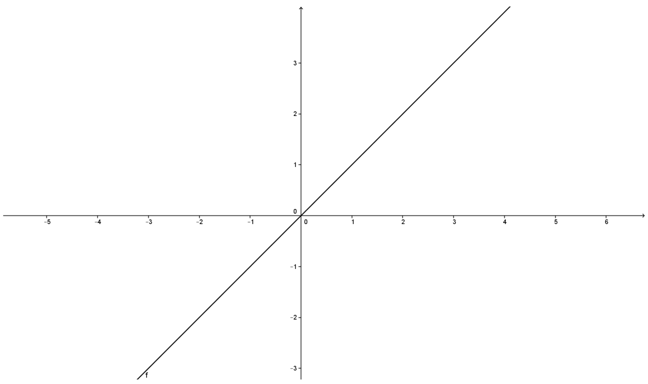
Figura 10 – Translação vertical da função constante



Fonte: Elaborada pelo autor.

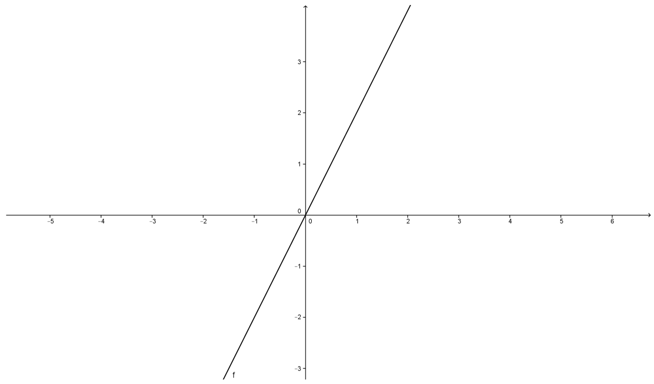
Exemplo 4.3. Apresentamos nas figuras 11 e 12 os gráficos da função identidade ,$f(x) = x$, e o gráfico da função $f(x) = 2x$, ambas lineares.

Figura 11 – Gráfico da função $f(x) = x$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 12 – Gráfico da função $f(x) = 2x$

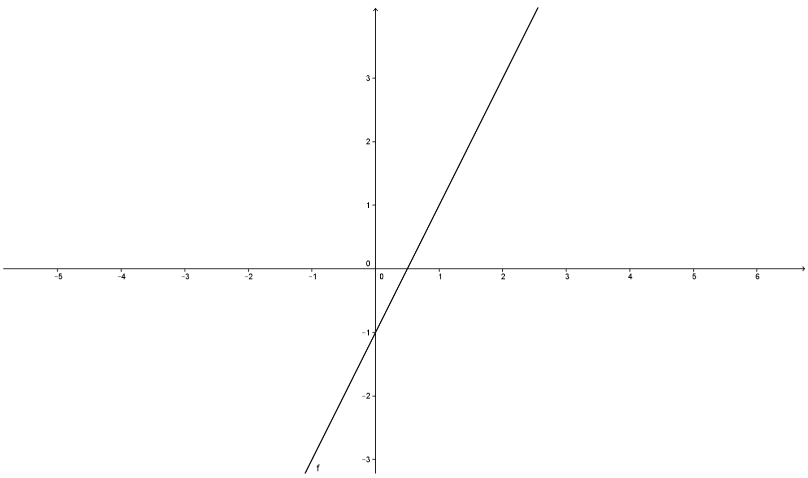


Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos, realmente, verificar através dos gráficos 11, 12 e 13, casos particulares da função afim, que seu gráfico é uma reta, como já demonstrado no teorema 4.1. Para prosseguir nossa análise sobre as transformações no gráfico da função afim, apresentamos um exemplo.

Exemplo 4.4. Apresentamos na figura o gráfico da função afim $f(x) = 2x - 1$.

Figura 13 – Gráfico da função $f(x) = 2x - 1$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.1.1 Translação vertical na função afim

Veremos que no caso do gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$, vemos que ao fazer variar o parâmetro b, o gráfico apresenta uma translação vertical, onde se $b_1 = b + K$ o gráfico desta nova função ($f(x) = ax + b_1$) será a translação no mesmo sentido do eixo das ordenadas de K unidades do gráfico da primeira e caso o $b_1 = b - K$, essa translação será no sentido oposto ao mesmo eixo. Visualizaremos esta situação no exemplo a seguir:

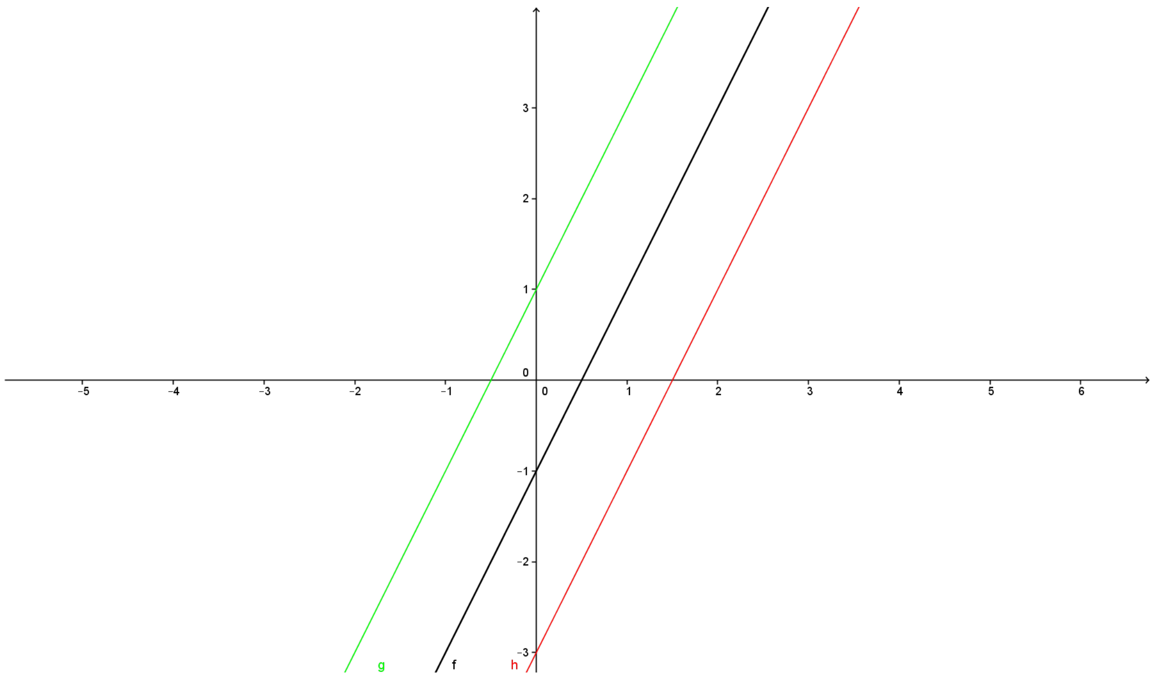
Exemplo 4.5. Na figura 14 estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x - 1$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por$g(x) = 2x + 1$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 2x - 3$.

Tabela 7 – Representação algébrica das translações verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = 2x - 3$	$f(x) = 2x - 1$	$g(x) = 2x + 1$
Transformação	$TV(f(x), -2)$	-	$TV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 14 – Translação vertical da função afim



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que o gráfico da função g desloca-se para "cima"duas unidades em relação a função f ,enquanto que o gráfico de h desloca-se para "baixo"duas unidades em relação ao de f.

4.1.2 Homotetia vertical na função afim

Nesta subseção mostraremos que o gráfico da função afim $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ ao variar o parâmetro a (também chamado de taxa de variação), o gráfico apresenta uma deformação vertical, ou mesmo uma rotação em relação ao ponto $(0, b)$. Para o caso de $a_1 > a$, o gráfico de uma nova função ($f_1(x) = a_1x + b$) apresenta-se como uma rotação do gráfico de $f(x)$ no sentido anti-horário, já para $a_1 < a$ verificamos também uma rotação, só que no sentido horário. Visualizaremos esta situação no seguinte exemplo:

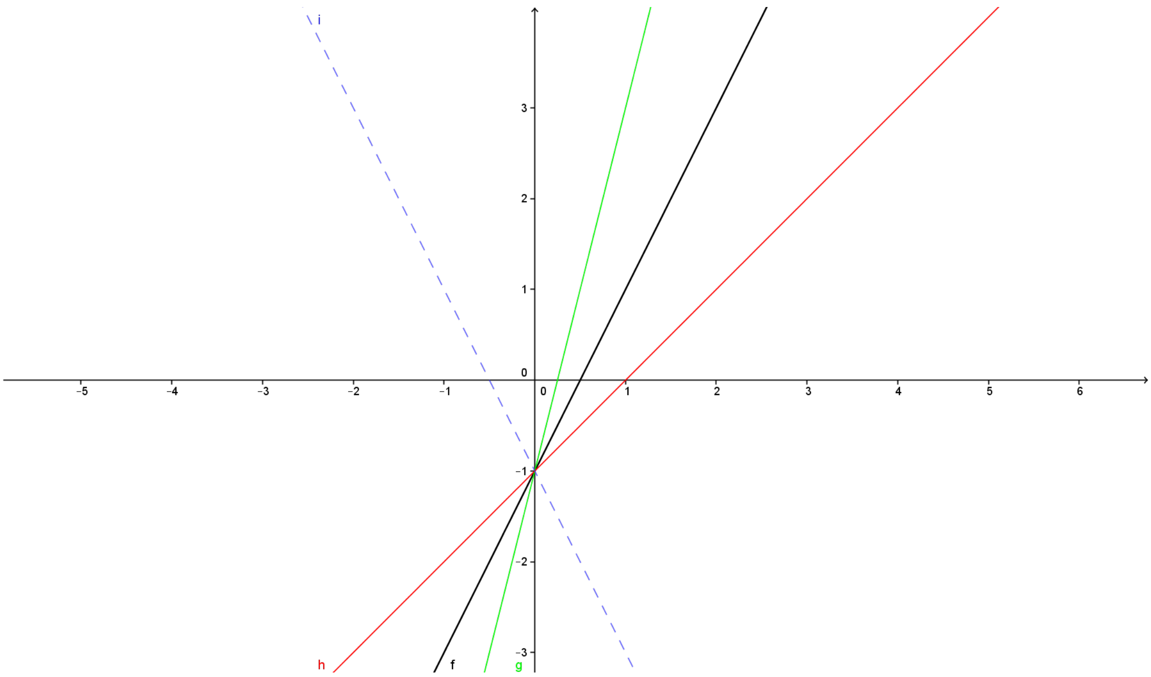
Exemplo 4.6. Na figura 15 estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2x - 1$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por$g(x) = 4x - 1$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = 4x - 1$.

Tabela 8 – Representação algébrica das homotetias verticais.

Função	$h(x)$	$i(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = x - 1$	$i(x) = -2x - 1$	$f(x) = 2x - 1$	$g(x) = 4x - 1$
Transformação	$HV(f(x), 1/2)$	$HV(f(x), -1)$	-	$HV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	azul e pontilhado	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 15 – homotetia vertical da função afim



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos observar que, como o valor do parâmetro a na função g é o dobro do que ocorre na f, assim, o gráfico apresentou uma homotetia vertical, onde o valor de $g(x)$ é o dobro de $f(x)$ para o mesmo valor de x e, no caso da função $h(x)$, ocorre uma homotetia vertical, reduzindo para a metade o valor de $f(x)$ para o mesmo valor de x.

Por fim, expomos nesta seção um teorema que nos garante que todas as funções afins podem ser obtidas a partir de sa representante mais simples por meio das transformações apresentadas.

Teorema 4.2. Toda função da forma $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, pode ser obtida da função $g(x) = x$ por meio das transformações TV e HV.

Demonstração. Seja $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$, como $ax + b = 1(ax + 0) + b$, podemos transformar $f(x) = ax + b$ na função $g(x)$ realizando o seguinte procedimento.

- $f(x) = ax + b$
- $f_1(x) = TV(f(x), -b) = 1(ax + 0) = ax$
- $f_2(x) = HV\left(f_1(x), \dfrac{1}{a}\right) = x = g(x).$

Para recíproca, basta refazer a sequência de passos anteriores no sentido inverso, para transformar $g(x) = x$ na função $f(x) = ax + b$

- $g(x) = x$
- $g_1(x) = HV(g(x) = x, a) = ax$
- $g_2(x) = TV(g_1(x), b)) = ax + b$

□

4.2 Função quadrática

Problemas modeláveis por funções quadráticas foram propostos e solucionados há um pouco menos que 4000 anos, mesmo sem os recursos algébricos que possuímos atualmente. Historicamente, os primeiros registros relacionados a estes problemas foram encontrados em peças artesanais originárias da civilização babilônica, onde apresentam famosos problemas nos quais são dados a soma e produto de dois números, e então busca-se por o valor destes.

Habitualmente são trabalhadas diversas aplicações relacionadas a otimização de recursos isto se deve particularmente ao fato da função quadrática sempre apresentar um ponto máximo ou mínimo. O exemplo 4.7 nos traz um problema de otimização.

Uma aplicação da função quadrática é a equação horária do movimento retilíneo uniformemente variado, dada pela expressão $S = S_o + v_o.t + \dfrac{a.t^2}{2}$, onde S indica posição,

S_o posição inicial, V_o velocidade inicial, t tempo e a aceleração. Este conteúdo é apresentado aos alunos na disciplina de física praticamente no mesmo período que é abordado o conteúdo de funções quadráticas e, dificilmente, os alunos percebem uma relação entre ambos.

Definição 4.2. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita quadrática quando existirem números reais a, b e c, com $a \neq 0$, tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f(x) = ax^2 + bx + c$.

A função quadrática pode ser expressa de outras formas, observemos a seguir uma destas.

Consideremos o trinômio $ax^2 + bx + c$ com a; b e c reais e $a \neq 0$. Deixando o a em evidência e completando o quadrado temos que:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}.x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]. \end{aligned}$$

Este modo de escrever o trinômio do segundo grau é chamado de *forma canônica*. Assim podemos escrever a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ na seguinte forma:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \tag{4.4}$$

A expressão 4.4 chamaremos de forma canônica da função quadrática. Podemos perceber certa semelhança da forma canônica com a equação 3.1; veremos que função quadrática pode ser obtida por meio de sua representante mais simples, a saber $f(x) = x^2$. Esta demonstração é encontrada a seguir nesta sessão.

Uma outro problema modelável por meio de uma função quadrática é dado a seguir:

Exemplo 4.7. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro 800 reais mais 10 reais por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

Se x passageiros compraram poltronas, a receita da empresa é $800x + 10.(100 - x).x = 1800x - 10x^2$. Temos que a lucratividade será máxima para $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1800}{-20} = 90$

Uma observação válida, que pode ser extraída na forma canônica, é que a expressão $x = \frac{-b}{2a}$ utilizada na resolução deste problema é o valor do domínio que apresenta imagem máxima ou mínima da função (para $a < 0$ e $a > 0$ respectivamente); se observarmos para a representação gráfica, vemos que o x é designado de x_v (abcissa do vértice.)

O momento expositivo das transformações aplicado no caso particular de função quadrática, se apresenta como propício para uma exposição simultânea da forma canônica da função quadrática, devido a sua riqueza de informações, permitindo encontrar seu vértice e seus zeros sem maiores dificuldades.

O gráfico de uma equação quadrática é uma parábola, dado conhecido por muitos alunos que já tiveram contato com este conteúdo, mas muitos não sabem nem a definição do que seja uma parábola, onde o conhecimento desta curva fica restrito a visualização de um esboço construído pelo professor em sala, sem que esta apresentação tenha uma devida justificativa.

Primeiramente precisamos definir o que é uma parábola.

Definição 4.3. Dados um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de F e de d.

Teorema 4.3. O gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, quadrática, é uma parábola cuja diretriz é a reta horizontal:

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

E cujo foco é o ponto:

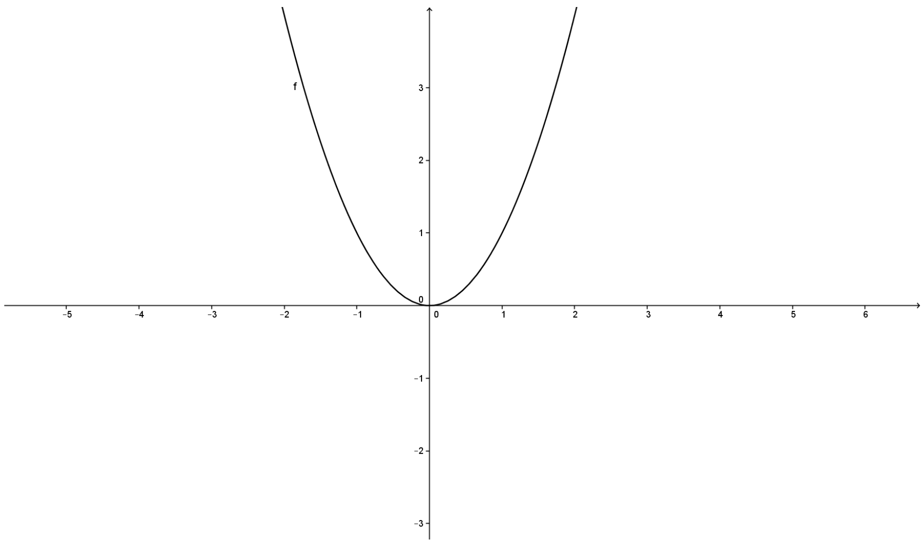
$$F = \left(\frac{-b}{2a}; \frac{4ac - b^2 + 1}{4a}\right)$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada na referência 8, página 142.

□

A seguir, na figura 16, podemos visualizar o gráfico a função $f(x) = x^2$.

Figura 16 – Gráfico da função $f(x) = x^2$



Fonte: Elaborada pelo autor.

A seguir, apresentaremos as transformações de translação vertical e horizontal e homotetia vertical, tomando como base a função quadrática expressa em sua forma canônica e logo após, veremos também as variações gráficas que ocorrem em decorrência da modificação do coeficientes a,b e c da função quadrática expressa na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

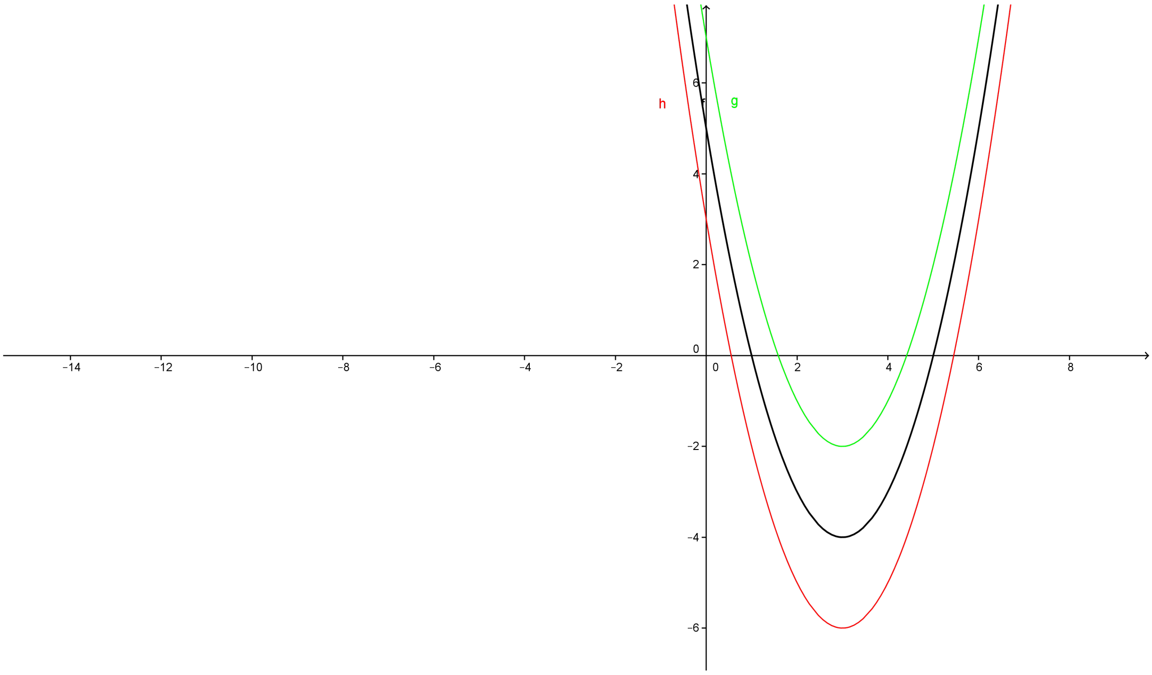
Iniciemos com a translação vertical. Vejamos que para o caso do gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, ao proceder variações no parâmetro c. O gráfico sofre uma translação vertical, onde se $c_1 = b + K$, para um $k > 0$, o gráfico desta nova função ($f(x) = ax + b_1$) será a translação do gráfico de K unidades em relação ao gráfico da função de origem, no mesmo sentido do eixo das ordenadas e ,caso o $b_1 = b - K$, essa translação será no sentido oposto ao mesmo eixo. Visualizaremos esta situação por meio do seguinte exemplo:

Exemplo 4.8. Na figura 17 estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 5$; da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 - 6x + 7$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = x^2 - 6x + 3$.

Tabela 9 – Representação algébrica das translações verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = x^2 - 6x + 3$	$f(x) = x^2 - 6x + 5$	$g(x) = x^2 - 6x + 7$
Transformação	$TV(f(x), -2)$	-	$TV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Figura 17 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



É fácil ver que os gráficos das funções g e h possuem formato idêntico ao da função f. No entanto apresentam posições distintas, onde a primeira pode ser vista como um deslocamento do gráfico de f duas unidades para "cima"e a segunda como um deslocamento duas unidades para "baixo".

Continuaremos agora, abordando a translação horizontal na função quadrática. Podemos perceber que a função $f(x) = x^2 - 6x + 5$ expressa em sua forma canônica apresenta a forma $f(x) = (x - 3)^2 - 4$. Para o estudo da translação horizontal e da homotetia vertical trabalharemos com esta forma canônica de $f(x)$.

Vejamos que a transformação de translação horizontal no gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a(x + c)^2 + d$, pode ser observada ao fazer variações no parâmetro c, de modo que se $c_1 = c + K$, para um $k > 0$, o gráfico da nova função $(f_1(x) = a(x + c_1)^2 + d)$ será uma translação de K unidades em relação ao gráfico da função $f(x)$ na mesma direção, mas com sentido oposto ao eixo das abcissas, e caso o $c_1 = b - K$, com $k > 0$, essa translação terá mesma direção e sentido a este eixo. O exemplo seguinte nos proporcionará uma visualização mais clara:

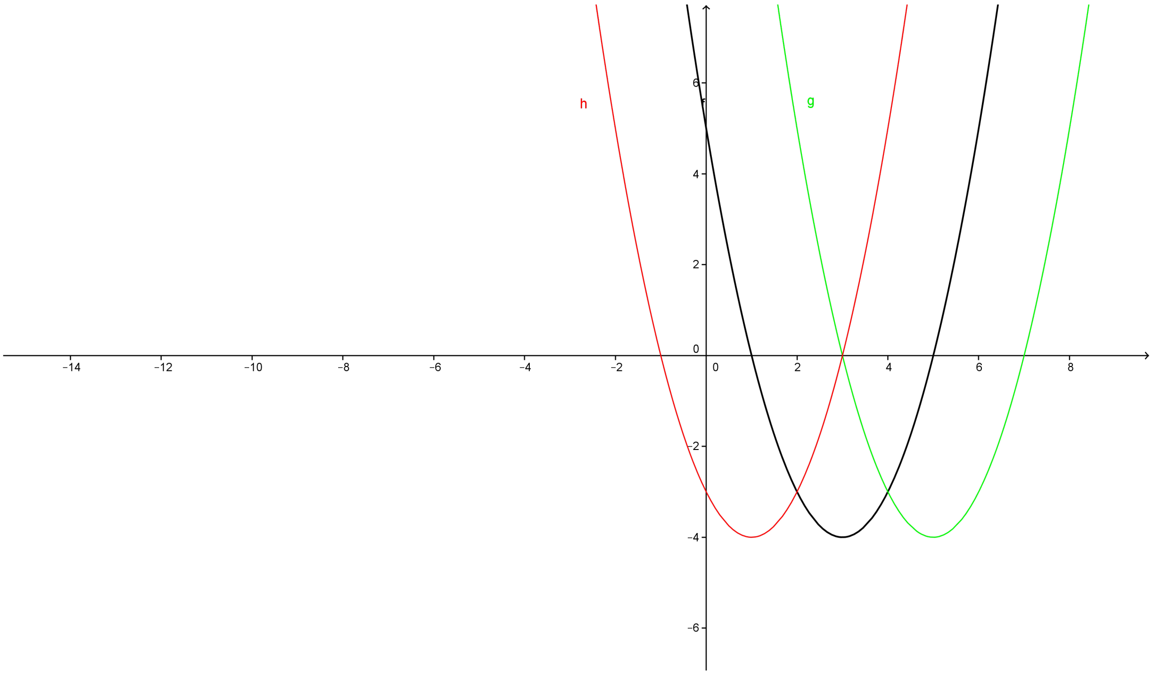
Exemplo 4.9. Na figura 18 estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-3)^2 - 4$; da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = (x-5)^2 - 4$, e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = (x - 1)^2 - 4$.

Tabela 10 – Representação algébrica das translações horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = (x-1)^2 - 4$	$f(x) = (x-3)^2 - 4$	$g(x) = (x-5)^2 - 4$
Transformação	$TH(f(x), -2)$	-	$TH(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 18 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Observamos que os gráficos das funções g e h são translações duas unidades a "direita"e "esquerda", respectivamente. Ambos gráficos têm formato idêntico e localizações distintas em relação ao gráfico da função f .

A seguir veremos a homotetia vertical na função quadrática. No gráfico da função quadrática $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a(x+c)^2 + d$, vemos que ao variar o valor do coeficiente a obtemos uma nova função $f_1(x) = a_1(x+c)^2 + d$. Comparando o gráfico da função f_1 com a função f vemos que o primeiro é obtido por meio de uma homotetia vertical do gráfico da segunda função, isto é, o valor de f_1 é maior (para $a_1 > a$) ou menor (para $a_1 < a$) que o de f, para um mesmo x.

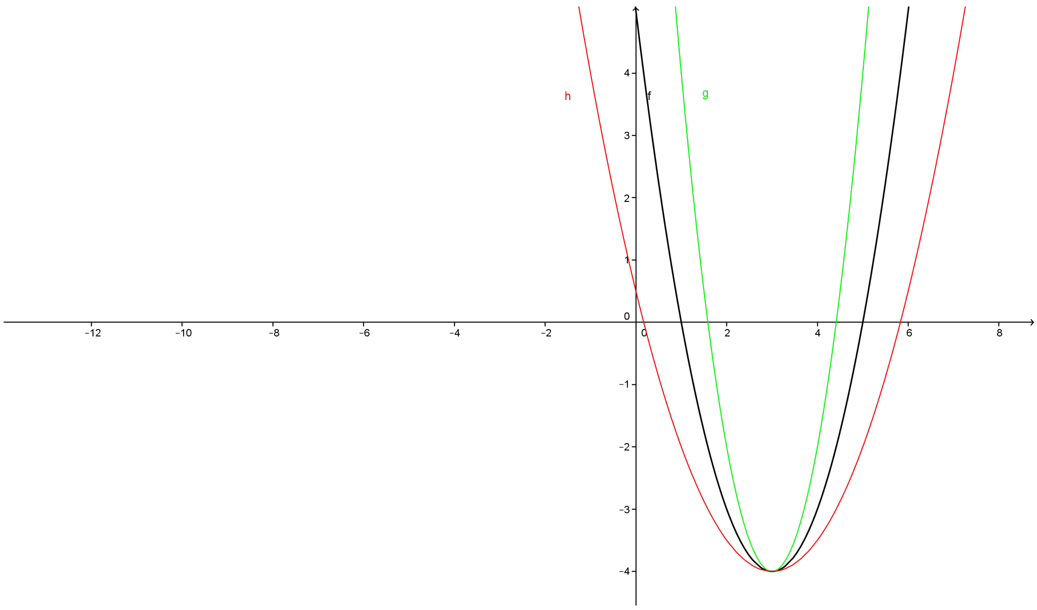
Exemplo 4.10. Vejamos a figura 19, onde estão representados os gráficos das funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x-3)^2 - 4$; $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2(x-3)^2 - 4$ e $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h(x) = \dfrac{1}{2}(x-1)^2 - 4$.

Tabela 11 – Representação algébrica das translações horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = \frac{1}{2}(x-3)^2 - 4$	$f(x) = (x-3)^2 - 4$	$g(x) = 2(x-3)^2 - 4$
Transformação	$HV(f(x), 1/2)$	-	$HV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 19 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

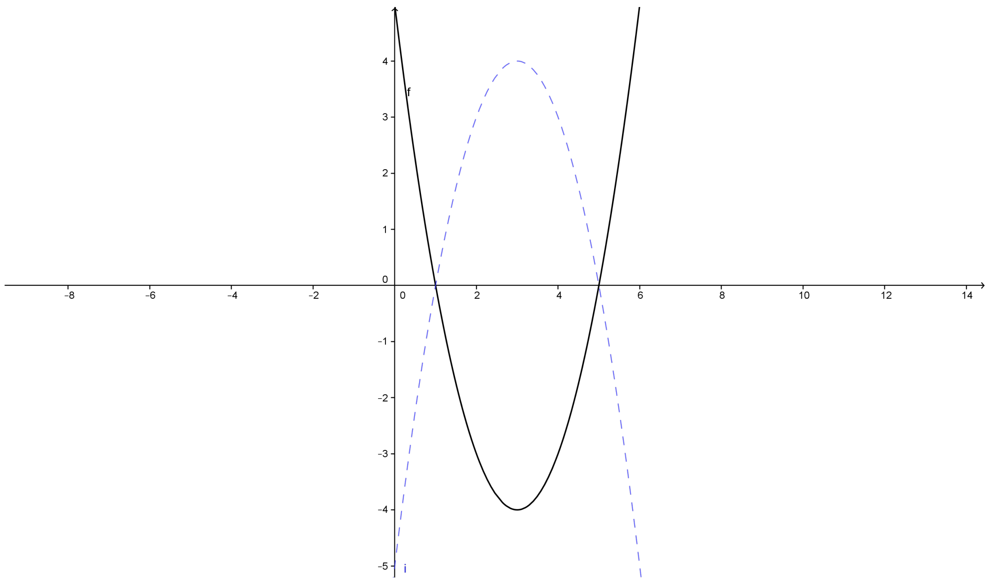
Note que o parâmetro a da função g é o dobro do presente na f, logo o gráfico deforma verticalmente, aumentando o valor de $f(x)$ para o mesmo valor de x. Para a função h, a deformação acontece pois o valor de $f(x)$ é reduzido para o mesmo valor de x.

Vejamos que não foram citadas outras transformações interessantes como é o caso das reflexões em relação os eixos Ox e Oy e a homotetia horizontal; as duas primeiras porque nas funções que estamos abordando neste trabalho sempre podem ser derivadas das quatro transformações que citamos no capítulo 3, e a homotetia vertical na função quadrática também pode ser obtida mediante as três transformações já citadas.

Teorema 4.4. Toda função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, pode ser obtida da função $g(x) = x^2$ por meio das transformações TV, TH e HV.

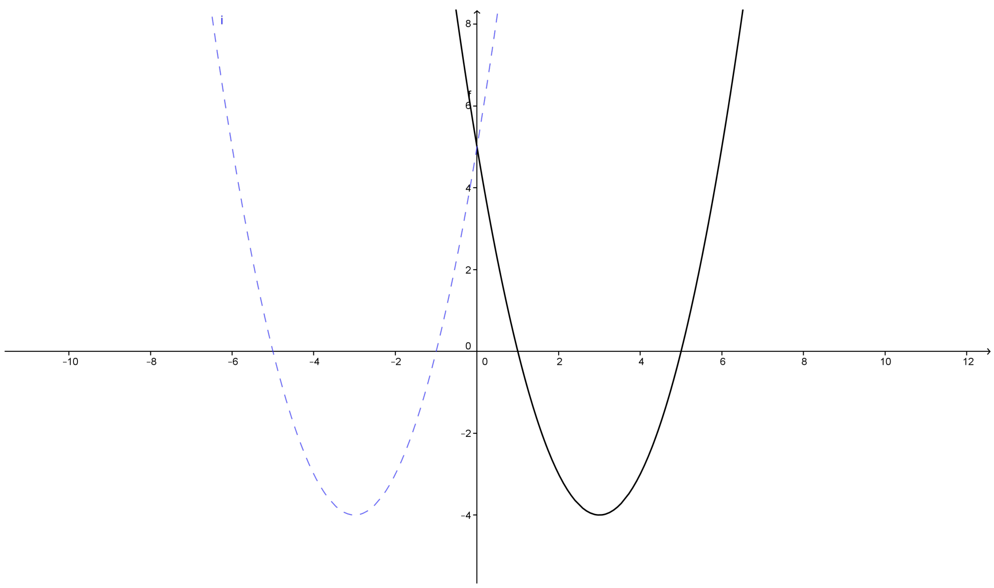
Demonstração. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Como podemos escrever $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$, vemos que é possível transformar a função $f(x) = ax^2 + bx + c$

Figura 20 – Reflexão de $f(x) = (x-3)^2 - 4$ em relação ao eixo Ox.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 21 – Reflexão de $f(x) = (x-3)^2 - 4$ em relação ao eixo Oy.



Fonte: Elaborada pelo autor.

na função $g(x) = x^2$ com a sequência de operações a seguir:

- $f(x) = ax^2 + bx + c$
- $f_1(x) = TV\left(f(x), -\dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- $f_2(x) = HV\left(f_1(x), \dfrac{1}{a}\right) = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$

- $f_3(x) = TH\left(f_2(x), -\dfrac{b}{2a}\right) = x^2 = g(x)$

Para mostrar a reciproca, isto é, para transformar $g(x) = x^2$ na função $f(x) = ax^2+bx+c$ basta refazer a sequência dos passos anteriores no sentido inverso:

- $g(x) = x^2$
- $g_1(x) = TH\left(g(x), \dfrac{b}{2a}\right) = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- $g_2(x) = HV(g_1(x), a) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$
- $g_3(x) = TV\left(g_2(x), \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{4ac - b^2}{4a}\right) = ax^2 + bx + c = f(x)$

$\square$

Escolhemos a forma canônica ($f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{4ac - b^2}{4a}$) para trabalhar as transformações nos gráficos da função quadrática devido a sua simplicidade de visualização da variação gráfica através da variação dos parâmetros a, $\dfrac{b}{2a}$ e $\dfrac{4ac - b^2}{4a}$ que como vimos anteriormente determinam transformações de homotetia vertical, translação horizontal e translação vertical, respectivamente.

Uma outra verificação gráfica interessante são as variações posicionais do vértice da parábola, mediante a alteração dos parâmetros a, b e c quando esta se encontra na forma $f(x) = ax^2 + bx + c$.

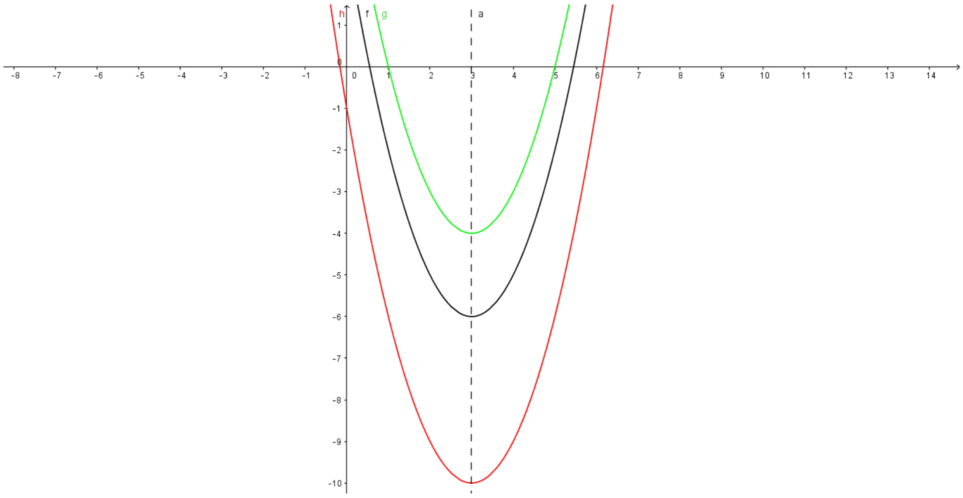
Partindo do conhecimento que o as coordenadas do vértice da parábola são:

$$x_v = \frac{-b}{2a} \text{ e } y_v = \frac{-b^2}{4a} + c = -\frac{\Delta}{4a}$$

Faremos esta análise do lugar geométrico do vértice da parábola para as três possíveis variações de apenas um dos parâmetros e deixando os demais fixos. Comecemos a analisar apenas as variações do parâmetro c.

Como esta variação de c não influencia a abcissa do vértice, este percorre a reta vertical de equação $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, como se pode ver na figura 22 . Neste exemplo, onde o $a = 1$ e $b = -6$ o vértice percorre a reta $x = 3$. Para visualizar este quadro, tomamos os valores $-1, 3$ e 5 para o c.

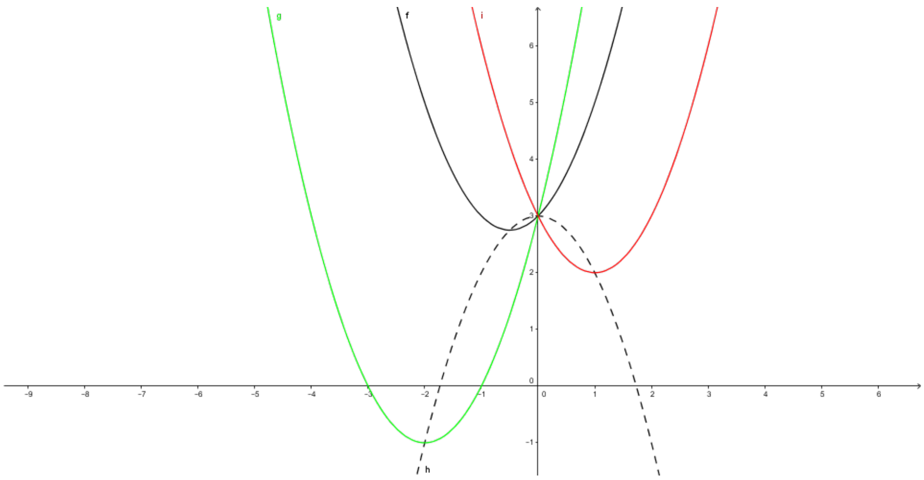
Figura 22 – Representação gráfica da variação do parâmetro c na função $f(x) = ax^2+bx+c$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Realizando agora a variação do parâmetro b e fixando os outros dois, temos algo curioso: o vértice da parábola $y = ax^2 + bx + c$ percorre uma outra parábola de equação $y = -ax^2 + c$, como podemos ver na figura 23. Neste exemplo, onde o $a = 1$, $c = 3$, fizemos o coeficiente b variar nos valores -2, 1 e 4, o vértice percorreu a parábola $y = -x^2 + 3$.

Figura 23 – Variação do parâmetro b na função $f(x) = ax^2 + bx + c$



Fonte: Elaborada pelo autor.

De fato como $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, temos $b = -2ax_v$.

Como $y_v = \dfrac{-b^2}{4a} + c$, utilizando a expressão $b = -2ax_v$, podemos ver que:

Demonstração.

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-2ax)^2}{4a} + c \\ y &= \frac{-4a^2x^2}{4a} + c \\ y &= \frac{-4a^2x^2}{4a} + c \\ y &= -ax^2 + c \end{aligned}$$

□

como queríamos demonstrar.

Por último iremos fixar os parâmetros b e c, faremos variar o a, e vemos que o lugar geométrico no qual o vértice realiza sua trajetória é a reta $y = \frac{bx}{2} + c$. Para esta verificação, realizaremos um processo semelhante ao anterior, onde colocaremos em evidência o parâmetro a na abcissa do vértice e substituiremos na ordenada do vértice. Temos que:

$a = \frac{-b}{2x}$ substituindo no y_v temos:

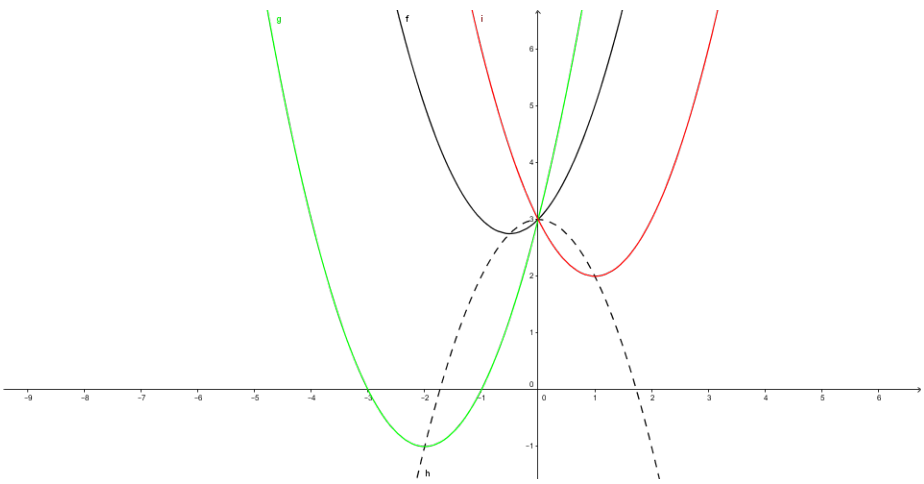
Demonstração.

$$\begin{aligned} y &= \frac{-b^2}{4\left(\frac{-b}{2x}\right)} + c \\ y &= \frac{b}{2}x + c \end{aligned}$$

□

como queríamos demonstrar.

Figura 24 – Variação do parâmetro a na função $f(x) = ax^2 + bx + c$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.3 Funções polinomiais

Diz-se que $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial quando existem números a_0, a_1, a_2,..., a_n tais que, para todo $x \in \mathbb{R}$, tem-se

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0. \tag{4.5}$$

Normalmente o estudo de funções polinomiais maior ou igual a 3 não é tratado no ensino básico, mesmo que algumas relações possam ser trabalhadas em exemplos elementares com o fim de facilitar a compreensão dos alunos sobre gráficos de funções.

Nesta seção não serão mostradas as transformações aplicadas a funções polinomiais, pois isto já foi feito no capítulo 3. Nos deteremos a mostrar duas características interessantes para esboçar o gráfico de uma função polinomial.

Observemos a função:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \text{ com } a \neq 0.$$

podemos escrevê-la da seguinte forma

$$p(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) \tag{4.6}$$

Vemos que se tomarmos valores muito grandes para $|x|$ cada parcela, a partir da segunda, dentro dos parênteses na equação 4.6 pode-se tornar tão pequeno quanto se queira; isto implica que, para valores suficientemente grandes de $|x|$ temos que o valor da soma nos parenteses tem o mesmo sinal de a_n. Podemos ver que quando n é par, x^n é sempre positivo e o sinal de $p(x)$ será o mesmo do a_n. Já para o caso do n ser um número ímpar, x^n tem o mesmo sinal de x. Portanto $p(x)$ tem o mesmo sinal de a_n caso x seja positivo e $p(x)$ tem sinal oposto ao de a_n quando x é negativo.

Esta informação é útil na associação entre as representações gráficas e algébricas desta classe de funções, mais especificamente mostrando o comportamento das extremidades do gráfico. Observemos as imagens das funções polinomiais do primeiro ao quarto grau.

Um outro dado importante que podemos observar em relação ao gráfico de funções polinomiais refere-se a comparação entre as próprias funções polinomiais, tomando como referência o seu grau. Temos que se o grau de um polinômio p é maior que o de um outro q, então para todo $|x|$ suficientemente grande tem-se a desigualdade $|p(x)| > |q(x)|$, e esta diferença torna-se tão grande quanto se queira, dependendo do quão grande for o valor de $|x|$ que tomarmos. A justificativa desta afirmação não será realizada neste trabalho, mas pode ser consultada na página 184 da referência 8, nos deteremos a apresentar os gráficos das funções polinomiais $p(x) = x^5$ e $q(x) = x^3$ para visualização desta situação.

Figura 25 – Gráfico da função $f(x) = -3x + 1$

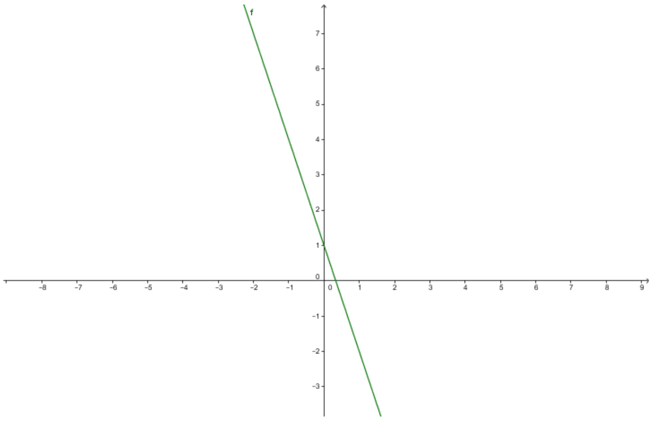


Figura 26 – Gráfico da função $f(x) = -2x^2 - 4x + 5$

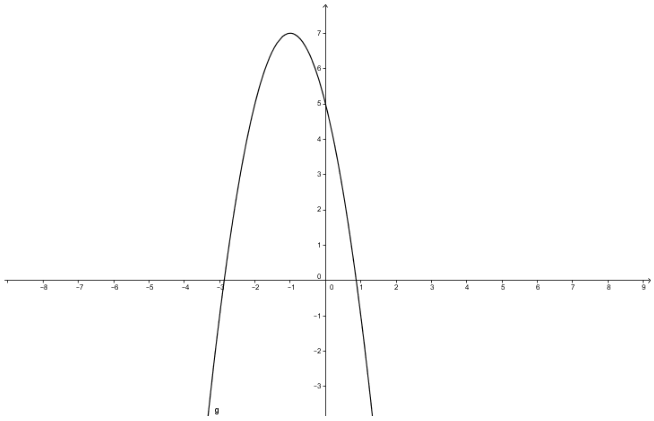


Figura 27 – Gráfico da função $f(x) = -x^3 + 4x^2 + x + 1$

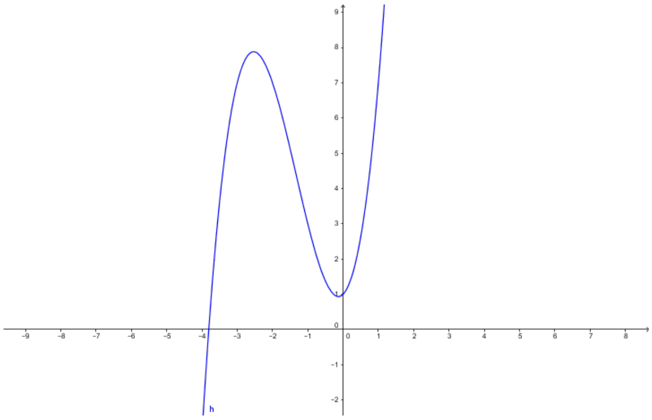


Figura 28 – Gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x - 3$

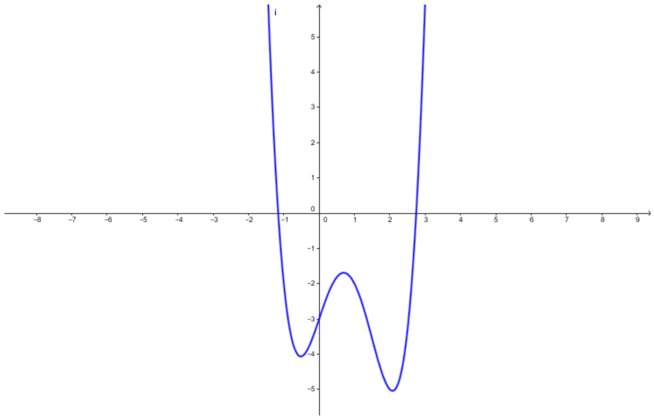
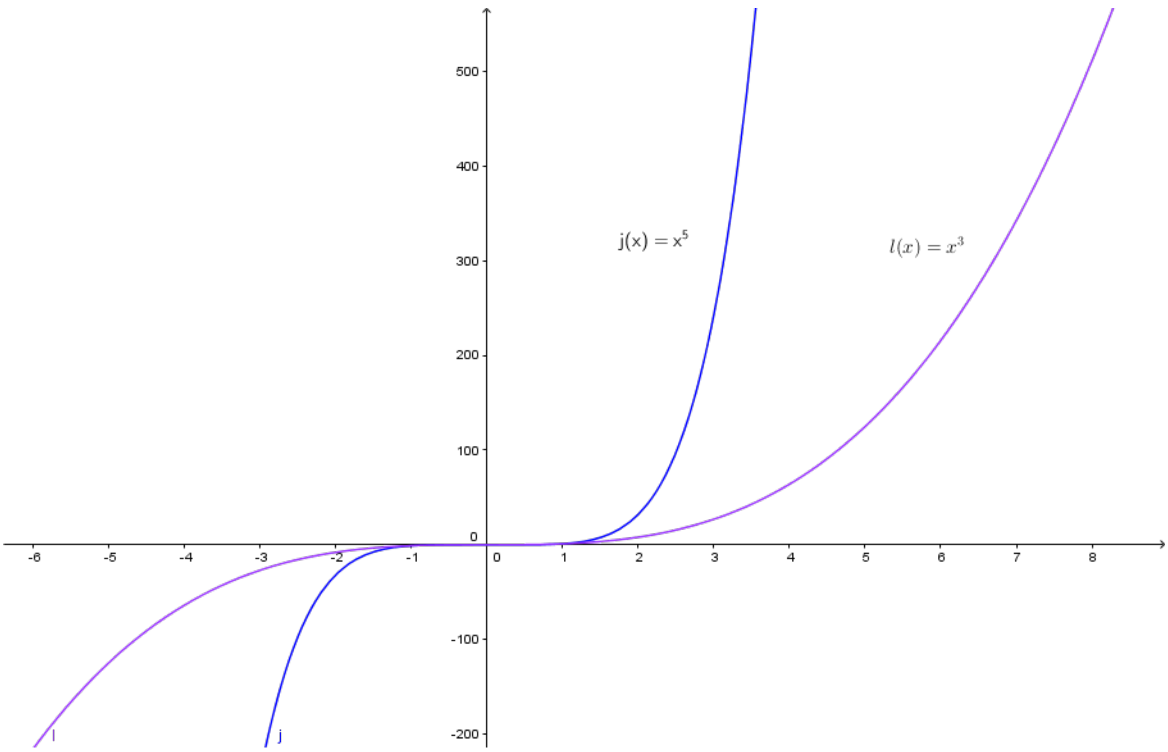


Figura 29 – Gráfico das funções $j(x) = x^5$ e $l(x) = x^3$



Gostaríamos, ainda por fim, de abordar nesta seção uma informação muito útil sobre as raízes dos polinômios, com fim de esboçar seus gráficos. Consiste no Teorema de Bolzano, onde dado a continuidade da função polinomial se $p(x_1) < 0$ e $p(x_2) > 0$, então p possui uma raiz entre x_1 e x_2. Sabemos que os processos algébricos para encontrar raízes polinomiais não são tão simples, com exceção para os polinômios de primeiro e segundo grau, mesmo assim temos meios numéricos, como o método da iteração linear e o método de Newton, que nos auxiliam a encontrar aproximações (ou mesmo as raízes) de um modo mais acessível.

4.4 Função exponencial

Esta seção será dedicada à apresentação da função exponencial. A função exponencial, juntamente com as funções afim e quadrática, são os modelos matemáticos mais usados para solucionar problemas elementares, com utilização não só em Matemática (como podemos destacar sua relação com as progressões geométricas e a matemática financeira) mas também em diversas outras ciências como, por exemplo, Biologia, Física, Química, Economia.

Definição 4.4. Seja a um número real positivo, com $a \neq 0$ e $a \neq 1$, a função exponencial de base a, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, representada pela notação $f(x) = a^x$, possuindo as seguintes propriedades, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$:

1) $a^x.a^y = a^{x+y}$;

2) $a^1 = a$;

3)$x < y \Rightarrow a^x < a^y$ quando $a > 1$ e $x < y \Rightarrow a^y < a^x$ quando $0 < a < 1$.

Cabe observar que excluímos o $a = 0$ e $a = 1$, pois caso não fizéssemos obteríamos a função nula e uma função constante respectivamente.

Sobre o gráfico das funções exponenciais é importante observar que o crescimento exponencial é diferente do polinomial, cabendo ao professor fazer esta distinção, pois não raramente o seu gráfico é confundido como arcos de uma parábola. Vale destacar que o crescimento exponencial, para a base maior que 1, supera qualquer polinômio. Isto pode ser visualizado com a ajuda de uma tabela em que sejam colocadas em confronto os dois tipos de funções ou por meio de suas representações gráficas. A demonstração para a afirmação expressa acima pode ser encontrada na página 203 da referência 8. Nos limitaremos a apresentar apenas dois exemplos, o primeiro é uma tabela onde podemos analisar a diferença do crescimento ocorrido na função exponencial e nas funções afim e quadrática (as funções polinomiais estudadas no Ensino Médio), e o outro é um problema relacionado a biologia.

Exemplo 4.11. Vejamos na tabela 12 a amplitude do crescimento da função exponencial $y = 2^x$ em comparação com a função quadrática $y = x^2$ e a afim $y = 2x + 1$.

Tabela 12 – Valores das funções $y = 2x + 1$, $y = x^2$ e $y = 2^x$

x	$y = 2x + 1$	$y = x^2$	$y = 2^x$
1	3	1	2
5	11	25	32
10	21	100	1024
15	31	225	32768
20	41	400	1048576
25	51	625	33554432
30	61	900	1073741824

Fonte: Elaborada pelo autor.

Exemplo 4.12. Os linfócitos são as principais células do sistema imunológico, pois estes orquestram quase toda a resposta das demais células em resposta a presença de um agente danoso ao indivíduo, e cada linfócito tem especificidade contra um único antígeno. Normalmente existem poucos ou apenas um linfócito específico a um antígeno x (por exemplo uma bactéria); quando estes são expostos a este antígeno eles são ativados e sofrem expansão clonal (divisão binária) para que possa existir uma resposta defensiva apropriada. Imaginemos que em um indivíduo antes de uma exposição a certa bactéria exista apenas 5 linfócitos específicos a ela, e que seja necessário 1 hora para que possa acontecer uma divisão mitótica de cada linfócito.

Podemos modelar este exemplo pela função $f(x) = 5.2^x$, onde x é o tempo em horas. Podemos ver que em apenas um dia teríamos $f(24) = 5.2^{24} = 83886080$

Mostraremos a seguir algumas transformações no gráfico da função exponencial, tais como translação vertical, translação horizontal, homotetia vertical e homotetia horizontal.

4.4.1 Translação vertical na função exponencial

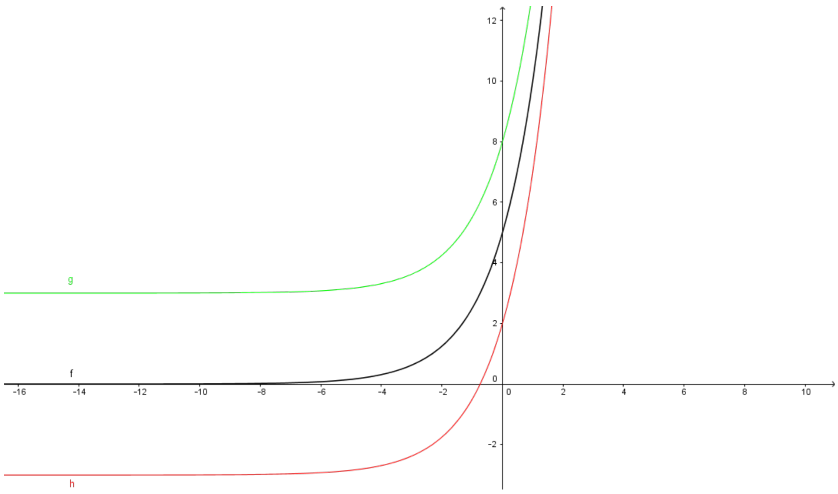
Podemos visualizar que no gráfico da função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = b^x$, ao promover variações no parâmetro c, o gráfico sofre translações verticais, de modo que se ocorrer uma substituição por um novo parâmetro $c_1 = c + K$, para um $k > 0$, o gráfico desta nova função ($f(x) = a.b^x + c_1$) sofrerá uma translação do gráfico de K unidades em relação ao da função de origem no sentido positivo do eixo das ordenadas, e caso $c_1 = c - K$, para um outro $k > 0$, essa translação será no sentido oposto a este mesmo eixo. Vejamos o exemplo abaixo:

Exemplo 4.13. Na figura 30 estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5.2^x$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por$g(x) = 5.2^x + 3$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 5.2^x - 3$.

Tabela 13 – Representação algébrica das translações verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = 5.2^x + 3$	$f(x) = 5.2^x$	$g(x) = 5.2^x - 3$
Transformação	$TV(f(x), -3)$	-	$TV(f(x), 3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Figura 30 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Como esperado, podemos observar que os gráficos de g e h podem ser obtidos realizando uma translação vertical de f de três unidades "para cima"e de três unidades "para baixo", respectivamente.

4.4.2 Translação horizontal na função exponencial

A translação horizontal no gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a.b^{(x+c)} + d$, pode ser observada ao fazer variações no parâmetro c, de modo que se $c_1 = c + K$, para um $k > 0$. O gráfico desta nova função ($f_1(x) = a.b^{(x+c_1)} + d$) apresentará uma translação de K unidades em relação ao gráfico da função inicial na mesma direção, mas sentido oposto ao eixo das abcissas, e caso o $c_1 = c - K$, com $k > 0$, essa translação terá mesma direção e sentido a este eixo. O exemplo a seguir nos proporcionará uma visualização desta transformação:

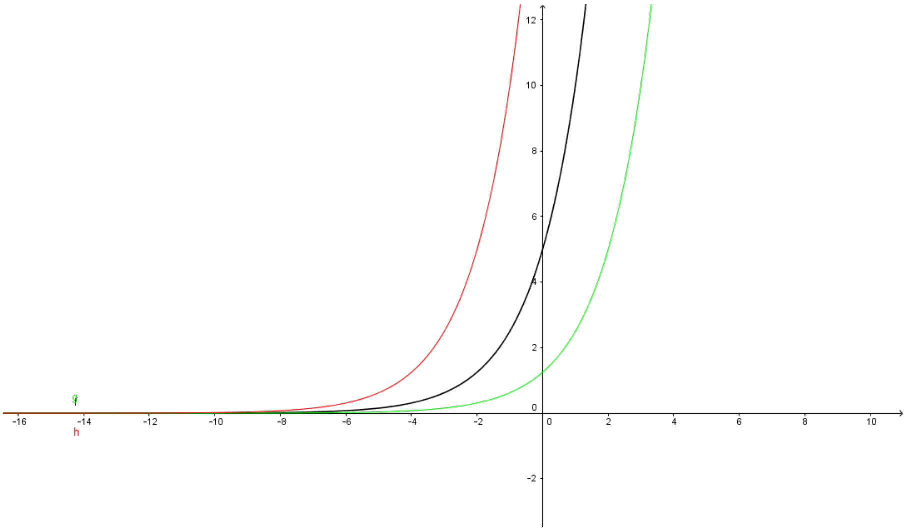
Exemplo 4.14. Os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 5.2^x$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por$g(x) = 5.2^{(x-3)}$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = 5.2^{(x+3)}$ estão expressos na figura 31.

Tabela 14 – Representação algébrica das translações horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = 5.2^{x+3}$	$f(x) = 5.2^x$	$g(x) = 5.2^{x-3}$
Transformação	$TH(f(x), -3)$	-	$TH(f(x), 3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 31 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vemos que ao somarmos 3 a variável x na função f obtendo a função h, o gráfico de f realiza uma translação horizontal ″para esquerda″de três unidades, e ao subtrairmos 3 de x em f obtendo assim a função g, o gráfico apresenta uma translação horizontal ″para direita″de três unidades.

4.4.3 Homotetia vertical na função exponencial

Dado o gráfico da função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a.b^x$, vemos que ao multiplicar f por uma constante k, obtemos a função $g(x) = k.f(x) = k.a.b^x$, onde o gráfico da função g é pode ser obtido por meio de uma homotetia vertical (deformação vertical) da função f, de modo que, o valor de $g(x) > f(x)$ para $k > 1$, ou $g(x) < f(x)$ para $k < 1$.

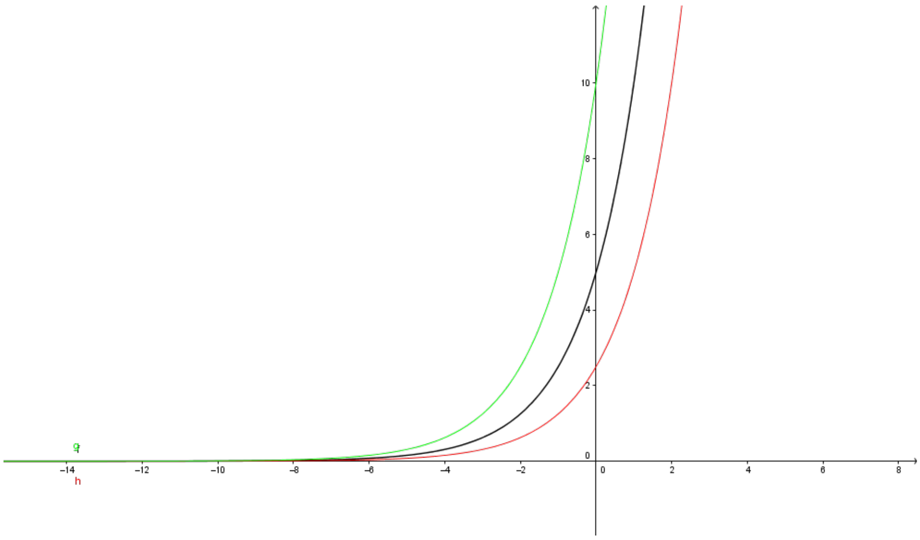
Exemplo 4.15. A figura 32 mostra as representações gráficas das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 5.2^x$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 10.2^x$ e de $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{5}{2}.2^x$.

Tabela 15 – Representação algébrica das translações horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = \frac{5}{2}.2^x$	$f(x) = 5.2^x$	$g(x) = 10.2^x$
Transformação	$HV\left(f(x), \frac{1}{2}\right)$	-	$HV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 32 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Notamos que a função g, que foi obtida multiplicando a função f por a constante 2, possui o gráfico mais acentuado (sofreu uma homotetia vertical) pois para o mesmo valor de x sua imagem é o dobro que a de f, e ao dividirmos f por 2 (obtendo a função h) o gráfico se mostra menos acentuado, pois para cada de x a imagem deste na função h é a metade em relação a sua imagem em f.

4.4.4 Homotetia horizontal na função exponencial

Para analisar esta transformação sobre o gráfico da função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = a.e^{bx}$, vemos que ao variar o valor do coeficiente b para um b_1 conseguimos uma nova função $g(x) = a.e^{b_1.x}$, onde o gráfico desta pode ser visto como uma homotetia horizontal (contração para $|b| > 1$ ou dilatação para $0 < |b| < 1$).

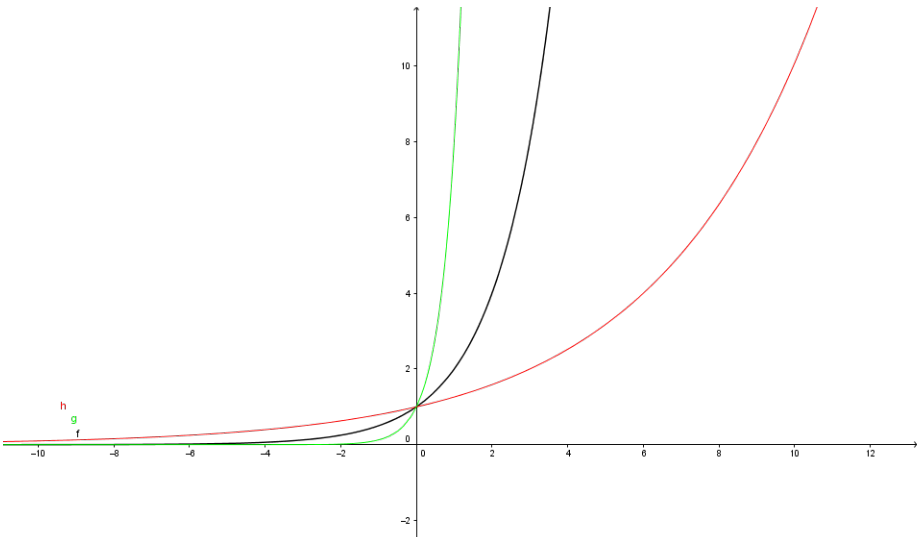
Exemplo 4.16. A figura 33 exibe os gráficos das funções $f(x) = 5.2^x$, $g(x) = 5.2^{2x}$ e de $h(x) = 5.2^{\frac{1}{2}x}$.

Tabela 16 – Representação algébrica das homotetias horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = 5.2^{\frac{1}{2}x}$	$f(x) = 5.2^{x}$	$g(x) = 5.2^{2x}$
Transformação	$HH\left(f(x), \frac{1}{2}\right)$	-	$HH(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 33 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Percebemos que ao multiplicarmos por 2 o valor de x na representação algébrica da função f, obtemos o gráfico de g que por sua vez, pode ser visto como uma compressão do primeiro, onde vemos que precisamos apenas da metade do valor de x em g para obter o mesmo valor de $f(x)$, e ao dividirmos x por 3 em f, obtemos a função h, e notamos que o gráfico de h pode ser obtido realizando uma expansão de modo que é necessário o dobro do valor de x em f para obtermos o mesmo valor de $f(x)$.

Por fim, enunciamos o teorema que nos mostra a possibilidade de construir qualquer gráfico de uma função exponencial conhecendo o seu representante mais simples por meio das transformações estudadas.

Teorema 4.5. Toda função da forma $f(x) = b.e^{ax+c} + d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pode ser obtida da função $g(x) = e^x$ por meio das transformações TV, TH ,HV e HH. Onde e indica um número real positivo.

Demonstração. Seja $f(x) = b.e^{ax+c}+d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, vemos que é possível transformar f na função $f(x) = e^x$ com a sequência de operações seguinte:

- $f(x) = b.e^{ax+c} + d$
- $f_1(x) = TV\left(f(x), -d\right) = b.e^{(ax+c)}$
- $f_2(x) = HV\left(f_1(x), \dfrac{1}{b}\right) = e^{(ax+c)}$
- $f_3(x) = TH\left(f_2(x), -c\right) = e^{(ax)}$
- $f_4(x) = HH\left(f_3(x), \dfrac{1}{a}\right) = e^{x} = g(x)$

Reciprocamente pode-se transformar $g(x) = e^x$ na função $f(x) = b.e(ax + c) + d$ por meio da sequência de operações a seguir:

- $g(x) = e^x$
- $g_1(x) = HH\left(g(x), a\right) = e^{(ax)}$
- $g_2(x) = TV(g_1(x), c) = e^{(ax+c)}$
- $g_3(x) = HV\left(g_2(x), b\right) = b.e^{(ax+c)}$
- $g_4(x) = HV\left(g_3(x), d\right) = b.e^{(ax+c)} + d = f(x)$

□

Importante notar que a operação de homotetia horizontal (HH) equivale a uma operação diferente das demais funções abordadas no ensino básico, já que $HH(g(x), a) = e^{ax} = (e^a)^x$ acarreta uma mudança de base na função.

4.5 Função logarítmica

Historicamente, os logaritmos surgiram e ganharam popularidade como uma ferramenta eficiente para tornar operações de multiplicação, divisão, potenciação e radiciação mais simples, otimizando o tempo para resolução (de fato a capacidade de transformar produtos em somas foi a motivação original). Esta popularização deve-se em grande parte as exigências cada vez maiores exercidas pelo amplo desenvolvimento da Astronomia e Navegação, pontos chaves para o expansão das nações no século XVI e XVII.

Hoje, com o surgimento de calculadoras e computadores, o uso do logaritmo para este fim é dispensável. No entanto, nos deparamos com diversas situações passíveis de modelação por esta ferramenta, o que a faz continuar sendo muito importante na matemática.

Definiremos agora o conceito de logaritmo e, em seguida, o de função logarítmica. Vale ressaltar que o conceito de logaritmo está relacionado ao de potência; isso acontece de tal forma que a função logarítmica pode ser construída como a inversa da exponencial.

Definição 4.5. Sejam a e b números reais positivos, com $b \neq 1$, chama-se logaritmo de a na base b o expoente x tal que $b^x = a$ e indica-se por $x = log_b a$. Segue então que

$$x = log_b a \Leftrightarrow b^x = a$$

Definição 4.6. Chama-se função logarítmica toda função $f : \mathbb{R}^*_+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = log_b x$, em que b é um número real positivo e diferente de 1.

4.5.1 Translação vertical na função logarítmica

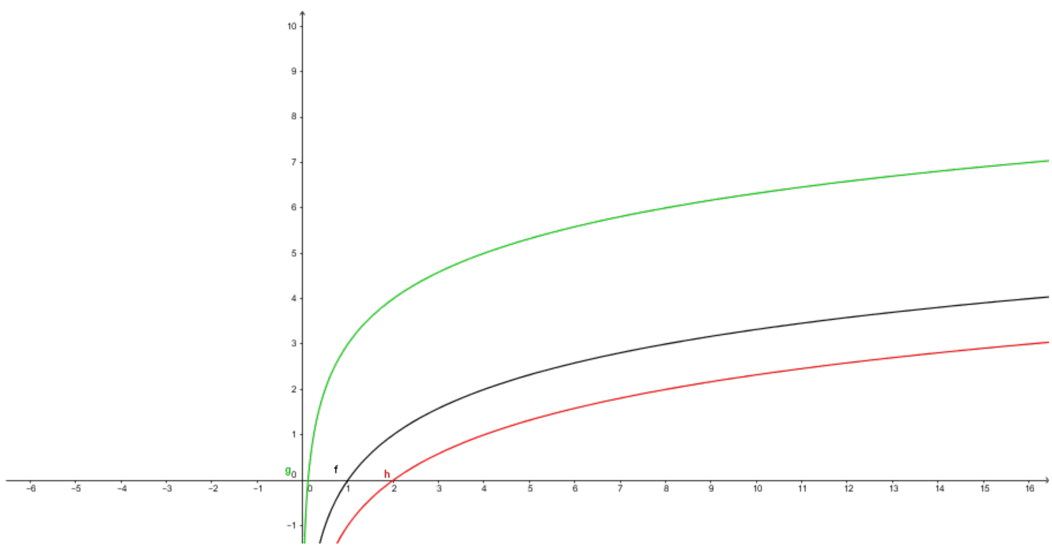
A translação vertical no gráfico da função logarítmica $f : \mathbb{R}^*_+ \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = log_b x$ com b real positivo e diferente de 1, ocorre de forma análoga as demais funções apresentadas anteriormente. Vemos que ao adicionar uma constante k a função, o gráfico sofre uma translação vertical, onde para um $k > 0$, o gráfico desta nova função ($g(x) = log_b x + k$) será a translação do gráfico de f em K unidades para cima, e no casodo $k < 0$, essa translação será para baixo como podemos visualizar no próximo exemplo:

Exemplo 4.17. Na figura 34 estão representados os gráficos das funções $f : \mathbb{R}^*_+ \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = log_2 x$, $g : \mathbb{R}^*_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = log_2 x + 3$ e da função $h : \mathbb{R}^*_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = log_2 x - 2$.

Tabela 17 – Representação algébrica das translações verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = log_2 x - 2$	$f(x) = log_2 x$	$g(x) = log_2 x + 3$
Transformação	$TV(f(x), -2)$	-	$TV(f(x), 3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Figura 34 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Observamos que em relação ao gráfico de f o gráfico de g é uma translação vertical para cima de três unidades e o de h uma translação vertical de duas unidades para baixo .

4.5.2 Translação horizontal na função logarítmica

Vejamos que a translação horizontal no gráfico da função logarítmica definida por $f(x) = log_b(x - c)$ com $(x - c) > 0$, ocorre ao ser alterado o parâmetro c, de modo que se tivermos um $c_1 = c+K$, para um $k > 0$, o gráfico de uma nova função ($f_1(x) = log_b(x+c_1)$) apresentará o mesmo formato do gráfico de f deslocado K unidades na mesma direção mas sentido oposto ao eixo das abcissas e caso o $c_1 = b - K$, com $k > 0$, essa translação terá mesma direção e sentido a este mesmo eixo. Observe que os domínios das funções obtidas com a variação do parâmetro c não são o mesmo conjunto, já que pela definição da função logarítmica $(x - c) > 0$. Exemplificamos esta situação:

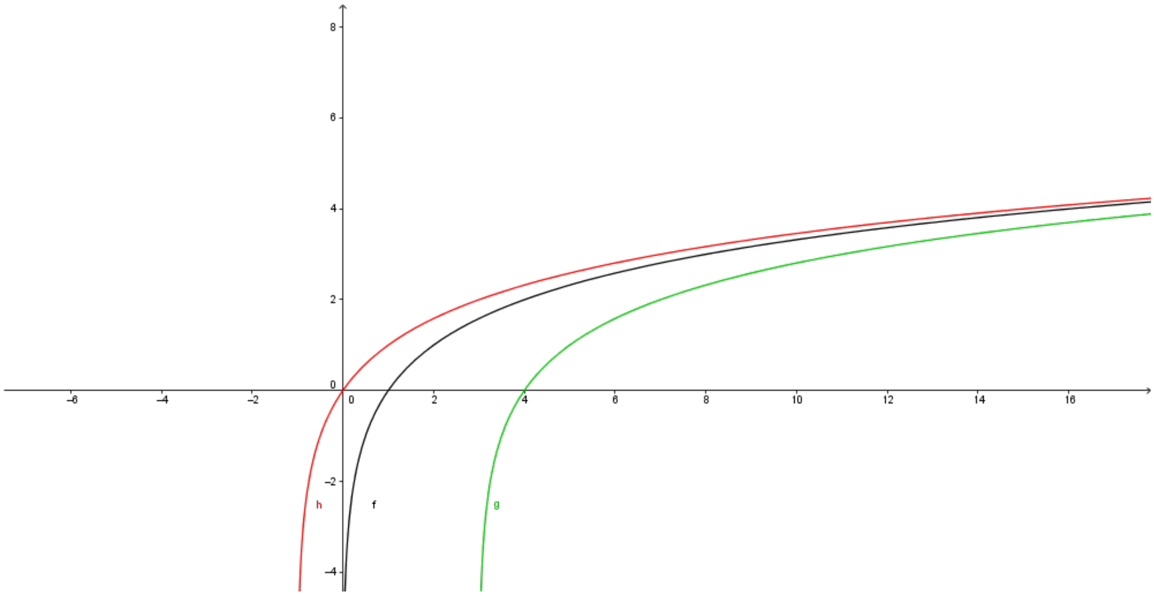
Exemplo 4.18. Na figura 34 estão representados os gráficos das funções $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ $f(x) = log_2 x$, $g(x) = log_2(x - 3)$ com $x - 3 > 0$ e da função h definida por $h(x) = h(x) = log_2(x + 1)$ onde $x + 1 > 0$.

Tabela 18 – Representação algébrica das translações horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = log_2(x + 1)$	$f(x) = log_2 x$	$g(x) = log_2(x - 3)$
Transformação	$TH(f(x), -1)$	-	$TH(f(x), 3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 35 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observamos que após somar 1 ao x na função f (obtendo h), vemos que seu gráfico sofre uma translação horizontal para esquerda de uma unidade e ao subtrairmos 3, o gráfico de f apresentará uma translação horizontal para direita de três unidades.

4.5.3 Homotetia vertical na função logarítmica

Tomando o gráfico da função logarítmica $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a.log_b x$, vemos que ao variar o valor do coeficiente a obtemos uma nova função $f(x) = a_1.log_b x$. O gráfico desta função sofre uma homotetia vertical, isto é, o valor de $f(x)$ aumenta (para $a_1 > a$) ou reduz (para $a_1 < a$) quando tomado o mesmo x.

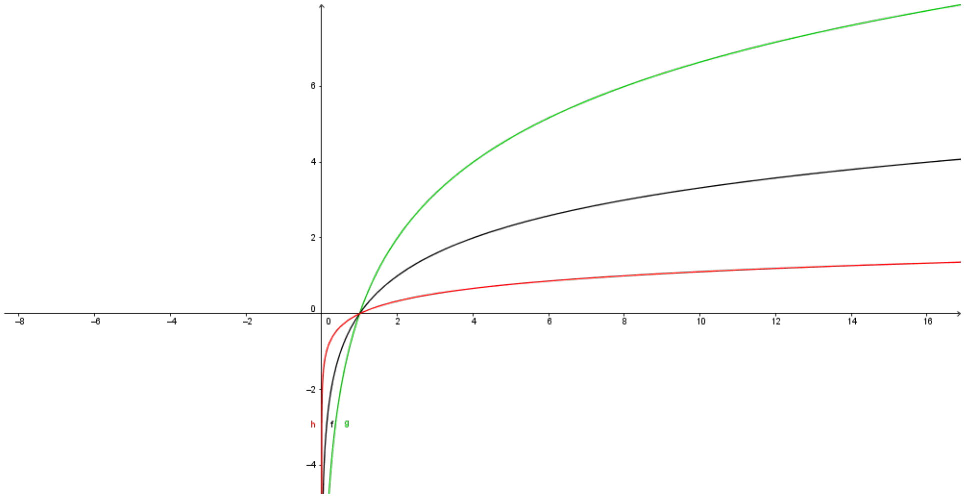
Exemplo 4.19. Vejamos a figura 36, onde estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_2 x$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 2log_2 x$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \dfrac{1}{3}log_2 x$.

Tabela 19 – Representação algébrica das homotetias verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = \frac{1}{3}log_2 x$	$f(x) = log_2 x$	$g(x) = 2log_2 x$
Transformação	$HV\left(f(x), \frac{1}{3}\right)$	-	$HV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 36 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Podemos perceber que ao multiplicarmos f por 2 (obtendo a função g), o gráfico de f sofrerá uma deformação vertical dobrando os valores de f, e ao dividirmos f por 3 (obtendo a função h), o gráfico apresentará uma deformação vertical em contração.

4.5.4 Homotetia horizontal na função logarítmica

Para analisar esta transformação sobre o gráfico da função logarítmica, tomemos $f : \{x \in \mathbb{R}/a.x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = log_b a.x$. Percebemos que ao variar o valor do coeficiente a obtemos uma nova função, onde o gráfico desta pode ser visto como uma homotetia horizontal sobre a função f (contração para $|a| > 1$ ou dilatação para $0 < |a| < 1$).

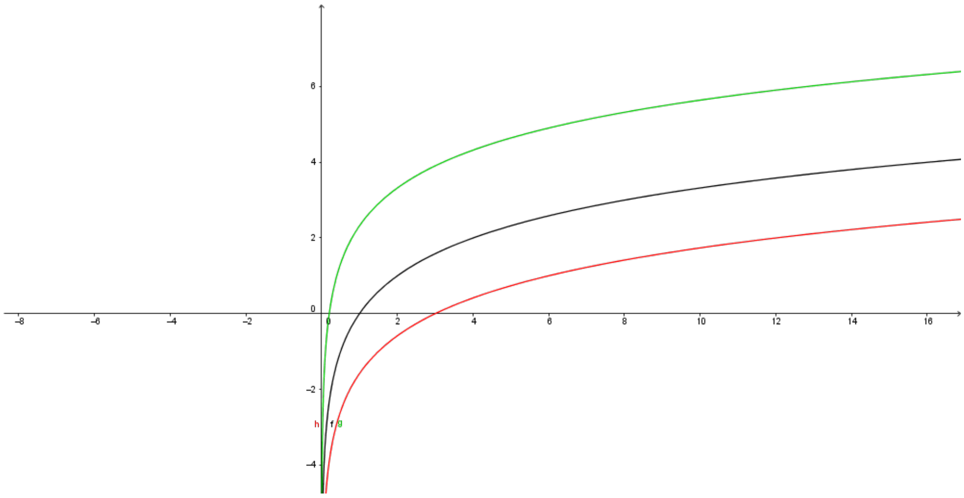
Exemplo 4.20. Vejamos a figura 37, nela estão representados os gráficos das funções $f(x) = log_2 x$, $g(x) = log_2 5x$ e $h(x) = log_2 \dfrac{1}{3}x$.

Tabela 20 – Representação algébrica das homotetias horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = log_2 \frac{1}{3}x$	$f(x) = log_2 x$	$g(x) = log_2 5x$
Transformação	$HH\left(f(x), \frac{1}{3}\right)$	-	$HH(f(x), 5)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 37 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Teorema 4.6. Toda função da forma $f(x) = b(log_m(ax + c)) + d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, pode ser obtida da função $g(x) = log_m x$ por meio das transformações TV, TH ,HV e HH; onde m é um número natural positivo.

Demonstração. Seja $f(x) = b.(log_m\ (ax + c)) + d$ (função logarítmica geral), com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, vemos que a função f pode ser transformada na função $g(x) = log_m\ x$ com a sequência de operações seguinte:

- $f(x) = b.(log_m\ (ax + c)) + d$
- $f_1(x) = TV\,(f(x), -d) = b.(log_m\ (ax + c))$
- $f_2(x) = HV\left(f_1(x), \dfrac{1}{b}\right) = log_m\ (ax + c)$
- $f_3(x) = TH\,(f_2(x), -c) = log_m\ ax$
- $f_4(x) = HH\left(f_3(x), \dfrac{1}{a}\right) = log_m\ x = g(x)$

Reciprocamente pode-se transformar $g(x) = log_m\ x$ na função $f(x) = b.(log_m\ (ax + c)) + d$ utilizando a sequência de operações anteriores no sentido contrário:

- $g(x) = log_m\ x$
- $g_1(x) = HH\,(g(x), a) = log_m\ x$
- $g_2(x) = TH(g_1(x), c) = log_m\ (ax + c)$
- $g_3(x) = HV\,(g_2(x), b) = b.\,(log_m\ (ax + c))$
- $g_4(x) = TV\,(g_3(x), d) = b.\,(log_m\ (ax + c)) + d = f(x)$

□

Um fato que merece destaque , no caso da função logarítmica, é que a transformação de homotetia horizontal é equivalente a transformação translação vertical, como podemos ver a seguir:

$$HH(g(x), a) = ln\ \ a.x = ln\ \ a + ln\ \ x = TV(ln\ \ x, ln\ \ A)$$

4.6 Funções trigonométricas

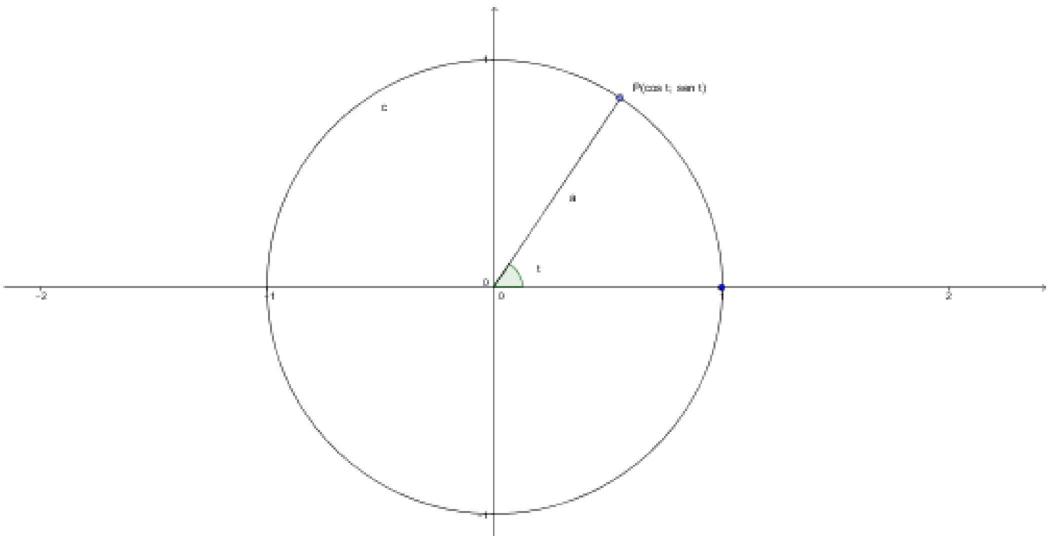
Nesta seção nosso foco está direcionado as funções trigonométricas: seno, cosseno, tangente, secante, cossecante e cotangente. Apresentaremos suas definições, representações gráficas, períodos e suas transformações. É interessante notar que estas funções apresentam a propriedade de serem periódicas; esta particularidade as tornam extremamente úteis para modelar situações cíclicas, como o movimento das marés, posições dos astros, ondas sonoras ou batimentos cardíacos.

A fim de apresentarmos as definições das funções trigonométricas seno e cosseno, será preciso definir preliminarmente o círculo trigonométrico e função de Euler.

Definição 4.7. A circunferência unitária C é aquela que possui raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^2$, a qual também podemos denotar por

$$C = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} :$$

Figura 38 – Circunferência unitária

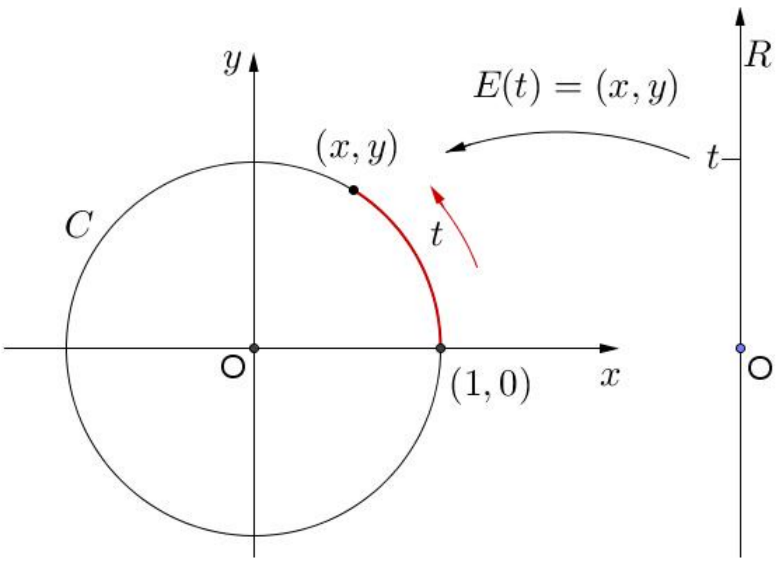


Definição 4.8. Função de Euler $E : R \to C$ é a aplicação que faz corresponder a cada número real t o ponto $E(t) = (cost; sent)$ da circunferência unitária. Note que:

- $E(0) = (1; 0)$.
- Se $t > 0$ percorremos sobre a circunferência C, a partir do ponto $(1; 0)$, um caminho de comprimento t, sempre andando no sentido positivo (anti-horário, que nos leva de $(1; 0)$ a $(0; 1)$ pelo caminho mais curto sobre C). O ponto final do caminho será chamado $E(t)$.
- Se $t < 0$, $E(t)$ será a extremidade final de um caminho sobre C, de comprimento $|t|$, que parte do ponto $(1; 0)$ e percorre C sempre no sentido negativo (horário).

Costumeiramente a fim de facilitar o entendimento da função de Euler, é feita a analogia de um fio (a reta real) sendo enrolado em um carretel (circunferência unitária), de forma que o zero da reta real fique posicionada sobre o ponto $(1; 0)$.

Figura 39 – Função de Euler



Podemos, enfim, definir as funções trigonométricas.

Definição 4.9. As funções *sen* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e *cos* : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são chamadas de *seno* e *cosseno* respectivamente, e são definidas pondo-se pra cada $t \in \mathbb{R}$:

$$E(t) = (cost, sent).$$

Isto é, a função cosseno é a abscissa da imagem de t na função de Euler ($x = cost$), e a função seno é a ordenada da imagem de t desta mesma função ($y = sent$).

As funções trigonométricas tangente, cotangente, secante e cossecante são derivadas das funções seno e cosseno de forma que $tgx = \dfrac{senx}{cosx}$, $cotgx = \dfrac{cosx}{senx}$, $secx = \dfrac{1}{cosx}$ e $cossecx = \dfrac{1}{senx}$. Convém lembrar que como estas funções são definidas utilizando quocientes, os valores para os quais seus denominadores são iguais a 0 não fazem parte do domínio desta função. A seguir, vemos os gráficos das funções trigonométricas abordadas.

Figura 40 – Gráfico da função $f(x) = senx$

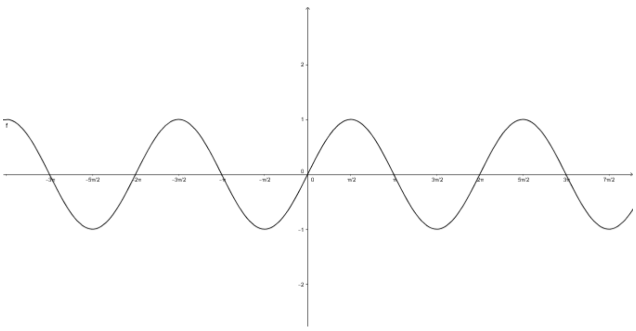


Figura 41 – Gráfico da função $f(x) = cosx$

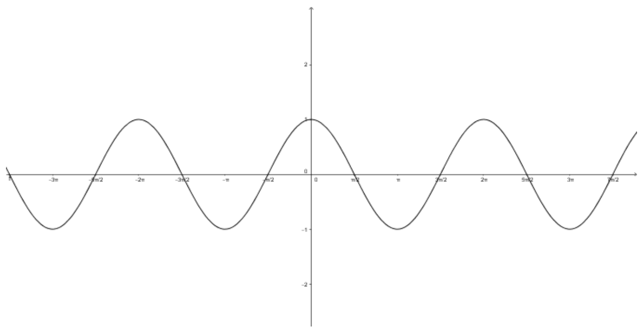


Figura 42 – Gráfico da função $f(x) = tgx$

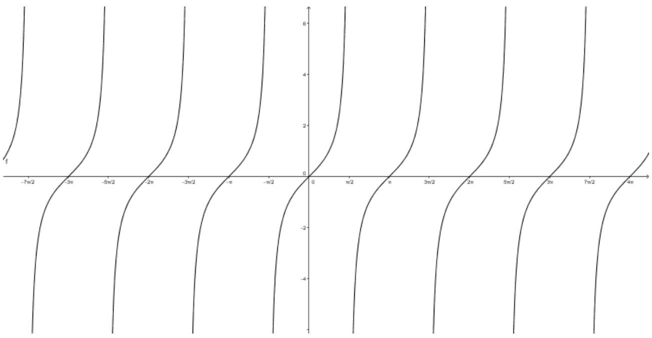


Figura 43 – Gráfico da função $f(x) = secx$

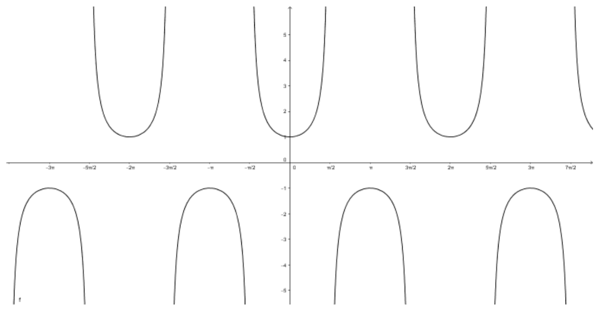


Figura 44 – Gráfico da função $f(x) = cosecx$

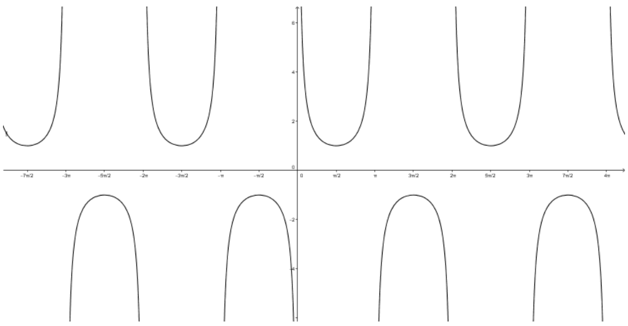
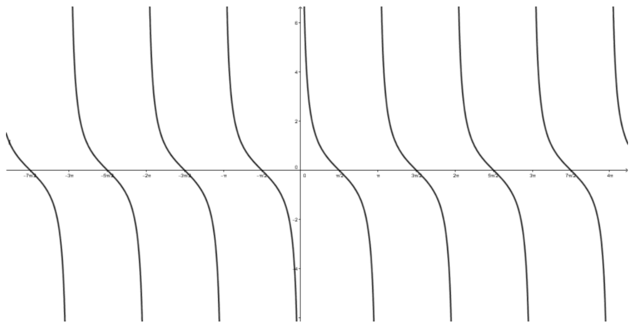


Figura 45 – Gráfico da função $f(x) = cotgx$



Convém apresentar neste momento a definição de função periódica, característica compartilhada por todas funções trigonométricas aqui abordadas.

Definição 4.10. Uma função f é dita periódica se existir um número real $p \neq 0$ tal que, quando x estiver no domínio de f, então $x + p$ também estará no domínio de f e $f(x + p) = f(x)$, em que o menor número real positivo p, tal que $f(x + p) = f(x)$ é chamado de período de f.

Podemos visualizar nos gráficos das funções trigonométricas nas figuras 41, 42, 43, 44, 45 e 46 o comportamento cíclico destas funções, de modo que $f(x) = senx$, $f(x) = cosx$, $f(x) = secx$ e $f(x) = cossecx$ possem período igual a 2π, e as funções $f(x) = tgx$ e $f(x) = cotgx$ apresentam π como período. Podemos atestar este fato utilizando as expressões do:

- Seja $k \in \mathbb{Z}$ temos que $sen(x + 2k\pi) = senx.cos2k\pi + sen2k\pi.cosx = senx.1 + 0.cosx = senx$, já que o $cos(2k\pi) = 1$ e $sen(2k\pi) = 0$. Vale notar que quando definimos o período de uma função, fica convencionado que este seria o menor valor positivo possível. Assim, nesse caso, o período é 2π, que obtemos quando $k = 1$.

- Para todo $k \in \mathbb{Z}$ observamos que o $cos(x+2k\pi) = cos(x).cos(2k\pi)-sen(x).sen(2k\pi) = cos(x).1 - sen(x).0 = cos(x)$.

- Partindo da definição de $f(x) = secx = \dfrac{1}{cos(x)}$ podemos ver, sem dificuldade, que seu período é idêntico ao da função $f(x) = cosx$.

- Analogamente, temos que $f(x) = cossecx = \dfrac{1}{sen(x)}$ possui período 2π tal qual a função $f(x) = senx$.

- Dado k inteiro, temos que $tg(x + K.\pi) = \dfrac{tgx + tgk.\pi}{1 - tgx.tgk.\pi} = \dfrac{tgx + 0}{1 - tgx.0} = tgx$; logo o período da função tangente é π.

- Como a função $f(x) = cotgx = \dfrac{1}{tgx}$, vemos que seu período também é π, como na função tangente.

Como as funções trigonométricas apresentam muita similaridade entre si, iremos fundamentar as transformações apenas na função seno, pois o mesmo resultado expresso no teorema a seguir pode ser obtido de maneira análoga para as demais.

4.6.1 Translação vertical nas funções trigonométricas

Vejamos que para o caso do gráfico da função trigonométrica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = tgx + c$, ao proceder variações no parâmetro c, de forma que tenhamos agora um $c_1 = c + K$, para um $k > 0$. O gráfico desta nova função ($f_1(x) = tgx + c_1$) será a translação vertical de K unidades em relação ao gráfico da função original no mesmo sentido do eixo das ordenadas e, caso o $c_1 = c - K$, para um $k > 0$, essa translação se dará no sentido oposto ao mesmo eixo. Visualizaremos esta situação por meio do seguinte exemplo:

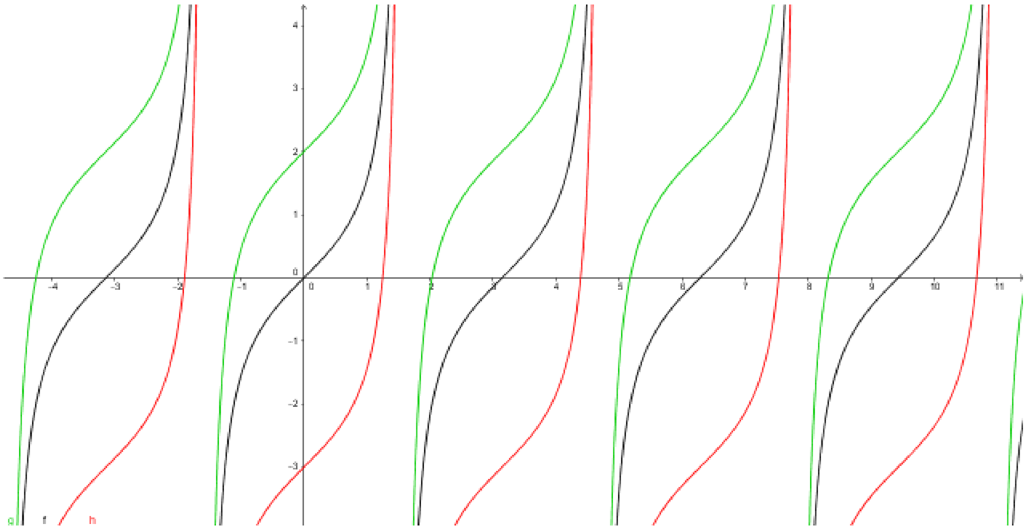
Exemplo 4.21. Na figura 46 estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = tgx$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por$g(x) = tgx \quad + 2$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = tgx \quad - 3$.

Tabela 21 – Representação algébrica das translações verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = tgx - 3$	$f(x) = tgx$	$g(x) = tgx + 2$
Transformação	$TV(f(x), -3)$	-	$TV(f(x), 2)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 46 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6.2 Translação horizontal nas funções trigonométricas

Vejamos que a translação horizontal no gráfico da função trigonométrica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = sen(x+c)$, pode ser observada ao realizar modificações no parâmetro c, de modo que se utilizarmos um $c_1 = c + K$, com um $k > 0$, o gráfico desta nova função ($f_1(x) = sen(x + c_1)$) será uma translação de K unidades em relação ao gráfico da função de origem na mesma direção mas com sentido oposto ao eixo das abcissas e caso o $c_1 = c - K$, com $k > 0$, essa translação terá mesma direção e sentido a este mesmo eixo. O exemplo seguinte nos proporcionará uma visualização mais clara:

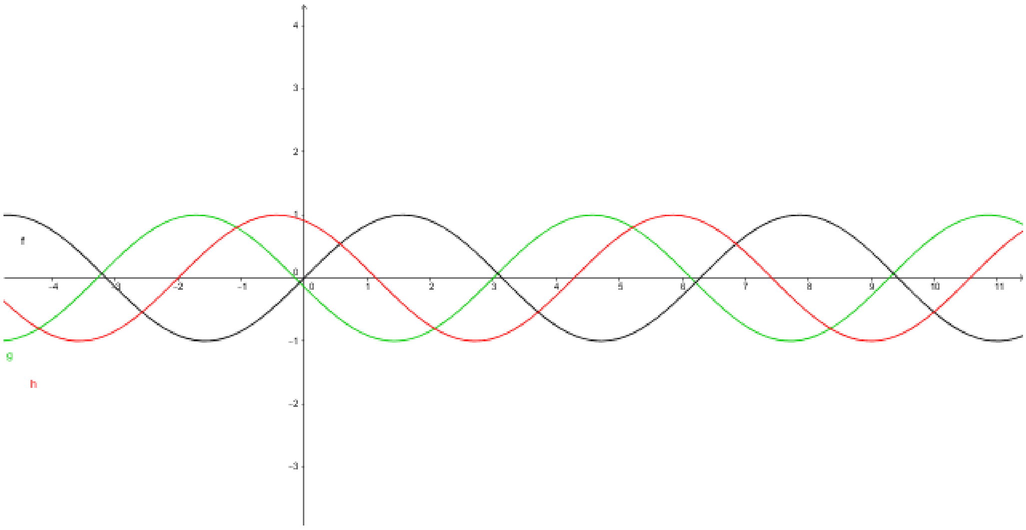
Exemplo 4.22. Na figura 47 estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = senx$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por$g(x) = sen(x - 3)$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = sen(x + 2)$.

Tabela 22 – Representação algébrica das translações horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = sen(x+2)$	$f(x) = senx$	$g(x) = sen(x-3)$
Transformação	$TH(f(x), -2)$	-	$TH(f(x), 3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 47 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6.3 Homotetia vertical nas funções trigonométricas

Seja o gráfico da função trigonométrica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a.senx$, vemos que ao variar o valor do coeficiente a, obtendo uma nova função $f(x) = a_1.senx$ o gráfico da função sofre uma homotetia vertical.

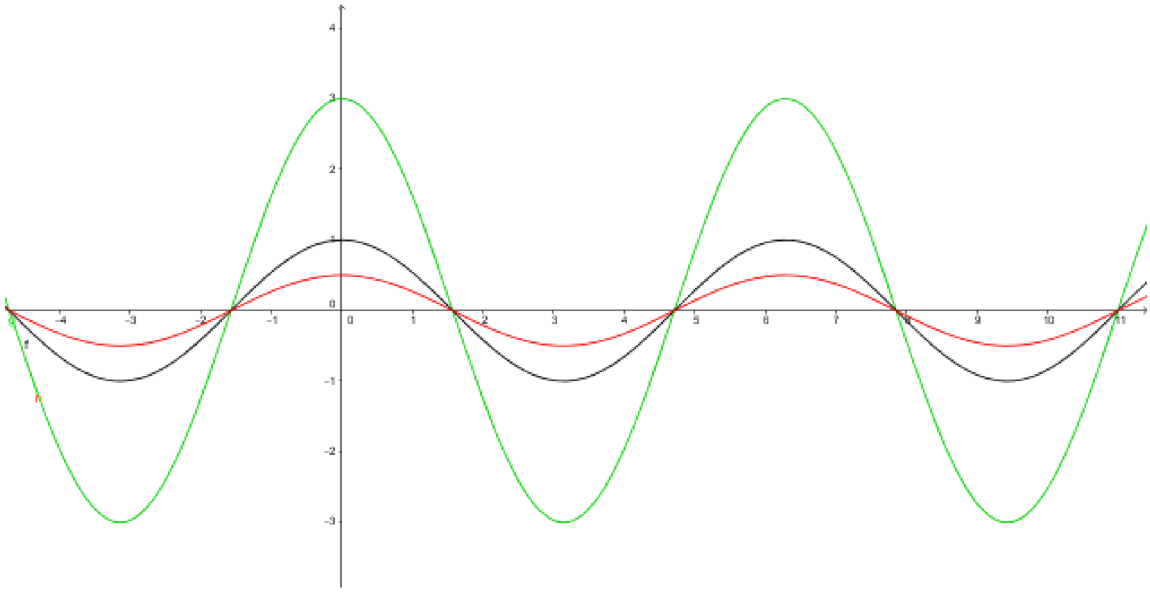
Exemplo 4.23. Para visualizar esta transformação faremos uso da função cosseno. Vejamos a figura 48, onde estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cosx$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 3.cosx$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{2}.cosx$.

Tabela 23 – Representação algébrica das homotetias verticais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = \frac{1}{2}.cosx$	$f(x) = cosx$	$g(x) = 3.cosx$
Transformação	$HV\left(f(x), \frac{1}{2}\right)$	-	$HV(f(x), 3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 48 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

4.6.4 Homotetia horizontal nas funções trigonométricas

Para analisar esta transformação sobre o gráfico da função trigonométrica $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = senb.x$, vemos que ao variar o valor do coeficiente b para um b_1 conseguimos uma nova função, onde o gráfico desta pode ser visto como uma homotetia horizontal (contração para $|b| > 1$ ou uma dilatação para $0 < |b| < 1$).

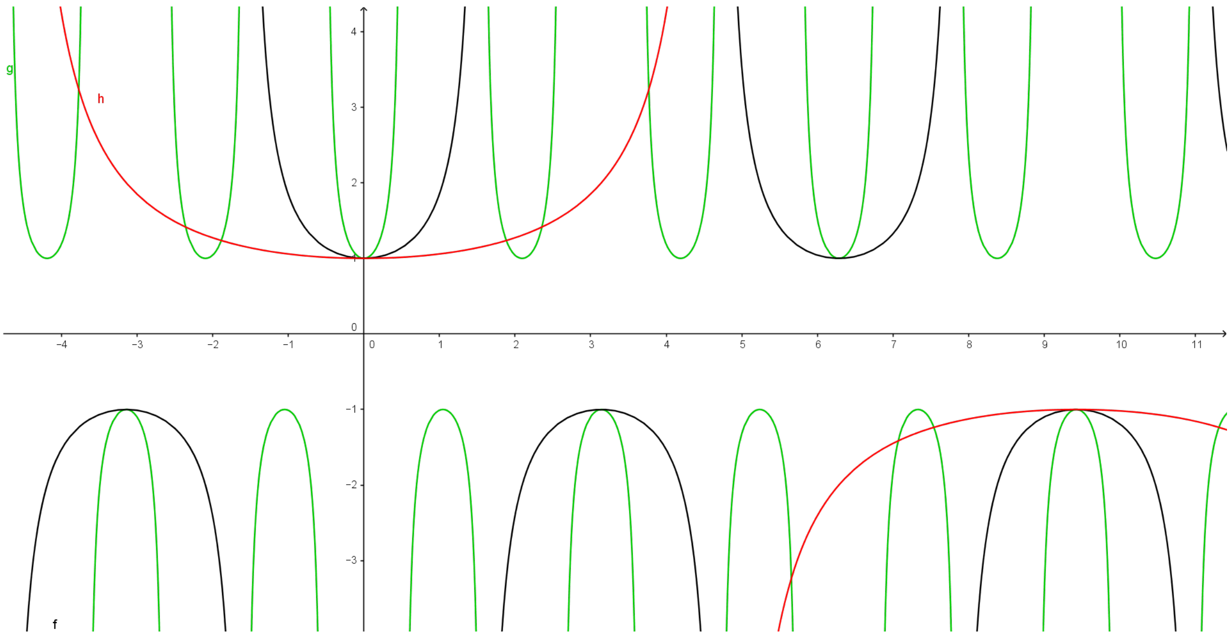
Exemplo 4.24. Vejamos a figura 49, nela estão representados os gráficos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = secx$, da função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = sec3x$ e da função $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = sec\left(\frac{1}{3}x\right)$.

Tabela 24 – Representação algébrica das homotetias horizontais.

Função	$h(x)$	$f(x)$	$g(x)$
Representação algébrica	$h(x) = sec\left(\frac{1}{3}x\right)$	$f(x) = secx$	$g(x) = sec3x$
Transformação	$HH\left(f(x), \frac{1}{3}\right)$	-	$HH(f(x), 3)$
Indicação gráfica	vermelho	preto	verde

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 49 – Representação gráfica das funções $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$



Fonte: Elaborada pelo autor.

Vemos que, pela definição da função secante, que a deformação vertical ocorre de forma contrária as demais, quando o $k > 1$ o gráfico apresenta uma compressão e quando $0 < k < 1$ ocorre uma expansão.

Como as funções trigonométricas apresentam muita similaridade entre si, iremos fundamentar a transformação apenas da função seno, pois o mesmo resultado expresso no teorema a seguir pode ser obtido de maneira análoga para as demais.

Teorema 4.7. Toda função da forma $f(x) = b.(sen\ \ (ax + c) + d)$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ pode ser obtida da função $g(x) = sen\ \ x$ por meios das transformações TV, HV, TH e HH.

Demonstração. Seja $f(x) = b.sen\ \ (ax + c) + d$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$ vemos que é possível transformar na função $g(x) = sen\ \ x$ com a sequência de operações a seguir:

- $f(x) = b.(sen\ \ (ax + c) + d)$

- $f_1(x) = TV\left(f(x), -d\right) = b.sen\ \ (ax + c)$
- $f_2(x) = HV\left(f_1(x), \dfrac{1}{b}\right) = sen\ \ (ax + c)$
- $f_3(x) = TH\left(f_2(x), -c\right) = sen\ \ (ax)$
- $f_4(x) = HH\left(f_3(x), \dfrac{1}{a}\right) = sen\ \ (x) = g(x)$

Fazendo a recíproca; é possível transformar $g(x) = sen\ \ (x)$ na função $f(x) = b.sen\ \ (ax + c) + d$ basta refazer a sequência dos passos anteriores no sentido inverso:

- $g(x) = sen\ \ (x)$
- $g_1(x) = HH\left(g(x), a\right) = sen\ \ (ax)$
- $g_2(x) = TH(g_1(x), c) = sen\ \ (ax + c)$
- $g_3(x) = HV\left(g_2(x), b\right) = b.sen\ \ (ax + c)$
- $g_4(x) = TV\left(g_3(x), d\right) = b.sen\ \ (ax + c) + d = f(x)$

$\square$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das transformações gráficas: homotetias e translações pode ser uma ferramenta muito útil para a compreensão do conceito matemático de função, por elas serem capazes de estabelecer uma relação entre as classes de funções, diferente do que muitas vezes ocorre no ambiente escolar onde as classes de funções são tratadas de forma isolada.

Objetivando praticidade no estudo das transformações gráficas, de modo a contornar dificuldades que surgem no exercício do aprendizado de conceitos e comportamentos gráficos de funções, fizemos uso do Geogebra como ferramenta educacional, utilizando-o na construção de todos os gráficos mas, principalmente, na exposição de um breve tutorial para aplicação das transformações com uma linguagem acessível inclusive aos alunos.

Acreditamos que os conteúdos tratados neste trabalho possam contribuir de maneira significativa para que o ensino de funções na educação básica possa ocorrer de forma mais instigante e agradável, auxiliando a árdua missão do matemático educador.

REFERÊNCIAS

1 ÁVILA, Geraldo. O ensino da matemática. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 23, p. 1-7, 1993.

2 BARROS, L. G. X. ; Bonomi, M.C. ; KARRER, M. . Uma Metodologia para Análise Cognitiva de Conversões de Representações Semióticas de Funções de uma Variável Real a Valores Reais. *Caminhos da Educação Matemática em Revista*, v. 1, p. 22-37, 2013.

3 BRASIL. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais pra o Ensino Médio: MEC. Disponível em:¡http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf¿. Acesso em: 22 jun. 2015.

4 DELGADO, J*et al*. *Geometria analítica*. vol. 1. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

5 DUVAL, Raymond. Traduzido por Moretti,M.T. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *REVEMAT*, Florianópolis, v.7, n.2, p. 266-297, 2012. Disponível em ¡ https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/1883 ¿. Acesso em: 12 mar. 2015.

6 GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo*. vol. 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2007.

7 IEZZI, Gelson *et al*. *Fundamentos de matemática elementar*, Vol. 1. 3 .ed. São Paulo:Atual, 1977.

8 LIMA, Elon Lages *et al*. *A matemática do ensino médio*. vol. 1, 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

9 ————— . *A matemática do ensino médio*. vol. 2, 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

10 ————— . *Temas e problemas elementares*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

11 MORDADO, Augusto C. O; CARVALHO, João B. P; CARVALHO, Paulo C. P; FERNANDES, Pedro. Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM. 2006.

APÊNDICE A – BREVE TUTORIAL SOBRE TRANSFORMAÇÕES GRÁFICAS EM FUNÇÕES UTILIZANDO O SOFTWARE GEOGEBRA

Este apêndice pretende oferecer sucintas informações com objetivo de proporcionar ao professor ou aluno a realização de todas as transformações tratadas neste trabalho utilizando o software geogebra, esta exposição ocorrerá no formato de tópicos ordenados.

1. Inicialmente deverá ser instalado o geogebra no computador, que pode ser obtido de forma gratuita acessando o site *http://www.geogebra.org/download*, observe que existe uma link de download para cada sistema operacional.

2. Abra o geogebra, ao realizar esta tarefa será visualizado a página inicial deste programa onde se encontram o campo de entrada e as janelas algébrica e gráfica.

3. O próximo passo será digitar os parâmetros (ou coeficientes) das funções, isto pode ser feito inserindo uma letra no campo de entrada (por exemplo a letra "a") e clicar no botão "enter", será mostrado pelo programa se há o desejo de criar um controle deslizante para esta letra que (no nosso caso o "a") que deve ser confirmado clicando no botão correspondente ou teclando no "enter", realizado isto, será mostrado estes controles deslizantes na janela gráfica. Este processo deve se repetir até que sejam criados os parâmetros suficientes.

Obs: Para as funções tratadas neste trabalho foram utilizados apenas 4 controles deslizantes. Por exemplo pode ser utilizado o "a"para homotetia vertical, "b"para homotetia horizontal, "c"para translação horizontal e "d"para translação vertical.

4. Em seguida iremos inserir as funções que desejamos analisar inserindo na posição dos coeficientes os mesmas letras utilizadas para criação dos controles deslizantes:

- Para função afim deve ser digitado no campo de entrada:

$$f(x) = a * x + d$$

- Para função quadrática deve ser inserido no campo de entrada a expressão (Observe que escolhemos a forma canônica, se necessário busque na seção onde abordamos a função quadrática para saber a associação dos coeficientes nesta forma de representação e a $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$):

$$g(x) = a * (x + c)^2 + d$$

- Para função exponencial digitamos no campo de entrada:

$$h(x) = a * 2^{b*x-c} + d$$

Obs: Note que não foi criado um controle deslizante para a base da função exponencial, neste exemplo escolhi o 2 que pode ser alterado por qualquer outro número real positivo. Esta inserção de um novo controle deslizante para a base da função exponencial pode ser realizada pelo leitor.

- Para a função logarítmica insere-se a expressão:

$$i(x) = a * ln(b * x + c) + d$$

- Está listada a seguir como devem ser inseridas as funções trigonométricas:

seno:

$$j(x) = a * sen(b * x - c) + d$$

cosseno:

$$j(x) = a * cos(b * x - c) + d$$

tangente:

$$j(x) = a * tg(b * x - c) + d$$

cotangente:

$$j(x) = a * cotg(b * x - c) + d$$

secante:

$$j(x) = a * sec(b * x - c) + d$$

cossecante:

$$j(x) = a * cosec(b * x - c) + d$$

5. Deverão estar expressos todas as representações algébricas e gráficas das funções inseridas por meio das expressões apresentadas no item anterior e as barras do conde os parâmetros a,b,c e d que inicialmente possuem valor igual a 1.

6. Caso tenha inserido todos as funções listadas mas deseje trabalhar em determinado momento com uma ou um número menor destas as demais podem ser ocultas clicando botão circular que fica a esquerda de sua representação algébrica na janela de álgebra.

7. Outro ponto se refere a configuração do controle deslizante que pode ser feita com um duplo clique com a tecla esquerda do mouse, onde podem ser alterado por exemplo o intervalo de variação do parâmetro.

É importante deixar claro que o software geogebra é capaz de realizar tarefas bem mais sofisticadas do que a expressa neste simples tutorial mas acredito que este seja suficiente para realizar as transformações expressas neste trabalho e auxiliar o professor e aluno de matemática em sua prática educacional.

APÊNDICE B–ATIVIDADES SUGERIDAS

No decorrer deste trabalho pretendia aplicar algumas atividades em uma das turmas de 1º ano na escola Tiradentes em Juazeiro do Norte, o qual leciono, e comparar os resultados com as demais, como este aplicação não ocorreu apresento as seguintes sugestões de atividades que podem ser desenvolvidas. Deixando também um apelo que o professor com sua criatividade elabore outros exercícios que busquem atingir seus objetivos.

1. Insira as funções afim, quadrática, exponencial, logarítmica e seno(se desejar trabalhe com outras funções trigonométrica) no geogebra seguindo as instruções o tutorial apresentado no apêndice A. Selecione cada função para que fique visível uma por vez na janela gráfica altere livremente variações nos coeficientes usando o controle deslizante.

2. Tomemos inicialmente a função afim. Utilizando o controle deslizante altere os valores de de forma que o a seja igual a 1 e o d igual a 0.

   a) Qual o formato gráfico observado?
   b) Faça variações apenas sobre o parâmetro a explique o que ocorre no gráfico da função?
   c) O que você observa quando o a assume valores positivos ou negativos?
   d) Realizando variações sobre o parâmetro d expresse o que acontece?
   e) É possível notar alguma diferença quando o d assume valores positivos ou negativos?

3. Observe seguintes funções $f(x) = 2x$, $g(x) = -3x + 9$ e $h(x) = 8x + 2$. Sem construir seus gráficos responda:

   a) Identifique quais funções são crescentes ou decrescentes?
   b) Entre a função $f(x)$ e $g(x)$ qual possui maior inclinação?
   c) Em que valores estas funções interceptam o eixo das ordenadas (y)?

4. Para um simples esboço do gráfico da função $g(x) = 2x - 3$ a partir do gráfico de $f(x) = 2x$. Explicando em passos como você faria? E se fosse a partir da função $f(x) = x$?

5. Utilizando a função quadrática expressa da forma Utilizando o controle deslizante altere os valores de de forma que o $a = 1$,$c = 0$ e $d = 0$.

a) Qual o formato gráfico observado?

b) Faça variações apenas sobre o parâmetro a explique o que ocorre no gráfico da função?

c) O que você observa quando o a assume valores positivos ou negativos?

d) Realizando variações sobre o parâmetro c expresse o que acontece?

e) É possível notar alguma diferença quando o c assume valores positivos ou negativos?

f) Realizando variações sobre o parâmetro d expresse o que acontece?

g) É possível notar alguma diferença quando o d assume valores positivos ou negativos?

6. Na função quadrática escolha uma valor constante para cada parâmetro a,c e d de modo que o $a > 0$. Quais são os intervalos de crescimento e decrescimento. Ao realizar variações em a fazendo o uso de apenas números positivos estes intervalos encontrados são alterados? E ao variar o parâmetro a entre os número negativos?

7. Na função quadrática escolha uma valor constante para cada parâmetro a,c e d. Quais são os intervalos de crescimento e decrescimento. Ao realizar variações em d estes intervalos encontrados são alterados? E ao variar o parâmetro c?

8. Utilizando quadrática escolha uma valor constante para cada parâmetro a,c e d. Observe a abscissa do vértice (X_v) e em seguida realize variações individuais dos coeficientes a,c e d. O X_v sofre alterações em os parâmetros?

9. Seja a função $f(x) = -3cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 2$ descreva o que ocorre ao fazer variações em seus parâmetros como mostrado em cada passo abaixo até que consigamos a função $f(x) = cosx$.

   $f(x) = -3cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ____________________

   $f(x) = -3cos\,(2x)$ ____________________

   $f(x) = 3cos\,(2x)$ ____________________

   $f(x) = cos\,(2x)$ ____________________

   $f(x) = cos\,(x)$ ____________________