



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Matemática  
Sociedade Brasileira de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

# QUÁDRUPLAS HARMÔNICAS E A ESFERA DE APOLÔNIO

ERIVALDO FERREIRA DE MORAIS JÚNIOR

Orientador

Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva

Recife-PE

Agosto de 2016



Universidade Federal Rural de Pernambuco  
Departamento de Matemática  
Sociedade Brasileira de Matemática  
Mestrado Profissional em Matemática

## QUÁDRUPLAS HARMÔNICAS E A ESFERA DE APOLÔNIO

*Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Federal Rural de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.*

ERIVALDO FERREIRA DE MORAIS JÚNIOR

Recife-PE

Agosto de 2016

## Banca examinadora:

---

*Prof. Dr. Adriano Regis Melo Rodrigues da Silva (Orientador) - UFRPE*

---

*Prof. Dr. Jorge Antonio Hinojosa Vera - UFRPE*

---

*Prof. Dr. Helio Machado da Silva Porto Neto - UFPE*

*Dedico esse trabalho à minha família, que sempre apoiou minhas escolhas e decisões, mesmo que essas não fossem as melhores a serem tomadas.*

*Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes.*

*Martin Luther King*

# Agradecimentos

“Começar de novo para fazer bem feito”. Essa foi uma frase que ficou durante muito tempo ecoando na minha cabeça. Fazer este curso foi um desafio para mim. Desafio este que me fez crescer muito como pessoa, como estudante e como profissional.

Agradeço primeiramente aos meus pais Erivaldo e Tânia que sempre estiveram do meu lado, não importasse a situação. Eles sempre apoiaram minhas decisões e escolhas mesmo que estas não fossem as melhores a serem tomadas. À minha irmã Tany e meus lindos sobrinhos Nicolas e Thomas que me estimulam a crescer ainda mais. Agradeço também a quem me fez começar uma nova família.

Ao meu professor e orientador Adriano Regis, que muito me inspirou desde os nossos primeiros encontros. Tenho por ele uma enorme admiração e respeito.

À SBM por nos dar a oportunidade de participar deste conceituado programa de mestrado e à UFRPE por aderir ao mesmo. À todos os professores com os quais tive o prazer de ter aula, em especial à nossa coordenadora Bárbara Costa, sempre solícita e disposta a resolver todos os nossos problemas da melhor forma possível.

Aos meus grandes colegas de estudo que se tornaram mais do que isto: Emanuel Rodrigo, Herison Batista, Josenilda Abreu, Maurílio Vilaça, Angeline Muniz, Francisca Alves e Thiago Magalhães. Por diversas vezes, quando um de nós estava desmotivado ou cansado da rotina de estudos, os outros nos traziam de volta ao foco. Aos demais colegas da nossa turma que sempre permaneceu unida e disposta a ajudar quem precisasse.

# Resumo

Neste trabalho, realizamos um estudo acerca de conceitos importantes das geometrias euclidiana, analítica e projetiva, relacionando-os com nossos objetos principais: as quádruplas harmônicas e o Círculo de Apolônio. Estendemos naturalmente estes conceitos culminando na Esfera de Apolônio. Buscamos difundir estes temas na perspectiva de contribuir com o ensino/estudo de geometria através das diversas relações entre esses assuntos e os conteúdos do ensino médio, utilizando tanto ferramentas mais comuns como régua e compasso, quanto *softwares* de geometria dinâmica, especialmente o GeoGebra. Além disto, promovemos um estudo mais avançado de tópicos importantes com aplicações em problemas encontrados em competições de matemática e outros exames, fornecendo um material didático de apoio com problemas propostos e exercícios resolvidos.

**Palavras-chave:** Conjugados harmônicos, quádruplas harmônicas, Círculo de Apolônio e Esfera de Apolônio.

# Abstract

In this paper, conducted a study about important concepts of Euclidian, analytical and projective geometry, relating them to our main objects: the harmonic quadruples and Circle of Apollonius. Naturally extend these concepts culminating in Apollonius Sphere. We seek to disseminate these issues in order to contribute to the teaching/study of geometry through the various relationships between these issues and the high school content, using the more common tools like ruler and compass, as software dynamic geometry softwares, especially GeoGebra. In addition, we promote a more advanced study of important topics with applications in problems encountered in math competitions and selection's exams, providing courseware support with problems proposed and solved exercises.

**Keywords:** Harmonic Conjugate, Harmonic Quadruples, Circle of Apollonius and Apollonius Sphere.



# Lista de Figuras

1.1	$C$ divide interiormente o segmento $AB$ . . . . .	4
1.2	Conjugados harmônicos . . . . .	6
1.3	Construção dos divisores de um segmento numa razão dada . . . . .	7
1.4	Divisão harmônica com $k > 1$ . . . . .	8
1.5	Divisão harmônica com $0 < k < 1$ . . . . .	8
1.6	Divisão harmônica com $k = 1$ . . . . .	9
1.7	Observação do ponto médio ( $k > 1$ ) . . . . .	10
1.8	Observação do ponto médio ( $0 < k < 1$ ) . . . . .	10
1.9	Distância entre os conjugados harmônicos com $k > 1$ . . . . .	11
1.10	Distância entre os conjugados harmônicos com $0 < k < 1$ . . . . .	12
1.11	$k > 1$ e $0 < k' < 1$ . . . . .	13
1.12	$0 < k < 1$ e $k' > 1$ . . . . .	13
1.13	Teorema das bissetrizes (interna) . . . . .	15
1.14	Teorema das bissetrizes (externa) . . . . .	15
1.15	Feixe harmônico . . . . .	19
1.16	Demonstração de quádrupla harmônica num feixe harmônico . . . . .	20

1.17	Reta paralela num feixe harmônico . . . . .	22
1.18	Construção da quádrupla harmônica usando uma régua . . . . .	23
1.19	O teorema de Ceva . . . . .	24
1.20	O teorema de Menelaus . . . . .	24
2.1	Postes $AA'$ e $BB'$ perpendiculares ao plano $\Pi$ e o ponto $P$ . . . . .	26
2.2	$P \in AB$ tal que $\angle APA' \equiv \angle BPB' = \alpha$ . . . . .	27
2.3	$AB \cap A'B'' = \{P\}$ . . . . .	27
2.4	$A'B' \cap AB = \{P\}$ . . . . .	27
2.5	Apolônio de Perga . . . . .	28
2.6	As Cônicas . . . . .	29
2.7	Círculo de Apolônio sobre $AB$ na razão $k$ . . . . .	30
2.8	Demonstração analítica do Círculo de Apolônio . . . . .	31
2.9	Demonstração euclidiana do Círculo de Apolônio . . . . .	32
2.10	Demonstração euclidiana do Círculo de Apolônio . . . . .	33
2.11	Círculo de Apolônio com $k \approx 0$ . . . . .	35
2.12	Círculo de Apolônio com $k \approx 0,5$ . . . . .	35
2.13	Círculo de Apolônio com $0 < k < 1$ e $k \approx 1$ . . . . .	36
2.14	Círculo de Apolônio com $k > 1$ e $k \approx 1$ . . . . .	36
2.15	Círculo de Apolônio com $k > 1$ . . . . .	37
2.16	Círculo de Apolônio com $k \rightarrow +\infty$ . . . . .	37
2.17	Construção do Círculo de Apolônio no GeoGebra . . . . .	41

2.18	Inversão de pontos ( $P$ interno à circunferência) . . . . .	44
2.19	Inversão de pontos ( $P$ externo à circunferência) . . . . .	45
2.20	Inversão de pontos no Círculo de Apolônio . . . . .	46
2.21	Círculo de Apolônio no plano complexo . . . . .	47
3.1	Esfera de Apolônio . . . . .	48
3.2	Esfera de Apolônio, demonstração analítica . . . . .	49
3.3	Seção de uma Esfera de Apolônio . . . . .	51
3.4	Círculo de Apolônio a partir de uma seção da Esfera de Apolônio . . . . .	51
3.5	Círculo de Apolônio rotacionado em torno do eixo $\overleftrightarrow{AB}$ . . . . .	52
3.6	Esfera de Apolônio com $k \approx 0$ . . . . .	53
3.7	Esfera de Apolônio com $k \approx 0,5$ . . . . .	54
3.8	Esfera de Apolônio com $0 < k < 1$ e $k \approx 1$ . . . . .	54
3.9	Esfera de Apolônio com $k > 1$ e $k \approx 1$ . . . . .	55
3.10	Esfera de Apolônio com $k > 1$ . . . . .	55
3.11	Esfera de Apolônio com $k \rightarrow +\infty$ . . . . .	56

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Quádruplas harmônicas</b>	<b>3</b>
1.1 Divisão de um segmento numa razão . . . . .	3
1.2 Divisão harmônica . . . . .	6
1.2.1 Construção dos divisores de um segmento numa razão dada . . . . .	6
1.2.2 Propriedades . . . . .	7
1.2.3 Distância entre os conjugados harmônicos . . . . .	11
1.2.4 Relação entre as razões associadas a uma quádrupla harmônica . . . . .	13
1.3 Teorema das bissetrizes . . . . .	14
1.3.1 Divisão da bissetriz interna, harmonicamente, pelo incentro e ex-incentro	17
1.4 Feixe harmônico . . . . .	19
1.5 Construção da quádrupla harmônica usando uma régua . . . . .	23
<b>2 Apolônio e o seu Círculo</b>	<b>26</b>
2.1 Apolônio de Perga . . . . .	28
2.2 Lugar Geométrico (LG) . . . . .	29

2.3	O LG conhecido como Círculo de Apolônio . . . . .	30
2.3.1	Demonstração analítica do Círculo de Apolônio . . . . .	30
2.3.2	Demonstração euclidiana do Círculo de Apolônio . . . . .	32
2.3.3	Posições relativas do Círculo de Apolônio e do segmento . . . . .	34
2.3.4	Construção do Círculo de Apolônio no GeoGebra . . . . .	37
2.3.5	Círculo de Apolônio e inversão de pontos . . . . .	41
2.3.6	Círculo de Apolônio no plano complexo . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Esfera de Apolônio</b>	<b>48</b>
3.1	Demonstração analítica da Esfera de Apolônio . . . . .	49
3.2	Demonstração euclidiana da Esfera de Apolônio . . . . .	51
3.3	Posições relativas da Esfera de Apolônio e do segmento . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Problemas e exercícios</b>	<b>57</b>
4.1	Exercícios propostos . . . . .	57
4.2	Soluções dos exercícios propostos . . . . .	64
4.3	Problemas propostos . . . . .	77
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>

# Introdução

Neste trabalho, buscamos contribuir com o ensino e estudo de geometria usando conceitos das geometrias euclidiana, analítica e projetiva. Exploramos conceitos importantes da geometria como divisão de segmentos, lugares geométricos, construção com régua e compasso, inversão de pontos em relação a uma circunferência, círculo e esfera (e suas equações), uso do GeoGebra, etc. Correlacionamos todos esses conceitos com um estudo aprofundado e dirigido ao objeto principal do trabalho: as quádruplas harmônicas, o círculo e a esfera de Apolônio.

Tentamos contribuir para a divulgação de temas interessantes no estudo de geometria e adicionalmente estimular o interesse dos leitores em geral. Além disto, buscamos fornecer ao professor e estudantes de matemática, tanto um material de apoio para as aulas de geometria, quanto um recurso para um estudo mais avançado sobre temas específicos, com importantes aplicações em problemas encontrados em competições de matemática e outros exames que exigem um estudo mais minucioso desses assuntos.

(...) as habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. (BRASIL, 1998. p. 94)

Pensando assim, o ensino de Geometria deve propiciar ao aluno subsídios que lhes deem o entendimento do mundo que o cerca.

Dividimos o trabalho em quatro capítulos e tentamos fazê-lo numa sequência que contemple os pré-requisitos necessários para um melhor entendimento dos conceitos abordados.

O primeiro capítulo trata das **Quádruplas Harmônicas**. Inicialmente, buscamos fornecer as informações básicas necessárias, tais como divisão de um segmento numa razão  $k > 0$  e divisão harmônica. Elencamos algumas propriedades, dentre elas, a distância entre os conjugados harmônicos em função da razão  $k$ . Ainda no primeiro capítulo, mostramos uma aplicação dos conjugados harmônicos num triângulo qualquer e apresentamos o teorema das bissetrizes, uma importante ferramenta para a resolução de diversos problemas de geometria e base para a sequência do trabalho. Definimos um feixe harmônico utilizando uma demonstração de Poncelet [11]. Além disto, mostramos os passos para a construção de uma quádrupla harmônica utilizando régua.

No segundo capítulo, que trata do **Círculo de Apolônio**, fizemos um breve levantamento histórico de Apolônio e de suas principais contribuições na matemática. Descrevemos um problema curioso que atua como motivação para o estudo do LG conhecido como Círculo de Apolônio. Buscamos fazer este estudo utilizando conceitos das geometrias euclidiana, analítica e projetiva. Correlacionamos o Círculo de Apolônio com sua razão através de figuras produzidas com o *software* GeoGebra, *software* este que serviu de base na construção de quase todas as figuras do trabalho. Buscamos também, relacionar o conceito de quádruplas harmônicas, inversão de pontos e Círculo de Apolônio. Por fim, fizemos um breve abordagem do Círculo de Apolônio no plano complexo ( $\mathbb{C}$ ).

No terceiro capítulo, fizemos uma generalização no espaço ( $\mathbb{R}^3$ ), do que foi visto para o plano ( $\mathbb{R}^2$ ). Daí, o Círculo de Apolônio torna-se a **Esfera de Apolônio**. Trabalhamos a esfera e sua relação com  $k$  de forma análoga à que foi feita no segundo capítulo.

Finalmente, no quarto capítulo, incluímos problemas e exercícios envolvendo os conceitos abordados ao longo do trabalho e suas resoluções. A maioria destes problemas são do livro de Morgado [9], uma indispensável fonte de pesquisa. Além deles, trouxemos uma série de problemas olímpicos e de seleção noutros países que podem ser resolvidos com as ferramentas trazidas neste trabalho.

Esperamos que este trabalho possa contribuir na formação de professores e de estudantes de geometria.

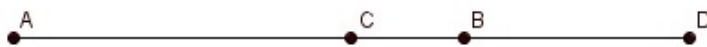
# Capítulo 1

## Quádruplas harmônicas

Pretendemos, neste capítulo, dar subsídios suficientes com definições, observações, propriedades e teoremas, para que possamos responder adequadamente os problemas que envolvam as quádruplas harmônicas além de aprofundar os conhecimentos do leitor sobre o assunto.

Ao longo deste trabalho, vamos utilizar  $AB$  para indicar a medida e o segmento  $\overline{AB}$ , conforme contexto. Para indicar a reta determinada por  $A$  e  $B$ ,  $\overleftrightarrow{AB}$  e, para indicar a semirreta com origem em  $A$  passando por  $B$ ,  $S_{AB}$ .

### 1.1 Divisão de um segmento numa razão



**Definição 1.1.1.** *Sejam  $C$  e  $D$ , pontos de  $\overleftrightarrow{AB}$ , tais que*

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k.$$

- (i) *Se  $C$  pertence ao segmento  $AB$ , dizemos que ele divide interiormente o segmento  $AB$  na razão  $k$ .*
- (ii) *Se  $D$  não pertence ao segmento  $AB$ , dizemos que ele  $D$  divide exteriormente o segmento  $AB$  na razão  $k$ .*



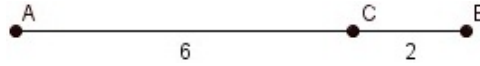


Figura 1.1:  $C$  divide interiormente o segmento  $AB$

**Exemplo 1.1.2.** *Seja  $C$  um ponto pertencente ao segmento  $AB$  conforme a figura (1.1).*

a)  $C$  divide interiormente o segmento  $AB$  na razão:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{6}{2} = 3$$

b)  $A$  divide exteriormente o segmento  $CB$  na razão:

$$\frac{AB}{CA} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

c)  $B$  divide exteriormente o segmento  $CA$  na razão:

$$\frac{AB}{CB} = \frac{8}{2} = 4$$

**Observação 1.1.3.** *Note que, como a medida de quaisquer segmentos são números reais positivos, a razão  $k$  será também um número positivo. Entretanto, é possível definir a orientação de um segmento de tal forma que o sinal da razão  $k$  determina se o ponto que divide o segmento é interno ou externo. Para mais detalhes, ver [13] e [10].*

**Observação 1.1.4.** *Não existe um ponto  $D$  externo a um segmento  $AB$  que o divida numa razão  $k = 1$ . Com efeito, se  $k = 1$ , então  $DA = DB$ . Isso implica que  $D$  pertence a mediatriz do segmento  $AB$ . Mas, como  $D$  também pertence a  $\overleftrightarrow{AB}$ , segue-se que  $D$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .*

Por outro lado, para qualquer número positivo  $k \neq 1$ , é possível encontrar de maneira única os pontos  $C$  e  $D$  tais que dividem o mesmo segmento na razão  $k$ . É o que mostra o teorema a seguir.

**Teorema 1.1.5.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos e  $k$  um real positivo. Então:*

(i) *Existe um único ponto  $C$  que divide interiormente o segmento  $AB$  na razão  $k$ .*

(ii) *Se  $k \neq 1$ , existe um único ponto  $D$  que divide exteriormente o segmento  $AB$  na razão  $k$ .*

Para provar, vamos utilizar o lema<sup>1</sup> a seguir:

**Lema 1.1.6.** *Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos e  $\lambda$  um real positivo. Então, existe um único ponto  $P$  na semirreta de origem em  $A$  contendo  $B$ , tal que  $AP = \lambda$ . Além disso,*

(i) *Se  $\lambda < AB$ , então  $P$  está entre  $A$  e  $B$ .*

(ii) *Se  $\lambda > AB$ , então  $B$  está entre  $A$  e  $P$ .*

*Demonstração:*

Considere  $\lambda = \left(\frac{k}{k+1}\right)AB$ . Pelo lema (1.1.6), existe um único ponto  $C$  da semirreta, tal que o  $CA = \lambda$ . Como  $k$  é um número real positivo, então  $\lambda < AB$ . Logo, pelo item (i) do lema, o ponto  $C$  está entre  $A$  e  $B$ , como também  $AB = AC + CB$ .

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} &= \frac{CA}{AB - CA} = \frac{\left(\frac{k}{k+1}\right)AB}{AB - \left[\left(\frac{k}{k+1}\right)AB\right]} \\ &= \frac{\left(\frac{k}{k+1}\right)AB}{\frac{(k+1)AB - k \cdot AB}{k+1}} = \frac{k \cdot AB}{AB(k+1-k)} = k. \end{aligned}$$

Logo, existe  $C$  entre  $A$  e  $B$  tal que  $\frac{CA}{CB} = k$ .

Agora que já provamos sua existência, vamos provar sua unicidade.

Suponha que exista um  $C'$  entre  $A$  e  $B$ , distinto de  $C$ , com a mesma propriedade. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{C'A}{C'B} = k &\implies \frac{C'A}{C'A + C'B} = \frac{k}{k+1} \\ &\implies C'A = \left(\frac{k}{k+1}\right)AB. \end{aligned}$$

Perceba que  $C'A = \lambda = CA$  o que, pelo lema (1.1.6) é uma contradição. Portanto, não existe  $C'$  distinto de  $C$  já que  $C$  é único.

■

---

<sup>1</sup>Esse lema decorre das abordagens axiomáticas. Mais informações podem ser encontradas nos livros de Barbosa [2] e Euclides [5].

## 1.2 Divisão harmônica

**Definição 1.2.1.** Dizemos que os pontos  $C$  e  $D$  de  $\overleftrightarrow{AB}$  e distintos de  $A$  e  $B$ , dividem harmonicamente o segmento  $AB$ , se

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$$

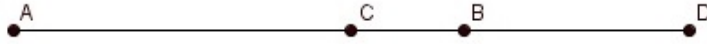


Figura 1.2: Conjugados harmônicos

$C$  e  $D$  são os conjugados harmônicos de  $AB$  na razão  $k = \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}$ .

Além disso, de acordo com a definição (1.2.1), invertendo os meios da proporção,  $A$  e  $B$  dividem harmonicamente o segmento  $CD$  numa razão  $k'$  diferente, segunda a qual  $C$  e  $D$  dividem  $AB$ . A relação entre  $k$  e  $k'$  será exibida em detalhes na seção (1.2.4).

Dizemos que os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  distintos da reta, com  $C$  no interior e  $D$  no exterior do segmento  $AB$ , formam, nesta ordem, uma **quádrupla harmônica**.

### 1.2.1 Construção dos divisores de um segmento numa razão dada

Sejam  $C$  e  $D$  pontos de  $\overleftrightarrow{AB}$  tais que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k,$$

podemos construir os divisores harmônicos rapidamente seguindo os passos:

1. Trace, num dos semiplanos determinados por  $\overleftrightarrow{AB}$ , uma semirreta arbitrária com origem em  $A$ ;
2. Trace o segmento<sup>2</sup>  $AP$  de comprimento  $k$ ;
3. Trace por  $B$  uma reta  $s$  paralela a semirreta  $S_{AP}$ ;

---

<sup>2</sup>Nem sempre é possível construir um segmento com um número dado. Em alguns casos,  $k$  não é um número construtível (racionais, por exemplo, são construtíveis.)

4. Tome, em  $s$ , os pontos  $Q$  e  $R$  distantes uma unidade de  $B$ ;
5. Trace as semirretas  $S_{PQ}$  e  $S_{PR}$ ;
6. Marque as interseções  $C$  e  $D$  de  $PQ$  e  $PR$  com  $\overleftrightarrow{AB}$ , respectivamente.

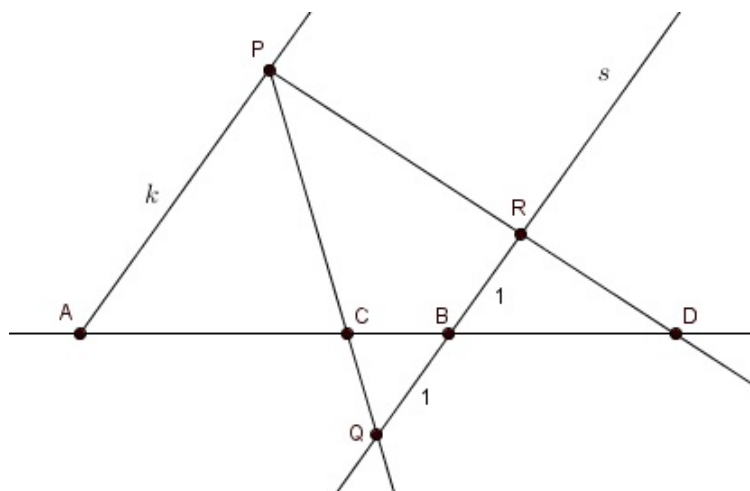


Figura 1.3: Construção dos divisores de um segmento numa razão dada

*Observação:*

Observe que esta construção garante a existência dos pontos divisores de um segmento  $AB$  numa razão  $k$ , dado pelo teorema (1.1.5).

Note que, por semelhança de triângulos ( $\triangle APC \sim \triangle BQC$ )

$$\frac{CA}{CB} = \frac{AP}{BQ} \implies \frac{CA}{CB} = \frac{k}{1} = k.$$

Por outro lado, também por semelhança de triângulos ( $\triangle DAP \sim \triangle DBR$ )

$$\frac{DA}{DB} = \frac{AP}{BR} \implies \frac{DA}{DB} = \frac{k}{1} = k.$$

Dessa forma,  $C$  e  $D$  são os pontos que dividem interna e externamente o segmento  $AB$ , respectivamente.

## 1.2.2 Propriedades

É importante destacar as posições relativas entre os pontos da quádrupla harmônica com relação aos valores da razão  $k$ . Os pontos  $C$  e  $D$  estão mais próximos de  $B$  caso  $k > 1$

(figura (1.4)) e mais próximos de  $A$  caso  $0 < k < 1$  (figura (1.5)).

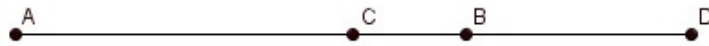


Figura 1.4: Divisão harmônica com  $k > 1$

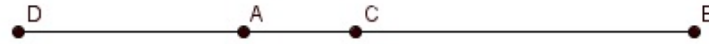


Figura 1.5: Divisão harmônica com  $0 < k < 1$

**Propriedade 1.2.2.** *Seja  $(A, B, C$  e  $D)$  uma quádrupla harmônica, temos que:*

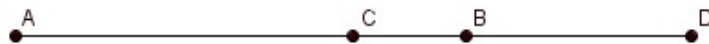
(i) *Se  $k > 1$ , então  $\frac{2}{AB} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{DA}$ ;*

(ii) *Se  $0 < k < 1$ , então  $\frac{2}{AB} = \frac{1}{CA} - \frac{1}{DA}$ ;*

(iii) *Se  $k = 1$ , então  $C$  é o ponto médio do segmento  $AB$  e não possui conjugado harmônico.*

*Demonstração:*

(i)  $k > 1$



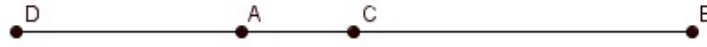
Os segmentos  $CA$  e  $DA$  são maiores do que os segmentos  $CB$  e  $DB$  respectivamente. Daí:

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} &\implies \frac{CA}{AB - CA} = \frac{DA}{DA - AB} \\ &\implies CA(DA - AB) = DA(AB - CA) \\ &\implies CA \cdot DA - CA \cdot AB = DA \cdot AB - CA \cdot DA \\ &\implies CA \cdot DA + CA \cdot DA = CA \cdot AB + DA \cdot AB \\ &\implies 2 \cdot CA \cdot DA = AB(CA + DA) \\ &\implies \frac{2}{AB} = \frac{CA}{CA \cdot DA} + \frac{DA}{CA \cdot DA} \\ &\implies \frac{2}{AB} = \frac{1}{CA} + \frac{1}{DA}. \end{aligned}$$

(ii)  $0 < k < 1$

Os segmentos  $CA$  e  $DA$  são menores do que os segmentos  $CB$  e  $DB$  respectivamente.

Daí:



$$\begin{aligned}
 \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} &\implies \frac{CA}{AB - CA} = \frac{DA}{AB + DA} \\
 &\implies CA(AB + DA) = DA(AB - CA) \\
 &\implies CA \cdot AB + CA \cdot DA = DA \cdot AB - CA \cdot DA \\
 &\implies CA \cdot DA + CA \cdot DA = DA \cdot AB - CA \cdot AB \\
 &\implies 2 \cdot CA \cdot DA = AB(DA - CA) \\
 &\implies \frac{2}{AB} = \frac{DA}{CA \cdot DA} - \frac{CA}{CA \cdot DA} \\
 &\implies \frac{2}{AB} = \frac{1}{CA} - \frac{1}{DA}.
 \end{aligned}$$

(iii)  $k = 1$

Como  $C$  pertence a  $\overleftrightarrow{AB}$  e  $\frac{CA}{CB} = 1$ ,  $C$  é o ponto médio do segmento  $AB$ . Neste caso, não possui conjugado harmônico. Esse resultado decorre da observação (1.1.4).



Figura 1.6: Divisão harmônica com  $k = 1$

**Propriedade 1.2.3.** *Seja  $M$  o ponto médio de  $AB$  e  $C$  e  $D$  os divisores harmônicos de  $AB$ , temos que:*

$$AM^2 = MC \cdot MD.$$

*Demonstração:*

Vamos supor, inicialmente  $k > 1$ . Temos

$$\begin{aligned}
 \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} &\implies \frac{AM + MC}{BM - MC} = \frac{AM + MD}{MD - BM} \\
 &\implies (AM + MC)(MD - BM) = (AM + MD)(BM - MC).
 \end{aligned}$$

Como  $AM = BM$ , temos que:

$$\implies (AM + MC)(MD - AM) = (AM + MD)(AM - MC)$$

$$\implies AM \cdot MD - AM^2 + MC \cdot MD - MC \cdot AM = AM^2 - AM \cdot MC + AM \cdot MD - MC \cdot MD$$

$$\implies 2 \cdot AM^2 = 2 \cdot MC \cdot MD$$

$$\implies AM^2 = MC \cdot MD.$$

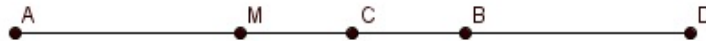


Figura 1.7: Observação do ponto médio ( $k > 1$ )

Agora, suponha  $0 < k < 1$ . Temos

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} &\implies \frac{AM - MC}{BM + MC} = \frac{MD - AM}{MD + BM} \\ &\implies (AM - MC)(MD + BM) = (MD - AM)(BM + MC). \end{aligned}$$

Como  $AM = BM$ , temos que:

$$\implies (AM - MC)(MD + AM) = (MD - AM)(AM + MC)$$

$$\implies AM \cdot MD + AM^2 - MC \cdot MD - MC \cdot AM = -AM^2 - AM \cdot MC + AM \cdot MD + MC \cdot MD$$

$$\implies 2 \cdot AM^2 = 2 \cdot MC \cdot MD$$

$$\implies AM^2 = MC \cdot MD.$$



Figura 1.8: Observação do ponto médio ( $0 < k < 1$ )



### 1.2.3 Distância entre os conjugados harmônicos

Conhecendo a razão  $k$ , é possível determinar a distância entre os conjugados harmônicos.

**Propriedade 1.2.4.** *Dados  $C$  e  $D$ , conjugados harmônicos do segmento  $AB$  numa razão  $k$ , a distância entre  $C$  e  $D$  é:*

$$(i) \frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1}, \text{ se } k > 1.$$

$$(ii) -\frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1}, \text{ se } 0 < k < 1;$$

*Demonstração:*

(i)  $k > 1$

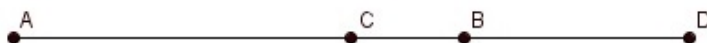


Figura 1.9: Distância entre os conjugados harmônicos com  $k > 1$

Sabe-se que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k.$$

Escrevendo separadamente cada uma das razões, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} = k &\implies k = \frac{AB - CB}{CB} \\ &\implies CB \cdot k + CB = AB \\ &\implies CB(k + 1) = AB \\ &\implies CB = \frac{AB}{k + 1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{DA}{DB} = k &\implies k = \frac{AB + DB}{DB} \\ &\implies DB \cdot k = AB + DB \\ &\implies DB \cdot k - DB = AB \\ &\implies DB(k - 1) = AB \\ &\implies DB = \frac{AB}{k - 1}. \end{aligned}$$



Como  $CD = CB + BD$ , então

$$\begin{aligned} CD &= \frac{AB}{k+1} + \frac{AB}{k-1} \implies CD = \frac{(k-1)AB + (k+1)AB}{(k+1)(k-1)} \\ &\implies CD = \frac{AB(k-1+k+1)}{k^2-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$CD = \frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1}.$$

(ii)  $0 < k < 1$

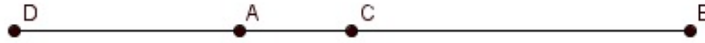


Figura 1.10: Distância entre os conjugados harmônicos com  $0 < k < 1$

Sabe-se que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k.$$

Escrevendo separadamente cada uma das razões, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{CA}{CB} = k &\implies k = \frac{CA}{AB - CA} \\ &\implies k(AB - CA) = CA \\ &\implies k \cdot AB - k \cdot CA = CA \\ &\implies CA + k \cdot CA = k \cdot AB \\ &\implies CA(k+1) = k \cdot AB \\ &\implies CA = \frac{k \cdot AB}{k+1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{DA}{DB} = k &\implies k = \frac{DA}{DA + AB} \\ &\implies k(DA + AB) = DA \\ &\implies k \cdot DA + k \cdot AB = DA \\ &\implies k \cdot DA - DA = -k \cdot AB \\ &\implies DA(k-1) = -k \cdot AB \\ &\implies DA = -\frac{k \cdot AB}{k-1}. \end{aligned}$$

Como  $CD = CA + AD$ , então

$$\begin{aligned} CD &= \frac{k \cdot AB}{k+1} - \frac{k \cdot AB}{k-1} \implies CD = \frac{(k-1)(k \cdot AB) - (k+1)(k \cdot AB)}{(k+1)(k-1)} \\ &\implies CD = \frac{k \cdot AB(k-1-k-1)}{k^2-1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$CD = -\frac{2k \cdot AB}{k^2-1}.$$

### 1.2.4 Relação entre as razões associadas a uma quádrupla harmônica

Seja  $(A, B, C \text{ e } D)$  uma quádrupla harmônica. Sabemos que se os pontos  $C$  e  $D$  dividem harmonicamente o segmento  $AB$ , então os pontos  $A$  e  $B$  dividem harmonicamente o segmento  $CD$ . Sejam  $k$  e  $k'$ , respectivamente estas razões, ou seja:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k \iff \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BD} = k'$$

Analisando as duas configurações possíveis para os pontos da quádrupla harmônica (respeitando uma ordem estabelecida para os extremos dos segmentos  $AB$  e  $CD$ ) percebe-se que, se uma das razões é maior do que 1 (um), então a outra é necessariamente menor do que 1 (um).

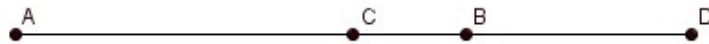


Figura 1.11:  $k > 1$  e  $0 < k' < 1$

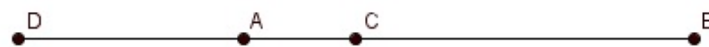


Figura 1.12:  $0 < k < 1$  e  $k' > 1$

A seguir, vamos obter uma relação entre  $k$  e  $k'$ .

Suponha, sem perda de generalidade  $k > 1$  (portanto  $0 < k' < 1$ ). Pela propriedade (1.2.4), sabe-se que:

$$\begin{aligned} CD &= \frac{2k \cdot AB}{k^2-1} \implies CD = \frac{2k}{k^2-1} \cdot \frac{-2k'}{k'^2-1} \cdot CD \\ &\implies 4kk' = (k^2-1)(1-k'^2) \\ &\implies (1-k^2)k'^2 - 4kk' + k^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação acima, temos:

$$\begin{aligned}\Delta &= 16k^2 - 4(1 - k^2)(k^2 - 1) = 16k^2 + 4(k^4 - 2k^2 + 1) \\ &= 4(k^4 + 2k^2 + 1) = 4(k^2 + 1)^2\end{aligned}$$

$$k' = \frac{4k \pm \sqrt{4(k^2 + 1)^2}}{2(1 - k^2)} = \frac{4k \pm 2(k^2 + 1)}{2(1 - k^2)} = \frac{-2k \pm (k^2 + 1)}{k^2 + 1},$$

Como  $k > 1$  e  $k' > 0$ , segue-se que:

$$\begin{aligned}k' &= \frac{k^2 - 2k + 1}{k^2 - 1} = \frac{(k - 1)^2}{(k + 1)(k - 1)} \\ \implies k' &= \frac{k - 1}{k + 1}.\end{aligned}$$

Resolvendo para  $k$ , temos:

$$k = \frac{1 + k'}{1 - k'}.$$

### 1.3 Teorema das bissetrizes

**Teorema 1.3.1.** *Seja  $ABC$  um triângulo qualquer com  $AB \neq AC$  e  $M$  e  $N$  pontos de  $\overleftrightarrow{BC}$  tais que  $AM$  e  $AN$  sejam as bissetrizes interna e externa respectivamente. Então os pontos  $M$  e  $N$  são conjugados harmônicos de  $BC$  na mesma razão que os lados adjacentes ao ângulo. Ou seja,*

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC} = \frac{NB}{NC}.$$

*Demonstração:*

Primeiramente, vejamos a relação

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}.$$

Traçamos a  $\overleftrightarrow{CD}$  paralela a  $AM$ . Pelo teorema de Tales, temos

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AD}. \quad (1.1)$$

Por outro lado, os ângulos  $BAM$  e  $MAC$  são congruentes, pois  $AM$  é bissetriz interna do triângulo  $ABC$ . Os ângulos  $BAM$  e  $ADC$  também são congruentes pois são correspondentes

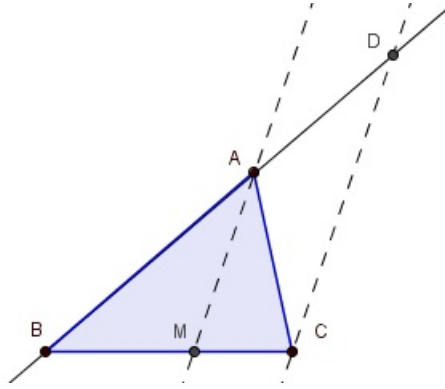


Figura 1.13: Teorema das bissetrizes (interna)

e, por fim, os ângulos  $MAC$  e  $ACD$  são congruentes por serem alternos internos. Logo, os ângulos  $ACD$  e  $ADC$  também são congruentes e, portanto, o triângulo  $ACD$  é isósceles de base  $CD$ . Daí,  $AD = AC$ . Substituindo essa igualdade em (1.1), obtemos que

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}.$$

■

Agora vamos provar que

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

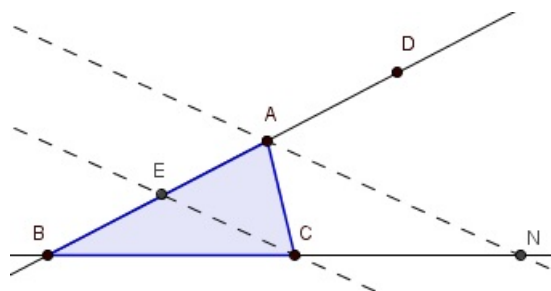


Figura 1.14: Teorema das bissetrizes (externa)

Consideremos agora,  $AN$  como a bissetriz do ângulo externo  $\hat{A}$ . Traçamos  $\overleftrightarrow{CE}$  paralela a  $AN$ . Novamente pelo Teorema de Tales, temos

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AE}. \quad (1.2)$$

Os ângulos  $DAN$  e  $CAN$  são congruentes, pois  $AN$  é bissetriz externa do ângulo interno  $\hat{A}$ . Os ângulos  $DAN$  e  $AEC$  também são congruentes pois são correspondentes e, por fim, os ângulos  $CAN$  e  $ACE$  são congruentes por serem alternos internos. Logo, os ângulos  $ACE$  e  $AEC$  também são congruentes e, portanto, o triângulo  $AEC$  é isósceles de base  $EC$ . Daí,  $AE = AC$ . Substituindo essa igualdade em (1.2), obtemos que

$$\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}.$$

■

**Teorema 1.3.2. (Recíproca do Teorema das Bissetrizes)** *Considere um triângulo  $ABC$  qualquer.*

(i) *Se  $M$  é um ponto de  $BC$  tal que  $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$ , então  $AM$  é bissetriz interna de  $ABC$ .*

(ii) *Se  $N$  é um ponto de  $\overleftrightarrow{BC}$  externo a  $BC$  e tal que  $\frac{NB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ , então  $AN$  é bissetriz externa de  $ABC$ .*

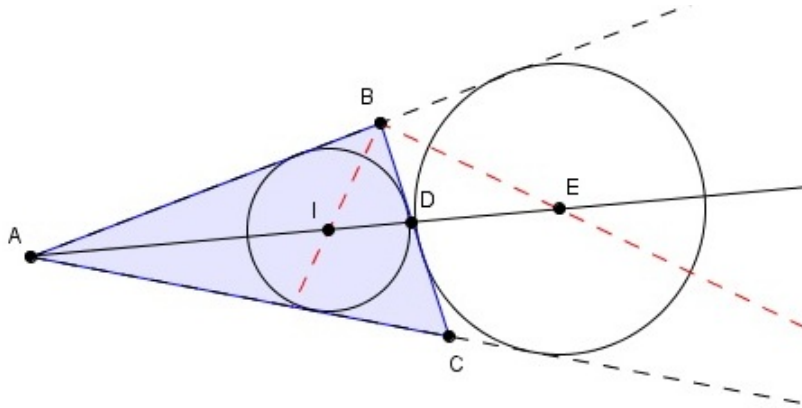
*Demonstração:*

Esse resultado é imediato a partir da unicidade de um ponto que divide um segmento numa razão dada (1.1.5), pois as bissetrizes interna e externa dividem o lado  $BC$  na razão  $\frac{AB}{AC}$ , pelo teorema (1.3.1).

■

### 1.3.1 Divisão da bissetriz interna, harmonicamente, pelo incentro e ex-incentro

**Teorema 1.3.3.** Dado um triângulo  $ABC$ , o incentro<sup>3</sup>  $I$  e o ex-incentro<sup>4</sup>  $E$ , relativo ao lado  $BC$ , são conjugados harmônicos da bissetriz interna do ângulo  $\hat{A}$  na razão  $k = \frac{BA + CA}{BC}$ .



**Proposição 1.3.4.** Todo triângulo admite um único círculo contido no mesmo e tangente a seus lados. Tal círculo é dito **inscrito** no triângulo e seu centro é o incentro do triângulo.

Para a demonstração, ver [10], pág. 119.

**Proposição 1.3.5.** Em todo triângulo  $ABC$ , existe um único círculo tangente ao lado  $BC$  e aos prolongamentos dos lados  $AB$  e  $AC$ . Tal círculo é o círculo **ex-inscrito** de  $ABC$  relativo a  $BC$  (ou ao vértice  $A$ ).

Para a demonstração, ver [10], pág. 120.

*Demonstração de (1.3.3):*

Considere o triângulo  $ABC$  com incentro  $I$  e ex-incentro  $E$ , relativo ao lado  $BC$ . Note que, no triângulo  $ABD$ ,  $BI$  e  $BE$  são bissetrizes internas e externas de  $\hat{B}$ , respectivamente, e, pelo teorema (1.3.1):

$$\frac{IA}{ID} = \frac{EA}{ED} = \frac{BA}{BD}.$$

<sup>3</sup>Incentro é o encontro das bissetrizes internas de um triângulo.

<sup>4</sup>Um ex-incentro ou exincentro é o ponto de intersecção das bissetrizes de dois ângulos externos adjacentes de um triângulo qualquer.

Isto mostra que o incentro  $I$  e o ex-incentro  $E$  são conjugados harmônicos de  $AD$ .  
Vamos agora encontrar a razão em termos dos lados do triângulo.

Como  $AD$  também é bissetriz interna, então vale a relação:

$$\begin{aligned} \frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} &\implies \frac{BD + CD}{BD} = \frac{BA + CA}{BA} \\ &\implies \frac{BC}{BD} = \frac{BA + CA}{BA} \\ &\implies BD = \frac{BA \cdot BC}{BA + CA}. \end{aligned}$$

Daí:

$$\begin{aligned} k = \frac{BA}{BD} &= \frac{BA}{\frac{BA \cdot BC}{BA + CA}} \\ &\implies k = \frac{BA + CA}{BC}. \end{aligned}$$

■

## 1.4 Feixe harmônico

**Definição 1.4.1.** *Chama-se feixe harmônico, o conjunto de quatro retas concorrentes que contém, cada uma, um ponto de uma mesma quádrupla harmônica.*

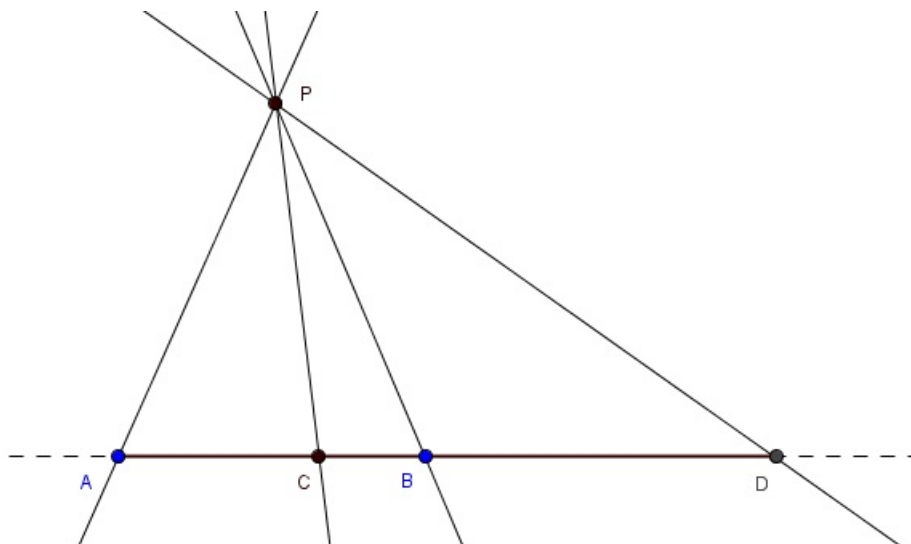


Figura 1.15: Feixe harmônico

Seja  $(A, B, C$  e  $D)$  uma quádrupla harmônica e  $P$  um ponto fora de  $\overleftrightarrow{AB}$ . As retas  $\overleftrightarrow{AP}$ ,  $\overleftrightarrow{BP}$ ,  $\overleftrightarrow{CP}$  e  $\overleftrightarrow{DP}$  concorrentes em  $P$ , formam um feixe harmônico.

**Teorema 1.4.2.** *Os pontos de interseção  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  e  $D'$  de uma reta  $r$  concorrente com os raios de um feixe harmônico  $(\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BP}, \overleftrightarrow{CP}$  e  $\overleftrightarrow{DP})$  formam uma quádrupla harmônica.*

Uma demonstração bastante simples trazida da obra de Poncelet [11] é a seguinte.



*Demonstração:*

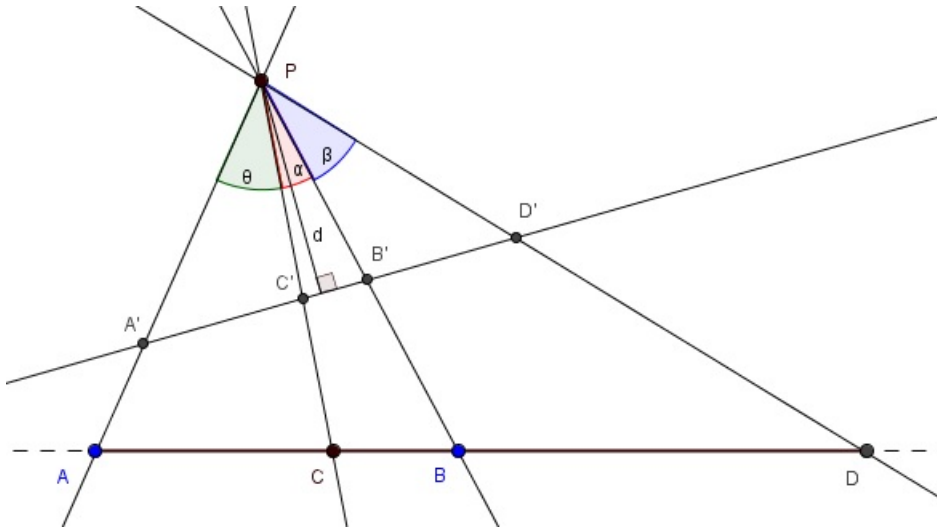


Figura 1.16: Demonstração de quádrupla harmônica num feixe harmônico

Considere os ângulos  $\theta = \angle A'PC'$ ,  $\alpha = \angle C'PB'$  e  $\beta = \angle B'PD'$  e a distância  $d$  entre  $P$  e a reta  $r = \overleftrightarrow{A'B'}$ . A área<sup>5</sup> do triângulo  $A'PC'$  pode ser obtida como:

$$[PA'C'] = \frac{1}{2} \cdot C'A' \cdot d = \frac{1}{2} \cdot PA' \cdot PC' \cdot \sin \theta \implies C'A' = \frac{PA' \cdot PC' \cdot \sin \theta}{d}.$$

Analogamente, das áreas dos triângulos de mesma altura,  $C'PB'$ ,  $A'PD'$  e  $B'PD'$ , temos

$$C'B' = \frac{PC' \cdot PB' \cdot \sin \alpha}{d}.$$

$$D'A' = \frac{PD' \cdot PA' \cdot \sin(\theta + \alpha + \beta)}{d}.$$

$$D'B' = \frac{PD' \cdot PB' \cdot \sin \beta}{d}.$$

<sup>5</sup>Escrevemos  $[PA'C']$  para denotar a área do triângulo  $PA'C'$ .

Desta forma, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{C'A'}{C'B'} = \frac{D'A'}{D'B'} &\iff \frac{\frac{PC' \cdot PA' \cdot \sin \theta}{d}}{\frac{PC' \cdot PB' \cdot \sin \alpha}{d}} = \frac{\frac{PD' \cdot PA' \cdot \sin(\theta + \alpha + \beta)}{d}}{\frac{PD' \cdot PB' \cdot \sin \beta}{d}} \\
&\iff \frac{PA' \cdot \sin \theta}{PB' \cdot \sin \alpha} = \frac{PA' \cdot \sin(\theta + \alpha + \beta)}{PB' \cdot \sin \beta} \\
&\iff \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\theta + \alpha + \beta)}{\sin \beta}.
\end{aligned}$$

Note que, os segmentos não interferem na razão final, apenas os ângulos. Como  $\theta$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  são os ângulos  $\angle APC$ ,  $\angle CPB$  e  $\angle BPD$  respectivamente, de forma análoga, temos que:

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} \iff \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{\sin(\theta + \alpha + \beta)}{\sin \beta}.$$

Portanto, se  $C$  e  $D$  são os conjugados harmônicos de  $AB$ , então  $C'$  e  $D'$  também são os conjugados harmônicos de  $A'B'$ . ■

Outra demonstração também pode ser encontrada no livro de Morgado [9].

**Teorema 1.4.3.** *Seja um feixe hamônico  $(\overleftrightarrow{AP}, \overleftrightarrow{BP}, \overleftrightarrow{CP}$  e  $\overleftrightarrow{DP})$  e uma reta  $r$  tal que,  $r \parallel \overleftrightarrow{AP}$ . Então, os pontos de interseção de  $r$  com  $\overleftrightarrow{BP}$ ,  $\overleftrightarrow{CP}$  e  $\overleftrightarrow{DP}$ , formam segmentos congruentes.*

*Demonstração:*

Considere  $\overleftrightarrow{XY}$  paralela a  $\overleftrightarrow{AP}$ , contendo  $B$ . Das semelhanças de triângulos, conclui-se que:

$$\triangle PC'B' \sim \triangle PXB \implies \frac{C'B'}{XB} = \frac{PB'}{PB}. \quad (1.3)$$

$$\triangle PD'B' \sim \triangle PYB \implies \frac{PB'}{PB} = \frac{B'D'}{BY}. \quad (1.4)$$

$$\triangle PAC \sim \triangle XBC \implies \frac{PA}{XB} = \frac{CA}{CB}. \quad (1.5)$$

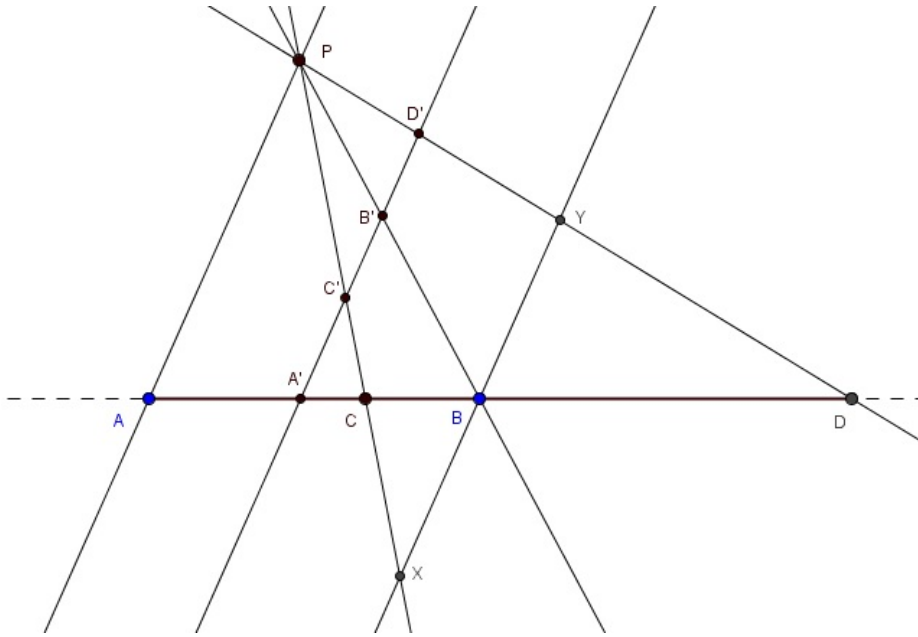


Figura 1.17: Reta paralela num feixe harmônico

$$\triangle PAD \sim \triangle YBD \implies \frac{DA}{DB} = \frac{PA}{BY}. \quad (1.6)$$

Ainda, por hipótese

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB}.$$

Daí, de (1.5) e (1.6),

$$\frac{PA}{XB} = \frac{PA}{BY} \implies XB = BY \quad (1.7)$$

Por outro lado, de (1.3) e (1.4), obtemos

$$\frac{C'B'}{XB} = \frac{B'D'}{BY}.$$

Substituindo (1.7) na relação acima, segue que

$$C'B' = B'D'.$$

■

## 1.5 Construção da quádrupla harmônica usando uma régua

Nesta seção, vamos mostrar como obter o conjugado harmônico de um ponto dado em relação a um segmento, usando apenas uma régua. Vejamos os passos necessários:

1. Trace uma reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e um ponto  $C$  interno<sup>6</sup> a ela.
2. Marque um ponto  $P$  externo a  $\overleftrightarrow{AB}$  e trace as retas  $\overleftrightarrow{AP}$ ,  $\overleftrightarrow{BP}$  e  $\overleftrightarrow{CP}$ .
3. Partindo de  $A$ , trace uma reta  $r$  qualquer concorrente a reta  $\overleftrightarrow{CP}$  e  $\overleftrightarrow{BP}$  como indicado na figura:
4. Sejam  $Z$  e  $Q$  pontos de interseção de  $r$  com  $\overleftrightarrow{BP}$  e  $\overleftrightarrow{CP}$  respectivamente.
5. Trace a reta  $\overleftrightarrow{BQ}$  e marque sua interseção  $Y$  com  $\overleftrightarrow{AP}$ .
6. Trace a reta  $\overleftrightarrow{YZ}$  e marque sua interseção  $D$  com  $\overleftrightarrow{AB}$ .

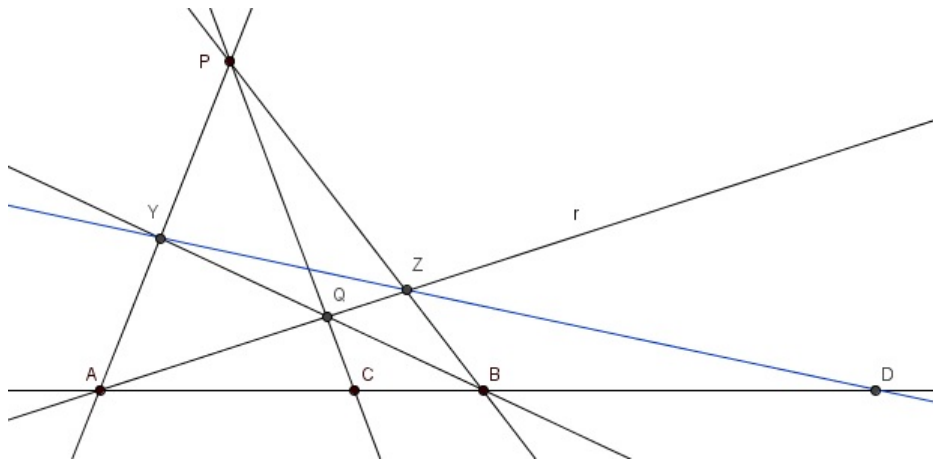


Figura 1.18: Construção da quádrupla harmônica usando uma régua

Os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  formam uma quádrupla harmônica e para provar a veracidade desta informação, usaremos os teoremas de Ceva e Menelaus.

<sup>6</sup>É importante evitar o ponto médio. Ver a observação (1.1.4).

**Teorema 1.5.1. (Ceva)** *Sejam um triângulo  $ABC$  e  $X, Y$  e  $Z$  situados respectivamente sobre os lados  $BC, CA$  e  $AB$ . Se as cevianas  $AX, BY$  e  $CZ$  concorrem num mesmo ponto, então:*

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

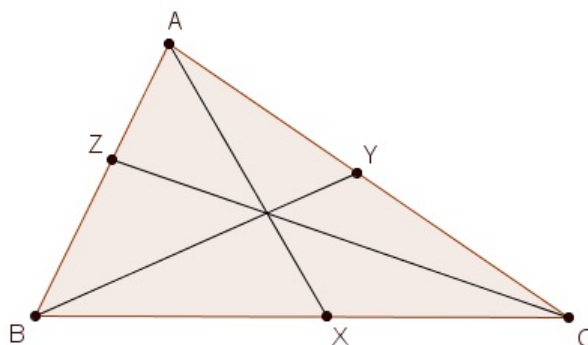


Figura 1.19: O teorema de Ceva

Esse resultado, por sua vez, é conhecido como teorema de Ceva.

**Teorema 1.5.2. (Menelaus)** *Dados  $ABC$  um triângulo e  $X, Y$  e  $Z$  pontos colineares sobre as retas suportes dos lados  $BC, CA$  e  $AB$  conforme a figura a seguir, então:*

$$\frac{XB}{XC} \cdot \frac{YC}{YA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

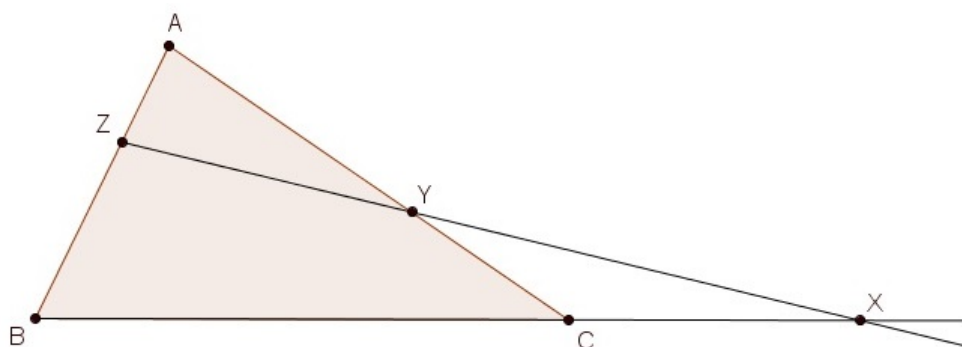


Figura 1.20: O teorema de Menelaus

Esse resultado é conhecido com teorema de Menelaus.

Em ambos os casos (Ceva e Menelaus) a construção do conjugado harmônico também está em [13].

Observando novamente a figura (1.18), pode-se notar que  $Y$ ,  $Z$  e  $D$  pertencem às retas suportes dos lados  $AP$ ,  $BP$  e  $AB$  do triângulo  $PAB$ . Portanto, vale o teorema de Menelaus:

$$\frac{YP}{YA} \cdot \frac{ZB}{ZP} \cdot \frac{DA}{DB} = 1. \quad (1.8)$$

Por outro lado, como  $C$  também faz parte da reta suporte de  $AB$ , vale o teorema de Ceva:

$$\frac{YP}{YA} \cdot \frac{ZB}{ZP} \cdot \frac{CA}{CB} = 1. \quad (1.9)$$

De (1.8) e (1.9) conclui-se que:

$$\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}.$$

No próximo capítulo faremos uma construção semelhante, contudo, o objeto final será o círculo de Apolônio.

# Capítulo 2

## Apolônio e o seu Círculo

Começaremos este capítulo trazendo um problema sugerido na *Revista do Professor de Matemática*, vol 61, pelo professor Eduardo Wagner [14]:

Imagine dois postes verticais  $AA'$  e  $BB'$  de tamanhos diferentes no plano horizontal  $\Pi$ . Para que posições uma formiga  $P$ , no plano, vê os dois postes do mesmo tamanho?

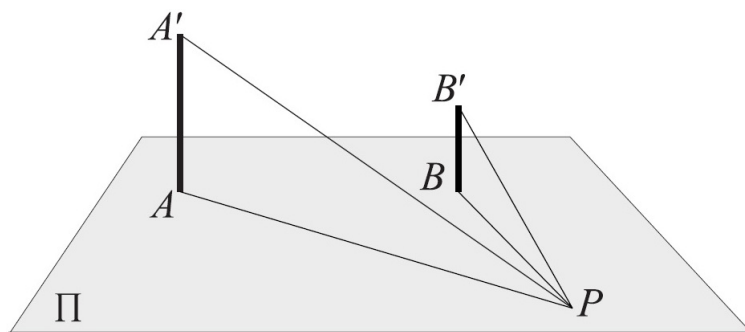


Figura 2.1: Postes  $AA'$  e  $BB'$  perpendiculares ao plano  $\Pi$  e o ponto  $P$

Facilmente podemos perceber que, dois objetos aparentam ter o mesmo tamanho para um determinado observador, quando os ângulos de visão são iguais. Ou seja, a formiga  $P$  vê os postes  $AA'$  e  $BB'$  do mesmo tamanho se os ângulos  $\angle APA'$  e  $\angle BPB'$  forem congruentes.

Rapidamente encontramos  $P$  no segmento  $AB$  tal que  $\angle APA' \equiv \angle BPB' = \alpha$ , conforme o desenho:

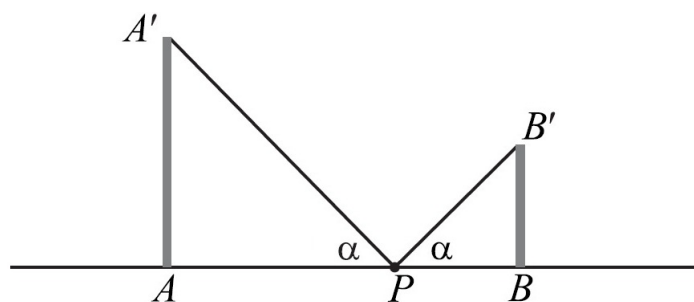


Figura 2.2:  $P \in AB$  tal que  $\angle APA' \equiv \angle BPB' = \alpha$

Sem perda de generalidade, se o poste  $AA'$  for maior que o poste  $BB'$ , esse ponto  $P$  estará mais próximo de  $B$  do que de  $A$ . Para encontrar exatamente o ponto  $P$ , basta ligar  $A'$  ao ponto  $B''$  simétrico de  $B'$  em relação a  $AB$ . Deste modo:  $AB \cap A'B'' = \{P\}$ .  $A'P + PB'$  é a menor distância de  $A'Q + QB'$  com  $Q \in \overleftrightarrow{AB}$ <sup>1</sup>.

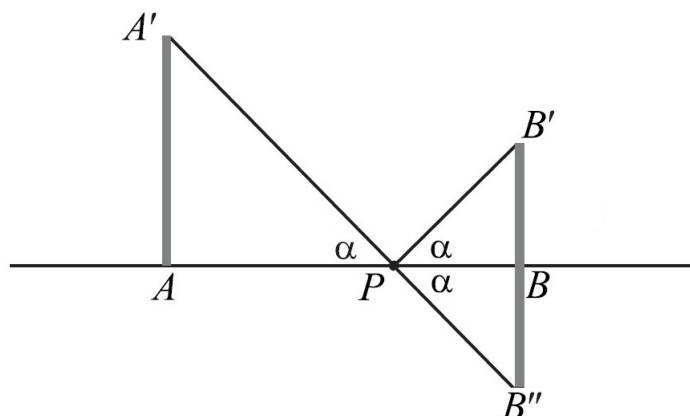


Figura 2.3:  $AB \cap A'B'' = \{P\}$

O outro ponto facilmente percebido é onde os postes  $AA'$  e  $BB'$  se sobrepõem, ou seja, quando a reta  $A'B'$  intersecta a reta  $AB$ :

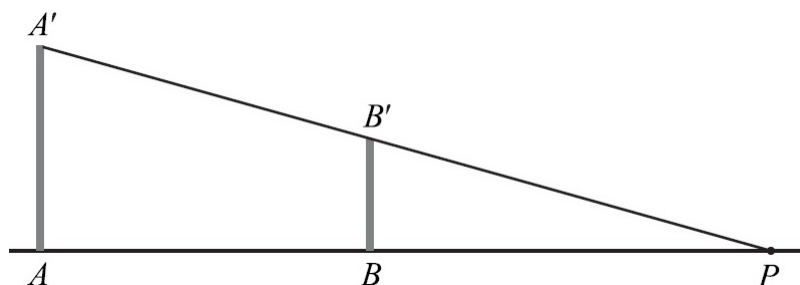


Figura 2.4:  $A'B' \cap AB = \{P\}$

<sup>1</sup>Este problema é conhecido como o problema de Heron.



No entanto, determinamos apenas dois pontos que satisfazem a condição de  $\angle APA' \equiv \angle BPB' = \alpha$ . Porém, há uma infinidade de outros pontos em  $\Pi$  que possuem as mesmas características dos dois já determinados. Como fazer para encontrá-los? Observe que, para resolver este problema, de modo geral devemos ter

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{PA} = \frac{BB'}{PB} \iff \frac{PA}{PB} = \frac{AA'}{BB'} \quad (2.1)$$

Ou seja, procuramos o conjunto de pontos do plano que satisfaça (2.1). Este conjunto de pontos é conhecido como *Círculo de Apolônio* e será tratado a seguir.

## 2.1 Apolônio de Perga

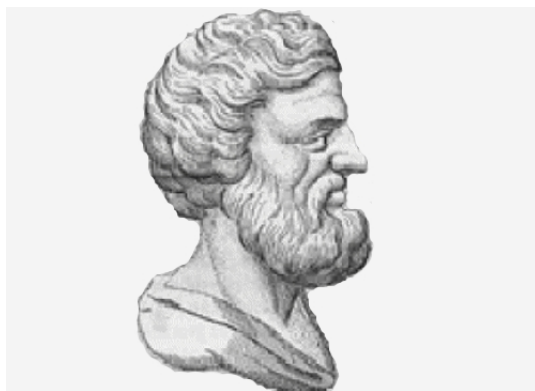


Figura 2.5: Apolônio de Perga

Os detalhes da vida de Apolônio são escassos e a maioria deles vem de algumas notícias em livros que trazem algum conteúdo relacionado a ele como as cônicas, por exemplo.

Apolônio nasceu em meados do século III a. C., na cidade de Perga ou Perge, na Grécia Antiga. Foi um grande geômetra e astrônomo. Escreveu muitas obras sobre as duas áreas porém, a maior parte delas desapareceu. Felizmente, sua principal obra-prima, *As Cônicas*, foi quase toda preservada [3] e [6].

Devido a relatos de matemáticos posteriores, sabe-se que Apolônio escreveu um livro intitulado *Lugares Planos*, dedicado à análise de diversos lugares geométricos dentre os quais, àquele cuja razão das distâncias a dois pontos fixos é constante. Esse lugar geométrico é conhecido até hoje como *Circunferência de Apolônio* ou *Círculo de Apolônio*. Há relatos, também, que Aristóteles já havia descoberto o círculo antes mesmo de Apolônio [3] e [6].

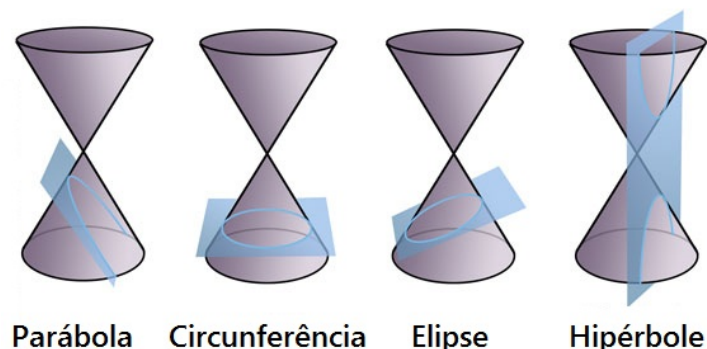


Figura 2.6: As Cônicas

## 2.2 Lugar Geométrico (LG)

Um conceito muito importante no estudo de geometria é o de **lugar geométrico** ou apenas **LG**. Este é facilmente encontrado em livros. Traremos aqui a definição segundo Muniz Neto [10].

**Definição 2.2.1.** *Dada uma propriedade  $\mathcal{P}$  relativa aos pontos do plano, o **lugar geométrico** (abreviamos **LG**) dos pontos que possuem a propriedade  $\mathcal{P}$  é o subconjunto  $\mathcal{L}$  do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*

- (a) *Todo ponto de  $\mathcal{L}$  possui a propriedade  $\mathcal{P}$ .*
- (b) *Todo ponto do plano que possui a propriedade  $\mathcal{P}$  pertence a  $\mathcal{L}$ .*

Em outras palavras,  $\mathcal{L}$  é o LG da propriedade  $\mathcal{P}$  se  $\mathcal{L}$  for constituído, em sua totalidade, pelos pontos do plano que possuem a propriedade  $\mathcal{P}$ .

Uma circunferência, por exemplo, é o LG dos pontos  $P$  equidistantes de um ponto  $O$ . Essa distância é definida como *raio da circunferência*. Ou seja:

$$\|OP\| = r.$$

## 2.3 O LG conhecido como Círculo de Apolônio

**Teorema 2.3.1.** *Dado um segmento  $AB$  em um plano  $\pi$ , chamamos de Círculo de Apolônio ou Circunferência de Apolônio<sup>2</sup> o LG dos pontos  $P$  de  $\pi$  tais que*

$$\frac{PA}{PB} = k$$

*com  $k \neq 1$ . Esse LG é um círculo  $\Gamma$  de diâmetro  $CD$  onde  $C$  e  $D$  são os conjugados harmônicos em relação a  $AB$  na razão  $k$ .*

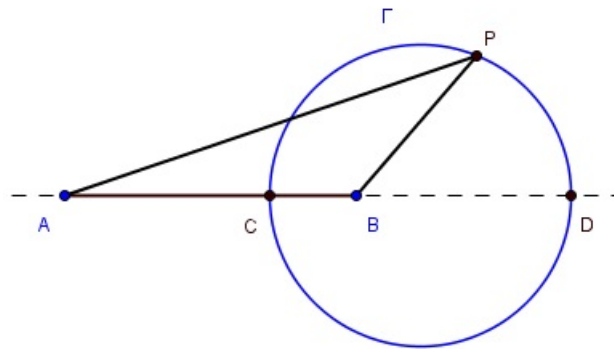


Figura 2.7: Círculo de Apolônio sobre  $AB$  na razão  $k$

Vamos fazer a demonstração desse teorema utilizando conhecimentos de geometria analítica e geometria euclidiana.

### 2.3.1 Demonstração analítica do Círculo de Apolônio

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $P$  pontos e  $\Gamma$  um círculo de um mesmo plano. Queremos provar que

$$P = (x, y) \in \text{LG} \iff P \in \Gamma.$$

O LG em questão é tal que  $\frac{PA}{PB} = k$ .

---

<sup>2</sup>Não estamos aqui fazendo distinção entre *círculo* e *circunferência*, mas apenas mencionando como o LG é conhecido.

*Demonstração:*

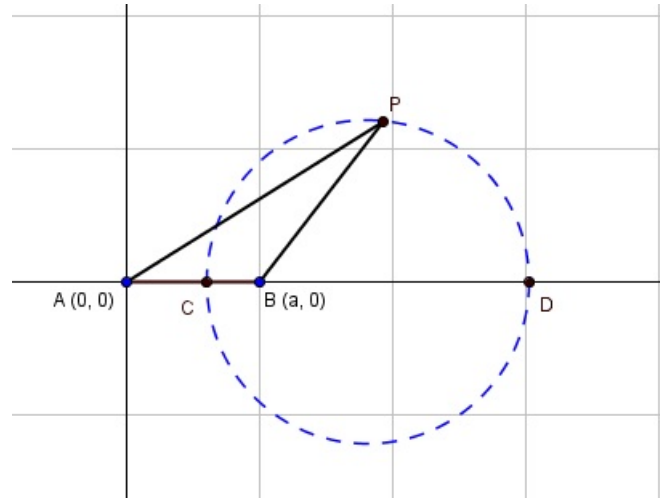


Figura 2.8: Demonstração analítica do Círculo de Apolônio

Sejam os pontos  $A = (0; 0)$  e  $B = (a; 0)$  e  $P = (x; y)$  pertencente ao LG, sem perda de generalidade, temos:

$$\begin{aligned}
 \frac{PA}{PB} = k &\iff PA = k \cdot PB \\
 &\iff PA^2 = k^2 \cdot PB^2 \\
 &\iff x^2 + y^2 = k^2[(x - a)^2 + y^2] \\
 &\iff x^2 + y^2 = k^2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2) \\
 &\iff x^2(k^2 - 1) - 2ak^2x + a^2k^2 + y^2(k^2 - 1) = 0 \\
 &\iff x^2 - \frac{2ak^2}{k^2 - 1}x + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} + y^2 = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} + y^2 = 0 \\
 &\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2k^4}{(k^2 - 1)^2} - \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} \\
 &\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = a^2k^2 \left(\frac{k^2}{(k^2 - 1)^2} - \frac{k^2 - 1}{(k^2 - 1)^2}\right) \\
 &\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{ak}{k^2 - 1}\right)^2
 \end{aligned}$$

Ou seja, o LG é o círculo  $\Gamma$  de centro  $\left(-\frac{ak^2}{k^2 - 1}; 0\right)$  e raio  $\left|\frac{ak}{k^2 - 1}\right|$ . Neste caso, o centro da circunferência pertence à reta  $AB : y = 0$ , no entanto, está em função da razão  $k$  e do comprimento  $a = AB$ .

Retomando o que vimos na seção (1.2.4), o comprimento de  $CD$  pode ser determinado em função da razão  $k$ . Logo, como  $\Gamma$  tem diâmetro  $CD$ .

Como,  $CD = \frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1}$ , então:

$$\begin{aligned} r = \left| \frac{CD}{2} \right| &\implies r = \left| \frac{\frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1}}{2} \right| \\ &\implies r = \left| \frac{2k \cdot AB}{2(k^2 - 1)} \right| \\ &\implies r = \left| \frac{k \cdot AB}{k^2 - 1} \right|. \end{aligned}$$

■

### 2.3.2 Demonstração euclidiana do Círculo de Apolônio

Agora, utilizando os conceitos de geometria euclidiana, queremos mostrar que:

$$P \in LG \iff P \in \Gamma.$$

*Demonstração:*

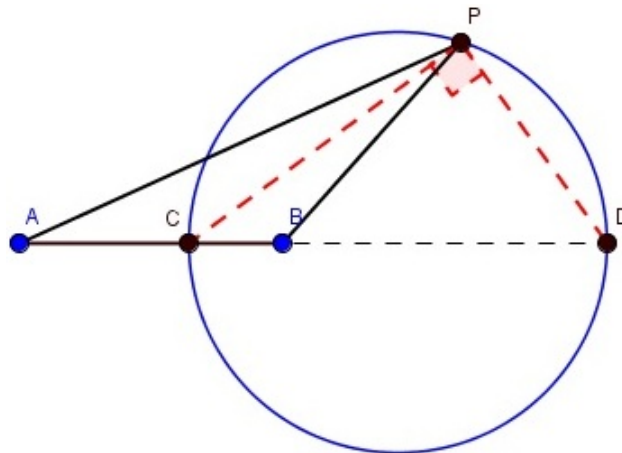


Figura 2.9: Demonstração euclidiana do Círculo de Apolônio

Sejam  $C$  e  $D$  conjugados harmônicos do segmento  $AB$ . Desta forma, eles dividem o segmento na mesma razão  $k$ .

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k.$$

Tome  $P$  um ponto qualquer do  $LG$ . Se  $P \in \{C, D\}$  então  $P \in \Gamma$ , pois  $\Gamma$  é uma circunferência de diâmetro  $CD$  (ou ainda porque  $C$  e  $D$  são os conjugados harmônicos do segmento  $AB$ ). No entanto, se  $P \notin \{C, D\}$ , das igualdades

$$\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = k$$

e da recíproca do teorema das bissetrizes (1.3.2), concluímos que  $PC$  é bissetriz interna e  $PD$  é bissetriz externa do ângulo  $\hat{A}$  do triângulo  $PAB$ . Daí,

$$\frac{PA}{PB} = \frac{DA}{DB} = k.$$

Como as bissetrizes  $PC$  e  $PD$  são perpendiculares, o triângulo  $PCD$  é retângulo de hipotenusa  $CD$ . Portanto, concluímos que  $PCD$  está inscrito no círculo de diâmetro  $CD$ , ou seja,  $P \in \Gamma$ . Isto mostra que  $LG \subset \Gamma$ .

Reciprocamente, vamos provar que, se  $P \in \Gamma$ , então  $P \in LG$ , ou seja,  $\Gamma \subset LG$ .

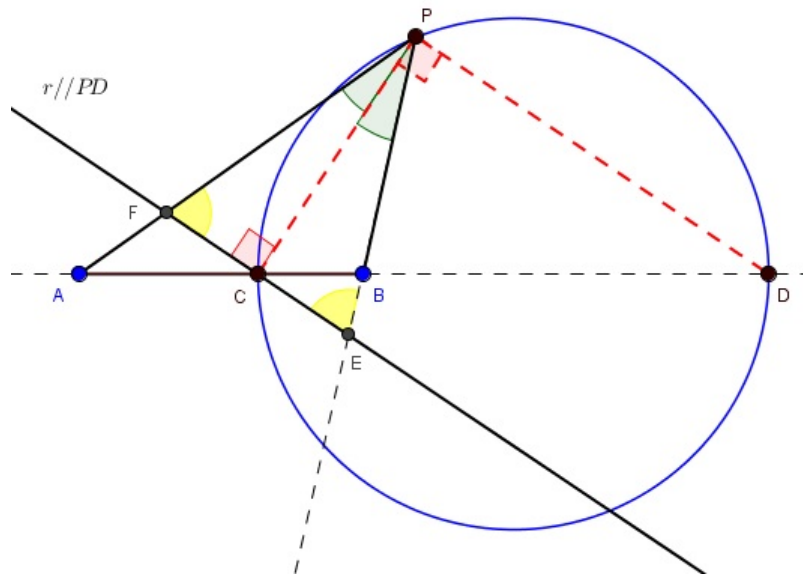


Figura 2.10: Demonstração euclidiana do Círculo de Apolônio

Seja  $P$  um ponto arbitrário de  $\Gamma$  distinto de  $C$  e  $D$ .

Traçamos por  $C$ , uma reta  $r$  paralela a  $PD$ , conforme figura (2.10). Os pontos  $E$  e  $F$  são as interseções de  $r$  com  $\overleftrightarrow{PB}$  e  $\overleftrightarrow{PA}$ , respectivamente. Note que, pelo teorema (1.4.3), sabe-se que os segmentos  $CE$  e  $CF$  são congruentes.

Daí, como  $PC$  e  $PD$  são perpendiculares e  $\overleftrightarrow{EF}$  e  $PD$  são paralelos, temos que  $\overleftrightarrow{EF}$  e  $PC$  também são perpendiculares, o que torna  $PC$  mediana, altura e, conseqüentemente, bissetriz interna do triângulo  $PCD$ . Logo, pelo teorema (1.3.1),  $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = k$ . Portanto, podemos concluir que  $\Gamma \subset LG$ .

■

### 2.3.3 Posições relativas do Círculo de Apolônio e do segmento

Como vimos na seção (1.2.2), a razão  $k$  é positiva (porém  $k \neq 1$ ) e os conjugados harmônicos variam de acordo com os dois casos  $0 < k < 1$  e  $k > 1$ .

A seguinte seqüência de figuras mostra como o Círculo de Apolônio se comporta em função da razão  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$  com  $C$  e  $D$  dividindo o segmento  $AB$  interiormente e exteriormente, respectivamente, e  $M$  sendo o ponto médio de  $AB$ .

Na figura (2.11), com  $k$  muito próximo de zero, o círculo tende a ser muito pequeno e em torno de  $A$ .

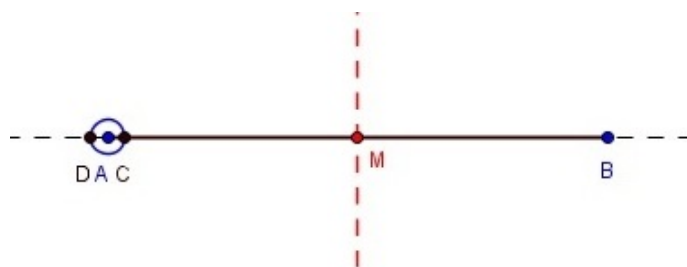


Figura 2.11: Círculo de Apolônio com  $k \approx 0$

Na figura (2.12), os pontos  $C$  e  $D$  se distanciam de  $A$  e o círculo fica mais visível.

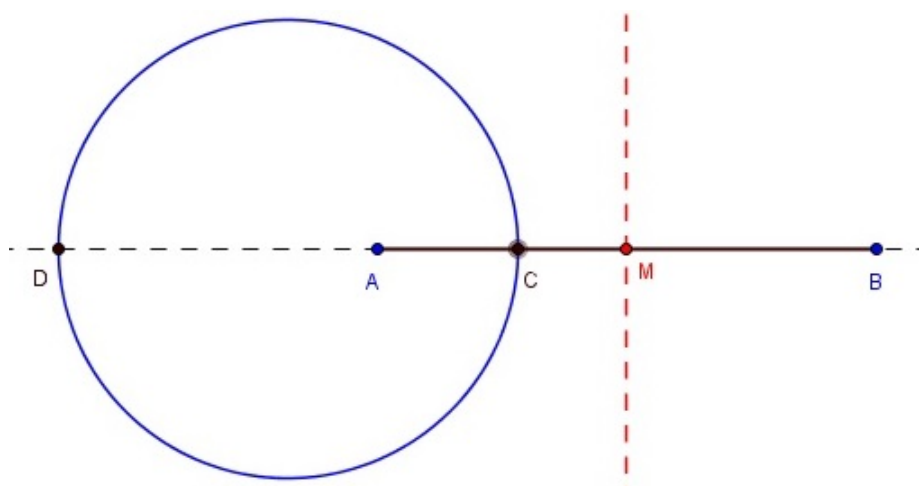


Figura 2.12: Círculo de Apolônio com  $k \approx 0,5$

Na figura (2.13), com  $k$  muito próximo de um, o círculo tende a ser muito grande. Quanto mais  $C$  for próximo do ponto médio  $M$ , maior será o círculo e  $D$  se afastará de  $A$ . Caso  $C$  e  $M$  coincidam, o círculo se degenera na mediatriz de  $AB$ .

Na figura (2.14) com  $k$  muito próximo de um, é um caso semelhante ao anterior, mas refletido em relação à mediatriz.



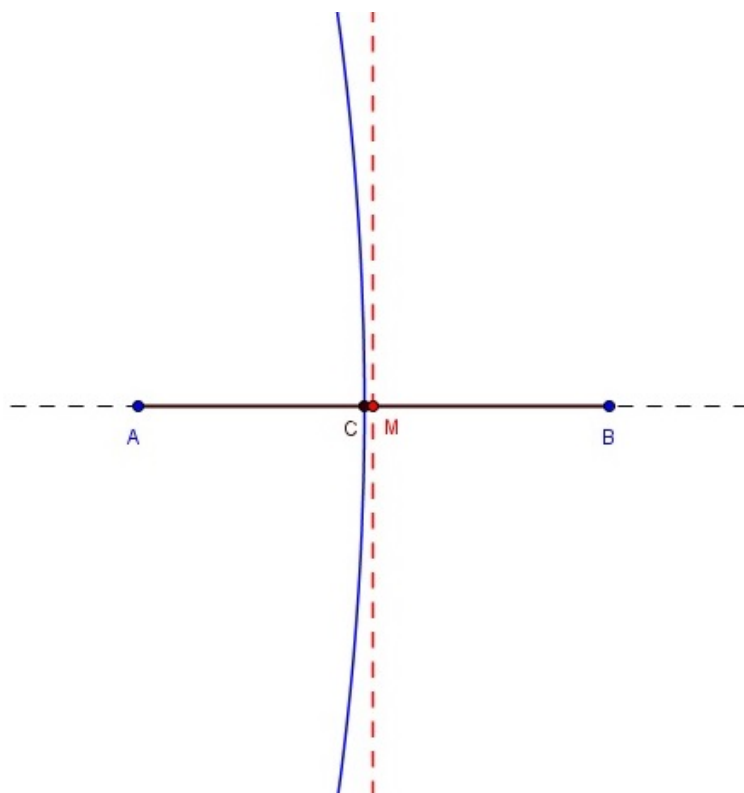


Figura 2.13: Círculo de Apolônio com  $0 < k < 1$  e  $k \approx 1$

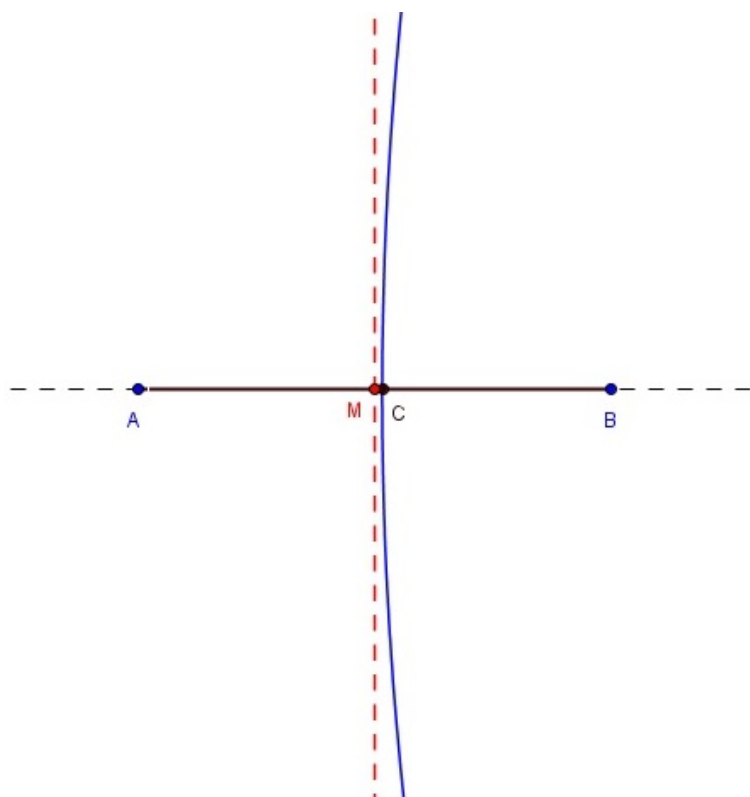


Figura 2.14: Círculo de Apolônio com  $k > 1$  e  $k \approx 1$

Na figura (2.15), os pontos  $C$  e  $D$  se distanciam de  $B$  e, na medida em que  $k$  cresce, o raio diminui.

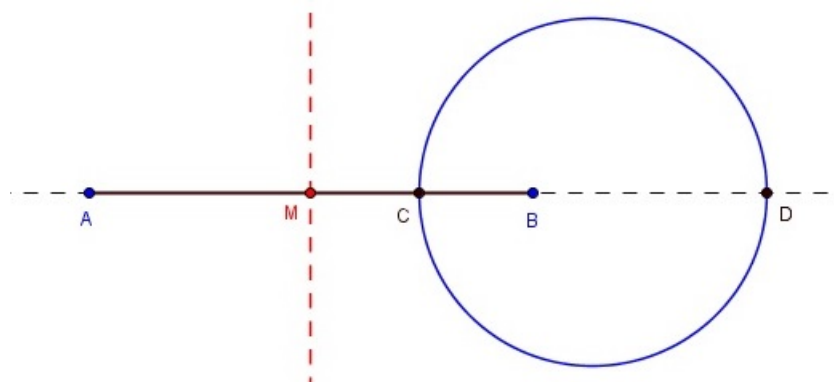


Figura 2.15: Círculo de Apolônio com  $k > 1$

Por fim, na figura (2.16), com  $k$  tendendo ao infinito, o círculo tende a ser muito pequeno e em torno de  $B$ .

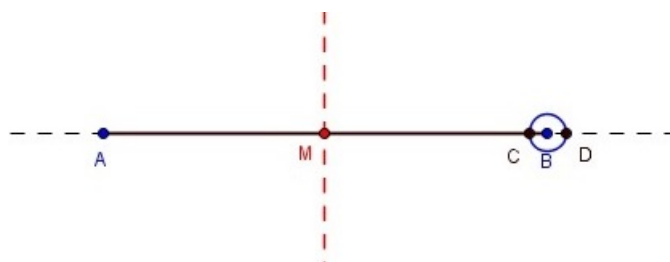


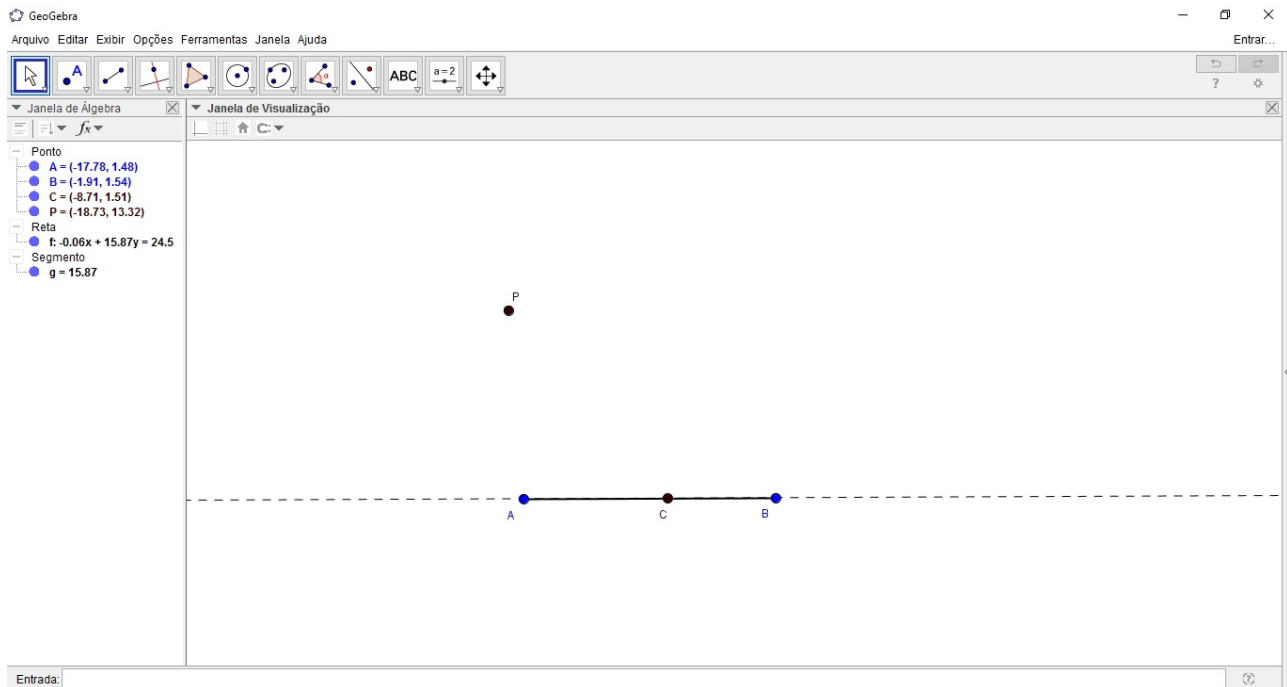
Figura 2.16: Círculo de Apolônio com  $k \rightarrow +\infty$

### 2.3.4 Construção do Círculo de Apolônio no GeoGebra

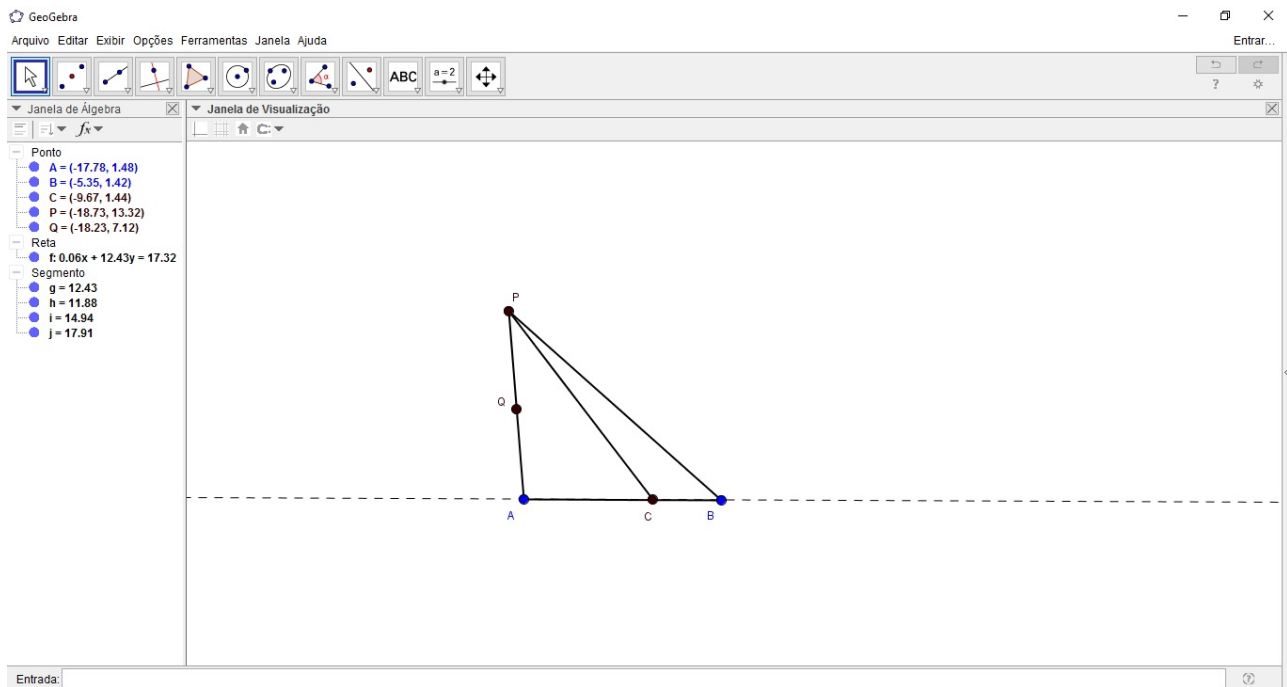
Nesta seção, vamos mostrar como construir o Círculo de Apolônio utilizando uma importante ferramenta computacional: o *software* GeoGebra.

Note, inicialmente, que essa construção se trata de uma aplicação da construção das quádruplas harmônicas. Vejamos os passos necessários para a construção do Círculo de Apolônio:

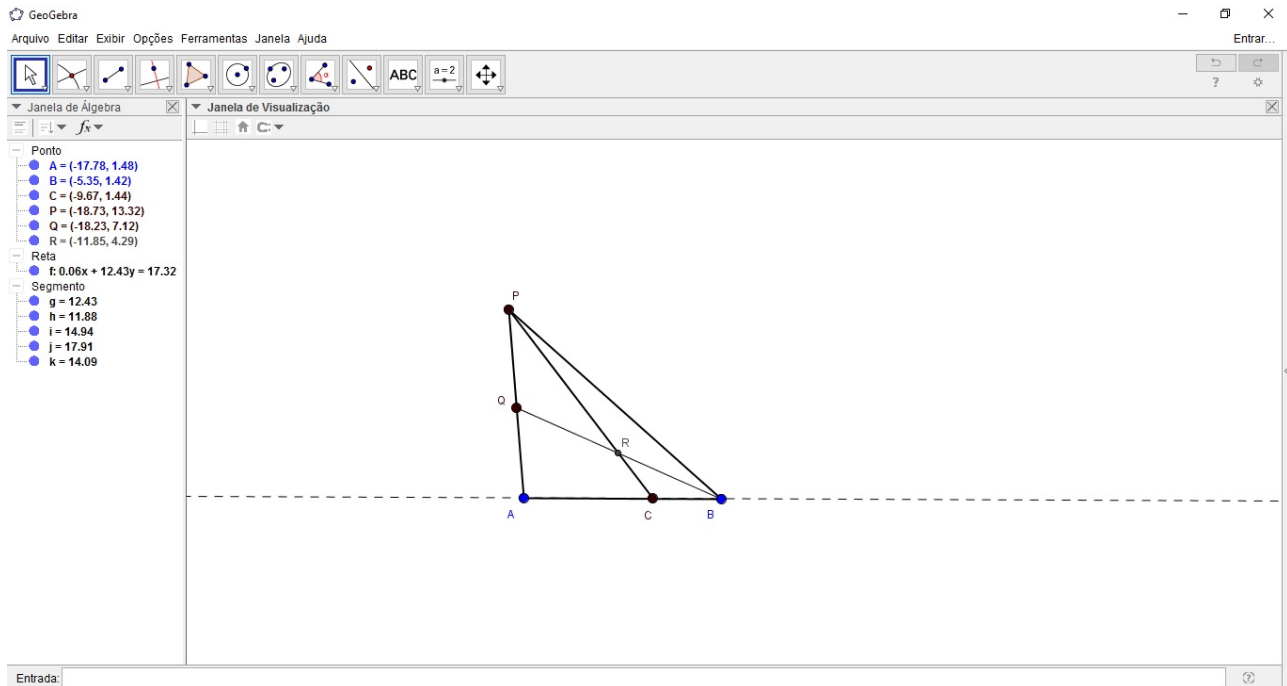
1. Com o programa aberto na *janela de visualização*, trace uma reta  $\overleftrightarrow{AB}$  e um ponto  $P$  fora dela. Em seguida, trace um ponto  $C$  contido no segmento  $AB$  de forma que  $AC \neq BC$ .



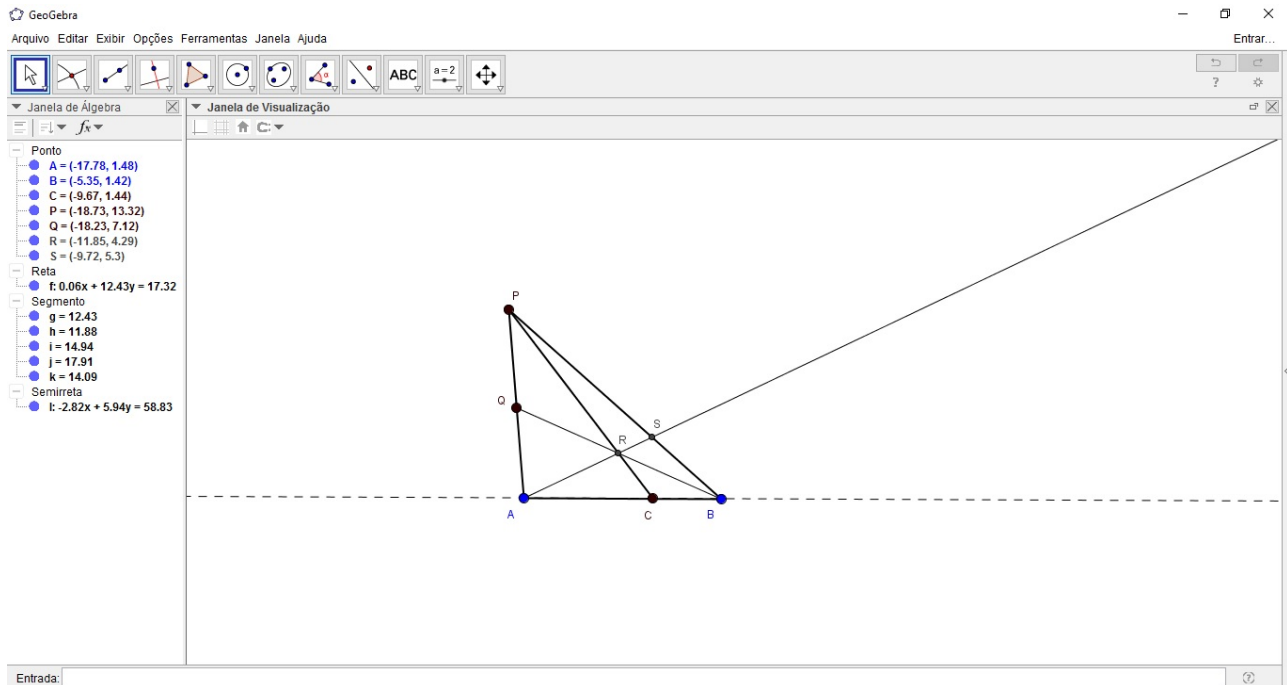
2. Trace os segmentos  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  e, um ponto  $Q$  arbitrário sobre o segmento  $PA$ .



3. Trace o segmento  $BQ$  e marque sua interseção  $R$  com o segmento  $PC$ .

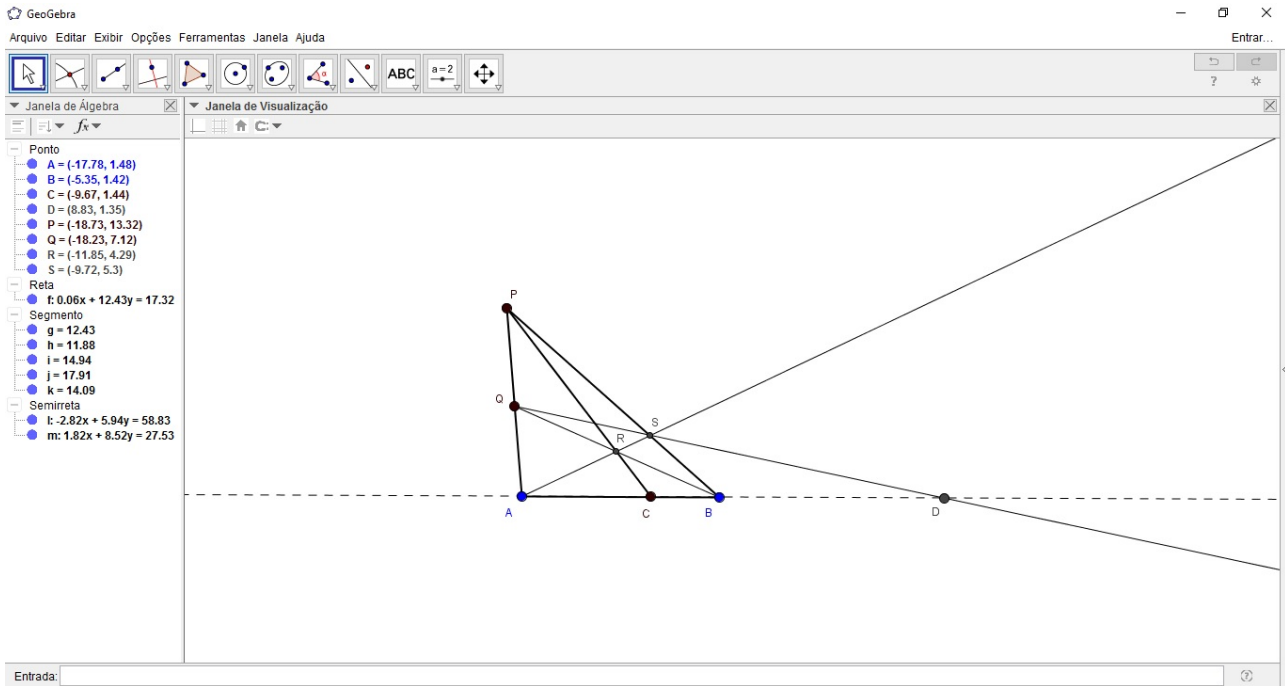


4. Trace a semirreta  $S_{AR}$  e marque sua interseção  $S$  com o segmento  $PB$ .

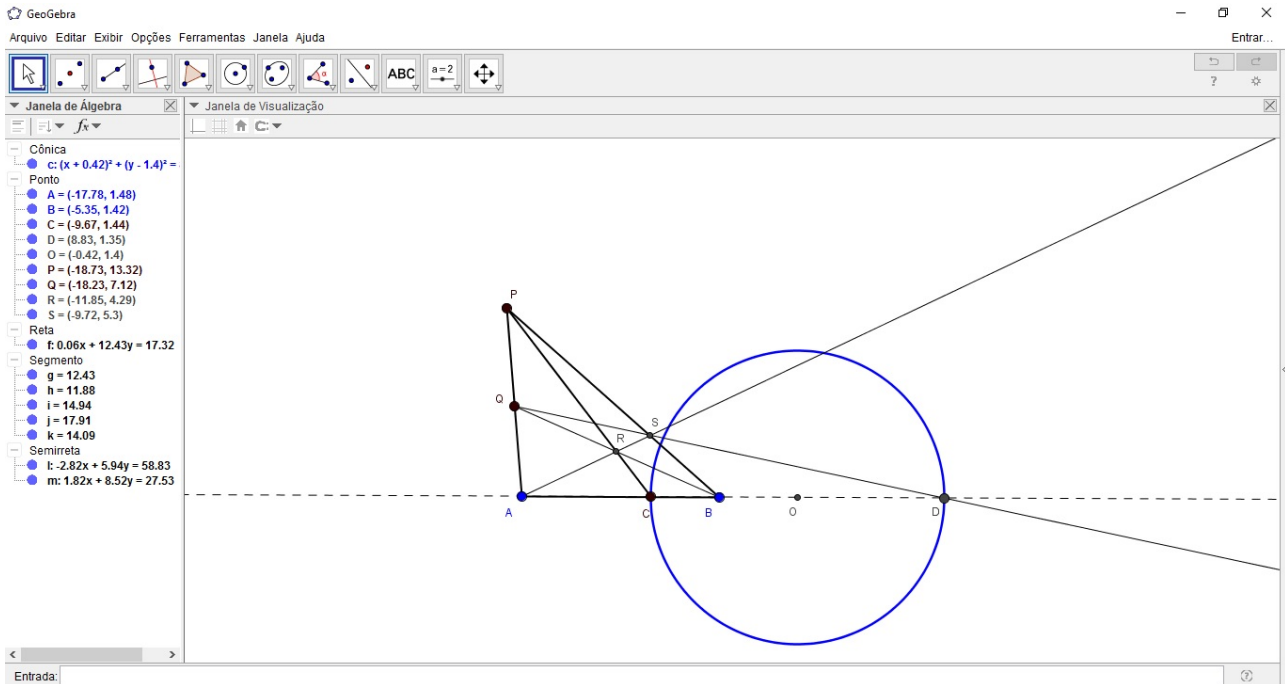


5. Trace a semirreta  $S_{QS}$  e marque sua interseção  $D$  com a reta  $\overleftrightarrow{AB}$ .

*Observação:* Nesta fase, determinamos  $C$  e  $D$  como conjugados harmônicos de  $AB$ .



6. Marque o ponto médio  $O$  do segmento  $CD$  e trace a circunferência com centro em  $O$  e raio  $OC$



7. Por fim, para deixarmos a construção mais limpa, pode-se ocultar os pontos, segmentos e semirretas que serviram de suporte, mas que deixam a figura com informações em excesso.

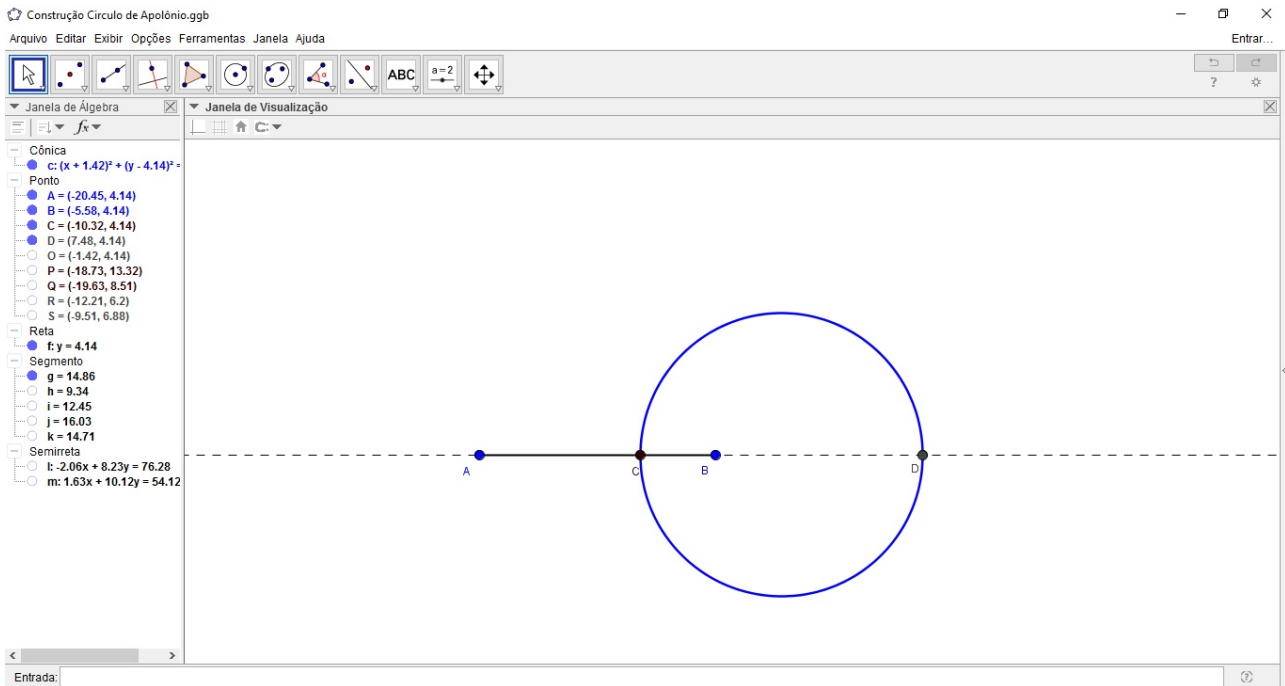


Figura 2.17: Construção do Círculo de Apolônio no GeoGebra

### 2.3.5 Círculo de Apolônio e inversão de pontos

Nesta seção, vamos observar o que é e como se dá a inversão de pontos no Círculo de Apolônio. Inicialmente, vamos definir o que é inversão de pontos numa circunferência.

**Definição 2.3.2.** *Uma inversão em relação a uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  é uma função que associa a cada ponto  $P$  (distinto de  $O$ ), do plano definido por  $\Gamma$ , o ponto  $Q$  da semirreta  $S_{OP}$  tal que*

$$\frac{OQ}{r} = \frac{r}{OP}. \quad (2.2)$$

Neste caso, dizemos que  $P$  e  $Q$  são inversos em relação a  $\Gamma$ . Essa aplicação também é conhecida como *inversão de polo  $O$  e potência  $r^2$*  [7] e [12].

**Notação:** A seguir,  $\overrightarrow{AB}$  denotará o vetor do plano com ponto inicial  $A$  e ponto final  $B$ , sua

norma é denotada por  $\|\overrightarrow{AB}\|$ . Assim, com estas notações, a fórmula (2.2), torna-se

$$\frac{\|\overrightarrow{OQ}\|}{r} = \frac{r}{\|\overrightarrow{OP}\|}. \quad (2.3)$$

### Fórmula vetorial da inversão

Como  $Q \in S_{OP}$ , temos  $\overrightarrow{OQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}$ , no qual  $\lambda \in \mathbb{R}^+$ . Vamos encontrar o valor de  $\lambda$ .

Temos,

$$\overrightarrow{OQ} = \lambda \cdot \overrightarrow{OP}, (\lambda \in \mathbb{R}^+) \implies \|\overrightarrow{OQ}\| = \lambda \|\overrightarrow{OP}\| \implies \lambda = \frac{\|\overrightarrow{OQ}\|}{\|\overrightarrow{OP}\|}.$$

Assim, de (2.3), obtemos

$$\lambda = \frac{\|\overrightarrow{OQ}\|}{\|\overrightarrow{OP}\|} = \frac{r^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \quad (2.4)$$

Portanto, a fórmula vetorial que define a inversão em relação a uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  é

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{r^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP}, \quad \text{ou} \quad Q = O + \frac{r^2}{\|\overrightarrow{OP}\|^2} \overrightarrow{OP}. \quad (2.5)$$

### A inversão em coordenadas

Caso  $O = (x_0, y_0)$ ,  $P = (x, y)$  e  $Q = (x', y')$ , segue que

$$(x', y') = (x_0, y_0) + \frac{r^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (x - x_0, y - y_0)$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{cases} x' = x'(x, y) = x_0 + \frac{r^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (x - x_0, y - y_0) \\ y' = y'(x, y) = y_0 + \frac{r^2}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} (x - x_0, y - y_0) \end{cases}$$

**Observação 2.3.3.** *O inverso do polo de inversão  $O$  não está definido. A inversão é assim uma função de um plano furado em si próprio.*

**Observação 2.3.4.** *Os pontos sobre  $\Gamma$  são pontos fixos da função inversão.*

De fato,  $P \in \Gamma \iff \|\vec{OP}\| = r$ . Assim,

$$\vec{OQ} = \frac{r^2}{\|\vec{OP}\|^2} \vec{OP} = \frac{r^2}{r^2} \vec{OP} = \vec{OP} \implies Q = P.$$

**Observação 2.3.5.** Se  $\|\vec{OP}\| < r$ , então  $\|\vec{OQ}\| > r$ . Isto é, a inversão leva pontos do interior da circunferência  $\Gamma$  para o exterior de  $\Gamma$ .

De fato, de (2.5), segue que

$$\vec{OQ} = \frac{r^2}{\|\vec{OP}\|^2} \vec{OP} = \frac{r}{\|\vec{OP}\|} \cdot r > r.$$

**Observação 2.3.6.** Se  $\|\vec{OP}\| > r$ , então  $\|\vec{OQ}\| < r$ . Isto é, a inversão leva pontos do exterior da circunferência  $\Gamma$  para o interior de  $\Gamma$ .

De fato, de (2.5), segue que

$$\vec{OQ} = \frac{r^2}{\|\vec{OP}\|^2} \vec{OP} = \frac{r}{\|\vec{OP}\|} \cdot r < r.$$

**Exemplo 2.3.7.** A função que determina o inverso de um ponto numa circunferência  $\Gamma$  com raio  $r = 2$  e origem  $O = (0, 0)$  é:

$$(x', y') = (0, 0) + \frac{2^2}{x^2 + y^2} (x - 0, y - 0) = \frac{4}{x^2 + y^2} (x, y)$$

### Construção com régua e compasso do inverso de um ponto numa circunferência

Vejamos como construir com régua e compasso o inverso de um ponto numa circunferência.

I. O ponto  $P$  pertence ao interior de  $\Gamma$ .

- 1) Construir  $\Gamma(O, r)$ ;
- 2) Marcar o ponto  $P$  no interior de  $\Gamma$ ;
- 3) Traçar a semirreta  $S_{OP}$ ;
- 4) Traçar a perpendicular à semirreta  $S_{OP}$ , que passa por  $P$ ;
- 5) Determinar uma das interseções  $T$  dessa perpendicular com  $\Gamma$ ;



- 6) Traçar tangente a  $\Gamma$ , passando por  $T$  (basta traçar perpendicular a  $OT$  que passa por  $P$ );
- 7) Marque o ponto  $Q$  de interseção da tangente com a semirreta  $S_{OP}$

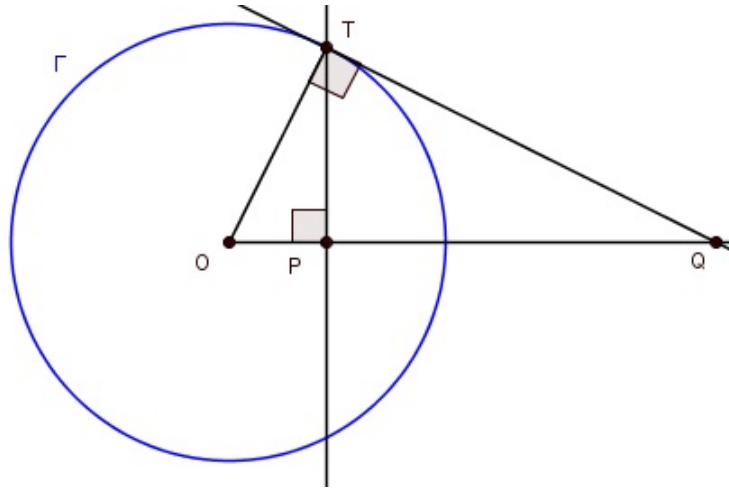


Figura 2.18: Inversão de pontos ( $P$  interno à circunferência)

Note que, por construção  $Q \in S_{OP}$ .

Pelo critério de semelhança AA, temos que o triângulo  $POT$  é semelhante ao triângulo  $QOT$ , e portanto,

$$\frac{OT}{OP} = \frac{OQ}{OT}.$$

Ou seja,

$$OP \cdot OQ = OT^2.$$

Mas, como  $OT = r$ , logo

$$OP \cdot OQ = r^2.$$

Note que isto é uma relação métrica no triângulo retângulo: “cateto é a média geométrica entre a hipotenusa e sua projeção sobre ela”.

*Observações:*

- Enquanto  $P$  se mantém no interior de  $\Gamma$ ,  $Q$  está sempre no exterior de  $\Gamma$ ;
- Quanto mais próximo está  $P$  da circunferência  $\Gamma$ , mais próximo  $Q$  está da mesma;
- Se colocarmos  $P$  sobre  $\Gamma$ , então  $Q$  e  $P$  serão coincidentes;
- Quando  $P$  tende para o centro  $O$  de  $\Gamma$ ,  $Q$  se afasta de  $O$  indefinidamente.

II. O ponto  $P$  pertence ao exterior de  $\Gamma$ .

- 1) Construir  $\Gamma(O, r)$ ;
- 2) Marcar o ponto  $P$  no exterior de  $\Gamma$ ;
- 3) Traçar a tangente a  $\Gamma$  por  $P$ :
  - i) Construir o segmento  $OP$ ;
  - ii) Marcar  $M$  como o ponto médio de  $OP$ ;
  - iii) Construir a circunferência  $C(M, MP)$ ;
  - iv) Marcar  $T$  como uma das interseções de  $C$  com  $\Gamma$ ;
- 4) Traçar a perpendicular ao segmento  $OP$ , que passa por  $T$ ;
- 5) Marque o ponto  $Q$  de interseção da tangente com o segmento  $OP$ .

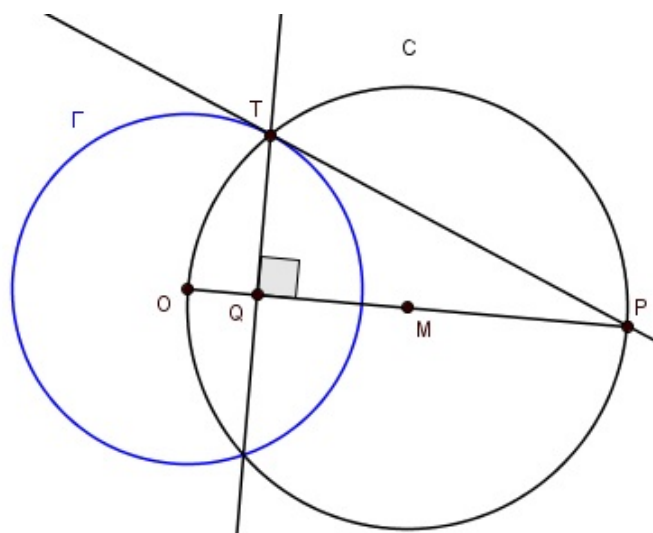


Figura 2.19: Inversão de pontos ( $P$  externo à circunferência)

O ponto  $Q$  é inverso ao ponto  $P$  e sua demonstração é de forma análoga à anterior.

**Proposição 2.3.8.** *Numa circunferência, os pontos inversos e os pontos extremos do diâmetro contidos numa mesma reta, formam uma quádrupla harmônica.*

*Demonstração:*

Sabe-se que:

$$OC \cdot OD = r^2.$$

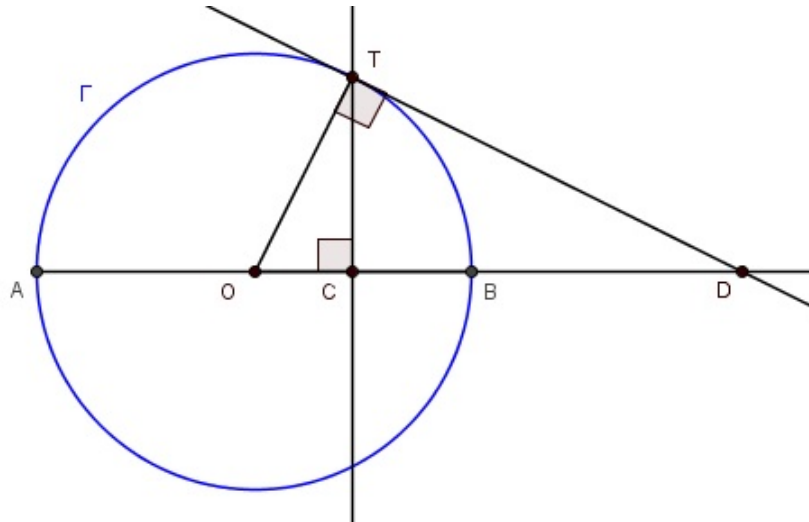


Figura 2.20: Inversão de pontos no Círculo de Apolônio

Daí,

$$\frac{CA}{CB} = \frac{r + OC}{r - OC} = \frac{r + \frac{r^2}{OD}}{r - \frac{r^2}{OD}} = \frac{OD + r}{OD - r} = \frac{DA}{DB}.$$

■

### 2.3.6 Círculo de Apolônio no plano complexo

**Proposição 2.3.9.** *Dados  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , sejam  $A$  e  $B$  os pontos do plano que correspondam a  $z_1$  e  $z_2$ , respectivamente. O conjunto dos pontos  $z \in \mathbb{C}$ , tais que*

$$|z - z_1| = a|z - z_2|$$

é:

(i) *A mediatriz do segmento  $AB$ , se  $a = 1$ ;*

(ii) *Um Círculo de Apolônio, se  $1 \neq a > 0$ .*

*Demonstração:*

$$\begin{aligned} \frac{PA}{PB} = a &\iff PA = a \cdot PB \\ &\iff PA^2 = a^2 \cdot PB^2 \\ &\iff |z - z_1|^2 = a^2 |z - z_2|^2 \end{aligned}$$

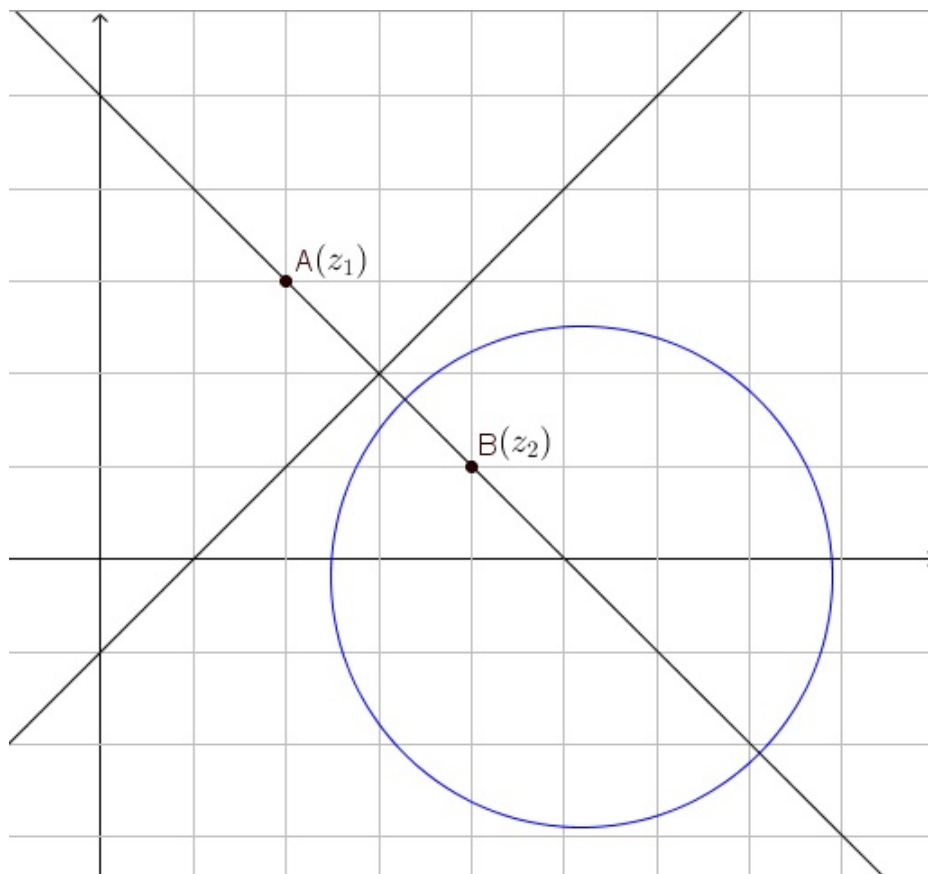


Figura 2.21: Círculo de Apolônio no plano complexo

Logo, de forma análoga a demonstração analítica do Círculo de Apolônio (2.3.1), obtemos o raio da circunferência é dado por:

$$r = \left| \frac{a \cdot AB}{a^2 - 1} \right|.$$

■

# Capítulo 3

## Esfera de Apolônio

Sabe-se, pelo teorema (2.3.1) que, dados dois pontos distintos  $A$  e  $B$  e o número real  $0 < k \neq 1$ , o LG dos pontos  $P$  do plano tais que

$$\frac{PA}{PB} = k.$$

é uma circunferência cujo diâmetro são os divisores harmônicos na razão  $k$ ; tal lugar é denominado círculo de Apolônio de  $A$  e  $B$ . Se procurarmos o LG dos pontos  $P$  do espaço com tal configuração, este será uma esfera.

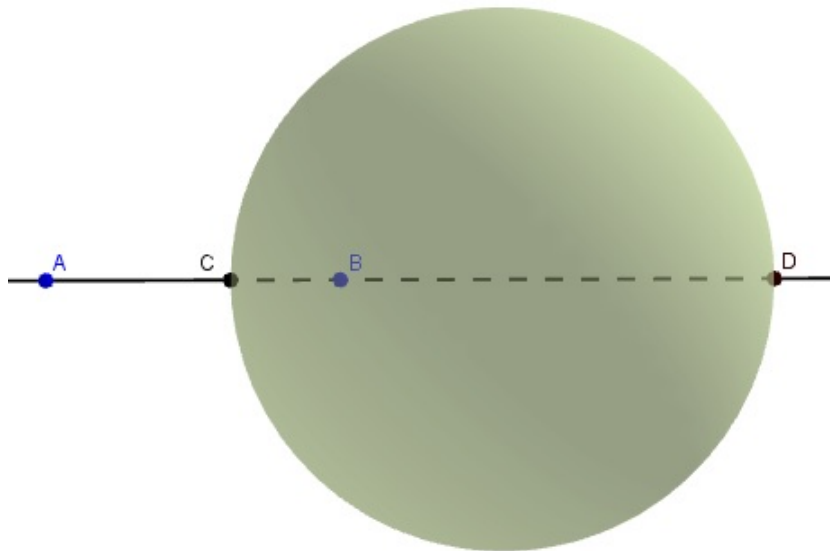


Figura 3.1: Esfera de Apolônio

**Teorema 3.0.1.** *Dado um segmento  $AB$  no espaço, chamamos de Esfera de Apolônio o LG dos pontos  $P$  do espaço, tais que*

$$\frac{PA}{PB} = k$$

*com  $k \neq 1$ . Esse LG é uma esfera  $\Sigma$  de diâmetro  $CD$  onde  $C$  e  $D$  são os conjugados harmônicos em relação a  $AB$  na razão  $k$ .*

### 3.1 Demonstração analítica da Esfera de Apolônio

Sejam  $A$ ,  $B$  e  $P$  pontos do espaço e  $\Sigma$  uma esfera. Queremos provar, de forma análoga à demonstração feita na seção (2.3.1), que

$$P = (x; y; z) \in \text{LG} \iff P \in \Sigma.$$

O LG em questão é tal que  $\frac{PA}{PB} = k$ .

*Demonstração:*

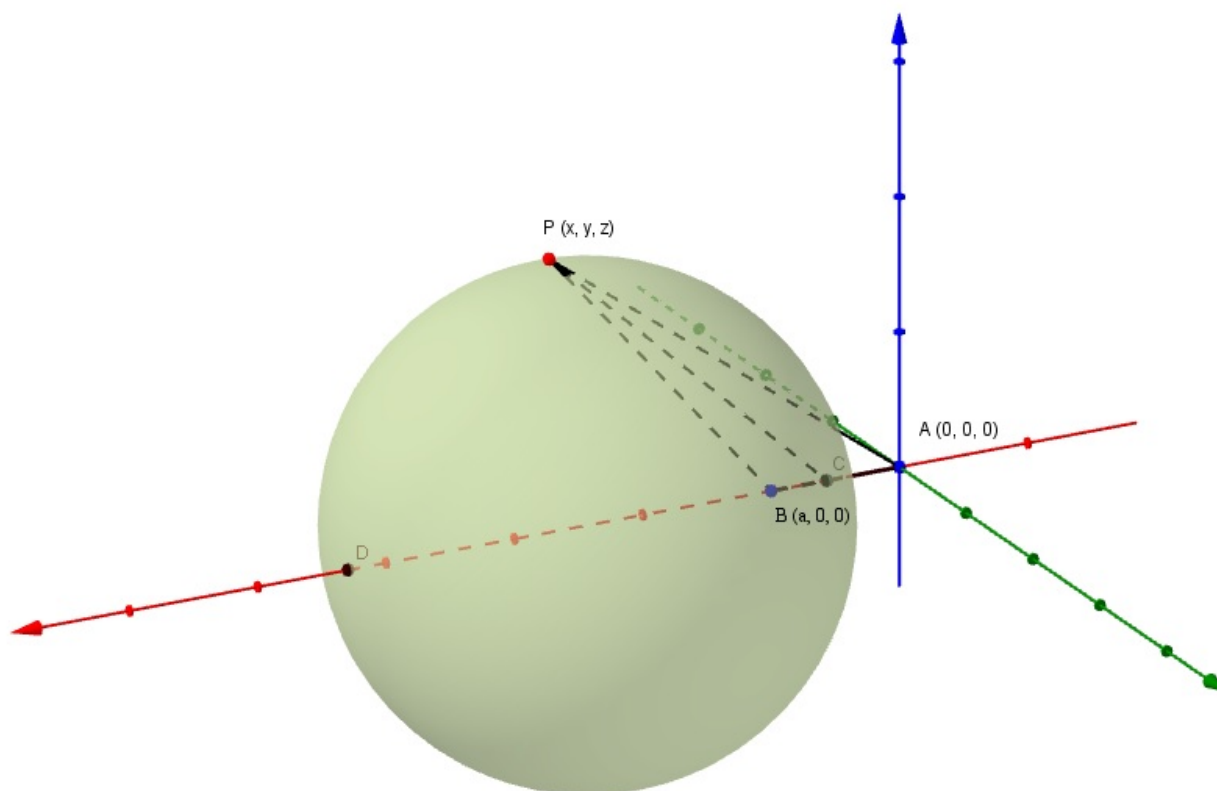


Figura 3.2: Esfera de Apolônio, demonstração analítica

Considere, sem perda de generalidade,  $A = (0; 0; 0)$  e  $B = (a; 0; 0)$  e  $P = (x; y; z)$  pertencente ao LG. Daí:

$$\begin{aligned}
\frac{PA}{PB} = k &\iff PA = k \cdot PB \\
&\iff PA^2 = k^2 \cdot PB^2 \\
&\iff x^2 + y^2 + z^2 = k^2[(x - a)^2 + y^2 + z^2] \\
&\iff x^2 + y^2 + z^2 = k^2(x^2 - 2ax + a^2 + y^2 + z^2) \\
&\iff x^2(k^2 - 1) - 2ak^2x + a^2k^2 + y^2(k^2 - 1) + z^2(k^2 - 1) = 0 \\
&\iff x^2 - \frac{2ak^2}{k^2 - 1}x + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} + y^2 + z^2 = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 - \left(\frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} + y^2 + z^2 = 0 \\
&\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2k^4}{(k^2 - 1)^2} - \frac{a^2k^2}{k^2 - 1} \\
&\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = a^2k^2 \left(\frac{k^2}{(k^2 - 1)^2} - \frac{k^2 - 1}{(k^2 - 1)^2}\right) \\
&\iff \left(x - \frac{ak^2}{k^2 - 1}\right)^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{ak}{k^2 - 1}\right)^2
\end{aligned}$$

Ou seja, o LG é a esfera  $\Sigma$  de centro  $\left(-\frac{ak^2}{k^2 - 1}; 0; 0\right)$  e raio  $\left|\frac{ak}{k^2 - 1}\right|$ . Neste caso, o centro da esfera pertence à reta  $AB : y = 0$ , no entanto, está em função da razão  $k$  e do comprimento  $a = AB$ .

■

### 3.2 Demonstração euclidiana da Esfera de Apolônio

Podemos tomar qualquer plano do espaço que contenha  $\overleftrightarrow{AB}$  e este irá dividir a esfera em duas partes iguais.

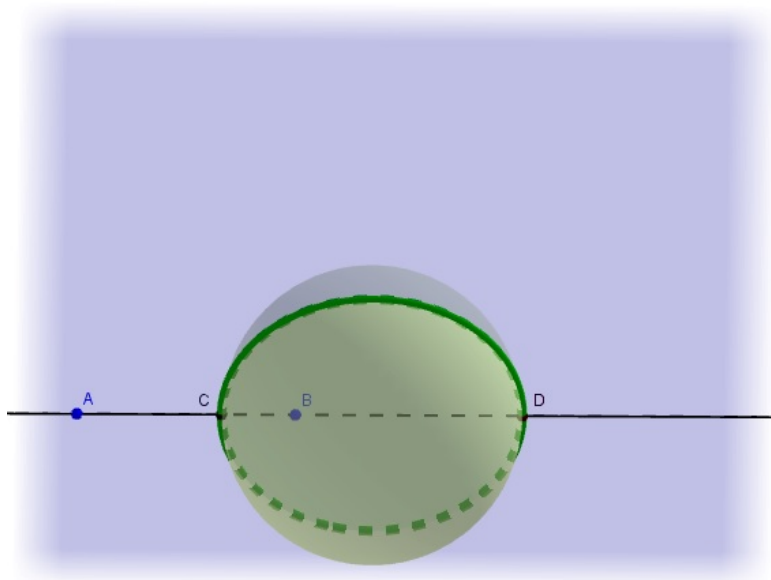


Figura 3.3: Seção de uma Esfera de Apolônio

A interseção entre o plano traçado e a esfera é o Círculo de Apolônio no mesmo segmento e razão da esfera.

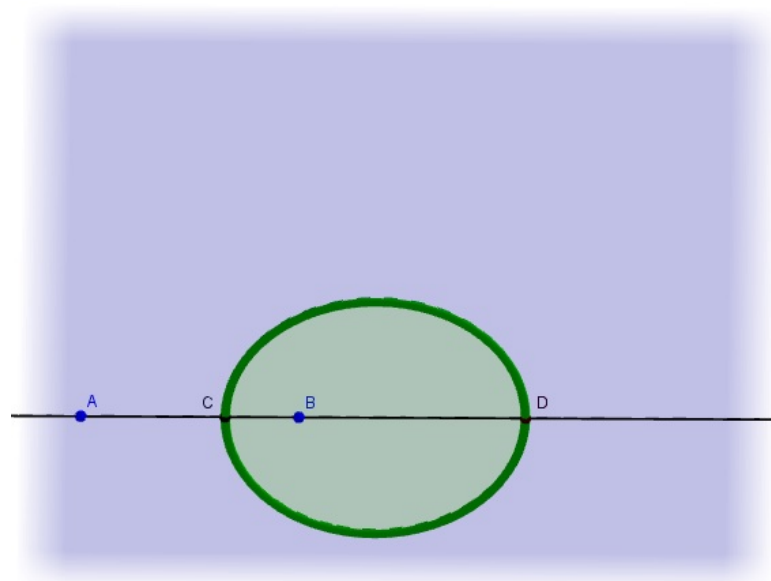


Figura 3.4: Círculo de Apolônio a partir de uma seção da Esfera de Apolônio



Daí, como podemos traçar um plano contendo  $\overleftrightarrow{AB}$  por qualquer ponto da superfície esférica, a demonstração se resume à mesma do Círculo de Apolônio.

■

**Observação 3.2.1.** *A Esfera de Apolônio também pode ser obtida através da rotação do Círculo de Apolônio correspondente em torno de  $\overleftrightarrow{AB}$ .*

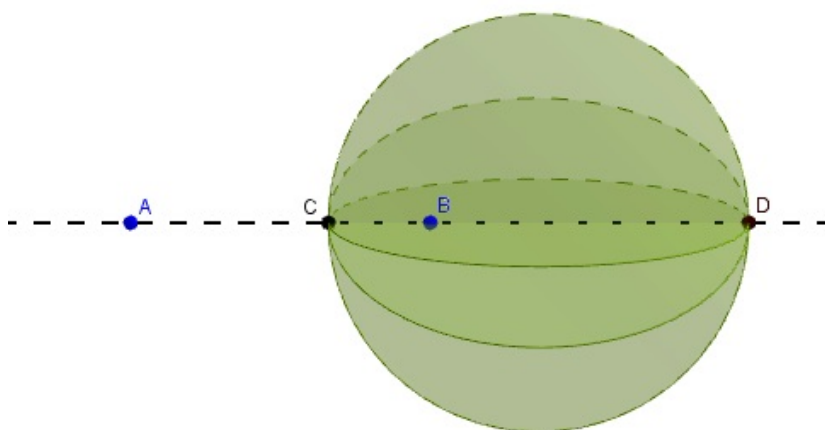


Figura 3.5: Círculo de Apolônio rotacionado em torno do eixo  $\overleftrightarrow{AB}$

### 3.3 Posições relativas da Esfera de Apolônio e do segmento

Assim como fizemos com o Círculo de Apolônio, vamos trazer uma sequência de figuras que mostra como a Esfera de Apolônio se comporta em função da razão  $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$  com  $C$  e  $D$  dividindo o segmento  $AB$  interiormente e exteriormente, respectivamente, e  $M$  sendo o ponto médio de  $AB$ .

Na figura (3.6), com  $k$  muito próximo de zero, a esfera tende a ser muito pequena e em torno de  $A$ .

Na figura (3.7), os pontos  $C$  e  $D$  se distanciam de  $A$  e a esfera fica mais visível.

Na figura (3.8), com  $k$  muito próximo de um, a esfera tende a ser muito grande. Quanto

mais  $C$  for próximo do ponto médio  $M$ , maior será a esfera e  $D$  se afastará de  $A$ . Caso  $C$  e  $M$  coincidam, a esfera se degenera no plano mediador de  $AB$ .

Na figura (3.9) com  $k$  muito próximo de um, é um caso semelhante ao anterior, mas refletido em relação ao plano mediador.

Na figura (3.10), os pontos  $C$  e  $D$  se distanciam de  $B$  e, na medida em que  $k$  cresce, o raio da esfera diminui.

Por fim, na figura (3.11), com  $k$  tendendo ao infinito, a esfera tende a ser muito pequena e em torno de  $B$ .

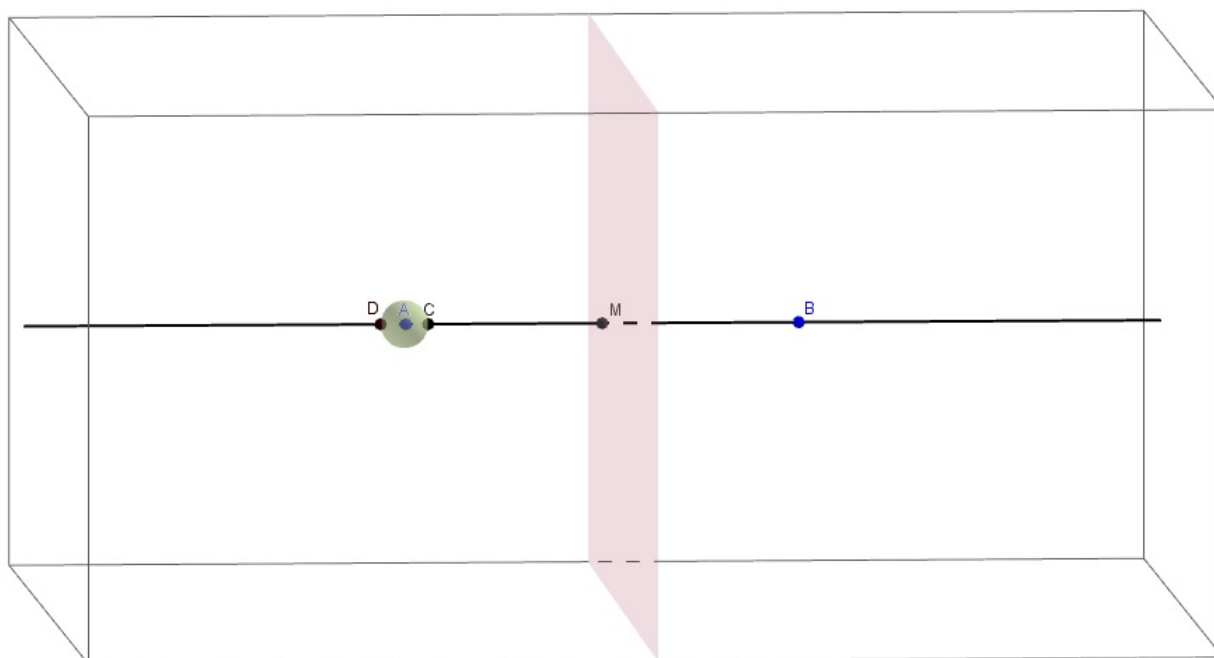


Figura 3.6: Esfera de Apolônio com  $k \approx 0$

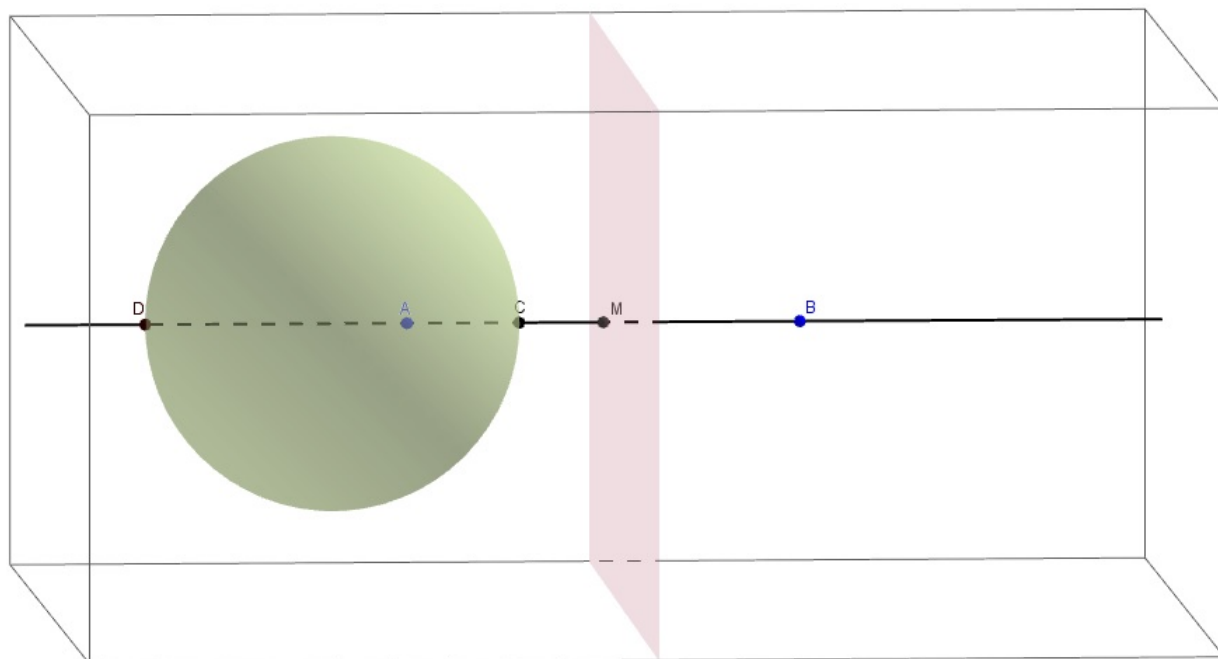


Figura 3.7: Esfera de Apolônio com  $k \approx 0,5$

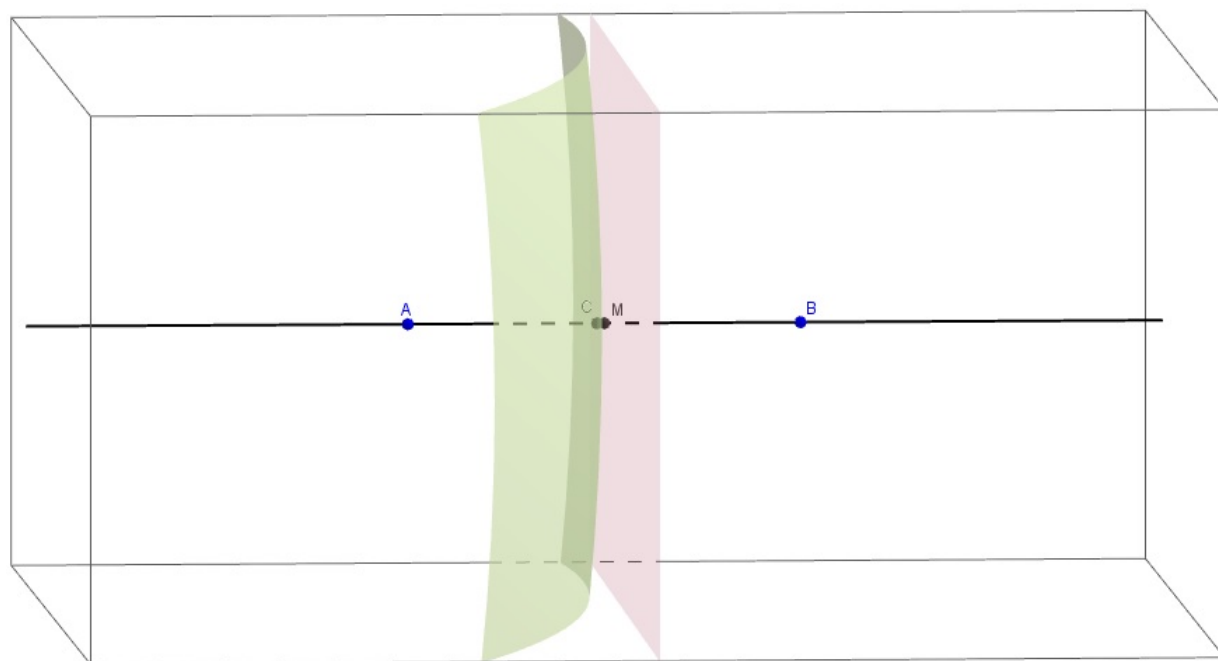


Figura 3.8: Esfera de Apolônio com  $0 < k < 1$  e  $k \approx 1$

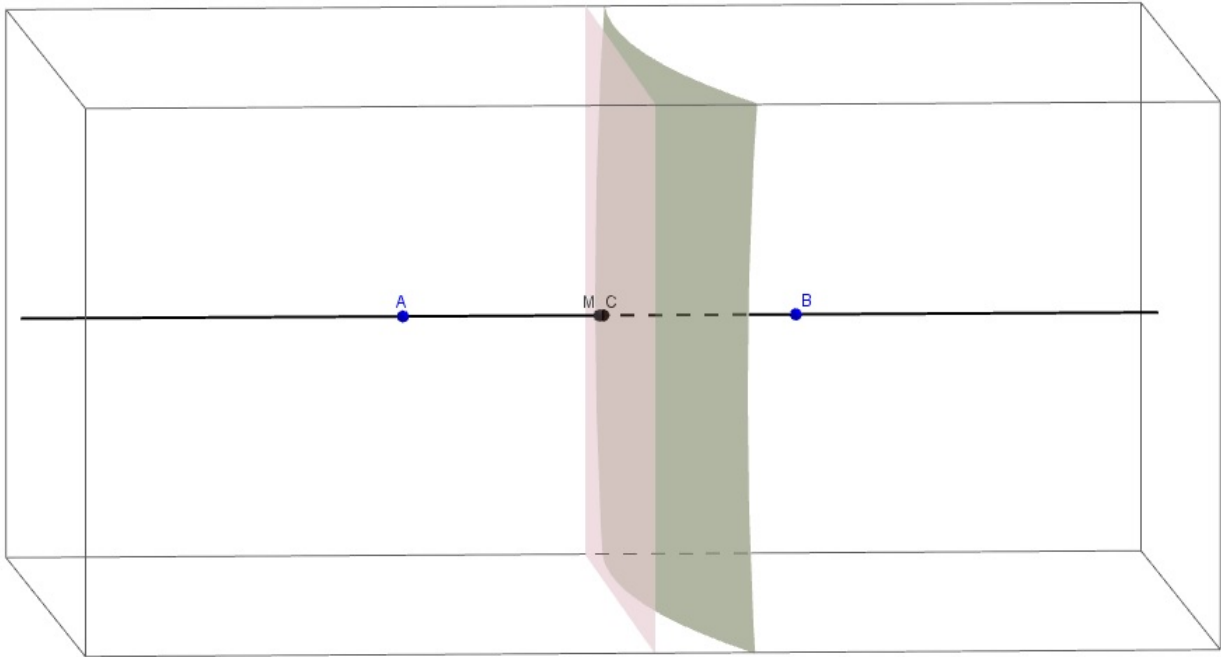


Figura 3.9: Esfera de Apolônio com  $k > 1$  e  $k \approx 1$

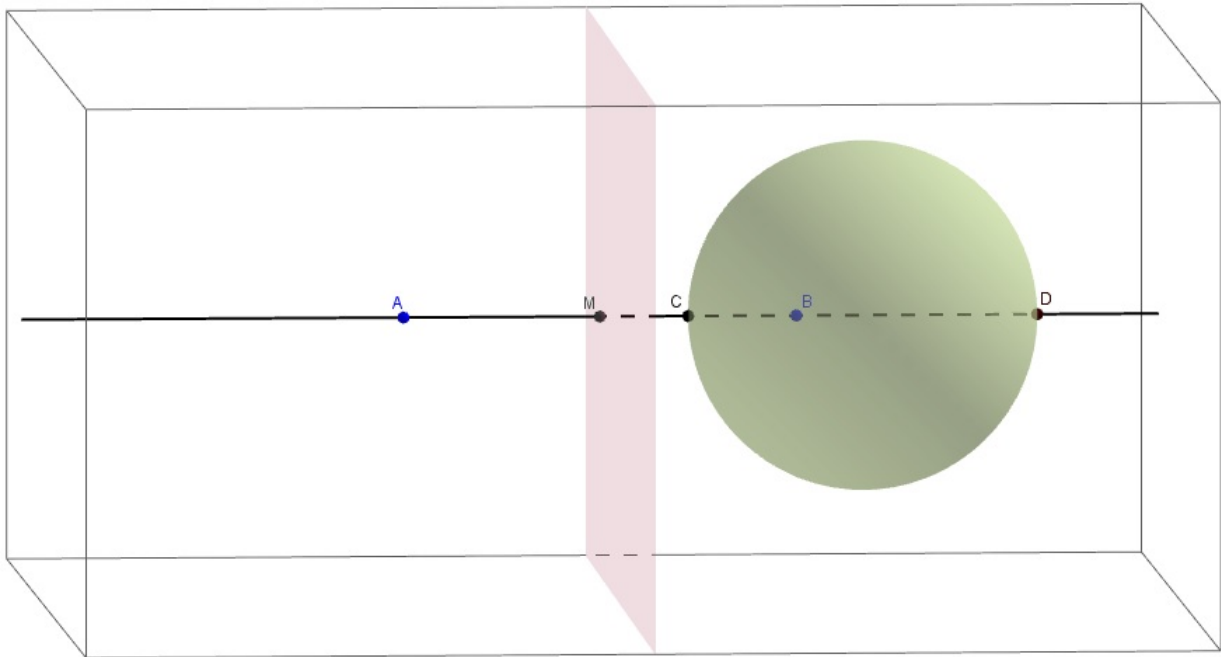


Figura 3.10: Esfera de Apolônio com  $k > 1$

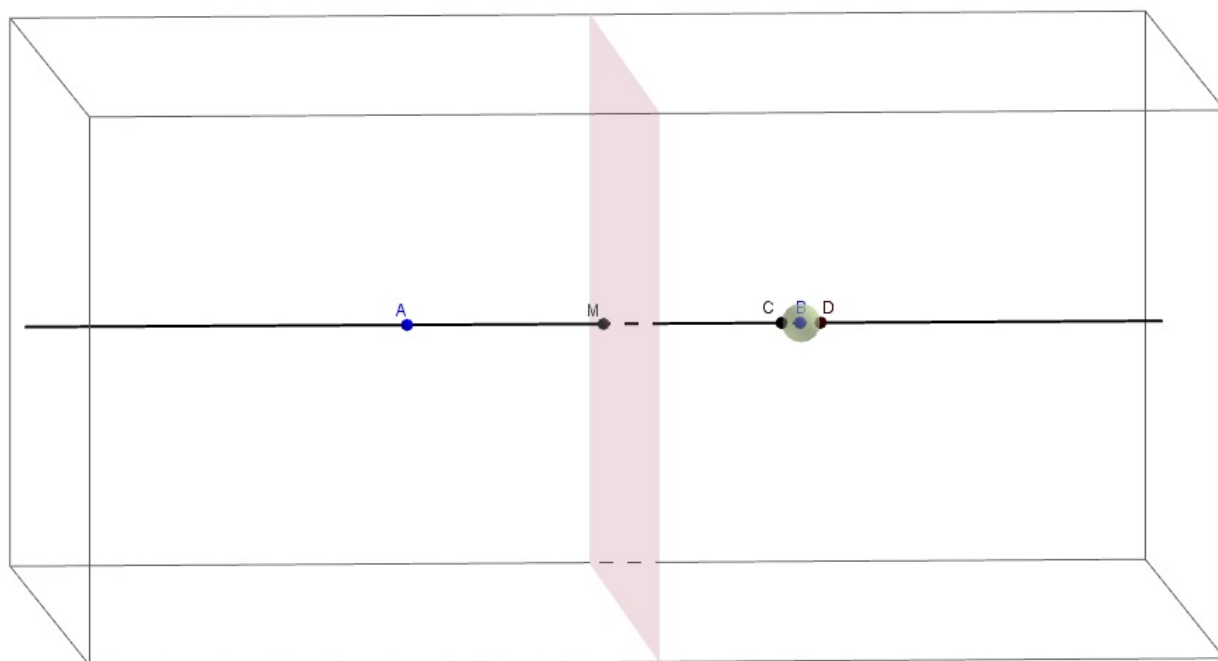


Figura 3.11: Esfera de Apolônio com  $k \rightarrow +\infty$

# Capítulo 4

## Problemas e exercícios

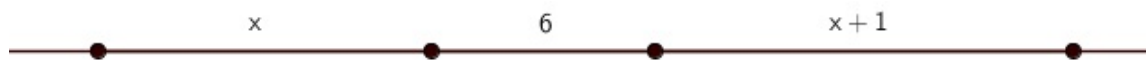
### 4.1 Exercícios propostos

1. Se  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos de uma reta ( $B$  entre  $A$  e  $C$ ), sendo  $AC = 24$  e  $BA = 5BC$ , então  $BC$  mede:  
A) 3;  
B) 4;  
C) 5;  
D) 6;  
E) NRA.
2. Um segmento  $AB$  é tal que  $3AB = 4CD$ . Qual a medida de  $CD$  se tomarmos como unidade  $\frac{2}{5}$  de  $AB$ ?  
A)  $\frac{3}{10}$ ;  
B)  $\frac{10}{3}$ ;  
C)  $\frac{8}{15}$ ;  
D)  $\frac{15}{8}$ ;  
E) NRA.

3. Um segmento  $AB$  é igual a 5 vezes um segmento  $CD$ . Qual a razão entre  $\frac{3}{2}AB$  e  $4CD$ ?
- A) 6;
  - B)  $\frac{3}{8}$ ;
  - C)  $\frac{15}{2}$ ;
  - D)  $\frac{15}{8}$ ;
  - E) NRA.
4. Qual a razão entre  $\frac{5}{4}AB$  e  $\frac{2}{3}CD$ ?
- A)  $\frac{15}{8}$ ;
  - B)  $\frac{25}{8}$ ;
  - C)  $\frac{75}{8}$ ;
  - D)  $\frac{16}{25}$ ;
  - E) NRA.
5. Se  $AB = \frac{2}{3}CD$  e  $CD = \frac{4}{5}MN$ ,  $\frac{AB}{MN}$  é igual a:
- A)  $\frac{8}{15}$ ;
  - B)  $\frac{15}{8}$ ;
  - C)  $\frac{5}{6}$ ;
  - D)  $\frac{6}{5}$ ;
  - E) NRA.
6. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  nesta ordem sobre uma reta tais que  $AB = 12$  e  $BC = 3$ . Seja  $D$  o conjugado harmônico de  $B$  em relação ao segmento  $AO$ , então  $BD$  mede:
- A) 5;
  - B) 6;
  - C) 8;

- D) 12;  
E) NRA.

7. Determine  $x$  para que os pontos abaixo formem uma divisão harmônica.



- A) 8;  
B) 10;  
C) 11;  
D) 12;  
E) 14.

8. Considerando a figura abaixo, podemos afirmar que os 4 pontos:

- A) nunca formarão uma divisão harmônica;  
B) sempre formarão uma divisão harmônica qualquer que seja;  
C) formarão uma divisão harmônica se  $x > 0$ ;  
D) só formarão uma divisão harmônica se  $x$  for par;  
E) NRA.



9. Os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $B$  e  $N$  de uma reta formam uma divisão harmônica de razão  $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{3}$ .  
Se  $AB = 40$ ,  $MN$  mede:

- A) 24;  
B) 38;  
C) 40;  
D) 42;  
E) NRA.



10. Os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $B$  e  $N$  de uma reta formam uma divisão harmônica. Se  $AB = 7$ ,  $MN = 24$ , a razão  $\frac{MA}{MB}$  é igual a:
- A) 2;
  - B)  $\frac{3}{2}$ ;
  - C)  $\frac{4}{3}$ ;
  - D)  $\frac{5}{3}$ ;
  - E) NRA.
11. Considere em um círculo de centro  $O$  um diâmetro  $AB$ . Prolongue uma corda  $AP$  qualquer do círculo de um comprimento  $PQ = AP$ .  $QO$  e  $BP$  cortam-se em  $J$ . Calcule a razão  $\frac{JQ}{JO}$ .
- A) 3;
  - B)  $\frac{3}{2}$ ;
  - C) 2;
  - D)  $\frac{5}{3}$ ;
  - E) NRA.
12. Os pontos  $P$  e  $Q$  pertencem ao interior do segmento  $AB$  e estão de um mesmo lado de seu ponto médio.  $P$  divide  $AB$  na razão  $\frac{2}{3}$  e  $Q$  divide  $AB$  na razão  $\frac{3}{4}$ . Se  $PQ = 2$ ,  $AB$  mede:
- A) 50;
  - B) 60;
  - C) 70;
  - D) 80;
  - E) 90.
13. Em um triângulo  $ABC$ , de lados  $AB = 12$ ,  $AC = 8$  e  $BC = 10$ , o maior segmento que a bissetriz interna de  $\hat{A}$  determina sobre  $BC$  é:
- A) 4;
  - B) 5,5;

C) 6;

D) 7,5;

E) NRA.

14. Os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $B$  e  $N$  de uma reta formam uma divisão harmônica de razão  $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ . Se  $J$  é o ponto médio de  $MN$ , a razão  $\frac{JA}{JB}$  vale:

A)  $k$ ;

B)  $2k$ ;

C)  $k^2$ ;

D)  $k^2 - 1$ ;

E) NRA.

15. Em um triângulo  $ABC$ , de lados  $AB = 15$ ,  $AC = 6$  e  $BC = 14$ , seja  $I$  o ponto de concurso das bissetrizes internas de  $AD$  e  $BE$ , a razão  $\frac{IA}{ID}$  vale:

A)  $\frac{2}{3}$ ;

B)  $\frac{3}{2}$ ;

C)  $\frac{2}{7}$ ;

D)  $\frac{7}{3}$ ;

E) NRA.

16. Em um triângulo  $ABC$ , de lados  $AB = 15$ ,  $AC = 6$  e  $BC = 14$ , seja  $I$  o ponto de concurso das bissetrizes internas de  $AD$  e  $BE$ , a razão  $\frac{IE}{IB}$  vale:

A)  $\frac{6}{29}$ ;

B)  $\frac{29}{6}$ ;

C)  $\frac{1}{6}$ ;

D) 6;

E) NRA.

17. Em um triângulo  $ABC$ , de lados  $AB = 12$ ,  $AC = 8$  e  $BC = 10$ , a bissetriz interna de  $\hat{B}$  encontra a bissetriz  $AN$  externa de  $\hat{A}$  no ponto  $F$ . A razão  $\frac{FN}{FA}$  vale:

A)  $\frac{3}{2}$ ;

B)  $\frac{4}{3}$ ;

C)  $\frac{5}{2}$ ;

D)  $\frac{5}{3}$ ;

E) NRA.

18. Em um triângulo  $ABC$ ,  $BC = a$  e  $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$ , calcule o comprimento da altura relativa ao lado  $a$  sabendo que ela é máxima.

A)  $h_a = a$ ;

B)  $h_a = \frac{3}{2}a$ ;

C)  $h_a = \frac{5}{4}a$ ;

D)  $h_a = \frac{5}{3}a$ ;

E)  $h_a = \frac{6}{5}a$ ;

19. Em um triângulo  $ABC$ ,  $BC = 16$  e  $h_a = 8$ , calcule a razão  $\frac{AB}{AC}$  sabendo que ela é máxima.

A) 2;

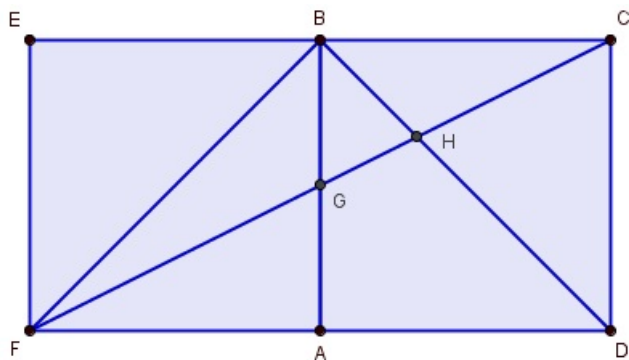
B) 3;

C)  $\frac{3}{2}$ ;

D)  $\frac{4}{3}$ ;

E) NRA.

20. Considere os quadrados  $ABCD$  e  $ABEF$  da figura. Se  $FG = 12$  e  $GH = 4$ , calcule  $HC$ .



- A) 9;
- B) 8;
- C) 6;
- D) 5;
- E) NRA.

21. Seja  $I$  o incentro do triângulo  $ABC$  e  $D$  a interseção de  $AI$  e  $BC$ . Seja  $M$  um ponto qualquer sobre o circuncírculo de  $IBC$ . Prove que a reta  $MI$  bissecta o ângulo  $\angle AMD$ .

## 4.2 Soluções dos exercícios propostos

1. Como  $A$ ,  $B$  e  $C$  são pontos de uma reta e  $B$  entre  $A$  e  $C$ , então:

$$AC = BA + BC.$$

Além disto, sabe-se que  $AC = 24$  e  $BA = 5BC$ . Daí:

$$\begin{aligned} AC = BA + BC &\implies AC = 5BC + BC \\ &\implies 5BC + BC = 24 \\ &\implies 6BC = 24 \\ &\implies BC = 4. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa B

2. Tome o segmento  $AB$ , tal que  $3AB = 4CD$  e como unidade  $\frac{2}{5}$ , tem-se:

$$\begin{aligned} 3AB = 4CD &\implies 3 \cdot \frac{2}{5} = 4CD \\ &\implies \frac{6}{5} = 4CD \\ &\implies CD = \frac{\frac{6}{5}}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa A

3. Como  $AB = 5CD$ , a razão entre  $\frac{3}{2}AB$  e  $4CD$  é dada por:

$$\frac{\frac{3}{2}AB}{4CD} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 5CD}{4CD} \implies \frac{15}{2} = \frac{15}{8}.$$

Resposta: Alternativa D

4. A razão entre  $\frac{5}{4}AB$  e  $\frac{2}{3}CD$  é dada por:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{5}{4}AB}{\frac{2}{3}CD} &\implies \frac{5AB}{4} \cdot \frac{3}{2CD} \\ &\implies \frac{15}{8} \cdot \frac{AB}{CD}. \end{aligned}$$

Como as alternativas não constam exatamente como se deu a resposta, entendemos faltar mais algumas informações no enunciado ou nas próprias alternativas. No entanto, a razão é  $\frac{15}{8}$  em função dos segmentos  $AB$  e  $CD$ .

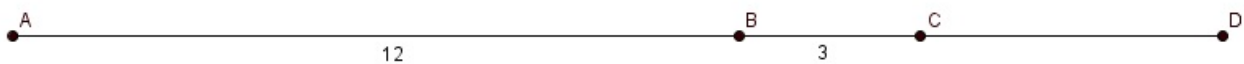
Resposta: Alternativa A

5. Como  $AB = \frac{2}{3}CD$  e  $CD = \frac{4}{5}MN$ , a razão  $\frac{AB}{MN}$  é dada por:

$$\frac{AB}{MN} = \frac{\frac{2}{3}CD}{MN} = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}MN}{MN} = \frac{8}{15}.$$

Resposta: Alternativa A

6.



Como  $D$  é o conjugado harmônico de  $B$ , temos que:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{DA}{DC}.$$

Note que  $DA = DC + AC$  e  $AC = BA + BC = 15$ . Daí,

$$\begin{aligned} \frac{BA}{BC} = \frac{DC + AC}{DC} &\implies \frac{12}{3} = \frac{DC + 15}{DC} \\ &\implies 12DC = 3(DC + 15) \\ &\implies 12DC = 3DC + 45 \\ &\implies 9DC = 45 \\ &\implies DC = 5. \end{aligned}$$

Como  $BD = BC + DC$ , temos que:

$$BD = 3 + 5 = 8.$$

Resposta: Alternativa C

7. Como os pontos destacados formam uma divisão harmônica, tem-se que:

$$\begin{aligned}\frac{x}{6} &= \frac{x+6+x+1}{x+1} \implies \frac{x}{6} = \frac{2x+7}{x+1} \\ &\implies x(x+1) = 6(2x+7) \\ &\implies x^2 + x = 12x + 42 \\ &\implies x^2 - 11x - 42 = 0.\end{aligned}$$

Resolvendo a equação, temos 14 e  $-3$  como soluções. Porém, como  $x$  é um comprimento, não admite um número negativo como solução. Portanto,  $x = 14$ .

Resposta; Alternativa E

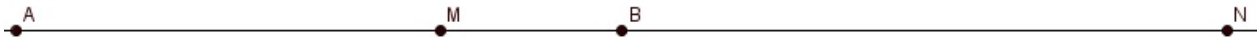
8. Sabe-se que, para que formem uma divisão harmônica, a igualdade a seguir deve ser verdadeira:

$$\frac{2x}{x} = \frac{6x}{3x}.$$

De fato, para qualquer que seja  $x$ , vale a igualdade. Porém, como estamos falando de comprimento, é necessário que  $x > 0$ .

Resposta: Alternativa C

9.



Como os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $B$  e  $N$  formam uma divisão harmônica de razão  $\frac{MA}{MB} = \frac{7}{3}$ , então:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{7}{3}.$$

Como  $NA = AB + NB$  e  $AB = 40$ , temos:

$$\begin{aligned}\frac{NA}{NB} = \frac{7}{3} &\implies \frac{AB + NB}{NB} = \frac{7}{3} \\ &\implies \frac{40 + NB}{NB} = \frac{7}{3} \\ &\implies 7NB = 120 + 3NB \\ &\implies 4NB = 120 \\ &\implies NB = 30.\end{aligned}$$

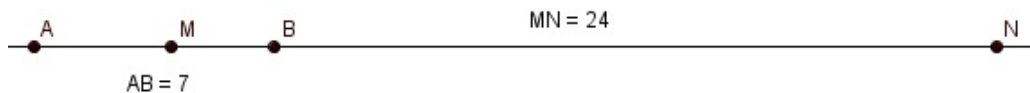
Além disto, note que  $AM = AB - MB = 40 - MB$ . Logo:

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MB} = \frac{7}{3} &\implies MA = \frac{7}{3}MB \\ &\implies \frac{7}{3}MB = 40 - MB \\ &\implies MB \left( \frac{7}{3} + 1 \right) = 40 \\ &\implies \frac{10}{3}MB = 40 \\ &\implies MB = 40 \cdot \frac{3}{10} \\ &\implies MB = 12. \end{aligned}$$

Como  $MN = MB + NB$ , então  $MN = 30 + 12 = 42$ .

Resposta: Alternativa D

10.



Como os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $B$  e  $N$  de uma reta formam uma divisão harmônica, sabe-se que

$$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}.$$

Note também que

$$\begin{cases} MB = AB - MA \\ NA = MN + MA \\ NB = MN + MA - AB \end{cases}$$

Reescrevendo as razões, temos:

$$\begin{aligned} \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} &\implies \frac{MA}{AB - MA} = \frac{MN + MA}{MN + MA - AB} \\ &\implies \frac{MA}{7 - MA} = \frac{24 + MA}{17 + MA} \\ &\implies MA(17 + MA) = (24 + MA)(7 - MA) \\ &\implies 2MA^2 + 34MA - 168 = 0. \end{aligned}$$

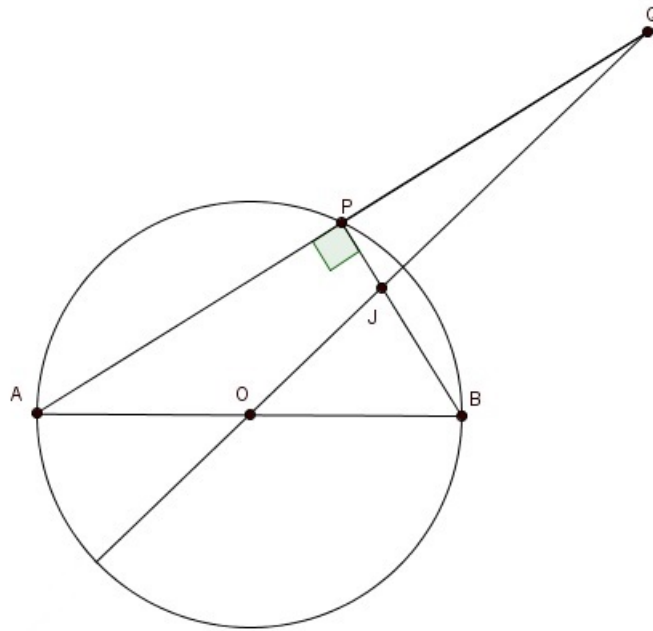


Resolvendo a equação acima, obtemos  $MA = 4$ . Daí, como  $AB = MA + MB$ , então  $MB = 3$ . Portanto,

$$\frac{MA}{MB} = \frac{4}{3}.$$

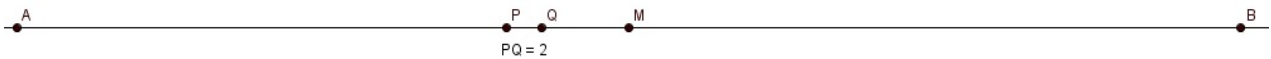
Resposta: Alternativa C

11. Note que no triângulo  $\triangle ABQ$  as cevianas  $BP$  e  $QO$  são medianas e, portanto, o ponto  $J$  é o baricentro do triângulo. Assim, a razão  $\frac{JQ}{JO} = \frac{2}{1} = 2$ .



Resposta: Alternativa C

12.



Sabe-se que:

$$\frac{PA}{PB} = \frac{2}{3} \implies \frac{PA}{PA + PB} = \frac{2}{2 + 3} \implies PA = \frac{2}{5}AB.$$

Sabe-se também que:

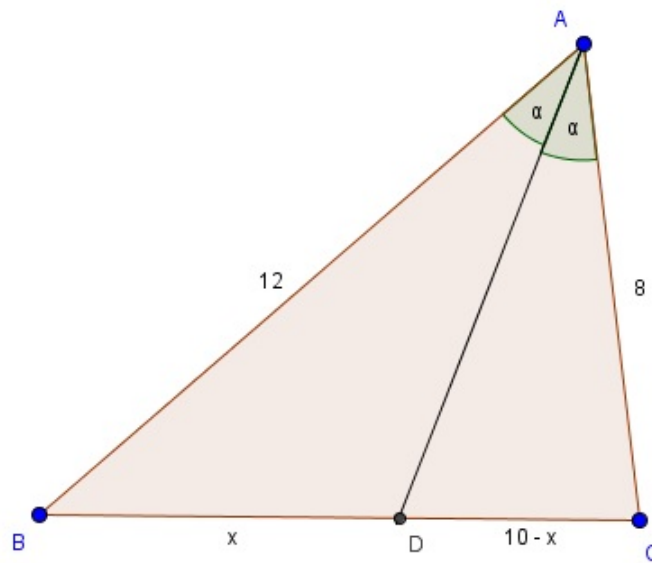
$$\frac{QA}{QB} = \frac{3}{4} \implies \frac{QA}{QB + QA} = \frac{3}{3 + 4} \implies \frac{QA}{AB} = \frac{3}{7} \implies QA = \frac{3}{7}AB.$$

Daí, como  $QA - PA = 2$ , temos:

$$\begin{aligned} QA - PA = 2 &\implies \frac{3}{7}AB - \frac{2}{5}AB = 2 \\ &\implies \frac{15 - 14}{35}AB = 2 \\ &\implies AB = 70. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa C

13.

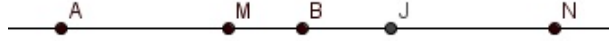


Como visto anteriormente, o pé da bissetriz interna de um triângulo (Ponto  $D$ ) é um dos conjugados harmônicos do segmento que o contém (Segmento  $BC$ ). Desse modo, é válida a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{AB}{DB} = \frac{AC}{DC} &\implies \frac{12}{x} = \frac{8}{10 - x} \\ &\implies 12(10 - x) = 8x \\ &\implies 20x = 120 \\ &\implies x = 6. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa C

14. Sabe-se que os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $B$  e  $N$  de uma reta formam uma divisão harmônica de razão



$\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$ . Sabe-se também que  $J$  é o ponto médio de  $MN$  e a distância entre os conjugados harmônicos é dada por  $MN = \frac{2k \cdot AB}{k^2 - 1}$ . Daí,

$$\frac{JA}{JB} = \frac{JM - MA}{JM - MB}.$$

Como  $MA = k \cdot MB$  e  $JM = \frac{k \cdot AB}{k^2 - 1}$ , temos

$$\frac{JA}{JB} = \frac{JM - k \cdot MB}{JM - MB} \implies \frac{JA}{JB} = \frac{\frac{k \cdot AB}{k^2 - 1} + k \cdot MB}{\frac{k \cdot AB}{k^2 - 1} - MB}.$$

Além disto,  $AB = MA + MB = k \cdot MB + MB = MB(k + 1)$ . Daí,

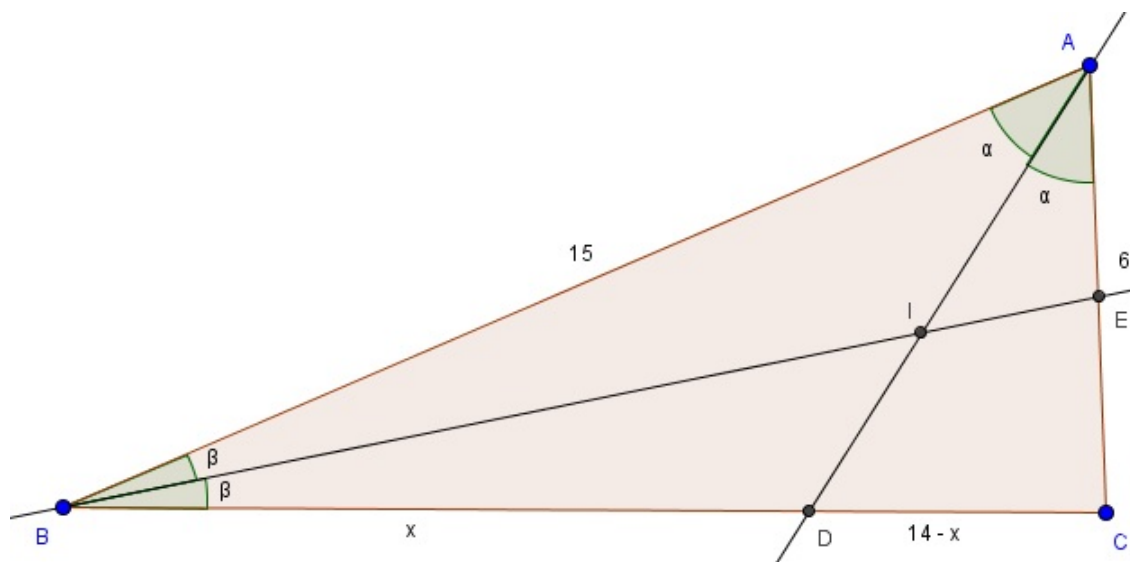
$$\begin{aligned} \frac{JA}{JB} &= \frac{\frac{k \cdot AB}{k^2 - 1} + k \cdot MB}{\frac{k \cdot AB}{k^2 - 1} - MB} = \frac{\frac{k \cdot MB(k + 1)}{k^2 - 1} + k \cdot MB}{\frac{k \cdot MB(k + 1)}{k^2 - 1} - MB} \\ &= \frac{\frac{k(k + 1)}{k^2 - 1} + k}{\frac{k(k + 1)}{k^2 - 1} - 1} = \frac{\frac{k(k + 1)}{(k + 1)(k - 1)} + k}{\frac{k(k + 1)}{(k + 1)(k - 1)} - 1} = \frac{\frac{k}{(k - 1)} + k}{\frac{k}{(k - 1)} - 1} \\ &= \frac{\frac{k + k(k - 1)}{(k - 1)}}{\frac{k - k + 1}{(k - 1)}} = k^2. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa C

15. Como  $BE$  e  $AD$  são bissetrizes internas dos ângulos  $\widehat{B}$  e  $\widehat{A}$  respectivamente, então, pelo teorema das bissetrizes, é verdadeiro que:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}.$$

Note que,  $BC = 14$  e  $BC = DB + DC$ . Vamos indicar  $DB = x$  e  $DC = 14 - x$ . Além disto,



$AB = 15$  e  $AC = 6$ . Daí:

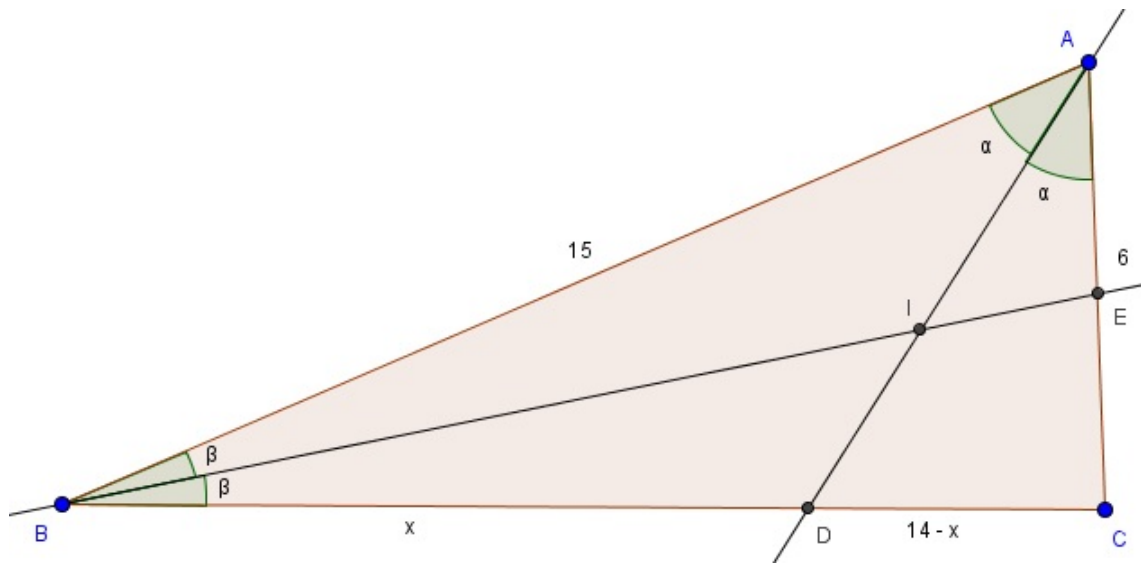
$$\begin{aligned} \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} &\implies \frac{x}{14-x} = \frac{15}{6} \\ &\implies 2x = 5(14-x) \\ &\implies 7x = 70 \\ &\implies x = 10. \end{aligned}$$

Desse modo,  $DB = 10$  e  $DC = 4$ . Ainda pelo teorema das bissetrizes, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{IA}{ID} = \frac{AB}{DB} &\implies \frac{IA}{ID} = \frac{15}{10} \\ &\implies \frac{IA}{ID} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa B

16. Vamos indicar  $EA = y$  e  $EC = 6 - x$  e, de maneira semelhante ao exercício anterior, vale que:



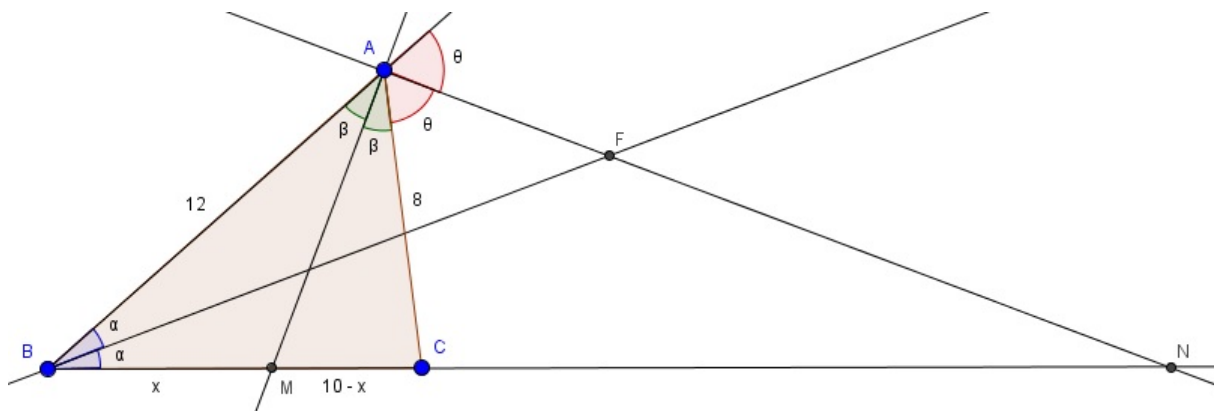
$$\begin{aligned} \frac{AB}{BC} = \frac{EA}{EC} &\implies \frac{15}{14} = \frac{y}{6-y} \\ &\implies 14y = 90 - 15y \\ &\implies 29y = 90 \\ &\implies y = \frac{90}{29}. \end{aligned}$$

Desse modo,  $EA = \frac{90}{29}$  e  $DC = 6 - \frac{90}{29}$ . Ainda pelo teorema das bissetrizes, temos que:

$$\begin{aligned} \frac{IE}{IB} = \frac{EA}{AB} &\implies \frac{IE}{IB} = \frac{\frac{90}{29}}{15} \\ &\implies \frac{IE}{IB} = \frac{6}{29}. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa A

17. Como  $BC = 10$  e  $BC = MB + MC$ , pelo teorema das bissetrizes, temos que:



$$\begin{aligned} \frac{AB}{AC} &= \frac{MB}{MC} \implies \frac{12}{8} = \frac{x}{10-x} \\ &\implies 8x = 120 - 12x \\ &\implies 20x = 120 \\ &\implies x = 6. \end{aligned}$$

Desse modo,  $MB = 6$  e  $MC = 4$ .

Note que,  $M$  e  $N$  são os pés das bissetrizes interna e externa respectivamente e, portanto, são os conjugados harmônicos de  $BC$ . Além disto, note também que  $NB = BC + NC$ .

Daí:

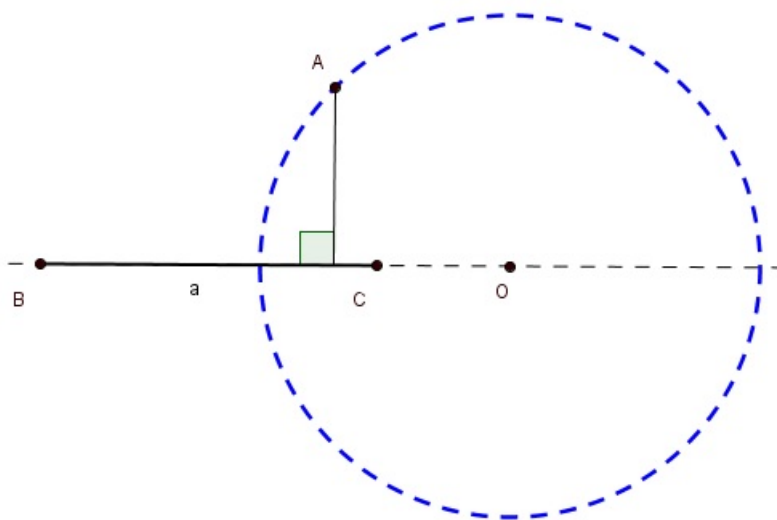
$$\begin{aligned} \frac{MB}{MC} &= \frac{NB}{NC} \implies \frac{MB}{MC} = \frac{BC + NC}{NC} \\ &\implies \frac{6}{4} = \frac{10 + NC}{NC} \\ &\implies 6NC = 40 + 4NC \\ &\implies 2NC = 40 \\ &\implies NC = 20. \end{aligned}$$

Por fim, como  $BF$  também é bissetriz, sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{FN}{FA} &= \frac{NB}{AB} \\ &= \frac{30}{12} = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Resposta: Alternativa C

18. Como  $\frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$ , então  $A$  pertence ao Círculo de Apolônio de segmento  $BC$  na razão  $\frac{3}{2}$ . Sabe-se que a distância entre os conjugados harmônicos é dada por:



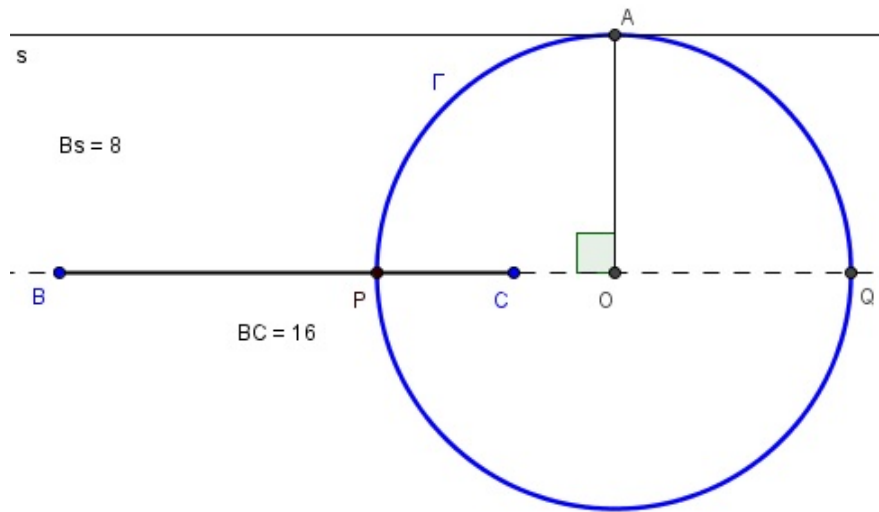
$$d = \frac{2k \cdot BC}{k^2 - 1}.$$

Portanto, o raio da circunferência de Apolônio é a altura máxima relativa ao lado  $BC$  e é definido por:

$$r = \frac{k \cdot BC}{k^2 - 1} = \frac{\frac{3}{2}BC}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1} = \frac{\frac{5}{2}a}{\frac{9-4}{4}} = \frac{6}{5}a.$$

Resposta: Alternativa E

19. Seja  $s$  uma reta paralela a  $\overleftrightarrow{BC}$  que contenha o ponto  $A$  conforme figura:



Para qualquer valor possível de  $k$ ,  $A$  pertence ao Círculo de Apolônio  $\Gamma$  do segmento  $BC$  na razão  $k$ . Se  $P$  é o ponto de  $BC$  que divide na razão  $k$ ,  $k$  é máximo quando  $P$  for o mais próximo possível de  $C$  tal que  $\Gamma$  intersecta  $s$ . Isto ocorre quando  $\Gamma$  é tangente à reta  $s$ . Portanto,  $h_a = r = 8$ . Daí:

$$\begin{aligned} r &= \frac{k \cdot BC}{k^2 - 1} \implies 8 = \frac{16k}{k^2 - 1} \\ &\implies k^2 - 2k - 1 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação encontramos  $k = 1 + \sqrt{2}$ .

Resposta: Alternativa E

20. Como  $ABCD$  e  $ABEF$  são quadrados, então as diagonais  $BD$  e  $BF$  são também bissetrizes de  $\angle ABC$  e  $\angle ABE$  respectivamente. Assim, pelo teorema das bissetrizes,  $G$  e  $C$  são conjugados harmônicos de  $FH$  (ou ainda,  $H$  e  $F$  são conjugados harmônicos de  $CG$ ). Daí:

$$\frac{GF}{GH} = \frac{CF}{CH}.$$





### 4.3 Problemas propostos

1. Sejam  $A$ ,  $C$  e  $B$  nesta ordem sobre uma reta tais que  $AB = 12$  e  $BC = 3$ . Seja  $D$  o conjugado harmônico de  $C$  em relação ao segmento  $AB$ . Determine quanto mede  $BD$ .
2. Os pontos  $A$ ,  $M$ ,  $B$  e  $N$  de uma reta formam uma divisão harmônica de razão  $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN} = k$ . Se  $P$  é o ponto médio de  $MN$ , determine a razão  $\frac{PA}{PB}$ .
3. (IME-RJ) Considere as equações do 2º grau  $ax^2 + bx + c = 0$  e  $a'x^2 + b'x + c' = 0$ . Suas raízes são respectivamente iguais a  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ . Determine a condição entre os coeficientes das equações para que o segmento de extremidades com abscissas  $x_1$  e  $x_2$  seja dividido harmonicamente pelos pontos de abscissas  $x_3$  e  $x_4$ .
4. Dada uma reta, com pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  dispostos nessa ordem e com os seguintes comprimentos:  $AB = x$ ,  $BC = 6$  e  $CD = x + 1$ . Determine  $x$  para que os pontos dados formem uma divisão harmônica.
5. Determine a coordenada  $x$  do ponto  $M$  que divide o segmento  $M_1M_2$  limitado pelas abscissas  $x_1$  e  $x_2$  numa razão  $\lambda$  tal que  $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ .
6. Tomam-se sucessivamente sobre uma reta os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sendo,  $AB = 5$ ,  $BC = 1$  e  $CD = 3$ . Considera-se o ponto  $M$  exterior ao segmento  $AC$  de modo que  $\frac{AM}{CM} = \frac{5}{3}$  e o ponto  $M'$  interior ao segmento  $BC$  de modo que  $\frac{BM'}{CM'} = \frac{5}{3}$ . Sendo  $O$  e  $O'$  os pontos médios de  $AB$  e  $CD$ , calcule as razões  $\frac{OM}{OM'}$  e  $\frac{O'M'}{OM}$ .
7. (Polônia) Seja  $ABCD$  um quadrilátero côncavo, sendo o ângulo interno  $\angle DAB$  maior que  $180^\circ$  e  $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ . Seja  $P$  o simétrico de  $A$  em relação a  $BD$ . Prove que  $\angle PCB = \angle ACD$ .
8. Seja  $ABC$  um triângulo e  $AM$ ,  $BN$  e  $CP$  cevianas concorrentes. Se  $PN$  corta  $BC$  em  $Q$ , então  $MQ$  é o diâmetro de um círculo de Apolônio de  $B$  e  $C$ .
9. (Teste de Seleção, China) Sejam  $E$  e  $F$  as interseções dos lados opostos do quadrilátero convexo  $ABCD$ , cujas diagonais cortam-se em  $P$ . Seja  $O$  sobre  $EF$  tal que  $OP$  é perpendicular a  $EF$ . Prove que  $\angle BOC = \angle AOD$ .

10. (Círculo de Apolônio e inversão) Prove que se  $\Gamma$ , de centro  $O$  e raio  $r$ , é um círculo de Apolônio de  $A$  e  $B$ , então, ao realizarmos uma inversão com centro  $O$  e raio  $r$ ,  $A$  é o inverso de  $B$ .
11. (Teste de Seleção, Sérvia e Montenegro) Sejam  $M$  e  $N$  pontos distintos do plano do triângulo  $ABC$  tais que  $AM : BM : CM = AN : BN : CN$ . Prove que  $MN$  contém o circuncírculo de  $ABC$ .
12. (Teste de Seleção, EUA) Considere todos os triângulos não isósceles  $ABC$  tais que  $AC^2 + BC^2 = bAB^2$ . As cevianas  $CM$  e  $CD$  são respectivamente a mediana e a bissetriz interna relativas a  $C$ , com  $M$  e  $D$  sobre  $AB$ . O ponto  $E$  é tal que  $D$  é o incentro de  $CEM$ . Prove exatamente uma das razões

$$\frac{CE}{EM} \cdot \frac{EM}{MC} \cdot \frac{MC}{CE}$$

é constante.

13. (Torneio das Cidades) O ângulo  $\angle COD$  foi obtido da rotação do ângulo  $\angle AOB$ , de modo que  $OC$  corresponde a  $OA$  e  $OD$ , a  $OB$ . Dois círculos tangenciam os ângulos  $\angle AOB$  e  $\angle COD$ , respectivamente, e se cortam em  $E$  e  $F$ . Prova que  $\angle AOE = \angle DOF$ .
14. Dado o triângulo  $ABC$ , encontre o lugar geométrico dos pontos  $P$  interiores ao triângulo tais que

$$\angle APC - \angle ABC = \angle APB - \angle ACB$$

# Referências Bibliográficas

- [1] ASOCIACIÓN FONDO DE INVERTIDORES Y EDITORES; **Geometría: Una visión de la planimetría**. 2. ed. Lima: Lumbraa Editores, 2006.
- [2] BARBOSA, João Lucas Marques; **Coleção do Professor de Matemática: Geometria Euclidiana Plana**, 10. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.
- [3] BOYER, Carl Benjamim; **História da Matemática**, Rev. por Uta C. Merzbach; trad. Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- [4] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau; **Fundamentos de Matemática Elementar 9: Geometria plana**, 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.
- [5] EUCLIDES; **Os Elementos**, trad. Irineu Bicudo. São Paulo: UNESP, 2009.
- [6] EVES, Howard; **Introdução à História da Matemática**, Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 1995.
- [7] LEGENDRE, Adrien-Marie; **Elementos de Geometria**, Rev. por Luiz Carlos Guimarães; Trad. Manoel Ferreira de Araújo Guimarães. Rio de Janeiro: E-LIMC, 2009.
- [8] MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel; **Geometria I**, 5. ed. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1990.
- [9] MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo; JORGE, Miguel; **Geometria II**, Rio de Janeiro: FC & Z Livros, 2002.
- [10] MUNIZ NETO, Antonio Caminha; **Coleção PROFMAT: Geometria**, 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

- [11] PONCELET, Jean Victor; **Applications d'analyse et de géométrie**, tome I. Paris: Gauthier-Villars, 1862.
- [12] SARMENTO, Maria Inês; **Um Passeio Proveitoso Pelos Círculos de Apolônio**, Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Porto: Universidade do Porto, 2007.
- [13] SILVA, José Constantino da; **Os Teoremas de Menelaus e Ceva**, Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática), Recife: UFRPE, 2015.
- [14] WAGNER, Eduardo; A Formiga Inteligente. **Revista do Professor de Matemática. SBM**, Rio de Janeiro, v. 61, p. 19-24, 2006.