UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

Diferenciabilidade: Aspectos Teóricos e Aplicações nas Áreas Econômica e Administrativa

Autora:

Simone Rodrigues Romero

Orientador:

Dr. Vando Narciso

Dourados - MS

2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MATO GROSSO DO SUL
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT
UNIDADE DE DOURADOS

Diferenciabilidade: Aspectos Teóricos e Aplicações nas Áreas Econômica e Administrativa

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Centro de Ciências Exatas, UEMS, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre.

Simone Rodrigues Romero

Dourados, MS
2016

R672d Romero, Simone Rodrigues

Diferenciabilidade: aspectos teóricos e aplicações nas áreas econômica e administrativa / Simone Rodrigues Romero. - Dourados, MS: UEMS, 2016.

45 f.

Dissertação (Mestrado) - Matemática - Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, 2016.

Orientador: Dr. Vando Narciso.

1. Diferenciabilidade 2. Marginalidade 3. Elasticidade I. Título

CDD 23.ed. - 511.326

Diferenciabilidade: Aspectos Teóricos e Aplicações nas Áreas Econômica e Administrativa

Simone Rodrigues Romero

Banca Examinadora:

Vando Narciso

Prof. Dr. Vando Narciso

Maristela Missio

Profa. Dra. Maristela Missio

Prof. Dr. Sérgio Rodrigues

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela presença constante e pela proteção em todos os momentos, apesar de tão poucas vezes reconhecidas.

A minha mãe Martina Rodrigues por me ensinar valores e princípios que me ajudaram no meu crescimento pessoal e profissional, me incentivando sempre a buscar meus propósitos sem que eu me afastasse do caminho de Deus.

A Leandro Aparecido Antunes Steffen por estar ao meu lado em todos os momentos me apoiando, pela compreensão infinita e pelo carinho constante.

A Lourenço Alves Sobrinho uma pessoa especial que faz parte da minha vida dando-me apoio e muito carinho nesta caminhada.

Aos doutores, mestres e professores meu profundo respeito e agradecimento pela contribuição para está conquista, transmitindo seus conhecimentos e experiências, em especial aos professores: Dr. Vando Narciso por indicar o rumo a seguir tornando possível a realização deste trabalho, ao Dr. Otávio José Neto Tinoco Neves dos Santos que auxiliou na ponte entre o conhecimento abstrado de Cálculo com as aplicações em Economia, ao Dr. Cosme E. Rubio Mercedes e a Dra. Maristela Missio pelo carinho e apoio.

A todos os amigos que compartilharam comigo os anos de estudo, sabendo cultivar a amizade que o tempo fortaleceu.

A Adriana Rita Sangalli pela gentileza que tratava os assuntos.

Aos meus colegas que acreditaram no sucesso desta etapa através do companheirismo e confiança. Carinhosamente estiveram do meu lado ajudando no decorrer do curso. Em especial Mariana Manfroi Rodrigues e Lidiane Macena Marques Rodrigues que nos momentos mais críticos estiveram junto a mim incentivando e apoiando. E a todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho de alguma forma.

Meus sinceros agradecimentos.

Resumo

Dada uma função $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo não degenerado da reta $\mathcal{I} \ni q$. O limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h}$$

é definido como a derivada da função f no ponto q e é denotado por $f'(p)$. Este limite surge naturalmente nas mais diversas Ciências: Física, Biologia, Química, Estatística, dentre muitas outras. Isto acontece pois em cada contexto a função f se apresenta com seu significado específico. Por exemplo, na Física a função f pode representar uma função deslocamento e, neste caso, o limite representa a velocidade instantânea em q. Este propoem-se a dissertar sobre trabalhar as aplicações da derivada no contexto das áreas econômica e administrativa. Trataremos das duas principais aplicações que estão associadas aos conceitos de marginalidade e elasticidade.

Palavras-chave: Diferenciabilidade, Marginalidade, Elasticidade.

Abstract

Given an function $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ defined on a non-degenerated interval line $\mathcal{I} \ni q$. The limit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h}$$

is defined as the derivative of the function f at the point q and is denoted by $f'(q)$. This limit arises naturally in various sciences: Physics, Biology, Chemistry, Statistics, among many others. This is because in each context the function f presents with its specific meaning. For example, in physics, the function f can represent a displacement function and, in this case, the threshold is the instantaneous velocity q.This propose to speak about the work applications derived in the context of economic and administrative areas. We will treat the two primcipais applications that are associated with the concepts of marginality and elasticity.

Keywords: Differentiability, marginality, Elasticity.

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Um limite da forma
$$\lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q},$$
onde $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função definida num intervalo $\mathcal{I}$ da reta com $q \in \mathcal{I}$ aparece naturalmente nas mais diversas Ciências, tais como: Física, Biologia, Economia, Estatística, Química e até mesmo Psicologia e Ciências Políticas. De maneira técnica, este limite quando existe é denotado por $f'(q)$ e é denominado a derivada da função f no ponto q.

Na grande maioria dos livros de Cálculo Diferencial e Integral, esse limite é trabalhado de forma mais técnica do que aplicada, apresentando sua definição abstrata, suas propriedades e resultados. Isto se deve ao fato que os livros são produzidos para atenderem os mais diversos cursos que necessitam do Cálculo como pré-requisito. Mas, em cada Ciência o limite acima está inserido num contexto diferente, por exemplo, na Física ele pode representar a velocidade instantânea de uma partícula em movimento, na biologia pode representar a taxa de envelhecimento de um ser vivo, e nas ciências enconômicas e administrativa está, associado a conceitos como o de marginal e elasticidade. Um outro fator que soma para o tratamento mais técnico do que aplicado deste conceito em sala de aula é que os professores tem uma formação mais teórica do que aplicada.

Especificamente na disciplina de Métodos Quantitativos (Cálculo Diferencial e Integral 1) no curso de Economia da UEMS em Ponta Porã no ano de 2015, precisava fazer a ponte entre os conceitos abstratos de Cálculo com suas aplicações à Economia. Assim tivemos que procurar outras bibliografias de Matemática aplicada a economia e administração e aprender conceitos nestes contextos.

Tomando esta experiência como motivação, neste trabalho propomos tratar apenas do tema Diferenciabilidade. Apresentamos seu conceito técnico e como aparecem suas aplicações na Economia e Administração. No cápitulo 2 faremos uma revisão de Diferenciabilidade e seus principais resultados. No cápitulo 3, apresetaremos as duas principais aplicações da Derivada em Economia e Administração que estão associadas aos conceitos de Marginalidade e Elasticidade.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Neste capítulo faremos uma revisão dos resultados básicos da teoria de diferenciabilidade para funções de uma variável real. A teoria utilizada aqui pode ser encontrada em [1, 2, 3, 4, 5, 8].

2.1 A Derivada de Uma Função Real

Seja $\mathcal{I}$ um intervalo não degenerado da reta, isto é, um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ não reduzido a um ponto. O intervalo $\mathcal{I}$ pode ser aberto, fechado ou semi-fechado, finito ou infinito.

Definição 2.1 *Uma função $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua num ponto $q \in \mathcal{I}$ quando*

$$\lim_{x \to q} f(x) = f(q).$$

Se q é um ponto extremo do intervalo, o limite é o limite lateral respectivo. Por exemplo, se $\mathcal{I} = [a, b]$ e $q = a$ ou $q = b$, denotamos, respectivamente

$$\lim_{x \to a^+} f(x) \quad ou \quad \lim_{x \to b^-} f(x).$$

Definição 2.2 *Seja $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Para todo $q \in \mathcal{I}$, seja*

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(q)}{x - q}, \quad x \in \mathcal{I},\ x \neq q. \tag{2.1}$$

Define-se a derivada de f no ponto q e denota-se por $f'(q)$ o seguinte limite

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \phi(x). \tag{2.2}$$

Escrevendo $h = x - q$, ou $x = q + h$, a derivada de f no ponto q torna-se o limite

$$f'(q) = \lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h}.$$

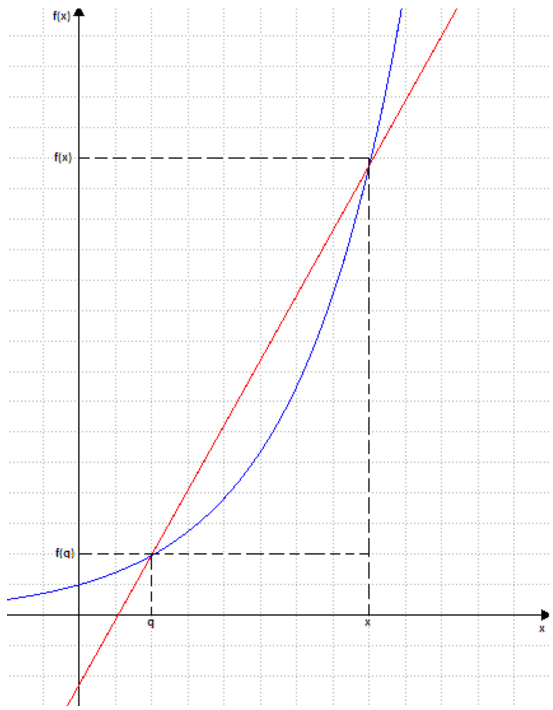
(i) Se f' é definida em q, diz-se que f é derivável nesse ponto.

(ii) Se f' é definida em todos os pontos de um conjunto E, tal que $E \subset \mathcal{I}$, diz-se que f é derivável em E.

(iii) Se f é definida em um intervalo aberto (a, b) e se $a < q < b$, então $f'(q)$ está definida, mas $f'(a)$ e $f'(b)$ não são definidas.

2.2 Interpretação Geométrica

Seja $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathcal{I}$ e assuma que $f'(x)$ existe para todo $x \in \mathcal{I}$. Fixemos $q \in \mathcal{I}$. Para entender geometricamente o significado de $f'(q)$, considere o ponto $A = (q, f(q))$ no plano xy e outro ponto qualquer $B = (x, f(x))$. Denotemos por S a reta que passa por esses pontos.



Temos como coeficiente angular de S "α_S"é dado por

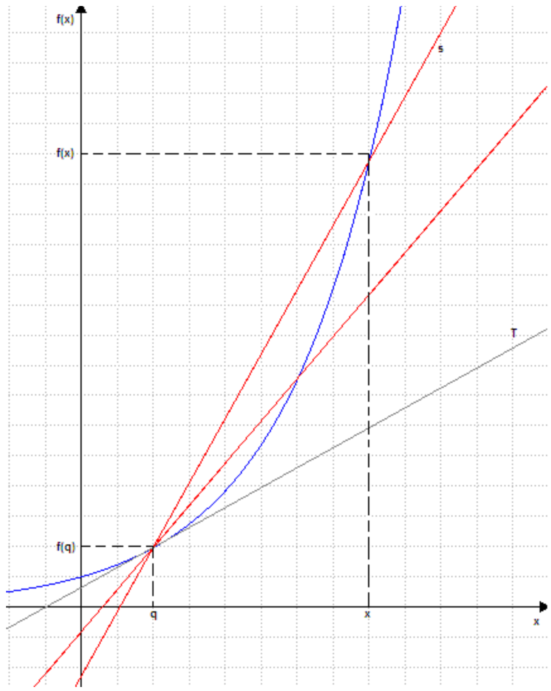
$$\alpha_S = \frac{f(x) - f(q)}{x - q}.$$

A medida que o ponto B se move em direção a A ao longo da função, a reta secante gira ao redor do ponto A e se aproxima de uma reta fixa em A. Essa resta fixa, é posição limite das retas secantes quando B se aproxima de A, ou seja, $x \to q$. Quando isso ocorre temos que o coeficinte angular de S tende a $f'(q)$, onde

$$f'(q) = \lim_{x \to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}.$$

E essa reta fixa é a reta tangente T de equação:

$$f(x) - f(q) = f'(q).(x - q).$$



Isto mostra que, geometricamente a derivada de f no ponto q representa o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(q, (f(q))$.

2.3 Alternativa Para a Definição de Derivada em $\mathbb{R}$

Se $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ possui derivada num ponto $q \in \mathcal{I}$, temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h} = f'(q).$$

O que é equivalente a dizer que

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(q+h) - f(q)}{h} - f'(q) \right| = 0 \equiv \lim_{h \to 0} \frac{|f(q+h) - f(q) - f'(q) \cdot h|}{|h|} = 0.$$

Note que, definindo a função $T_{f'(q)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $T_{f'(q)}(h) = f'(q) \cdot h$ temos que, $T_{f'(q)}$ é uma transformação linear. De fato, usando as propriedades distributiva, comutativa e associativa dos números reais, obtemos

$$\begin{aligned} T_{f'(q)}(h_1 + \alpha h_2) &= f'(q) \cdot (h_1 + \alpha h_2) = f'(q)h_1 + \alpha(f'(q)h_2) \\ &= T_{f'(q)}(h_1) + \alpha T_{f'(q)}(h_2), \end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$. Isto mostra que, se f é diferenciável num ponto $q \in \mathcal{I}$ existe uma transformação linear $T_{f'(q)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(q+h) - f(q) - T_{f'(q)}(h)|}{|h|} = 0.$$

Reciprocamente, supondo que exista uma transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(q+h) - f(q) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

Desde que T é uma transformação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ temos que $T(h) = \alpha h$ para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(q+h) - f(q) - \alpha h|}{|h|} = 0 \equiv \lim_{h \to 0} \left| \frac{f(q+h) - f(q)}{h} - \alpha \right| = 0.$$

O que implica que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h} = \alpha.$$

Isto mostra que f é diferenciável em q e $f'(q) = \alpha$.

O que foi exposto acima pode ser enunciado no seguinte resultado.

Teorema 1 *Sejam $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{I}$ e $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. Então, f é diferenciável no ponto q se, e somente se, existe uma transformação linear $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(q+h) - f(q) - T(h)|}{|h|} = 0.$$

No caso afirmativo, a transformação $T = f'(q)$ é a derivada de f no ponto q.

Observação 2.1 *O Teorema 1 é importantíssimo quando vamos estender o conceito de derivada para funções $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ onde Ω é um conjunto aberto e $n \geq 2$. Note que se tentarmos a usar definição*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h} = f'(q)$$

este quociente não faz sentido em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 2$, pois, neste contexto h é um vetor, e não faz sentido a divisão por h. Assim, uma alternativa para a definição de derivada *para funções de mais de uma variável real é usar o Teorema 1 e definir a derivada neste contexto da seguinte forma:*

"Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $q \in \Omega$ e $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é diferenciável no ponto q quando existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} \frac{|f(q+h) - f(q) - T(h)|_{\mathbb{R}}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

No caso afirmativo $T = df(a)$ onde

$$df(q) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(q)}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f(q)}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{1\times n} \tag{2.3}$$

Aqui $\frac{\partial f(q)}{\partial x_i}$ representa a derivada de f no ponto q em relação a variável x_i.

2.4 Função Resto

A existência da derivada de uma função f num ponto $q \in \mathcal{I}$ nos mostra que localmente em torno de q, a função f se exprime como um polinômio de grau ≤ 1 mais um resto que é "suficientemente pequeno". De fato, seja $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $q \in \mathcal{I}$, mas q não extremo de $\mathcal{I}$. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(q-\varepsilon, q+\varepsilon) \in \mathcal{I}$. Assim, está bem definida a "função resto" $R_{f'(q)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ dada por

$$R_{f'(q)}(h) = f(q+h) - f(q) - f'(q) \cdot h. \tag{2.4}$$

Note que, da definição de $R_{f'(q)}$ podemos escrever

$$f(q+h) = \underbrace{f(q)}_{constante} + \underbrace{f'(a)}_{constante} \cdot h + R_{f'(q)}(h)$$

Ou seja, nas proximidades de q a função f se comporta como uma função de grau ≤ 1. Além disso, de (2.4) dividindo ambos os lados por h e tomando o limite quando $h \to 0$, obtemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{R_{f'(q)}(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h} - f'(q) = f'(q) - f'(q) = 0.$$

o que mostra que a "função resto" $R_{f'(q)}$ tende para zero muito mais rápido do que h. O que confirma o que foi afirmado no incio desta seção.

2.5 Propriedades Básicas

Nesta seção estabeleceremos as propriedades mais básicas para a derivada num ponto. Primeiramente, mostraremos que não existe a derivada num ponto onde a função é descontínua.

Teorema 2 *Seja f definida em $\mathcal{I}$. Se f é derivável em um ponto $q \in \mathcal{I}$, então f é continua em q.*

Demonstração: Para provar que f é continua no ponto q, mostraremos que $f(q)$ e $\lim_{x\to q} f(x)$ existe e $\lim_{x\to q} f(x) = f(q)$. Com efeito, Por hipótese, f é derivável em q, então $f(q)$ precisa existir, pois caso contrário

$$f'(q) = \lim_{x\to q} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

não teria sentido, logo $f(q)$ existe. Considerando

$$\lim_{x\to q}[f(x) - f(q)]$$

temos

$$\begin{aligned} \lim_{x\to q}[f(x) - f(q)] &= \lim_{x\to q} \frac{[f(x) - f(q)]}{x - q} \cdot (x - q) \\ &= \lim_{x\to q} \frac{[f(x) - f(q)]}{t - q} \cdot \lim_{x\to q}(x - q) = f'(q) \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{x\to q} f(x) &= \lim_{x\to q}[f(x) - f(q) + f(q)] = \lim_{x\to q}[f(x) - f(q)] + \lim_{x\to q} f(q) \\ &= 0 + \lim_{x\to q} f(q) = f(q). \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\lim_{x\to q} f(x) = f(q).$$

Portanto f é continua em q. $\square$

Observação 2.2 *A recíproca não é verdadeira. Basta considerar a função $f(x) = |x|$. É fácil ver que f é contínua em 0 mas não existe o limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Assim, a contra-reciproca deste teorema nos garante que, se f for descontínua num ponto q então f não é derivável em q.

Definição 2.3 *Seja f definida em $\mathcal{I}$. Se f é descontínua em um ponto $q \in \mathcal{I}$ e se $\lim_{x\to q^+} f(x)$ e $\lim_{x\to q^-} f(x)$ existem, sendo limite de f à direita e à esquerda, respctivamente, diz que f tem um descontinuidade simples ou descontinuidade de primeira espécie em q. Caso contrário diz que a descontinuidade é de segunda espécie. Existem dois tipos de descontinuidade simples:*

(i) $\lim_{t\to q^+} f(x) \neq \lim_{x\to q^-} f(x)$, *neste caso o valor de $f(q)$ não importa.*

(ii) $\lim_{x\to q^+} f(x) = \lim_{x\to q^-} f(x) \neq f(q)$

Teorema 3 *Sejam $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ deriváveis no ponto $q \in \mathcal{I}$. Então $f + g$, $f \cdot g$ e $\dfrac{f}{g}$ (com $g(q) \neq 0$) são deriváveis em q, e*

(i) $(f + g)'(q) = f'(q) + g'(q)$

(ii) $(f \cdot g)'(q) = f'(q) \cdot g(q) + f(q) \cdot g'(q)$

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(q) = \dfrac{f'(q) \cdot g(q) - f(q) \cdot g'(q)}{[g(q)]^2}$ *com $g(q) \neq 0$.*

Demonstração:

(i) Seja $h = f + g$, temos que

$$\begin{aligned} h(x) - h(q) &= [f(x) + g(x)] - [f(q) + g(q)] = f(x) + g(x) - f(q) - g(q) \\ &= f(x) - f(q) + g(x) - g(q) \end{aligned}$$

Dividindo a expressão por $x - q$

$$\frac{h(x) - h(q)}{x - q} = \frac{f(x) - f(q)}{x - q} + \frac{g(x) - g(q)}{x - q}$$

e aplicando o limite com $x \to q$, obtemos

$$\lim_{x\to q}\frac{h(x)-h(q)}{x-q} \;=\; \lim_{x\to q}\frac{f(x)-f(q)}{x-q}+\lim_{x\to q}\frac{g(x)-g(q)}{x-q}.$$

Logo

$$h'(q)=f'(q)+g'(q).$$

(ii) Seja $h = f\cdot g$, temos

$$\begin{aligned} h(x)-h(q) &= f(x)\cdot g(x)-f(q)\cdot g(q)\\ &= f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(q)+f(x)\cdot g(q)-f(q)\cdot g(q)\\ &= f(x)\cdot[g(x)-g(q)]+g(q)\cdot[f(x)-f(q)]. \end{aligned}$$

Dividindo a expressão por $x-q$

$$\frac{h(x)-h(q)}{x-q} \;=\; \frac{f(x)\cdot[g(x)-g(q)]}{x-q}+\frac{g(q)\cdot[f(x)-f(q)]}{x-q}$$

e aplicando o limite com $x \to q$, temos

$$\lim_{x\to q}\frac{h(x)-h(q)}{x-q} \;=\; \lim_{x\to q}\frac{f(x).[g(x)-g(q)]}{x-q}+\lim_{x\to q}\frac{g(q).[f(x)-f(q)]}{x-q}.$$

Logo

$$h'(q) \;=\; f'(q)\cdot g(q)+f(q)\cdot g'(q).$$

(iii) Seja $h=\dfrac{f}{g}$ e seguindo o mesmo raciocínio dos itens (i) e (ii), temos

$$\begin{aligned} h(x)-h(q) &= \frac{f(x)}{g(x)}-\frac{f(q)}{g(q)}=\frac{f(x)\cdot g(q)-f(q)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(q)}\\ &= \frac{f(x)\cdot g(q)-f(q)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)}{g(x)\cdot g(q)}\\ &= \frac{1}{g(x)\cdot g(q)}[f(x)\cdot g(x)-f(q)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g(q)]. \end{aligned}$$

Isto implica que

$$\frac{h(x)-h(q)}{x-q} \quad = \quad \frac{1}{g(x)\cdot g(q)}\left[\frac{f(x)\cdot g(x)-f(q)\cdot g(x)}{x-q}-\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(q)}{x-q}\right].$$

Aplicando o limite com $x \to q$ obtemos

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to q}\frac{h(x)-h(q)}{x-q}\\&=\lim_{x\to q}\frac{1}{g(x)\cdot g(q)}\left[\lim_{x\to q}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(q)\cdot g(x)}{x-q}-\lim_{x\to q}\frac{f(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g(q)}{x-q}\right].\end{aligned}$$

Logo

$$h'(q) \quad = \quad \frac{f'(q)\cdot g(q)-f(q)\cdot g'(q)}{[g(q)]^2}.$$

□

Exemplo 2.1 *A derivada de qualquer constante é zero. Se $f(x) = x$ para todo x, temos que $f'(x) = 1$ e aplicando diretamente os itens (ii) e (iii) podemos mostrar que x^n é diferenciável, e que sua derivada é nx^{n-1} para todo inteiro n. Se $n < 0$ devemos restringir $x \neq 0$. Potanto todo polinômio e função racional é derivável, exceto em pontos em que seu denominador se anula.*

Teorema 4 (Regra da cadeia) *Sejam $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$, $f(\mathcal{I}) \subset \mathcal{J}$, $q \in \mathcal{I}$, $p = f(q) \in \mathcal{J}$. Se existem $f'(q)$ e $g'(p)$ então $gof : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto q e*

$$(gof)'(q) = g'(p)\cdot f'(q).$$

Demonstração: Pela definição de derivada, temos que

$$\begin{aligned}f(q+h) = f(q) + f'(q)\cdot h + R_{f'(q)}(h), &\quad \text{com} \quad \lim_{h\to 0}\frac{R_{f'(q)}(h)}{h} = 0\\ g(p+k) = g(p) + g'(p)\cdot k + R_{g'(p)}(k), &\quad \text{com} \quad \lim_{k\to 0}\frac{R_{g'(p)}(k)}{k} = 0.\end{aligned}$$

Tomando $k = f(q+h) - f(q)$, temos

$$k = f(q+h) - f(q) = f'(q)\cdot h + R_{f'(q)}(h)$$

Note que, $f(q+h) = p + k$ e

$$\begin{aligned}
(gof)(q+h) &= g[f(q+h)] = g[p+k] = g(p) + g'(p) \cdot k + R_{g'(p)}(k) \\
&= g(p) + g'(p) \cdot [f'(q) \cdot h + R_{f'(q)}(h)] + R_{g'(p)}(k) \\
&= g(p) + g'(p) \cdot f'(q) \cdot h + g'(p) \cdot R_{f'(q)}(h) + R_{g'(p)}(k) \\
&= g(f(q)) + g'(f(q)) \cdot f'(q) \cdot h + [g'(p) \cdot R_{f'(q)}(h) + R_{g'(p)}(k)] \\
&= gof(q) + g'(f(q)) \cdot f'(q) \cdot h + R(h)
\end{aligned}$$

onde $R(h) = g'(p) \cdot R_{f'(q)}(h) + R_{g'(p)}(k)$ com $\lim_{h\to 0} \frac{\Theta(h)}{h} = 0$. Portanto, gof é derivável em q e $(gof)'(q) = g'(f(q)) \cdot f'(q)$. Para o cálculo do limite $\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{h}$ usamos que $h \to 0$ implica $k = f(q+h) - f(q) \to 0$.

$\square$

Corolário 1 (Derivada da função inversa) *Seja $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathcal{J} \subset \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g = f^{-1} : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$. Suponha que f é derivável num ponto $q \in \mathcal{I}$ e g é contínua num ponto $p = f(q)$, então, g é derivável no ponto p se, e somente se, $f'(q) \neq 0$. No caso afirmativo, $g'(p) = \frac{1}{f(q)}$.*

Demonstração: Suponha que $f'(q) \neq 0$. Usando que g é contínua em p temos que $\lim_{y\to p} g(y) = g(p)$. Logo,

$$\lim_{y\to p} \frac{g(y) - g(p)}{y - p} = \lim_{y\to p} \frac{g(y) - q}{\underbrace{f(g(y))}_{g=f^{-1}} - f(q)} = \lim_{y\to p} \left[\frac{f(g(y)) - f(q)}{g(y) - q} \right] = \frac{1}{f'(q)}.$$

Isto mostra que $g'(p)$ existe e $g'(p) = \frac{1}{f'(q)}$.

Reciprocamente, suponha que g é derivável em p. Pela definição de função composta e usando que g é inversa de f, temos que

$$gof = Id_{\mathcal{I}}.$$

Agora pela regra da cadeia, Teorema 4, temos que

$$g'(p) \cdot f'(q) = 1.$$

Portanto, $f'(q) \neq 0$ e $g'(p) = \frac{1}{f'(q)}$.

$\square$

2.6 Resultados em Intervalos $\mathcal{I} = [a, b]$

Definição 2.4 *Dizemos que f tem um máximo local, (ou mínimo local) em $q \in \mathcal{I}$ se existe $\delta > 0$ tal que $f(q) \leq f(x)$ (ou $f(q) \geq f(x)$) para todo $x \in \mathcal{I} \cap (q - \delta, q + \delta)$.*

Teorema 5 (Rolle) *Seja f definida em $\mathcal{I} = [a, b]$, se f tem um máximo local em $q \in (a, b)$ e se $f'(q)$ existir então $f'(q) = 0$.*

Demonstração:

Como (a, b) é um intervalo aberto e f tem um máximo local em q é possível obter $\delta > 0$ tal que

$$f(q) \geq f(x) \quad \text{para todo} \quad x \in (q - \delta, q + \delta) \subset \mathcal{I}.$$

Se $q - \delta < x < q$, então

$$\frac{f(x) - f(q)}{x - q} \geq 0$$

e fazendo $x \to q^-$

$$\lim_{x \to q^-} \frac{f(x) - f(q)}{x - q} \geq 0.$$

Por outro lado, se, $q < x < q + \delta$, então

$$\frac{f(x) - f(q)}{x - q} \leq 0$$

e fazendo $x \to q^+$

$$\lim_{x \to q^+} \frac{f(x) - f(q)}{x - q} \leq 0.$$

Como $f'(q)$ existe, devemos ter

$$\lim_{x \to q^-} \frac{f(x) - f(q)}{x - q} = \lim_{x \to q^+} \frac{f(x) - f(q)}{x - q}$$

o que implica $f'(q) = 0$.

Para o mínimo local é analogo. $\square$

Teorema 6 (Teorema do valor médio generalizado) *Se f e g são funções reais continuas em $\mathcal{I} = [a, b]$ e deriváveis em (a, b), existe um ponto $x \in (a, b)$ tal que:*

$$[f(b) - f(a)].g'(x) = [g(b) - g(a)].f'(x)$$

Demonstração:

Seja h uma função continua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) tal que

$$h(t) = [f(b) - f(a)].g(t) - [g(b) - g(a)].f(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

e

$$\begin{aligned} h'(t) &= [f(b) - f(a)]'.g(t) + [f(b) - f(a)].g'(t) \\ &\quad - \{[g(b) - g(a)]'.f(t) + [g(b) - g(a)].f'(t)\} \\ &= 0.g(t) + [f(b) - f(a)].g'(t) - \{0.f(t) + [g(b) - g(a)].f'(t)\} \\ &= [f(b) - f(a)].g'(t) - [g(b) - g(a)].f'(t). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)].g(a) - [g(b) - g(a)].f(a) \\ &= f(b).g(a) - f(a).g(a) - g(b).f(a) + g(a).f(a) \\ &= f(b).g(a) - g(b).f(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)].g(b) - [g(b) - g(a)].f(b) \\ &= f(b).g(b) - f(a).g(b) - g(b)f(b) + g(a).f(b) \\ &= g(a).f(b) - f(a).g(b) \end{aligned}$$

temos $h(a) = h(b)$. Resta mostrar que $h'(x) = 0$ para algum $x \in (a,b)$. Com efeito

- Se h é uma constante então $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$.
- Se $h(t) > h(a)$ (função crescente) para algum $t \in (a,b)$ e $x \in [a,b]$ o ponto no qual h atinge o máximo e pelo Teorema 5 segue que $h'(x) = 0$.

Portanto

$$[f(b) - f(a)].g'(t) = [g(b) - g(a)].f'(t).$$

□

Teorema 7 (Teorema do valor médio) *Se f é uma função real continua em $\mathcal{I} = [a, b]$ e derivável em (a, b), existe um ponto $x \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração:

Seja h uma função continua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) tal que

$$h(t) = h(t) = [f(b) - f(a)].t - (b - a).f(t) \qquad (a \leq t \leq b)$$

temos

$$\begin{aligned} h'(t) &= 0.t + [f(b) - f(a)] - \{0.f(t) + (b - a).f'(t)\} \\ &= f(b) - f(a) - (b - a).f'(t). \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} h(a) &= [f(b) - f(a)].a - (b - a).f(a) \\ &= a.f(b) - a.f(a) - b.f(a) + a.f(a) \\ &= a.f(b) - b.f(a) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h(b) &= [f(b) - f(a)].b - (b - a).f(b) \\ &= f(b).b - f(a).b - b.f(b) + a.f(b) \\ &= a.f(b) - b.f(a) \end{aligned}$$

temos $h(a) = h(b)$.

Agora resta mostrar que $h'(x) = 0$ para algum $x \in (a, b)$. Com efeito

- Se h é uma constante então $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$.
- Se $h(t) > h(a)$ (função crescente) para algum $t \in (a, b)$ e $x \in [a, b]$ o ponto no qual h atinge o máximo e pelo Teorema 5 tem-se que $h'(x) = 0$.

Portanto

$$(b-a).f'(x) = f(b) - f(a).$$

$\square$

Teorema 8 *Suponhamos que f é derivável em (a,b).*

(i) Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, f é monótona crescente.

(ii) Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, f é constante.

(iii) Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in (a,b)$, f é monótona decrescente.

Demonstração:

(i) Considerando $x_1, x_2 \in (a,b)$, tal que $x_1 < x_2$. Querermos mostrar que $f(x_2) \geq f(x_1)$. Com efeito, aplicando o Teorema 7, temos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x).(x_2 - x_1)$$

para $x \in (a,b)$. Como $x_2 - x_1 > 0$ e por hipótese $f'(x) \geq 0$ segue que $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$, logo $f(x_2) \geq f(x_1)$. Portanto f é monótona crescente.

(ii) Vamos supor que f é uma função não constante. Considerando $x_1, x_2 \in (a,b)$ com $x_1 < x_2$, tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Aplicando o Teorema 7, temos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x).(x_2 - x_1).$$

Como por hipótese $f'(x) = 0$ para $x \in (a,b)$, segue $f(x_2) = f(x_1)$. O que é um absurdo, pois supomos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Logo f é constante em todo intervalo (a,b).

(iii) Considerando $x_1, x_2 \in (a,b)$, tal que $x_1 < x_2$. Querermos mostrar que $f(x_2) \leq f(x_1)$. Com efeito, aplicando o Teorema 7, temos

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x).(x_2 - x_1)$$

para $x \in (a,b)$. Como $x_2 - x_1 > 0$ e por hipótese $f'(x) \leq 0$ segue que $f(x_2) - f(x_1) \leq 0$, logo $f(x_2) \leq f(x_1)$. Portanto f é monótona decrescente.

$\square$

Teorema 9 (Teorema do valor intermediário) *Se f é uma função real derivável em $\mathcal{I} = [a,b]$ e $f'(a) < \lambda < f'(b)$, então existe um ponto $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = \lambda$.*

Demonstração:
Seja $c = \dfrac{a+b}{2}$. Para $a \leq t \leq c$, definimos $\alpha(t) = a$ e $\beta(t) = 2.t - a$. Para $c \leq t \leq b$, definimos $\alpha(t) = 2.t - b$ e $\beta(t) = b$, assim temos $a < \alpha(t) < \beta(t) < b$ em (a,b). Seja

$$g(t) = \frac{f(\beta(t)) - f(\alpha(t)}{\beta(t) - \alpha(t)} \qquad (a < t < b)$$

g é contínua em (a,b), $g(t) \to f'(a)$, quando $t \to a$, $g(t) \to f'(b)$ quando $t \to b$, logo existe $t_0 \in (a,b)$ que $g(t_0) = \lambda$. Pelo Teorema 7 exite x tal que $\alpha(t_0) < x < \beta(t_0)$ e $f'(x) = g(t_0)$. Portanto $f'(x) = \lambda$. $\square$

Como aplicação do Teorema do Valor Médio, podemos caracterizar as funções uniformementes deriváveis.

Definição 2.5 *Dizemos que $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ é uniformemente derivável no intervalo $\mathcal{I}$ quando f for derivável em $\mathcal{I}$ e, além disso, para cada $\epsilon > 0$ dado for possívem obter $\epsilon > 0$ tal que*

$$0 < |h| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \epsilon, \quad se \quad x \in \mathcal{I},\, x+h \in \mathcal{I}.$$

Quando a função $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo $\mathcal{I}$, considera-se a função derivada $f' : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in \mathcal{I}$ a derivada $f'(x)$. Quando f' é contínua, diz-se que f é uma função continuamente derivável no intervalo $\mathcal{I}$, ou ainda que a função f é de classe C^1.

Teorema 10 *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uniformemente derivável se, e somente se, é de classe C^1.*

Demonstração:

Por hipótese f é uniformemente derivável. Queremos provar que f' é uniformemente continua em $[a,b]$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < |h| < \delta$ e $x \in \mathcal{I}$, $x + h \in \mathcal{I}$ implica

$$\left| \frac{1}{h}.[f(x+h) - f(x)] - f'(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.5}$$

e

$$\left| \frac{1}{-h}.[f(x) - f(x+h)] - f'(x+h) \right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.6}$$

(2.6) pode ser escrito como

$$\left| \frac{1}{h}.[f(x+h) - f(x)] - f'(x+h) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comparando com (2.5), temos:

$$|[f'(x+h) - f'(x)]| < \varepsilon$$

para qualquer $x \in \mathcal{I}$, $x + h \in \mathcal{I}$, com $0 < |h| < \delta$. Logo f' é uniformemente contínua. Vamos supor agora que $f \in C^1$, isto é, que $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ seja uniformemente contínua. Então, dado $\varepsilon > 0$ tal que

$$|y - x| < \delta \to |f'(y) - f'(x)| < \varepsilon.$$

Ora,

$$f(x+h) - f(x) = f(y).h,$$

onde $|x - y| < |h|$. Portanto

$$|h| < \delta \to |f(x+h) - f(x) - f'(x).h| = |f'(y).h - f'(x).h| = |f'(y) - f'(x)|.|h| < \varepsilon.|h|.$$

Logo f é uniformemente derivável.

2.7 Regra de L'Hospital

Teorema 11 *Seja f e g funções reais e deriváveis em (a,b) e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$, em que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Suponhamos que $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ então $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Demonstração:

Vejamos primeiramente o caso em que $-\infty \leq A < +\infty$. Tomando para $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. Considerando q, r números reais tal que $A < r < q$. Por $\lim_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$ existe um ponto $c \in (a,b)$ tal que se $a < x < c$, então

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r.$$

Se $a < x < y < c$, o Teorema 6, mostra que existe $t \in (x,y)$ tal que

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)} \quad = \quad \frac{f'(t)}{g'(t)} < r. \tag{2.7}$$

Fazendo $x \to a$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(y)}{\lim_{x\to a} g(x) - \lim_{x\to a} g(y)}$$

tomando $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, temos

$$\frac{f(y)}{g(y)} \leq r < q \qquad\qquad (a < y < c). \tag{2.8}$$

Agora tomando $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$. Mantendo y fixo em (2.7) podemos escolher $c_1 \in (a,y)$ tal que $g(x) > g(y)$ e $g(x) > 0$ e $a < x < c_1$. Multiplicando (2.7) por $\dfrac{g(x)-g(y)}{g(x)}$ em ambos os lados da desigualdade, segue

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)-g(y)}.\frac{g(x)-g(y)}{g(x)} < r.\frac{g(x)-g(y)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)-f(y)}{g(x)} < r.\frac{g(x)}{g(x)} - r.\frac{g(y)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r.\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)} \qquad (a < x < c_1) \tag{2.9}$$

Aplicando $x \to a$ em (2.9), $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ mostra que existe $c_2 \in (a, c_1)$ tal que

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad (a < x < c_2). \tag{2.10}$$

Logo (2.8) e (2.10) mostram que qualquer que seja $A < q$, existe um ponto c_2 tal que $\dfrac{f(x)}{g(x)} < q$ se $a < x < c_2$.

Do mesmo modo, se $-\infty < A \leq +\infty$ e se $p < A$, podemos determinar c_3 tal que

$$p < \frac{f(x)}{g(x)} \qquad (a < x < c_3),$$

e destas afirmações resulta $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. $\square$

2.8 Derivada de Ordem Superior

Definição 2.6 *Se em um intervalo fechado, f tem derivada f' e se f' também é derivável, indicamos a derivada de f' por f'' e chamamos f'' de derivada segunda de f. Desse modo, obtemos as funções*

$$f, f', f'', f^{(3)}, ..., f^{(n)}$$

sendo $f^{(n)}$ chamada de n-ésima ou derivada de ordem n de f. Cada uma das derivadas é a derivada da anterior.

2.8.1 Teorema de Taylor

Teorema 12 (Teorema de Taylor) *Suponha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ com n primeiras derivadas continuas em $[a, b]$ e que $f^{(n+1)}(x)$ existe para todo $x \in (a, b)$. Então existe $\varepsilon \in (a, b)$ tal que*

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) + f'(a).(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(b-a)^2 + \dots \\ \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}.(b-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

Demonstração:

Seja F e G tal que

$$F(x) = f(b) - f(x) - f'(x).(b-x) - \frac{f''(x)}{2!}.(b-x)^2 - \dots$$
$$\dots - \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1!}.(b-x)^{(n-1)} - \frac{f^{(n)}(x)}{n!}.(b-x)^n \tag{2.11}$$

e

$$G(x) = \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} \tag{2.12}$$

segue que $F(b) = 0$ e $G(b) = 0$. Derivando (2.11) e (2.12)

$$F'(x) = -f'(x) + f'(x) - f''(x).(b-x) + \frac{2.f''(x)}{2!}.(b-x) - \frac{f'''(x)}{2!}.(b-x)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{(n-1)f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}.(b-x)^{(n-2)} - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}.(b-x)^{n-1} +$$
$$+\frac{n.f^{(n)}(x)}{n!}.(b-x)^{n-1} - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}.(b-x)^n$$

$$F'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}.(b-x)^n. \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{[(b-x)^{n+1}]'.(n+1)! - (b-x)^{n+1}.[(n+1)!]'}{[(n+1)!]^2} \\ &= \frac{-(n+1).(b-x)^n.(n+1)!}{[(n+1)!]^2} \\ &= \frac{-(b-x)^n}{n!} \end{aligned} \tag{2.14}$$

Por (6), mostra que existe $\varepsilon \in (a,b)$, tal que

$$\frac{F(b) - F(a)}{G(b) - G(a)} = \frac{F'(\varepsilon)}{G'(\varepsilon)}.$$

Como $F(b) = 0$ e $G(b) = 0$. Então

$$F(a) = \frac{F'(\varepsilon)}{G'(\varepsilon)}.G(a). \tag{2.15}$$

Fazendo $x = a$ em (2.12), e $x = \varepsilon$ em (2.13) e (2.14), obtemos

$$G(a) = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad F'(\varepsilon) = -\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{n!}.(b-\varepsilon)^n \quad \text{e} \quad G'(\varepsilon) = -\frac{1}{n}.(b-\varepsilon)^n.$$

Substituindo em (2.15), temos

$$\begin{aligned} F'(a) &= \frac{\frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{n!}.(b-\varepsilon)^n}{-\frac{1}{n}.(b-\varepsilon)^n}.\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{n!}.(b-\varepsilon)^n.\frac{n!}{(b-\varepsilon)^n}.\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!} \end{aligned} \tag{2.16}$$

Se $x = a$ em (2.11), temos

$$\begin{aligned} F(a) = f(b) - f(a) - f'(a).(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}.(b-a)^2 - \ldots \\ \ldots - \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1!}.(b-a)^{(n-1)} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(b-a)^n \end{aligned}$$

substituindo em (2.16)

$$f(b) - f(a) - f'(a).(b-a) - \frac{f''(a)}{2!}.(b-a)^2 - \ldots - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(b-a)^n = \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}$$

Sendo assim o resultado desejado

$$f(b) = f(a) + f'(a).(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}.(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}.$$

□

2.9 Estudo do crescimento e decrescimento

Definição 2.7 (Teste da derivada primeira para extremos relativos) *Seja f uma função contínua em todos os pontos do intevalo aberto (a, b) contendo o número c e suponha que f' exista em todos os pontos de (a, b), exceto possivelmente em c:*

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f terá um valor máximo relativo em c.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f terá um valor mínimo relativo em c.

2.9.1 Concavidade e Pontos de Inflexão

Definição 2.8 *Seja uma função f derivável no intervalo (a, b). Então:*

(i) f é concava para cima em (a, b) se f' é crescente em (a, b).

(ii) f é concava para baixo em (a, b) se f' é decrescente em (a, b).

Definição 2.9 *(Ponto de inflexão) Seja f uma função e $c \in (a, b)$. O ponto c é um ponto de inflexão se f conter concavidades de nomes contrários em (a, c) e em (c, b).*

Teorema 13 (Teste de Derivada Segunda) *Seja uma função f, no qual $f''(c) = 0$ e vamos supor que f' exista para todos os valores de x em algum intervalo aberto contendo c. Se $f"(c)$ existe então:*

(i) Se $f"(c) < 0$, então f tem um valor máximo relativo em c.

(ii) Se $f"(c) > 0$, então f tem um valor mínimo relativo em c.

Demonstração:

Seja $c \in (a, b)$. Por hipótese $f"(c)$ existe, assim

$$f"(c) = \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

para todo $x \neq c$ em (a, b).

(i) Temos $f"(c)$ negativa. Se $x \in (a, c)$, então $x < c$ ou $x - c < 0$, segue $f'(x) - f'(c) > 0$ ou, $f'(x) > f'(c)$. Se $x \in (c, b)$, então $x > c$ ou $x - c > 0$, segue $f'(x) - f'(c) < 0$ ou, $f'(x) < f'(c)$. Como $f'(c) = 0$ temos que $f'(c)$ muda o sinal algébrico de positivo para negatico, quando x cresce. Por (2.7), f tem um valor máximo relativo em c.

(ii) Temos $f"(c)$ positiva. Se $x \in (a, c)$, então $x < c$ ou $x - c < 0$, segue $f'(x) - f'(c) < 0$ ou, $f'(x) < f'(c)$. Se $x \in (c, b)$, então $x > c$ ou $x - c > 0$, segue $f'(x) - f'(c) > 0$ ou, $f'(x) > f'(c)$. Como $f'(c) = 0$ temos que $f'(c)$ muda o sinal algébrico de negativo para positivo, quando x cresce. Por (2.7), f tem um valor mínimo relativo em c.

$\square$

Capítulo 3

APLICAÇÕES NAS ÁREAS ECONÔMICA E ADMINISTRATIVA

O conceito abstrato da derivada apresentado e discutido no capítulo anterior, em suas propriedades e principais resultados, tem inúmeras aplicações nas mais diversas Ciências. Por exemplo: na Física tem suas associações a conceitos como velocidade e aceleração; na Biologia, biologia populacional, crescimento de uma célula; na Química é bastante utilizada tanto na cinética química, quanto na termoquímica e absorção de drogas e reações químicas; na Estatística é utilizada em estudos de crescimento populaçional, distribuição de renda, dentre outros. Essas aplicações aparecem naturalmente, pois, dada uma $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com $p \in \mathcal{I}$, o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

que é definido como a derivada da função f num ponto p, em cada contexto tem seu significado específico.

O objetivo principal deste trabalho é tratar o significado deste limite e suas aplicações nos contextos das áreas Econômica e Administrativa. Isto foi motivado por uma experiência na disciplina de Métodos Quantitativos no curso de Economia da UEMS em

Ponta Porã no ano de 2015. A disciplina Métodos Quantitativos corresponde a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 em outros cursos. Para trabalhar essa disciplina foi preciso, além dos conceitos técnicos de cálculo, entender sua contextualização dentro do Curso de Economia.

Para registrar uma parte dessa experiência propõe-se tratar neste trabalho apenas das aplicações do conceito de derivada. Mais especificamente, o foco principal do trabalho é tratar de dois dos usos mais importantes da derivada em Economia e Administração que estão associados ao significado da *marginalidade* e *elasticidade*. Em relação a Marginalidade estudaremos o seu significado econômico avaliando o custo marginal, custo médio marginal, receita marginal e lucro marginal. Em relação a Elasticidade, estudaremos seu conceito associado ao preço e à demanda de um produto e sua relação com a receita, assim como a elasticidade associada a renda e à demanda. Para desenvolvimento do capítulo utilizamos os textos de Murolo e Bonetto [6] e Tan [9].

3.1 Taxa de Variação Instantânea

Em ordem, nesta seção apresentamos a definição de *taxa de variação média* e *taxa de variação instantânea*, em seguida, apresentamos alguns exemplos envolvendo estes dois conceitos em funções que se apresentam nas áreas econômica e administrativa. Por exemplo, função custo, função receita, função lucro e função produção.

Seja $f : \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função com $p \in \mathcal{I}$ e $p + h \in \mathcal{I}$ onde $h > 0$ representa um acréscimo em p. A razão

$$\frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

representa a *taxa de variação média* de f entre p e $p + h$. É fácil observar que a derivada de f, em p, é a taxa de variação intantânea de f, em p, isto é,

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

A seguir apresentamos alguns exemplos de funções do tipo: custo, receita, lucro e produção.

3.1.1 Exemplos

Exemplo 1

O custo C para uma cerealista beneficiar uma quantidade q de sacas de soja é dado por $C = f(q)$ com $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(q) = q^2 + 20$, onde C é dado em reais ($R\$$) e q é dado em toneladas (ton).

- A taxa de variação média do custo para o intervalo de $1 \leq q \leq 100$ é dada por

$$\frac{f(100) - f(1)}{99} = 101 R\$/\text{ton}.$$

- A taxa de variação instantânea da função custo para $q = 40$ é dada por

$$f'(40) = 2(40) = 80 R\$/\text{ton}.$$

Exemplo 2

Para um produto, a receita R, em $R\$$ foi associada à quantidade q investida em propaganda (em milhares de $R\$$). Em tal associação esta receita é expressa por $R = f(q)$ com $f : [0, 100] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(q) = -\frac{1}{10} q^3 + 15 q^2 + 5.000$$

- A taxa de variação média da receita para o intervalo de $40 \leq q \leq 50$ é dada por

$$\frac{f(50) - f(40)}{10} = 740 R\$.$$

- A taxa de variação instantânea da receita para $q = 41$ é dada por

$$f'(41) = -\frac{3}{10}(41)^2 + 30 * (41) = 725,7 R\$.$$

Exemplo 3

Considere um grupo de operários em uma industria de alimentos onde a quantidade P de alimentos produzidos depende do número t de horas trabalhadas a partir do inicio do expediente. Tal produção é dada por $P = 4t^2$ onde P é dada em toneladas. Assim, temos a produção como função do tempo t, isto é, $P = f(t) = 4t^2$.

- A taxa de variação média para o intervalo de tempo das 3:00 as 6:00 ou seja, para $t = 3$ e $t + h = 6$ é dada por

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{f(6) - f(3)}{6 - 3} = \frac{4 \cdot 6^2 - 4 \cdot 3^2}{3} = 36\text{ton/h}.$$

- A taxa de variação média para o intervalo de tempo das 3:00 as 4:00 é dada por

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{4 \cdot 4^2 - 4 \cdot 3^2}{1} = 28\text{ton/h}.$$

- A taxa de varição intantânea da produção as $3:00$ é dada por

$$f'(4) = 8(3) = 24\text{ton/h}.$$

Observação 3.1 *A pergunta que surge é: qual o significado desta taxa de variação instantânea nos contextos acima? O que propomos a seguir é dar esse significado e sua apliacações.*

Quando a taxa de variação média é dada para um intervalo $[q, q+1]$, isto é, com $h = 1$, está taxa é uma aproximação para a variação instantânea em q

$$\frac{f(q+1) - f(q)}{1} \approx \lim_{h \to 0} \frac{f(q+h) - f(q)}{h} = f'(q).$$

Estes casos particulares, quando $h = 1$ serão tratados na próxima seção, e estão associados ao significado de marginalidade.

3.2 Funções Marginais

Nos contextos das áreas econômica e administrativa, o siginificado da palavra "marginal"é "a derivada de"e remete a análise aproximada da variação de uma grandeza em relação ao acréscimo de uma unidade na outra grandeza, à qual está vinculada.

3.2.1 Função custo marginal

Cosideremos o custo C na produção de determinado bem q. O **custo marginal** refere-se ao acréscimo de custo para o acréscimo de 1 unidade na produção de q. Isto é dado por $C(q+1) - C(q)$.

Como
$$C(q+1) - C(q) = \frac{C(q+1) - C(q)}{1}$$
este acréscimo representa a taxa de variação média de $C(q)$ para o intervalo $[q, q+1]$. Além disso, temos que
$$\frac{C(q+1) - C(q)}{1} \approx \lim_{h \to 0} \frac{C(q+h) - C(q)}{h} = C'(q).$$
Ou seja, o acréscimo pode ser aproximado pelo cálculo da derivada da função custo C em q. Como a aproximação é bastante razoável, nas análises econômicas e administrativas, define-se a **função Custo Marginal**, denotada por C_{mg}, como a derivada da **função Custo**:
$$C_{mg} = \text{Função Custo Marginal} = C'(q).$$
Considere o seguinte exemplo:

Exemplo 3.1

O custo total semanal (em dólares) da Lincoln Records para gravar q CDs é de
$$C(q) = 2000 + 2.q - 0,0001.q^2 \quad (0 \leq q \leq 6000).$$

a) Qual o custo quando são produzidos 1000 CDs?

Para calcular o custo quando são produzidos 1000 CDs basta substituir $q = 1000$ na função custo:
$$C(1000) = 2000 + 2.(1000) - 0,0001.(1000)^2 = 3900,$$
ou seja, $\$3900,00$.

b) Qual é o custo real envolvido na produção do 1001^o CD?

O custo real envolvido na produção do 1001^o CD é igual a diferença entre os custos de produção de 1001 e 1000 CD's.

$$\begin{aligned} C(1001) - C(1000) &= [2000 + 2.(1001) - 0,0001.(1001)^2] - \\ &\quad -[2000 + 2.(1000) - 0,0001.(1000)^2] \\ &= 3901,80 - 3900 \\ &= 1,80 \end{aligned}$$

ou \$1,80

c) Qual é o custo marginal quando $q = 1000$?

O custo marginal é dada pela derivada $C'(q) = 2 - 0,0002.q$. Sendo assim para $q = 1000$, temos:

$C'(1000) = 2 - 0,0002.(1000) = 1,80$

Nota-se que a responta no item b e no item c é a mesma. Para observar o motivo, a diferença pode ser escrita na forma:

$$\frac{C(1001) - C(1000)}{1} = \frac{C(1001) - C(1000)}{1001 - 1000} = \frac{C(1001) - C(1000)}{x - q}$$

onde $h = x - q = 1$, ou seja, a diferença $C(1001) - C(1000)$ é igual a declividade da reta secante e $C'(1000)$ é igual a declividade da reta tangente ao gráfico da função C no ponto $q = 1000$. Assim podemos esperar que

$$\begin{aligned} C(1001) - C(1000) &= \frac{C(1001) - C(1000)}{1} = \frac{C(1001) - C(1000)}{x - q} \\ &= \lim_{x \to q} \frac{C(1001) - C(1000)}{x - q} \\ &= C'(1000). \end{aligned}$$

As funções marginais auxiliam os produtores ou as empresas nas tomadas de decisões, pois se o produtor não está só interessado no custo total correspondente a certo nível de produção de um bem, mas também está interessado na taxa de variação do custo total em relação com o nível de produção e também no aumento de cada produto ou serviço no lucro das empresas.

3.2.2 Função receita marginal

A função receita $R(q)$ fornece a receita total obtida por uma empresa com a venda de q unidades com preço por unidade $p(q)$ de um certo bem e é dada por:

$$R(q) = p(q).q.$$

A **função Receita Marginal** é o faturamento obtido com a venda de uma unidade a mais de um bem, sabendo que as vendas encontra-se em um nível especifico. Define-se a função receita marginal como a derivada da função receita $R'(q)$, então:

$$R_{mg} = \text{Função Receita Marginal} = R'(q).$$

Exemplo 3.2

A gerência da Acrosonic planeja lançar no mercado o sistema ElectoStar, um sistema de caixas de som eletrostáticas. A divisão de marketing determinou que a demamanda desses sistemas seja de

$$p(q) = -0,04.q + 800 \qquad (0 \leq q \leq 20000)$$

onde $p(q)$ denota o preço unitário (em dólares) do sistema e q denota a quantidade demandada.

a) Encontre a função receita.

$$\begin{aligned} R(q) &= (-0,04.q + 800).q \\ &= -0,04.q^2 + 800.q \end{aligned}$$

b) Determine a função receita marginal.

$$R'(q) = -0,08.q + 800$$

c) Calcule $R'(5000)$.

$$\begin{aligned} R'(5000) &= -0,08.(5000) + 800 \\ &= 400 \end{aligned}$$

A receita obtida na venda do 5001º sistema de caixas de som eletrostáticas é de aproximadamente \$400.

3.2.3 Função lucro marginal

A função lucro $L(q)$ é dada por

$$L(q) = R(q) - C(q)$$

onde R é a função receita, C é a função custo e q é o número de unidades do bem produzidos e/ou vendidos.

A **função Lucro Marginal** fornece uma boa aproximação do lucro ou da perda real em um momento da venda $(q + 1)$-énesima unidade do bem (assumindo a venda da n-ésima unidade). Define-se a função lucro marginal como a derivada da função lucro $L'(q)$, e então

$$L_{mg} = \text{Função Lucro Marginal} = L'(q).$$

Exemplo 3.3

A demanda semanal de um modelo de televisão é igual a

$$p(q) = 600 - 0,05.q \quad (0 \leq q \leq 12000)$$

onde $p(q)$ denota o preço unitário por atacado em dólares e q denota a quantidade demandada. A função custo total semanal associada com a produção do modelo é dada por

$$C(q) = 0,000002.q^3 - 0,03.q^2 + 400.q + 80000$$

onde $C(q)$ denota o custo total envolvido na produção de q unidades.

a) Determine a função lucro.

$$\begin{aligned} R(q) &= p(q).q = (600 - 0,05.q).q \\ &= 600.q - 0,05.q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(q) &= R(q) - C(q) \\ &= 600.q - 0,05.q^2 - (0,000002.q^3 - 0,03.q^2 + 400.q + 80000) \\ &= -0,000002.q^3 - 0,02.q^2 + 200.q - 80000 \end{aligned}$$

b) Estabeleça a função lucro marginal.

$$L'(q) = -0,000006.q^2 - 0,04.q + 200$$

c) Calcule $L'(2000)$.

$$\begin{aligned} L'(q) &= -0,000006.(2000)^2 - 0,04.(2000) + 200 \\ &= 96 \end{aligned}$$

O Lucro real realizado na venda do 2001º televisor é de aproximadamente $96.

3.2.4 Função produção marginal

A produção marginal refere-se a variação da produção correspondente ao aumento de uma unidade na quantidade de determinado produto usado na produção.

A **função Produção Marginal** é obtida pela derivada da função produção. Denotando por $P(q)$ a função produção, temos que

$$P_{mg} = \text{Função Produção Marginal} = P'(q).$$

Exemplo 3.4

A produção P de um funcionário é dada por $P(t) = -t^3 + 8t^2$, onde P é dada em unidades e t é dado em horas, com $0 \leq t \leq 8$. Neste caso a função produção marginal é dada por:

$$P'(t) = -3t^2 + 16t.$$

A função produção marginal da seguinte aproximação para a produção referente a $4^{\underline{a}}$ hora de trabalho

$$P'(4) = -3(4)^2 + 16(4) = 16.$$

Isto é, 16 unidades. Note que a quantidade exata é dada por

$$P(4) - P(3) = -(4)^3 + 8(4)^2 - (-(3)^3 + 8(3)^2) = 19. \tag{3.1}$$

3.3 Elasticidade

3.3.1 Demanda

A demanda é quantidade de determinado bem ou serviço que os consumidores desejam adquirir. Não representa a real compra, mas sim a intenção de compra. Os fundamentos da teoria da demanda estão associados ao conceito da utilidade e representa o grau de satisfação e bem estar do consumidor que ele atribui ao bem ou serviço.

3.3.2 Variáveis que afetam a demanda

Geralmente a função demandanda é colocada como dependente de variáveis consideradas mais relevantes e gerais. A função geral da demanda é uma função $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$q = f(p, p_s, p_c, R, G)$$

onde:

- q = quantidade demandada;
- p = preço do bem;
- p_s = preço dos bens substitutos;
- p_c = preço dos bens complementares;
- R = renda dos consumidores;

- G = gastos, habitos e preferência dos consumidores.

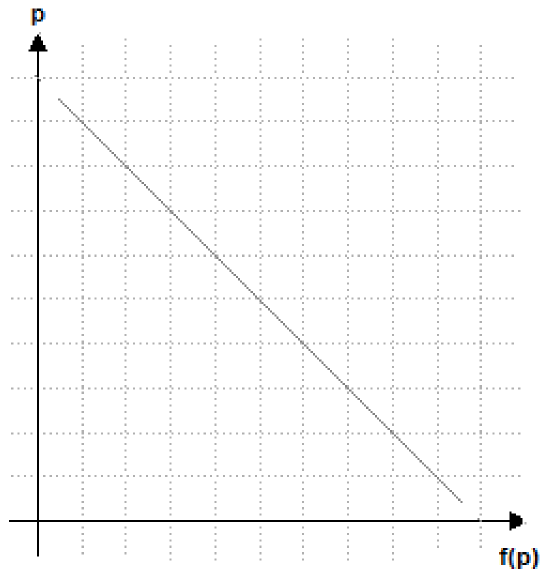
Como o mercado de cada bem tem suas particularidades, algumas dessas variáveis podem não afetar a demanda.

3.3.3 Relação entre a quantidade demandada e o preço do bem ou serviço

Considerando p_s, p_c, R, G constantes, a função f se torna uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em que $q = f(p)$. Essa função indica a intenção de compra dos cosumidores em função da variação do preço, mas não a compra efetiva. A variação inversa da quantidade demandada de um bem ou serviço com seu preço $\dfrac{\Delta f(p)}{\Delta p} < 0$ é chamada Lei Geral da Demanda. Essa relação inversa ocorre devido:

- Efeito substituição: o bem fica mais barato em relação aos consumidores;
- Efeito renda: com a queda do preço, os consumidores possuem mais poder aquisitivo, levando assim o aumento da demanda. Isto é mesmo a renda do consumidor não variando, ao cair o preço de um bem o consumidor poderá comprar mais o bem ou serviço.

A curva da demanda geralmente é decrescente.



3.3.4 Elasticidade-preço da demanda

"Elasticidade é sinônimo de sensibilidade, resposta ou reação de uma variável, em face de mudança de outra"(VASCONCELLOS, 2011,p.64). Sempre que tiver uma relação entre variáveis em economia podemos calcular a elasticidade.

Teorema 14 *Se $q = f(p)$, onde q é a quantidade demandada e p é o preço do bem ou serviço, então a elasticidade-preço da demanda é a variação percentual na quantidade demandada, dada uma variação percentual do preço do bem ou serviço e é dada por:*

$$E_{pp} = \frac{p.f'(p)}{f(p)}.$$

Demonstração: Supondo que o preço aumente de p para t e $f(p)$ e $f(t)$ é a quantidade demandada respctivamente, logo

$$E_{pp} = \frac{\Delta\text{percentual}f(p)}{\Delta\text{percentual}p} = \frac{100.\left[\dfrac{f(t)-f(p)}{f(p)}\right]}{100.\left[\dfrac{t-p}{p}\right]} = \frac{f(t)-f(p)}{f(p)}.\frac{p}{t-p}$$

$$= \frac{p}{f(p)}.\frac{f(t)-f(p)}{t-p}.$$

Se f é diferenciavel, então

$$E_{pp} = \frac{p}{f(p)}.f'(p).$$

□

A elasticidade mede a resposta dos consumidores, quando ocorre uma variação no preço de um bem ou serviço.

Como $\dfrac{\Delta f(p)}{\Delta p} < 0$ (pela Lei Geral da Demanda) e a derivada de uma função mede a taxa de variação no ponto dado, temos que $f'(p) < 0$. Como p e $f(p)$ são positivos, temos que $\dfrac{p}{f(p)}.f'(p) < 0$ será sempre negativo.

Por esse motivo E_{pp} será expresso por módulo ($|E_{pp}|$).

3.3.5 Classificação da demanda, de acordo com a elasticidade-preço

(i) Demanda elástica: $|E_{pp}| > 1$. Ocorre quando os consumidores são altamente sensiveis à variação do preço.

(ii) Demanda inelástica: $|E_{pp}| < 1$. Ocorre quando os consumidores são poucos sensiveis à variação do preço.

(iii) Demanda de elasticidade unitária: $|E_{pp}| = 1$.

3.3.6 Fatores que afetam a elasticidade-preço da demanda

(i) Disponibilidade de bens substitutos: Quando mais substitutos, mais elástica a demanda será, pois o consumidor irá dispor de mais opções para fugir do produto.

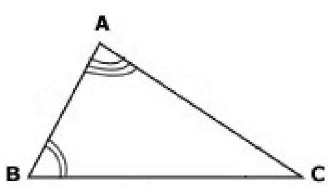
(ii) Essencialidade do bem: Esse tipo de bem ou serviço não traz muita opção de troca para o consumidor, quando seu preço aumenta, ou seja, quanto mais essencial o bem ou o serviço mais inelástica sua procura.

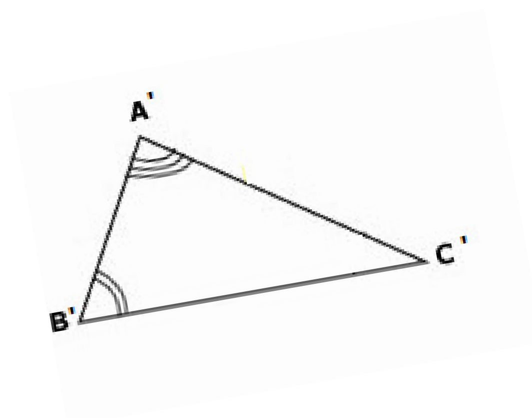
(iii) Importância relativa do bem no orçamento do consumidor: É dada pela proporção de quanto o consumidor gasta no bem ou serviço em relação a sua despesa.

(iv) Horizonte de tempo: Em um intervalo de tempo maior, permite que o consumidor descubra outras formas de substituir o produto quando seu preço aumenta, ou seja, depende do horizonte de tempo de análise.

3.3.7 Relembrando semelhando de triângulo

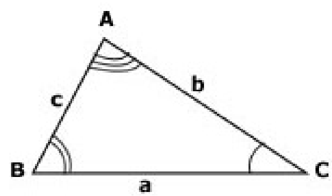
Podemos dizer que dois triângulos são semelhantes quando existe uma correspondência biunívoca entre os vértices, de modo que os ângulos em vértices correspondentes sejam iguais e a razão entre os comprimentos de lados correspondentes seja sempre a mesma (ver [7]).

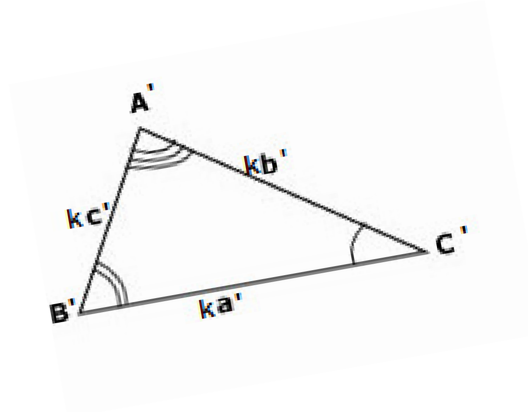




- Caso AA: Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos no plano, tais que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e $\widehat{B} = \widehat{B'}0$. Então, os triângulos ABC $A'B'C'$, com correspondência $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$ e $C \leftrightarrow C'$. Então

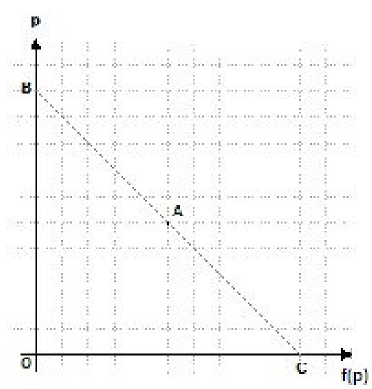
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$





3.3.8 Interpretação geométrica da elasticidade-preço da demanda

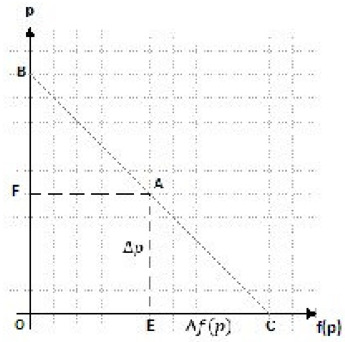
Quanto maior o preço do bem ou serviço, maior a sensibilidade do consumidor, isto é, maior a elasticidade.



Sendo $\overline{AB}$=Demanda Elástica, $\overline{A}$=Demanda de elasticidade unitária e $\overline{AC}$=Demanda inelástica.

Podemos dizer que

$$|E_{pp}| = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}$$



Demonstração: Por definição da elasticidade temos,

$$E_{pp} = \frac{p.f'(p)}{f(p)}$$

que matematicamente falando é igual a

$$E_{pp} = \frac{p}{f(p)}.\frac{\Delta f(p)}{\Delta p}$$

sabendo que $\Delta f(p) = \overline{EC}$ e $\Delta p = \overline{OF} = \overline{AE}$ temos que, no ponto A é:

$$|E_{pp}| = \frac{\overline{OF}}{\overline{OE}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} = \frac{\overline{EA}}{\overline{OE}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{EA}}$$

Segue

$$|E_{pp}| = \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}} \tag{3.2}$$

Como o $BFA \sim BOC$ e o $BOC \sim AEC$ pelo caso AA, temos que $BFA \sim AEC$, logo

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AF}}.$$

Como $\overline{AF} = \overline{OE}$, segue

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OE}}$$

multiplicando por $\dfrac{\overline{EC}}{\overline{BA}}$ em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{EC}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{OE}}.\frac{\overline{EC}}{\overline{BA}}$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{OE}}$$

Por (3.2), temos:

$$|E_{pp}| = \frac{\overline{AC}}{\overline{BA}}.$$

3.3.9 Relação entre Receita e a elasticidade-preço da demanda

Para conhecer o comportamento da receita quando varia o preço do bem é utilizando a elasticidade preço:

(i) Se E_{pp} for elástica, então um pequeno aumento do preço unitário resulta em uma diminuição da receita e se há um decréscimo do preço unitário ocorrerá um aumento na receita.

(ii) Se E_{pp} for inelástica, então um pequeno aumento do preço unitário resulta em um aumento da receita e se há um decréscimo do preço unitário ocorrerá um decréscimo na receita.

(iii) Se E_{pp} for de elasticidade unitária então a receita permanecerá constante.

Exemplo 3.5

A equação de demanda para o secador de cabelos portátil Ronald é dada por

$$q = \frac{225 - p^2}{5} \qquad (0 \leq p \leq 15)$$

onde q (medido em centenas) é a quantidade demandada por semana e p é o preço unitário em dólares.

(a) A demanda é elástica ou inelática quando $p = 8$ e quando $p = 10$?

$q = f(p)$

$$f'(p) = \frac{(-p^2)'.5 - (-p^2).5'}{5^2} = \frac{-2.p}{5}$$

$$|E_{pp}| = \left| \frac{\frac{p.(-2.p)}{5}}{\frac{225 - p^2}{5}} \right| = \left| \frac{-2.p^2}{225 - p^2} \right|$$

Para $p = 8$:

$$\begin{aligned} |E_{pp}| &= \left|\frac{-128}{161}\right| \\ &= |-0,79| \\ &= 0,79 \end{aligned}$$

Como $|E_{pp}| < 1$ a demanda é inelástica.

Para $p = 10$:

$$\begin{aligned} |E_{pp}| &= \left|\frac{-200}{125}\right| \\ &= |-1,6| \\ &= 1,6 \end{aligned}$$

Como $|E_{pp}| > 1$ a demanda é elástica.

(b) Quando a demanda é unitária?

$$\left|\frac{-2.p^2}{225 - p^2}\right| = 1$$

Como $0 \leq p \leq 15$ e $p \neq 15$, temos que $225 - p^2 > 0$, o que significa que $\dfrac{-2.p^2}{225 - p^2} < 0$, então

$$\left|\frac{-2.p^2}{225 - p^2}\right| = -\left(\frac{-2.p^2}{225 - p^2}\right) = \frac{2.p^2}{225 - p^2}.$$

Assim,

$$\frac{2.p^2}{225 - p^2} = 1.$$

Logo $p = 8,6$. Portanto a demanda é unitária quando $p = 8,6$.

(c) Se o preço unitário de \$10 for ligeiramente diminuído, a receita aumentará ou diminuirá?

Como visto no item a desse exercício a $|E_{pp}| > 1$. Sendo assim a demanda é elástica para $p = 10$, então uma pequena diminuição do preço unitário provocará um aumento na receita.

Conclusão

A proposta deste foi trabalhar o conceito de derivada em seus aspectos teóricos e suas aplicações nas áreas econômica e administrativa. Primeiramente apresentamos sua definição formal e os principais resultados. Em seguida apresentados como este conceito abstrato se apresenta em ecomomia e administração. Mais especificamente, mostramos que a derivada associa-se aos conceitos de marginalidade e elasticidade. Que auxiliam o produtor na tomada de decisões do bem ou/e produto e o que acontece com a demanda de um bem ou/e produto quanto a variação percentual no preço unitário aumenta ou diminui.

Referências Bibliográficas

[1] BOULOS, P. **Introdução ao Cálculo**. Editora Edgard Blucher LTDA. Brasilia, 1974.

[2] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo V.1**. LTC. Rio de Janeiro, 2000.

[3] LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica**. Editora Harbra Ltda. 3ª Edição. São Paulo, 1994.

[4] LIMA, E. L. **Curso de Análise V.1**. IMPA. 10ª Edição. Rio de Janeiro, 2000.

[5] LIMA, E. L. **Números e Funções Reais**. SBM. 1ª Edição. Rio de Janeiro, 2013.

[6] MUROLO, A. C. e BONETTO, G. A. **Matemática aplicada à Administração, Economia e Contabilidade**. Editora Thomson. São Paulo, 2007.

[7] NETO, A. C. M. **Geometria**. SBM. 1ª Edição. Rio de Janeiro, 2013.

[8] RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. Ao Livro Técnico S. A. Rio de Janeiro, 1971.

[9] TAN, S. T. **Matemática aplicada a Administração e Economia**. 2ª Edição. Editora Thomson. São Paulo, 2007.

[10] VASCONCELLOS, M. A. S. **Economia Micro e Macro**. 5ª edição. Editora Atlas S.A. São Paulo, 2011.