



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Campus de São José do Rio Preto

MARCOS EDER CUPAIOLI

**O TEOREMA DE PITÁGORAS EM UMA ABORDAGEM
EXPERIMENTAL**

São José do Rio Preto
2016

MARCOS EDER CUPAIOLI

**O TEOREMA DE PITÁGORAS EM UMA ABORDAGEM
EXPERIMENTAL**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita

São José do Rio Preto
2016

Cupaioli, Marcos Eder.

O teorema de Pitágoras em uma abordagem experimental / Marcos Eder Cupaioli. -- São José do Rio Preto, 2016
90 f. : il., tabs.

Orientador: Vanderlei Minori Horita
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática - Estudo e ensino. 2. Geometria - Estudo e ensino. 3. Pitágoras, Teorema de - Estudo e ensino. 4. Números de Fibonacci. 5. Semelhança (Geometria) 6. Matemática - Metodologia. I. Horita, Vanderlei Minori. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 51(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Marcos Eder Cupaioli

**O TEOREMA DE PITÁGORAS EM UMA ABORDAGEM
EXPERIMENTAL**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. VANDERLEI MINORI HORITA
UNESP – São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dra. ERMÍNIA DE LOURDES CAMPELLO FANTI
UNESP – São José do Rio Preto

Prof. Dr. JULIANO GONÇALVES OLER
UFU – Universidade Federal de Uberlândia

São José do Rio Preto
19 de agosto de 2016

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre estiveram, sobretudo durante as dificuldades, presentes e constantes, dando ensinamento, sabedoria, carinho e muito amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, por ter estado sempre ao meu lado, dando força nos momentos mais difíceis.

Aos meus queridos pais, Oswaldo e Cida, que foram fundamentais na transmissão dos valores e ensinamentos, que me tornaram o homem e profissional que sou hoje.

As minhas irmãs, Margarete e Maria Luísa, que sempre estiveram incentivando e dando carinho; aos meus sobrinhos, Paulo, Maressa, Gustavo, Lucas, Stephanie e Gabriel, sempre presentes; ao meu querido sobrinho-neto, Guilherme, que, com pequenos gestos de carinho, foi um incentivo para que eu nunca desistisse.

A meu orientador, Prof. Dr. Vanderlei Minori Horita, pelo apoio, incentivo e dedicação ao meu trabalho e, principalmente, pela paciência, compreensão e amizade.

Aos professores do PROFMAT, pelos ensinamentos e, sobretudo, pelos questionamentos oportunos e fundamentais em vários momentos desse processo.

Aos colegas Fabrício, Daniela, Patrícia, pelos valorosos momentos que passamos juntos. Aprendi algo de bom para a minha vida com cada um de vocês.

A todos os Professores e colegas que tive oportunidade de um dia conhecer, trabalhar e aprender. Destaco os professores, os funcionários e direção da ETEC de Novo Horizonte e das outras escolas que tive oportunidade de trabalhar, que estiverem sempre torcendo e incentivando a realização e a conquista deste trabalho.

À CAPES pelo incentivo financeiro.

Finalmente, aos meus atuais e antigos alunos, que foram grandes inspiradores e motivadores para a realização e conquista desse mestrado.

EPÍGRAFE

“A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar.”

George Polya

RESUMO

Este trabalho aborda um conjunto de atividades experimentais com a finalidade de demonstrar um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática: o Teorema de Pitágoras. São conhecidas mais de 400 demonstrações, aqui optamos por utilizar uma demonstração devido a Rudolf Wolf, por possibilitar uma abordagem geométrica lúdica através da dissecção de figuras planas. Inicialmente apresentamos o conceito geral de semelhança e áreas das figuras planas que utilizam propriedades e áreas de polígonos equidecomponíveis. Posteriormente, realizamos um breve resgate histórico sobre diversas demonstrações do Teorema e da vida de Pitágoras. Destacamos, também, uma maneira de achar algumas ternas pitagóricas, utilizando a sequência de Fibonacci. Por fim, foram propostas e desenvolvidas atividades experimentais em sala de aula com a utilização de moldes em EVA, explorando o Teorema de Pitágoras e algumas de suas aplicações.

Palavras-chave: Teorema de Pitágoras. Ternas pitagóricas. Semelhança. Área de polígonos.

ABSTRACT

This work contains a set of experimental activities in order to prove one of the most beautiful and important theorems in Mathematics: the Pythagorean Theorem. There are known more than 400 proofs, here we chose to use a proof due to Rudolf Wolf, by allowing a playful geometric approach by dissection of plane figures. Initially we present the general concept of similarity and areas of plane figures using properties and areas of equidecomposable polygons. Later, we do a brief historical review of some proofs of Theorem and Pythagoras's life. We also highlight a way to find some Pythagorean triples using the Fibonacci sequence. Finally, it was proposed and developed experimental activities in the classroom with the use of molds EVA, exploring the Pythagorean theorem and some of its applications.

Key-words: *Pythagorean Theorem. Pythagorean triples. Similarity. Area of polygon.*

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1: Semelhança entre os segmentos de reta AB e CD	19
Figura 2: Pontos A , B e C na figura F e seus homólogos A' , B' e C' na figura F'	20
Figura 3: Homotetia: Transformação de reta em reta paralela	23
Figura 4: Reta paralela ao lado do triângulo determinando um triângulo parcial	24
Figura 5: Triângulos Semelhantes.....	25
Figura 6: Triângulos Congruentes	28
Figura 7: Caso LAL de congruência de triângulos.....	29
Figura 8: Caso ALA de congruência de triângulos	30
Figura 9: Caso LLL de congruência de triângulos	30
Figura 10: Caso LAA_o de congruência de triângulos	31
Figura 11: Caso especial de congruência de triângulos.....	31
Figura 12: Quadrado de lado n e quadrado unitário.....	33
Figura 13: Quadrado de lado m/n	33
Figura 14: Quadrado de lado l incomensurável.	34
Figura 15: Retângulo de lado ab	35
Figura 16: Retângulo de lados m/n e p/n	36
Figura 17: Retângulo $ABCD$ e Quadrado de lado $a + b$	36
Figura 18: Paralelogramo de base a e altura h	37
Figura 19: Retângulo de lado $a + b$ e altura h e Retângulo de lados b e h	38
Figura 20: Triângulo de base a e altura h	39
Figura 21: Polígonos regulares inscrito e circunscrito	40
Figura 22: Polígono regular inscrito.....	45
Figura 23: Polígono circunscrito	47
Figura 24: Área de polígonos regulares	48
Figura 25: Polígonos F , P e Q	50
Figura 26: Decomposição do triângulo em três partes A , B e C , recompostos em A' , B' e C' para formar o retângulo.....	52
Figura 27: Paralelogramo P e Retângulo R com a mesma base e mesma altura.	52
Figura 28: Retângulo e o Paralelogramo com lados paralelos a r são TR-equidecomponíveis.	53
Figura 29: Triângulo Retângulo Euclides	55

Figura 30: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Dr. Rudolf Wolf em 1869	57
Figura 31: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Dr. Rudolf Wolf	58
Figura 32: Congruência entre os triângulos ABH e ANG	59
Figura 33: Congruência entre os triângulos ABH e BQI	60
Figura 34: Congruência entre os triângulos BOP e QIM	60
Figura 35: Congruência entre os triângulos MFN e OJA	61
Figura 36: Congruência entre os triângulos BPO e BLH	62
Figura 37: Tábula de Plimpiton 322.....	68
Figura 38: Modelos em EVA do Triângulo Retângulo	75
Figura 39: (a) e (b) Alunos realizando as montagens, (c) e (d) Algumas figuras resultantes.....	77
Figura 40: Percentual relativo às respostas dadas para a pergunta 5: Qual a relação que podemos fazer entre as peças dos quadrados Verde e Vermelho com a do quadrado Azul?	78
Figura 41: Respostas obtidas na questão 7: Qual é a relação que podemos fazer entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo?	79
Figura 42: Percentual relativo às respostas incompletas dadas para a questão 8....	80
Figura 43: Percentuais de acertos para as questões 10 e 11 para o lado incomensurável de um triângulo retângulo.....	80
Figura 44: Opiniões dadas pelos alunos sobre as atividades	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Solução dado por Fibonacci para o problema dos coelhos	63
Tabela 2: Respostas dadas pelos grupos para a questão 8 item c) Qual é a medida do lado da hipotenusa BC de um triângulo $AB = 4 m$ e $CA = 3 m$	79
Tabela 3: Respostas dada a questão 12: Qual é a relação entre os lados de um triângulo retângulo de lados, a , b e c	81

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	14
2. Figuras semelhantes	18
2.1 Semelhança definição geral.....	18
2.2 Teorema Fundamental de Semelhança.....	22
2.3 Semelhança de Triângulos	25
2.4 Congruência de Triângulos.....	28
3. Área de Figuras Planas	32
3.1 Área dos Polígonos	32
3.1.1 Área do Quadrado.....	32
3.1.2 Área do Retângulo	35
3.1.3 Área do Paralelogramo	37
3.1.4 Área do Triângulo.....	39
3.2 Área de polígonos regulares.....	39
3.2.1 Polígonos regulares	39
3.2.2 Lado e apótema de um polígono regular.....	44
3.2.3 Área dos polígonos regulares	47
3.3 Área de um polígono qualquer.....	49
3.3.1 Área de figuras planas gerais.....	49
3.4 Polígonos Equidecomponíveis.....	51
4. Teorema de Pitágoras	54
4.1 Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides.....	55
4.2 Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Dr. Rudolf Wolf.....	56
4.3 Fibonacci e as Ternas Pitagóricas.....	62
4.3.1 Sequência de Fibonacci.....	62
4.3.2 Ternas Pitagóricas de Fermat.....	68

4.3.4 Ternas Pitagóricas de Fibonacci	72
5. Abordagens Experimentais	75
5.1 Teorema de Pitágoras	75
5.1.1 Aplicação das Atividades do Teorema de Pitágoras em Sala de Aula	76
6. Conclusão	83
REFERÊNCIAS	84
Anexos I: Atividade I: Teorema de Pitágoras	86

1. INTRODUÇÃO

As dificuldades em Matemática são queixas comuns nas escolas. Mas o ponto crítico, certamente não é a dificuldade apresentada pelos alunos, mas a maneira como os conteúdos matemáticos são abordados.. Não é raro ouvir de professores que seus alunos não são capazes de se apropriarem dos conceitos, como se não pudessem fazer nada que facilitasse a compreensão desses.

A história nos mostra que é preciso haver mudanças na prática pedagógica do educador e que é necessário que ele supere a visão formalista do ensino tradicional de matemática.

Nesse contexto, a escola deve ser vista como local de trocas de ideias, interações e mediações necessárias ao processo de apropriação dos conceitos científicos. Para Vygotski (apud Damázio, 2000), a escola é um local privilegiado onde os alunos se apropriam das significações dos conceitos e dos conhecimentos matemáticos que são entendidos, não como um saber concluso, mas:

A Matemática é um conhecimento historicamente produzido no movimento das relações sociais, isto é, um conjunto de práticas sociais nas quais foram construídas formas de significações e se materializaram como conhecimento científico (DAMAZIO, 2000).

Quando nos referimos ao cenário do ensino de trigonometria no Brasil, deparamo-nos com visões diferentes a esse respeito, porém há unanimidade em relação às dificuldades no ensino da matemática como um todo e especificamente no que tange ao conteúdo de trigonometria.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais, há um destaque para o estudo da trigonometria, no qual se enfatiza o seu potencial no que diz respeito ao desenvolvimento de habilidades e competências.

Segundo o PCN:

Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. [...] o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de

problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL, 1998)

Perfazendo a jornada histórica do ensino de matemática, percebe-se que a disciplina sempre enfrentou entraves que, de certa forma, justificam o péssimo desempenho dos alunos quando comparados aos de outros países até menos desenvolvidos economicamente.

Investigando a bibliografia acerca das dificuldades enfrentadas pelos alunos, descobre-se que a experiência dos docentes e discentes em sala de aula de matemática tem apresentado uma nítida distância entre os dois pressupostos básicos no ato do ensino: o de proporcionar ao aluno conhecimento e o de tornar possível o alcance por parte do aluno ao que está subjacente e diz respeito ao conhecimento abordado.

Portanto, no âmbito do ensino, além da não concretização dos já referidos pressupostos, o que se tem obtido na maioria das vezes por resultado, quando muito geralmente, é uma confusa compreensão acerca das ideias sobre uma dada área do conhecimento abordado.

Isso se aplica às mais diversas áreas de ensino da matemática e, especificamente nesse trabalho, abordamos os aspectos tocantes ao ensino da trigonometria e mais especificamente ao Teorema de Pitágoras.

Sabe-se que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para sua própria produção ou construção” (FREIRE, 1991). Contudo, a aprendizagem é facilitada quando o aluno vivencia sua construção e reconhece que está ligada ao seu cotidiano, com sua realidade, que é concreta e que difere daquela realidade abstrata que muitas vezes o professor transcreve e tenta explicar.

Tendo em vista essa realidade, é aconselhável fazer os encontros com atividades que proporcionem, além do conhecimento, a curiosidade e a criatividade, pois os educadores de matemática devem procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, já que é, segundo Brasil (1997),

[...] importante destacar que a Matemática deverá ser vista pelo aluno como um conhecimento que pode favorecer o desenvolvimento do seu raciocínio, de sua capacidade expressiva, de sua sensibilidade estética e de sua imaginação. (BRASIL, 1997)

Assim sendo, não se pode deixar de levar em conta o papel da educação, ou seja, que ela deve instrumentalizar o homem como um ser capaz de agir sobre o mundo e, ao mesmo tempo, compreender a ação exercida. “A escola não é a transmissora de um saber acabado e definitivo, não devendo separar teoria e prática, educação e vida” (ARANHA, 1998), pois o indivíduo que é educado para compreender o seu papel na sociedade percebe que é capaz de analisar criticamente uma situação e, a partir daí, tomar a decisão mais coerente diante da mesma, podendo, conseqüentemente, julgar o que pode e deve ser modificado.

Tendo exposto o que entendemos por ensino de matemática e educação, passamos agora a esclarecer como se desenvolveu em sala uma experiência que se mostrou eficiente e facilitadora no ensino de trigonometria e mais especificamente do Teorema de Pitágoras. Com esse intuito, lançamo-nos na busca de uma fundamentação teórica que ajudasse a vencer os desafios – cada parte da atividade relatada teve seu embasamento teórico – para, assim, demonstrar que, com interesse e boa vontade, é possível sair de uma aula tradicional e inovar na sala de aula.

O presente trabalho aborda um conjunto de atividades experimentais com a finalidade de demonstrar um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática: o Teorema de Pitágoras. Como ele possui mais de 400 demonstrações existentes, optamos por utilizar a demonstração dada por Dr. Rudolf Wolf, podendo ser abordada de forma lúdica, pois trata-se de uma demonstração geométrica através da dissecção de figuras planas.

A princípio, o conceito de semelhança em sua essência mais ampla será abordado, as áreas das figuras planas serão estudadas de um modo geral e as definições e propriedades dos polígonos equidecomponíveis serão apresentadas.

Posteriormente, será realizado um breve resgate histórico sobre as diversas demonstrações do Teorema e da vida de Pitágoras. Destacamos, também, uma maneira de achar algumas ternas pitagóricas, utilizando a sequência de Fibonacci descoberta pelo matemático Charles W. Raine.

Por fim, foram propostas e desenvolvidas atividades experimentais em sala de aula com a utilização de moldes em EVA, explorando o Teorema de Pitágoras e algumas de suas aplicações.

Após a finalização desse bloco de experimentos, foi feita, junto aos alunos, a análise dos resultados e a verificação da aprendizagem. Neste, momento foram

verificados os progressos na aprendizagem da Matemática e resultados bastante satisfatórios. As atividades aqui propostas podem ser utilizadas e adaptadas pelo professor, de acordo com o nível de ensino e do conhecimento de seu aluno.

2. Figuras semelhantes

Segundo Lima (2009), há vários assuntos em livros didáticos que são tratados apenas na forma mais específica e até mesmo incompleta, como é o caso de semelhança entre figuras, que muitas vezes é abordado somente para os polígonos, relacionando os lados e os ângulos, porém “gostaríamos de dizer quando duas figuras são semelhantes mesmo quando elas não sejam polígonos.” (LIMA, 2009).

E ainda para Lima (2009):

“Há muito tempo que se conhece a definição correta e geral de semelhança. Ela é extremamente simples e permite que se desenvolva toda a teoria elementarmente. Nossos livros didáticos poderiam adotá-la com vantagens. Assim fazendo, evitariam um tratamento incompleto, no qual se dá uma definição válida apenas para polígonos enquanto a maior parte dos exemplos com que nos deparamos não se enquadra nessa categoria.” (LIMA, 2009).

Portanto, iremos adotar neste trabalho a definição geral de semelhança por ser considerada a mais adequada e validada para qualquer figura.

2.1 Semelhança definição geral

Sejam F e F' figuras, do plano ou do espaço, e n um número real positivo.

Dizemos que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança n , se existe uma correspondência biunívoca $f: F \rightarrow F'$ entre todos os pontos de F e os pontos de F' , seguindo a seguinte propriedade:

Se A, B são pontos quaisquer de F e $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ são seus correspondentes em F' então $\overline{A'B'} = n \cdot \overline{AB}$.

A esta correspondência biunívoca damos o nome de semelhança de razão n entre F e F' e se $A' = f(A)$, então A e A' são ditos homólogos.

Toda figura é semelhante a si própria, pois a função identidade $f: F \rightarrow F'$ é uma semelhança de razão 1 e a chamamos de isometria e ainda dissemos que elas são congruentes.

Se F é semelhante a F' então F' é semelhante a F , pois dada a função $f: F \rightarrow F'$ de razão n , a sua inversa $f^{-1}: F' \rightarrow F$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{n}$.

Se F é semelhante a F' e F' é semelhante a F'' então F é semelhante a F'' .

Com efeito: Se $f: F \rightarrow F'$, de razão de semelhança n e $f': F' \rightarrow F''$, de razão de semelhança n' , dado os pontos A e $B \in F$; $f(A) = A' \in F'$ e $f'(A') = A'' \in F''$; $f(B) = B' \in F'$ e $f'(B') = B'' \in F''$, temos:

De $f: F \rightarrow F'$ temos:

$$\overline{A'B'} = n \cdot \overline{AB} \quad (1)$$

e de $f': F' \rightarrow F''$:

$$\overline{A''B''} = n' \cdot \overline{A'B'} \quad (2)$$

De (1) e (2), vem:

$$\overline{A''B''} = n' \cdot n \cdot \overline{AB}.$$

Portanto, a função $f' \circ f: F \rightarrow F''$ é uma semelhança de razão $n \cdot n'$.

Dados dois segmentos de reta arbitrário \overline{AB} e \overline{CD} . Se $\overline{CD} = n \cdot \overline{AB}$, podemos definir uma semelhança $f: AB \rightarrow CD$, de razão n , correspondendo a cada ponto X do segmento AB um ponto X' do segmento CD tal que $\overline{CX'} = n \cdot \overline{AX}$.

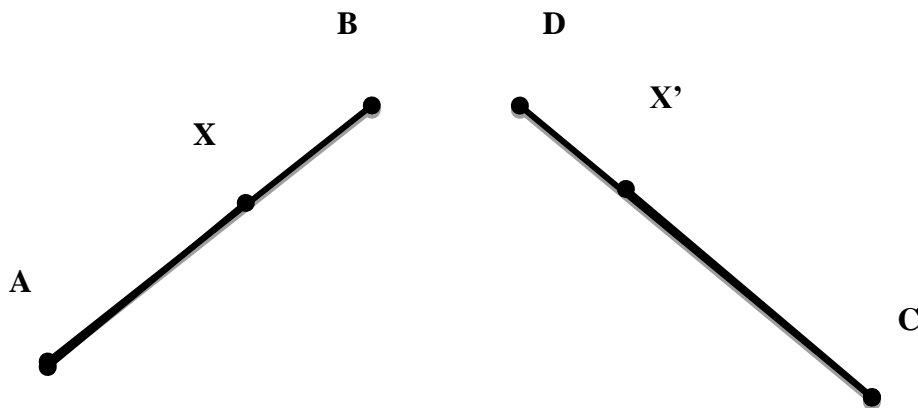


Figura 1: Semelhança entre os segmentos de reta AB e CD

Tomemos os pontos X e $Y \in AB$ e que X esteja entre A e Y , então X' está entre C e Y' , como na Figura 1. Logo:

$$\begin{aligned}\overline{X'Y'} &= \overline{CY'} - \overline{CX'} \\ &= n.\overline{AY} - n.\overline{AX} \\ &= n.(\overline{AY} - \overline{AX}) \\ &= n.\overline{XY}.\end{aligned}$$

Lema: *Toda semelhança transforma pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração: Seja $f: F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão n . Dado três pontos A, B e $C \in F$ tais que C pertença ao segmento AB , como na Figura 2.

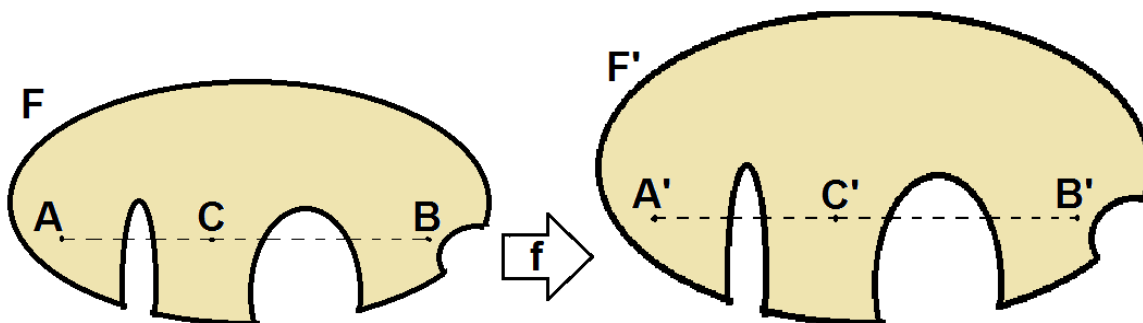


Figura 2: Pontos A, B e C na figura F e seus homólogos A', B' e C' na figura F'

Logo:

$$\begin{aligned}\overline{A'C'} + \overline{C'B'} &= n.\overline{AC} + n.\overline{CB} \\ &= n.(\overline{AC} + \overline{CB}) \\ &= n.\overline{AB} \\ &= \overline{A'B'}.\end{aligned}$$

Daí concluímos que C' pertence a $A'B'$.

Teorema 1: *Uma semelhança $f: F \rightarrow F'$, de razão n , transforma:*

- i) Todo segmento de reta contido em F num segmento de reta de razão n contido em F' .*
- ii) Um círculo de raio r contido em F num círculo de raio $n \cdot r$ contido em F' .*
- iii) Pontos interiores a F em pontos interiores de F' .*
- iv) Pontos do contorno de F em pontos do contorno de F' .*
- v) Vértices de F em vértices de F' (se F e F' forem polígonos).*

Demonstração: **i)** Dado um segmento de reta AB contido em F , sejam $A' = f(A)$ e $B' = f(B)$.

Para todo ponto C pertencente a AB , seu homólogo $C' = f(C)$ pertence a $A'B'$ em virtude do Lema.

Reciprocamente, dado qualquer ponto C' pertencente a $A'B'$, temos $C' = f(C)$, onde $C = f^{-1}(C')$.

Daí, como f^{-1} é uma semelhança, segue que C pertence a AB .

Portanto, a semelhança f estabelece uma correspondência biunívoca entre os pontos dos segmentos de reta AB e $A'B'$.

ii) Um círculo de centro O e raio r contido em F é a reunião dos segmentos de reta AO tais que $\overline{OA} = r$.

Sua imagem por f é uma reunião dos segmentos $O'A'$, com $O' = f(O)$, tais que $\overline{O'A'} = n \cdot r$, portanto é o círculo de centro O' e raio $n \cdot r$.

iii) Um ponto A diz-se interior a F quando é centro de algum círculo de raio r contido em F .

Seu homólogo $A' = f(A)$ é o centro do círculo de raio $n \cdot r$, contido em F' .

Portanto, A' é ponto interior de F' .

iv) Diz-se que um ponto A pertence ao contorno da figura F quando A pertence a F , mas não é interior a F , ou seja, nenhum círculo de centro A pode estar inteiramente contido em F .

Com isso, $A' = f(A)$ deve pertencer ao contorno de F' , pois se A' estivesse no interior de F' , então $A = f^{-1}(A')$ também estaria no interior de F .

v) Supondo que F e F' sejam polígonos e que A seja um vértice de F .

Em particular, A está no contorno de F logo, seu homólogo $A' = f(A)$ está no contorno de F' .

Se não fosse vértice de F , o ponto A' pertenceria ao lado $B'C'$ de F' , sendo diferente de $B' = f(B)$ e $C' = f(C)$.

Então, A pertenceria ao lado BC de F , com $A \neq B$ e $A \neq C$, logo, A não seria vértice de F .

2.2 Teorema Fundamental de Semelhança

Sejam O um ponto do plano Π ou do espaço Σ e n um número real não negativo.

Uma função $f: \Pi \rightarrow \Pi$ ou $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ é denominado uma homotetia de centro O e razão n , se: $f(O) = O$ e, para todo ponto $A \neq O$, temos $f(A) = A'$, onde A' é o ponto da semirreta AO , tal que $\overline{OA'} = n \cdot \overline{OA}$.

A homotetia de razão $n = 1$ é a identidade, uma homotetia transforma toda reta que passa por O nela mesma.

A homotetia é uma correspondência biunívoca onde a sua inversa possui o mesmo centro O e razão igual a $\frac{1}{n}$.

Duas figuras F e F' são homotéticas, se existe uma homotetia f tal que $f(F) = F'$.

Numa homotetia os pontos O , A e A' são sempre colineares. Se a razão $n > 1$, temos que os pontos O , A e A' , nesta ordem, são colineares e se $0 < n < 1$ temos a ordem O , A' e A .

Teorema 2: *Toda homotetia é uma semelhança que transforma qualquer reta em si própria ou numa reta paralela.*

Demonstração: Seja f uma homotetia de centro O e razão n .

O caso $n = 1$ é claro.

Supondo $n \neq 1$. Consideremos dois pontos quaisquer A e B .

i) Se O , A e B forem colineares então

$$\overline{A'B'} = n \cdot \overline{AB}.$$

ii) Para O , A e B não colineares, como na Figura 3(a),

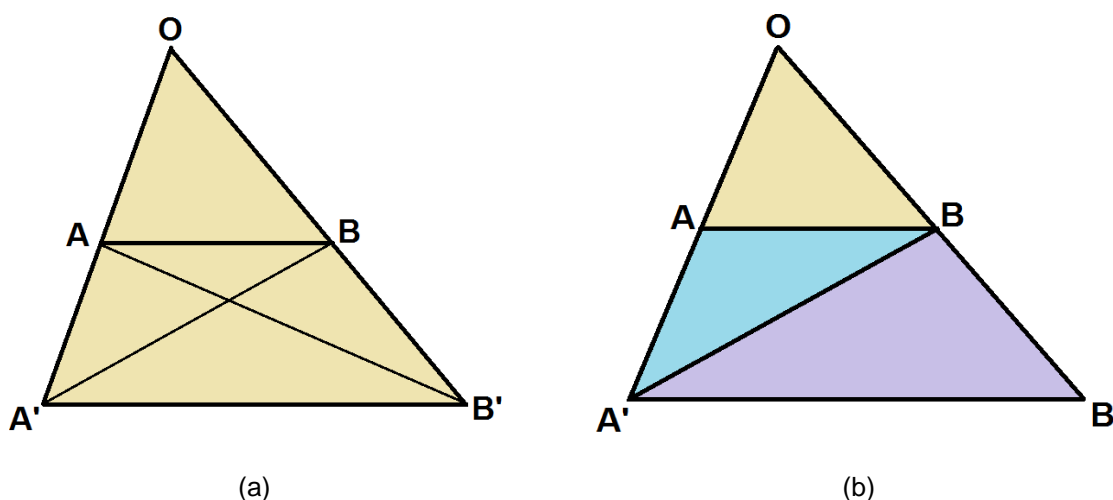


Figura 3: Homotetia: Transformação de reta em reta paralela

dado o triângulo OAB' , como $\overline{OA'} = n \cdot \overline{OA}$ e $\overline{OB'} = n \cdot \overline{OB}$, se $[RST]$ denota a área de um triângulo RST , como $[OAB] = \frac{\overline{OA}}{2} \cdot h$, onde h é a altura do triângulo OAB , concluímos que:

$$[OBA'] = \frac{\overline{OA'} \cdot h}{2} = \frac{n \cdot \overline{OA} \cdot h}{2} = n \cdot [OAB] \quad (1)$$

$$[OAB'] = \frac{\overline{OB'} \cdot h}{2} = \frac{n \cdot \overline{OB} \cdot h}{2} = n \cdot [OBA] \quad (2)$$

De (1) e (2), vem que: $[OAB'] = [OBA']$.

Agora, subtraindo a área $[OAB]$ da igualdade acima obtemos $[ABA'] = [BAB']$.

Como a base AB é comum, então as alturas dos triângulos ABA' e BAB' são iguais, portanto AB é paralela a $A'B'$.

E ainda, como $\overline{OA'} = n \cdot \overline{OA}$, temos da Figura 3 (b), que:

$$[OAB] + [ABA'] = [OBA'] = n \cdot [OAB]. \quad (3)$$

E como, $\overline{OB'} = n \cdot \overline{OB}$, temos que:

$$[OAB] + [ABA'] + [ABA'] = n \cdot ([OAB] + [ABA']) = n \cdot [OAB]. \quad (4)$$

Subtraindo membro a membro de (3) e (4), obtemos:

$$[BA'B'] = n.([OA'B] - [OAB]) = n.[ABA'].$$

Como os triângulos $BA'B'$ e ABA' possuem a mesma altura h' , e $[BA'B'] = \overline{A'B'} \cdot \frac{h'}{2}$ e $[ABA'] = \overline{AB} \cdot \frac{h'}{2}$, então:

$$n = \frac{[BA'B']}{[ABA']} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

Corolário: Toda paralela a um lado de um triângulo determina um triângulo parcial semelhante ao triângulo total.

Demonstração: Para o triângulo ABC , da Figura 4, seja DE paralelo à BC .

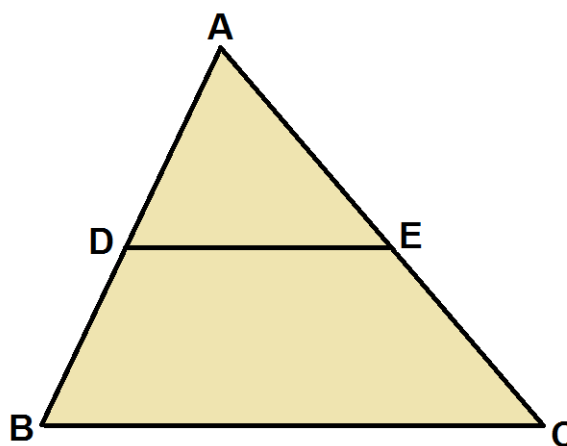


Figura 4: Reta paralela ao lado do triângulo determinando um triângulo parcial

A homotetia f de centro A e razão $n = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$ transforma D em B e E em um ponto C' pertencente à semirreta AC .

Como a imagem de DE é o segmento BC' , que é paralelo a DE e começando em B , temos que C' pertence às retas AC e BC , logo $C' = C$.

Portanto, $f(A) = A$, $f(D) = B$ e $f(E) = C$, isto é, f é uma semelhança entre os triângulos ADE e ABC .

Recíproca do Corolário: Dado o triângulo ABC , temos os pontos D do lado AB e E no lado AC . Se $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$ então DE é paralelo a BC .

Demonstração: Considerando f a homotetia de centro A e razão $n = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}}$, vemos que $B = f(D)$ e $C = f(E)$, logo pelo Teorema 2 vem que ED é paralelo a BC .

2.3 Semelhança de Triângulos

Quando aplicamos a definição de semelhança dada anteriormente, a triângulos chegamos à definição tradicional. Dois triângulos são semelhantes se os lados correspondentes são proporcionais e se os ângulos correspondentes forem congruentes.

Teorema 3: Dois triângulos semelhantes têm ângulos congruentes e lados homólogos proporcionais.

Demonstração: Seja $f: ABC \rightarrow A'B'C'$ uma semelhança de razão n entre os triângulos ABC e $A'B'C'$, com $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ e $C' = f(C)$, como mostramos na Figura 5.

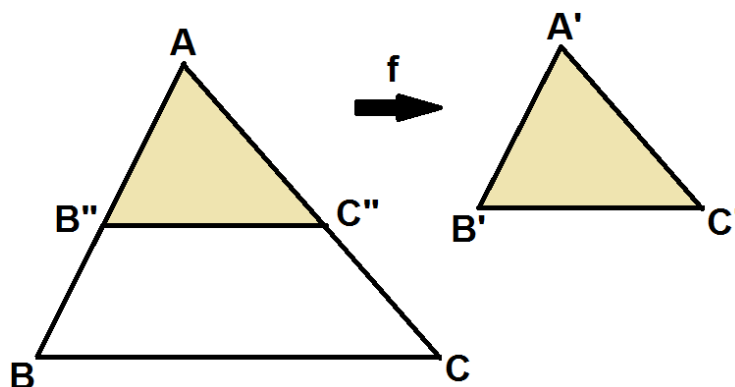


Figura 5: Triângulos Semelhantes

Então, pela definição de semelhança,

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = n.$$

Portanto os triângulos têm lados homólogos proporcionais.

Suponhamos, para melhor entendimento, que $0 < n < 1$, como na figura acima.

A homotetia f de centro A e razão n , transforma o triângulo ABC no triângulo parcial $AB''C''$, com $B''C''$ paralela a BC . Então, as medidas dos ângulos $\angle B'' = \angle B$ e $\angle C'' = \angle C$.

Mas os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, pois:

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'} = n \cdot \overline{AB}$$

$$\overline{AC''} = \overline{A'C'} = n \cdot \overline{AC}$$

e

$$\overline{B''C''} = \overline{B'C'} = n \cdot \overline{BC}$$

portanto:

$$\angle A = \angle A', \angle B = \angle B' \text{ e } \angle C = \angle C'.$$

Teorema 3 (Recíproca): *Se dois triângulos cumprem uma das três condições abaixo, então eles são semelhantes:*

- i) Tiver lados proporcionais.*
- ii) Tiver ângulos congruentes.*
- iii) Tiver um ângulo congruente compreendido entre lados proporcionais*

Demonstração: i) Sejam ABC e $A'B'C'$ triângulos tais que:

$$\overline{A'B'} = n \cdot \overline{AB}, \overline{A'C'} = n \cdot \overline{AC} \text{ e } \overline{B'C'} = n \cdot \overline{BC}, \text{ com } n > 0. \text{ (Isto é, triângulos com lados proporcionais).}$$

Para $n > 0$, considere a homotetia de centro A e razão n . Tal homotetia transforma o triângulo ABC no triângulo $AB''C''$, como na Figura 5, onde os lados medem:

$$\overline{AB''} = n \cdot \overline{AB}, \quad \overline{AC''} = n \cdot \overline{AC} \quad \text{e} \quad \overline{B''C''} = n \cdot \overline{BC}.$$

Logo,

$$\overline{A'B'} = \overline{AB''}, \quad \overline{A'C'} = \overline{AC''} \quad \text{e} \quad \overline{B'C'} = \overline{B''C''}.$$

Portanto, os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes por possuírem lados congruentes. E como o triângulo $AB''C''$ é semelhante ao triângulo ABC , então os Triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

ii) Considere os triângulos ABC e $A'B'C'$, tais que:

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B' \quad \text{e} \quad \angle C = \angle C'.$$

Nos lados AB e AC , tomemos os pontos B'' e C'' , respectivamente, de modo que:

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'} \quad \text{e} \quad \overline{AC''} = \overline{A'C'}.$$

Os triângulos $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, pois possuem um ângulo congruente ($\angle A = \angle A'$) compreendido entre dois lados congruentes e como $\angle B = \angle B''$, logo $\angle B'' = \angle B'$.

E ainda, a reta $B''C''$ é paralela à BC e daí os triângulos $AB''C''$ e ABC são semelhantes e como $AB''C''$ e $A'B'C'$ são congruentes, resulta que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$.

iii) Suponhamos que os triângulos ABC e $A'B'C'$, são tais que:

$$\angle A = \angle A', \quad \overline{A'B'} = n \cdot \overline{AB} \quad \text{e} \quad \overline{A'C'} = n \cdot \overline{AC}.$$

Tomamos os pontos B'' e C'' sobre as retas AB e AC , respectivamente, de certa forma que:

$$\overline{AB''} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{AC''} = \overline{A'C'}.$$

A homotetia de centro A e razão n transforma AB e AC em AB'' e AC'' , respectivamente, pois:

$$\overline{AB''} = n \cdot \overline{AB} \text{ e } \overline{AC''} = n \cdot \overline{AC}.$$

Portanto, a homotetia é uma semelhança entre os triângulos ABC e $AB''C''$ e como $AB''C''$ é congruente a $A'B'C'$, segue que os triângulos ABC e $A'B'C'$ são semelhantes.

2.4 Congruência de Triângulos

Como vimos anteriormente que duas figuras são congruentes quando a função identidade $f: F \rightarrow F'$ é uma semelhança de razão 1.

Definição: dois triângulos ABC e $A'B'C'$ são congruentes quando é possível estabelecer uma correspondência entre os seus vértices, de modo que os ângulos internos em vértices correspondentes sejam iguais, bem como o sejam os lados opostos a vértices correspondentes.

Dado os triângulos ABC e $A'B'C'$, como mostramos na Figura 6, com a correspondência a seguir:

$$A \leftrightarrow A'; \quad B \leftrightarrow B'; \quad C \leftrightarrow C'.$$

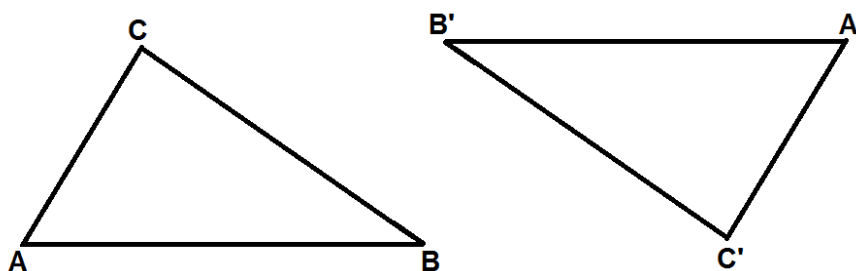


Figura 6: Triângulos Congruentes

Então, temos

$$\hat{A} = \hat{A}'; \hat{B} = \hat{B}'; \hat{C} = \hat{C}'$$

$$\overline{AB} = \overline{A'B'}, \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ e } \overline{AC} = \overline{A'C'}.$$

Essas são todas as condições para que dois triângulos sejam congruentes, porém existem condições mínimas para que eles sejam congruentes. Tais condições são chamadas de critérios ou casos de congruências de triângulos

Axioma 1 (LAL): Se dois triângulos têm ordenadamente dois lados homólogos iguais e o ângulo formado por esses lados iguais, então eles são congruentes.

Dado os triângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 7, temos:

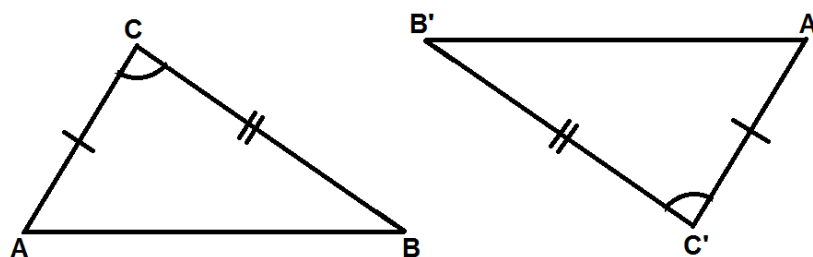


Figura 7: Caso LAL de congruência de triângulos

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \hat{C} = \hat{C}' \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right\} \stackrel{LAL}{\Rightarrow} ABC \equiv A'B'C'$$

com as correspondências entre os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, segue, que

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \overline{AB} = \overline{A'B'}.$$

Axioma 2 (ALA): Se dois triângulos têm ordenadamente dois ângulos homólogos iguais e o lado entre esses dois ângulos homólogos iguais, então eles são congruentes.

Dado os triângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 8, temos:

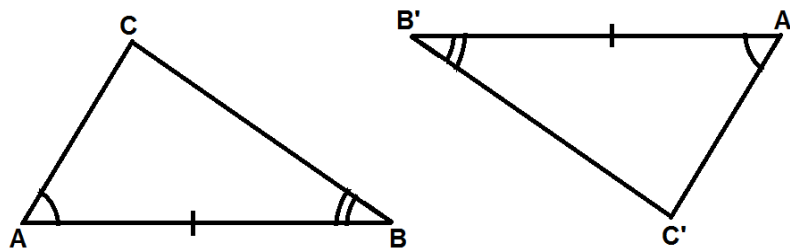


Figura 8: Caso ALA de congruência de triângulos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{A}' \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{B} = \hat{B}' \end{array} \right\} \xRightarrow{ALA} ABC \equiv A'B'C'$$

com as correspondências entre os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, segue, que

$$\hat{C} = \hat{C}', \overline{BC} = \overline{B'C'} \text{ e } \overline{AC} = \overline{A'C'}.$$

Axioma 3 (LLL): Se dois triângulos têm ordenadamente os três lados homólogos iguais, então eles são congruentes.

Dado os triângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 9, temos:

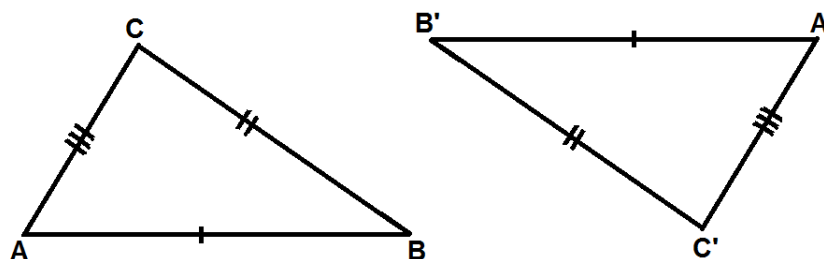


Figura 9: Caso LLL de congruência de triângulos

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \\ \overline{BC} = \overline{B'C'} \end{array} \right\} \xRightarrow{LLL} ABC \equiv A'B'C'$$

com as correspondências entre os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, segue, que

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \hat{C} = \hat{C}'.$$

Axioma 4 (LAA_o): Se dois triângulos têm ordenadamente um lado homólogo iguais, um ângulo adjacente a este lado igual e um ângulo oposto a esse lado igual, então eles são congruentes..

Dado os triângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 10, temos:

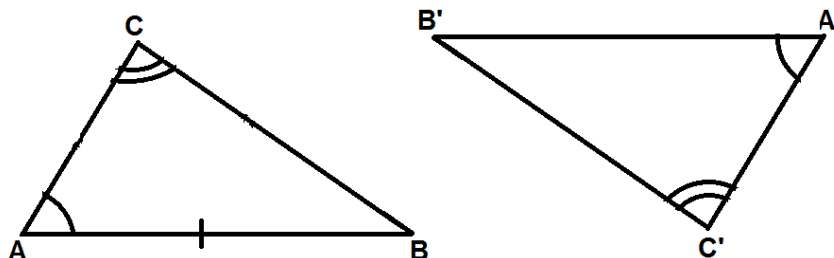


Figura 10: Caso LAA_0 de congruência de triângulos

$$\left. \begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{array} \right\} \xrightarrow{LAA_0} ABC \equiv A'B'C'$$

com as correspondências entre os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, segue, que

$$\overline{AC} = \overline{A'C'}, \hat{B} = \hat{B}' \text{ e } \overline{BC} = \overline{B'C'}.$$

.Axioma 5 (Caso Especial): Se dois triângulos retângulos têm ordenadamente iguais um cateto e uma hipotenusa, então eles são congruentes..

Dado os triângulos retângulos ABC e $A'B'C'$ da Figura 11, temos:

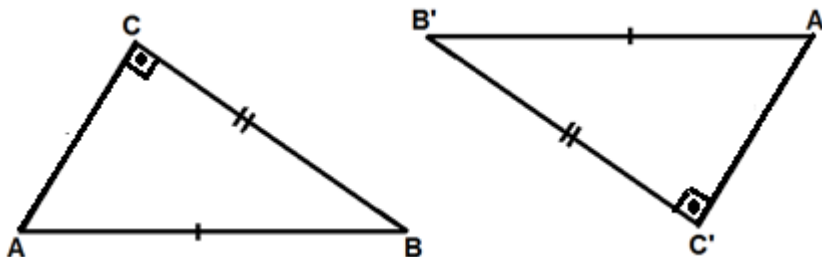


Figura 11: Caso especial de congruência de triângulos

$$\left. \begin{array}{l} \hat{C} = \hat{C}' = 90^\circ \\ \overline{AB} = \overline{A'B'} \\ \overline{AC} = \overline{A'C'} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Caso Especial}} ABC \equiv A'B'C'$$

com as correspondências entre os vértices $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$, segue, que

$$\overline{AC} = \overline{A'C'}, \hat{A} = \hat{A}' \text{ e } B = B'.$$

3. Área de Figuras Planas

3.1 Área dos Polígonos

Para Lima (2010) polígono é uma linha poligonal fechada sem auto-interseções, isto é, cada lado tem apenas um ponto comum com o lado anterior e com o seguinte, mas não com os demais. E, ainda define figuras planas convexas, como sendo um subconjunto F do plano que, para quaisquer dois pontos X e Y em F , o segmento de reta XY está inteiramente contido em F .

Segundo Lima (2009), estabelecida uma unidade de área, a área de uma figura F é um número que exprime quantas vezes a figura F contém a unidade de área.

Para Muniz Neto (2013) ao definirmos as áreas dos polígonos, supomos que as seguintes afirmações sejam válidas:

1. Todos os polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Quando repartimos um polígono convexo em um número finito de outros polígonos convexas (i.e., se um polígono é a união de um número finito de polígonos convexas), a soma das áreas dos polígonos menores é igual à área do polígono inicial.
3. Se um polígono está contido em outro, então a área do maior é maior que a área do menor.
4. Para um quadrado de lado unitário, a sua área é igual a uma unidade.

3.1.1 Área do Quadrado

Sendo válidas as afirmações anteriores, dado um quadrado $ABCD$ de lado $AB = n$, com $n \in \mathbb{N}$, decompomos o quadrado $ABCD$ em n^2 quadrados de lados 1, como mostra a Figura 12.

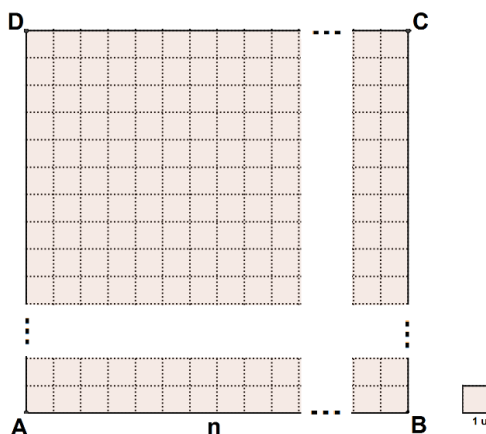


Figura 12: Quadrado de lado n e quadrado unitário

Chamamos A_n a área do quadrado maior, então a área A_n é a soma das áreas dos n^2 quadrados de lado 1, portanto:

$$A_n = n^2.$$

Agora tomemos um quadrado $ABCD$ de lado $AB = \frac{m}{n}$, ou seja, um número racional, com m e $n \in \mathbb{N}$, e sendo A_n a sua área.

Decompomos o quadrado $ABCD$ em m segmentos de lado $\frac{1}{n}$ e traçamos $m - 1$ paralelas ao lado AB e ao lado BC com distância $\frac{1}{n}$, como indicamos na Figura 13.

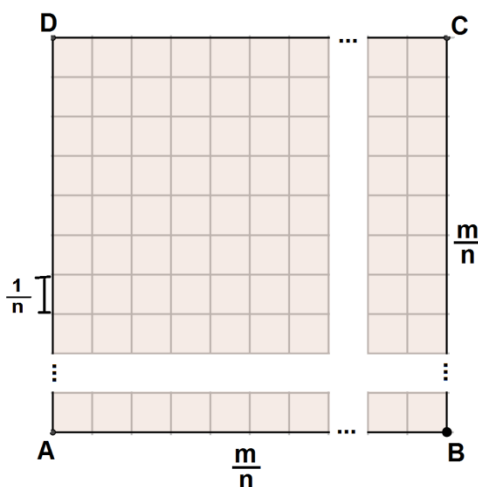


Figura 13: Quadrado de lado m/n

Temos que a área do quadrado $ABCD$ será dada por:

$$A_n = \frac{1}{n^2} \cdot m^2 = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Então se o lado do quadrado for igual a $l = \frac{m}{n}$, então;

$$A_n = l^2.$$

Já para quadrados $ABCD$, da Figura 14, de lado $AB = l$, com l irracional, seja a um número tal que $a < l^2$. Tomamos um número racional r , com $r < l$, tal que r seja muito próximo de l , satisfazendo:

$$a < r^2 < l^2.$$

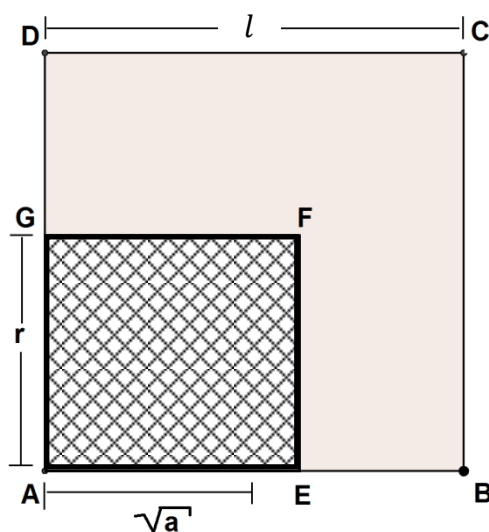


Figura 14: Quadrado de lado l incomensurável.

Agora tomado um quadrado $AEFG$ no interior do quadrado $ABCD$, de lado r , e seja a sua área igual a A , então $A = r^2$. Como o quadrado $AEFG$ está contido no quadrado $ABCD$, temos $A < A_{ABCD}$, onde A_{ABCD} é a área do quadrado $ABCD$. Como $a < r^2$, então $a < A_{ABCD}$.

Portanto, para todo número real a , com $a < l^2$ temos que $a < A_{ABCD}$.

De forma análoga, tomando um número real b qualquer, tal que $b > l^2$ concluímos que $b > A_{ABCD}$. Portanto, $a < A_{ABCD} < b$ para quaisquer números reais a e b , $a < l^2 < b$. Assim $l^2 - A_{ABCD} < b - a$ e $l^2 - A_{ABCD} > a - b$.

Logo $|l^2 - A_{ABCD}| < b - a$. Como a e b são quaisquer, concluímos que $A_{ABCD} = l^2$.

Isso decorre do fato que se s é um número real satisfazendo $0 \leq s < \varepsilon$, para qualquer $\varepsilon > 0$, então $s = 0$. De fato, suponhamos que $s \neq 0$. Então $s > 0$ e existe um número natural n tal que $\frac{1}{n} < s$. Tomando $\varepsilon = \frac{1}{n}$, temos uma contradição. Portanto $s = 0$.

3.1.2 Área do Retângulo

Por definição, o retângulo é um quadrilátero com os quatro ângulos congruentes de 90° .

Dado o retângulo $ABCD$, da Figura 15, de lados medindo $AB = a$ e $BC = b$, a e b números naturais, através de paralelas aos lados decomparamos este retângulo em ab quadrados unitários, de certo modo que a sua área seja dada por:

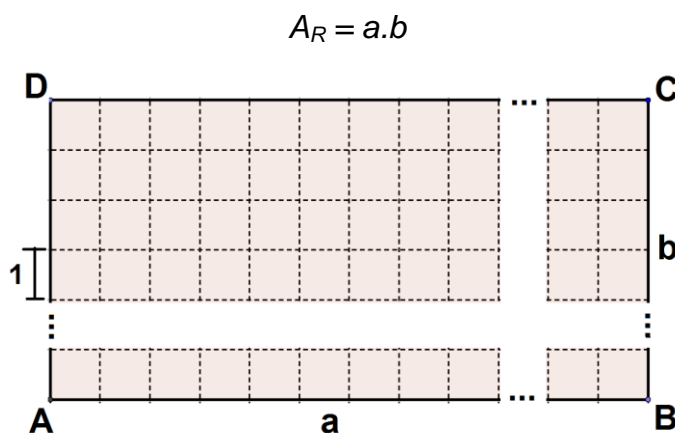


Figura 15: Retângulo de lado ab

Para o retângulo $ABCD$ com lados $AB = a$ e $BC = b$, com a e b números racionais, ou seja, $a = \frac{m}{n}$ e $b = \frac{p}{n}$, m , n e p números naturais, como mostrado na Figura 16, com mesmo denominador n . Dividimos os lados em segmentos de comprimento $\frac{1}{n}$, um dos lados ficará com m quadrados e o outro com p quadrados unitários.

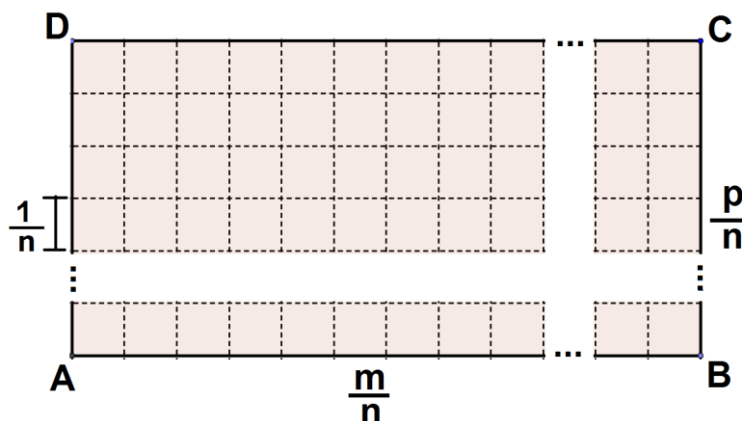


Figura 16: Retângulo de lados m/n e p/n

A área de cada quadrado unitário será dada por:

$$A_1 = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}.$$

Já a área do retângulo $ABCD$ será:

$$A_R = m \cdot p \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{n} = a \cdot b.$$

Logo, a área do retângulo é o produto da sua base pela sua altura.

Caso geral, para a área de um retângulo $ABCD$ de lados $AB = a$ e $BC = b$, quaisquer, construímos o quadrado mostrado na Figura 17.

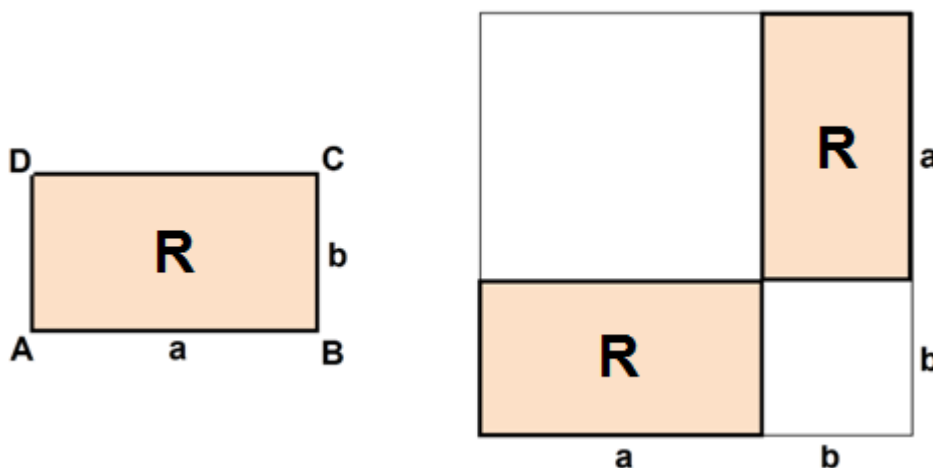


Figura 17: Retângulo $ABCD$ e Quadrado de lado $a + b$

A área do quadrado é dada por:

$$\begin{aligned} A_Q &= (a + b)^2 = a^2 + 2a.b + b^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2a.b. \end{aligned}$$

Como a^2 é a área do quadrado menor e b^2 é a área do quadrado maior, temos que $2a.b$ é a área de dois retângulos congruente a $ABCD$, ou seja:

$$2.A_R = 2a.b$$

$$A_R = \frac{2a.b}{2} = a.b.$$

3.1.3 Área do Paralelogramo

O paralelogramo é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

Tomamos um dos lados do paralelogramo e traçamos a perpendicular passando por um dos vértices até o outro lado oposto. Esta é a altura do paralelogramo.

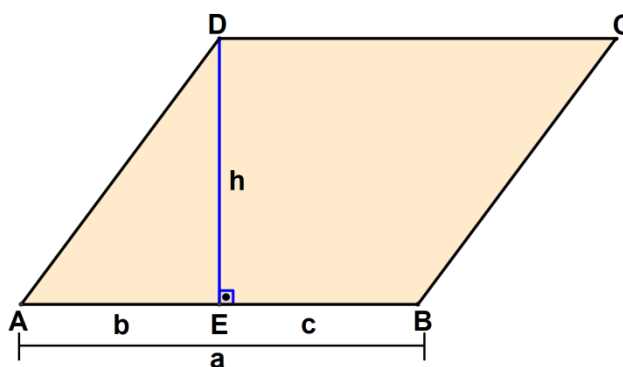


Figura 18: Paralelogramo de base a e altura h

Sendo o paralelogramo $ABCD$, como mostramos na Figura 18, de base $AB = a$, altura $DE = h$, $AE = b$ e $EB = c$.

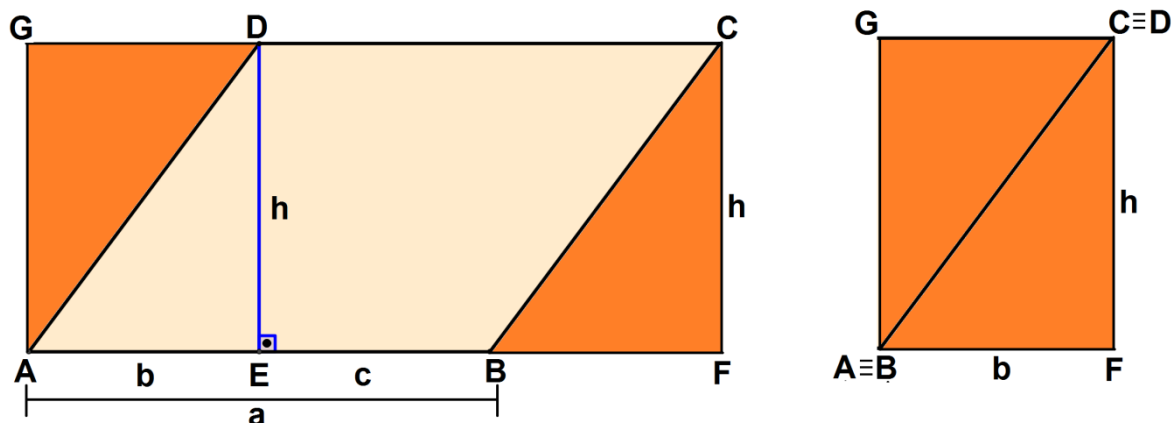


Figura 19: Retângulo de lado $a + b$ e altura h e Retângulo de lados b e h

Construímos o retângulo $AFCG$ da seguinte forma: prolongamos os lados AB e CD , a seguir chamamos de F a projeção ortogonal do ponto C sobre a reta por AB e de G a projeção de A sobre a reta CD . Note que os triângulos BFC e DGA são congruentes (triângulos retângulos com hipotenusas congruentes e catetos CF e AG congruentes). Também temos que os triângulos AED e DGA são congruentes pela mesma razão. Logo, $BF = GD = AE = b$.

Assim, o retângulo $AFCG$ tem base $a + b$ e altura h .

Logo,

$$A_{AFCG} = (a + b).h = a.h + b.h.$$

Note também que o retângulo $AFCG$ é formado por dois triângulos congruentes BFC e ADC e o paralelogramo $ABCD$, como vemos na Figura 19, quando unimos os dois triângulos temos um retângulo R de área $A_R = b.h$, portanto:

$$a.h + b.h = A_P + b.h$$

Logo,

$$A_P = a.h.$$

Deste modo, a área de qualquer paralelogramo é o produto de qualquer uma das bases pela altura relativa à base escolhida.

3.1.4 Área do Triângulo

O triângulo é um polígono que possui três lados e notamos que a área de qualquer triângulo é a metade da área do paralelogramo como justificado a seguir.

Dado um triângulo ABC de base $AB = a$ e altura relativa à base passando por C de medida $CH = h$.

Traçamos uma paralela ao lado AB passando pelo vértice C e uma paralela ao lado AC passando pelo vértice B e marcamos o ponto D , interseção das duas paralelas, como mostramos na Figura 20. A área do paralelogramo $ABDC$, $A_P = a.h$, como os triângulos ABC e DCB são congruentes, pois BC é lado comum e $\widehat{ABC} = \widehat{DCB} = \alpha$ e $\widehat{ACB} = \widehat{DBC} = \beta$, então:

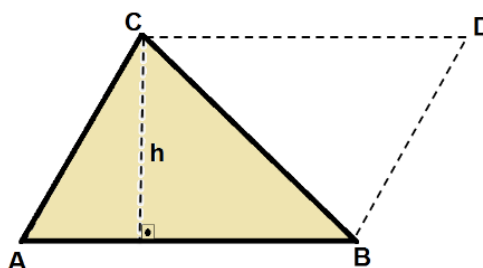


Figura 20: Triângulo de base a e altura h

$$A_P = A_{ABC} + A_{DCB} = 2 \cdot A_{ABC}.$$

Portanto,

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

Portanto, a área de qualquer triângulo será dada pela metade do produto de sua base pela altura relativa a essa base.

3.2 Área de polígonos regulares

3.2.1 Polígonos regulares

Segundo Dolce e Pompeu (2013), um polígono convexo é regular, se e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes. Portanto, todo polígono regular é equilátero e equiângulo.

Proposição 1: Quando dividimos uma circunferência em n arcos congruentes, com $n \geq 3$, temos as seguintes propriedades:

- a reunião das cordas determinadas por dois pontos consecutivos da divisão formam um polígono regular de n lados inscrito na circunferência;
- as tangentes traçadas pelos pontos de divisão determinam um polígono regular de n lados circunscrito à circunferência.

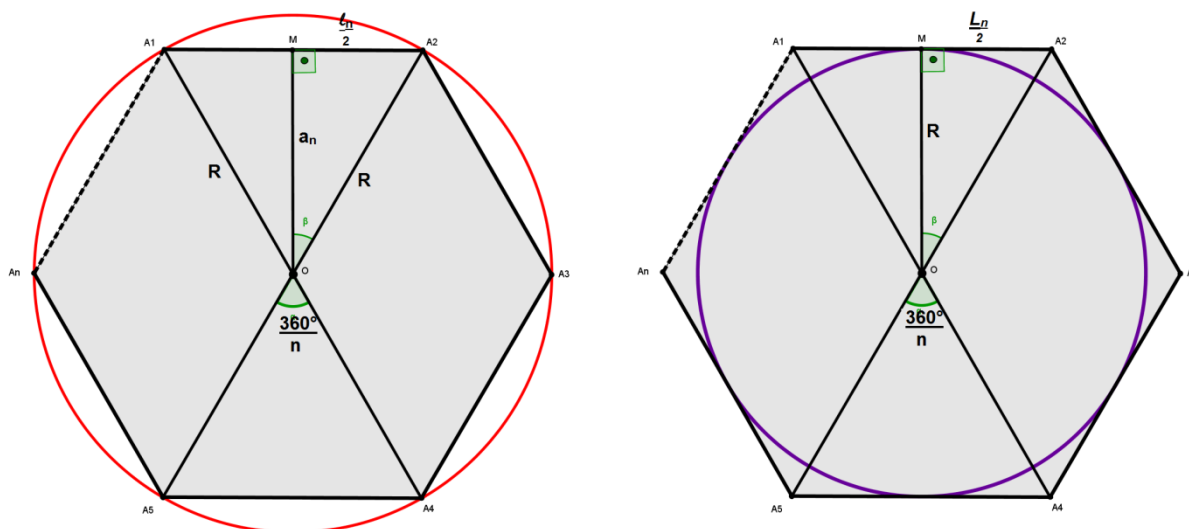


Figura 21: Polígonos regulares inscrito e circunscrito

Demonstração:

i) Sejam A_1, A_2, \dots, A_n os n pontos da divisão de uma circunferência λ . O polígono $A_1A_2\dots A_n$ de n lados está inscrito na circunferência, pois todos os seus vértices pertencem a λ , como vemos na Figura 21.

Sendo as medidas dos arcos $\widehat{A_1A_2} = \widehat{A_2A_3} = \dots = \widehat{A_nA_1}$, como arcos congruentes subentendem cordas congruentes, então os segmentos são congruentes:

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_2A_3} \equiv \dots \equiv \overline{A_nA_1}. \quad (1)$$

Os ângulos $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$, são congruentes, pois dado a medida de um ângulo $\hat{A}_i, i = 1, 2, \dots, n$, como cada um deles é um ângulo inscrito em λ , então \hat{A}_i tem como

medida a metade da soma das medidas dos $(n - 2)$ arcos congruentes em que λ ficou dividida. Ou seja,

$$\hat{A}_i = \frac{\widehat{A_1A_2} + \cdots + \widehat{A_{i-2}A_{i-1}} + \cdots + \widehat{A_{i+1}A_{i+2}} + \cdots + \widehat{A_{n-1}A_n}}{2}$$

Como os arcos são congruentes, temos:

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dots = \hat{A}_n. \quad (2)$$

De (1) e (2), temos que o polígono $A_1A_2\dots A_n$ é regular de n lados e está inscrito na circunferência λ .

ii) Traçamos tangentes a λ pelos pontos de divisão A_1, A_2, \dots e A_n , marcamos os pontos A'_1, A'_2, \dots e A'_n intersecção das tangentes e obtemos o polígono $A'_1A'_2\dots A'_n$ de n lados e circunscrito à circunferência.

Temos que os triângulos $A'_1A_2A_1, A'_2A_3A_2, \dots, A'_nA_1A_n$, são triângulos isósceles e congruentes.

De fato, vamos mostrar que $A'_1A_2A_1, A'_2A_3A_2$ são congruentes. As demais congruências são análogas.

Como $A_1A_2 \dots A_n$ é regular, segue que:

$$\overline{A_2A_1} = \overline{A_3A_2}.$$

Seja O o centro da circunferência λ que contém os vértices do polígono, temos $\angle A_1OA_2 = \frac{360^\circ}{n}$ e do fato de A_1OA_2 ser isósceles segue que

$$\angle OA_1A_2 = \angle OA_2A_1 = \frac{1}{2} \left(180^\circ - \frac{360^\circ}{n} \right) = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n}.$$

Como $A'_1A'_2$ é tangente a λ , temos $\angle OA_2A'_1 = 90^\circ$.

Logo, $\angle A'_1A_2A_1 = \angle OA_2A'_1 - \angle OA_2A_1 = 90^\circ - \left(90^\circ - \frac{180^\circ}{n} \right)$.

Portanto,

$$A'_1 \hat{A}_2 A_1 = \frac{180^\circ}{n}.$$

De modo análogo, obtém-se $A'_1 \hat{A}_1 A_2 = \frac{180^\circ}{n}$. Logo $A'_1 A_2 A_1$ é isósceles.

Pelos mesmos argumentos que $A'_2 A_3 A_2$ é isósceles com $A'_2 \hat{A}_3 A_2 = A'_2 \hat{A}_2 A_3 = \frac{180^\circ}{n}$.

O critério *ALA* (ângulo, lado, ângulo) implica a afirmação.

Assim,

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \dots = \hat{A}_n \quad (1)$$

e

$$\overline{A_1 A'_1} \equiv \overline{A'_1 A_2} \equiv \dots \equiv \overline{A_n A'_1}.$$

E somando convenientemente, temos que:

$$\overline{A'_1 A'_2} \equiv \overline{A'_2 A'_3} \equiv \dots \equiv \overline{A'_n A'_1}. \quad (2)$$

De (1) e (2), temos que o polígono $A'_1 A'_2 \dots A'_n$ é regular de n lados e está circunscrito na circunferência λ .

Na proposição anterior vimos que dada uma circunferência, obtém-se polígonos inscritos e circunscritos nessa circunferência. Vale a “recíproca” desse fato. Isto está descrito, mais precisamente, a seguir.

Proposição 2: Para todo polígono regular de n -lados, as seguintes propriedades são válidas:

- i) o polígono é inscritível numa circunferência.
- i) o polígono é circunscrito a uma circunferência.

Demonstração:

i) Considere um polígono regular $A_1A_2\dots A_n$ de n lados. Pelos pontos A_1, A_2 e A_3 tracemos a circunferência λ e seja O o seu centro. Provaremos que λ passa pelos demais vértices A_4, A_5, \dots, A_n , do polígono.

Vamos provar que A_4 pertence a λ .

Tomando os triângulos OA_1A_2 e OA_3A_4 , temos que eles são congruentes, pelo caso *LAL* (*lado-ângulo-lado*), pois:

$$\overline{A_1A_2} \equiv \overline{A_3A_4} \text{ (lados do polígono regular)}$$

$$\overline{OA_2} \equiv \overline{OA_3} \text{ (raio da circunferência)}$$

e considerando o triângulo isósceles A_2OA_3 , então $O\hat{A}_2A_3 \equiv O\hat{A}_3A_2$ e como os ângulos \hat{A}_2 e \hat{A}_3 do polígono são congruentes, segue que $O\hat{A}_2A_1 \equiv O\hat{A}_3A_4$, com isso, os triângulos OA_1A_2 e OA_3A_4 são congruentes, logo:

$$\overline{OA_2} \equiv \overline{OA_4}.$$

Portanto, o vértice A_4 do polígono pertence à circunferência λ .

Analogamente, temos que A_5, A_6, \dots, A_n pertencem à circunferência λ .

Portanto, o polígono regular $A_1A_2\dots A_n$ é inscrito numa circunferência.

ii) Tomando um polígono regular $A_1A_2\dots A_n$, temos, por i), que tal polígono está inscrito numa circunferência λ de centro O .

Sendo A'_1, A'_2, \dots, A'_n os pontos médios dos lados $\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, \dots, \overline{A_nA_1}$, temos:

$$\overline{OA'_1} \equiv \overline{OA'_2} \equiv \dots \equiv \overline{OA'_n}. \quad (1)$$

De fato, considere os triângulos $OA_1A'_1$ e $OA_2A'_2$.

Temos

$$\overline{OA'_1} \equiv \overline{OA'_2}$$

$$O\hat{A}_1A'_1 \equiv O\hat{A}_2A'_2$$

$$\overline{A_1A'_1} \equiv \overline{A_2A'_2}.$$

Pelo caso *LAL* (*lado, ângulo, lado*), segue que $OA_1A'_1$ e $OA_2A'_2$ são congruentes. Logo, $\overline{OA'_1} \equiv \overline{OA'_2}$. As outras congruências seguem de modo análogo.

Donde concluímos que O é o centro da circunferência λ' que passa pelos pontos A'_1, A'_2, \dots e A'_n .

Pelo caso *LLL* (*lado, lado, lado*), temos que os triângulos $OA_jA'_j$ e $OA_{j+1}A'_j$ são congruentes, como os ângulos $O\hat{A}'_jA_j$ e $O\hat{A}'_jA_{j+1}$ são iguais e suplementares, tem-se $O\hat{A}'_jA_j = 90^\circ$.

Logo, $OA'_j \perp A_jA_{j+1}$, ou seja,

$$\overline{OA'_1} \perp \overline{A_1A_2}, \quad \overline{OA'_2} \perp \overline{A_2A_3} \quad \dots \quad \overline{OA'_n} \perp \overline{A_nA_1}$$

e assim $A_1A_2\dots A_n$ tem lados tangentes a λ' . (2)

De (1) e (2) temos que todo polígono regular é circunscrito a uma circunferência.

3.2.2 Lado e apótema de um polígono regular

Definimos o apótema de um polígono regular, e indicaremos por a_n , como o segmento com extremidades no ponto médio de um dos lados e no centro O da circunferência λ' de raio r inscrito no polígono, portanto o comprimento do apótema é o raio r da circunferência inscrita no polígono.

Observamos também na divisão da circunferência em n partes, que cada ângulo cêntrico, com vértice no centro O e lados por vértices consecutivos, será dado por $\frac{360^\circ}{n}$.

Dado o polígono regular $A_1A_2\dots A_n$ de n lados inscrito na circunferência λ de centro O e raio R e indicamos por l_n o seu lado. Traçamos o segmento perpendicular ao lado A_1A_2 e marcamos M que é o seu ponto médio, temos que $OM = a_n$ que é o

apótema do polígono e o segmento $\overline{OA_1} = R$ que é o raio da circunferência λ , como mostramos na Figura 22.

Primeiramente, vamos determinar a medida do lado do polígono inscrito.

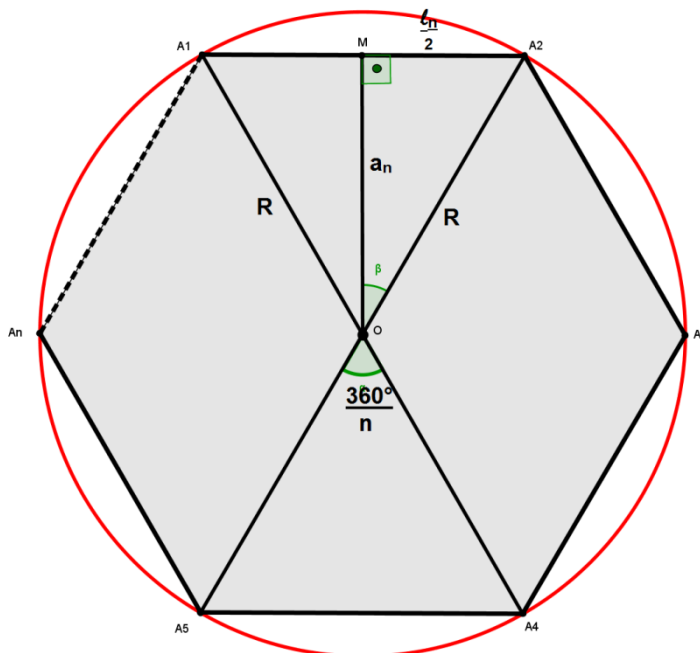


Figura 22: Polígono regular inscrito

Temos que o triângulo OA_1A_2 é isósceles, pela Lei dos cossenos, vem:

$$\begin{aligned} l_n^2 &= R^2 + R^2 - 2R \cdot R \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 2R^2 - 2R^2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= 2R^2 \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right) = 2R^2 \cdot 2 \cdot \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)}{2} \\ &= 4R^2 \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

Assim

$$l_n = 2R \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Portanto, a medida l_n do lado de um polígono regular inscrito em uma circunferência será dada por $2R \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Agora, recorrendo ao Teorema de Pitágoras, vamos determinar a medida do apótema do polígono inscrito. Temos:

$$a_n^2 = R^2 - \left(\frac{2R \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{2} \right)^2 = R^2 \cdot \left(1 - \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) = R^2 \cdot \cos^2 \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Logo,

$$a_n = R \cdot \cos \left(\frac{\pi}{n} \right).$$

Portanto, a medida do apótema de um polígono regular inscrito em uma circunferência é dada por $R \cdot \cos \left(\frac{\pi}{n} \right)$.

Também, podemos obter a medida l_n do lado em função da medida do apótema e reciprocamente. Tomemos o triângulo retângulo OMA_1 e pelo Teorema de Pitágoras, vem:

$$R^2 = a_n^2 + \left(\frac{l_n}{2} \right)^2$$

$$l_n = 2 \cdot \sqrt{R^2 - a_n^2}.$$

E, ainda, para o apótema:

$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2}.$$

Portanto, as medidas dos lados e do apótema de um polígono regular inscrito em um circunferência serão, respectivamente, $2 \cdot \sqrt{a_n^2 - R^2}$ e $\frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2}$.

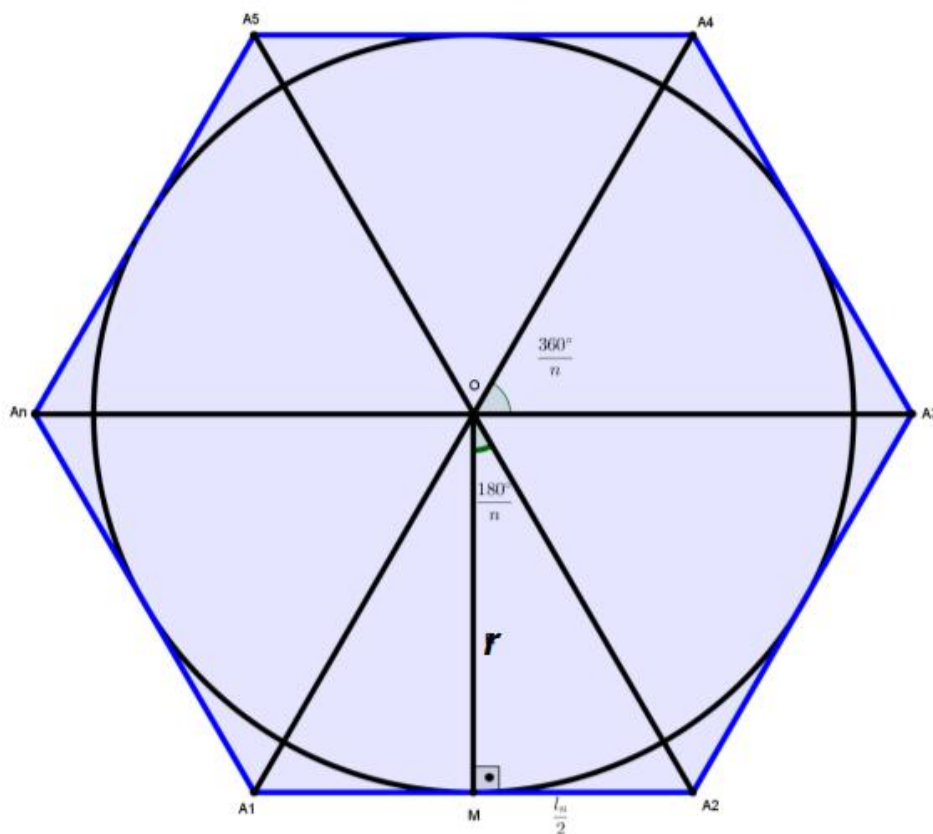


Figura 23: Polígono circunscrito

Notemos que para polígonos regulares circunscritos à circunferência de raio r , temos que $\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right) = \frac{l_n}{r}$, veja Figura 23.

$$\text{Portanto, } l_n = 2r \operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

3.2.3 Área dos polígonos regulares

Dado o polígono regular $A_1A_2\dots A_n$ de n lados inscrito na circunferência λ de centro O e raio R e indicamos por l_n o seu lado e a_n o apótema do polígono, como mostramos na Figura 24. Notamos que quando traçamos os segmentos $\overline{OA_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, que o polígono fica dividido em n triângulos congruentes com base igual l_n e altura a_n .

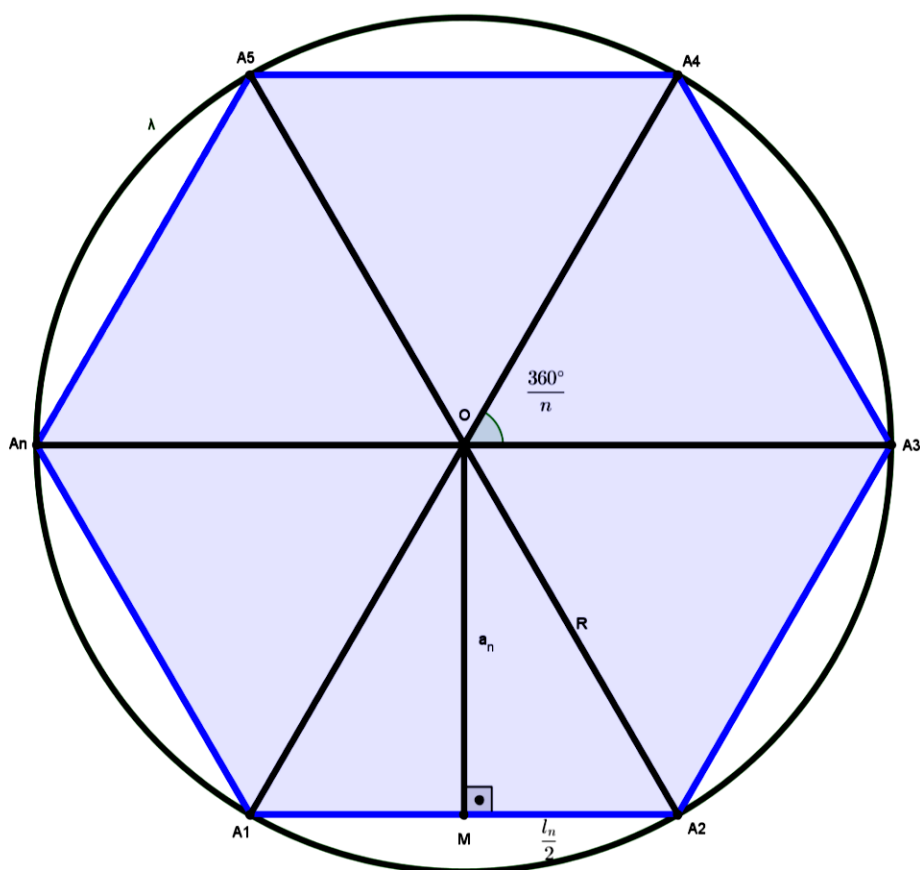


Figura 24: Área de polígonos regulares

Então, a área A_n de qualquer polígono regular inscrito, será dada por

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot a_n}{2}.$$

Como o perímetro do polígono é $2p = l_1 + l_2 + \dots + l_n = n \cdot l_n$, onde p é o seu semiperímetro, então

$$A_n = p \cdot a_n,$$

ou ainda, como $l_n = 2R \cdot \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)$ e $a_n = R \cdot \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)$, temos

$$A_n = \frac{n \cdot R^2 \cdot 2 \text{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \text{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{2}.$$

Portanto,

$$A_n = \frac{n \cdot R^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2}.$$

Já para polígonos circunscritos sendo l_n a medida do lado, $r = a_n$ o raio da circunferência inscrita, então a área A_n do polígono será

$$A_n = n \cdot \frac{l_n \cdot r}{2},$$

ou ainda

$$A_n = n \cdot r^2 \cdot \text{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right).$$

3.3 Área de um polígono qualquer

A área de um polígono qualquer pode ser calculada pela decomposição do polígono em outros polígonos em que conhecemos a sua área, portanto a sua área será o somatório de todas as áreas destes polígonos formados pela decomposição.

3.3.1 Área de figuras planas gerais

Dada uma figura plana F arbitrária, sua área é um número real não negativo, que indicaremos por $f(F)$, onde vamos considerar os valores por falta ou por excesso.

Dados os polígonos P e Q , P inscrito em F e Q circunscrito, como o da Figura 25. Como o polígono P está contido em F e o polígono Q contém F , temos que:

$$f(P) \leq f(F) \leq f(Q)$$

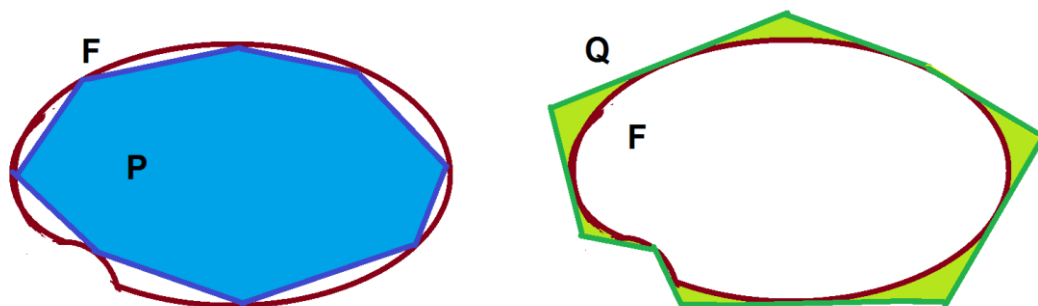


Figura 25: Polígonos F , P e Q .

Podemos construir uma sequência $\{P_n\}$ de polígonos inscritos e outra sequência $\{Q_n\}$ de polígonos circunscritos com as seguintes propriedades:

- a) $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset \dots \subset F$
- b) $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots \supset Q_n \supset \dots \supset F$
- c) $|f(Q_n) - f(P_n)| < \frac{1}{n}$, para todo n .

Dessa forma, quanto maior for n , melhor será a aproximação de área de P_n (ou de Q_n) da área de F . Isso nos permite ter aproximações arbitrariamente precisas da área de F .

Podemos citar o caso particular do círculo, em que a sua área pode ser caracterizada como sendo o limite das áreas dos polígonos regulares nele inscrito ou circunscrito, quando o número de lados cresce indefinidamente, como segue:

Indicamos por P_n o polígono regular de n lados inscrito no círculo C de raio R e seja A_n sua área, isto é,

$$A_n = \frac{nR^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{2} = \frac{\pi R^2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}}$$

Seja $m = \frac{n}{2\pi}$. Então, quando $n \rightarrow \infty$, tem-se $m \rightarrow \infty$.

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right)}{\frac{2\pi}{n}} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m}} = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \pi R^2.$$

Considerando agora Q_n o polígono regular de n lados circunscrito ao círculo C de raio R , e seja A'_n sua área, isto é,

$$\begin{aligned} A'_n &= nR^2 \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{n} \right) = nR^2 \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)} = \\ &= nR^2 \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right) \cdot \frac{1}{\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)} = \pi R^2 \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{1}{\operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right)} \end{aligned}$$

Como anteriormente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{n} \right)}{\frac{\pi}{n}} = 1.$$

Além disso, como a função $\operatorname{cos} \alpha$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, é contínua, temos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{cos} \left(\frac{\pi}{n} \right) = \operatorname{cos} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) = \operatorname{cos} 0 = 1.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A'_n = \pi R^2.$$

3.4 Polígonos Equidecomponíveis

Conforme Lima (2003) um polígono é equidecomponível a outro se admite uma decomposição em polígonos menores que ao ser agrupados forma o outro. Mais precisamente temos:

Definição 01: Dois polígonos P e P' dizem-se equidecomponíveis quando existem decomposições $P = P_1 \cup P_2 \cup P_3 \cup \dots \cup P_n$ e $P' = P'_1 \cup P'_2 \cup P'_3 \cup \dots \cup P'_n$, de tal modo que cada polígono P_i é congruente ao polígono P'_i , $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Além disso, os polígonos P_i tenham seus interiores dois a dois disjuntos, o mesmo ocorre com os polígonos P'_i .

Como um exemplo o triângulo T e o retângulo R como na figura abaixo são equidecomponíveis. Pois, dado um triângulo T , onde decomparamos em outras três partes A , B e C , ao recolocarmos suas partes em A' , B' e C' , obtemos o retângulo R , como mostrado na Figura 26.

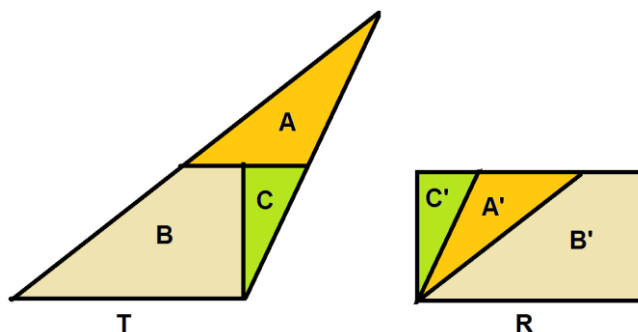


Figura 26: Decomposição do triângulo em três partes A , B e C , recompostos em A' , B' e C' para formar o retângulo.

Outro exemplo: dado um paralelogramo P e um retângulo R com mesma base e mesma altura, temos que ao decompor P em dois outros polígonos A e B e R em A' e B' , como na Figura 27 abaixo, temos que A é congruente a A' e B é congruente a B' , portanto, P possui a mesma área de R , como mostrado na Figura 27.

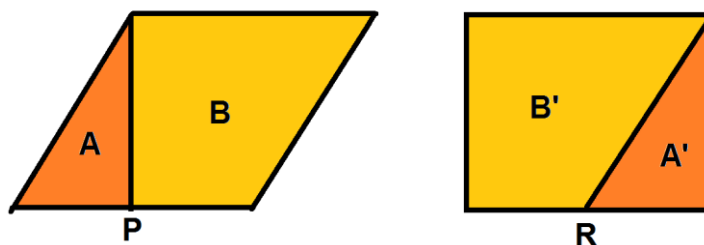


Figura 27: Paralelogramo P e Retângulo R com a mesma base e mesma altura.

Este é um fato geral sobre polígonos.

Teorema de Bolyai¹: Dois polígonos com a mesma área são equidecomponíveis.

¹ Teorema demonstrado por F. Bolyai em 1832 e, independentemente, em 1833 por P. Gerwien.

A demonstração deste resultado foge aos objetivos deste trabalho, sugerimos sua leitura em Lima (2003).

Teorema de Hadwiger-Glur²: Dois polígonos com áreas iguais são sempre TR-equidecomponíveis.

De acordo com Lima (2003), a prova do Teorema de Hadwiger-Glur segue as ideias da prova do teorema anterior acrescida do seguinte resultado:

Todo retângulo R é TR-equidecomponível a outro retângulo R' cuja base é paralela a uma reta dada r .

Para tanto, note que um segmento de reta paralelo a r fornece uma decomposição $R = A \cup B$, como na Figura 28. Transladando o triângulo A para outra extremidade de R , obtemos o paralelogramo $P = A' \cup B'$, o qual é TR-equidecomponível a R .

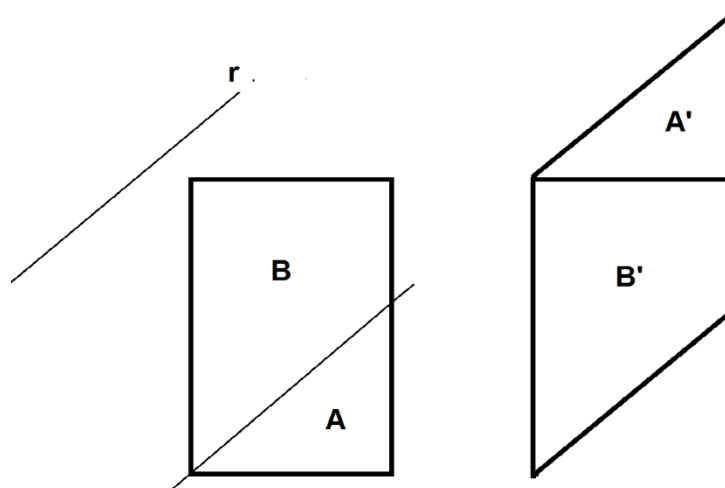


Figura 28: Retângulo e o Paralelogramo com lados paralelos a r são TR-equidecomponíveis.

Agora basta usar que o paralelogramo P é TR-equidecomponível a um retângulo R' , cuja base tem comprimento b e é paralela à reta r

² Matemáticos suíços H. Hadwiger e P. Glur, em 1951 reafirmaram o Teorema de Bolyai

4. Teorema de Pitágoras

Diferente de Tales que era um homem de negócios, Pitágoras (569 – 480a.C) era um profeta e místico, que durante as suas viagens observou muitas ideias religiosas, além da Matemática e da Astronomia. Nascido em uma das ilhas gregas de Dodecaneso, em Samos, perto de Mileto, Pitágoras juntamente com Tales começaram a ver e a estudar a Matemática como ciência e foi a partir de suas ideias que ela se desenvolveu.

Pouco se sabe sobre as obras de Pitágoras, pois documentos da época se perderam. Além disso, como a sociedade secreta que ele fundou era comunitária, muitos dos conhecimentos e propriedades eram comuns e diversas descobertas eram atribuídas e creditadas ao mestre. Com isso, não sabemos se quem fez a demonstração do teorema tenha sido o próprio Pitágoras ou um de seus seguidores.

Acredita-se que as palavras “*filosofia*” (“*amor à sabedoria*”) e “*matemática*” (“*o que é aprendido*”) tenham sido criadas por Pitágoras para descrever as suas atividades intelectuais dedicadas ao estudo da Matemática e principalmente da Filosofia. Os pitagóricos tinha como lema “*Tudo é número*” e seu símbolo especial era o pentágono estrelado, que era um polígono regular de cinco lados, em que traçadas as diagonais elas se cruzam formando um novo pentágono regular, que dividem as diagonais em dois segmentos desiguais, tais que a razão da diagonal toda para o maior é igual à deste para o menor, o que hoje conhecemos com “*secção áurea*” de um segmento (BOYER, 2010).

Segundo Boyer (2010), Kepler escreveu liricamente que: “A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar joia preciosa” (BOYER, 2010, p. 35).

Para Lima, et al. (2006), “O Teorema de Pitágoras é um dos maios belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história do nosso conhecimento matemático. Foi onde tudo começou” (LIMA, et al., 2006, p. 62).

O Teorema de Pitágoras desde o século V a.C. ganhou várias demonstrações, em 1940 foi publicado o livro “*The Pythagorean Proposition*” do

matemático americano Elisha Scott Loomis, contendo 370 demonstrações, porém há mais outras demonstrações.

4.1 Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Euclides

Por volta de 330 a.C., o matemático grego Euclides de Alexandria escreveu 13 livros que constituem um tratado matemático e geométrico chamado *Elementos de Euclides*, onde ele traz no Livro I, Proposição 47 a demonstração do Teorema de Pitágoras por comparações de áreas, segundo Euclides:

“Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contêm o ângulo reto”.

Seja o triângulo retângulo ABC , como na Figura 29, tendo o ângulo sob $A\hat{C}B$ reto; digo que o quadrado sobre a BA é igual aos quadrados sobre as BC , AC . (EUCLIDES, 2009)

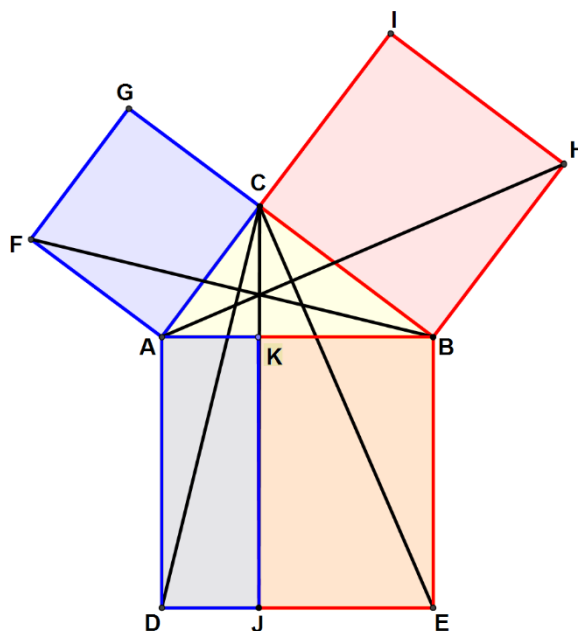


Figura 29: Triângulo Retângulo Euclides

Traçando uma reta perpendicular ao lado AB passando por C e prolongando até o ponto J do lado DE . Traçamos também FB , CD , AH e CE .

Temos que os triângulos CAD e FAB são congruentes, pois:

$$\overline{CA} \equiv \overline{FA}$$

$$\overline{AD} \equiv \overline{AB}$$

como $F\hat{A}C \equiv D\hat{A}B = 90^\circ$ e justapondo $C\hat{A}B$ aos ângulos anteriores, temos

$$C\hat{A}D \equiv F\hat{A}B.$$

E ainda a área do triângulo FAB é metade da área do quadrado $AFGC$, pois possuem a mesma base FA e a mesma altura e a área do triângulo CAD é metade da área do retângulo $ADJK$, pois possuem a mesma base AD e a mesma altura.

Logo, a área do quadrado $AFGC$ é igual à área do retângulo $ADJK$.

Da mesma forma, temos que os triângulos ABH e EBC são congruentes, pois os ângulos $E\hat{B}C$ e $A\hat{B}H$ são congruentes e também os lados $BC \equiv BH$, e $AB \equiv EB$.

Logo, a área do quadrado $BCIH$ é igual à área do retângulo $BEJK$.

Portanto, a área do quadrado sobre o lado AB é igual à soma das áreas dos quadrados sobre os lados AC e BC .

4.2 Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Dr. Rudolf Wolf

Entre as 370 demonstrações encontradas no livro “*The Pythagorean Proposition*” do matemático americano Elisha Scott Loomis, optamos por utilizar neste trabalho uma demonstração geométrica, Figura 30, retirada de uma publicação de 1880 de Jury Wipper intitulada “*46 Beweise der Pythagora is Chen Lehrbatzes*,” dada pelo Matemático Dr. Rudolf Wolf em 1869.

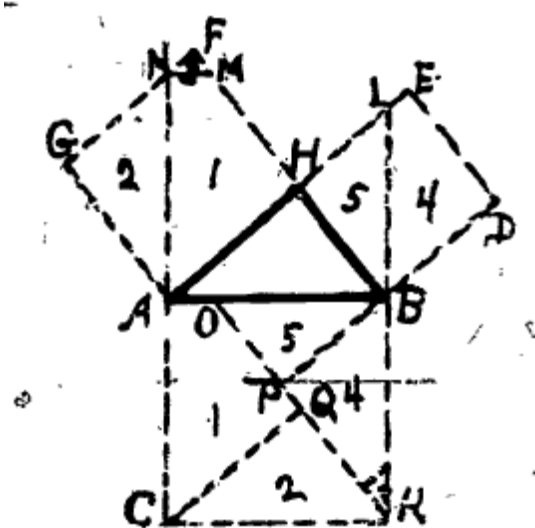


Figura 30: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Dr. Rudolf Wolf em 1869

Fonte: (LOOMIS, 1968)

Para Loomis (1968), a prova dezesseis dada por Dr. Rudolf Wolf é:

“the dissection is evident and show that parts 1, 2 and 3 in sq. AK are congruent to parts 1, 2 and 3 in sq. HG; also that parts 4 and 5 in sq. AK are congruent to parts 4 and 5 in sq. HD. (sq. AK: parts 1 + 2 + 3 + 4 + 5) = (sq. HG = parts 1 + 2 + 3) + (sq. HD = parts 4 + 5) ∴ sq. on AB = sq. on BH + sq. on AH ∴ $h^2 = a^2 + b^2$.” (LOOMIS, 1968)

O que pode ser traduzido como: “as dissecções do quadrado $AHFG$ nas partes 1, 2 e 3 e do quadrado $BDEH$ nas partes 4 e 5, resulta por superposição no quadrado equidecomponível $ABKC$, ou seja, a soma das áreas do quadrado $AHFG$ com o quadrado $BDEH$ é igual à área do quadrado $ABKC$.”

A seguir, tornamos a demonstração acima detalhada.

Dado o triângulo retângulo ABH e como $AB = h$ (hipotenusa), $BH = a$ e $AH = b$, como o da Figura 31.

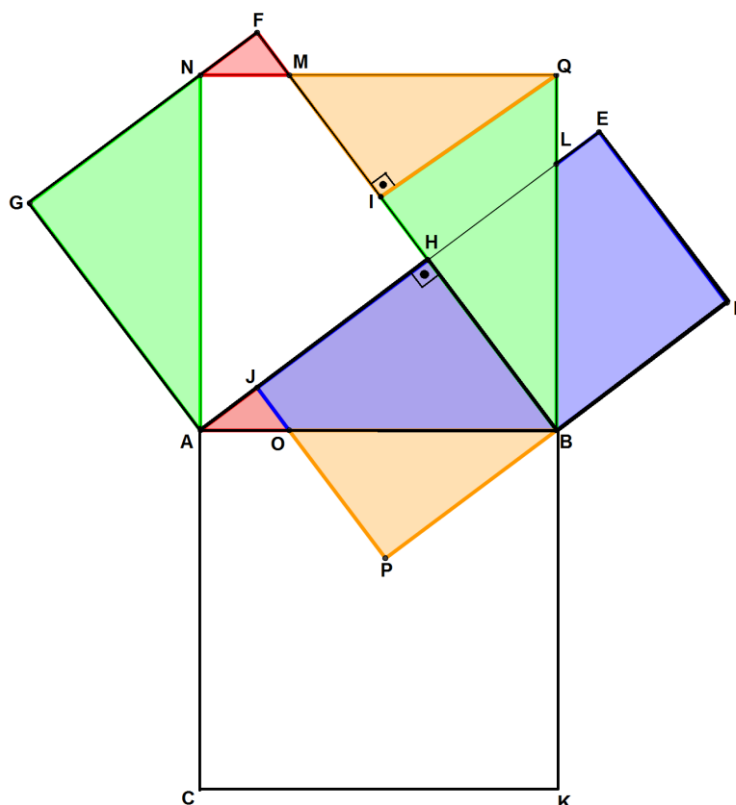


Figura 31: Demonstração do Teorema de Pitágoras dada por Dr. Rudolf Wolf

- Traçamos sobre os lados AH e BH , os quadrados $AHFG$ e $BHED$;
- Refletimos o quadrado de lado BH em torno de seu lado e marcamos os pontos O , P e J ;
- Traçamos uma reta perpendicular ao lado AB , passando por A e outra por B e chamamos de N a intersecção da primeira perpendicular com o segmento FG e de L a intersecção com o segmento HE ;
- Traçamos uma perpendicular ao lado AN , passando por N e denotamos M a intersecção com o segmento FH ;
- Denotamos por M a intersecção das retas perpendiculares a AN passando por N e AB passando por B ;
- Construimos o retângulo de lado AN e AB e denotamos por $ABQN$;
- Traçamos uma perpendicular ao segmento BM , passando por Q e chamamos de I a sua intersecção com o segmento BM ;
- Notamos na Figura 32 que os triângulos ABH e ANG são congruentes, pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo).

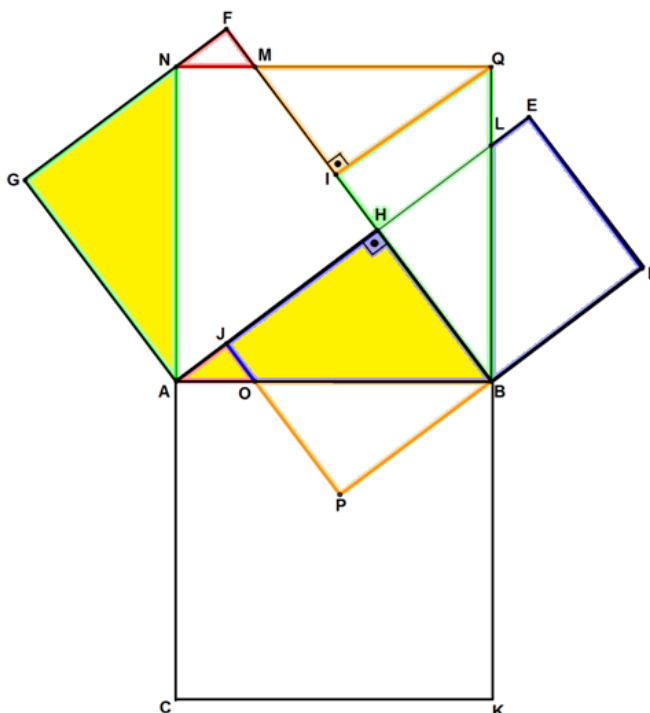


Figura 32: Congruência entre os triângulos ABH e ANG

De fato, sendo $H\hat{B}A = \alpha$, então $H\hat{A}B = 90^\circ - \alpha$ e, ainda $N\hat{A}H = \alpha$, portanto,

$$H\hat{A}B = G\hat{A}N = 90^\circ - \alpha$$

$$AG = AH$$

$$A\hat{H}B = A\hat{G}N = 90^\circ.$$

Daí concluímos que o quadrilátero $ABQN$ é um quadrado, pois $AB = BQ$.

- Pelo caso ALA (ângulo, lado, ângulo), os triângulos ABH e BQI da Figura 33 são congruentes, pois

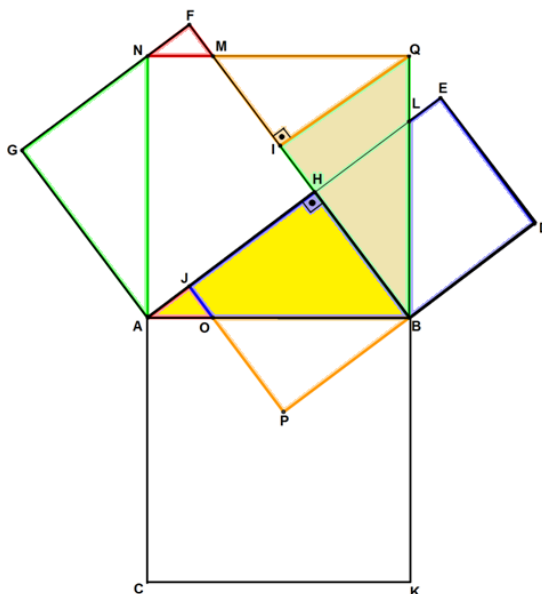


Figura 33: Congruência entre os triângulos ABH e BQI

$$\widehat{AHB} = \widehat{BIQ} = 90^\circ$$

$$AB = BQ$$

$$\widehat{HAB} = \widehat{QBI} = 90^\circ - \alpha.$$

Como os triângulos ABH é congruente a ANG e BQI , então os triângulos ANG e BQI são congruentes.

- Pelo caso LAA_o (ângulo, lado, ângulo oposto), os triângulos BOP e QIM são congruente, como podemos notar na Figura 34, pois

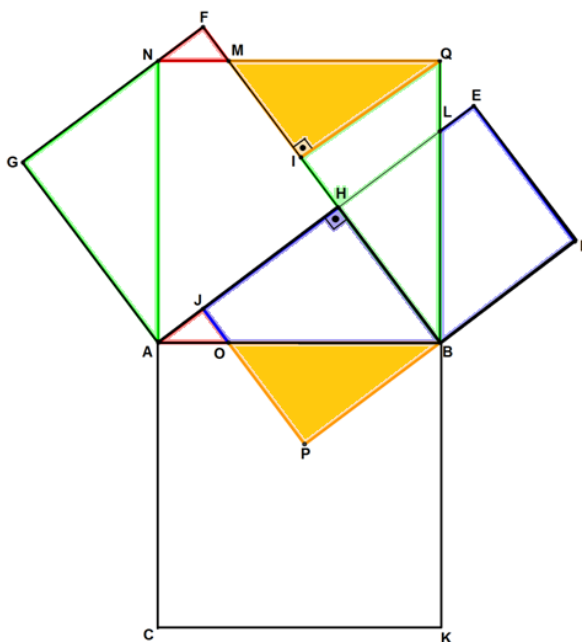


Figura 34: Congruência entre os triângulos BOP e QIM

$$BP = BH = QI$$

$$B\hat{P}O = Q\hat{I}M = 90^\circ$$

$$P\hat{O}B = H\hat{B}A = I\hat{M}Q = \alpha \text{ (ângulos alternos internos).}$$

- Notamos também que os triângulos BPO e AJO são semelhantes, pois

$$B\hat{P}O = A\hat{J}O = 90^\circ$$

$$J\hat{O}A = P\hat{O}B \text{ (opv).}$$

Como os triângulos BPO e QIM são congruentes e $AB = NQ$, temos que os segmentos AO e NM são congruentes, Figura 35, portanto pelo caso LAA_o (ângulo, lado, ângulo oposto) os triângulos MFN e OJA são congruentes, pois

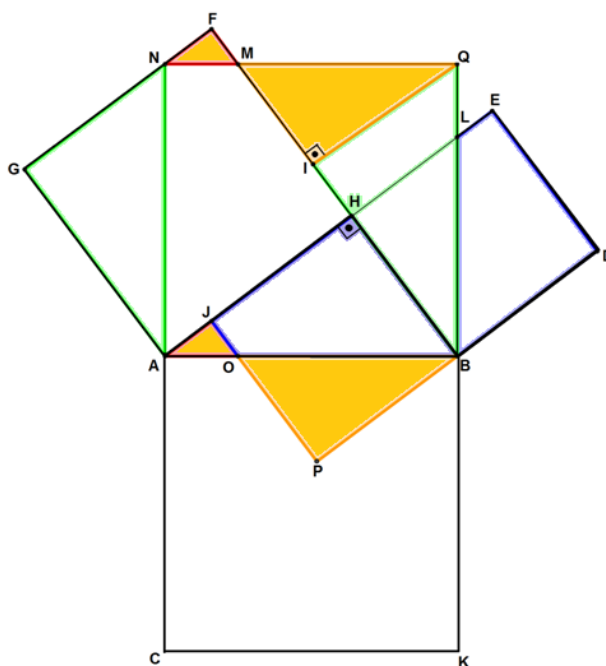


Figura 35: Congruência entre os triângulos MFN e OJA

$$AO = NM$$

$$J\hat{O}A = F\hat{M}N = I\hat{M}Q \text{ (opv)}$$

$$N\hat{F}M = A\hat{J}O = 90^\circ.$$

- Pelo caso ALA (ângulo-lado-ângulo) os triângulos BPO e BLH são congruentes, Figura 36, pois

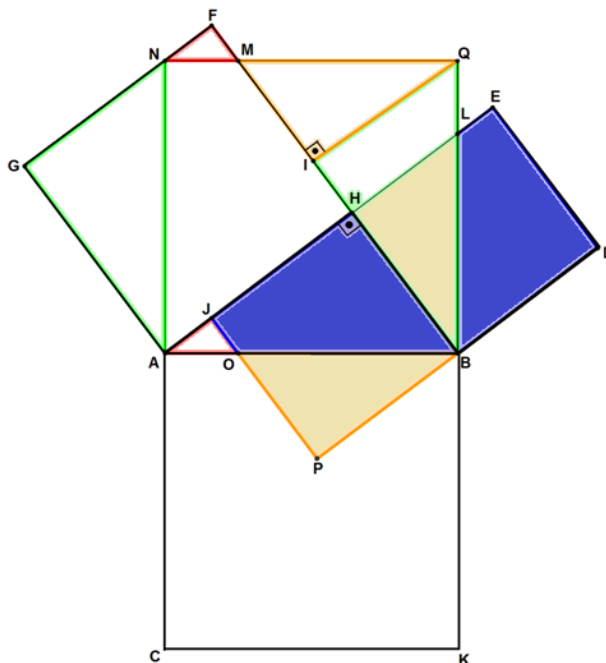


Figura 36: Congruência entre os triângulos BPO e BLH

$$B\hat{P}O = B\hat{H}L = 90^\circ$$

$$BP = BL$$

$$P\hat{B}O = H\hat{B}L = 90^\circ - \alpha .$$

- E ainda, como os quadrados $BDEH$ e $BPJH$ são congruentes, os quadriláteros $EDEL$ e $BHJO$ são congruentes.

Portanto, a área do quadrado $ACKB$ é igual à soma das áreas dos quadrados $AGFH$ com a área do quadrado $BDEH$.

Ou ainda:

$$h^2 = a^2 + b^2.$$

4.3 Fibonacci e as Ternas Pitagóricas

4.3.1 Sequência de Fibonacci

O matemático italiano Leonardo Fibonacci (Leonardo filho de Bonaccio), nasceu em 1175 na cidade de Pisa, região da Toscana, sendo também conhecido como Leonardo de Pisa (ou Pisano). Recebeu parte de sua educação na África onde

seu pai exercia função de alfandegário. Fez grandes viagens ao Egito, à Suíça, à Grécia e à Síria, onde teve contato com a Matemática oriental e árabe. De volta a sua cidade natal, em 1202, publicou seu livro “*Liberabaci*” ou “*Livro do ábaco*”, onde defendeu a utilização dos números indo-árabicos.

O livro é dedicado à aritmética e à álgebra e contém uma vasta coleção de problemas, onde podemos citar o problema dos coelhos que deu origem à famosa Sequência de Fibonacci.

Trata-se do seguinte problema, segundo Hefez (2014):

“*Quot paria coniculorum in uno annoex uno pariogerminentur.* Como não se ensina mais latim nas escolas, aí vai uma explicação: um casal de coelhos recém-nascidos foi posto num lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que, a cada mês, um casal de coelhos produz outro casal e que um casal começa a procriar dois meses após o seu nascimento.” (HEFEZ, 2014)

A solução dada por Fibonacci, mostraremos na Tabela 1, onde a resposta encontrada foi de 144 casais no final de um ano.

Tabela 1: Solução dado por Fibonacci para o problema dos coelhos

Mês	Número de casais do mês anterior	Número de casais recém-nascidos	Total
1º	0	1	1
2º	1	0	1
3º	1	1	2
4º	2	1	3
5º	3	2	5
6º	5	3	8
7º	8	5	13
8º	13	8	21
9º	21	13	34
10º	34	21	55
11º	55	34	89
12º	89	55	144

Fonte: (HEFEZ, 2014)

A sucessão ou Sequência de Fibonacci é uma sequência de números inteiros positivos, na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos termos anteriores, sendo que $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Portanto, os primeiros termos da sequência são dados por:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots, a, b, a + b, a + 2b, 2a + 3b, 3a + 5b, 5a + 8b, \dots$$

As sequências F_n que satisfazem a lei recursiva $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ são também conhecidas como sequências de Fibonacci.

Portanto, podemos definir por recorrência, uma sequência de números inteiros que chamamos de números de Fibonacci e definimos por

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = F_2 = 1 \text{ e } n = 3, 4, \dots$$

Porém para conhecermos algum termo da sequência, necessitamos conhecer quais os dois termos anteriores, com isso, temos que obter uma fórmula para obtenção do termo geral F_n .

Toda sequência (x_n) que satisfaz $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ é chamada solução de Fibonacci. Note, se x_n é solução, então ax_n também é solução para todo real.

Definição: Dizemos que duas soluções de Fibonacci x_n e y_n , não nulas são linearmente dependentes se existir uma constante $a \neq 0$ tal que $x_n = a.y_n$, para todo n natural. Por outro lado, se existirem constantes a, b não nulas, tais que $F_n = ax_n + by_n$, então as soluções x_n e y_n são linearmente independentes.

Propriedade 1: Se x_n e y_n são soluções linearmente independentes de Fibonacci, então toda solução F_n satisfaz $F_n = ax_n + by_n, \forall n \in \mathbb{N}$ e a e b constantes.

Demonstração: Mostremos primeiro que se x_n e y_n são soluções independentes, então

$$\frac{x_1}{y_1} \neq \frac{x_2}{y_2}.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2}$$

Então pela propriedade das proporções, a soma dos antecedentes, x_1 e x_2 , está para a soma dos consequentes, y_1 e y_2 , assim como qualquer antecedente está para o seu consequente, temos

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \frac{x_3}{y_3}.$$

E por indução temos que

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}.$$

Portanto,

$$a = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \dots = \frac{x_n}{y_n}.$$

Logo,

$$x_n = a \cdot y_n.$$

Uma contradição, pois por hipótese x_n e y_n são linearmente independentes.

Agora seja F_n uma solução de Fibonacci, então existem a e b , tais que

$$\begin{cases} F_1 = ax_1 + by_1 \\ F_2 = ax_2 + by_2 \end{cases},$$

De fato, como

$$\frac{x_1}{y_1} \neq \frac{x_2}{y_2}$$

então,

$$x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0.$$

Logo, o sistema $\begin{cases} ax_1 + by_1 = F_1 \\ ax_2 + by_2 = F_2 \end{cases}$, tem solução única

$$a = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & y_1 \\ F_2 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{F_1y_2 - F_2y_1}{x_1y_2 - x_2y_1}$$

e

$$b = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & F_1 \\ x_2 & F_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_1 F_2 - x_2 F_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

Daí $F_3 = F_1 + F_2 = ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 = a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = ax_3 + by_3$ e mais geralmente $F_n = ax_n + by_n$.

Portanto, F_n é uma combinação linear, com a e b constantes.

Propriedade 2 (ou Fórmula de Binet): Se F_n é uma sequência de Fibonacci, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Demonstração: Procuremos inicialmente uma progressão geométrica $x_n = q^n$, com $q \neq 0$, que seja solução de Fibonacci, isto é, que satisfaz a recorrência anteriormente mencionada. Para isso, devemos ter:

$$q^n = q^{n-1} + q^{n-2}.$$

dividindo a equação por q^{n-2} , obtemos:

$$q^2 = q + 1$$

$$q^2 - q - 1 = 0$$

cujas soluções são

$$q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } q_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Observamos que $q_1 + q_2 = 1$ e $q_1 q_2 = -1$.

Para cada raiz, obtemos uma sequência de Fibonacci, sejam x_n e y_n dados por: $x_n = q_1^n$ e $y_n = q_2^n$. Como vimos anteriormente F_n é uma combinação linear de x_n e y_n , isto é, $F_n = a \cdot q_1^n + b \cdot q_2^n$, que pode ser escrito como

$$F_n = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Tomando $F_1 = F_2 = 1$, o que nos dá um sistema com duas equações com duas incógnitas a e b

$$1 = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1$$

$$1 = a \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + b \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2$$

Cuja solução é dada por

$$a = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad e \quad b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Agora provaremos por indução que o termo geral será dado por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^n - q_2^n).$$

Concluimos, anteriormente, que $F_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1 - q_2) = 1$ e $F_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^2 - q_2^2) = 1$.

Agora para $n \geq 3$, temos que:

$$\begin{aligned} F_{n-1} + F_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^{n-1} - q_2^{n-1}) + \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^{n-2} - q_2^{n-2}) \\ &= \frac{q_1^{n-2}}{\sqrt{5}} (q_1 + 1) - \frac{q_2^{n-2}}{\sqrt{5}} (q_2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{q_1^{n-2}}{\sqrt{5}} q_1^2 - \frac{q_2^{n-2}}{\sqrt{5}} q_2^2 \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} (q_1^n - q_2^n) = F_n.
 \end{aligned}$$

Então, para $n \in \mathbb{N}$, todo número de Fibonacci será dado pela relação:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

4.3.2 Ternas Pitagóricas de Fermat

Uma das primeiras ternas pitagóricas que temos relatos na história, escrita no período Babilônico Antigo aproximadamente entre 1900 e 1600 a.C, é encontrada na notável tábula de *Plimpton 322*, como vemos na Figura 37. Esta tábula é feita de argila com escrita cuneiforme, possuindo uma tabela de quatro colunas e 15 linhas de números na base sexagesimal, onde observamos que os números correspondentes constituem a hipotenusa e um cateto de triângulos retângulos.



Figura 37: Tábula de Plimpton 322

Fonte: Universidade de British Columbia: <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/322.jpg> Acesso: 23 abril 2016.

Segundo Boyer (2010), uma terna pitagórica é uma trinca de números inteiros que são os lados de um triângulo retângulo e eles são classificados como primitivo e não primitivos:

Se o único fator inteiro positivo comum aos elementos de um terno *pitagórico* é a unidade, então esse termo se diz *primitivo*. Assim (3, 4, 5) é um termo pitagórico primitivo, ao passo que (6, 8, 10) não é. Um dos grandes feitos matemáticos dos gregos, posterior muitos séculos à tabula Plimpton 322, foi mostrar que todos os termos pitagóricos primitivos (a , b , c) são dados parametricamente por:

$$a = 2uv, \quad b = u^2 - v^2 \quad \text{e} \quad c = u^2 + v^2$$

onde u e v são primos entre si, um é par o outro é ímpar e $u > v$. (BOYER, 2010)

Assim, define-se uma *terna pitagórica* (a , b , c) é uma trinca ordenada de três números inteiros a , b e c que satisfazem: $a^2 + b^2 = c^2$ e se a , b e c são primos entre si então dizemos que a terna é primitiva.

Propriedade 1: Sendo a terna pitagórica primitiva (a , b , c), isto é, que satisfaz a relação: $a^2 + b^2 = c^2$, existe um e apenas um elemento dela que é par, e esse elemento não é a terceira ordenada.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que a , b e c são ímpares, então a e b são ímpares, porém a soma do quadrado de dois números ímpares é par, então $c^2 = a^2 + b^2$ é par e conseqüentemente c é par. Absurdo! Assim existe um número que é par.

Suponhamos agora, que a e b fossem dois números pares, então c^2 seria par, e conseqüentemente c seria par. Absurdo! Pois a terna é primitiva.

Suponhamos agora que a seja par e b seja ímpar, então necessariamente c será ímpar.

Pois, se $a = 2m$ e $b = 2n + 1$, então existe m e n inteiros, tais que:

$$(2m)^2 + (2n + 1)^2 = 4m^2 + 4n^2 + 4n + 1$$

Analogamente provamos para a ímpar e b par.

Suponhamos que c seja par e a e b ímpares, então existe m , n e p inteiros, tais que $a = 2m + 1$, $b = 2n + 1$ e $c = 2p$, logo:

$$a^2 + b^2 = (2m + 1)^2 + (2n + 1)^2$$

$$= 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1$$

$$= 2.(2m^2 + 2n^2 + 2m + 2n + 1)$$

Mas, $c^2 = 4p^2$ e $a^2 + b^2$ é múltiplo de 2 e não é de 4. Absurdo!

Propriedade 2: Seja (a, b, c) uma terna primitiva, então existe u e v inteiros positivos primos entre si, tais que $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$.

Demonstração: Dada uma terna pitagórica primitiva, a ou b é um número par e c é um número ímpar. Suponhamos, sem perda de generalidade que a seja par e escrevemos:

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = (c + b).(c - b)$$

Temos que a , $c - b$ e $c + b$, são pares, assim existem inteiros x , y e z , tais que $a = 2x$; $c - b = 2y$ e $c + b = 2z$, portanto:

$$(2x)^2 = 2y.2z$$

$$4x^2 = 4y.z$$

$$x^2 = y.z$$

Afirmamos que y e z não possuem fator comum. Com efeito, suponhamos por contradição que existam números inteiros positivos p , y' e z' tais que

$$y = p.y' \text{ e } z = p.z'.$$

Logo,

$$c - b = 2py' \text{ e } c + b = 2p.z'.$$

Assim,

$$2c = (c - b) + (c + b) = 2py' + 2pz' = 2p(y' + z'),$$

ou seja,

$$c = p(y' + z'),$$

e

$$2b = (b + c) + (b - c) = (c + b) - (c - b) = 2pz' - 2py' = 2p(z' - y'),$$

ou seja,

$$b = p(z' - y').$$

Portanto,

$$a^2 = b^2 - c^2 = p^2.(y' + z')^2 - p^2(z' - y')^2.$$

Isto é,

$$a^2 = 4p^2z'y'.$$

Logo, p/a , o que contradiz o fato de (a, b, c) ser primitivo.

Assim y e z não possuem fator comum e com seu produto é um quadrado, existem números inteiros positivos u e v tais que $y = u^2$ e $z = v^2$

Logo,

$$a^2 = (c + b).(c - b) = 2z.2y$$

$$= (2v^2).(2u^2)$$

$$= 4u^2 \cdot v^2.$$

Portanto,

$$a = 2uv$$

Como $c - b = 2u^2$ e $c + b = 2v^2$, com u e v inteiros positivos, somando e subtraindo membro a membro as equações, obtemos, respectivamente

$$c = u^2 + v^2 \text{ e } b = u^2 - v^2.$$

Portanto, temos os termos $a = 2uv$, $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$, o que mostra a Propriedade 2.

Reciprocamente, se $a = 2u \cdot v$, $b = u^2 - v^2$ e $c = u^2 + v^2$, temos:

$$a^2 + b^2 = (2uv)^2 + (u^2 - v^2)^2$$

$$= 4u^2v^2 + u^4 - 2u^2v^2 + v^4$$

$$= u^4 + 2u^2v^2 + v^4$$

$$= (u^2 + v^2)^2 = c^2$$

De modo que (a, b, c) é uma terna pitagórica.

Portanto, as triplas pitagóricas primitivas são da forma $(2uv, u^2 - v^2, u^2 + v^2)$, com u e v primos entre si e $u > v$.

4.3.4 Ternas Pitagóricas de Fibonacci

No ano de 1948, o matemático Charles W. Raine publicou na revista *Scripta Mathematica* o artigo *Pythagorean Triangles from the Fibonacci Series*, em que traz uma maneira de achar as ternas pitagóricas, utilizando a sequência de Fibonacci.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., $x, y, x + y, x + 2y, 2x + 3y, 3x + 5y, 5x + 8y, \dots$

Seja a sequência de números inteiros definida por:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad F_1 = F_2 = 1 \text{ e } n = 3, 4, \dots$$

E ainda $F_n = x + 2y, F_{n-1} = x + y, F_{n-2} = y$ e $F_{n-3} = x$, sendo x e y números inteiros pertencentes à sequência de Fibonacci e $n = 4, 5, \dots$

Propriedade 1: Dada F_n uma sequência de Fibonacci de quatro termos consecutivos e a, b e c definidos como

$$a = F_n \cdot F_{n-3}$$

$$b = 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}$$

$$c = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2$$

Então a terna (a, b, c) satisfaz a relação $a^2 + b^2 = c^2$, isto é (a, b, c) é uma terna pitagórica.

Demonstração: Sendo, $F_{n-3} = x, F_{n-2} = y, F_{n-1} = x + y$ e $F_n = x + 2y$ e com x, y inteiros positivos e termos consecutivos da sequência de Fibonacci e $n = 4, 5, \dots$, então:

$$a = x \cdot (x + 2y) = x^2 + 2xy$$

$$b = 2 \cdot (x + y) \cdot y = 2xy + 2y^2$$

$$c = (x + y)^2 + y^2 = x^2 + 2xy + 2y^2$$

Logo:

$$\begin{aligned}
 a^2 + b^2 &= (x^2 + 2xy)^2 + (2xy + 2y^2)^2 \\
 &= x^4 + 4x^3y + 4x^2y^2 + 4x^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4 \\
 &= x^4 + 4x^3y + 8x^2y^2 + 8xy^3 + 4y^4 \\
 &= (x^2 + 2xy + 2y^2)^2 = c^2
 \end{aligned}$$

Portanto, dada uma sequência de Fibonacci de quatro termos consecutivos F_{n-3} , F_{n-2} , F_{n-1} e F_n , com n inteiro e $n > 4$, temos uma terna pitagórica (a, b, c) com a seguinte característica $a = F_n \cdot F_{n-3}$, $b = 2 \cdot F_{n-1} \cdot F_{n-2}$ e $c = F_{n-1}^2 + F_{n-2}^2$.

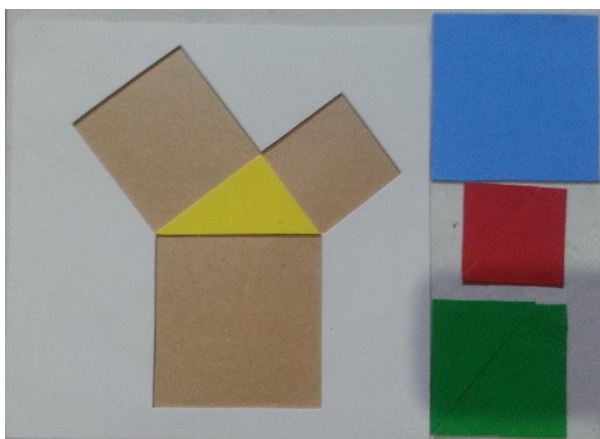
5. Abordagens Experimentais

Estas atividades foram realizadas com 30 alunos do 9º ano/8ª série do Ensino Fundamental da E.M.E.F. Prof. “Francisco Alvares Florence”, da cidade de Novo Horizonte, estado de São Paulo.

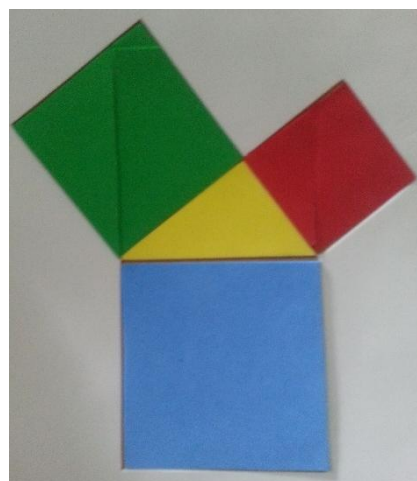
5.1 Teorema de Pitágoras

Para a realização da demonstração do Teorema de Pitágoras, fizemos a construção de um triângulo retângulo de catetos medindo 8 cm e 6 cm e a hipotenusa medindo 10 cm e sobre os catetos desenhamos um quadrado de lado 8 cm e 6 cm, respectivamente, e sobre a hipotenusa um quadrado de 10 cm. Depois, transferimos esta figura para uma folha de EVA branca e recortamos o triângulo. Fizemos com EVA amarelo e colamos em uma folha de papel cartão, como mostramos na Figura 38 (a). Já o quadrado correspondente ao cateto de 8 cm, fizemos com EVA verde, o do cateto de 6 cm com EVA vermelho e o quadrado da hipotenusa de EVA azul e encaixamos as peças no molde como mostramos na Figura 38 (b).

Utilizamos EVA para a montagem desta atividade experimental, porém ela poderá ser montada com materiais alternativos como cartolina ou papel cartão.



(a)



(b)

Figura 38: Modelos em EVA do Triângulo Retângulo

5.1.1 Aplicação das Atividades do Teorema de Pitágoras em Sala de Aula

Realizamos estas atividades no 9º ano/8ª série do Ensino Fundamental da E.M.E.F. Prof. “Francisco Alvares Florence”, onde os alunos foram separados em seis grupos de cinco alunos.

Depois, distribuímos para cada grupo um kit contendo a placa de EVA, régua, transferidor e o roteiro das atividades experimentais (Anexo I) para que os grupos fizessem as anotações necessárias durante a realização das atividades.

Agora iremos analisar os dados e resultados apontados pelos grupos no roteiro da atividade experimental, onde realizamos duas atividades: a primeira (experimental) para a comprovação do Teorema de Pitágoras que foi dividida em 12 questões, voltada mais para a atividade experimental e a segunda que constou de 4 problemas de aplicação do Teorema de Pitágoras.

No intuito de verificar se os alunos já tinham visto o experimento em algum momento de sua formação, a primeira questão abordada no roteiro foi: *“Vocês estão recebendo uma placa, contendo um triângulo amarelo, um quadrado azul, um quadrado verde, um quadrado vermelho, um transferidor e uma régua. Você já viu este tipo de atividade anteriormente?”*.

Todos os grupos anotaram que tinham visto anteriormente na apostila do 8º ano/7ª série, porém pudemos observar que alguns alunos dos grupos não tinham visto ou não lembravam se tinham visto.

A segunda questão *“Fazer as medições dos lados do triângulo e dos quadrados, anotando as medidas na figura. O triângulo é retângulo?”* foi elaborada a fim de verificar as habilidades dos alunos em utilizar os instrumentos de medida e comprovar se o triângulo era retângulo. Notamos uma grande interação entre os grupos, enquanto alguns alunos realizaram as medições, outros iam anotando os resultados encontrados no roteiro. Tivemos que intervir quando os alunos não estavam conseguindo utilizar o transferidor.

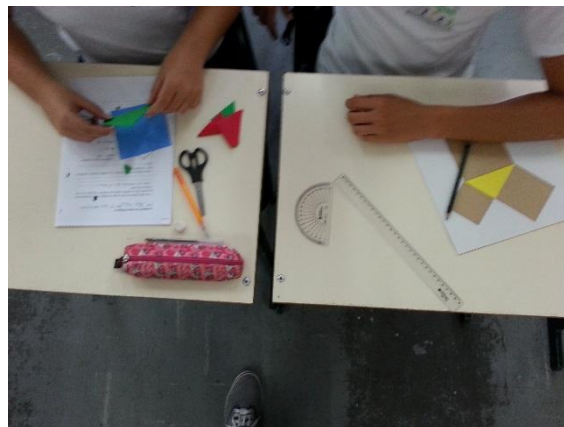
Na terceira questão, os alunos acharam as áreas dos quadrados, quando pudemos notar que apesar de terem respondido corretamente os valores, somente um grupo colocou corretamente a unidade de medida.

Já na quarta e na quinta questão, os grupos deveriam recortar os quadrados verde e vermelho nos locais indicados e tentar encaixar as peças no local destinado

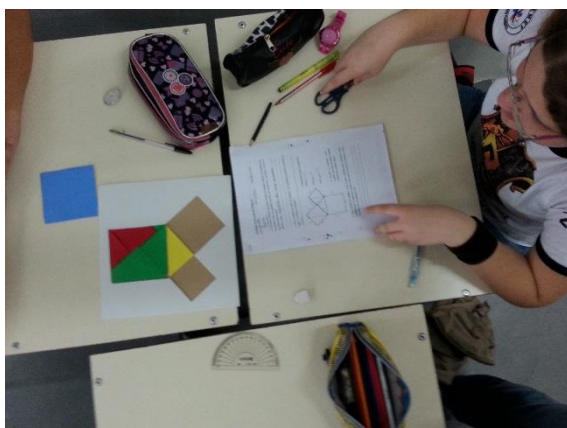
ao quadrado azul. Na Figura 39 apresenta-se algumas fotos que ilustram a realização das atividades.



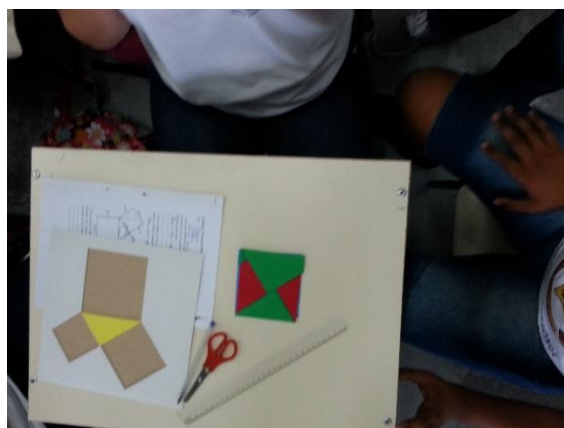
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 39: (a) e (b) Alunos realizando as montagens, (c) e (d) Algumas figuras resultantes

Depois, responderam a seguinte questão: “Qual a relação que podemos fazer entre as peças dos quadrados Verde e Vermelho com a do quadrado Azul?”. Os resultados obtidos mostramos na Figura 40.

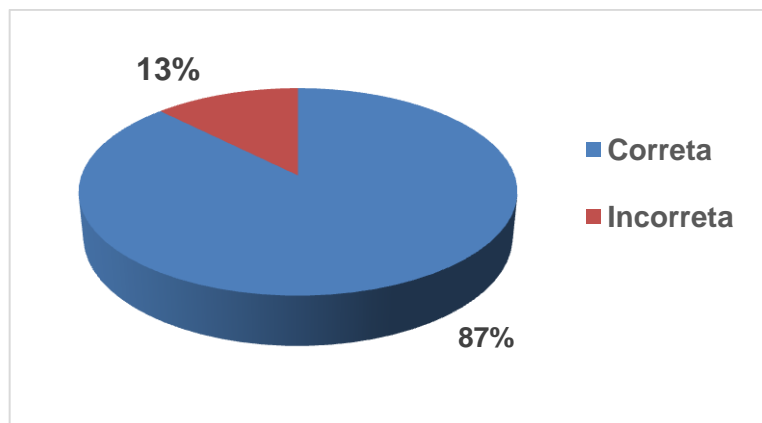


Figura 40: Percentual relativo às respostas dadas para a pergunta 5: Qual a relação que podemos fazer entre as peças dos quadrados Verde e Vermelho com a do quadrado Azul?

Notamos que a maioria dos alunos que participaram da pesquisa (87%) deu a resposta corretamente como “Se juntarmos as peças verdes e vermelhas, formaremos a figura azul”. Já alguns alunos deram como resposta: “pois ambas são quadrados e apresentam três triângulos e dois quadriláteros”.

Na questão 6 (da atividade I), pedimos para fazer o desenho de como ficaram os encaixes das peças no quadrado azul.

Já na questão 7, indagamos: “Qual é a relação que podemos fazer entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo?” e obtivemos as seguintes respostas como mostramos na Figura 41.

7. Qual é a relação que podemos fazer entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo?

Se fizermos 100 - 64 (Azul) que obtivemos o valor de 36. O somar 64 + 36, obtivemos 100. (Vermelho)

(a)

7. Qual é a relação que podemos fazer entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo?

Encontramos a área dos quadrados sobre os lados do triângulo no quadrado

(b)

7. Qual é a relação que podemos fazer entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo?

Fazendo os lados ao quadrado achamos a área do triângulo

(c)

7. Qual é a relação que podemos fazer entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo?

Se fizer o quadrado dos lados do triângulo encontramos a área dos quadrados

(d)

Figura 41: Respostas obtidas na questão 7: Qual é a relação que podemos fazer entre as áreas dos quadrados sobre os lados do triângulo retângulo?

Com a finalidade de verificar se os alunos estavam aplicando a relação corretamente propomos a questão 8: “Agora se tivermos outro triângulo retângulo ABC de catetos medindo $AB = 4\text{ m}$ e $CA = 3\text{ m}$ ”. a) Qual é a área do quadrado, que podemos formar sobre o cateto \overline{AB} ; b) Qual é a área do quadrado, que podemos formar sobre o cateto \overline{AC} ?; c) Qual é a área do quadrado, que podemos formar sobre a hipotenusa \overline{BC} ?; d) “Qual é a medida do lado da hipotenusa \overline{BC} ? Explique como podemos encontrar essa medida”.

Algumas respostas estão apresentadas na Tabela 2 e os resultados indicando a porcentagem de erro/acerto estão apresentados na Figura 42.

Tabela 2: Respostas dadas pelos grupos para a questão 8 item c) Qual é a medida do lado da hipotenusa BC de um triângulo $AB = 4\text{ m}$ e $CA = 3\text{ m}$.

Grupos	Respostas Obtidas
01	“5, porque tem que fazer lado vezes lado que tem que dar 25.”
02	“hip = 5, se somarmos os catetos ao quadrado encontra, os 25, extraindo a raiz é 5.”
03	“Somando as duas áreas dá 25.”
04	“5 pois em relação a pergunta c) que teve como resultado 25 é só achar o número que vezes ele mesmo dá 25.”

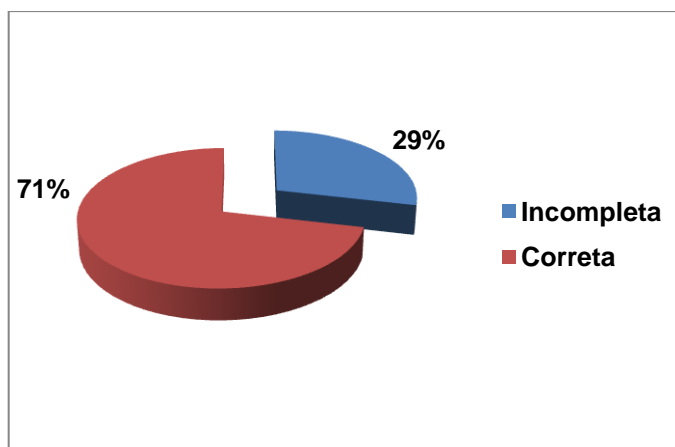


Figura 42: Percentual relativo às respostas incompletas dadas para a questão 8.

Pudemos observar que 29% dos alunos deram respostas incompletas, pois eles relacionaram a soma das áreas dos quadrados sobre os catetos com a área do quadrado sobre a hipotenusa, como a resposta dada pelos alunos do Grupo 03 da Tabela 2.

Na nona questão, investigamos se os alunos sabiam utilizar a relação para encontrar o lado de um dos catetos de um triângulo DEF de cateto DE medindo 12 cm e hipotenusa EF medindo 15 cm e os percentuais de acertos estão indicados na Figura 43.

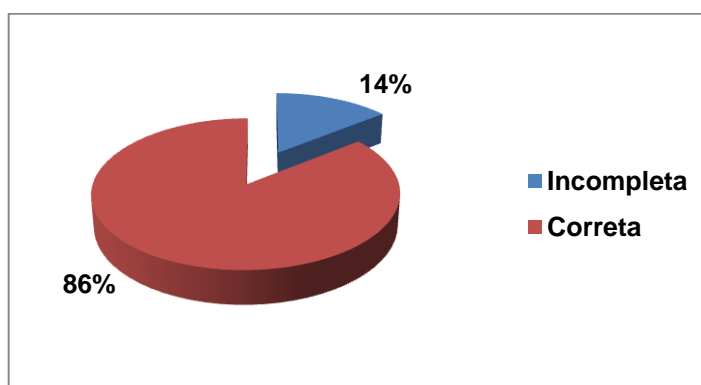


Figura 43: Percentuais de acertos para as questões 10 e 11 para o lado incomensurável de um triângulo retângulo.

Notamos que 14% dos alunos deram respostas incompletas, como apresentada a seguir: “A subtração das áreas dos quadrados maiores é 81, pois lado vezes lado é 81”.

Com a intenção de verificar qual era a relação que os alunos poderiam fazer quando um dos lados do triângulo era incomensurável, propomos na 10ª questão “achar a hipotenusa de um triângulo de catetos medindo, respectivamente, 2 cm e 1 cm” e na décima primeira questão “achar o cateto de um triângulo com cateto medindo 2 cm e hipotenusa medindo 3 cm”. Notamos que todos os alunos responderam corretamente que o valor era $\sqrt{5}$ cm ou o valor aproximado 2,2 cm, quando interferimos para saber por que eles usaram o valor aproximado da raiz de 5, eles responderam que era um assunto que tinham aprendido em sala de aula.

Para finalizar a primeira atividade experimental, perguntamos (questão 12): “Qual era a relação entre os lados de um triângulo retângulo de hipotenusa medindo a e os catetos medindo, respectivamente, b e c ?” Onde ilustramos algumas respostas na Tabela 3.

Tabela 3: Respostas dada a questão 12: Qual é a relação entre os lados de um triângulo retângulo de lados, a , b e c .

Grupos	Respostas Obtidas
01	$a^2 = b^2 + c^2$
02	“A área do a^2 (quadrado grande) é a soma $b^2 + c^2$ (os dois quadrados pequenos)”.
03	“A soma da área do quadrado grande é a soma dos dois pequenos”.
04	“Que o triângulo a área é a soma dos dois triângulos menores”.

Ao final do processo de avaliação dos alunos, foi feita uma análise de *feedback* em que os alunos puderam manifestar sua opinião, Figura 44, sobre os procedimentos utilizados para a aprendizagem.

5. Qual a sua opinião sobre as atividades que foram realizadas na aula?

Excelente. Fiz com que aprendemos um pouco mais de formas distintas sobre alguns conteúdos, e com a aula do professor muito bem explicada.

5. Qual a sua opinião sobre as atividades que foram realizadas na aula?

As atividades foram bem resolvidas,
ajudando a compreender os exercícios.

5. Qual a sua opinião sobre as atividades que foram realizadas na aula?

Achamos uma ótima oportunidade de nos
aprofundarmos em alguns assuntos e conhecer
coisas novas que nos ajudam a aprender para
toda a vida.

5. Qual a sua opinião sobre as atividades que foram realizadas na aula?

Um pouco confusas, porém divertidas.

Figura 44: Opiniões dadas pelos alunos sobre as atividades

6. Conclusão

Constatamos ao longo desse estudo que ensinar Matemática sempre foi um grande desafio para os educadores. Se a história insiste em mostrar as dificuldades, deve-se considerar que o cenário atual ainda precisa de intervenções.

A atividade de ensino deve ser um processo coordenado de ações docentes em que o professor deverá organizar as suas aulas com o máximo de cuidado possível, considerando as reais necessidades dos seus alunos, nunca deixando de considerar que o ensino de Matemática tem o caráter liberal, por combinar a atividade do professor (ensinar) com a atividade do aluno (aprender).

Portanto, conclui-se que a Matemática deva ser ensinada de modo a estimular a capacidade de investigação lógica do educando, fazendo-o raciocinar. A tarefa básica do professor é o desenvolvimento da criatividade, o compromisso com a docência de qualidade, que se compromete com a aprendizagem dos alunos. À escola cabe oferecer todo o apoio e, especialmente, os recursos materiais para tornar possível o trabalho docente.

Finalmente, o ensino de Matemática deve estar apoiado em experiências agradáveis, capazes de favorecer o desenvolvimento de atitudes positivas que conduzirão a uma melhor aprendizagem e ao gosto e prazer em aprender.

O objetivo deste trabalho não foi oferecer modelos inalterados de procedimentos que os professores devem utilizar nas salas de aula. A ideia foi transmitir a confiança em tentar o novo, em arriscar e alterar esta realidade tão negativa em que a educação matemática se encontra.

REFERÊNCIAS

- ARANHA, M. L. de. A. **História da educação**. São Paulo: Moderna, 1998.
- BOYER, C. B. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: (1ª a 4ª série): matemática**. Brasília, 1997
- BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais: matemática (ensino médio)**. Brasília, 1998.
- DAMAZIO, A. **O desenvolvimento de conceitos matemáticos**. Florianópolis: UFSC, 2000.
- DOLCE, O.; POMPEU, J. N.. **Fundamentos de matemática elementar**. 9. ed. São Paulo: Atual, 2013.
- EUCLIDES **Os elementos**. Tradução Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- FREIRE, P. **Pedagogia do oprimido**. São Paulo: Paz e Terra, 1991.
- HEFEZ, A. **Aritmética**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.
- LIMA, E. L. **Matemática e ensino**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2003.
- LIMA, E. L. **Medida e forma em geometria**. comprimento, área, volume e semelhança. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.
- LIMA, E. L. et. al. **Temas e problemas elementares**. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- LOOMIS, E. S. **The pythagorean proposition**. 2. ed. Washington: National Council Of Teachers Of Mathematics, 1968.

MUNIZ NETO, A. C. **Tópicos de matemática elementar**: geometria euclidiana plana. 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2013.

Anexos I: Atividade I: Teorema de Pitágoras

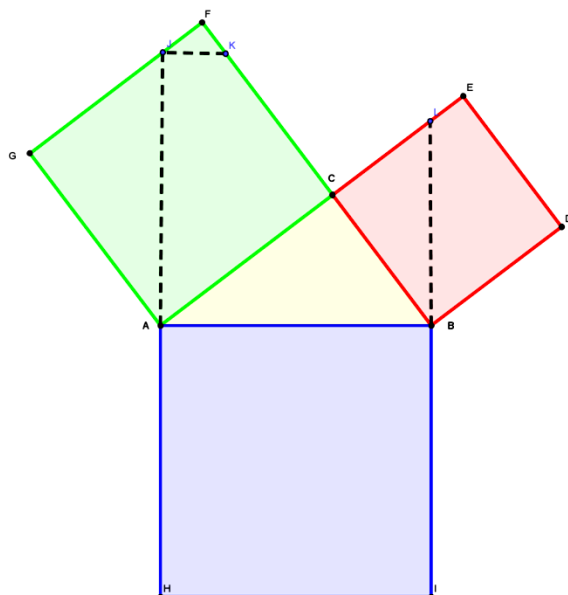
Nome:

Série:

Data: ___/___/2015

1. Vocês estão recebendo uma placa, contendo um triângulo amarelo, um quadrado azul, um quadrado verde, um quadrado vermelho, um transferidor e uma régua. Você já viu este tipo de atividade anteriormente?

2. Faça as medidas dos lados do triângulo e dos quadrados, anotando as medidas na Figura abaixo. O triângulo é retângulo?



3. Determinar as áreas dos quadrados:

$$\text{Área}_{(\text{Azul})} =$$

$$\text{Área}_{(\text{Verde})} =$$

$$\text{Área}_{(\text{Vermelho})} =$$

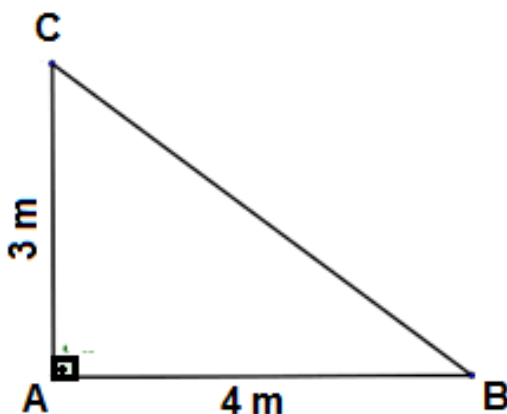
4. Recortar os quadrados verde e vermelho nas linhas pontilhadas, formando as peças de um quebra-cabeça.

5. Tente encaixar no quadrado Azul, as peças formadas pelos quadrados Verde e Vermelho. Qual a relação que podemos fazer entre as peças dos quadrados Verde e Vermelho com a do quadrado Azul?

6. Faça na Figura 1 como ficaram as peças depois de encaixadas no quadrado Azul.

7. Qual é a relação que se obtém entre as áreas dos quadrados e os lados do triângulo retângulo?

8. Agora se tivermos outro triângulo retângulo ABC de catetos medindo $AB = 4\text{ m}$ e $CA = 3\text{ m}$.



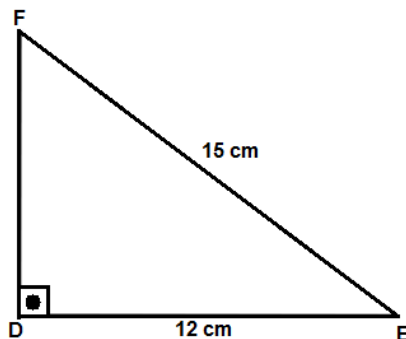
a) Qual é a área do quadrado, que podemos formar com o cateto \overline{AB} ?

b) Qual é a área do quadrado, que podemos formar com o cateto \overline{AC} ?

c) Qual é a área do quadrado, que podemos formar com a hipotenusa \overline{BC} ?

d) Qual é a mediada do lado da hipotenusa \overline{BC} ? Explique como podemos encontrar essa medida.

9. Agora se tivermos outro triângulo retângulo DEF com cateto \overline{DE} medindo 12 cm e hipotenusa EF medindo 15 cm.



a) Qual é a área do quadrado, que podemos formar sobre a hipotenusa \overline{FE} ?

b) Qual é a área do quadrado, que podemos formar sobre o cateto \overline{DE} ?

c) Qual é a área do quadrado, que podemos formar sobre o cateto \overline{DF} ?

d) Qual é a medida do lado do cateto \overline{DF} ? Explique como podemos encontrar essa medida.

10. Se tivermos um triângulo GHI , com catetos $GH = 2 \text{ cm}$ e $GI = 1 \text{ cm}$.

a) Qual é a área formada pelos quadrados sobre os lados GH e GI ?

b) Qual é a área do quadrado sobre a hipotenusa HI ?

c) Como podemos encontrar a medida do lado do quadrado sobre a hipotenusa HI ? Explique.

11. E com outro triângulo JKL de cateto $JK = 2 \text{ cm}$ e hipotenusa $JL = 3 \text{ cm}$.

a) Qual é a área formada pelos quadrados sobre os lados JK e JL ?

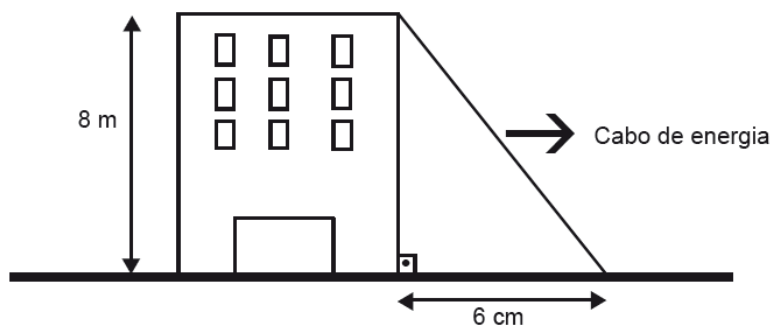
b) Qual é a área do quadrado sobre o cateto KL ?

c) Como podemos encontrar a medida do lado do quadrado sobre a hipotenusa KL ? Explique.

12. Agora de forma geral, se tivermos um triângulo retângulo ABC , retângulo em A , com a hipotenusa $BC = a$ e os catetos $AB = c$, e $AC = b$, qual é a relação entre os lados desse triângulo?

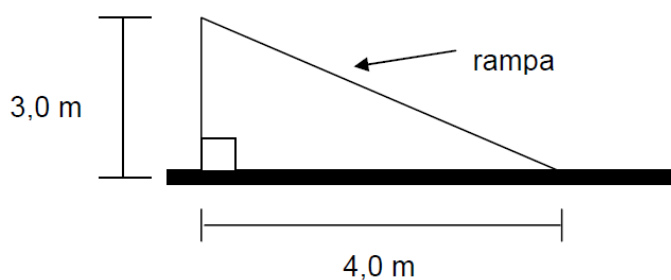
Atividade II: Aplicações envolvendo o Teorema de Pitágoras

1. (ETEC-2009) Uma empresa de iluminação necessita esticar um cabo de energia provisório do topo de um edifício, cujo formato é um paralelepípedo, a um determinado ponto do solo distante a 6 metros, como ilustra a figura a seguir. O comprimento desse cabo de energia, em metros, será de:



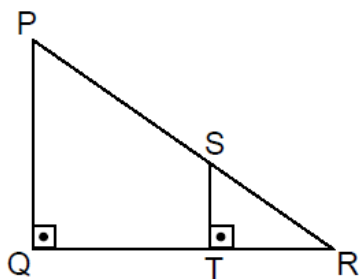
(A) 28. (B) 14. (C) 12. (D) 10. (E) 8.

2. (ETEC-2009) Frequentemente, Pedrinho brinca num escorregador de um parque próximo de sua casa. Considerando a figura a seguir (triângulo retângulo) que ilustra esse escorregador, conclui-se que o comprimento da rampa é de:



- (A) 5 m (B) 7 m (C) 12 m (D) 14 m (E) 25 m

3. (ETEC – 2010) A figura representa os triângulos retângulos PQR e STR , sendo $RS = 5\text{ cm}$, $ST = 3\text{ cm}$ e $QT = 6\text{ cm}$. A medida do cateto \overline{PQ} , em centímetros, é:



- (A) 7,5. (B) 8,2. (C) 8,6. (D) 9,0. (E) 9,2.

4. Roberto irá cercar uma parte de seu terreno para fazer um canil. Como ele tem um alambrado de 10 metros, decidiu aproveitar o canto murado de seu terreno (em ângulo reto) e fechar essa área triangular esticando todo o alambrado, sem sobra. Se ele utilizou 6 metros de um muro, do outro muro ele irá utilizar, em metros:

- (A) 7.
 (B) 5.
 (C) 8.
 (D) 6.
 (E) 9.

5. Qual a sua opinião sobre as atividades que foram realizadas na aula?
