

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rodrigo Carlos Araujo

Sistemas Dinâmicos e Conjuntos de Cantor
Uma breve introdução à dinâmica unidimensional

Rio de Janeiro
2016

Rodrigo Carlos Araujo

Sistemas Dinâmicos e Conjuntos de Cantor

Uma breve introdução à dinâmica unidimensional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Michel Cambrainha

Doutor em Matemática - UNIRIO

Rio de Janeiro

2016

Araujo, Rodrigo Carlos

Sistemas Dinâmicos e Conjuntos de Cantor / Rodrigo Carlos Araujo

- 2016

46.p

1. Matemática 2. Ensino de Matemática. I.Título.

CDU xxx.xx

Rodrigo Carlos Araujo

Sistemas Dinâmicos e Conjuntos de Cantor

Uma breve introdução à dinâmica unidimensional

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROF-MAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 15 de janeiro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Michel Cambrinha

Doutor em Matemática - UNIRIO

Gladson Octaviano Antunes

Doutor em Matemática - UNIRIO

Yuri Ki

Doutora em Matemática - UFF

*À minha esposa Janine, por ter me apoiado
em todos os momentos deste processo.*

Resumo

O presente trabalho tem por finalidade apresentar uma breve introdução aos sistemas dinâmicos unidimensionais. Através do mapa logístico, apresentamos alguns conceitos, como iteração, órbitas, pontos atratores e repulsores, dentre outros. Além disso, estudamos o comportamento da família quadrática para diferentes valores do seu parâmetro. Fazemos o mesmo para a função tenda, até chegarmos a construção dos conjuntos de Cantor, com destaque para o conjunto dos terços médios.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos, Mapa Logístico, Conjuntos de Cantor.

Abstract

The present work is a brief introduction to the one-dimensional dynamical systems. We introduce some concepts, through the logistic map, as iteration, orbits, attracting and repelling fixed points, and so on. Moreover we study the behavior of the quadratic family for different values of its parameter. We do the same for the tent map to construct the Cantor set, highlighting the set of middle-thirds.

Keywords: Dynamical Systems, Logistic Map, Cantor Set.

Agradecimentos

Em primeiro lugar quero agradecer a Deus, por me dar forças para vencer todos os obstáculos. Agradeço à minha esposa Janine por me apoiar em toda essa etapa e compreender minha ausência neste período.

Ao meu professor orientador, Michel Cambrainha, pela sua dedicação e paciência na orientação deste trabalho, e por ter sido um grande colaborador deste. A todo o corpo docente da UNIRIO, por seu empenho e dedicação.

À CAPES, pelo financiamento da bolsa de estudos.

Aos amigos Alexandre e Wladimir e a todos os colegas de curso, pela companhia nos momentos de estudo.

Enfim, sou grato a todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a realização deste trabalho.

“A essência da Matemática é a sua liberdade”

(Georg Cantor)

Sumário

1	Introdução	7
2	Mapa Logístico	9
2.1	Sistemas Dinâmicos	12
2.2	Mapas	14
2.3	Estudo de alguns casos	20
3	Conjuntos de Cantor	29
3.1	Conjuntos Finitos e Infinitos	30
3.1.1	Conjuntos enumeráveis	30
3.1.2	Diagonal de Cantor	31
3.2	Dinâmica e Conjunto de Cantor	33
3.2.1	Conjunto de Cantor dos Terços Médios	33
3.2.2	O caso $\mu > 4$ na Família Quadrática	37
3.2.3	A Função Tenda	39
4	Considerações Finais	42

1 Introdução

A escolha do tema deste trabalho surgiu durante a realização do curso de pós-graduação em Matemática (PROFMAT), promovido pela SBM. A inserção no mercado de trabalho dificulta o retorno ou a continuação dos estudos por parte dos professores, uma vez que longas jornadas de trabalho inviabilizam este processo. O PROFMAT trouxe uma oportunidade a muitos professores, uma vez que possibilita a realização da dupla jornada, trabalho e estudo.

Essa oportunidade despertou um interesse por parte do autor em buscar uma linha de pesquisa que contribuísse não somente para sua formação, mas também para outros professores e alunos de graduação que tenham interesse em expandir seus estudos.

O estudo dos sistemas dinâmicos é um assunto relativamente novo na Matemática, foi através de *Poincaré*, *Lyapunov* e *Birkhoff* que essa teoria começou a despertar a atenção de inúmeros matemáticos. As décadas de 1960 e 1970 marcaram o renascimento do estudo dos sistemas dinâmicos como uma nova área de investigação inclusive no Brasil com nomes como *Peixoto* e *Palis*. Seu campo de aplicações é bastante extenso não restringindo-se apenas à Matemática, mas em outras áreas da ciência como biologia, física, economia, medicina, dentre outros.

Nossos objetivos são modestos, longe de desenvolver uma teoria sólida sobre o estudo da dinâmica unidimensional, pretendemos apenas apresentar de forma sucinta algumas ideias e conceitos iniciais sobre o assunto, com uma linguagem acessível a professores do ensino básico e/ou estudantes de graduação que estejam familiarizados com alguns conceitos de cálculo em uma variável real e um pouco de sequências de números reais. O leitor interessado em aprofundar-se sobre o tema, poderá encontrar sugestões de leituras nas referências bibliográficas.

No capítulo 2 conceituamos mapa logístico e sua evolução, desde o modelo de crescimento populacional proposto por Malthus (1798), passando por Verhulst (1845), até o modelo atual proposto por Robert May em 1976. Dividimos esse capítulo em três seções visando uma melhor exposição. Na primeira seção conceituamos com maior detalhe um sistema dinâmico, explicitando sua relação de causa e efeito com o tempo.

Definimos sistemas lineares e não lineares bem como o comportamento das funções que os geram através de sucessivas iterações, e mostramos as características de um mapa, que permite uma análise mais qualitativa com menos ênfase às técnicas analíticas de resolução. Definimos conceitos como pontos atratores e repulsores, órbita de um ponto, ponto fixo hiperbólico, bacia de atração dentre outros. A seção final do capítulo trata do estudo do comportamento geral do mapa logístico para alguns valores do parâmetro μ , exemplificando detalhadamente a análise gráfica em cada caso.

No capítulo 3 falamos sobre os conjuntos de Cantor, suas características, e sua relação com os sistemas dinâmicos. Fizemos uma breve introdução sobre a biografia de Georg Cantor e suas contribuições para a Matemática, a noção de infinito e de conjuntos enumeráveis e não enumeráveis. Por fim descrevemos a construção dos conjuntos de Cantor, o clássico conjunto dos terços médios e a relação desses conjuntos com as famílias quadráticas e tenda.

2 Mapa Logístico

Seria possível prever a evolução da população de uma certa espécie animal? Ou, ainda, seria possível prever a extinção ou a estagnação de um determinado número de indivíduos? Estas questões preocupam tanto biólogos quanto economistas há vários séculos e desde então muitos modelos matemáticos foram criados para tentar respondê-las. Uma das primeiras tentativas de prever o futuro de uma população animal a causar grandes polêmicas foi o modelo Malthusiano. Thomas Robert Malthus (1766-1834), economista e demógrafo britânico publicou em 1798 o *Ensaio sobre a População*, um modelo onde o total da população dependia exclusivamente das taxas de natalidade, de mortalidade e do número de indivíduos. Sua teoria era baseada em dois argumentos principais:

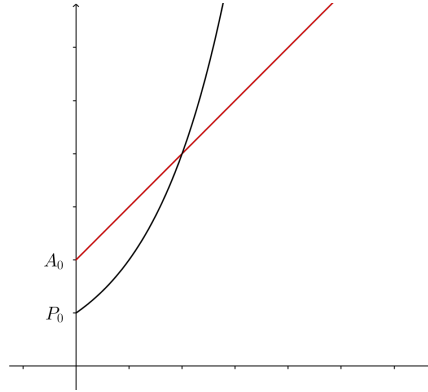
- a) As guerras, epidemias e desastres naturais atuariam como controladores do crescimento populacional. Seu crescimento obedeceria a uma progressão geométrica (2, 4, 8, 16, 32, 64 . . .) ininterruptamente.
- b) A produção de alimentos cresceria em progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10 . . .) e sua oferta seria limitada em função dos limites territoriais dos continentes.

Uma *Progressão Aritmética (PA)* é uma sequência numérica na qual cada termo, a partir do segundo, é obtido somando-se ao anterior uma constante r , chamada razão da PA. E uma *Progressão Geométrica (PG)* é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando-se o anterior por uma constante q , chamada razão da PG.

Desse modo, segundo a teoria de Malthus, a população aumentaria progressivamente dependendo de um fator constante de crescimento (C) de forma *exponencial*, ao passo que a oferta de alimentos cresceria de forma *linear*, ou seja, bem mais lenta. Malthus estimou que a população dobraria a cada 25 anos, sendo assim, a consequência seria a falta de alimentos para abastecer às demandas do planeta. Este modelo matemático pode ser expresso por

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + r \iff A_n = A_0 + nr \\ P_{n+1} = C \cdot P_n \iff P_n = P_0 \cdot C^n \end{cases}$$

onde P_n = população após n anos e A_n = quantidade de alimentos após n anos.



Com uma taxa de crescimento positiva (e maior que 1), seja qual for a população inicial P_0 , o número de indivíduos aumentará exponencialmente com o tempo, produzindo rapidamente uma super população. Na verdade, há vários fatores que limitam o número de indivíduos que podem co-habitar em uma região geográfica limitada, e com uma capacidade limitada de produção de alimentos. Uma forma de se exprimir essa tendência à saturação populacional consiste em supor que a taxa de crescimento não seja constante, mas sim que diminua à medida em que a população se aproxima um valor limite P_M , conhecido como capacidade de sustentação. Em 1845 Pierre François Verhulst (1804-1849), matemático belga, propôs um modelo não linear onde a mortalidade seria proporcional ao quadrado do número de indivíduos. Este modelo populacional discreto foi introduzido para modelar a população de uma espécie mantida em uma área fechada. Verhulst, inserindo o conceito de fatores inibidores, sugeriu que a taxa de crescimento de uma população não seria constante mas proporcional ao desvio em relação ao valor máximo que a população poderia alcançar, ou seja, a população P_1 , no tempo 1, seria a população inicial P_0 multiplicada pelo fator $k \cdot (P_M - P_0)$ onde P_M é a população máxima e k um número real positivo, ou seja,

$$P_1 = k \cdot (P_M - P_0) \cdot P_0.$$

Com isso, a população futura (P_{n+1}) ao invés de estimada pela fórmula $P_{n+1} = C \cdot P_n$, seria reformulada por $P_{n+1} = k \cdot (P_M - P_n) \cdot P_n$. Dividindo os dois membros da equação por P_M , temos:

$$\frac{P_{n+1}}{P_M} = \frac{k \cdot (P_M - P_n) \cdot P_n}{P_M}$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_M} = k \cdot \left(\frac{P_M}{P_M} - \frac{P_n}{P_M} \right) \cdot P_n$$

Tomando $X_n = \frac{P_n}{P_M}$, temos:

$$X_{n+1} = k \cdot P_n \cdot (1 - X_n)$$

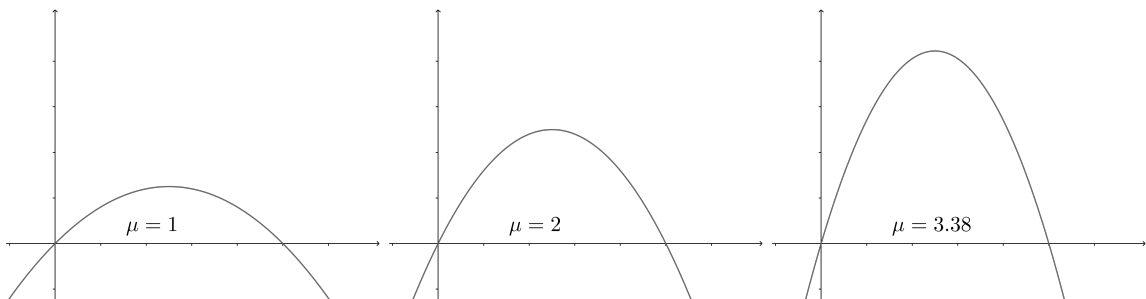
Fazendo $k = \frac{\mu}{P_M}$, chegamos à expressão do mapa logístico:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{\mu}{P_M} \cdot P_n \cdot (1 - X_n) \\ X_{n+1} &= \mu \cdot X_n(1 - X_n) \end{aligned} \quad (2.1)$$

Esta expressão, conhecida como *mapa logístico*, foi descrita pelo biólogo Robert May em 1976 [6], dando continuidade ao trabalho de Verhulst, como um modelo populacional para insetos, com X_n sendo o número de indivíduos na n -ésima geração, e $\mu > 0$ como uma taxa de variação da população. O modelo, onde os valores de x representam porcentagens da população ao longo do tempo, é uma equação determinística: sua situação futura será determinada pelas condições presentes. Desta forma, a expressão também pode ser representada como uma função (*função logística ou mapa logístico*), mais precisamente uma função quadrática.

$$F_\mu(x) = \mu x(1 - x) \quad (2.2)$$

O gráfico do mapa logístico é uma parábola com concavidade voltada para baixo (para $\mu > 0$). O vértice dessa parábola está diretamente ligado ao valor do parâmetro μ .



Como os valores de x representam as porcentagens da população ao longo do tempo, temos uma variação de 0% à 100%, para efeitos de modelagem podemos restringir o estudo da função F_μ ao intervalo $[0, 1]$, contudo como a função quadrática está definida para todo o conjunto dos números reais, o estudo “fora” do intervalo $[0, 1]$ tem valor teórico próprio.

As raízes de $F_\mu(x)$ são: $x_1 = 0$ e $x_2 = 1$ e as coordenadas do vértice da parábola (ponto de máximo da função) pode ser facilmente calculado,

$$V = \left(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4} \right).$$

Quando $\mu = 4$ o vértice da parábola logística tem ordenada $y = 1$; logo se $\mu > 4$ a condição que $f(x)$ esteja no intervalo $[0, 1]$ deixa de ser satisfeita para alguns valores de x , mas retornaremos a essa discussão no capítulo 4. Por enquanto nos restringiremos aos casos $0 < \mu \leq 4$.

O que chamou a atenção de May foi que para certos valores de μ o comportamento futuro desse mapa perde a regularidade e passa a ser altamente sensível às condições iniciais, significando que valores iniciais arbitrariamente próximos podem apresentar comportamentos bastante distintos.

Antes de prosseguirmos com o estudo de casos da *família quadrática* $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, precisamos fazer algumas considerações.

2.1 Sistemas Dinâmicos

Um sistema é qualquer conjunto de componentes interconectados, que apresentam certas relações de causa e efeito. É importante diferenciar um sistema estático de um sistema dinâmico. Um sistema estático é aquele em que as propriedades descritivas do sistema não variam com o tempo, podendo variar espacialmente. Já em um sistema dinâmico tais propriedades variam no tempo, podendo também variar espacialmente.

Dada qualquer função f definida em um certo conjunto X , ou seja, $f : X \rightarrow X$, chamamos de *dinâmica* a passagem do tempo na iteração dessa função. Por exemplo, tome um ponto $x_0 \in X$ (correspondente ao instante zero), depois ele estará em $f(x_0)$, (instante 1), depois em $f(f(x_0))$, (instante 2), e assim sucessivamente, ou seja, cada instante corresponde a uma iterada da função. Assim uma sequência de iterações pode ser vista como:

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Para evitar expressões desse tipo usaremos a seguinte notação:

$$f^0(x_0) := x_0, f^1(x_0) := f(x_0), f^n(x_0) := f(f^{n-1}(x_0)), \text{ para } n \geq 0$$

Logo, uma sequência de iterações pode ser escrita como:

$$x_0, f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), f^4(x_0), f^5(x_0) \dots$$

Assim, a expressão $f^n(x_0)$, significa que a função foi iterada n vezes. O conjunto formado por esses pontos é conhecido como órbita positiva (ou à direita) do ponto x e é representado por $\mathcal{O}_f^+(x)$ ou $\mathcal{O}^+(x)$, quando não houver ambiguidade sobre a f .

Se f for *invertível*, podemos definir a órbita completa de x , $\mathcal{O}(x)$ como o conjunto de pontos $f^n(x)$ para $n \in \mathbb{Z}$, e a órbita negativa (ou à esquerda) de x como o conjunto de pontos $\mathcal{O}^-(x) = \{x, f^{-1}(x), f^{-2}(x), \dots\}$. Note que

$$\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}^+(x) \cup \mathcal{O}^-(x)$$

Um sistema dinâmico, ou seja a função f , pode ser linear ou não linear. Uma *função afim* ou uma *função linear* tem como propriedade, o fato do resultado final ser proporcional ao campo de entrada.

Assim se uma função é do tipo $f(x) = ax + b$, o valor de $f(x)$ se mantém em proporção direta com o valor da variável x . Geometricamente seu gráfico é uma linha reta.

A não-linearidade é a negação da linearidade, o que significa que o resultado final pode estar fora de proporção em relação ao campo de entrada, tanto para mais como para menos.

Se a dinâmica for linear, existem soluções gerais que nos permitem determinar o comportamento no futuro do sistema descrito de forma exata, em função do estado atual do sistema, como vimos anteriormente na teoria de Malthus onde a população na geração n era dada em termos da população da geração anterior e da inicial pelas relações $P_n = kP_{n-1} = k^n P_0$. Já se as equações forem não lineares, essas soluções exatas, em geral, não existem em uma forma fechada. Na sua evolução, o tempo é uma variável independente, ou seja, fazemos o estudo da evolução no tempo de um ponto $x_0 \in X$ a partir da função f . Entretanto, o objeto de interesse são suas propriedades gerais, como equilíbrio, estabilidade, tipo de convergência ou divergência, etc. A isso denominamos uma *teoria qualitativa*.

O estudo dos sistemas dinâmicos é um assunto relativamente novo na Matemática, e foi através de matemáticos como *Poincaré*, *Liapunov* e *Birkhoff* que essa teo-

ria começou a despertar a atenção de inúmeros matemáticos. *Poincaré* foi o responsável por revolucionar o estudo das equações diferenciais não lineares, através da introdução de técnicas qualitativas de geometria e topologia, sobrepondo os rigorosos métodos analíticos na solução dos sistemas. Para *Poincaré* uma compreensão global do comportamento bruto de toda a solução do sistema era mais importante do que o comportamento local de uma determinada solução, analiticamente precisa. As décadas de 1960 e 1970 marcaram o renascimento do estudo dos sistemas dinâmicos como uma nova área de investigação, com caráter próprio, que por ser inovador deu origem a agitadas polêmicas nos meios científicos, por dar mais ênfase à análise geométrica e menos ênfase às técnicas analíticas de resolução.

2.2 Mapas

As funções que determinam um sistema dinâmico podem ser chamadas de *mapeamentos* ou *mapas*, devido à ênfase geométrica do comportamento de um ponto. Um mapa é uma relação de recorrência para a qual, dado o valor da variável em um instante, obtemos o valor da variável no instante seguinte.

Uma série de comportamentos, alguns deles bastante complicados, podem aparecer quando estudamos sistemas descritos por equações não-lineares, como órbitas periódicas ou quase periódicas, ciclos limite e caos. No entanto, existem algumas órbitas que são especialmente simples e que irão desempenhar um papel central na pesquisa de todo o sistema.

Definição 2.2.1. Um ponto $x \in X$ é dito um *ponto fixo* de f quando $f(x) = x$. Denotamos por $Fix(f)$ o conjunto de todos os pontos fixos de uma função f , isto é, $Fix(f) = \{p \in X ; f(p) = p\}$.

Definição 2.2.2. Um ponto $x \in X$ é um *ponto periódico* de período n , $\exists n \in \mathbb{N}$, se $f^n(x) = x$. Podemos denotar o conjunto de pontos periódicos de período n por $Per_n(f)$. O conjunto de todas as iterações de um ponto periódico forma uma órbita periódica.

Observação 2.2.1. Um ponto periódico de período k pode ser visto como um ponto fixo

para f^k , ou seja, $Per_k(f) = Fix(f^k)$. Observe também que se $f^k(x) = x$, então

$$\begin{aligned} f^{2k}(x) &= f^k(f^k(x)) = f^k(x) = x \\ f^{3k}(x) &= f^k(f^{2k}(x)) = f^k(x) = x \\ &\vdots \\ f^{nk}(x) &= f^k(f^{(n-1)k}(x)) = f^k(x) = x \end{aligned}$$

Isso é o mesmo que dizer que $Per_k(f) \subseteq Per_{2k}(f) \subseteq \cdots Per_{nk}(f) \subseteq \cdots$, mas as inclusões podem ser estritas.

Para falarmos em “proximidade”, continuidade e pontos de acumulação de uma órbita precisamos estabelecer algum tipo de estrutura que faça com que essas noções tenham sentido. Uma possibilidade, é assumir que um conjunto X é um espaço métrico, ou seja, um conjunto dotado de uma distância. Uma distância nada mais é do que apenas uma função que, para cada par de pontos x e y em X associa um número real não negativo $d(x, y)$ que é conhecido como distância de x a y . De forma mais precisa, uma distância é uma função $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$\begin{aligned} d(x, y) &= d(y, x) \text{ para todo } x, y \in X \\ d(x, y) &= 0 \iff x = y \\ d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \text{ para todo } x, y, z \in X \end{aligned}$$

Esta última desigualdade é conhecida como desigualdade triangular e fica muito natural quando d é a distância usual no plano se considerarmos os pontos x , y e z como vértices de um triângulo. No caso de $X = \mathbb{R}$, podemos considerar $d(x, y) = |x - y|$.

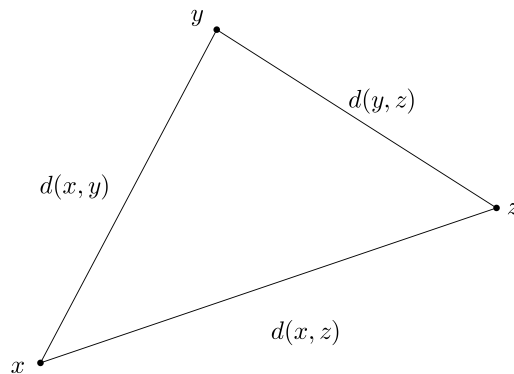


Figura 2.1: Desigualdade triangular no plano

Uma vez que X admite uma noção distância podemos definir a ideia de limite.

Definição 2.2.3. Seja uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$. Dizemos que L é o limite da sequência (x_n) se $d(x_n, L)$ assume valores cada vez mais próximos de zero sempre que tomamos o índice n suficientemente grande. Para ser mais preciso, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \implies d(x_n, L) < \varepsilon$. Denotamos $x_n \rightarrow L$ ou ainda $d(x_n, L) \rightarrow 0$.

Quando temos uma órbita $\mathcal{O}(x)$ podemos procurar os seus pontos de acumulação, ou seja, os pontos em torno dos quais a órbita irá passar uma infinidade de vezes. O caso mais simples é o seguinte:

Lema 2.2.1. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $\{x_n\}_{n \geq 0}$ a órbita de um ponto qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, ou seja, $x_n = f^n(x_0)$. Se $\lim x_n = L$, então $f(L) = L$, isto é, L é um ponto fixo.*

Demonstração. Como f é contínua, podemos afirmar que $f(x_n) \rightarrow f(L)$. Por outro lado, a sequência $f(x_n) = x_{n+1}$ é uma subsequência de $\{x_n\}_{n \geq 0}$, logo, possui o mesmo limite, isto é, $f(x_n) \rightarrow L$. Pela unicidade do limite, $f(L) = L$. \square

Pontos fixos como esses do lema anterior são chamados atratores. Vejamos a definição:

Definição 2.2.4 (Atratores). Um ponto p fixo de f é dito *atrator* para x se a sequência $f^n(x) \rightarrow p$, quando $n \rightarrow +\infty$ ou equivalentemente $d(f^n(x), p)$ converge para zero. O conjunto de pontos cujas órbitas se aproximam de p é chamado de *bacia de atração* de p :

$$B(p) = \{x \in X; d(f^n(x), p) \rightarrow 0\}.$$

De maneira análoga, um ponto periódico q é dito *atrator* para x quando a sequência de números reais $d_n = d(f^n(x), f^n(q))$ converge para zero, quando $n \rightarrow +\infty$. O conjunto de pontos cujas órbitas se aproximam da órbita de q é chamado de *bacia de atração* de q :

$$B(q) = \{x \in X; d(f^n(x), f^n(q)) \rightarrow 0\}.$$

Quando a bacia de atração de um ponto (fixo ou periódico) q contiver um intervalo J tal que $q \in J$, diremos simplesmente que q é *atrator* \square

Perceba que, no caso de um ponto periódico, o conjunto de valores assumidos pela sequência $(f^n(q))$ é finito. E então, para $x \in B(q)$, a sequência $(f^n(x))$ vai se acumulando em cada um dos (finitos) termos da sequência periódica $f^n(q)$.

Quando $B(x_0) = X$ para algum $x_0 \in X$, ou seja, todos os pontos têm sua órbita futura atraída para x_0 , então dizemos que x_0 é um *atrator global*.

Se a função f tem uma inversa (para isso é necessário e suficiente que f seja uma bijeção) então também podemos falar na órbita de um ponto para o passado e, de forma análoga, procurar saber quais são os pontos de acumulação de uma órbita quando o tempo caminha no sentido contrário ao usual.

Definição 2.2.5 (Repulsor). Dizemos um ponto p , fixo ou periódico, é repulsor para x quando $d(f^{-n}(x), f^{-n}(p)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Vamos ver algumas condições suficientes que permitem concluir quando um determinado ponto é atrator (ou repulsor). Para isso vamos precisar lembrar do seguinte resultado clássico, cuja demonstração será omitida e pode ser encontrada em [7]:

Teorema 2.2.1. [Teorema do Valor Médio] *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a, b) , então existe $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Definição 2.2.6. Um ponto p , podendo ser fixo ou periódico, é dito *hiperbólico* para f quando $|f'(p)| \neq 1$ se p é fixo, e $|(f^k)'(p)| \neq 1$ se p é periódico de período k .

Proposição 2.2.1. *Seja f de classe C^1 , isto é, derivável e com derivada contínua.*

- (i) *Seja p um ponto fixo hiperbólico com $|f'(p)| < 1$. Então p é um ponto fixo atrator, isto é, existe um intervalo aberto J , contendo p , tal que para todo $x \in J$, $f^n(x) \rightarrow p$.*
- (ii) *Seja p um ponto fixo hiperbólico com $|f'(p)| > 1$. Então p é um ponto fixo repulsor, isto é, existe um intervalo aberto J , contendo p , tal que para todo $x \in J \setminus \{p\}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \notin J$.*

Demonstração. (i) Como f é classe C^1 , existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| < A < 1$ para $x \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Seja $J = (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$. Pelo Teorema 2.2.1 (do Valor Médio), temos que existe um $c \in J$ tal que $\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(c)| < A < 1$:

$$|f(x) - p| = |f(x) - f(p)| < A|x - p| < |x - p| < \varepsilon$$

Portanto $f(x)$ pertence ao intervalo J e, de fato, está mais próximo de p do que x . Analogamente, para os iterados seguintes temos:

$$|f^n(x) - p| < A^n|x - p|$$

Então $f^n(x) \rightarrow p$ se $n \rightarrow \infty$. □

(ii) Seja p fixo com $|f'(p)| > 1$. Então, como $f \in C^1$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|f'(x)| > A > 1$, para todo $x \in J := (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$

Pelo Teorema 2.2.1, existe um $c \in J$ tal que $\frac{|f(x) - f(p)|}{|x - p|} = |f'(c)| > A > 1$.

Daí $|f(x) - p| > A|x - p|$.

Se $f(x) \notin J$, tomamos $k = 1$. Senão podemos aplicar novamente o Teorema 2.2.1:

$$|f(f(x)) - f(p)| > A|f(x) - p|$$

$$|f^2(x) - p| > A^2|x - p|$$

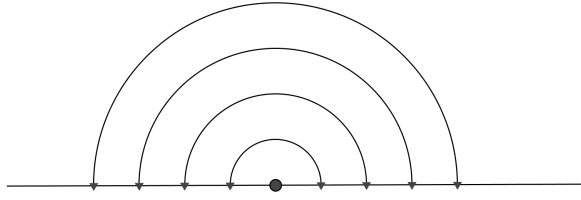
Analogamente, se $f^2(x) \notin J$ tomamos $k = 2$, senão prosseguimos e repetimos o argumento. Afirmamos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^{k_0}(x) \notin J$. De fato, pois senão $f^k(x) \in J$, para todo $k \in \mathbb{N}$, o que nos daria por um lado $|f^k(x) - p| < \varepsilon$, e por outro, pelo Teorema 2.2.1, $|f^k(x) - p| > A^k|x - p|$. Combinando essas duas desigualdades, temos para todo $k \in \mathbb{N}$

$$A^k|x - p| < |f^k(x) - p| < \varepsilon$$

Mas isto é um absurdo, pois $A^k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow +\infty$. Tomamos k_0 como o menor elemento do conjunto $\{k ; f^k(x) \notin J\}$. □

O gráfico de uma função real nos fornece informações sobre sua primeira iteração, mas dá muito pouca informação sobre iterações subsequentes. Para entender iterações mais elevadas, poderíamos tentar esboçar cada um de seus gráficos, mas este é um procedimento um tanto complicado. Uma maneira conveniente de visualizar as sucessivas iteradas de um mapa unidimensional $x_t = f(x_{t-1})$, seja ele linear ou não, é construir o *diagrama de escada* correspondente. Este é um método geométrico muito mais eficiente para descrever as órbitas de um sistema dinâmico. Por exemplo, para indicar que todas as órbitas não nulas de $f(x) = -x$ têm período 2, poderíamos esboçar um *retrato de fase* como na figura 2.2.

Entretanto, mapas simples como $i(x) = x$ e $f(x) = -x$ são, infelizmente, atípicos entre sistemas dinâmicos. Há muitas razões para que isso ocorra, mas talvez a característica mais incomum desses mapas é o fato de que *todos* os pontos são periódicos sob iteração.

Figura 2.2: $f(x) = -x$

Podemos construir um diagrama de escada utilizando dois eixos cartesianos representando as variáveis x_k (eixos das abscissas) e x_{k+1} (eixos das ordenadas). Neste sistema traçamos o gráfico da função $f(x)$. No caso da função linear $\alpha x + \beta$, o gráfico é uma reta, com taxa de variação e coeficiente linear iguais à α e β respectivamente, traçamos também a reta que passa pela origem $y = x$ (função identidade). Sabemos que $\alpha = \tan \theta$ onde θ é o ângulo de inclinação da reta com o eixo horizontal no sentido anti-horário, e β é a interseção da reta com o eixo vertical. Localizamos no eixo horizontal o valor correspondente à condição inicial x_0 , e subimos uma vertical até encontrar o gráfico da função $f(x)$, no caso a reta $\alpha x + \beta$ [Fig. 2.3].

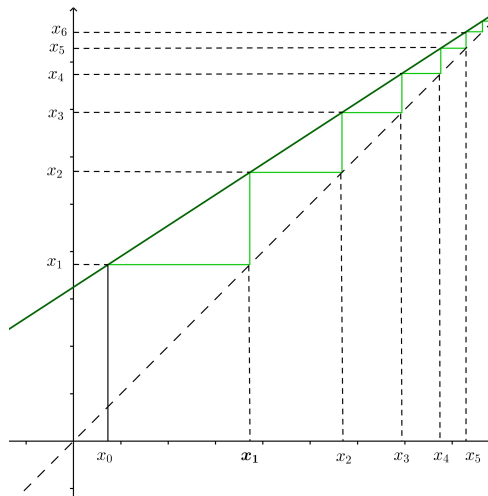


Figura 2.3: Diagrama de um mapa linear

O valor correspondente no eixo vertical será $x_1 = f(x_0)$. Traçamos uma paralela ao eixo horizontal a partir deste ponto até intersectar a reta $y = x$. A abscissa do ponto de interseção é obviamente igual a x_1 . A partir deste ponto repetimos o processo: construímos uma perpendicular ao eixo horizontal passando por x_1 até encontrar o gráfico da função obtendo $x_2 = f(x_1)$, rebatemos no eixo horizontal e assim por diante. O diagrama resultante assemelha-se a uma escada, onde o início de cada degrau indica o valor da iterada do mapa.

2.3 Estudo de alguns casos

A equação do mapa logístico $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$ parece simples, porém apresenta muitas noções fundamentais de dinâmica não linear extremamente relevantes para a ciência. Entender completamente esta família ainda é objeto de pesquisa e a atual compreensão por parte de grandes matemáticos de nossa época.

Podemos obter uma sequência $\{x_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ do mapa logístico dado por F_μ iterando recursivamente a partir de um ponto inicial x_0 (condição inicial) o mapa que depende da escolha de um valor para o parâmetro μ , mantido fixo durante as iterações da função, podendo ser alterado para obtermos outra sequência. A partir dos valores x_n obtidos, construímos um diagrama de escada com coordenadas x_n (*eixo das abscissas*) e x_{n+1} (*eixo das ordenadas*). Este diagrama possibilita acompanhar a evolução da variável de estado do sistema através das sucessivas iterações. Para a sua construção, escolhemos um valor inicial qualquer $x_0 \in [0, 1]$; por este ponto traçamos uma reta perpendicular ao eixo x_n que cruze a parábola; o ponto de encontro entre a reta e a parábola corresponde a um valor x_1 no eixo das ordenadas. Encontrado este valor devemos passar uma reta horizontal exatamente por cima desse ponto e que encontre a reta auxiliar $y = x$ (*função identidade*), que por possuir propriedades simétricas nos auxilia a encontrar exatamente o mesmo valor x_1 , mas no eixo horizontal. Iterando o mapa logístico obtemos um diagrama parecido com o da figura abaixo:

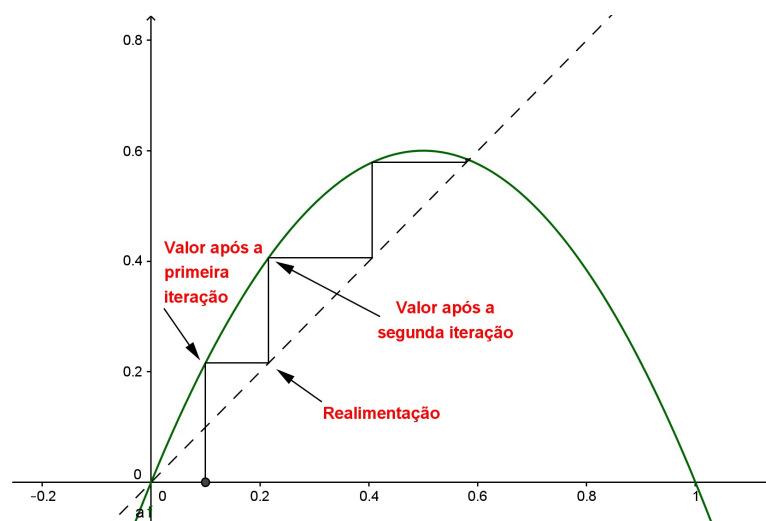


Figura 2.4: Análise do gráfico de $F_\mu(x) = \mu x(1 - x)$, com $\mu = 2,4$ e $x_0 = 0,1$

Para encontrarmos os pontos fixos de F_μ precisamos resolver a equação $F_\mu(x) = x$. Ge-

ometricamente, os pontos fixos serão a interseção entre o gráfico de F_μ e a reta $y = x$ e, portanto, podemos concluir que o mapa logístico terá no máximo dois pontos fixos. Facilmente vemos que os pontos fixos são 0 e $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$. Note que para $\mu = 1$, teremos um único ponto fixo $p_\mu = 0$. As derivadas nesses pontos também podem ser facilmente calculadas e são $F'_\mu(0) = \mu$ e $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu$.

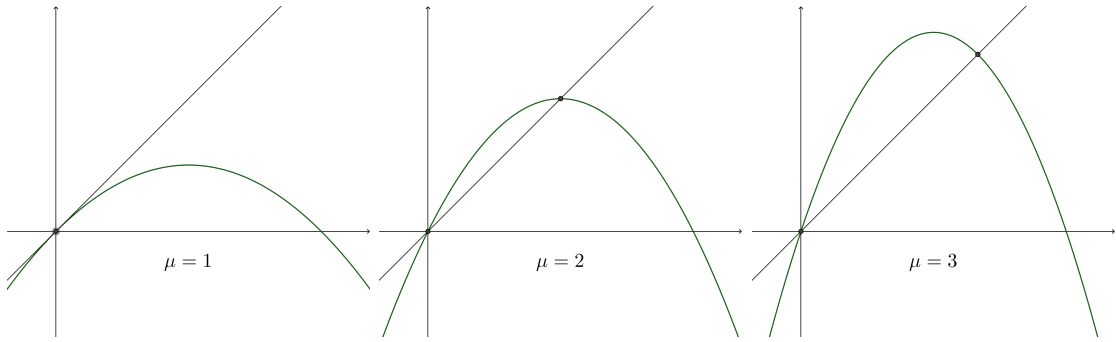


Figura 2.5: Pontos fixos para diferentes valores de μ

Vamos agora estudar o comportamento geral do mapa logístico para alguns valores do parâmetro μ . Destacamos que o Caso 1 será feito com todos detalhes e que por uma questão de não pesar demais a leitura, justificaremos e ilustraremos os outros casos apenas com gráficos e diagramas. As justificativas seguem a mesma linha de argumentação.

Caso 1. $0 < \mu < 1$

Se $\mu < 1$ segue que p_μ é necessariamente negativo. Vamos analisar as derivadas desses pontos.

$$F'_\mu(0) = \mu < 1 \quad \text{e} \quad F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu > 1.$$

Segue, então, da Proposição 2.2.1 que 0 é atrator e p_μ é repulsor. Mais ainda, podemos caracterizar as órbitas de todos os pontos da reta real pela iteração de F_μ .

Proposição 2.3.1. *Seja $0 < \mu < 1$. Então:*

- (i) *Se $x \in (p_\mu, 1 - p_\mu)$, então $F_\mu^n(x) \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.*
- (ii) *Se $x \in (-\infty, p_\mu) \cup (1 - p_\mu, +\infty)$, então $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$, quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. (i) Vamos separar em três casos, $x_0 \in [0, 1]$ (caso A), $x_0 \in (p_\mu, 0)$ (caso B) e $x_0 \in (1, 1 - p_\mu)$ (caso C).

Caso A. Seja $x_0 \in [0, 1]$. Os casos $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$ são triviais.

Consideremos, então $0 < x_0 < 1$. Nesse caso, é fácil ver que $0 < 1 - x_0 < 1$, e como $\mu x_0 > 0$ podemos multiplicar a última desigualdade obtendo

$$0 < \mu x_0(1 - x_0) < \mu x_0.$$

Ainda, como $\mu < 1$, a última desigualdade fica

$$0 < F_\mu(x_0) < \mu x_0 < x_0 < 1.$$

Conclusão: $x_1 = F_\mu(x_0) \in [0, 1]$ e $x_1 < x_0$. Por indução, podemos concluir que para todo $n \geq 1$,

$$x_n = F_\mu(x_{n-1}) \in [0, 1] \text{ e } x_n < x_{n-1}.$$

Trata-se, então, de uma sequência decrescente e limitada inferiormente. Logo, ela é convergente e pelo Lema 2.2.1 o seu limite deve ser um ponto fixo. Como o único ponto fixo no intervalo $[0, 1]$ é o 0, podemos concluir que

$$x_n = F_\mu^n(x_0) \rightarrow 0.$$

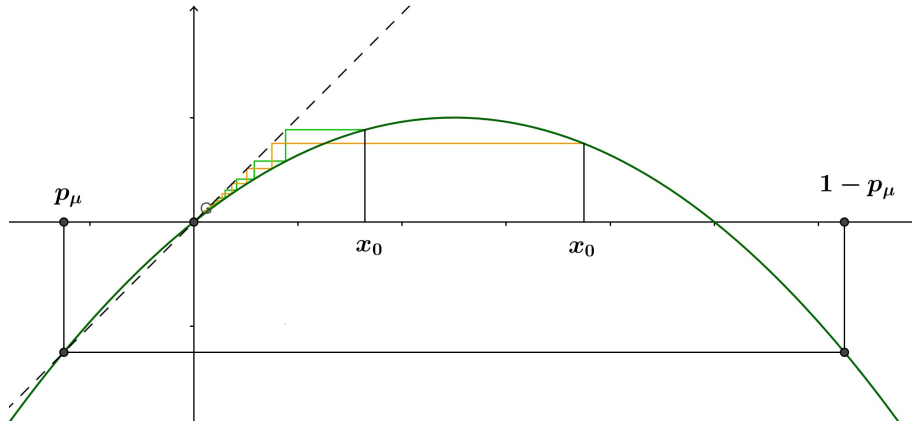


Figura 2.6: $\mu = 0,8$; $0 < x_0 < 1$

Caso B. Seja $x_0 \in (p_\mu, 0)$. Como $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$, temos que $p_\mu < x_0$ é equivalente a $\mu - 1 < \mu x_0$. Multiplicando esta última desigualdade por $x_0 < 0$, obtemos $(\mu - 1)x_0 > \mu x_0^2$, que é o mesmo que $\mu x_0 - \mu x_0^2 > x_0$. Concluimos então que $x_1 = F_\mu(x_0) > x_0$. Pela natureza da função quadrática, é claro que $x_1 < 0$. Até agora temos que

$$p_\mu < x_0 < x_1 < 0.$$

Agora, como a função F_μ , restrita ao intervalo $(p_\mu, 0)$ é crescente, podemos afirmar que

$$x_1 = F_\mu(x_0) < F_\mu(x_1) = x_2, \quad x_2 = F_\mu(x_1) < F_\mu(x_2) = x_3$$

e assim por diante. Sendo assim, a órbita é uma sequência crescente e limitada superiormente por 0. Logo, pela mesma razão que no caso anterior, podemos concluir que $F_\mu^n(x_0) \rightarrow 0$.

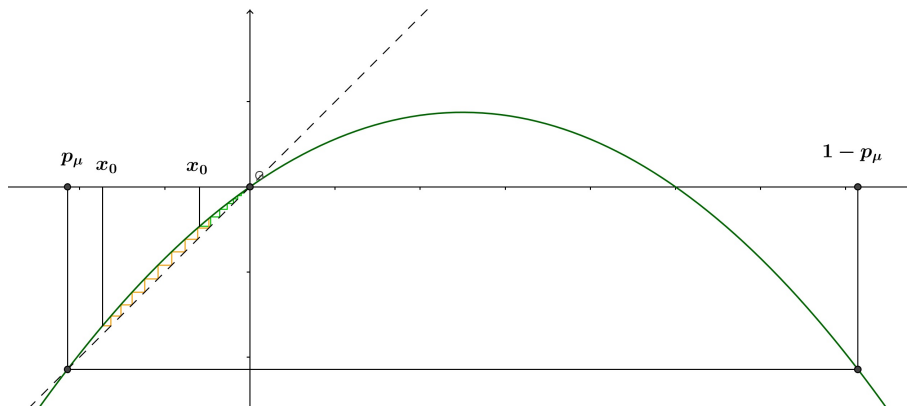


Figura 2.7: $\mu = 0,7$; $p_\mu < x_0 < 0$

Caso C. Agora seja $x_0 \in (1, 1 - p_\mu)$.

Note que isso é equivalente a dizer que $1 - x_0 \in (p_\mu, 0)$. Pela simetria de F_μ , é fácil ver que $x_1 = F_\mu(x_0) = F_\mu(1 - x_0)$. Mas como $1 - x_0 \in (p_\mu, 0)$, podemos concluir que $x_1 \in (p_\mu, 0)$ e recaímos no caso anterior.

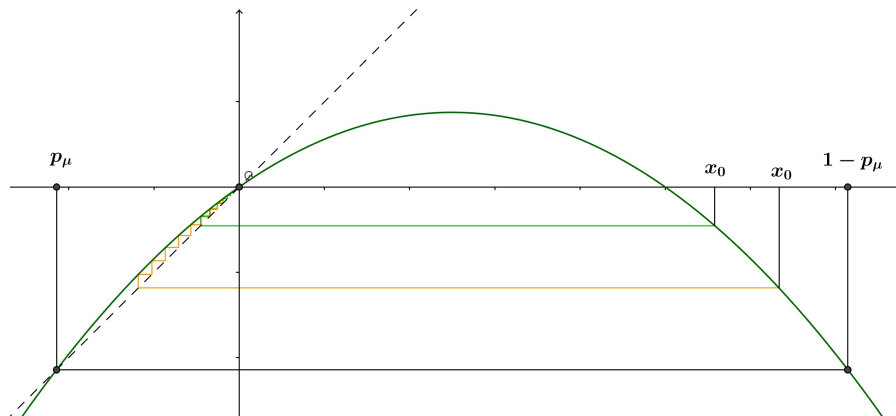


Figura 2.8: $\mu = 0,7$; $1 < x_0 < 1 - p_\mu$

(ii) Seja $x < p_\mu$.

Então $\mu x_0 < \mu - 1$, que é equivalente a $\mu(1 - x_0) > 1$. Multiplicando por $x_0 < 0$, chegamos a $\mu x_0(1 - x_0) < x_0$, isto é, $x_1 < x_0$. Como em $(-\infty, p_\mu)$ a função é crescente, podemos afirmar que $x_2 < x_1$, $x_3 < x_2$ e assim por diante. Assim a órbita é uma sequência decrescente. Se fosse limitada inferiormente, deveria convergir para um ponto fixo. Mas não há pontos fixos no intervalo $(-\infty, p_\mu)$. Logo a sequência vai, de fato, para $-\infty$.

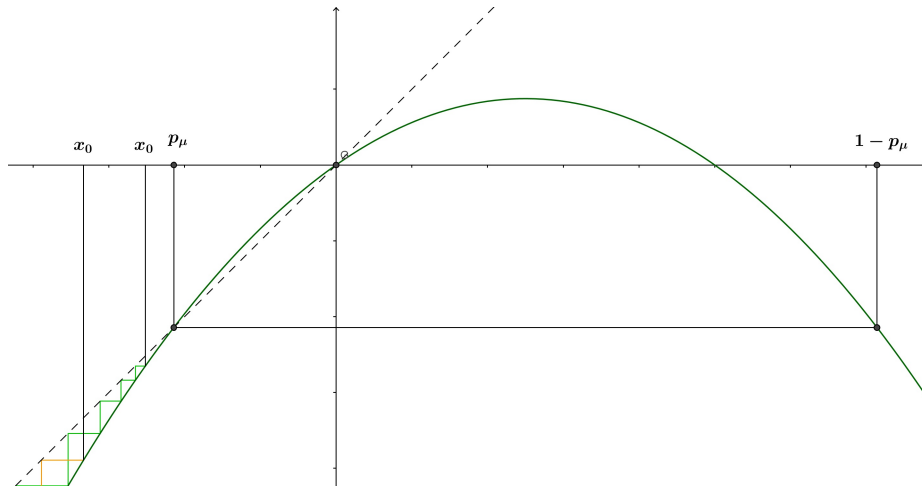


Figura 2.9: $\mu = 0,7$; $x_0 < p_\mu$

Analogamente ao caso C do item anterior, podemos afirmar que $x_1 = F_\mu(x_0) = F_\mu(1 - x_0)$ pela simetria da função quadrática. Mas, se $x_0 \in (1 - p_\mu, +\infty)$, então $1 - x_0 < p_\mu$, e portanto recaímos na análise anterior. \square

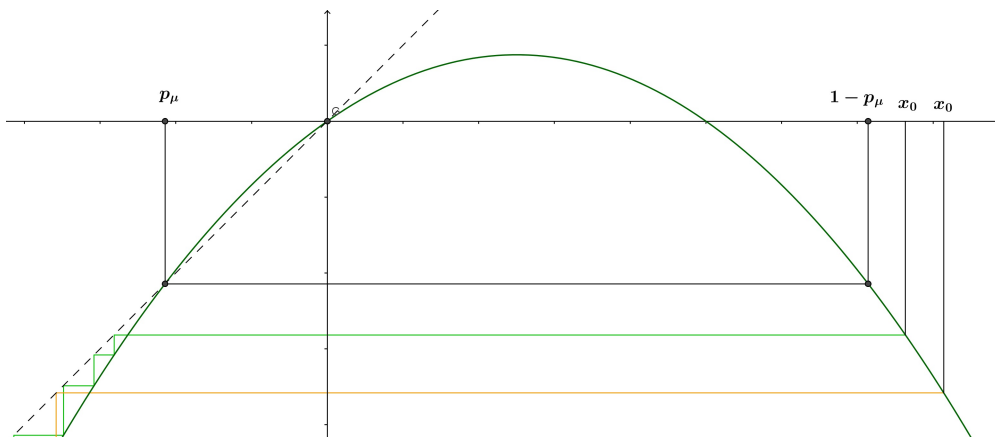


Figura 2.10: $\mu = 0,7$; $x_0 > 1 - p_\mu$

Resumindo, temos os seguintes comportamentos

$x = 0$	$F_\mu^n(0) = 0 \quad \forall n \geq 1$
$x = 1$	$F_\mu^n(1) = 0 \quad \forall n \geq 1$
$x = p_\mu$	$F_\mu^n(p_\mu) = p_\mu \quad \forall n \geq 1$
$x = 1 - p_\mu$	$F_\mu^n(1 - p_\mu) = p_\mu \quad \forall n \geq 1$
$x \in (-\infty, p_\mu)$	$F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$
$x \in (p_\mu, 1 - p_\mu)$	$F_\mu^n(x) \rightarrow 0$
$x \in (1 - p_\mu, +\infty)$	$F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$

Caso 2. $\mu = 1$

Temos um único ponto fixo, $p_\mu = 0$, como vimos anteriormente, mas que não é hiperbólico, pois $F'_\mu(0) = \mu = 1$. Apesar disso, pode-se verificar que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_\mu^n(x) = \begin{cases} 0 & \text{quando } x \in [0, 1] \\ -\infty & \text{quando } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

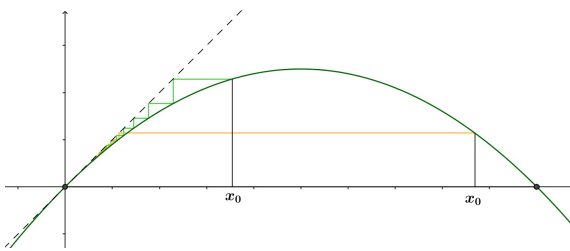


Figura 2.11: $\mu = 1$; $0 \leq x_0 \leq 1$

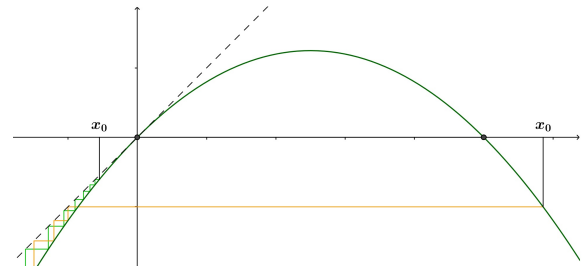


Figura 2.12: $\mu = 1$; $x_0 < 0$ ou $x_0 > 1$

Caso 3. $\mu > 1$

F_μ tem um ponto fixo atrator em $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ e um ponto fixo repulsor em $x = 0$, pois

$$F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu < 1 \quad \text{e} \quad F'_\mu(0) = \mu > 1$$

Consideremos dois casos:

Caso 3.1. $1 < \mu \leq 2$

Conseguimos descrever o comportamento global.

Proposição 2.3.2. *Se $x \in (0, 1)$, então $F_\mu^n(x) \rightarrow p_\mu$. E para $x \notin [0, 1]$, temos $F_\mu^n(x) \rightarrow -\infty$.*

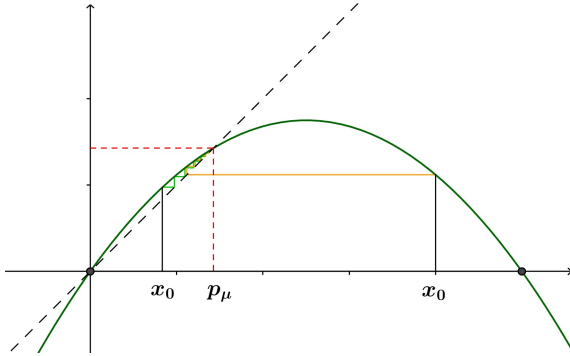


Figura 2.13: $\mu = 1, 4$; $0 \leq x_0 \leq 1$

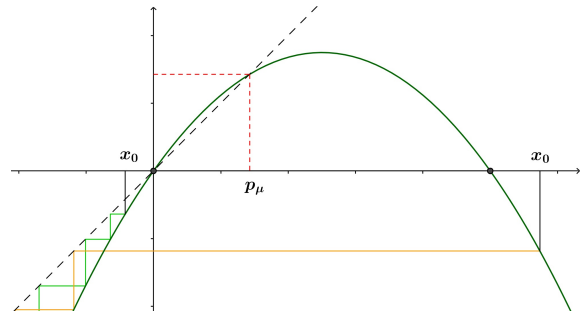


Figura 2.14: $\mu = 1, 4$; $x_0 < 0$ ou $x_0 > 1$

Caso 3.2. $2 < \mu < 3$

Com o parâmetro variando nesta região o ponto fixo $p_\mu = \frac{\mu-1}{\mu}$ continua a ser um atrator global, mas o comportamento das órbitas próximo ao ponto fixo um pouco distinto. A proposição 2.3.2 é verdadeira também nesse caso, mudando apenas a maneira como as órbitas convergem ao ponto fixo, como mostra a figura 2.15. Esse comportamento oscilatório (não-monótono) é devido ao fato da derivada no ponto fixo ser negativa. De fato, $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu \in (-1, 0)$, se $\mu \in (2, 3)$.

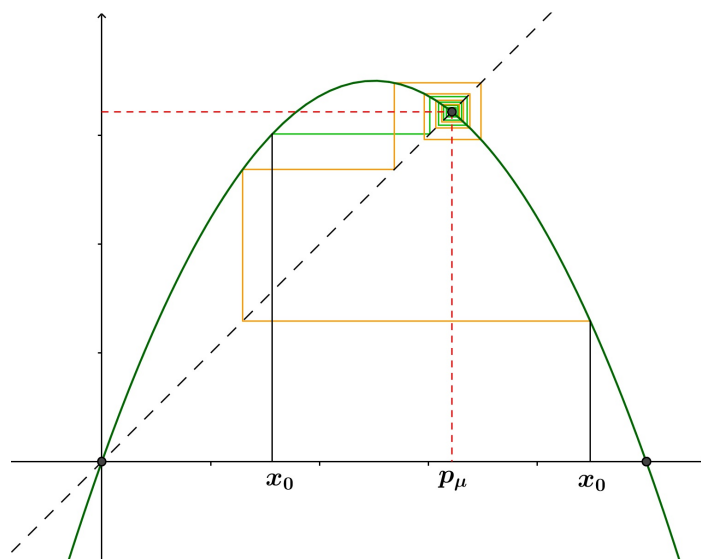


Figura 2.15: $\mu = 2, 8$; $0 \leq x_0 \leq 1$

Caso 4. $3 \leq \mu < 4$

Este caso é o mais dinamicamente rico de todos. Nele aparecem fenômenos mais complicados e que fogem ao escopo do trabalho, mas que remetem à Teoria de Renormalização, um tema de pesquisa bastante vasto e atual no qual se destacam nomes como Feigenbaum, Sullivan, Lyubich, de Mello, Yoccoz, Ávila entre outros.

Vamos apenas destacar algumas propriedades que são de fácil observação. Nesta região o ponto fixo que era um atrator para $\mu < 3$ passa ser um ponto fixo repulsor para $\mu > 3$, pois $F'_\mu(p_\mu) = 2 - \mu < -1$. Nesse momento surge um ponto periódico p de período 2 como atrator, e então as órbitas tendem a se acumular em sua órbita, que é constituída por dois pontos: $\{p, f(p)\}$. Com o aumento de μ este ponto de período 2 também se transforma em repulsor e surge um ponto de período 4 que atrai as órbitas; este processo continua com uma infinidade de duplicações de período, gerando um quadro bastante sofisticado.

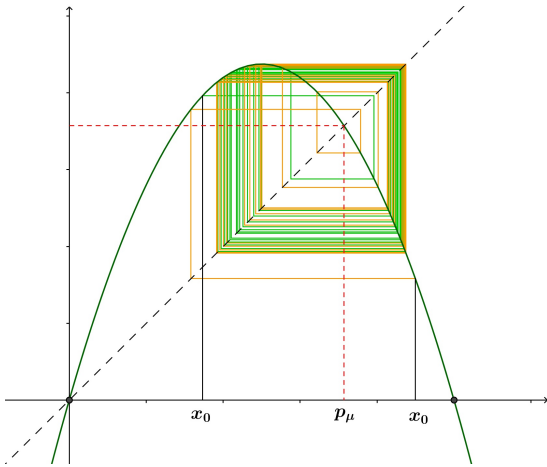


Figura 2.16: $\mu = 3, 5; 0 \leq x_0 \leq 1$

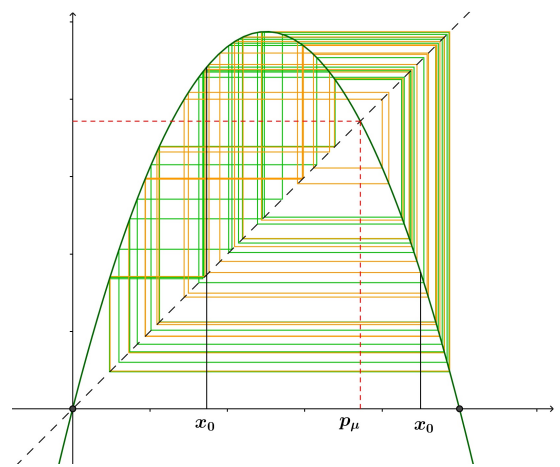


Figura 2.17: $\mu = 3, 9; 0 \leq x_0 \leq 1$

As duplicações de período podem ser observadas através de um diagrama chamado Diagrama de Bifurcação. Nele, no eixo horizontal estão os valores do parâmetro μ , entre 0 e 4, e na vertical estão os pontos de acumulação da órbita de $x_0 = 0, 5$.

O diagrama de bifurcação [Fig.2.18], foi construído através de sucessivas iterações utilizando o software *Geogebra* [13]. Na figura a esquerda, temos os valores do parâmetro μ variando de 0 a 4. Já na figura à direita esses valores estão entre 3 e 4. A seguir vemos o mesmo diagrama [Fig.2.19] de forma mais detalhada.

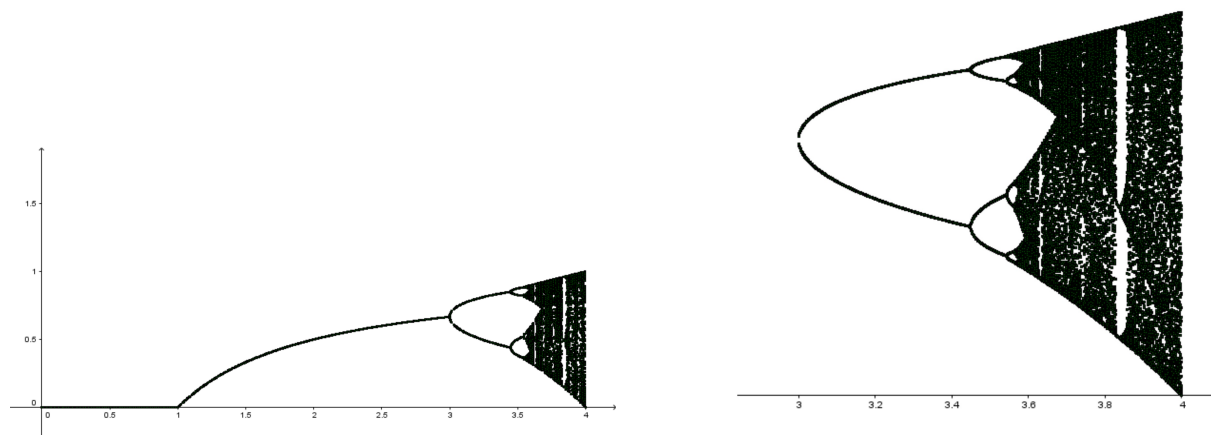


Figura 2.18: Bifurcação da Família Quadrática.

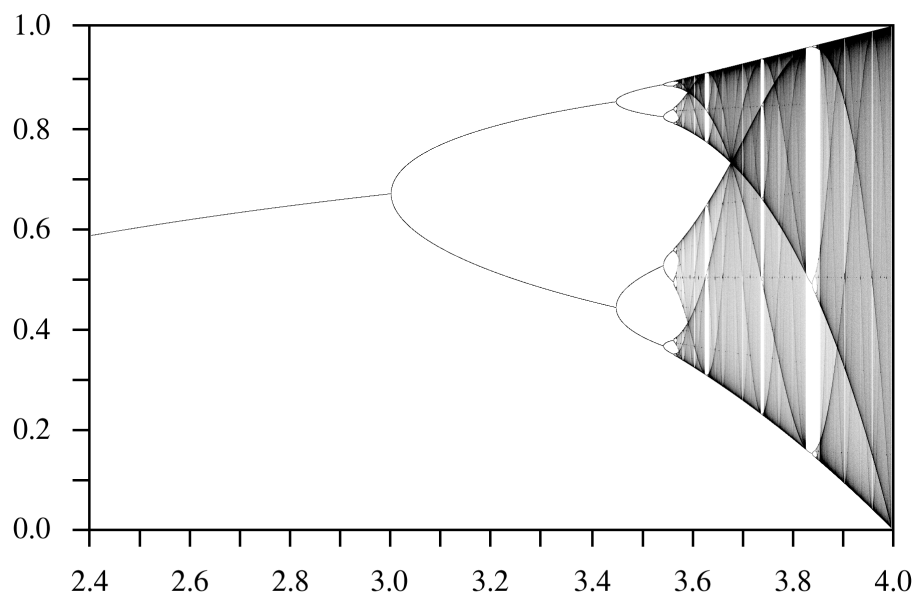


Figura 2.19: Bifurcação da Família Quadrática. (Fonte: Wikipedia)

3 Conjuntos de Cantor

A ideia rudimentar de infinidade, ou seja, de quantidades ou números que possam se tornar tão grandes quanto desejarmos, é bastante antiga e pode ser encontrada nos primórdios da Matemática dedutiva. Os gregos Eudócio (408 - 355 a.C.) e Arquimedes (287 - 212 a.C.), por exemplo, usaram-na com sucesso em seus estudos sobre perímetros, áreas e volumes de figuras delimitadas por linhas ou superfícies curvas. Outro Grego, Zenão, de Eleia, produziu com ela paradoxos de difícil explicação. Um dos exemplos clássicos dos paradoxos de Zenão é o da corrida entre Aquiles (o herói mais veloz da mitologia grega) e a tartaruga. Segundo Zenão, numa disputa entre os dois, se fosse dada uma pequena vantagem à tartaruga, Aquiles jamais a alcançaria. Isso porque quando ele chegasse ao ponto de onde a tartaruga partiu, ela já terá percorrido uma nova distância; e quando ele atingisse essa nova distância, a tartaruga já teria percorrido uma outra nova distância, e assim sucessivamente.

Muitas discussões sobre o infinito voltaram a acontecer após a invenção do Cálculo (século XVII), quando quantidades “infinitamente grandes” ou “infinitamente pequenas” precisaram ser usadas para avaliar limites. Notáveis matemáticos como Gauss afirmavam que o “infinito real” é algo que não existe, havendo apenas um “infinito potencial”, ou seja, a possibilidade de fazer com que certas quantidades sejam tão grandes quanto desejarmos. Tudo isso fazia com que os matemáticos adotassem uma postura cautelosa em relação ao infinito, pois estavam conscientes de que qualquer descuido poderia levá-los a cometer erros.

Por volta de 1870, Cantor, um dos mais notáveis matemáticos de todos os tempos, interessou-se sobre o estudo dos conjuntos infinitos e sobre eles produziu trabalhos de grande importância para a Matemática. Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor (1845 – 1918), nasceu em São Petersburgo, Rússia, mas ainda menino, migrou-se com a família para a Alemanha. Doutorou-se na Universidade de Berlim em 1867 com uma tese sobre Teoria dos Números, mas suas contribuições mais originais concentram-se no estudo do *infinito*.

O centro das atenções de Cantor nos conjuntos infinitos foi a comparação entre

seus tamanhos, por exemplo, os conjuntos dos números naturais e racionais ou \mathbb{N} e \mathbb{R} são ambos infinitos. Haveria alguma forma de comparar seus elementos determinando se um é maior do que o outro? A partir dessa interrogação, Cantor deu início aos seus trabalhos sobre o infinito.

3.1 Conjuntos Finitos e Infinitos

Dado $n \in \mathbb{N}$, indiquemos com a notação I_n o conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ dos números naturais de 1 até n . Mais precisamente temos:

$$I_n = \{p \in \mathbb{N}; 1 \leq p \leq n\}$$

Um conjunto X chama-se *finito* quando é vazio ou quando existe, para algum $n \in \mathbb{N}$, uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$.

Intuitivamente, uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$ significa uma *contagem* de elementos de X . Pondo $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n$, temos $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Esta é a representação ordinária de um conjunto finito. O número natural n chama-se então a *cardinalidade* do conjunto X ou, simplesmente, o número de elementos de X . Assim, todo número natural n , é o *número cardinal* de algum conjunto finito.

Diz-se que um conjunto X é *infinito* quando ele não é finito. Mais explicitamente, X é *infinito* quando não é vazio e, além disso, seja qual for $n \in \mathbb{N}$, não existe uma bijeção $f : I_n \rightarrow X$.

Por exemplo, o conjunto \mathbb{N} , dos números naturais é infinito. De fato, dada qualquer função $f : I_n \rightarrow X$, com $n > 1$, seja $k = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, para todo $x \in I_n$, tem-se $f(x) < k$, logo não existe $x \in I_n$ tal que $f(x) = k$. Então nenhuma função $f : I_n \rightarrow X$ é sobrejetiva, portanto não existe uma correspondência biunívoca.

3.1.1 Conjuntos enumeráveis

Um conjunto X diz-se *enumerável* quando é finito ou quando existe uma bijeção $f : \mathbb{N} \rightarrow X$. No segundo caso, X diz-se *infinito enumerável* e, pondo-se $f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots$, tem-se $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Cada bijeção chama-se uma *enumeração* dos elementos de X . Portanto, todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ também é enumerável.

3.1.2 Diagonal de Cantor

Intuitivamente, comparar a quantidade de elementos entre dois conjuntos finitos é simples, basta contar os elementos de cada um e comparar os números obtidos. Entretanto, foi Cantor quem apresentou uma outra forma de comparar tamanhos, fazendo uma correspondência biunívoca entre os elementos dos dois conjuntos. A possibilidade de estabelecer essa correspondência entre os elementos de dois conjuntos finitos assegura que ambos têm o mesmo número de elementos. Foi também Cantor quem decidiu estender esse critério aos conjuntos infinitos, afirmando que todo conjunto que possa ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos naturais é enumerável.

O primeiro conjunto infinito que Cantor comparou com o dos naturais foi o dos racionais. Embora, intuitivamente, nos pareça que a quantidade dos racionais seja muito maior do que a dos naturais (entre dois naturais quaisquer existe uma infinidade de racionais), Cantor mostrou que os dois conjuntos podem ser colocados em correspondência biunívoca.

a \ b	1	2	3	4	5	6	...
1	$\frac{1}{1}$ ①	$\frac{1}{2}$ ②	$\frac{1}{3}$ ⑥	$\frac{1}{4}$ ⑦	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$...
2	$\frac{2}{1}$ ③	$\frac{2}{2}$ ⑤	$\frac{2}{3}$ ⑧	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$...
3	$\frac{3}{1}$ ④	$\frac{3}{2}$ ⑨	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$...
4	$\frac{4}{1}$ ⑩	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$...
⋮	⋮ ⑪	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Figura 3.1: Diagonal de Cantor (Fonte: Internet)

No exemplo acima Cantor considerou o conjunto dos números racionais positivos, escritos como uma razão $\frac{a}{b}$, com $a, b \in \mathbb{N}$. Os números foram disponibilizados em uma tabela com os numeradores na horizontal e os denominadores na vertical, sendo assim podemos escrever todos racionais. Para fazer a correspondência, basta fazer uma contagem em *zigue-zague* associando os números naturais.

Posteriormente Cantor também provou que o conjunto dos *números algébricos*, isto é, números reais que são raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros, também é enumerável. Começava-se a pensar que todos os conjuntos infinitos fossem

enumeráveis, porém Cantor provou que isso não é verdade para os números reais. Para isso utilizou a redução ao absurdo, ou seja, supôs que todos os reais fossem enumeráveis, o que implicaria que aqueles compreendidos entre 0 e 1, e que estivessem representados como decimais infinitos, também o fossem. Dessa forma, $\frac{1}{3}$ seria representado por $0,3333\dots$, $\frac{1}{2}$ por $0,49999\dots$, e assim por diante. Logo se são enumeráveis, podem ser todos colocados em uma sequência da forma:

$$a_1 = 0, a_{11}a_{12}a_{13} \dots$$

$$a_2 = 0, a_{21}a_{22}a_{23} \dots$$

$$a_3 = 0, a_{31}a_{32}a_{33} \dots$$

$$\vdots$$

$$a_n = 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3} \dots$$

$$\vdots$$

e assim por diante, indefinidamente, onde os a_{ij} são dígitos de 0 a 9, inclusive. Para mostrar que nem todos os números reais entre 0 e 1 estão incluídos na lista anterior, Cantor exibiu uma fração decimal diferente de todas as referidas anteriormente. Para isso, basta tomar qualquer número do tipo $0, b_1b_2b_3 \dots b_n \dots$, com $b_1 \neq a_{11}, b_2 \neq a_{22}, b_3 \neq a_{33}$, etc. Esse número real estará dentro do intervalo $(0, 1)$ e diferirá dos números da sequência anterior, associados a $a_1, a_2, a_3, \text{etc.}$, por pelo menos um dígito, ou seja, estará fora da lista que deveria conter todos os reais.

Mas isto é uma contradição de que todos os números do intervalo $[0, 1]$ tornassem um conjunto enumerável, logo esse conjunto é não enumerável. Como o intervalo $[0, 1]$ é um subconjunto dos números reais, concluímos que este conjunto é não enumerável. Este é o argumento conhecido como Diagonal de Cantor, que usa os elementos da “diagonal” para construir um novo elemento que não está listado.

Os números que não podem ser raízes de equações polinomiais de coeficientes inteiros são chamados *transcendentes*, em contraposição aos *algébricos*. Como os algébricos são enumeráveis, segue que o conjunto dos transcendentos é não-enumerável, assim como os irracionais, uma vez que ambos são os complementares (em relação ao conjunto dos números reais) de conjuntos enumeráveis.

3.2 Dinâmica e Conjunto de Cantor

Em termos gerais, podemos definir um conjunto de Cantor de forma abstrata: Um conjunto Λ é um conjunto de Cantor se ele é fechado e limitado (compacto), totalmente desconexo e um subconjunto perfeito de \mathbb{R} . Um conjunto é totalmente desconexo se ele não contém intervalos; e é perfeito se qualquer de seus pontos é um ponto de acumulação, ou seja, limite de outros pontos no conjunto. O leitor interessado em mais detalhes sobre essas definições poderá encontrar em [1]. Nós, porém, nesse trabalho vamos nos concentrar numa maneira particular, e mais geométrica, de construir conjuntos de Cantor. O primeiro e o mais clássico de todos é o:

3.2.1 Conjunto de Cantor dos Terços Médios

Podemos considerar K como o conjunto de todos os números do intervalo $[0, 1]$ que podem ser escritos em base 3 utilizando apenas os algarismos 0 e 2, isto é,

$$K = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{3^n} ; \sigma_n \in \{0, 2\}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Por exemplo os números abaixo estão no conjunto de Cantor:

$$\frac{1}{4} = \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{0}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \dots = (020202\dots)_3$$

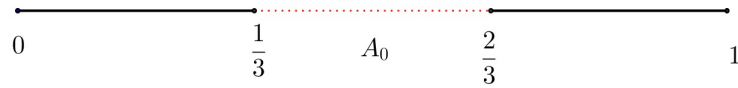
$$\frac{3}{4} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \dots = (202020\dots)_3$$

$$\frac{1}{13} = \frac{0}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \frac{2}{3^6} \dots = (002002002\dots)_3$$

$$\frac{20}{27} = \frac{2}{3} + \frac{0}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{0}{3^5} + \frac{0}{3^6} \dots = (20200000\dots)_3$$

Outra maneira de escrever o conjunto K é construí-lo por etapas, por exemplo, seja F_0 o intervalo $[0, 1]$ que dividimos em três partes iguais. Retiramos, então, o subintervalo central aberto (A_0) do intervalo e obtemos dois intervalos fechados. Chamemos de F_1 a união dos intervalos restantes

$$A_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right); F_1 = \left[0, \frac{1}{3} \right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1 \right].$$

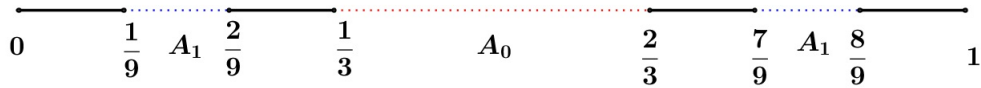


Retiramos de F_1 o subintervalo central aberto (A_1) de cada um de seus dois intervalos

$$A_1 = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$$

e obtemos quatro intervalos fechados, que chamaremos de F_2 .

$$F_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

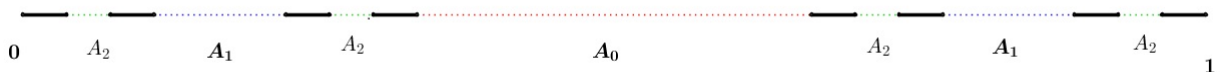


Retiramos de F_2 o terço central de cada um de seus quatro intervalos

$$A_2 = \left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right) \cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right).$$

e obtemos oito intervalos fechados que chamaremos de F_3 .

$$F_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right].$$



Na n-ésima etapa da construção de K obtemos F_n , que é a união de 2^n intervalos de comprimento $\frac{1}{3^n}$ cada. Continuamos o processo, obtemos uma sequência F_n sempre retirando os terços centrais dos intervalos restantes. Os pontos do intervalo $[0, 1]$ que não pertencem a nenhum dos intervalos retirados formam o conjunto de Cantor K .

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} F_n = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$$

Como cada F_n é construído a partir do F_{n-1} , retirando-se intervalos abertos, podemos afirmar que os conjuntos F_n são todos encaixados, isto é, que $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$

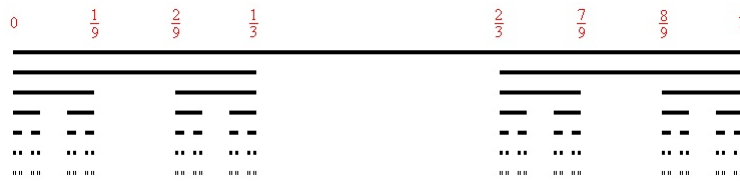


Figura 3.2: Representação geométrica do Conjunto de Cantor

Observação 3.2.1. Há um teorema em Análise Real que garante que essa interseção é não-vazia (ver Teorema 12 do cap V de [7]), conhecido como Teorema dos Compactos Encaixados.

Na primeira etapa (F_1) da construção de K , retiramos um intervalo A_0 de comprimento $\frac{1}{3}$, na segunda etapa (F_2), um conjunto A_1 formado por dois intervalos de comprimento $\frac{1}{9}$, logo $|A_1| = \frac{2}{9}$. Na etapa F_3 , um conjunto I_3 formado por 4 intervalos de comprimento $\frac{1}{27}$, e portanto $|A_2| = \frac{4}{27}$, logo na n-ésima etapa será retirado um conjunto A_n formado por 2^n intervalos de comprimento $\frac{1}{3^{n+1}}$, o que nos dá $|I_n| = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.

Somando as medidas do que é retirado em cada etapa de K , temos:

$$|A_0| + |A_1| + |A_2| + \dots = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}$$

A sequência corresponde à soma de uma PG infinita de razão $\frac{2}{3}$, então:

$$S_{\infty} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 1$$

Isso mostra que do conjunto inicial $[0, 1]$, retiramos um subconjunto de medida igual a 1.

Sendo assim, como $K = [0, 1] \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$, podemos calcular uma espécie de medida do conjunto K da seguinte maneira:

$$|K| = |[0, 1]| - \sum_{n=0}^{+\infty} |A_n| = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} = 0.$$

Ou seja, o Conjunto de Cantor dos Terços Médios é um conjunto de medida nula ¹.

Outra característica do Conjunto de Cantor é a *autossimilaridade* como consequência de sua lei de formação. A estrutura do conjunto é uma reta que após a n -ésima iteração vai sendo substituída por um conjunto de pontos que jamais ocupa a dimensão original (dimensão 1), mas que também jamais possui dimensão nula. Quando isso acontece, dizemos que o conjunto possui uma *dimensão fractal*. De maneira geral, um objeto é autossimilar se apresenta o mesmo aspecto visual em qualquer escala ampliada ou reduzida, ou seja, qualquer que seja sua parte, assemelha-se ao objeto como um todo.

Uma outra curiosidade sobre K é que, embora seja um conjunto de medida nula, ele contém tantos pontos quanto o conjunto dos números reais.

Proposição 3.2.1. *K é não-enumerável.*

Demonstração. Usaremos o argumento da Diagonal de Cantor. Considere o conjunto K como o conjunto dos números reais tal que sua representação em base 3 só possua os dígitos 0 e 2, ou se possuir o dígito 1, este é único e o último não nulo. Vamos supor que K seja enumerável, e $f : \mathbb{N} \rightarrow K$, então:

$$f(1) = 0, b_{11}b_{12}b_{13} \dots$$

$$f(2) = 0, b_{21}b_{22}b_{23} \dots$$

$$f(3) = 0, b_{31}b_{32}b_{33} \dots$$

$$\vdots$$

$$f(n) = 0, b_{n1}b_{n2}b_{n3} \dots$$

$$\vdots$$

Seja $c = 0, c_1c_2c_3c_4 \dots \in B$ tal que $c_i \neq b_{ii}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Note que $c \neq f(1)$, pois $c_1 \neq b_{11}$, também $c \neq f(2)$, pois $c_2 \neq b_{22}$, ou seja, $c \neq f(n)$, pois $c_n \neq b_{nn} \forall n \in \mathbb{N}$.

Então $c \in K$ e não é imagem pela f de nenhum $n \in \mathbb{N}$; logo f não é sobrejetora. Conclusão: K é infinito e não existe uma bijeção entre \mathbb{N} e K . Contradição, pois supomos K enumerável. Logo concluímos que K é não enumerável. \square

¹Existe uma definição matemática formal do que significa ter medida nula, ou mais geralmente, do que é uma medida de um conjunto (ver por exemplo [7] ou [12]), que não entraremos em detalhes neste texto.

3.2.2 O caso $\mu > 4$ na Família Quadrática

No capítulo 2, estudamos o comportamento de uma família quadrática para diferentes valores do parâmetro μ . Mais precisamente, caracterizamos os mapas logísticos com $0 < \mu < 4$. Mas o que acontece quando $\mu > 4$?

Como visto anteriormente, o intervalo $I = [0, 1]$ é invariante sobre F_μ com $0 \leq \mu \leq 4$. Quando $\mu > 4$ temos $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\mu}{4} > 1$, ou seja, a reta $x = \frac{1}{2}$ é o eixo de simetria da curva onde $\left(\frac{1}{2}, \frac{\mu}{4}\right)$ representa o ponto crítico de F_μ . Além disso $F_\mu(0) = F_\mu(1) = 0$. Então $F_\mu(0) < 1 < F_\mu\left(\frac{1}{2}\right)$ e $F_\mu(1) < 1 < F_\mu\left(\frac{1}{2}\right)$. Logo podemos afirmar pelo *Teorema do Valor Intermediário* que existe $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e $x_1 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ tal que $F_\mu(x_0) = F_\mu(x_1) = 1$.

Teorema 3.2.1 (Teorema do Valor Intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(a) \neq f(b)$. Para cada número $d \in \mathbb{R}$ compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Quando $\mu > 4$, podemos observar que existem pontos que deixam o intervalo $I = [0, 1]$ logo na primeira iterada. Denotamos por A_0 o conjunto aberto desses pontos. Então A_0 divide I em três subintervalos:

$$I = I_0 \cup A_0 \cup I_1$$

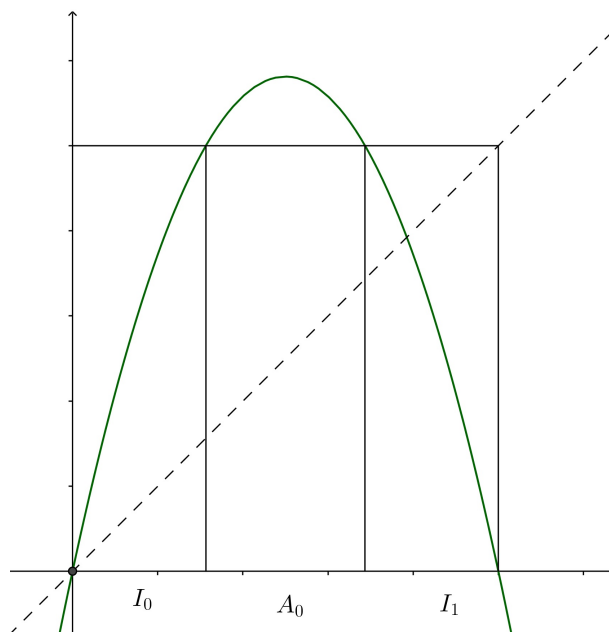


Figura 3.3:

Agora, resta-nos analisar os pontos que nunca escapam de I por iteração de F_μ , isto é, vamos analisar o conjunto de pontos que se encontram em

$$\Lambda := I \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Denotamos este conjunto por Λ . Bem, mas o que é exatamente este conjunto de pontos? Para compreendermos Λ , vamos descrever cuidadosamente sua construção recursiva. Tomando a imagem inversa de A_0 , obteremos o conjunto A_1 , formado por dois intervalos contidos em $I_0 = [0, x_0]$ e $I_1 = [x_1, 1]$. O conjunto $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ consiste em quatro intervalos e F_μ leva cada um deles de forma monótona em I_0 ou I_1 . Consequentemente, F_μ^2 leva cada um desses intervalos em I . Continuando o processo, a imagem inversa de A_1 é gerada por mais quatro intervalos que caracterizam A_2 . Analogamente, A_3 é formado por oito intervalos abertos que são imagens inversas de A_2 .

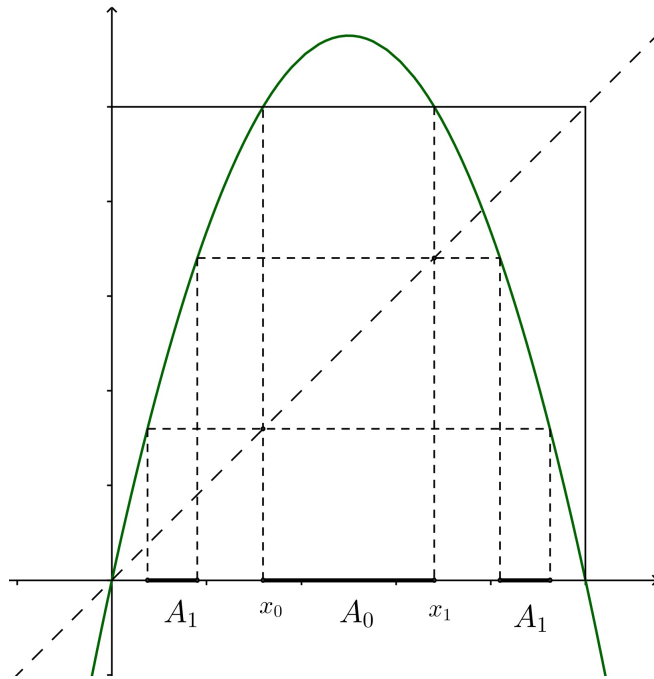


Figura 3.4: Conjunto Λ após a segunda iteração de F_μ

Dessa forma, podemos definir indutivamente os conjuntos A_1, A_2, \dots por $A_n = F_\mu^{-1}(A_{n-1})$, com A_n formado por 2^n intervalos abertos e disjuntos. Por construção, A_0 é um intervalo aberto centrado em $\frac{1}{2}$ definido por:

$$A_0 = \{x \in I \mid F_\mu(x) > 1\}$$

Assim, se $x \in A_0$, então $F_\mu^2(x) < 0$ e portanto $F_\mu^k(x) \rightarrow \infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

Definimos

$$A_1 = \{x \in I \mid F_\mu(x) \in A_0\}$$

Se $x \in A_1$, então $F_\mu^2(x) > 1$ e portanto $F_\mu^k(x) \in \infty$, quando $k \rightarrow \infty$.

Indutivamente definimos

$$A_n = \{x \in I \mid F_\mu^n(x) \in A_0\}$$

Então, $I \setminus A_0$ consiste em dois intervalos fechados (I_0, I_1) . Analogamente, na segunda etapa, $I \setminus (A_0 \cup A_1)$ consiste em quatro intervalos fechados.

Assim,

$$\Lambda = I \setminus (A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots)$$

Logo a construção do conjunto Λ é semelhante à construção do conjunto dos terços médios de Cantor, obtida por sucessivas remoções de intervalos abertos do “meio” de cada um dos intervalos fechados restantes do passo anterior.

Teorema 3.2.2. *Se $\mu > 4$ então Λ é um conjunto de Cantor.*

A demonstração deste teorema para $\mu > 4$ é bastante complicada. A propósito, é mais comum achar a demonstração para o caso $\mu > 2 + \sqrt{5} > 4$, que é um pouco mais simples, e pode ser encontrada em [1]. Passemos agora a um novo exemplo que é dinamicamente equivalente à família quadrática.

3.2.3 A Função Tenda

Considere a seguinte família a um parâmetro de função definidas por partes:

$$T_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad 0 < \lambda \leq 2$$

$$T_\lambda(x) = \begin{cases} \lambda x, & \text{se } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \lambda(1 - x), & \text{se } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

A família tenda T_λ é uma família com parâmetros relacionados com a família de mapas logísticos, definida de forma linear por partes. Apesar de sua estrutura mais simples, essa família esconde importantes propriedades dos sistemas dinâmicos assim como na família quadrática. Podemos observar para o intervalo $0 \leq x \leq 1$, a função assume seu valor máximo quando $x = \frac{1}{2}$, e $T_\lambda\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\lambda}{2}$.

Assim como na família quadrática, podemos estudar o comportamento geral do mapa logístico para alguns valores do parâmetro λ no intervalo $0 < \lambda \leq 2$, porém estamos interessados no comportamento dessa família para os valores de $\lambda > 2$.

Mas o que acontece quando o valor de λ é maior do que 2? Podemos observar quando $\lambda > 2$ a análise gráfica é útil para compreender o destino das órbitas da função. Para esses valores, o ponto máximo da tenda excede 1, e os valores de x para os quais se tem $T_\lambda(x) > 1$, terão o restante de suas órbitas fora do intervalo unitário para nunca mais retornar.

Após a primeira iterada de T_λ , os pontos que escapam do $[0,1]$ são exatamente os que se encontram no intervalo aberto $(\frac{1}{\lambda}, 1 - \frac{1}{\lambda})$ cuja medida é $1 - (\frac{2}{\lambda})$. Depois de retirar esse intervalo, restam dois segmentos, cada um de comprimento $\frac{1}{\lambda}$.

Iterando mais uma vez, os pontos no meio de cada um dos subintervalos remanescentes serão removidos após a segunda iteração de T_λ . Esse processo continua e após a n -ésima iteração restarão 2^n subintervalos de $[0, 1]$ fechados cada um com comprimento igual a $\frac{1}{\lambda^n}$ cuja a imagem sob T_λ^n permanece em $[0, 1]$. Repetindo indefinidamente essa construção encontraremos o conjunto dos pontos cujas órbitas nunca deixam o intervalo $[0, 1]$. Esses pontos pertencem a um conjunto de Cantor, que para $\lambda = 3$ é o clássico conjunto dos terços médios.

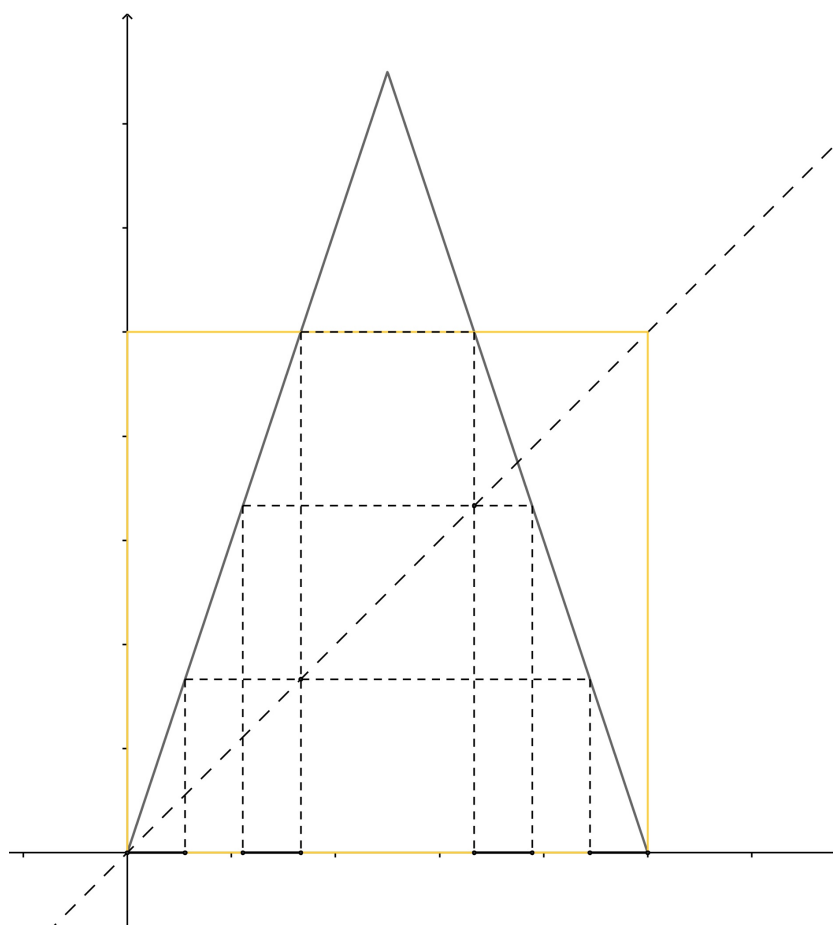


Figura 3.5: Conjunto Λ após a segunda iteração de T_λ ; $\lambda = 3$

4 Considerações Finais

A aceitação do tema sugerido pelo orientador, aconteceu com uma certa insegurança da minha parte, em virtude de um conhecimento limitado sobre o assunto para uma dissertação de mestrado. Após longos meses de pesquisa e dedicação, percebi o quanto curso de pós-graduação contribuiu para o enriquecimento do meu desenvolvimento pessoal, além de ter despertado um interesse para a pesquisa, o que acredito ser fundamental para a estruturação do conhecimento matemático.

O objetivo do trabalho foi apresentar uma breve introdução aos sistemas dinâmicos, um assunto que expõe uma Matemática extremamente bela e rica. Tentamos desenvolver texto de forma que o mesmo não ficasse cansativo, justificando na medida do possível com exemplos gráficos sem que com isso se perdesse o rigor matemático. Acreditamos que a linguagem abordada neste trabalho inicial, seja acessível tanto a estudantes de graduação quanto a professores do ensino básico.

Para o professor do ensino básico, também serve como um estímulo para uma pesquisa mais aprofundada sobre o assunto ou para uma reflexão em torno de uma adequação do tema para que este possa ser abordado em sala de aula. Podendo ser explorado, por exemplo, o estudo dos fractais através dos conjuntos de Cantor, a noção do infinito, o estudo de funções, além da utilização de softwares. Expor um determinado assunto utilizando softwares que permitem uma articulação entre as representações algébricas e geométricas, torna a Matemática muito mais interessante, proporcionando uma aprendizagem mais sólida de forma significativa. As figuras e os gráficos no presente trabalho foram construídos no *Geogebra* [13], um software gratuito de matemática dinâmica para todos os níveis de ensino.

Como projeto futuro e continuação deste trabalho, pretendo aprofundar-me no tema através de divulgações em seminários e participações em congressos, além de consolidar a teoria e ampliar o rigor matemático, fatores necessários para um próximo curso acadêmico de pós-graduação.

Referências Bibliográficas

- [1] Robert L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Vol. 1, Addison-Wesley Publishing Company, United States of America, 1989.
- [2] Jacob Palis Jr and Wellington de Melo, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*, Rio de Janeiro, 1975.
- [3] Ricardo L. Viana, *Introdução à Dinâmica Não-Linear e Caos*, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, 2011.
- [4] Jaime E. Villate, *Introdução aos Sistemas Dinâmicos, Uma abordagem prática com o Máximo*, Vol. 1.2, Creative Commons, Portugal, 2007.
- [5] R. M. May, *Simple mathematical models with very complicated dynamics*, Nature, 261, 459-67, 1976.
- [6] ———, *Biological Populations Obeying Difference Equations : Stable Points, Stable Cycles, and Chaos*, J. theor. Biol., 51, 511-524, 1975.
- [7] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol. 1, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2007.
- [8] ———, *A Matemática no Ensino Médio*, Vol. 1, Coleção professor de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2006.
- [9] C. G. Moreira, *Conjuntos de Cantor, Dinâmica e Aritmética*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2010.
- [10] Marcelo Amorim Savi, *Dinâmica Não Linear e Caos*, E-papers, Rio de Janeiro, 2006.
- [11] Geoffrey R. Goodson, *Chaotic Dynamics: Fractals, Tilings and Substitutions*, Towson University Mathematics Department, United States of America, 2015.
- [12] A. Armando de Castro Jr, *Curso de Teoria da Medida*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2004.
- [13] Geogebra, <http://www.geogebra.org>.