



**Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática**

**Geometria de Galileu  
proposta de atividades para o ensino básico**

por

Vicente Lopes da Luz

Brasília, 2016



Vicente Lopes da Luz

## Geometria de Galileu

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos para a obtenção do grau de

**Mestre**

Orientador: Prof. Dr. Guy Grebot

Brasília

2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

LD152g      Lopes da Luz, Vicente  
              Geometria de Galileu proposta de atividades para  
o ensino básico / Vicente Lopes da Luz; orientador  
Guy Grebot. -- Brasília, 2016.  
              154 p.

              Dissertação (Mestrado - Mestrado Profissional em  
Matemática) -- Universidade de Brasília, 2016.

              1. Geometria não euclidiana. 2. Geometria  
euclidiana. 3. Ensino de geometria. I. Grebot, Guy,  
orient. II. Título.

Universidade de Brasília  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

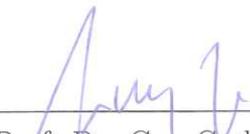
**Geometria de Galileu**  
**proposta de atividades para o ensino básico**  
por  
**Vicente Lopes da Luz**<sup>1</sup>

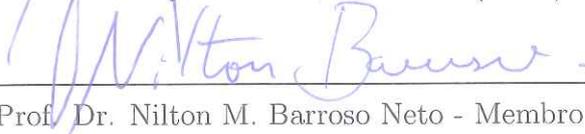
Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, como parte dos requisitos do “Programa” de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, para obtenção do grau de

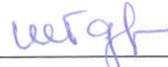
**MESTRE EM MATEMÁTICA**

Brasília, 30 de agosto de 2016.

Comissão Examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Guy Grebot - Orientador (MAT/UnB)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Nilton M. Barroso Neto - Membro MAT/UnB

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr<sup>a</sup> Maria T. J. Gaspar - Membro UnB

<sup>1</sup>O autor foi bolsista do CAPES durante a elaboração deste trabalho.



# Dedicatória

*Dedico este trabalho à minha esposa Jucélia, às minhas filhas Maria Clara e Ana Beatriz e aos meus pais Fidêncio Lopes e Maria Lopes (in memoriam).*

*Não deixe nenhum ignorante em geometria entrar por esta porta.*

*(Entrada da Academia de Platão)*

*No que se refere à ciência, a autoridade de mil pessoas não vale o simples raciocínio de um indivíduo apenas. (Galileu Galilei)*



# Agradecimentos

À Deus.

Meus sinceros agradecimentos ao professor Guy Grebot, pela dedicação, bons ensinamentos, pelo tema sugerido e profissionalismo pelo qual me conduziu na realização deste trabalho. Agradeço ainda pela sua engenhosidade aplicada na criação do kit de madeira para a construção geométrica do ciclo de Galileu.

À minha família, pelo carinho, apoio e compreensão nos momentos de ausência.

Aos muitos professores, colegas e amigos que conquistei e que sempre contribuíram para minha formação. A todos os servidores do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

À Secretaria de Educação do Distrito Federal e a CAPES pelo suporte financeiro.



# Resumo

Quando o tema é geometria não euclidiana, logo nos vem à mente o modelo de geometria criado a partir da negação do quinto postulado de Euclides. Neste trabalho apresentamos uma situação diferente, um modelo pouco conhecido chamado de geometria de Galileu, devido sua origem ser a mecânica estudada por Galileu Galilei. A proposta desta dissertação é desenvolver um referencial teórico traçando um paralelo com a geometria euclidiana e elaborar uma série de atividades para serem aplicadas em sala de aula, envolvendo as propriedades e as transformações comuns e não comuns nos dois modelos.

**Palavras-chave:** Geometria não euclidiana. Geometria de Galileu. Ensino de geometria.



# Abstract

When the subject is non-Euclidean geometry, immediately comes to mind the geometric model created from the negation of the fifth postulate of Euclid. We present a different situation, a less known model called the Galilean geometry due to its origin in the mechanical studies of Galileo Galilei. The aim of this work is to establish the theoretical framework drawing a parallel with Euclidean geometry and the development of a series of activities to be implemented in the classroom, involving the properties and common and uncommon changes in both geometrical models.

**key words:** Geometry non-Euclidean. Galileo geometry. Teaching of geometry.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Conceitos preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 Transformação no plano euclidiano . . . . .	5
1.1.1 Isometrias . . . . .	6
1.1.2 Homotetia . . . . .	9
1.2 Coordenadas . . . . .	10
1.2.1 Mudança do sistema de coordenadas . . . . .	11
1.3 Invariância sob as equações do tipo (1.7) . . . . .	15
1.3.1 Invariância da circunferência . . . . .	15
1.3.2 Invariância da reta . . . . .	16
<b>2 Geometria de Galileu - distância e ângulo</b>	<b>20</b>
2.1 Conexão entre geometria e mecânica . . . . .	20
2.1.1 Transformação de Galileu para o movimento retilíneo . . . . .	21
2.1.2 A geometria do princípio de Galileu . . . . .	22
2.2 Distância algébrica entre dois pontos . . . . .	27
2.3 Circunferência no plano de Galileu . . . . .	28
2.4 Ângulo e distância entre duas retas . . . . .	29
2.5 Distância entre ponto e reta . . . . .	32
<b>3 Triângulos no plano de Galileu</b>	<b>35</b>
3.1 Triângulo isósceles . . . . .	37
3.2 Congruência de triângulos . . . . .	38
3.3 Semelhança de triângulos na geometria de Galileu . . . . .	44
<b>4 Circunferência e ciclo</b>	<b>47</b>
4.1 Raio e curvatura . . . . .	53
4.2 Rotação cíclica . . . . .	53
4.3 Diâmetro do ciclo . . . . .	58

<b>5</b>	<b>Potência e inversão</b>	<b>62</b>
5.1	Potência de um ponto . . . . .	62
5.1.1	Potência de um ponto em relação a $\Gamma$ . . . . .	62
5.1.2	Potência de um ponto em relação à circunferência $\mathcal{S}$ . . . . .	66
5.1.3	Potência de um ponto em relação ao ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	68
5.2	Inversão . . . . .	75
5.2.1	Inversão na circunferência euclidiana $\Gamma$ . . . . .	75
5.2.2	Inversão na circunferência de Galileu $\mathcal{S}$ . . . . .	81
5.2.3	Inversão no ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	84
<b>6</b>	<b>Proposta de atividades para a sala de aula</b>	<b>89</b>
6.1	Medida de distâncias . . . . .	90
6.2	Medida de ângulo . . . . .	91
6.2.1	Triângulos . . . . .	92
6.3	Circunferência . . . . .	93
6.3.1	Primeira definição . . . . .	93
6.3.2	Segunda definição . . . . .	93
6.4	Ciclo . . . . .	94
6.5	Rotação cíclica . . . . .	96
6.5.1	Parte 1 . . . . .	96
6.5.2	Parte 2 . . . . .	97
6.6	Potência de um ponto em relação a uma circunferência euclidiana . . . . .	98
6.6.1	Identificando a potência de um ponto . . . . .	98
6.6.2	Potência de forma analítica . . . . .	99
6.7	Potência de um ponto em relação a um ciclo . . . . .	99
6.8	Inversão na circunferência euclidiana . . . . .	100
6.8.1	Construção do inverso de um ponto $P$ . . . . .	100
6.8.2	Inversão na circunferência de forma analítica . . . . .	101
6.9	Inversão no ciclo . . . . .	102
6.9.1	Inverso de um ponto . . . . .	102
6.9.2	Inverso de uma reta ordinária . . . . .	103
6.9.3	Inverso de um ciclo . . . . .	104
6.10	Sugestões para a mediação das atividades . . . . .	104
6.10.1	Mediação para a seção 6.1 - Medida de distâncias . . . . .	105
6.10.2	Mediação para a seção 6.2 - Medida de ângulo . . . . .	106
6.10.3	Mediação para a seção 6.3 - Circunferência . . . . .	108
6.10.4	Mediação para a seção 6.4 - Ciclo . . . . .	110
6.10.5	Mediação para a seção 6.5 - Rotação cíclica . . . . .	112
6.10.6	Mediação para a seção 6.6 - Potência de um ponto em relação a uma circunferência euclidiana . . . . .	114

6.10.7	Mediação para a seção 6.7 - Potência de um ponto em relação a um ciclo . . . . .	116
6.10.8	Mediação para a seção 6.8 - Inversão na circunferência euclidiana	118
6.10.9	Mediação para a seção 6.9 - Inversão no ciclo . . . . .	121
	<b>Considerações Finais</b>	<b>127</b>
	<b>Anexo</b>	<b>131</b>

# Lista de Figuras

1.1	Transformação no plano. . . . .	5
1.2	Rotação. . . . .	6
1.3	Reflexão em torno de $l$ . . . . .	7
1.4	Translação. . . . .	7
1.5	Rotação em torno de $O$ . . . . .	8
1.6	Reflexão com deslizamento. . . . .	8
1.7	$F$ e $F'$ são congruentes. . . . .	9
1.8	Homotetia. . . . .	9
1.9	(a)Distância (b) Circunferência. . . . .	10
1.10	Mudança de coordenadas de um ponto. . . . .	12
1.11	As coordenadas de $A' = T(A)$ em $x'O'y'$ são iguais às coordenadas de $A$ em $xOy$ . . . . .	14
1.12	Coordenadas de $A'$ em $xOy$ . . . . .	14
1.13	Ângulo entre retas. . . . .	17
1.14	Distância entre retas. . . . .	19
2.1	Origem $O$ se movendo com velocidade $v$ . . . . .	21
2.2	Origem $O$ se movendo com velocidade $v$ em relação a $O'$ . . . . .	22
2.3	Composição que forma a transformação de Galileu. . . . .	24
2.4	O cisalhamento leva reta em reta. . . . .	24
2.5	Retas paralelas levadas em retas paralelas. . . . .	25
2.6	Proporcionalidade entre segmentos. . . . .	26
2.7	Distância algébrica entre dois pontos no plano de Galileu. . . . .	27
2.8	Circunferência de Galileu. . . . .	28
2.9	(a)Ângulo na geometria euclidiana. (b)Ângulo na geometria de Galileu. . . . .	29
2.10	Medida do ângulo de Galileu. . . . .	29
2.11	Invariância do ângulo de Galileu. . . . .	31
2.12	Distância entre retas. . . . .	32

2.13	Distância entre ponto e reta. . . . .	33
3.1	Triângulo no plano de Galileu. . . . .	35
3.2	Proporcionalidade entre lado e ângulo. . . . .	36
3.3	Altura $CR$ não coincidente com a bissetriz do ângulo $\widehat{C}$ . . . . .	38
3.4	Lados congruentes. . . . .	39
3.5	Critério LAL inválido. . . . .	39
3.6	Critério ALA inválido. . . . .	40
3.7	Critério LAL válido. . . . .	41
3.8	Critério ALA válido. . . . .	42
3.9	Critério AAL válido. . . . .	43
3.10	Baricentro do triângulo. . . . .	43
3.11	Semelhança de 1ª espécie. . . . .	45
3.12	Semelhança de 2ª espécie. . . . .	46
4.1	Par de arcos circulares e circunferência euclidiana. . . . .	47
4.2	Circunferência e ciclo de Galileu. . . . .	48
4.3	Ciclos de acordo com os coeficientes de (4.2). . . . .	49
4.4	Ângulo entre corda e tangente. . . . .	50
4.5	Ângulo inscrito e central. . . . .	51
4.6	Comprimento de arco. . . . .	52
4.7	Rotação cíclica. . . . .	55
4.8	Ciclos “paralelos”. . . . .	57
4.9	Congruência das tangentes. . . . .	58
4.10	Diâmetro de circunferência euclidiana. . . . .	58
4.11	Diâmetro do ciclo. . . . .	59
4.12	Diâmetro do ciclo. . . . .	60
4.13	Diâmetro perpendicular à tangente. . . . .	61
4.14	A corda $AB$ é bissectada pelo diâmetro em $C$ . . . . .	61
5.1	Eixo radical $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$ de duas circunferências. . . . .	64
5.2	Eixo radical $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$ de duas circunferências tangentes exteriormente e interiormente. . . . .	65
5.3	Eixo radical $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$ de duas circunferências secantes. . . . .	65
5.4	Centro radical de três circunferências de centros não colineares. . . . .	66
5.5	Potência de um ponto $P$ em relação à $\mathcal{S}$ . . . . .	67
5.6	Ponto $P$ no ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	68
5.7	$P$ não pertencente ao ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	69
5.8	Potência do ponto $P$ quando $T \in \mathcal{Z}$ . . . . .	70
5.9	Potência em relação ao ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	71
5.10	Eixo radical $e_{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}$ de dois ciclos de mesmo raio. . . . .	73

5.11	Eixo radical $e_{SZ}$ entre o ciclo e a circunferência. . . . .	73
5.12	Eixo $e_{Z_1Z_2}$ entre ciclos de raios diferentes. . . . .	74
5.13	Centro radical $R$ . . . . .	74
5.14	Inversão em relação à circunferência $\Gamma$ . . . . .	75
5.15	Inversão com $P$ no interior de $\Gamma$ . . . . .	76
5.16	Inversão com $P$ no exterior de $\Gamma$ . . . . .	76
5.17	Inversão em relação a circunferência $\Gamma$ com $P$ no exterior. . . . .	77
5.18	Circunferência em circunferência. . . . .	78
5.19	Ângulo entre $l_1$ e $l_2$ com $l_1$ e $l_2$ passando por $O$ . . . . .	79
5.20	Ângulo entre $l_1$ e $l_2$ com $l_1$ passando por $O$ e $l_2$ não. . . . .	80
5.21	Ângulo entre $l_1$ e $l_2$ com $l_1 \cap l_2 \neq O$ . . . . .	80
5.22	Inversão na circunferência de Galileu. . . . .	82
5.23	Uma reta que passa pela origem é levada na mesma reta. . . . .	83
5.24	Uma reta que não passa por $O$ é levada no ciclo que passa por $O$ . . . .	84
5.25	Ciclos que não passam por $O$ são levados em ciclos que não passam por $O$ . . . . .	84
5.26	Inversão no ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	85
5.27	Inversão em relação ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	85
5.28	Ciclo $z$ levado no ciclo $z'$ . . . . .	86
5.29	Ciclo $z$ levado na reta $z'$ . . . . .	87
6.1	Arco capaz do ângulo $\alpha$ . . . . .	109
6.2	Orientação do ângulo $\alpha$ . . . . .	110
6.3	Relação secante-tangente. . . . .	115
6.4	O inverso $P'$ do ponto $P$ exterior a $\Gamma$ . . . . .	118
6.5	Os triângulos $\triangle OB'A'$ e $\triangle OAB$ são semelhantes. . . . .	119
6.6	A imagem de uma reta que não passa pelo centro da circunferência de inversão. . . . .	120
6.7	Imagens de $P$ , $Q$ e $R$ pela inversão no ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	122
6.8	Imagem da reta $z$ pela inversão no ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	123
6.9	Imagem da reta ordinária $w$ pela inversão no ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	124
6.10	Imagem do ciclo $z$ pela inversão no ciclo $\mathcal{Z}$ . . . . .	125
6.11	Imagem $z'$ do ciclo $z$ pela inversão no ciclo $\mathcal{Z}_1$ . . . . .	126
6.12	Parabolator visto de cima. . . . .	131
6.13	Paleta alinhando os três pontos. . . . .	132
6.14	Marcação do ponto. . . . .	132
6.15	Inversão da paleta para marcar os pontos do outro ramo do ciclo. . . .	133
6.16	Pontos marcados com parabolator. . . . .	133
6.17	Ciclo traçado pelos pontos com o auxílio do <i>geogebra</i> . . . . .	134

# Introdução

Neste trabalho estudaremos a geometria associada ao princípio da relatividade de Galileu Galilei(1564-1642). Esta geometria plana não euclidiana ou semi-euclidiana teve seu estudo aprofundado a partir de 1950 pelos geômetras N. Kuiper, K. Strubecker e N. M. Makarova [17].

O estudo de geometrias não euclidianas reforça o ensino da geometria euclidiana. É o que mostram algumas pesquisas, como as apresentadas por CAVICHIOLO em [7] e por PATAKI em [14]. Desta forma, estas geometrias podem desempenhar um papel maior do que o de uma simples curiosidade matemática. De acordo com os PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais):

Uma instância importante de mudança de paradigma ocorreu quando se superou a visão de uma única geometria do real, a geometria euclidiana, para aceitação de uma pluralidade de modelos geométricos, logicamente consistentes, que podem modelar a realidade do espaço físico([5], p.25).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais permitem estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos ([5], p.48). Assim como a geometria analítica, a geometria de Galileu pode ser desenvolvida num sistema de coordenadas, em concordância com os PCN ([5], p.72), que sugere a interpretação, a partir de situações-problema, da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas.

De acordo com os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio)[6], o estudo da geometria está proposto em quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica. Segundo os PCNEM-Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias:

As habilidades de visualização, desenho, argumentação lógica e de aplicação na busca de soluções para problemas podem ser desenvolvidas com um trabalho adequado de Geometria, para que o aluno possa usar as formas e propriedades geométricas na representação e visualização de partes do mundo que o cerca. ([6],p.44)

Em determinadas situações, a geometria euclidiana pode não ser a mais adequada, não havendo restrições quanto à possibilidade do estudo de outros modelos de geometrias que propiciem uma melhor compreensão de uma determinada propriedade geométrica.

Quando falamos de geometria euclidiana, nos referimos à geometria de Euclides (300 A.C.). Sabe-se pouco sobre a sua vida [4], tudo indica que ele tenha sido o criador de uma escola de matemática de Alexandria. Embora Euclides fosse autor de pelo menos dez trabalhos [9], sua fama repousa sobre os seus *Elementos*. Esta obra é composta de 465 proposições distribuídas em treze livros. A geometria euclidiana está alicerçada em um conjunto de termos indefinidos e dos postulados de incidência, ordem, congruência e um postulado das paralelas. Este último gerou desconfiança quanto à sua impossibilidade de prova.

O estudo de geometrias não euclidianas iniciou-se de forma independente por intermédio de C. F. Gauss(1777-1855), N. I. Lobachevsky(1793-1856) e J. Bolyai(1802-1860), quando estes suspeitaram que o postulado das paralelas é independente dos outros quatro postulados de Euclides e, por isso, não pode ser deduzido dos demais [9].

Diferentemente, a geometria de Galileu tem sua origem relacionada ao estudo da mecânica, admite o postulado da paralela como um dos seus axiomas e é considerada não euclidiana devido ao fato de não se medir distâncias como na geometria de Euclides.

A geometria de Galileu é desenvolvida no sistema de coordenadas cartesianas ortogonais  $xOy$ , onde a abscissa  $x$  é a coordenada temporal e a ordenada  $y$  a espacial.

De acordo com F. Klein(1849-1925), geometria é o estudo das propriedades invariantes sob certo grupo de transformações. No caso em análise, as transformações de Galileu

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b, \end{cases}$$

em que  $a$  e  $b$  são as coordenadas da origem no sistema  $x'O'y'$ , que permitem passar de um referencial inercial para outro referencial inercial com velocidade  $v$ , são isometrias desta geometria.

Segundo a orientação do regimento do PROFMAT, a dissertação de mestrado versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula, desta forma, o objetivo deste trabalho é desenvolver um referencial teórico e elaborar uma sequência de atividades que visam relacionar os conceitos envolvidos nas geometrias euclidiana e galileana, que possam ser aplicadas juntamente com os conteúdos propostos no currículo de matemática.

Esta dissertação está estruturada em seis capítulos da seguinte forma: O

capítulo 1 fornece os requisitos necessários para o desenvolvimento do trabalho. Traz conceitos da geometria de transformação que podem ser aprofundados em [3], [12], [13] e [19]. O capítulo 2 faz a conexão entre a Mecânica e a Geometria, apresentando as definições de distância e ângulo na geometria galileana. O capítulo 3 apresenta os casos de congruência e semelhança de triângulos na geometria de Galileu. O capítulo 4 estuda elementos e propriedades da circunferência e do ciclo galileano. O quinto capítulo mostra de forma analítica a potência de um ponto e a inversão em relação a uma circunferência e a um ciclo.

No capítulo 6, seguindo a metodologia de resolução de problemas, são propostas várias atividades relacionando as propriedades e as transformações nas duas geometrias. Para finalizar o capítulo, apresentamos sugestões de como o professor deve proceder nas mediações de cada uma das atividades propostas.



# Capítulo 1

## Conceitos preliminares

Neste capítulo serão apresentados alguns conceitos geométricos que servirão de pré-requisitos para o desenvolvimento do trabalho. Estes poderão ser aprofundados em [3], [12], [13] e [19]. Na próxima seção,  $\Pi$  representa o plano euclidiano <sup>1</sup> e as transformações consideradas se restringirão à geometria euclidiana.

### 1.1 Transformação no plano euclidiano

**Definição 1.1.** *Uma Transformação geométrica  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  é uma aplicação biunívoca que associa cada ponto  $X \in \Pi$  a um ponto  $X' \in \Pi$  tal que  $T(X) = X'$ .*

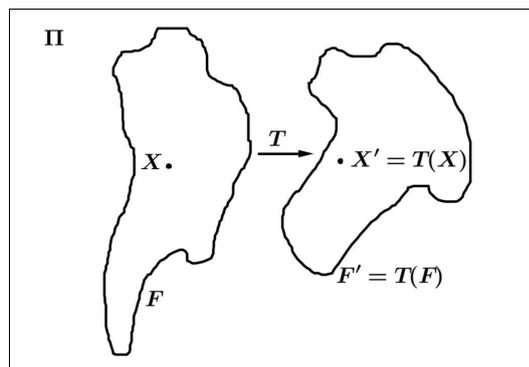


Figura 1.1: Transformação no plano.

Quando o ponto  $X$  e sua imagem  $T(X)$  coincidem, o ponto  $X$  é chamado de ponto fixo da transformação. Uma transformação do plano que leva cada ponto  $X$  em si próprio é chamada de transformação *identidade* ( $I$ ).

---

<sup>1</sup>Um plano euclidiano é um objeto no qual valem os axiomas da geometria euclidiana plana. Ver [2]

Uma figura  $F$  é *invariante* por uma transformação  $T$ , se coincide com sua imagem, isto é, se  $F = T(F)$ . Uma figura não necessita ter todos os seus pontos fixos para ser invariante sob uma transformação  $T$ , por exemplo, uma circunferência de centro  $O$  é invariante sob a rotação de um ângulo  $\theta$ , não nulo, em torno de  $O$ .

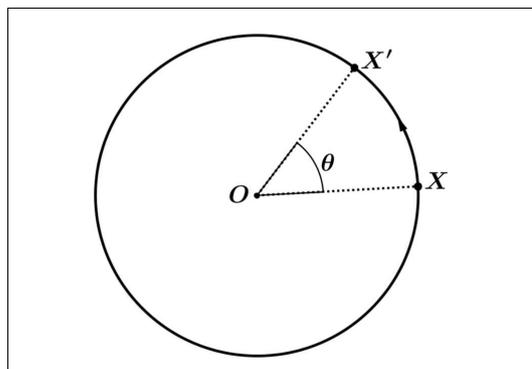


Figura 1.2: Rotação.

Os exemplos de transformações no plano euclidiano que serão apresentados no que segue são as isometrias, a homotetia e a inversão na circunferência.

### 1.1.1 Isometrias

**Definição 1.2.** *Uma isometria é uma transformação que preserva distância.*

É possível provar que as únicas isometrias do plano euclidiano são: identidade, reflexão, rotação, translação e reflexão com deslizamento [13].

#### Reflexão em torno de uma reta

Seja  $l$  uma reta no plano  $\Pi$ . A reflexão em relação à reta  $l$  é a aplicação  $R_l : \Pi \rightarrow \Pi$  assim definida:  $R_l(X) = X$  para todo  $X \in l$  e, para  $X \notin l$ ,  $R_l(X) = X'$  é tal que  $l$  seja a mediatriz do segmento  $XX'$ .

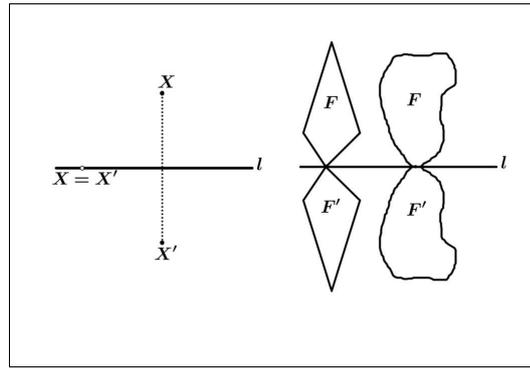


Figura 1.3: Reflexão em torno de  $l$ .

### Translação

Sejam  $A$  e  $B$  pontos distintos do plano  $\Pi$ . A translação  $T_{AB} : \Pi \rightarrow \Pi$  é a aplicação assim definida: dado  $X \in \Pi$ , sua imagem  $X' = T_{AB}(X)$  é o quarto vértice do paralelogramo que tem  $AB$  e  $AX$  como lados. Se  $X$  pertence à reta  $l$  que contém  $AB$  então a sua imagem  $X'$  está em  $l$  e é tal que  $AX \cong BX'$  e  $AB \cong XX'$ . Deste modo, a translação leva cada ponto do plano a uma distância  $AB$ , no sentido e na direção de  $A$  para  $B$ . Dizemos que cada ponto do plano é transladado pelo vetor  $\overrightarrow{AB}$ . Para cada ponto  $X$  do plano temos a igualdade vetorial  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XX'}$ .

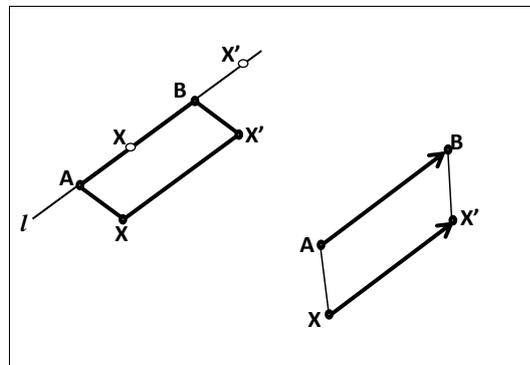


Figura 1.4: Translação.

É essencial levar em conta a ordem em que os pontos  $A$  e  $B$  são mencionados. Segue que se  $v = \overrightarrow{AB}$ ,  $T_{BA} = T_{-v}$  e que  $T_{AB} \neq T_{BA}$ . Dizemos que  $T_v$  é a *translação sob o vetor  $v$* .

### Rotação

Sejam  $O$  um ponto do plano  $\Pi$  e  $\alpha$  um ângulo orientado dado. A rotação de  $\alpha$  em torno de  $O$  é a aplicação  $\rho_{O,\alpha} : \Pi \rightarrow \Pi$  assim definida:  $\rho_{O,\alpha}(O) = O$  e, para

todo  $X \neq O$  em  $\Pi$ ,  $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$  é o ponto do plano  $\Pi$  tal que  $d(X, O) = d(X', O)$  e  $\angle XOX' = \alpha$ , em que a orientação de  $\angle XOX'$  é a mesma de  $\alpha$ .

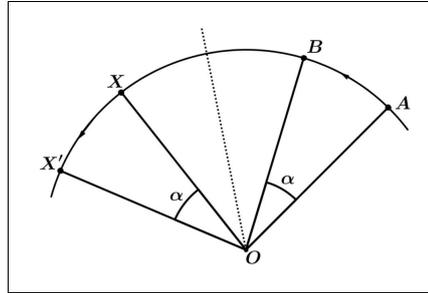


Figura 1.5: Rotação em torno de O.

### Reflexão com deslizamento

Sejam  $v = \overrightarrow{AB}$  um vetor não nulo e  $l$  uma reta paralela a  $v$  no plano  $\Pi$ . A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor  $v$  e pela reta  $l$  é a isometria  $T = T_v \circ R_l : \Pi \rightarrow \Pi$ .

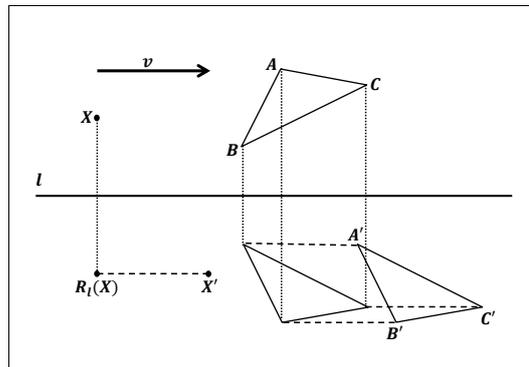


Figura 1.6: Reflexão com deslizamento.

A próxima definição leva à separação das isometrias de  $\Pi$  em dois conjuntos disjuntos.

**Definição 1.3** (Movimento). *Um movimento no plano  $\Pi$  é uma coleção de isometrias  $M_t : \Pi \rightarrow \Pi$ , uma para cada número real  $t \in [0, 1]$ , tal que  $M_0$  é a identidade e, para cada ponto  $P \in \Pi$  o ponto  $M_t(P)$  varia continuamente em função de  $t$ , para  $t \in [0, 1]$ .  $M_1(P)$  é a posição final de  $P$ .*

Uma isometria  $T : \Pi \rightarrow \Pi$  é dita *própria* se existe um movimento  $M_t : \Pi \rightarrow \Pi$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , tal que  $T = M_1$ . Ou seja, quando  $T$  é a etapa final deste movimento. Uma isometria que não é própria é *imprópria* e são dois conjuntos de isometrias no

plano. A Identidade, a translação e a rotação são isometrias próprias. A reflexão em torno de uma reta e a reflexão com deslizamento são isometrias impróprias.

Neste trabalho estamos interessados apenas nas isometrias próprias.

**Definição 1.4** (Congruência). *Duas figuras  $F$  e  $F'$  de um plano são congruentes se  $F'$  é a imagem de  $F$  por uma isometria.*

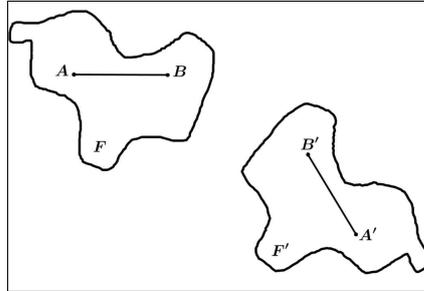


Figura 1.7:  $F$  e  $F'$  são congruentes.

Segue desta definição que figuras congruentes diferem umas das outras somente pela posição que ocupam, mas não na forma, além disso, figuras congruentes compartilham das mesmas propriedades.

### 1.1.2 Homotetia

**Definição 1.5** (Homotetia). *Sejam  $k \neq 0$  um número real e  $O$  um ponto do plano  $\Pi$ . A Homotetia  $H_{O,k} : \Pi \rightarrow \Pi$  com centro  $O$  e razão  $k$  é a transformação do plano que a cada ponto  $X \in \Pi$ , associa o ponto  $X' = H_{O,k}(X)$  tal que*

$$\vec{OX'} = k \cdot \vec{OX} .$$

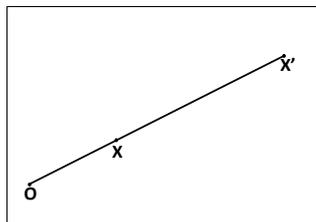


Figura 1.8: Homotetia.

Se  $X = O$ ,  $\vec{OX} = \vec{O} = \vec{OX'}$  e, assim,  $X' = O$ .

Se  $k > 0$ ,  $X'$  está na semirreta  $\vec{OX}$ , a homotetia chama-se *direta*.

Se  $k < 0$ ,  $X'$  está na semirreta oposta à semirreta de origem  $O$  que passa por  $X$ , a homotetia chama-se *inversa*.

Se  $k = 1$  então  $X = X'$  e a homotetia é a transformação identidade.

## 1.2 Coordenadas

No século XVII os matemáticos franceses R. DESCARTES (1596-1650) e P. FERMAT (1601-1665) mostraram que a geometria Euclidiana poderia ser estudada introduzindo de um sistema de coordenadas no plano. Assim, cada ponto do plano é um par de números reais  $(x, y)$ , suas coordenadas.

A distância euclidiana entre dois pontos  $A_1(x_1, y_1)$  e  $A_2(x_2, y_2)$  num sistema de coordenadas ortogonais <sup>2</sup> é dada por

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.1)$$

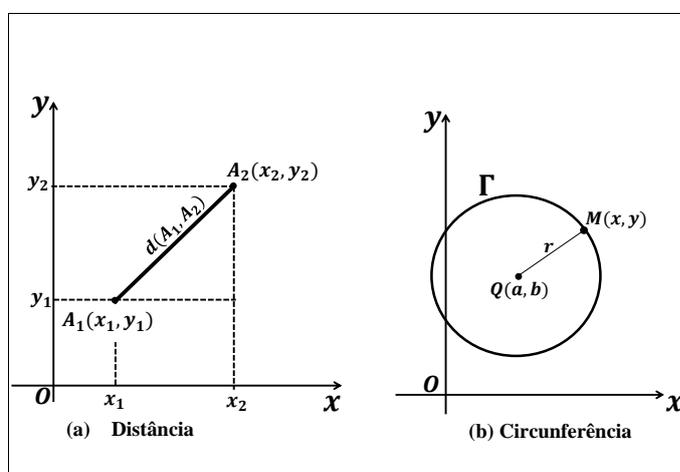


Figura 1.9: (a)Distância (b) Circunferência.

O conjunto dos pontos  $M$  que estão a uma distância constante  $r$  de um ponto fixo  $Q(a, b)$  é uma *circunferência*  $\Gamma$  com centro  $Q$  e raio  $r$ , que corresponde ao conjunto de pares de números  $(x, y)$  tais que

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r \quad (1.2a)$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad (1.2b)$$

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = 0 \quad (1.2c)$$

onde

$$p = -a, \quad q = -b, \quad f = a^2 + b^2 - r^2.$$

Uma reta  $l$  corresponde a um conjunto de pontos cujas coordenadas  $(x, y)$

---

<sup>2</sup>Um sistema de referência ortogonal em  $\Pi$  é definido por um ponto  $O \in \Pi$  e duas retas perpendiculares que passam por  $O$ .

satisfazem a equação

$$ax + by + c = 0. \quad (1.3)$$

Se  $b = 0$  e  $a \neq 0$ , temos  $x = -\frac{c}{a}$ , que representa uma reta paralela a  $Oy$ .  
 Se  $a = 0$  e  $b \neq 0$ , temos  $y = -\frac{c}{b}$ , que representa uma reta paralela a  $Ox$ .

Para  $b \neq 0$ , podemos escrever (1.3) na forma

$$y = kx + s. \quad (1.4)$$

Logo,  $l$  intersecta  $Oy$  no ponto  $S(0, s)$  e forma com  $Ox$  um ângulo  $\angle PQM = \varphi$  com  $\tan \varphi = \frac{PM}{QP} = k$ , em que  $M \in l$ ,  $P \in Ox$ ,  $Q \in l \cap Ox$  e  $PM \perp QP$ .

A escolha do sistema de coordenadas em  $\Pi$  determina as coordenadas de um ponto  $A \in \Pi$ . Na próxima subseção, analisaremos a relação existente entre as coordenadas de um ponto em sistemas de referências distintos.

### 1.2.1 Mudança do sistema de coordenadas

Um sistema de coordenadas no plano nada mais é do que uma forma conveniente de associar pontos do plano a pares de números reais. Sendo assim, as propriedades geométricas relevantes que caracterizam um determinado objeto, não podem ser alteradas por uma mudança de coordenadas.

Usaremos aqui a convenção, muito usada, que restringe os sistemas ortogonais de coordenadas aos sistemas de orientação positiva. Diremos que um sistema de coordenadas ortogonais é orientado positivamente se o ângulo de  $\frac{\pi}{2}$  radianos da rotação que leva o eixo das abscissas sobre o eixo das ordenadas é orientado no sentido anti-horário.

Seja  $A$  um ponto de  $\Pi$  de coordenadas  $(x, y)$  em um sistema  $xOy$  e com coordenadas  $(x', y')$  no sistema  $x'O'y'$ . Suponha que a origem  $O$  do sistema  $xOy$  tenha coordenadas  $(a, b)$  no sistema  $x'O'y'$ . Seja o ângulo  $\angle xCx' = \alpha$ ,  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$  onde  $C$  é o ponto de interseção entre  $Ox$  e  $O'x'$ . Conforme ilustra a figura 1.10.

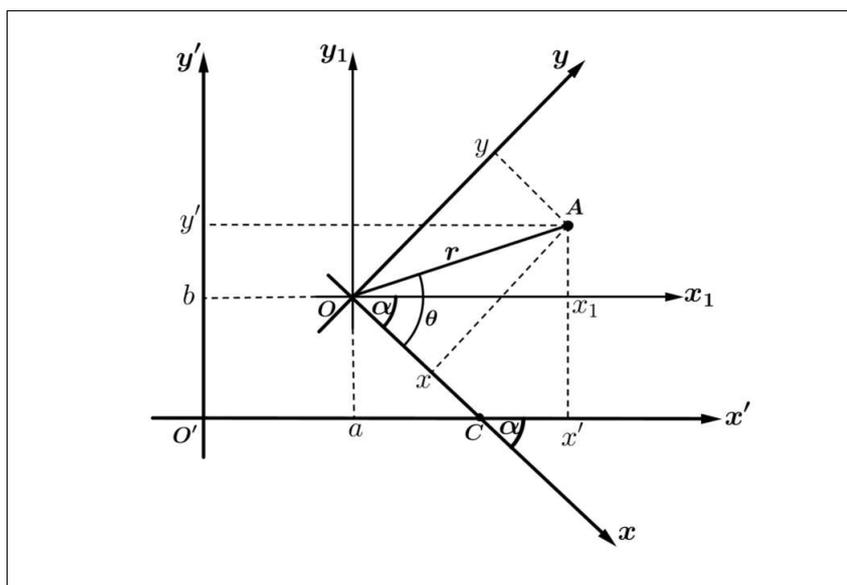


Figura 1.10: Mudança de coordenadas de um ponto.

Sejam  $\angle AOx = \theta$  e  $r = \overline{OA}$  tal que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta. \end{cases}$$

Considere o sistema  $x_1Oy_1$ , tal que  $Ox_1 \parallel Ox'$ ,  $Oy_1 \parallel Oy'$  e  $\angle x_1OA = \theta - \alpha$ . Assim em  $x_1Oy_1$  temos

$$x_1 = r \cos(\theta - \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

mas, de acordo com a figura 1.10,

$$x' = x_1 + a,$$

portanto

$$x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha + a.$$

Da mesma forma

$$y_1 = r \sin(\theta - \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha - r \cos \theta \sin \alpha = y \cos \alpha - x \sin \alpha.$$

Mas  $y' = y_1 + b$ , portanto

$$y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + b.$$

Concluimos que

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + a \\ y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + b \end{cases} \quad (1.5)$$

determinam as coordenadas  $x'$  e  $y'$  de  $A$  no referencial  $x'O'y'$  em função das coordenadas  $x$  e  $y$  de  $A$  no referencial  $xOy$ .

Podemos inverter as equações (1.5) para escrever as coordenadas  $x$  e  $y$  em função das novas coordenadas  $x'$  e  $y'$ . Da segunda equação (1.5) temos

$$y = \frac{y' + x \operatorname{sen} \alpha - b}{\cos \alpha}, \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right),$$

que substituído na primeira equação (1.5), fornece

$$x = (x' - a) \cos \alpha - (y' - b) \operatorname{sen} \alpha.$$

Com o mesmo raciocínio obtemos

$$y = (y' - b) \cos \alpha + (x' - a) \operatorname{sen} \alpha.$$

Portanto, as equações

$$\begin{cases} x = (x' - a) \cos \alpha - (y' - b) \operatorname{sen} \alpha \\ y = (y' - b) \cos \alpha + (x' - a) \operatorname{sen} \alpha, \end{cases} \quad (1.6)$$

transformam  $(x', y')$  para  $(x, y)$ . Essas equações são válidas para  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . O caso  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  sendo tratado separadamente a partir de (1.5).

As equações (1.6) podem ser escritas da mesma forma que (1.5):

$$\begin{cases} x = x' \cos \bar{\alpha} + y' \operatorname{sen} \bar{\alpha} + \bar{a} \\ y = -x' \operatorname{sen} \bar{\alpha} + y' \cos \bar{\alpha} + \bar{b}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Basta considerar  $x'O'y'$  como o sistema antigo e  $xOy$  como o novo. Assim,  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  serão as coordenadas do centro  $O'$  em  $xOy$  e  $\bar{\alpha} = \angle x'Cx = -\alpha$ .

Pelo fato de preservarem distância e ângulo, qualquer isometria  $T$  transforma o plano  $\Pi$  munido de um sistema de coordenadas ortogonais  $(\Pi, xOy)$ , num plano  $\Pi'$ , também munido de um sistema ortogonal  $x'O'y'$  em que  $O'$ ,  $x'$  e  $y'$  são as imagens respectivas de  $O$ ,  $x$  e  $y$  sob  $T$ . Desta forma, um ponto  $A$  de  $(\Pi, xOy)$  é transformado por  $T$  no ponto  $A' = T(A)$ , cujas coordenadas no sistema  $x'O'y'$  são as mesmas coordenadas de  $A$  no sistema  $xOy$ . Ver figura 1.11.

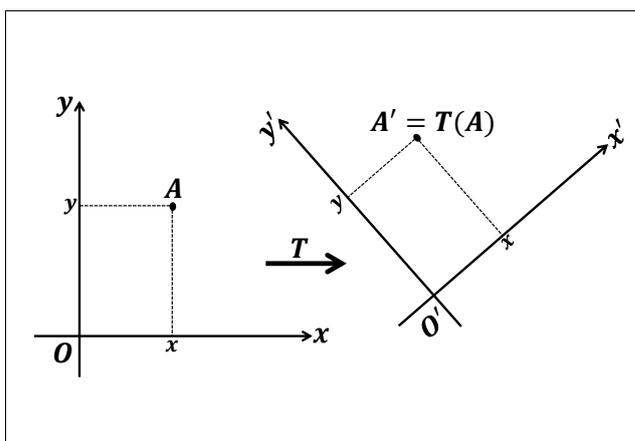


Figura 1.11: As coordenadas de  $A' = T(A)$  em  $x'O'y'$  são iguais às coordenadas de  $A$  em  $xOy$ .

De acordo com a análise feita anteriormente, podemos então afirmar que, se fixarmos o sistema de eixos ortogonais  $xOy$ , uma isometria  $T$  do plano  $\Pi$  transforma o ponto  $A(x, y)$  no ponto  $T(A) = A' = (x', y')$ , cujas coordenadas, neste mesmo sistema  $xOy$  são dadas pelas equações (1.5)

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + a \\ y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + b, \end{cases}$$

onde  $(a, b)$  são as coordenadas de  $O' = T(O)$  e  $\alpha$  é o ângulo entre  $Ox$  e  $O'x' = T(Ox)$ .

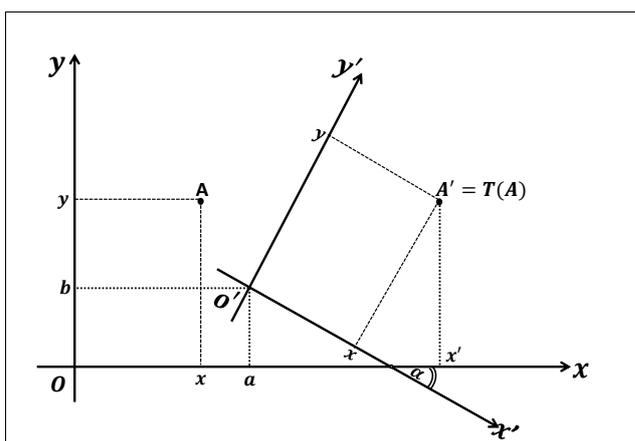


Figura 1.12: Coordenadas de  $A'$  em  $xOy$ .

Sendo assim, devemos poder mostrar que a transformação no plano que relaciona  $(x, y)$  e  $(x', y')$  por meio das equações (1.7) é uma isometria no plano. É o que analisaremos na seção seguinte.

### 1.3 Invariância sob as equações do tipo (1.7)

**Proposição 1.1.** *A distância  $d$  entre dois pontos é invariante sob a transformação (1.7).*

**Demonstração 1.1.** *Sejam  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  as respectivas coordenadas dos pontos  $A_1$  e  $A_2$  no sistema  $xOy$ . A distância entre  $A_1$  e  $A_2$  é dada por*

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

*Pelas equações (1.5) as coordenadas de  $A_1$  e  $A_2$  no sistema  $x'O'y'$  são*

$$A_1 : \begin{cases} x'_1 &= x_1 \cos \alpha + y_1 \operatorname{sen} \alpha + a \\ y'_1 &= -x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \cos \alpha + b \end{cases}$$

e

$$A_2 : \begin{cases} x'_2 &= x_2 \cos \alpha + y_2 \operatorname{sen} \alpha + a \\ y'_2 &= -x_2 \operatorname{sen} \alpha + y_2 \cos \alpha + b. \end{cases}$$

*Assim  $d' = d'(A_1, A_2)$  em  $x'O'y'$  é obtido por*

$$\begin{aligned} d'^2 &= (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 \\ &= [(x_1 \cos \alpha + y_1 \operatorname{sen} \alpha + a) - (x_2 \cos \alpha + y_2 \operatorname{sen} \alpha + a)]^2 + \\ &\quad + [(-x_1 \operatorname{sen} \alpha + y_1 \cos \alpha + b) - (-x_2 \operatorname{sen} \alpha + y_2 \cos \alpha + b)]^2. \end{aligned}$$

*Logo*

$$(x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 = (x_1 - x_2)^2(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha) + (y_1 - y_2)^2(\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha).$$

*Então*

$$d'^2(A_1, A_2) = (x'_1 - x'_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = d^2(A_1, A_2).$$

■

#### 1.3.1 Invariância da circunferência

A equação de uma circunferência é, nada mais, do que a expressão da distância de um ponto  $(x, y)$  a um ponto fixo. Para mostrarmos a invariância da circunferência  $\Gamma$ , considere a equação (1.2c).

No sistema de coordenadas  $xOy$ , temos

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = 0,$$

onde  $p = -a$ ,  $q = -b$  e  $f = a^2 + b^2 - r^2$ . Vamos utilizar as fórmulas (1.7)(p.13) para escrevê-la no sistema  $x'O'y'$ . Segue que

$$x'^2 + y'^2 + 2p'x' + 2q'y' + f' = 0$$

é a equação da circunferência, onde

$$\begin{aligned} p' &= \bar{a} \cos \bar{\alpha} - \bar{b} \sin \bar{\alpha} + p \cos \bar{\alpha} - q \sin \bar{\alpha}, \\ q' &= \bar{a} \sin \bar{\alpha} + \bar{b} \cos \bar{\alpha} + p \sin \bar{\alpha} + q \cos \bar{\alpha}, \\ f' &= \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2p\bar{a} + 2q\bar{b} + f. \end{aligned}$$

Note que

$$p' = \bar{a} \cos \bar{\alpha} - \bar{b} \sin \bar{\alpha} + p \cos \bar{\alpha} - q \sin \bar{\alpha} \neq p$$

e

$$q' = \bar{a} \sin \bar{\alpha} + \bar{b} \cos \bar{\alpha} + p \sin \bar{\alpha} + q \cos \bar{\alpha} \neq q.$$

Portanto  $p$  e  $q$  não são invariantes. Agora  $p^2 + q^2 - f$  é invariante, pois

$$\begin{aligned} p'^2 + q'^2 - f' &= [\bar{a} \cos \bar{\alpha} - \bar{b} \sin \bar{\alpha} + p \cos \bar{\alpha} - q \sin \bar{\alpha}]^2 \\ &+ [\bar{a} \sin \bar{\alpha} + \bar{b} \cos \bar{\alpha} + p \sin \bar{\alpha} + q \cos \bar{\alpha}]^2 \\ &- (\bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2p\bar{a} + 2q\bar{b} + f) \\ &= p^2 + q^2 - f. \end{aligned}$$

Isso era esperado, já que  $p^2 + q^2 - f = r^2$ , em que  $r$  é o raio da circunferência  $\Gamma$ .

### 1.3.2 Invariância da reta

Seja  $l$  uma reta de equação  $ax + by + c = 0$  no sistema  $xOy$ . No sistema  $x'O'y'$ , utilizando (1.7)(p.13), esta equação se escreve como

$$a'x' + b'y' + c' = 0,$$

em que

$$\begin{aligned} a' &= a \cos \bar{\alpha} - b \sin \bar{\alpha}, \\ b' &= a \sin \bar{\alpha} + b \cos \bar{\alpha}, \\ c' &= a\bar{a} + b\bar{b} + c. \end{aligned}$$

Portanto, a reta  $l$  no sistema  $xOy$  é transformada numa reta  $l'$  no sistema  $x'O'y'$ .

**Definição 1.6** (Paralelismo). *Dois retas  $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  são ditas paralelas,  $l_1 \parallel l_2$ , se  $c_1 \neq c_2$  e  $(a_1, b_1) = t(a_2, b_2)$ , para algum  $t \in \mathbb{R}^*$ .*

**Proposição 1.2.** *O paralelismo entre retas é invariante sob a transformação (1.7) .*

**Demonstração 1.2.** *Sejam  $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  duas retas paralelas no sistema  $xOy$ . Logo  $c_1 \neq c_2$  e  $a_1 = ta_2$  e  $b_1 = tb_2$ , com  $t \in \mathbb{R}^*$ . No sistema  $x'O'y'$  temos que*

$$a'_1 = a_1 \cos \bar{\alpha} - b_1 \operatorname{sen} \bar{\alpha}$$

e

$$a'_2 = a_2 \cos \bar{\alpha} - b_2 \operatorname{sen} \bar{\alpha}.$$

Logo

$$\begin{aligned} a'_1 &= ta_2 \cos \bar{\alpha} - tb_2 \operatorname{sen} \bar{\alpha} \\ &= ta'_2. \end{aligned}$$

Com o mesmo raciocínio chegamos a

$$b'_1 = tb'_2,$$

onde  $c'_1 = a_1\bar{a} + b_1\bar{b} + c_1$  e  $c'_2 = a_2\bar{a} + b_2\bar{b} + c_2$ . ■

**Definição 1.7.** *Duas retas  $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  são ditas concorrentes quando possuem um ponto em comum.*

Se as retas  $l_1$  e  $l_2$  não são retas paralelas ao eixo  $Oy$ , então a equação (1.3) pode ser escrita na forma  $l_1 : y = k_1x + s_1$  e  $l_2 : y = k_2x + s_2$ . Temos que duas retas são concorrentes em um ponto  $P$ , se  $k_1 \neq k_2$ . Sejam  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  os ângulos que estas retas fazem com  $Ox$  e  $\theta$  o ângulo formado entre elas. Ver figura 1.13.

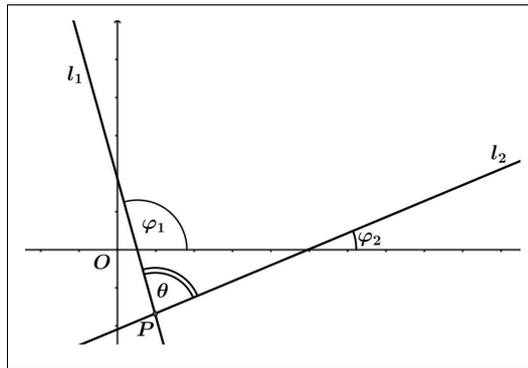


Figura 1.13: Ângulo entre retas.

Note que  $\theta = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $k_1 = \tan \varphi_1$  e  $k_2 = \tan \varphi_2$ . Logo temos

$$\tan \theta = \tan(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\tan \varphi_1 - \tan \varphi_2}{\tan \varphi_1 \tan \varphi_2 + 1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2 + 1}. \quad (1.8)$$

**Proposição 1.3.** *O ângulo entre duas retas concorrentes é invariante sob a transformação (1.7).*

**Demonstração 1.3.** *Sejam  $l_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $l_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$  duas retas concorrentes no sistema  $xOy$  e  $\theta = \delta_{l_1l_2}$  o ângulo entre  $l_1$  e  $l_2$ . Assim*

$$\cos \theta = \frac{\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}}.^3$$

No sistema  $x'O'y'$  pela transformação (1.7) temos que

$$a'_1 = a_1 \cos \bar{\alpha} - b_1 \sin \bar{\alpha} \quad e \quad b'_1 = a_1 \sin \bar{\alpha} + b_1 \cos \bar{\alpha}$$

e

$$a'_2 = a_2 \cos \bar{\alpha} - b_2 \sin \bar{\alpha} \quad e \quad b'_2 = a_2 \sin \bar{\alpha} + b_2 \cos \bar{\alpha}.$$

Segue então que

$$\begin{aligned} \frac{\langle (a'_1, b'_1), (a'_2, b'_2) \rangle}{\sqrt{(a_1'^2 + b_1'^2)(a_2'^2 + b_2'^2)}} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}} \\ &= \frac{\langle (a_1, b_1), (a_2, b_2) \rangle}{\sqrt{(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2)}} = \cos \theta. \end{aligned}$$

■

## Distância entre retas

Quando o ângulo entre duas retas  $l_2$  e  $l_1$  é nulo, estas retas coincidem ou são paralelas. Assim, é possível estabelecer a distância entre elas. Sejam  $l_1 : y = k_1x + s_1$  e  $l_2 : y = k_2x + s_2$  duas retas paralelas,  $S_1 = (0, s_1)$  e  $S_2 = (0, s_2)$  os pontos onde  $l_1$  e  $l_2$  intersectam  $Oy$  e  $\varphi$  o ângulo que estas retas fazem com  $Ox$ .

<sup>3</sup>Para definição de produto escalar e o valor do ângulo  $\theta$  entre dois vetores no plano, veja [8].

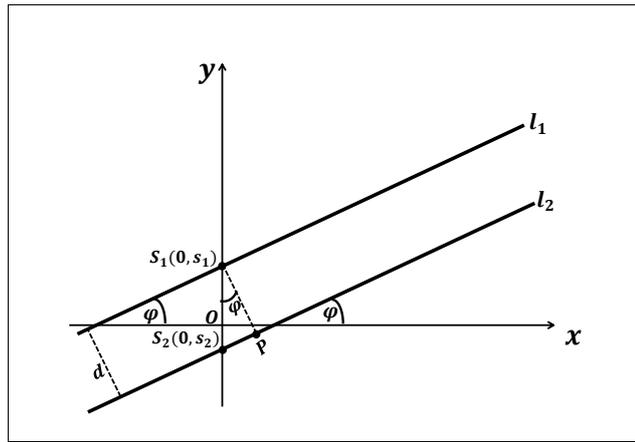


Figura 1.14: Distância entre retas.

Seja  $P \in l_2$  o pé da perpendicular a  $l_2$  baixada de  $S_1$ ; desta forma  $\overline{S_1P}$  representa a distância entre  $l_2$  e  $l_1$ . No triângulo retângulo  $\triangle S_2S_1P$  temos

$$\cos \varphi = \frac{\overline{S_1P}}{|s_1 - s_2|} \Rightarrow \overline{S_1P} = \cos \varphi |s_1 - s_2|$$

e, visto que  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  e que  $\sin \varphi = \tan \varphi \cos \varphi$ , segue que

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 1}}.$$

Então a distância  $d$  entre  $l_2$  e  $l_1$  é dada por

$$d = \frac{|s_1 - s_2|}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad (1.9)$$

já que  $k = \tan \varphi$ .

Como a transformação (1.7) preserva o paralelismo entre retas e a distância entre dois pontos, segue que a distância entre duas retas é invariante.

# Capítulo 2

## Geometria de Galileu - distância e ângulo

### 2.1 Conexão entre geometria e mecânica

Vimos que a transformação de coordenadas mais geral entre um sistema ortogonal  $xOy$  e um sistema ortogonal  $x'O'y'$  é do tipo (1.5)

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \alpha + y \sin \alpha + a \\y' &= y \cos \alpha - x \sin \alpha + b,\end{aligned}$$

em que  $(a, b)$  são as coordenadas de  $O'$  no sistema  $xOy$ .

Como consequência, a transformação acima preserva a distância entre dois pontos do plano euclidiano, já que ela só afeta a forma como esses pontos são observados.

No mundo físico, no entanto, um objeto é determinado pelas suas coordenadas espaciais e pelo tempo. Devemos então acrescentar a coordenada temporal ao nosso sistema de referência.

A relação entre sistemas de coordenadas distintos é estabelecida pelo princípio fundamental da mecânica, o princípio de Galileu: *As leis básicas da física são idênticas em todos os sistemas de referência que se movem com velocidade uniforme uns em relação aos outros*[11]. Assim, para que as mesmas leis da física sejam válidas em dois sistemas de coordenadas, estes devem se distinguir por um movimento uniforme. Segue então que o vetor  $\vec{OO'}$  deve poder ser expresso como

$$\vec{OO'} = \vec{v}t + (a, b) = (vt \cos \beta + a, vt \sin \beta + b),$$

em que  $\vec{v} = (v \cos \beta, v \sin \beta)$  é a velocidade constante relativa entre os sistemas,  $\beta$  é o ângulo formado entre  $\vec{v}$  e a direção  $O'x'$  e  $a$  e  $b$  são as coordenadas de  $O$  no sistema

$x'O'y'$  no instante  $t = 0$ . Conforme ilustra a figura 2.1.

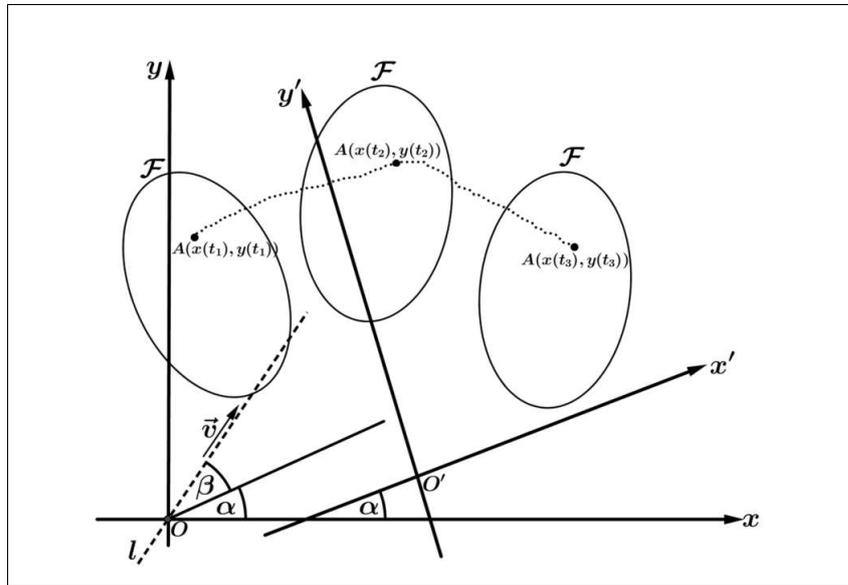


Figura 2.1: Origem  $O$  se movendo com velocidade  $v$ .

Como a diferença temporal entre dois eventos não pode ser afetada pela forma como é observado um sistema, a coordenada temporal deve seguir a lei de transformação

$$t' = t + d,$$

em que  $d$  é constante.

Sendo assim, a expressão matemática do princípio de Galileu que estabelece a relação entre dois referenciais inerciais <sup>1</sup> é dada pelas transformações

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha + a + v \cos \beta t \\ y' = -x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha + b + v \operatorname{sen} \beta t \\ t' = t + d. \end{cases} \quad (2.1)$$

Estas são chamadas de *transformações de Galileu* do espaço-tempo.

### 2.1.1 Transformação de Galileu para o movimento retilíneo

No movimento retilíneo, consideramos o ponto  $A = A(x)$  se movendo ao longo de uma reta fixa  $r$ . Assim a origem  $O$  do sistema de referência inercial  $Ox$  se

<sup>1</sup>Referencial Inercial é um sistema de referência não acelerado, isto é, um sistema onde é válida a Lei da Inércia (Primeira Lei de Newton). [11]

move com velocidade constante  $\vec{v}$  em relação a  $O'$ . Isto é, no instante  $t$ , a coordenada  $a(t)$  do ponto em movimento  $O$  em relação ao sistema  $O'x'$  é dada por

$$a(t) = a_0 + vt,$$

onde  $t$  é o tempo e  $a_0$  é a coordenada de  $O$  em  $O'x'$  no instante  $t = 0$ .

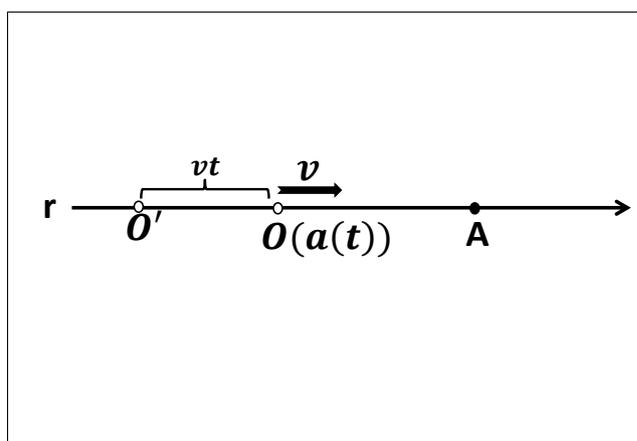


Figura 2.2: Origem  $O$  se movendo com velocidade  $v$  em relação a  $O'$ .

Portanto um ponto  $A$  de coordenada  $x$  em  $Ox$ , terá como coordenada em  $O'x'$

$$x' = x + a(t),$$

de onde segue então que

$$x' = x + vt + a_0.$$

Acrescentando-se a relação

$$t' = t + d$$

que descreve uma mudança no tempo de origem, chegamos às equações

$$\begin{cases} x' = x + vt + a_0 \\ t' = t + d. \end{cases} \quad (2.2)$$

Estas equações são chamadas de *transformações de Galileu para o movimento retilíneo*.

### 2.1.2 A geometria do princípio de Galileu

Se as equações (2.2) são as equações que nos permitem passar de um referencial inercial para outro, verificaremos quais propriedades geométricas são preservadas pelas transformações de Galileu para descobrir a geometria associada a ela. Para tal,

cria-se um modelo cartesiano desta geometria, denominada geometria de Galileu. A geometria de Galileu obedece os axiomas de Hilbert de incidência e de ordem, além do axioma das paralelas. Desta forma, as retas do modelo cartesiano da geometria de Galileu têm expressões similares às expressões assumidas no modelo cartesiano da geometria euclidiana.

O estudo da geometria de Galileu é realizado comparando-se suas propriedades com as propriedades da geometria euclidiana. Por simplicidade, assim como na geometria euclidiana, utilizaremos as coordenadas  $x$  e  $y$  para o plano de Galileu, onde o  $y$  representará a coordenada espacial de um ponto  $A$  da reta  $r$  e  $x$  denotará uma coordenada temporal. Desta forma, no plano  $xOy$  de Galileu [17], estamos interessados nas propriedades que são invariantes sob as transformações

$$\begin{cases} x' &= x + a \\ y' &= vx + y + b. \end{cases} \quad (2.3)$$

A transformação de Galileu (2.3) é composta por duas transformações:

(i) o cisalhamento

$$\begin{cases} x_1 &= x \\ y_1 &= vx + y, \end{cases} \quad (2.4)$$

descreve o movimento uniforme, com velocidade  $v$ , da origem  $O_1$  do sistema em movimento  $Oy_1$  ao longo de uma reta  $r$ . Este cisalhamento deixa todos os pontos do eixo  $Oy$  fixos e as retas paralelas ao eixo  $Oy$  invariantes. Um cisalhamento  $\mathcal{C}$  é uma aplicação injetora, pois  $(x'_1, y'_1) = (x'_2, y'_2)$  implica  $(x_1, vx_1 + y_1) = (x_2, vx_2 + y_2)$  o que implica em  $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ . Logo, um cisalhamento é uma bijeção do plano.

(ii) a translação

$$\begin{cases} x' &= x_1 + a \\ y' &= y_1 + b, \end{cases} \quad (2.5)$$

descreve o deslocamento de  $O_1$  para  $O'$ .

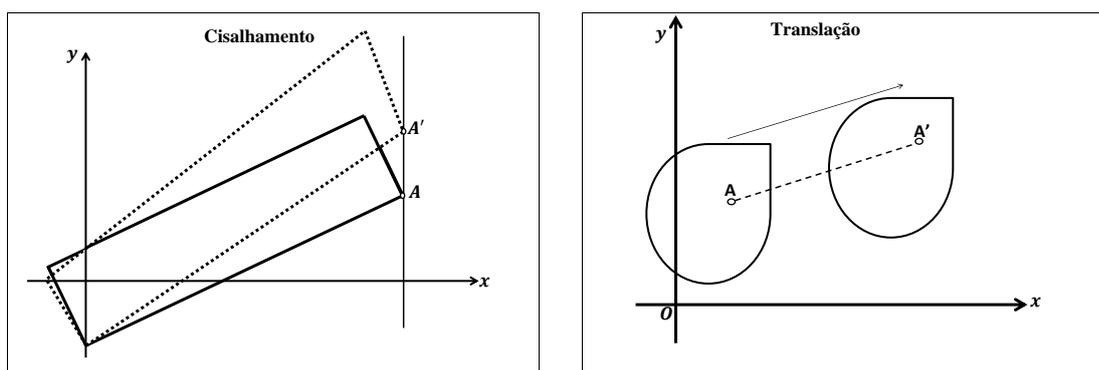


Figura 2.3: Composição que forma a transformação de Galileu.

Para mostrar a invariância de algumas propriedades na geometria de Galileu, às vezes, é suficiente mostrar a ação do cisalhamento (2.4) se a invariância sob a translação (2.5) é imediata. Como exemplo mostraremos três propriedades fundamentais.

**Proposição 2.1.** *As transformações (2.3) levam retas em retas.*

**Demonstração 2.1.** *De acordo com o que vimos no capítulo 1, uma translação leva retas em retas. Logo, basta mostrar que esta propriedade vale para o cisalhamento. Segue da definição de cisalhamento que cada reta paralela a  $Oy$  é levada em si própria. Sejam  $A$  um ponto da reta  $r$  que passa pela origem  $O$  e  $A'$  a imagem de  $A$  por (2.4). Denotemos a reta  $OA'$  por  $r'$ , os pontos onde a reta  $m \parallel Oy$  intersecta  $r$  e  $r'$  por  $M$  e  $M'$  e, por  $Q$  e  $P$  os pontos de interseção das retas  $AA'$  e  $m$  com  $Ox$ , conforme figura 2.4.*

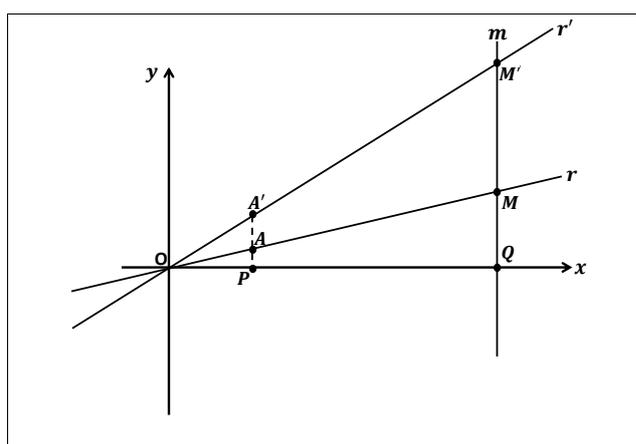


Figura 2.4: O cisalhamento leva reta em reta.

Temos que  $x = x' = \overline{OP}$ ,  $y = \overline{AP}$  e  $y' = \overline{A'P}$ . Logo, supondo-se  $\overline{AP} \neq 0$ ,

$$\frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OP}v + \overline{AP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OP}v}{\overline{AP}} + 1.$$

Mas

$$\frac{\overline{M'Q}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{A'P}}{\overline{AP}},$$

então

$$\frac{\overline{M'Q}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{AP}} v + 1$$

e

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{MQ}}.$$

Assim

$$\frac{\overline{M'Q}}{\overline{MQ}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{MQ}} v + 1,$$

então

$$\overline{M'Q} = \overline{OQ} v + \overline{MQ}.$$

Portanto (2.4) leva cada ponto  $M$  da reta  $r$  em um ponto  $M'$  da reta  $r'$ , ou seja, o cisalhamento leva a reta  $r$  para a reta  $r'$ . ■

Na geometria de Galileu uma reta paralela <sup>2</sup> a  $Oy$  sempre é levada a uma reta paralela a  $Oy$  sob as transformações (2.3) enquanto que na geometria euclidiana isto não ocorre sob (1.5).

**Definição 2.1.** Na geometria de Galileu uma reta paralela ao eixo  $Oy$  é chamada de *reta especial*. Caso contrário a reta é chamada de *ordinária* [17].

**Proposição 2.2.** As transformações (2.3) levam retas paralelas em retas paralelas.

**Demonstração 2.2.** Seja  $r_1 \parallel r$ , como ilustrado figura 2.5.

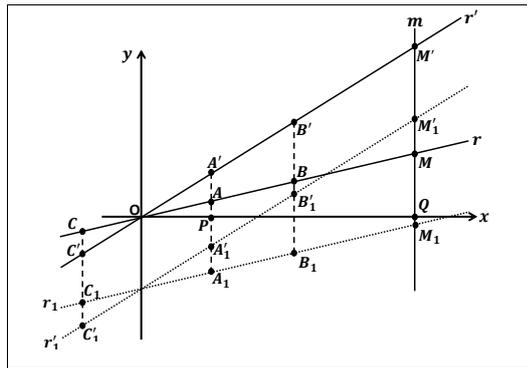


Figura 2.5: Retas paralelas levadas em retas paralelas.

Como o cisalhamento (2.4) translada os pontos de uma reta vertical  $m$  sobre si própria, os segmentos  $AA_1, BB_1, CC_1, \dots$ , todos de comprimentos iguais a  $d$ , são levados aos segmentos  $A'A'_1, B'B'_1, \dots$ , de comprimentos iguais  $\overline{A'A'_1} = \overline{B'B'_1} = \overline{C'C'_1} =$

<sup>2</sup>Duas retas são paralelas se elas não se intersectam.

... =  $d$ . Como vimos na proposição 2.1, os extremos  $A', B', C', \dots$  pertencem à reta  $r'$ , imagem de  $r$  e os extremos  $A'_1, B'_1, C'_1, \dots$  pertencem à reta  $r'_1$ , imagem de  $r_1$ . Portanto as retas paralelas  $r$  e  $r_1$  são levadas às retas paralelas  $r'$  e  $r'_1$  pela transformação (2.4). ■

**Proposição 2.3.** As transformações (2.3) levam segmentos colineares  $AB$  e  $CD$  em segmentos colineares  $A'B'$  e  $C'D'$  com  $\frac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ .

**Demonstração 2.3.** Sejam  $AB$  e  $CD$  segmentos contidos na reta  $r$  e  $A'B'$  e  $C'D'$  contidos em  $r'$ , imagem de  $r$  pelo cisalhamento (2.4), conforme figura 2.6.

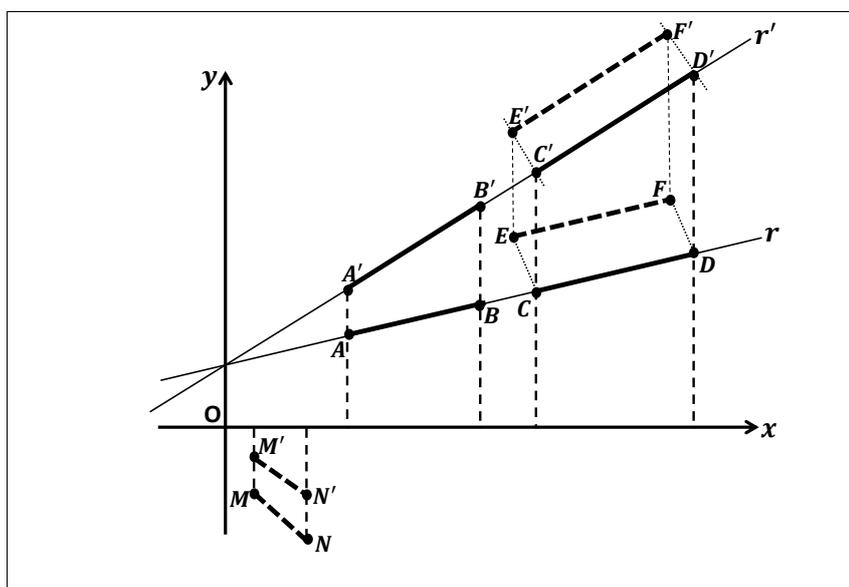


Figura 2.6: Proporcionalidade entre segmentos.

Pelo paralelismo dos segmentos  $AA', BB', CC', DD'$  segue que  $\frac{\overline{C'D'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ . Agora se  $\overline{AB}$  e  $\overline{EF}$  são segmentos paralelos e  $A'B'$  e  $E'F'$  são suas imagens por (2.4), onde  $\overline{EF} = \overline{CD}$  e  $\overline{E'F'} = \overline{C'D'}$ , então

$$\frac{\overline{E'F'}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AB}}.$$

Segue que o paralelogramo  $CDFE$  é levado ao paralelogramo  $C'D'F'E'$ . Portanto a razão entre os comprimentos de segmentos paralelos é mantida na geometria de Galileu. Mas se  $\overline{AB}$  é não paralelo a  $\overline{MN}$ , figura(2.6), então a transformação (2.4) leva estes segmentos aos segmentos  $A'B'$  e  $M'N'$  tais que

$$\frac{\overline{M'N'}}{\overline{A'B'}} \neq \frac{\overline{MN}}{\overline{AB}}.$$

## 2.2 Distância algébrica entre dois pontos

Sejam  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$ , a distância euclidiana  $d(A, B)$  é dada por

$$d^2(A, B) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Logo, se  $A'$  e  $B'$  são imagens de  $A$  e  $B$  pelo cisalhamento (2.4), a distância euclidiana entre  $A'$  e  $B'$  é dada por:

$$\begin{aligned} d^2(A', B') &= (x_1 - x_2)^2 + (vx_1 + y_1 - vx_2 - y_2)^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + v^2(x_1 - x_2)^2 + 2v(x_1 - x_2)(y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Segue que, de modo geral,

$$d^2(A, B) \neq d^2(A', B').$$

Portanto, se (2.4) devem ser as isometrias do plano de Galileu, devemos definir a distância entre dois pontos de forma diferente que na geometria euclidiana, a fim dessa distância ser invariante por (2.4). Assim, podemos estabelecer a definição seguinte.

**Definição 2.2.** A distância algébrica  $d(A_1, A_2) = d_{A_1A_2}$  entre dois pontos  $A_1$  e  $A_2$  no plano de Galileu é definida por

$$d_{A_1A_2} = |x_2 - x_1|. \quad (2.6)$$

Onde  $x_1$  e  $x_2$  são as abscissas de  $A_1$  e  $A_2$ , respectivamente.

A distância entre dois pontos na geometria de Galileu equivale ao intervalo de tempo entre dois eventos na mecânica. Assim, justifica-se uma determinada orientação e podemos considerar a distância algébrica entre dois pontos tal que  $d_{A_1A_2} = -d_{A_2A_1}$  e  $d_{A_1A_2} > 0$  se  $x_2 > x_1$ .

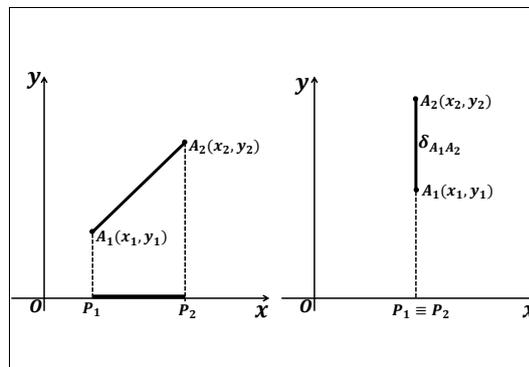


Figura 2.7: Distância algébrica entre dois pontos no plano de Galileu.

Seja  $d_{A_1A_2}$  igual ao comprimento  $P_1P_2$ , projeção do segmento  $A_1A_2$  sobre o

eixo  $Ox$ . Segue que a diferença  $x_2 - x_1$  das abscissas de  $A_2$  e  $A_1$  é invariante sob (2.3).

Se a distância  $d_{A_1A_2}$  for nula, isto é,  $x_1 = x_2$ , então  $A_1$  e  $A_2$  pertencem à mesma reta especial. Definimos a *distância especial* como

$$\delta_{A_1A_2} = |y_2 - y_1|. \quad (2.7)$$

Assim como na definição 2.2, podemos considerar a distância algébrica entre dois pontos sobre uma reta especial, tal que  $\delta_{A_1A_2} = -\delta_{A_2A_1}$  e  $\delta_{A_1A_2} > 0$  se  $y_2 > y_1$ .

Se as abscissas de  $A_1(x_1, y_1)$  e  $A_2(x_2, y_2)$  coincidem ( $x_1 = x_2$ ), então a transformação (2.3) leva estes pontos aos pontos  $A'_1(x'_1, y'_1)$  e  $A'_2(x'_2, y'_2)$ , com  $x'_1 = x_1 + a$  e

$$\begin{aligned} y'_1 &= vx_1 + y_1 + b, \\ y'_2 &= vx_1 + y_2 + b. \end{aligned}$$

Então  $y'_2 - y'_1 = (vx_1 + y_2 + b) - (vx_1 + y_1 + b) = y_2 - y_1$ . Novamente,  $\delta_{A_1A_2}$  é invariante por (2.3).

## 2.3 Circunferência no plano de Galileu

**Definição 2.3.** Uma circunferência  $\mathcal{S}$  no plano de Galileu é um conjunto de pontos  $M(x, y)$  cujas distâncias para um ponto fixo  $Q(a, b)$  têm valor absoluto constante  $r$ , onde  $Q$  é o centro e  $r \geq 0$  é o raio.

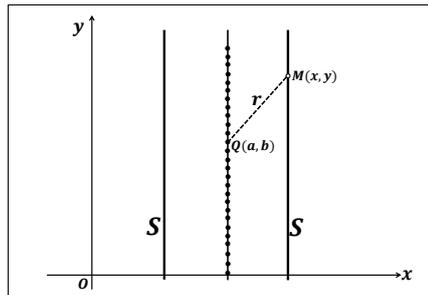


Figura 2.8: Circunferência de Galileu.

Se  $r \neq 0$  temos  $r = d_{QM} = |x - a|$ , logo

$$x = a - r$$

ou

$$x = a + r.$$

Portanto a circunferência  $\mathcal{S}$  de Galileu equivale a duas retas especiais e o raio é a metade da distância euclidiana entre estas duas retas. Existem uma infinidade de centros sobre a reta especial que passa por  $Q$ . Se  $r = 0$  (distância euclidiana) então as duas retas especiais são coincidentes.

## 2.4 Ângulo e distância entre duas retas

**Definição 2.4.** *Sejam  $l_1$  e  $l_2$  duas retas ordinárias que se intersectam no ponto  $Q$ . O ângulo  $\delta_{l_1 l_2}$  entre as retas  $l_1$  e  $l_2$  é o comprimento do arco circular  $N_1 N_2$ , onde  $N_1$  e  $N_2$  são pontos de interseção entre  $l_1$  e  $l_2$  com a circunferência unitária centrada em  $Q$ .*

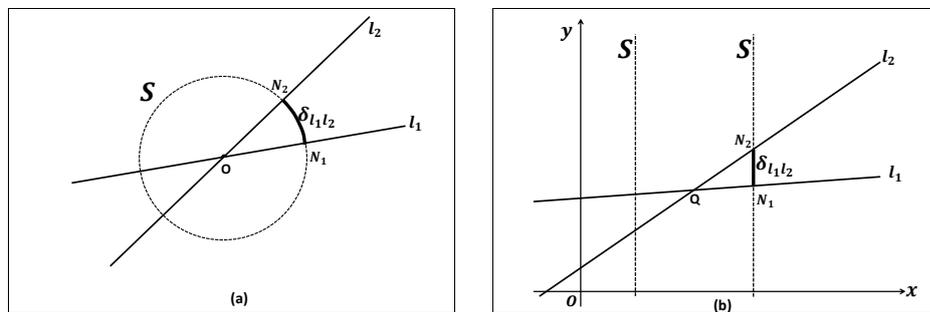


Figura 2.9: (a) Ângulo na geometria euclidiana. (b) Ângulo na geometria de Galileu.

No plano de Galileu o ângulo  $\delta_{l_1 l_2}$  entre as retas  $l_1$  e  $l_2$  é igual à distância especial  $\delta_{N_1 N_2}$  entre  $N_1$  e  $N_2$ , desta forma a orientação do ângulo é dada pela orientação desta distância. Para determinarmos o ângulo  $\delta_{l_1 l_2}$  traçamos uma reta especial  $m$  a uma unidade à direita de  $Q$ , onde  $\{Q\} = l_1 \cap l_2$ . Marcamos  $N_1$  e  $N_2$  tais que  $\{N_1\} = m \cap l_1$  e  $\{N_2\} = m \cap l_2$ .

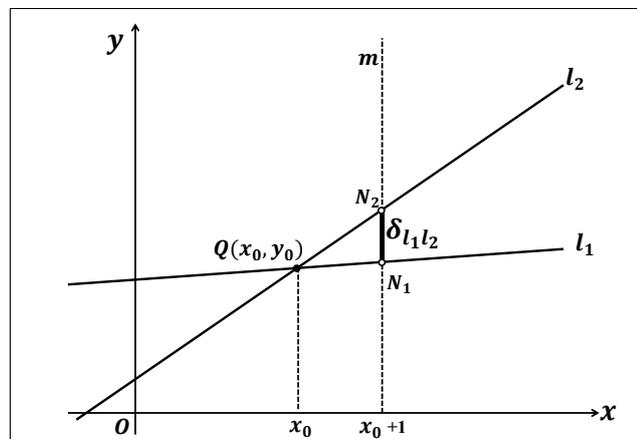


Figura 2.10: Medida do ângulo de Galileu.

As equações das retas  $l_1$ ,  $l_2$  e  $m$  são dadas por

$$y = k_1x + s_1,$$

$$y = k_2x + s_2$$

e

$$m = x_0 + 1$$

respectivamente. Logo as coordenadas de  $N_1$  e  $N_2$  são

$$(x_0 + 1, k_1(x_0 + 1) + s_1)$$

e

$$(x_0 + 1, k_2(x_0 + 1) + s_2).$$

Segue que

$$\begin{aligned} \delta_{l_1l_2} = \delta_{N_1N_2} &= [k_2(x_0 + 1) + s_2] - [k_1(x_0 + 1) + s_1] \\ &= [(k_2x_0 + s_2) - (k_1x_0 + s_1)] + k_2 - k_1. \end{aligned}$$

Mas

$$k_2x_0 + s_2 = k_1x_0 + s_1,$$

pois  $Q(x_0, y_0)$  pertence a interseção entre  $l_1$  e  $l_2$ . Portanto

$$\delta_{l_1l_2} = k_2 - k_1. \quad (2.8)$$

Como o eixo  $Ox$  equivale ao eixo temporal e  $Oy$  ao espacial, a unidade de medida de ângulo é dada em  $m/s$ .

**Proposição 2.4.** *O ângulo entre duas retas é invariante sob a transformação de Galileu.*

**Demonstração 2.4.** *O ângulo  $\delta_{l_1l_2}$  entre duas retas  $l_1$  e  $l_2$  é medido sobre uma reta especial  $m$ ,  $x = x_0$ , que as intersecta, conforme ilustra a figura 2.11. Como o cisalhamento leva cada reta especial em si própria, logo*

$$\delta_{l_1l_2} = \delta_{AB},$$

onde  $A(x_0, y_A)$  e  $B(x_0, y_B)$  são os pontos tais que  $\{A\} = m \cap l_1$  e  $\{B\} = m \cap l_2$ . Portanto

$$\delta_{AB} = y_B - y_A.$$

Pelo cisalhamento

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = vx + y, \end{cases}$$

temos

$$A'(x_0, vx_0 + y_A) \quad e \quad B'(x_0, vx_0 + y_B)$$

e segue que

$$\delta_{A'B'} = (vx_0 + y_B) - (vx_0 + y_A) = y_B - y_A = \delta_{AB}.$$

■

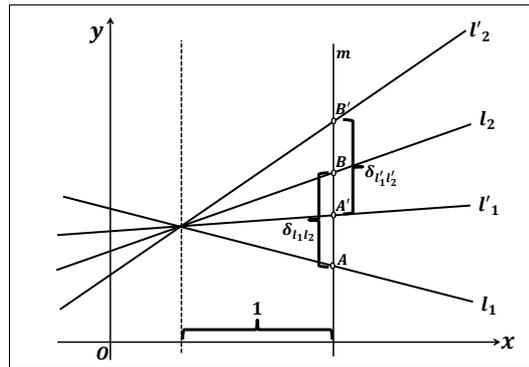


Figura 2.11: Invariância do ângulo de Galileu.

Se as retas  $l_1$  e  $l_2$  são paralelas, então temos  $\delta_{l_1 l_2} = k_2 - k_1 = 0$ . No entanto, dada qualquer reta especial  $m$ , se  $\{M_1\} = m \cap l_1$  e  $\{M_2\} = m \cap l_2$ , então  $y_{M_2} - y_{M_1}$  é constante qualquer que seja  $m$ .

**Definição 2.5.** A distância  $d_{l_1 l_2}$  entre duas retas ordinárias paralelas  $l_1$  e  $l_2$  é o comprimento do segmento direcionado  $M_1 M_2$  contido numa reta especial  $m$  que intersecta  $l_1$  e  $l_2$  em  $M_1$  e  $M_2$ , respectivamente. Caso  $l_1$  e  $l_2$  sejam retas especiais então  $d_{l_1 l_2} = x_2 - x_1$ , onde  $x_1$  é a abscissa de  $l_1$  e  $x_2$  de  $l_2$ . Veja a figura 2.12.

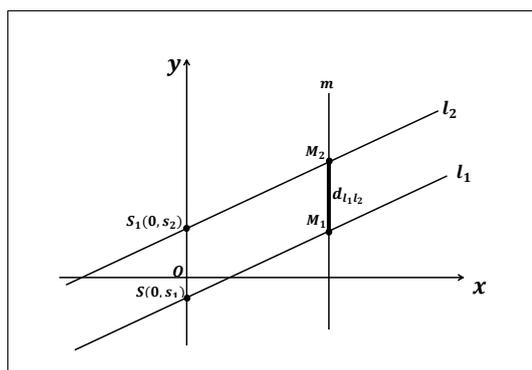


Figura 2.12: Distância entre retas.

Sendo as equações  $l_1 : y = k_1x + s_1$  e  $l_2 : y = k_2x + s_2$ , temos

$$d_{l_1 l_2} = s_2 - s_1. \quad (2.9)$$

Esta expressão é mais simples que o seu correspondente euclidiano (2.10)

$$d_{l_1 l_2} = \frac{|s_2 - s_1|}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

## 2.5 Distância entre ponto e reta

Na geometria euclidiana a distância de um ponto  $M$  para uma reta  $l$  é definida como a menor distância de  $M$  até um ponto  $P \in l$ . No caso da geometria de Galileu, o ponto  $P$  da reta  $l$ , cuja distância ao ponto  $M$  é mínima, de acordo com a definição 2.2, é o ponto de intersecção  $l \cap m$ , em que  $m$  é uma reta especial. Portanto a distância dever ser dada pela distância especial.

**Definição 2.6.** Na geometria de Galileu a distância  $d_{MI}$  de um ponto  $M(x_0, y_0)$  para uma reta ordinária  $l$  é a distância especial de  $M$  até o ponto  $P$ , intersecção de  $l$  com a reta especial  $m$  que passa por  $M$ . Caso  $l$  seja uma reta especial então  $d_{MI} = x - x_0$ , onde  $x$  é a abscissa de  $l$ . Observe a figura 2.13.

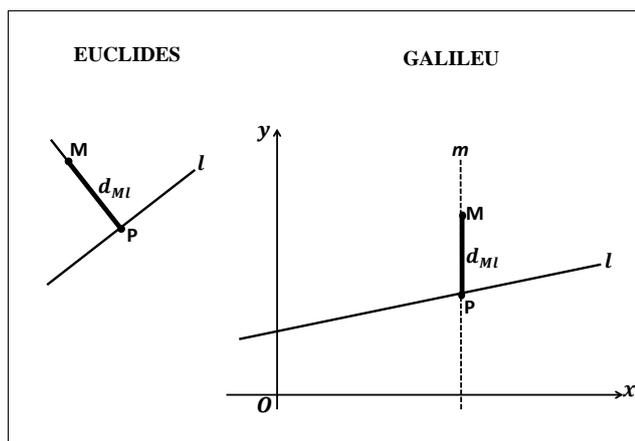


Figura 2.13: Distância entre ponto e reta.

Sejam  $l$  de equação  $y = kx + s$  e  $m$  a reta especial por  $M(x_0, y_0)$ . Então as coordenadas do ponto  $P$ ,  $P \in l \cap m$ , são  $(x_0, kx_0 + s)$ . Logo

$$-\overline{MP} = -\delta_{MP} = y_0 - (kx_0 + s),$$

portanto

$$-d_{Ml} = y_0 - kx_0 - s. \tag{2.10}$$

A menos do sinal, a distância do ponto  $M$  para a reta  $l$  fica determinada substituindo-se as coordenadas de  $M$  no lado esquerdo da equação  $y - kx - s = 0$  de  $l$ .

Nos próximos capítulos utilizaremos os conteúdos desenvolvidos até aqui para compararmos as propriedades de algumas figuras nessas duas geometrias, de Euclides e de Galileu.



# Capítulo 3

## Triângulos no plano de Galileu

Na geometria de Galileu um triângulo  $\triangle ABC$  é o polígono formado por três pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ , não colineares e três segmentos de retas ordinárias  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , conforme figura 3.1.

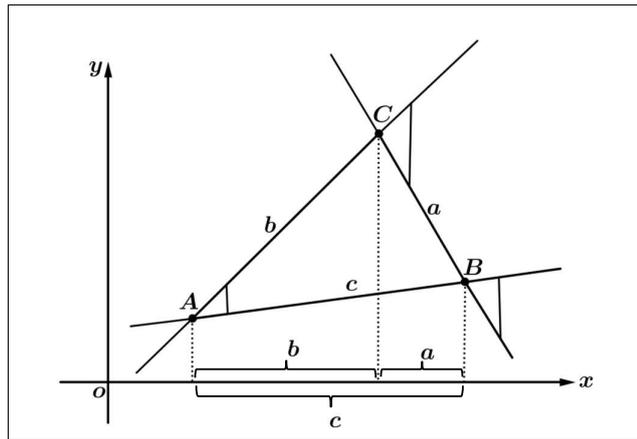


Figura 3.1: Triângulo no plano de Galileu.

Como na geometria euclidiana, utilizamos  $a$ ,  $b$  e  $c$  para denotar as retas suportes e os comprimentos dos lados do triângulo  $\triangle ABC$  que são opostos aos vértices indicados pelas letras correspondentes, ou seja, as distâncias positivas  $|d_{BC}| = a$ ,  $|d_{CA}| = b$  e  $|d_{AB}| = c$ . As magnitudes positivas dos ângulos de vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  são representadas por  $|\delta_{bc}| = \widehat{A}$ ,  $|\delta_{ca}| = \widehat{B}$  e  $|\delta_{ab}| = \widehat{C}$ . Às vezes, por simplicidade, chamaremos  $|d_{AB}|$  apenas de  $\overline{AB}$ . Nesta geometria não definimos ângulo externo, pois não há ângulo suplementar.

Sejam  $a$ ,  $b$  e  $c$  os lados de um triângulo no plano de Galileu. Se  $c$  é o lado maior, então

$$a + b = c. \tag{3.1}$$

Agora suponha que  $\widehat{C}$  seja o maior ângulo do triângulo  $\triangle ABC$  e sejam  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  as declividades das retas por  $BC$ ,  $CA$  e  $AB$ , respectivamente. Temos por (2.8), que  $\widehat{A} = k_2 - k_3$ ,  $\widehat{B} = k_3 - k_1$  e  $\widehat{C} = k_2 - k_1$ . Então

$$\widehat{A} + \widehat{B} = \widehat{C}. \quad (3.2)$$

**Definição 3.1** (Altura). A altura  $AP$  de um triângulo  $\triangle ABC$ , relativa ao vértice  $A$ , é o segmento sobre a reta especial que une o ponto  $A$  ao ponto  $P$ , em que  $P$  é a intersecção dessa reta especial com a reta suporte oposta ao  $A$ .

**Proposição 3.1.** Dado um triângulo  $\triangle ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  e  $c$  e ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$ , então vale

$$\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}}. \quad (3.3)$$

**Demonstração 3.1.** Sejam as alturas  $AP$ ,  $BQ$  e  $CR$  do triângulo  $ABC$ , conforme ilustra a figura 3.2.

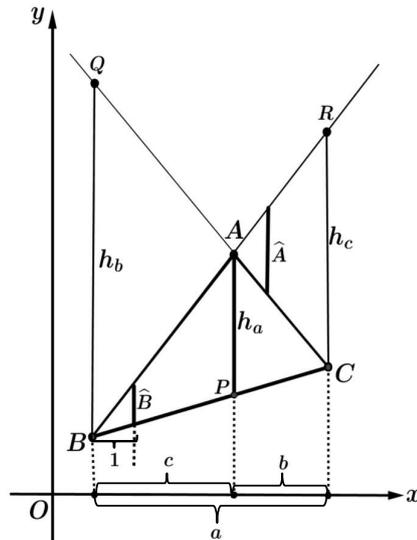


Figura 3.2: Proporcionalidade entre lado e ângulo.

Denotando-se as medidas dessas alturas por  $h_a$ ,  $h_b$  e  $h_c$ , temos:

$$h_a = \overline{AP} = |\delta_{AP}|,$$

$$h_b = \overline{BQ} = |\delta_{BQ}|,$$

$$h_c = \overline{CR} = |\delta_{CR}|.$$

Aplicando-se a definição de ângulo da geometria de Galileu ao ângulo  $B$  e a proposição (2.3,p.26) temos:

$$\frac{\widehat{B}}{1} = \frac{h_c}{a} \quad e \quad \frac{\widehat{A}}{1} = \frac{h_c}{b},$$

ou seja,

$$h_c = \widehat{B}a = \widehat{A}b.$$

Seguindo o mesmo raciocínio chegamos a

$$h_a = \widehat{B}c = \widehat{C}b$$

e

$$h_b = \widehat{C}a = \widehat{C}b.$$

Portanto

$$\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}}.$$

■

Esta relação é equivalente à *lei dos senos* na geometria euclidiana.

A relação (3.3) mostra que na geometria de Galileu os lados são proporcionais aos ângulos opostos:

$$a = \lambda\widehat{A}, \quad b = \lambda\widehat{B}, \quad c = \lambda\widehat{C}. \quad (3.4)$$

Para obtermos (3.2) a partir de (3.1) basta dividir os dois membros de (3.1) por  $\lambda$ .

### 3.1 Triângulo isósceles

Um triângulo é chamado de *isósceles* se dois de seus lados são congruentes. Assim, como na geometria euclidiana, na geometria de Galileu vale a seguinte proposição.

**Proposição 3.2.** *Se os lados  $a$  e  $b$  de  $\triangle ABC$  são congruentes, então os ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$ , opostos a estes lados, também são congruentes.*

**Demonstração 3.2.** *O resultado é imediato de  $\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}}$ , como  $a = b$  segue que  $\widehat{A} = \widehat{B}$ .*

■

Os ângulos  $\widehat{A}$  e  $\widehat{B}$  são chamados de ângulos da base  $AB$ .

**Proposição 3.3.** *A altura  $CR$  relativa à base  $AB$  de um triângulo isósceles  $\triangle ABC$ , tal que  $R$  é o ponto médio de  $AB$ , não é bissetriz do ângulo  $\widehat{C}$ .*

**Demonstração 3.3.** Temos que  $a = \overline{BC} = \overline{BR}$  e  $b = \overline{AC} = \overline{AR}$ , conforme ilustra a figura 3.3.

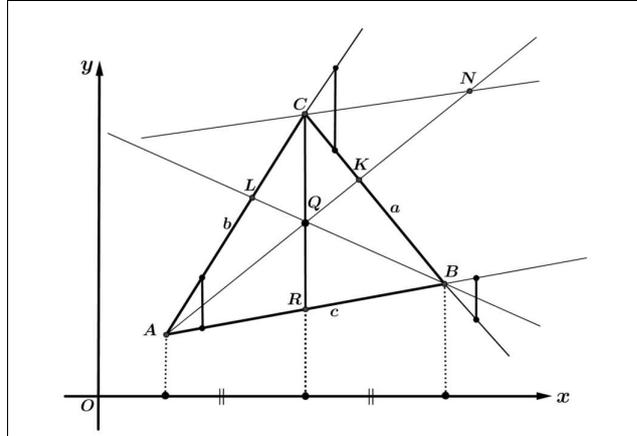


Figura 3.3: Altura  $CR$  não coincidente com a bissetriz do ângulo  $\widehat{C}$ .

De fato  $CR$  não é bissetriz do ângulo  $\widehat{C}$ , pois, caso fosse teríamos

$$k_1 - k = k - k_2,$$

daí

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

onde  $k_1$  é a declividade de  $BC$ ,  $k_2$  a de  $AC$  e  $k$  é a declividade da bissetriz do ângulo  $\widehat{C}$ . Mas isso é um absurdo, pois  $CR$  está numa reta especial e, por conseguinte, não pode ter declividade finita. ■

Desta forma as bissetrizes dos ângulos de um triângulo não são concorrentes. Ainda de acordo com a figura 3.3, temos  $\{Q\} = AK \cap BL$ , onde  $AK$  está contido na bissetriz de  $\widehat{A}$  e  $BL$  está contido na de  $\widehat{B}$ . O ponto  $Q$  é o ponto médio de  $CR$ . A bissetriz de  $\widehat{C}$  é a reta  $CN$ .

## 3.2 Congruência de triângulos

Assim como na geometria euclidiana, dizemos que dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes [2]<sup>1</sup>. Antes de estabelecer critérios de congruência de triângulos na geometria de Galileu, observamos que o fato de dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  terem os lados congruentes, não garante que

<sup>1</sup>Ângulos congruentes são ângulos de mesma medida e lados congruentes são lados de mesma medida.

eles sejam congruentes. De fato, os dois lados menores determinam o terceiro lado do triângulo, mas dois lados não determinam um único triângulo, conforme ilustra a figura 3.4.

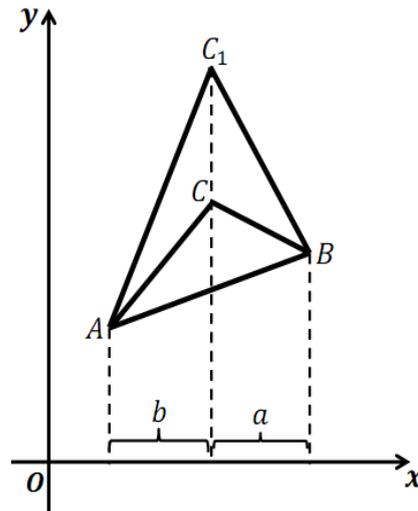


Figura 3.4: Lados congruentes.

Os critérios de congruência de triângulos da geometria euclidiana, conhecidos como *LAL* (*Lado-Ângulo-Lado*) e *ALA* (*Ângulo-Lado-Ângulo*) podem ser inválidos na geometria de Galileu, como mostrado a seguir;

- Caso *LAL*

Suponha o ângulo  $\widehat{C}$  comum aos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A_1BC$  e o lado comum  $\overline{BC} = a$ , conforme ilustrado na figura 3.5.

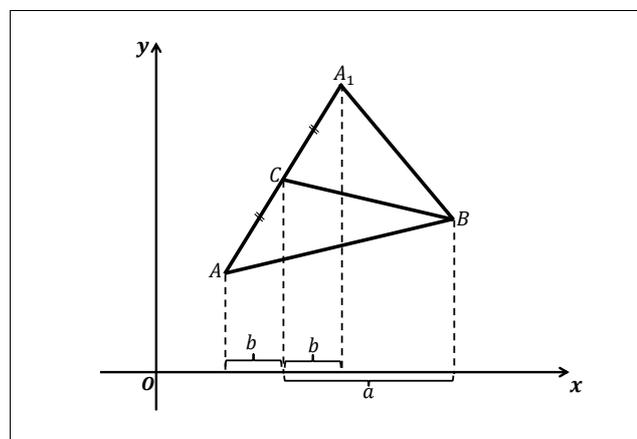


Figura 3.5: Critério LAL inválido.

Temos  $\overline{CA} = \overline{CA_1} = b$ , logo  $\overline{AB} = a + b$  e  $\overline{A_1B} = a - b$ . Portanto os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A_1BC$  não são congruentes.

- Caso *ALA*

Para verificarmos que o caso *ALA* na geometria de Galileu pode ser inválido, suponha dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A_1BC$  de ângulo comum  $\widehat{C}$  e lado  $\overline{BC} = a$  comum a dois ângulos congruentes, conforme ilustrado na figura 3.6.

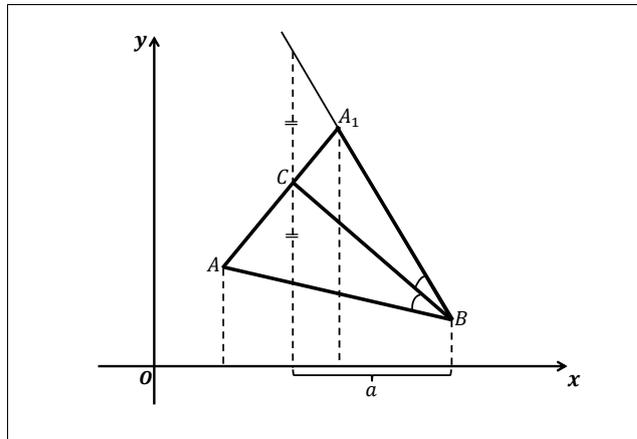


Figura 3.6: Critério ALA inválido.

Assim posto, temos  $\overline{AB} > \overline{A_1B}$ . Portanto os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A_1BC$  não são congruentes.

**Proposição 3.4.** *Os critérios de congruência de triângulos ALA e LAL são válidos se os ângulos e os lados forem orientados.*

**Demonstração 3.4.** *Vamos mostrar os dois casos:*

- Caso *LAL*

Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos em que os ângulos e os lados seguem a mesma orientação, tais que,  $\overline{AC} = b = b' = \overline{A'C'}$ ,  $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$  e  $\overline{AB} = c = c' = \overline{A'B'}$ , conforme ilustra a figura 3.7.

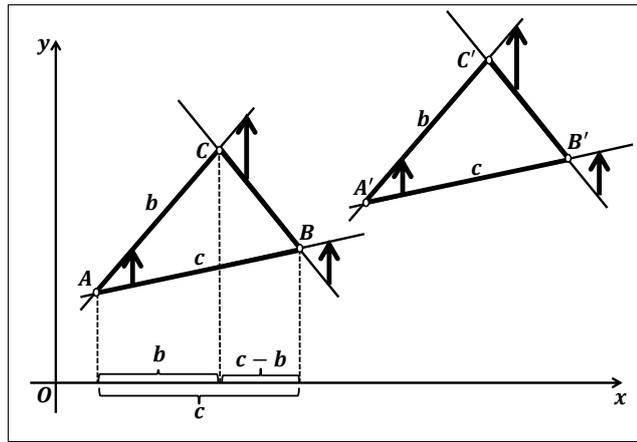


Figura 3.7: Critério LAL válido.

Considere as equações das retas  $AB : y = k_1x + s_1$ ,  $AC : y = k_2x + s_2$  e  $BC : y = k_3x + s_3$  que formam os lados do triângulo  $\triangle ABC$ . As declividades são dadas por

$$k_1 = \frac{y_B - y_A}{c}, \quad k_2 = \frac{y_C - y_A}{b} \quad e \quad k_3 = \frac{y_B - y_C}{c - b}.$$

Logo

$$\begin{aligned} \widehat{C} &= k_2 - k_3 \\ &= \frac{y_C - y_A}{b} - \frac{y_B - y_C}{c - b} \\ &= \frac{y_C - y_A}{b} - \frac{y_B - y_A + y_A - y_C}{c - b} \\ &= k_2 - \frac{ak_1 - bk_2}{c - b} \\ &= \frac{a(k_2 - k_1)}{c - b}. \end{aligned}$$

Sejam  $A'B' : y = k'_1x + s'_1$ ,  $A'C' : y = k'_2x + s'_2$  e  $B'C' : y = k'_3x + s'_3$  as equações das retas que passam pelos lados do triângulo  $\triangle A'B'C'$ , suas declividades são dadas por

$$k'_1 = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{c}, \quad k'_2 = \frac{y_{C'} - y_{A'}}{b} \quad e \quad k'_3 = \frac{y_{B'} - y_{C'}}{c - b}.$$

Assim,

$$\widehat{C'} = \frac{a(k'_2 - k'_1)}{c - b}.$$

Mas

$$k'_2 - k'_1 = k_2 - k_1,$$

pois  $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$ . Logo  $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$ . Pela relação (3.2), temos  $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ . Como

$$c - b = c' - b',$$

concluimos que LAL é válido se os lados e os ângulos são orientados.

• Caso ALA

Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$ ,  $\overline{AB} = c = c' = \overline{A'B'}$  e  $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ , conforme ilustra a figura 3.8.

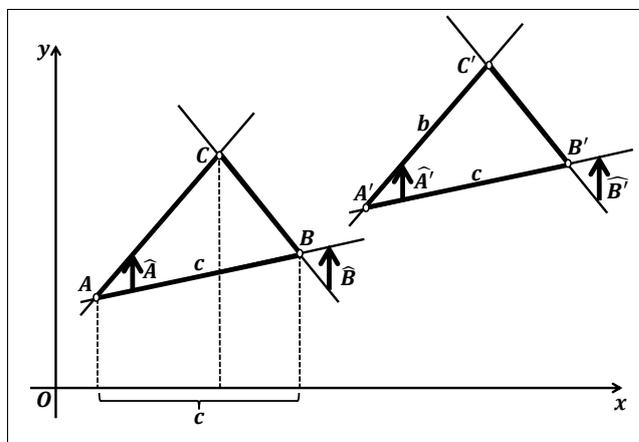


Figura 3.8: Critério ALA válido.

Como  $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$  e  $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ , pela relação (3.2) segue que  $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$ . Dado que  $c = c'$ , pela relação (3.3)

$$\frac{a}{\widehat{A}} = \frac{b}{\widehat{B}} = \frac{c}{\widehat{C}},$$

temos que

$$\frac{c}{\widehat{C}} = \frac{c'}{\widehat{C}'} = \frac{b'}{\widehat{B}'} = \frac{b}{\widehat{B}},$$

logo  $b = b'$ . Segue por (3.1) que  $a = a'$ . Portanto vale o critério ALA se os ângulos e os lados forem orientados. ■

**Corolário 1.** O critério de congruência AAL (ângulo-ângulo-lado) é válido se os ângulos e os lados são orientados.

**Demonstração 1.** Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos, tais que,  $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$ ,  $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$  e  $\overline{AC} = b = b' = \overline{A'C'}$  e conforme ilustra a figura 3.9.

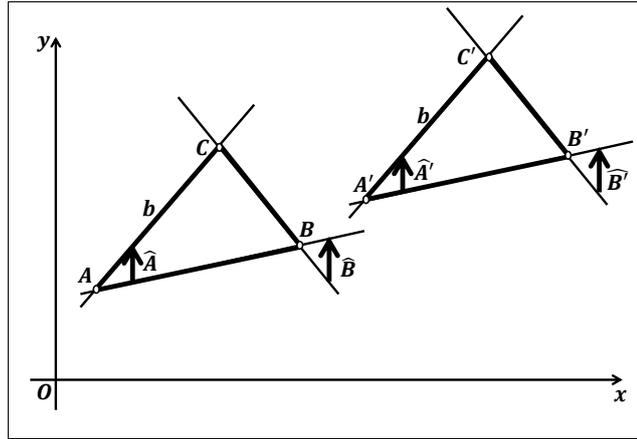


Figura 3.9: Critério AAL válido.

Como  $\widehat{A} \cong \widehat{A}'$  e  $\widehat{B} \cong \widehat{B}'$ , segue que  $\widehat{C} \cong \widehat{C}'$ . Portanto pelo critério ALA que os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes. ■

O seguinte resultado é válido na geometria de Galileu e na euclidiana.

**Proposição 3.5** (Baricentro). *As medianas  $AD$ ,  $BE$ , e  $CF$  de um triângulo  $\triangle ABC$  se intersectam em um ponto  $G$  que as divide na razão  $2 : 1$ , isto é,*

$$\overline{GA} : \overline{DG} = \overline{BG} : \overline{GE} = \overline{GC} : \overline{FG} = 2 : 1.$$

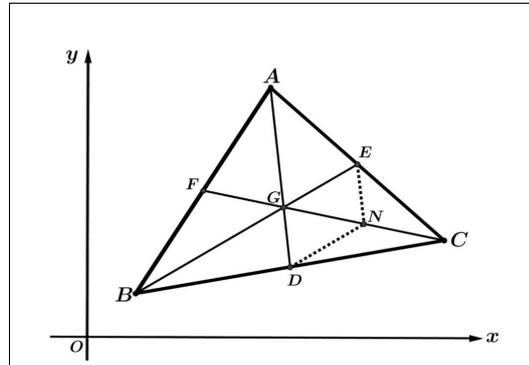


Figura 3.10: Baricentro do triângulo.

**Demonstração 3.5.** *No âmbito da geometria euclidiana, sejam  $D$  e  $E$  os pontos médios dos lados  $BC$  e  $AC$  do triângulo  $\triangle ABC$ . Sejam  $G$  o ponto de intersecção de  $AD$  e  $BE$  e  $N$  o ponto médio de  $GC$ , conforme ilustra a figura 3.10. Segue que  $DN$  é base média do triângulo  $\triangle BGC$ , então  $DN \parallel BE$ . O segmento  $EN$  é base média do triângulo  $\triangle AGC$ , então  $EN \parallel DA$ . Logo  $GDNE$  é um paralelogramo, portanto*

$$\overline{DG} = \overline{EN} = \frac{1}{2}\overline{GA} \quad e \quad \overline{DN} = \overline{GE} = \frac{1}{2}\overline{BG}.$$

Com o mesmo raciocínio obtemos os outros casos na geometria euclidiana.

No caso da geometria de Galileu, como  $DN \parallel GE$  e  $EN \parallel GD$ , temos igualdade entre as declividades

$$k_{DN} = k_{GE} \quad e \quad k_{EN} = k_{GD},$$

logo

$$\widehat{EGN} = k_{GE} - k_{GN} = k_{DN} - k_{GN} = \widehat{DNG}$$

e

$$\widehat{DGN} = k_{GN} - k_{GD} = k_{GN} - k_{EN} = \widehat{ENG},$$

segue pelo caso de congruência ALA que os triângulos  $\triangle GEN$  e  $\triangle GDN$  são congruentes, pois  $GN$  é lado comum. Portanto

$$\overline{DG} = \overline{EN} = \frac{1}{2}\overline{GA} \quad e \quad \overline{DN} = \overline{GE} = \frac{1}{2}\overline{BG}.$$

Usamos um raciocínio análogo para os outros casos. ■

Na geometria de Galileu não existe *triângulo equilátero*. De fato, por (3.1),  $a + b = c$ , se  $a = b$  então  $c$  é o dobro dos outros lados. O mesmo raciocínio é usado para os ângulos.

### 3.3 Semelhança de triângulos na geometria de Galileu

**Proposição 3.6.** *Dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  que possuem ângulos congruentes têm lados proporcionais.*

**Demonstração 3.6.** *Sejam  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  dois triângulos tais que  $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$ ,  $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$  e  $\widehat{C} \cong \widehat{C'}$ . Por (3.4) temos*

$$a = \lambda\widehat{A}, \quad b = \lambda\widehat{B}, \quad c = \lambda\widehat{C}$$

e

$$a' = \lambda'\widehat{A'}, \quad b' = \lambda'\widehat{B'}, \quad c' = \lambda'\widehat{C'}.$$

Logo

$$\frac{a}{a'} = \frac{\lambda\widehat{A}}{\lambda'\widehat{A'}} = \frac{b}{b'} = \frac{\lambda\widehat{B}}{\lambda'\widehat{B'}} = \frac{c}{c'} = \frac{\lambda\widehat{C}}{\lambda'\widehat{C'}}.$$

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k, \quad k = \frac{\lambda}{\lambda'}.$$

■

Quando os ângulos correspondentes dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são

congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, a semelhança é chamada de *semelhança de primeira espécie* de razão  $k$ .

Um exemplo de semelhança de primeira espécie, veja figura 3.11, é a homotetia  $H_{O,k}$ , de centro  $O$  e razão  $k > 0$ , tal que

$$\vec{OA'} = k \cdot \vec{OA}.$$

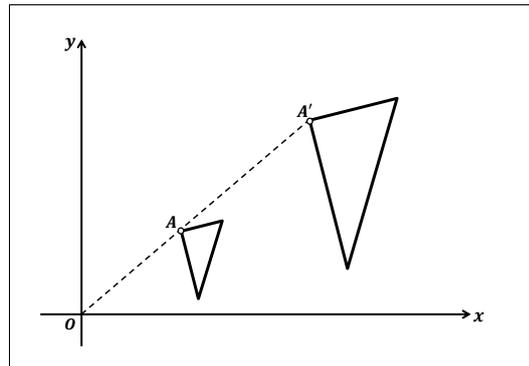


Figura 3.11: Semelhança de 1ª espécie.

**Proposição 3.7.** *Dois triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  que possuem os lados correspondentes congruentes têm os ângulos correspondentes proporcionais.*

**Demonstração 3.7.** *Com o mesmo argumento da demonstração da proposição 3.6, chegamos a*

$$\frac{\widehat{A}}{\widehat{A'}} = \frac{\widehat{B}}{\widehat{B'}} = \frac{\widehat{C}}{\widehat{C'}} = \kappa, \quad \kappa = \frac{\lambda'}{\lambda}.$$

■

Quando os lados correspondentes dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$  são congruentes e as magnitudes dos ângulos correspondentes são proporcionais, a semelhança é chamada de *semelhança de segunda espécie* de razão  $\kappa$ .

Um exemplo de semelhança de segunda espécie é a *compressão* sobre  $Ox$  de razão  $\kappa$ , que leva cada ponto  $A$  ao ponto  $A' \in AP \parallel Oy$ , tal que

$$\overline{OA'} = \kappa \overline{OA}.$$

Conforme ilustra a figura 3.12.

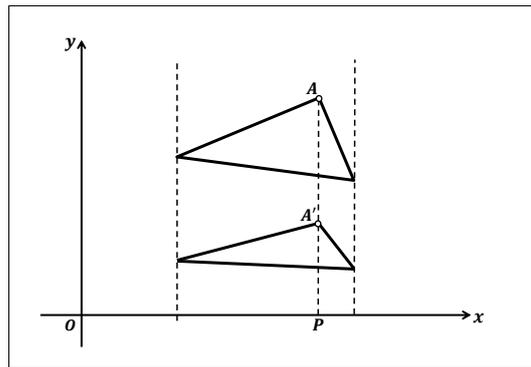


Figura 3.12: Semelhança de 2ª espécie.

# Capítulo 4

## Circunferência e ciclo

Para fixarmos a notação, utilizaremos  $\Gamma$  para representar uma circunferência euclidiana,  $\mathcal{S}$  para uma circunferência de Galileu e  $\mathcal{Z}$  para um ciclo de Galileu.

No plano euclidiano geralmente definimos uma circunferência  $\Gamma$  como o conjunto de pontos  $M$  que estão a uma distância fixa  $r$  de um ponto  $Q$ . Uma outra maneira de definir uma circunferência é através do conceito de *arco capaz*.

**Definição 4.1.** *Uma circunferência é o conjunto de pontos a partir dos quais um segmento  $AB$  é visto sob um ângulo  $\alpha$  com medida e orientação constantes.*

É importante dar uma orientação ao ângulo  $\alpha$  para que o conjunto de pontos que enxergam o segmento  $AB$  sob o ângulo  $\alpha$  não seja um par de arcos circulares e sim uma circunferência, conforme mostra a figura 4.1. O ângulo  $\widehat{ANB}$  é suplemento do ângulo  $\alpha$ , assim ao darmos ao ângulo entre as retas  $BN$  e  $AM$  com vértice em  $N$  a mesma orientação do ângulo  $\alpha$  evitamos o problema de ter um par de arcos [17] e [18].

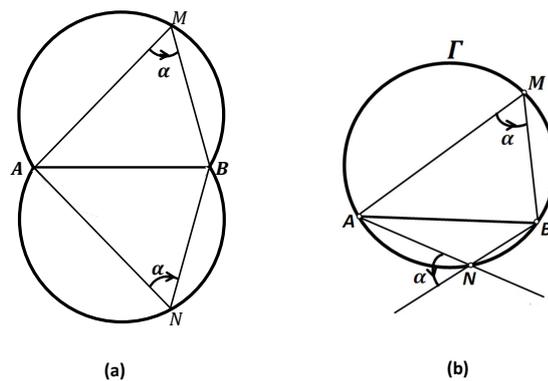


Figura 4.1: Par de arcos circulares e circunferência euclidiana.

Na geometria de Galileu as duas definições de circunferência apresentadas produzem objetos diferentes. Uma circunferência  $\mathcal{S}$  produzida pela primeira definição

(p.10) é uma par de retas especiais, enquanto que para a segunda definição (6.2) temos outro objeto, que chamamos de *ciclo*. Veja figura 4.2.

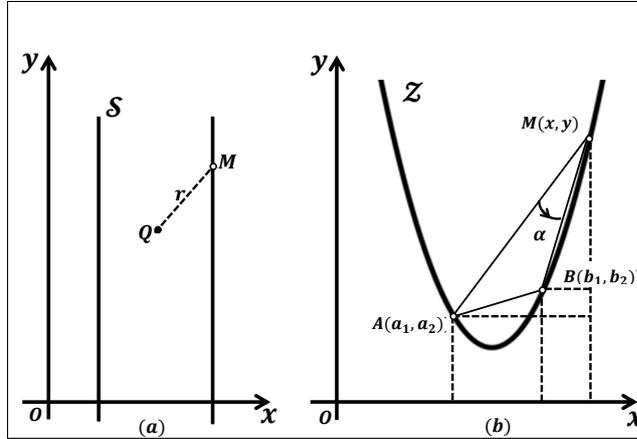


Figura 4.2: Circunferência e ciclo de Galileu.

Para deduzirmos uma equação para o ciclo  $\mathcal{Z}$ , considere um segmento ordinário  $AB$  de extremos  $A(a_1, a_2)$  e  $B(b_1, b_2)$  sobre  $\mathcal{Z}$  e um ponto  $M(x, y) \in \mathcal{Z}$  tal que  $\widehat{AMB} = \alpha$ . Seja  $k$  a declividade de  $MA$  e  $k_1$  a de  $MB$ , logo

$$k = \frac{y - a_2}{x - a_1} \quad \text{e} \quad k_1 = \frac{y - b_2}{x - b_1}.$$

Como

$$\alpha = k_1 - k = \frac{y - b_2}{x - b_1} - \frac{y - a_2}{x - a_1},$$

temos

$$0 = \alpha(x - a_1)(x - b_1) - (x - a_1)(y - b_2) + (x - b_1)(y - a_2).$$

Como  $AB$  é ordinário,  $b_1 - a_1 \neq 0$  e chegamos a

$$y = \frac{\alpha}{b_1 - a_1} x^2 + \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{b_1 - a_1} x + \frac{\alpha a_1 b_1 + b_1 a_2 - b - 2a_1}{b_1 - a_1}.$$

Portanto a equação do ciclo  $\mathcal{Z}$  no plano de Galileu (i.e. o arco capaz de  $\alpha$  sobre  $AB$ ) é dada por

$$y = ax^2 + 2bx + c, \tag{4.1}$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{b_1 - a_1}, \\ 2b &= \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{b_1 - a_1}, \\ c &= \frac{\alpha a_1 b_1 + b_1 a_2 - b_2 a_1}{b_1 - a_1}. \end{aligned}$$

Desta forma um *ciclo* equivale a uma *parábola* na geometria euclidiana. Às vezes, nos referimos a um ciclo  $\mathcal{Z}$  como um conjunto de pontos dados pela equação

$$ax^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \quad (4.2)$$

A equação (4.2) é mais geral e pode ser reduzida a (4.1) quando  $a$  e  $b_2$  não são nulos. Assim, três pontos do plano de galileu determinam um único ciclo, conforme ilustra a figura 4.3, podendo ser:

- (a) o ciclo ordinário  $\mathcal{Z}$  dado por (4.1);
- (b) uma circunferência  $\mathcal{S}$  quando  $a \neq 0$ ,  $b_2 = 0$  e  $b_1^2 - ac > 0$  (duas raízes distintas);
- (c) uma reta ordinária se  $a = 0$  e  $b_2 \neq 0$ ;
- (d) uma reta especial se  $a = b_2 = 0$  e  $b_1 \neq 0$ , ver figura 4.3.

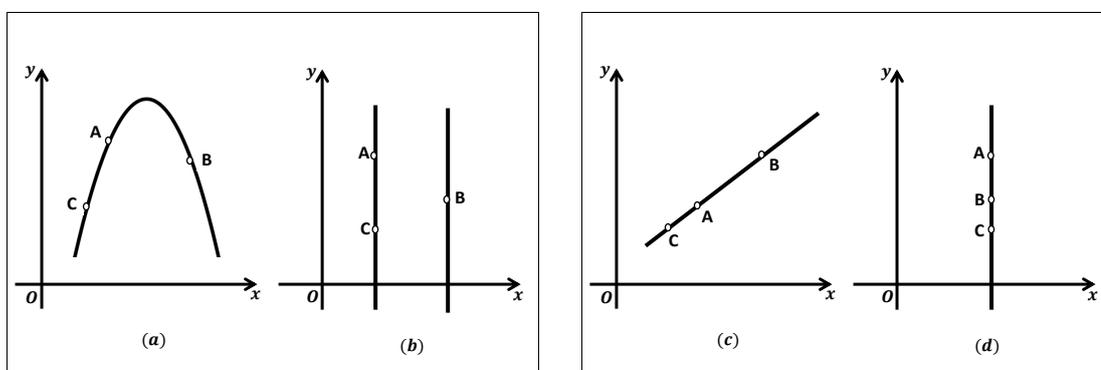


Figura 4.3: Ciclos de acordo com os coeficientes de (4.2).

Situação análoga ocorre no plano euclidiano com a equação da circunferência (1.2c)

$$x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = 0$$

que pode determinar uma circunferência ou retas dependendo dos valores dos coeficientes.

Chamaremos de ciclo apenas a parábola. Um ciclo  $\mathcal{Z}$  é caracterizado pela

proposição seguinte.

**Proposição 4.1.** *Os ângulos formados entre a corda  $AB$  do ciclo  $\mathcal{Z}$  e as tangentes à  $\mathcal{Z}$  pelos extremos de  $AB$ , são iguais ao ângulo inscrito  $\alpha$ .*

**Demonstração 4.1.** *Sejam  $\mathcal{Z}$  um ciclo,  $AB$  uma corda de  $\mathcal{Z}$  e  $\widehat{AMB} = \alpha$  um ângulo inscrito em  $\mathcal{Z}$  como ilustrado na figura 4.4.*

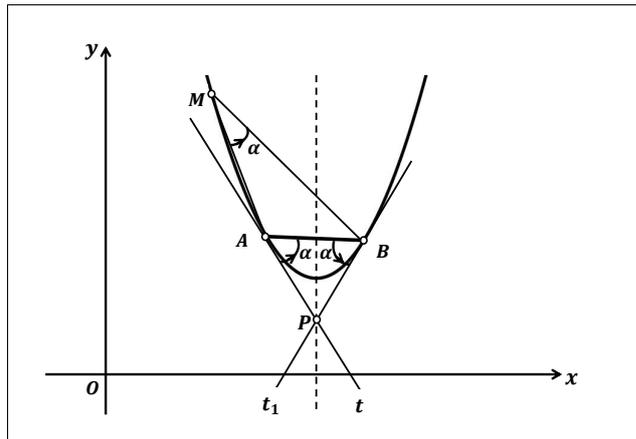


Figura 4.4: Ângulo entre corda e tangente.

A declividade  $k_{AB}$  da corda  $AB$ , com  $A(a_1, a_2)$  e  $B(b_1, b_2)$ , é

$$k_{AB} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

A reta  $t$  tangente ao ciclo  $\mathcal{Z}$  em  $A$  tem declividade  $k_t = 2aa_1 + 2b^1$ . Mas

$$a = \frac{\alpha}{b_1 - a_1} \quad e \quad 2b = \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{b_1 - a_1},$$

logo

$$\begin{aligned} k_t &= 2aa_1 + 2b \\ &= -\alpha + \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \\ &= k_{AB} - \alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha = k_{AB} - k_t = \delta_{tAB}.$$

<sup>1</sup> $k_t$  é o limite do coeficiente angular da reta secante por  $A$  e  $P$  quando  $P$  tende a  $A$ .

Analogamente, a reta  $t_1$  tangente à  $\mathcal{Z}$  em  $B$  tem declividade  $k_{t_1} = 2ab_1 + 2b$ , logo

$$\begin{aligned} k_{t_1} &= \frac{2ab_1}{b_1 - a_1} + \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{b_1 - a_1} \\ &= \alpha + \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} \\ &= k_{AB} + \alpha. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\alpha = k_{t_1} - k_{AB} = \delta_{ABt_1}.$$

■

Este resultado implica que se  $P \notin \mathcal{Z}$  é o ponto de interseção entre as retas tangentes  $t$  em  $A$  e  $t_1$  em  $B$ , então  $\overline{PA} = \overline{PB}$ . De fato, o triângulo  $\triangle PAB$  é isósceles, pois possui os ângulos da base  $AB$  congruentes.

No caso da geometria euclidiana, a circunferência  $\Gamma$  possui propriedade similar. Veja a figura 4.5.

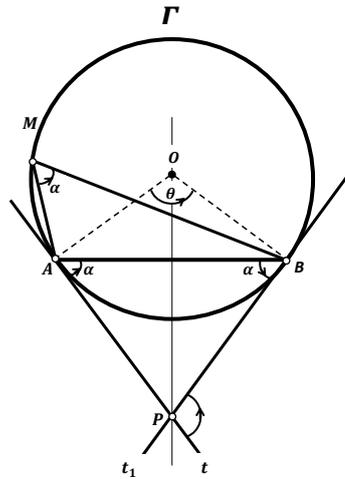


Figura 4.5: Ângulo inscrito e central.

Se  $\alpha$  é um ângulo inscrito e  $\theta$  é o ângulo central da circunferência euclidiana  $\Gamma$ , então

$$\alpha = \frac{\theta}{2}.$$

Representando o comprimento do arco  $\widehat{AB}$  correspondente ao ângulo central  $\theta$  por  $s$ , temos que o raio  $r$  é dado por

$$r = \frac{s}{2\alpha}.$$

**Definição 4.2** (Comprimento de arco). *O comprimento de um arco  $\widehat{AB}$  da curva  $\mathcal{L}$  é o limite dos comprimentos  $\overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \dots + \overline{A_{n-1}A_n} + \overline{A_nB}$  da linha poligonal  $AA_1A_2\dots A_{n-1}A_nB$  inscrita em  $\mathcal{L}$ , quando o comprimento do segmento mais longo dessa poligonal tende a zero [17]. Veja a figura 4.6.*

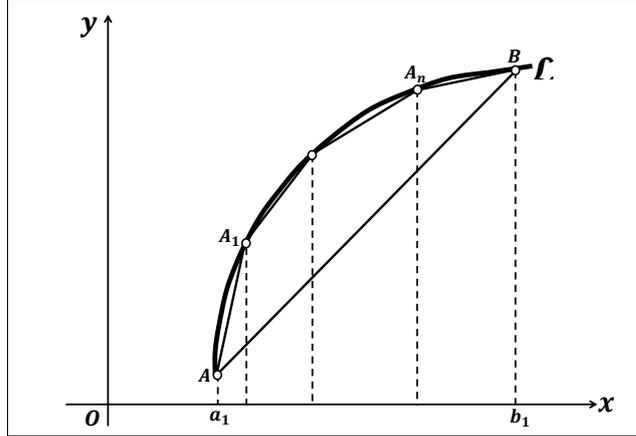


Figura 4.6: Comprimento de arco.

Na geometria de Galileu qualquer linha poligonal  $AA_1A_2\dots A_{n-1}A_nB$  inscrita no arco  $AB$  de uma curva  $\mathcal{L}$ , cujas retas tangentes em qualquer ponto de  $\mathcal{L}$  não são retas especiais, tem comprimento  $s$  igual ao comprimento da corda  $AB$ . Portanto

$$s = d_{AB}.$$

**Proposição 4.2.** *Sejam  $\mathcal{Z}$  um ciclo e  $\widehat{AB}$  um arco de  $\mathcal{Z}$ . Então a razão  $\frac{s}{\alpha}$  entre o comprimento  $s$  do arco  $\widehat{AB}$  e o ângulo  $\alpha$  inscrito em  $\mathcal{Z}$ , subtendido por  $\widehat{AB}$ , é constante.*

**Demonstração 4.2.** *Sejam  $AB$  uma corda do ciclo  $\mathcal{Z}$  de extremos  $A(a_1, a_2)$  e  $B(b_1, b_2)$  e  $\alpha$  o ângulo inscrito subtendido por  $\widehat{AB}$ . Temos*

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{d_{AB}}{\alpha} = \frac{b_1 - a_1}{\alpha}.$$

Na equação de  $\mathcal{Z}$ ,  $y = ax^2 + 2bx + c$ ,  $a = \frac{\alpha}{b_1 - a_1}$ , ou seja,  $\alpha = a(b_1 - a_1)$ . Portanto

$$\frac{s}{\alpha} = \frac{b_1 - a_1}{\alpha} = \frac{b_1 - a_1}{a(b_1 - a_1)} = \frac{1}{a}, \quad b_1 - a_1 \neq 0.$$

■

## 4.1 Raio e curvatura

O raio do ciclo  $\mathcal{Z}$  é definido da mesma forma que o raio da circunferência euclidiana [16].

**Definição 4.3** (raio). *O raio  $r$  do ciclo  $\mathcal{Z}$  é dado por*

$$r = \frac{s}{2\alpha} = \frac{1}{2} \frac{(b_1 - a_1)}{\alpha} = \frac{1}{2a}, \quad (4.3)$$

onde  $s$  é o comprimento do arco  $\widehat{AB}$  e  $\alpha$  é o ângulo inscrito em  $\mathcal{Z}$  subtendido por  $AB$ .

Como  $a$  é o coeficiente de  $x^2$  na equação do ciclo (4.1), então o raio  $r$  pode ser positivo ou negativo dependendo do sinal de  $a$  (concavidade de  $\mathcal{Z}$ ).

**Definição 4.4** (Curvatura). *A curvatura  $\rho_G$  do ciclo  $\mathcal{Z}$  é o inverso do raio.*

$$\rho_G = \frac{1}{r}. \quad (4.4)$$

Portanto a curvatura do ciclo  $\mathcal{Z}$  é dada por  $\rho_G = 2a$ , enquanto que a da circunferência euclidiana  $\Gamma$  é dada por  $\rho_E = \frac{2\alpha}{s}$ .

## 4.2 Rotação cíclica

Por simplicidade, considere o ciclo  $\mathcal{Z}$  de equação  $y = ax^2$ . O cisalhamento  $\mathcal{C}$  (2.4), na forma

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 - vx_1, \end{cases}$$

transforma o ciclo  $\mathcal{Z}$  no ciclo  $\mathcal{Z}_1$  tal que

$$ax_1^2 = y_1 - vx_1.$$

Mas

$$\begin{aligned}
 y_1 &= ax_1^2 + vx_1 \\
 &= a \left( x_1^2 + \frac{vx_1}{a} \right) \\
 &= a \left( x_1^2 + \frac{vx_1}{a} + \frac{v^2}{4a^2} \right) - \frac{v^2}{4a} \\
 &= a \left( x_1 + \frac{v}{2a} \right)^2 - \frac{v^2}{4a}.
 \end{aligned}$$

Portanto

$$y_1 + \frac{v^2}{4a} = a \left( x_1 + \frac{v}{2a} \right)^2.$$

Os ciclos  $\mathcal{Z}$  e  $\mathcal{Z}_1$  possuem o mesmo coeficiente  $a$ , assim o ciclo  $\mathcal{Z}$  é obtido de  $\mathcal{Z}_1$  pela translação

$$\begin{cases} x' = x_1 + \frac{v}{2a} \\ y' = y_1 + \frac{v^2}{4a}. \end{cases} \quad (4.5)$$

A transformação composta pela translação (4.5) e pelo cisalhamento

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y, \end{cases}$$

é dada por

$$\begin{cases} x' = x + \frac{v}{2a} \\ y' = vx + y + \frac{v^2}{4a}. \end{cases} \quad (4.6)$$

Esta transformação leva um ponto  $A \in \mathcal{Z}$  ao ponto  $A' \in \mathcal{Z}$ . O cisalhamento leva cada ponto  $A \in \mathcal{Z}$  ao ponto  $A_1 \in \mathcal{Z}_1$  a uma distância  $d_{AA_1} = 0$ , enquanto a translação leva cada ponto  $A_1 \in \mathcal{Z}_1$  ao ponto  $A' \in \mathcal{Z}$  a uma distância  $d_{A_1A'} = x' - x_1 = \frac{v}{2a}$ .

A transformação (4.6) é chamada de *rotação cíclica*. Ela transforma o ciclo  $\mathcal{Z}$  dado por  $y = ax^2$  do plano de Galileu em si próprio.

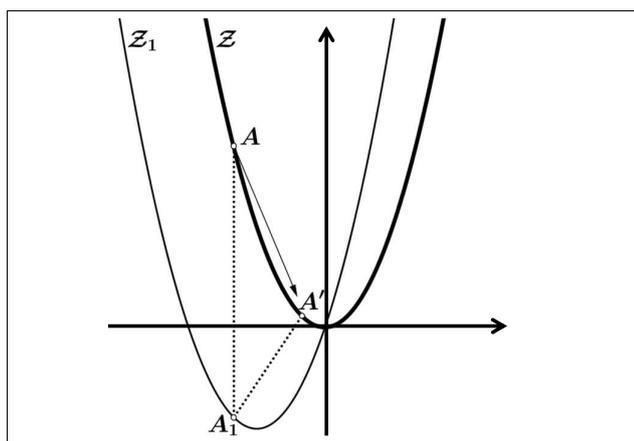


Figura 4.7: Rotação cíclica.

Escolhendo de forma apropriada um valor para o coeficiente  $v$ , podemos mover um ponto  $A \in \mathcal{Z}$  a uma distância  $d$ , positiva ou negativa, ao longo de  $\mathcal{Z}$ , pois

$$\frac{v}{2a} = d \quad \text{ou} \quad v = 2ad.$$

Portanto existe uma rotação cíclica que leva o ponto  $A \in \mathcal{Z}$  a um ponto prescrito  $A' \in \mathcal{Z}$ . De forma análoga, a rotação cíclica deixa invariante o ciclo  $\mathcal{Z}$  dado pela equação  $y = ax^2 + 2bx + c$ .

A equação  $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$  do ciclo  $\mathcal{Z}$  pode ser escrita na forma  $Y = \alpha X^2$ . De fato, temos:

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= \alpha \left( x + \frac{\beta}{2\alpha} \right)^2 - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \gamma \\ y &= \alpha X^2 + n. \end{aligned}$$

Portanto  $Y = \alpha X^2$ , com  $n = y - Y$  e  $X = x + \frac{\beta}{2\alpha}$ .

Na geometria euclidiana uma rotação que leva uma circunferência  $\Gamma$  em si própria, move cada ponto do plano ao longo de uma circunferência concêntrica com  $\Gamma$ . Similarmente, na geometria de Galileu temos o seguinte resultado.

**Proposição 4.3.** *Uma rotação cíclica no plano de Galileu que leva um ciclo  $\mathcal{Z}$  em si próprio move cada ponto não pertencente a  $\mathcal{Z}$  ao longo de um ciclo “paralelo” a  $\mathcal{Z}$ , isto é, um ciclo obtido através de  $\mathcal{Z}$  por uma translação paralela ao eixo  $Oy$ . (Ver figura 4.8-(b)).*

**Demonstração 4.3.** *Sem perda de generalidade, sejam  $\mathcal{Z}$  um ciclo de equação  $y = ax^2$  e  $P(x_0, y_0)$  um ponto que não pertence a  $\mathcal{Z}$ . Conforme ilustrado na figura 4.8-(a), a*

imagem  $P'(x'_0, y'_0)$  de  $P$  pela rotação cíclica é

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + \frac{v}{2a} \\ y'_0 = vx_0 + y_0 + \frac{v^2}{4a}, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} x'_0 - x_0 = \frac{v}{2a} \\ y'_0 - y_0 = vx_0 + \frac{v^2}{4a}. \end{cases}$$

Daí

$$\begin{aligned} y'_0 - y_0 &= 2ax_0(x'_0 - x_0) + \frac{(x'_0 - x_0)^2(2a)^2}{4a} \\ &= 2ax_0x'_0 - 2ax_0^2 + ax_0'^2 + ax_0^2 - 2ax'_0x_0 \\ &= ax_0'^2 - ax_0^2 \end{aligned}$$

e segue que

$$ax_0'^2 - y'_0 = ax_0^2 - y_0,$$

isto é,

$$d(P, \mathcal{Z}) = d(P', \mathcal{Z}).$$

Portanto  $P(x_0, y_0)$  e  $P'(x'_0, y'_0)$  são pontos de

$$y = ax^2 + (y_0 - ax_0^2).$$

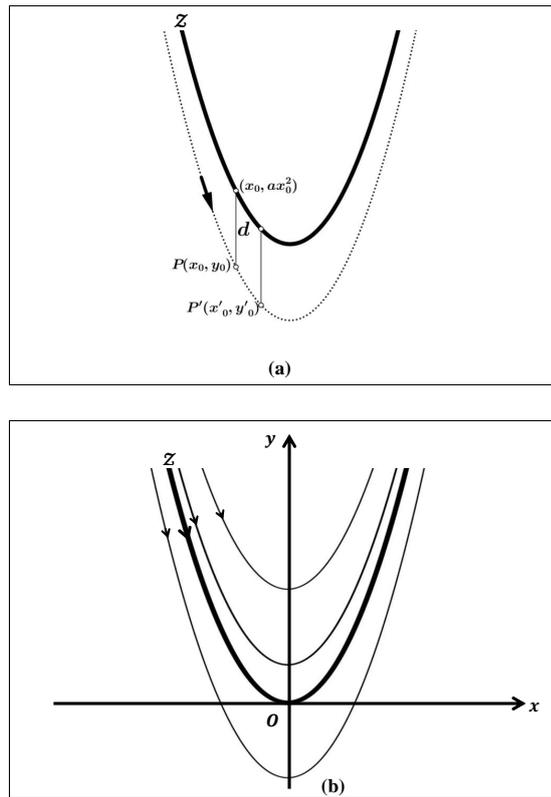


Figura 4.8: Ciclos “paralelos”.

A rotação cíclica pode ser usada na demonstração da propriedade seguinte.

**Propriedade 1.** *Os segmentos  $PA$  e  $PB$ , tangentes ao ciclo  $Z$  em  $A$  e  $B$ , com  $P \notin Z$ , são congruentes.*

**Demonstração 1.** *Sem perda de generalidade seja  $Z$  um ciclo de equação  $y = ax^2$ . Aplicando-se a rotação cíclica (4.6) que leva  $Z$  em si próprio e o ponto  $P \notin Z$  ao ponto  $P'$  do eixo de simetria  $Oy$  de  $Z$ , conforme ilustrado na figura 4.9. As tangentes  $PA$  e  $PB$  são levadas nas tangentes  $P'A'$  e  $P'B'$ , respectivamente. Como a tangência é preservada<sup>2</sup> sob as transformações de Galileu (eq.(2.3),p.23)*

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b, \end{cases} \quad (4.7)$$

*segue, da simetria de  $y = ax^2$  em relação ao eixo  $Oy$  que  $\overline{P'A'} = \overline{P'B'}$ , pois as projeções  $P'A'$  e  $P'B'$  sob o eixo  $Ox$  são congruentes. Como a rotação cíclica (4.6) é uma isometria, temos*

$$d_{AP} = d_{A'P'} = d_{P'B'} = d_{PB}.$$

<sup>2</sup>De fato, uma reta tangente não pode ser levada numa reta secante, pois o ciclo  $Z$  é invariante sob a rotação cíclica.

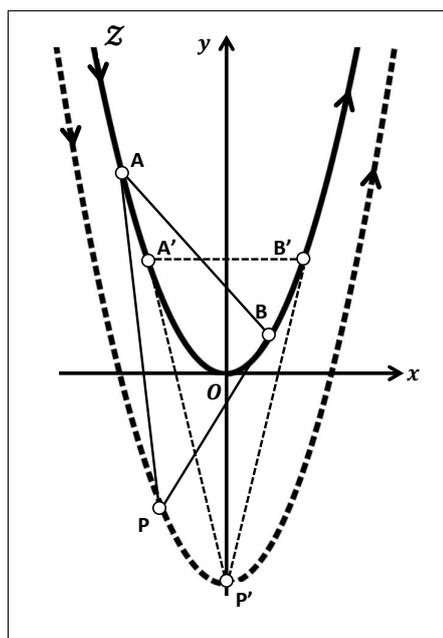


Figura 4.9: Congruência das tangentes.

### 4.3 Diâmetro do ciclo

Na geometria euclidiana, uma circunferência  $\Gamma$  é tal que os pontos médios de uma família de cordas paralelas são colineares e pertencem a um diâmetro, observe a figura 4.10. Veremos que o mesmo vale na geometria de Galileu.

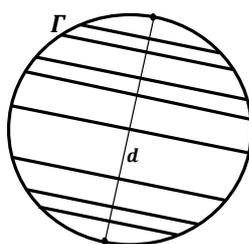


Figura 4.10: Diâmetro de circunferência euclidiana.

**Definição 4.5** (Diâmetro do ciclo). *O diâmetro  $d$  do ciclo  $\mathcal{Z}$  é a semirreta especial de origem em um ponto de  $\mathcal{Z}$  que passa pelos pontos médios de uma família de cordas paralelas de  $\mathcal{Z}$ .*

Em uma família de cordas paralelas do ciclo  $\mathcal{Z}$  de equação  $y = ax^2$ , todas

possuem a mesma declividade  $k_0$ . O cisalhamento

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = vx + y \end{cases}$$

leva a reta  $y = kx + s$  na reta  $y_1 - vx_1 = kx_1 + s$ . Desta forma,

$$\begin{aligned} y_1 &= kx_1 + vx_1 + s \\ &= x_1(k + v) + s \\ y_1 &= k_1x_1 + s, \end{aligned}$$

em que  $k_1 = k + v$ . Como a translação (4.5) preserva a direção de cada reta, para  $k = -v$ , a rotação cíclica (4.6) leva as cordas  $y = kx + s$  nas cordas  $y_1 = x_1(k + v) + s$  paralelas ao eixo  $Ox$  (declividade nula). Como  $Oy$  é o eixo de simetria de  $\mathcal{Z}$ , ele contém o diâmetro  $d$  do ciclo  $\mathcal{Z}$ , conforme ilustra a figura 4.11.

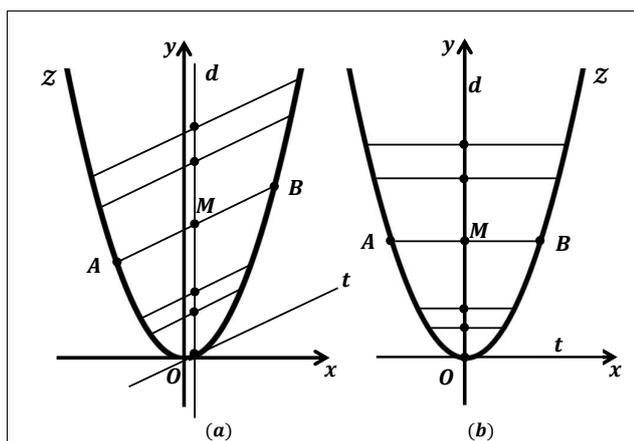


Figura 4.11: Diâmetro do ciclo.

**Proposição 4.4.** *Toda reta especial que intersecta um ciclo  $\mathcal{Z}$  contém um diâmetro de  $\mathcal{Z}$ .*

**Demonstração 4.4.** *Seja  $\ell$  uma reta especial de equação  $x = m$ . A rotação cíclica (4.6)*

$$\begin{cases} x' = x + \frac{v}{2a} \\ y' = vx + y + \frac{v^2}{4a} \end{cases}$$

leva a reta  $\ell$  na reta  $x' = m + \frac{v}{2a}$ . Para  $v = -2am$ , temos  $x' = 0$ , ou seja, a reta  $\ell$  é levada sobre eixo  $Oy$ . Portanto uma reta especial  $\ell$  bissecta todas as corda do ciclo  $\mathcal{Z}$

que, pela rotação cíclica, são levadas às cordas paralelas ao eixo  $Ox$ . ■

**Proposição 4.5.** A reta  $t$  tangente ao ciclo  $\mathcal{Z}$  no extremo de um diâmetro  $d$  é paralela às cordas bissectadas por  $d$ .

**Demonstração 4.5.** Sejam  $A(a_1, a_2)$  e  $B(b_1, b_2)$  os extremos de uma corda  $AB$  do ciclo  $\mathcal{Z}$ ,  $M(m, y_0)$  o ponto médio de  $AB$ ,  $d$  um diâmetro de  $\mathcal{Z}$  que passa por  $M$  e  $t$  a reta tangente à  $\mathcal{Z}$  no ponto  $T(m, y_T)$ , conforme ilustrado na figura 4.12.

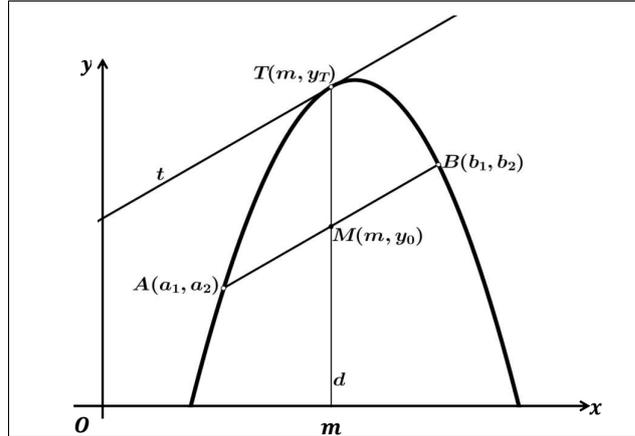


Figura 4.12: Diâmetro do ciclo.

Considere a equação  $y = ax^2 + 2bx + c$  do ciclo  $\mathcal{Z}$ . A reta tangente  $t$  tem a declividade dada por

$$k_T = 2am + 2b,$$

onde  $m$  é a abscissa do ponto  $T$ .

Se cada corda  $AB$  tem  $M(m, y_0)$  como ponto médio, vamos determinar a declividade  $k_{AB}$  da corda  $AB$ . A coordenada  $m$  é dada por

$$m = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

e  $y_0$  é dado por

$$y_0 = \frac{a(a_1^2 + b_1^2) + 2b(a_1 + b_1) + 2c}{2}.$$

Logo

$$\begin{aligned} k_{AB} &= k_{AM} = \frac{y_0 - a_2}{m - a_1} \\ &= \frac{\frac{a(a_1^2 + b_1^2) + 2b(a_1 + b_1) + 2c}{2} - (aa_1^2 + 2ba_1 + c)}{\frac{a_1 + b_1}{2} - a_1} \\ &= \frac{a(b_1^2 - a_1^2) + 2b(b_1 - a_1)}{b_1 - a_1} = a(b_1 + a_1) + 2b. \end{aligned}$$

Assim,  $k_{AB} = 2am + 2b$ . Portanto a reta tangente  $t$  é paralela à corda  $AB$ . ■

Na geometria euclidiana o diâmetro de uma circunferência é perpendicular às retas tangentes nos seus extremos. Na geometria de Galileu dizemos que um diâmetro é perpendicular à reta tangente na extremidade. Nesta geometria, as retas especiais são perpendiculares às retas ordinárias, (veja figura 4.13).

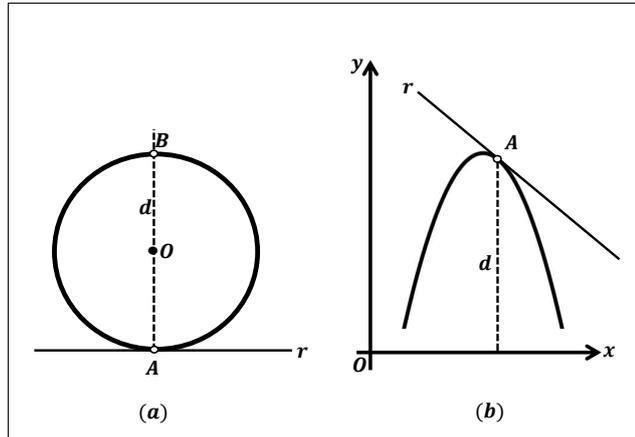


Figura 4.13: Diâmetro perpendicular à tangente.

Dizemos então que os diâmetros de um ciclo  $\mathcal{Z}$  são perpendiculares a  $\mathcal{Z}$ , já que definimos o ângulo entre a reta  $d$  e a curva  $\mathcal{Z}$  como sendo o ângulo entre  $d$  e a reta  $r$  tangente à  $\mathcal{Z}$  no ponto  $A \in \mathcal{Z} \cap r$ .

**Proposição 4.6.** *Se  $PA$  e  $PB$  são tangentes a um ciclo  $\mathcal{Z}$  por  $P \notin \mathcal{Z}$ , então a reta especial por  $P$  passa pelo ponto médio da corda  $AB$ .*

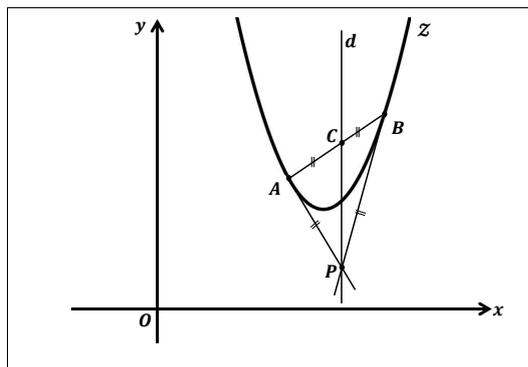


Figura 4.14: A corda  $AB$  é bissectada pelo diâmetro em  $C$ .

**Demonstração 4.6.** *De fato, a reta especial por  $P$  contém um diâmetro  $d$  que é perpendicular ao ciclo  $\mathcal{Z}$ , logo é altura do triângulo isósceles  $\triangle APB$ . Portanto  $\overline{AC} = \overline{CB}$ , onde  $C \in d \cap AB$ . ■*

# Capítulo 5

## Potência e inversão

Neste capítulo estudaremos a potência de um ponto em relação a uma circunferência e a inversão na circunferência. Para melhor compreensão, primeiramente trataremos o assunto na geometria euclidiana e, na sequência, na geometria de Galileu.

### 5.1 Potência de um ponto

#### 5.1.1 Potência de um ponto em relação a $\Gamma$

Na geometria euclidiana se uma reta  $r$ , que passa por um ponto  $P$ , intersecta uma circunferência  $\Gamma$  nos pontos  $A$  e  $B$  então, pelo teorema das cordas [17], o produto  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  depende somente de  $P$  e de  $\Gamma$ .

**Definição 5.1.** *A potência de um ponto  $P$  em relação à circunferência  $\Gamma$  é o produto das medidas dos segmentos  $PA$  e  $PB$ , sendo  $A$  e  $B$  pontos de interseção de  $\Gamma$  com uma reta qualquer que passa por  $P$ .*

Representamos a potência de um ponto  $P$  em relação a uma circunferência  $\Gamma$  por  $Pot_{\Gamma}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ , ( $Pot_{\Gamma}(P) \in \mathbb{R}$ ), em que as distâncias consideradas são algébricas:

- $Pot_{\Gamma}(P) > 0$ , se  $PA$  e  $PB$  têm o mesmo sentido, isto é,  $P$  é exterior à circunferência;
- $Pot_{\Gamma}(P) < 0$ , se  $PA$  e  $PB$  têm o sentidos opostos, isto é,  $P$  é interior à circunferência;
- $Pot_{\Gamma}(P) = 0$ , se  $P$  pertence à circunferência.

Quando uma circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  é intersectada nos pontos  $A_1$  e  $B_1$  por uma reta  $l$  que passa por  $O$ , temos  $\overline{PA_1} = d - r$  e  $\overline{PB_1} = d + r$ , onde  $d = \overline{PO}$ . O

sinal de  $\overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1}$  é o mesmo de  $d - r$ . Assim a potência do ponto  $P$  em relação a  $\Gamma$ , em todos os casos é

$$Pot_{\Gamma}(P) = d^2 - r^2. \quad (5.1)$$

Se a circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  for tangenciada pela reta  $PT$  em  $T$ , temos  $Pot_{\Gamma}(P) = d^2 - r^2 = \overline{PT}^2$ .

Sejam  $O(a, b)$  o centro de uma circunferência  $\Gamma$  de raio  $r$  e  $P(x_0, y_0)$  um ponto. Temos

$$\begin{aligned} Pot_{\Gamma}(P) &= d^2 - r^2 \\ &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2. \end{aligned}$$

Como a equação da circunferência  $\Gamma$  é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

segue que a potência de  $P(x_0, y_0)$  em relação à  $\Gamma$  é obtida substituindo-se  $x$  e  $y$  no lado esquerdo da equação de  $\Gamma$ , pelas coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  de  $P$ . Desta forma, o conjunto de pontos cuja potência em relação a  $\Gamma$  vale  $k$  é dado por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = k \quad \text{ou} \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 - (r^2 + k) = 0,$$

ou seja, uma circunferência concêntrica com  $\Gamma$ .

**Definição 5.2** (Eixo radical). *O conjunto dos pontos que têm a mesma potência em relação a duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é chamado de eixo radical  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$ .*

**Proposição 5.1.** *O eixo radical  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  de duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , não concêntricas, é uma reta perpendicular à reta que passa pelos centros  $O_1(a_1, b_1)$  e  $O_2(a_2, b_2)$  de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente.*

**Demonstração 5.1.** *Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  duas circunferências de equações*

$$x^2 + y^2 + 2p_1x + 2q_1y + f_1 = 0$$

e

$$x^2 + y^2 + 2p_2x + 2q_2y + f_2 = 0.$$

Logo

$$x^2 + y^2 + 2p_1x + 2q_1y + f_1 = x^2 + y^2 + 2p_2x + 2q_2y + f_2,$$

daí

$$2(p_1 - p_2)x + 2(q_1 - q_2)y + (f_1 - f_2) = 0,$$

que representa uma reta, conforme ilustrado na figura 5.1.

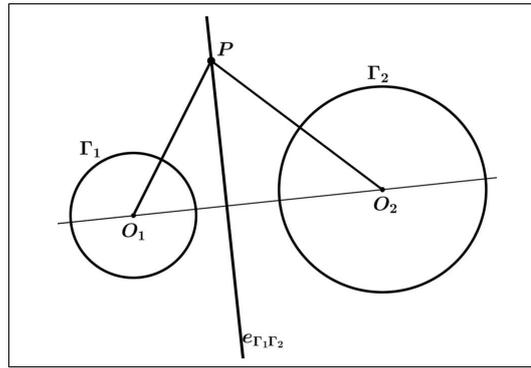


Figura 5.1: Eixo radical  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  de duas circunferências.

Se  $p_1 = p_2$  e  $q_1 = q_2$ , as circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são concêntricas e o eixo radical é um conjunto vazio. Suponha  $q_1 \neq q_2$  e  $p_1 \neq p_2$ , então a declividade  $k$  do eixo radical é dada por

$$k = -\frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2}.$$

A declividade  $k_1$  da reta pelos centros  $O_1$  e  $O_2$  é dada por

$$k_1 = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1} = \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2},$$

com  $a_1 = -p_1$ ,  $b_1 = -q_1$ ,  $a_2 = -p_2$  e  $b_2 = -q_2$ . Segue que

$$k \cdot k_1 = -\frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2} \cdot \frac{q_1 - q_2}{p_1 - p_2} = -1.$$

Portanto o eixo radical é uma reta perpendicular à reta que passa pelos centros.

Se  $p_1 = p_2$  e  $q_1 \neq q_2$ , então o eixo radical é paralelo a  $Ox$  e a reta que passa pelos centros é paralela a  $Oy$ .

Se  $p_1 \neq p_2$  e  $q_1 = q_2$ , então o eixo radical é paralelo a  $Oy$  e a reta que passa pelos centros é paralela a  $Ox$ . ■

**Corolário 2.** Se duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são tangentes em um ponto  $T$ , então o eixo radical  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  é a tangente comum.

**Demonstração 2.** De fato, temos que considerar as duas circunferências tangentes exteriormente e interiormente, conforme figura 5.2. Se  $P \neq T$  e  $P \in e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  temos

$$Pot_{\Gamma_1}(P) = \overline{PT}^2 = Pot_{\Gamma_2}(P).$$

Sabemos que  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  é uma reta. Como  $T$  têm potência nula em relação a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ,  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  é a reta que passa por  $P$  e  $T$ .

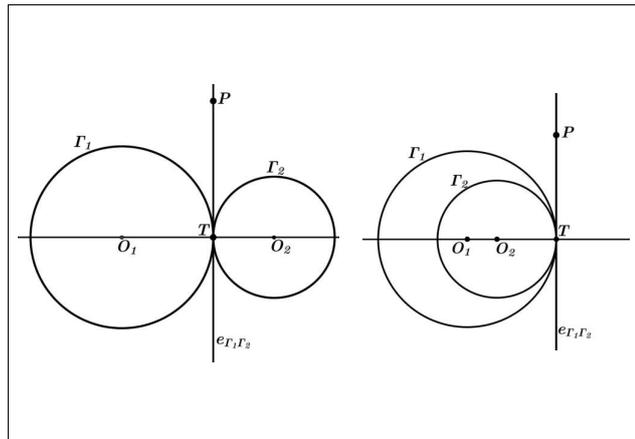


Figura 5.2: Eixo radical  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  de duas circunferências tangentes exteriormente e interiormente.

■

**Corolário 3.** Se duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  são secantes nos pontos  $A$  e  $B$ , então o eixo radical de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  é a reta  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  por  $A$  e  $B$ .

**Demonstração 3.** De fato, considere duas circunferências  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , secantes nos pontos  $A$  e  $B$ , conforme ilustrado na figura 5.3. Se  $P \in e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  temos

$$Pot_{\Gamma_1}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = Pot_{\Gamma_2}(P).$$

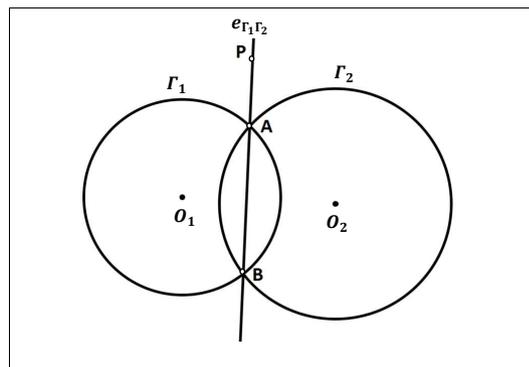


Figura 5.3: Eixo radical  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  de duas circunferências secantes.

Como  $A$  e  $B$  têm potência nula em relação a  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ,  $e_{\Gamma_1\Gamma_2}$  é a reta que passa por  $A$  e  $B$ .

■

**Proposição 5.2.** Se  $\Gamma_1, \Gamma_2$  e  $\Gamma_3$  são três circunferências com centros não colineares, então existe um único ponto  $R$  no plano, tal que

$$Pot_{\Gamma_1}(R) = Pot_{\Gamma_2}(R) = Pot_{\Gamma_3}(R).$$

**Demonstração 5.2.** Seja  $e_{ij}$  o eixo radical de  $\Gamma_i$  e  $\Gamma_j$ , para  $1 \leq i < j \leq 3$ . Como os centros não são colineares, existe  $R$ , ponto de interseção de  $e_{12}$  e  $e_{23}$  (Vide figura 5.4). Segue de  $R \in e_{12}$  que  $Pot_{\Gamma_1}(R) = Pot_{\Gamma_2}(R)$  e de  $R \in e_{23}$  que  $Pot_{\Gamma_2}(R) = Pot_{\Gamma_3}(R)$ . Logo  $Pot_{\Gamma_1}(R) = Pot_{\Gamma_3}(R)$ , portanto  $R \in e_{13}$ . ■

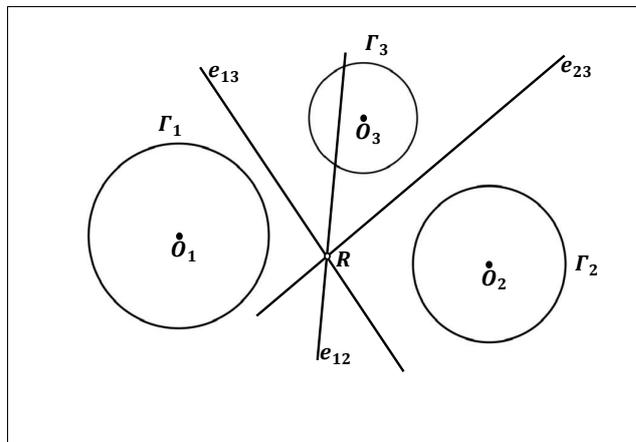


Figura 5.4: Centro radical de três circunferências de centros não colineares.

O ponto  $R$  é denominado de *centro radical* das três circunferências.

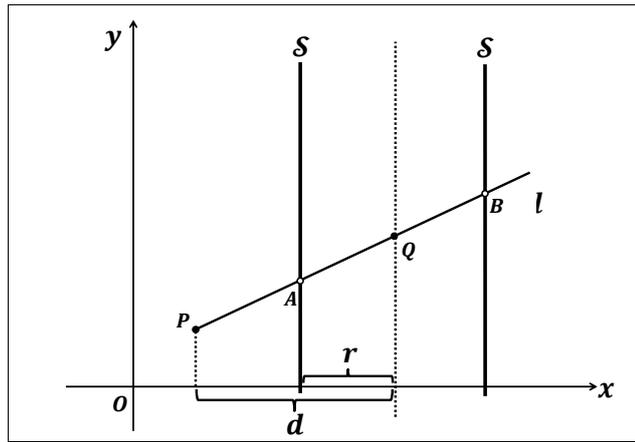
Na geometria de Galileu, vamos analisar a potência de um ponto em relação à circunferência  $\mathcal{S}$  e ao ciclo  $\mathcal{Z}$  [17] e [18].

### 5.1.2 Potência de um ponto em relação à circunferência $\mathcal{S}$

Como na geometria euclidiana, a potência de um ponto  $P$  em relação à circunferência  $\mathcal{S}$  (par de retas especiais) é dada por

$$Pot_{\mathcal{S}}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}.$$

O produto  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  depende somente do ponto  $P$  e da circunferência  $\mathcal{S}$ . Os comprimentos dos segmentos  $PA$  e  $PB$ , independem da reta  $l$  que passa por  $P$ .


 Figura 5.5: Potência de um ponto  $P$  em relação à  $\mathcal{S}$ .

Numa circunferência  $\mathcal{S}$  de centro  $Q$  e raio  $r$ , seja  $d = \overline{PQ}$ , conforme ilustra a figura 5.5. Então  $\overline{PA} = d - r$  e  $\overline{PB} = d + r$ , portanto a potência  $Pot_{\mathcal{S}}(P)$  em relação à  $\mathcal{S}$  é dada por

$$Pot_{\mathcal{S}}(P) = d^2 - r^2.$$

Como a circunferência  $\mathcal{S}$  é um par de retas especiais  $x = x_1$  e  $x = x_2$ , se  $P$  tem coordenadas  $(x_0, y_0)$ , então  $\overline{PA} = x_1 - x_0$  e  $\overline{PB} = x_2 - x_0$ . Portanto,

$$Pot_{\mathcal{S}}(P) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2).$$

Como a equação de  $\mathcal{S}$  é  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ , segue que a potência do ponto  $P$  em relação à circunferência  $\mathcal{S}$  é obtida quando substituimos  $x$  e  $y$  no lado esquerdo da equação  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$  de  $\mathcal{S}$  pelas coordenadas  $(x_0, y_0)$  de  $P$ .

O conjunto de pontos cujas potências em relação a uma circunferência  $\mathcal{S}$  têm valor constante  $k$  é dado por

$$x^2 + 2bx + c = k,$$

$$x^2 + 2bx + (c - k) = 0,$$

em que  $2b = -x_1 - x_2$  e  $c = x_1x_2$ , ou seja, uma circunferência “concêntrica” à circunferência  $\mathcal{S}$  dada.

**Proposição 5.3.** *O eixo radical  $e_{\mathcal{S}\mathcal{S}_1}$  de duas circunferências  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}_1$ , não concêntricas, é uma reta especial.*

**Demonstração 5.3.** *De fato, como  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{S}_1$  não são concêntricas, então  $b \neq b_1$ , pois  $b = -\frac{x_1 + x_2}{2}$ . Daí*

$$x^2 + 2bx + c = x^2 + 2b_1x + c_1$$

leva a

$$x = \frac{c_1 - c}{2(b - b_1)}.$$

■

Duas circunferências concêntricas não possuem eixo radical.

### 5.1.3 Potência de um ponto em relação ao ciclo $\mathcal{Z}$

A potência  $Pot_{\mathcal{Z}}(P)$  de um ponto  $P$  em relação a um ciclo  $\mathcal{Z}$  também é dada por

$$Pot_{\mathcal{Z}}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB},$$

onde  $A$  e  $B$  são os pontos de interseção da reta ordinária  $l$ , que passa por  $P$ , com o ciclo  $\mathcal{Z}$ .

**Proposição 5.4.** *A potência de um ponto  $P$  em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$  não depende da reta que passa por  $P$ .*

**Demonstração 5.4.** *Sejam  $l$  e  $l_1$  duas retas ordinárias que passam pelo ponto  $P$  e intersectam o ciclo  $\mathcal{Z}$  nos pontos:  $A$  e  $B$ ,  $A_1$  e  $B_1$ , respectivamente.*

- Se  $P \in \mathcal{Z}$  (vide figura 5.6), então  $P = A = A_1$  ou  $P = B = B_1$ , logo

$$Pot_{\mathcal{Z}}(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1} = 0.$$

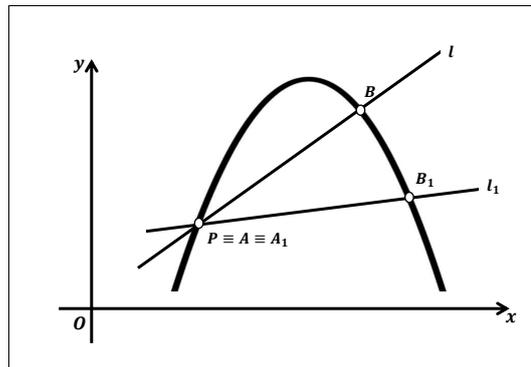


Figura 5.6: Ponto  $P$  no ciclo  $\mathcal{Z}$ .

- Se  $P \notin \mathcal{Z}$  (vide figura 5.7), então  $\widehat{ABB_1} \cong \widehat{AA_1B_1}$ , pois são ângulos inscritos em  $\mathcal{Z}$  subtendidos pela mesma corda  $AB_1$ . Da mesma forma  $\widehat{A_1AB} \cong \widehat{A_1B_1B}$ , pois

são ângulos inscritos subtendidos pela mesma corda  $A_1B$ . Assim, os triângulos  $\triangle PAA_1$  e  $\triangle PB_1B$  são semelhantes de primeira espécie.

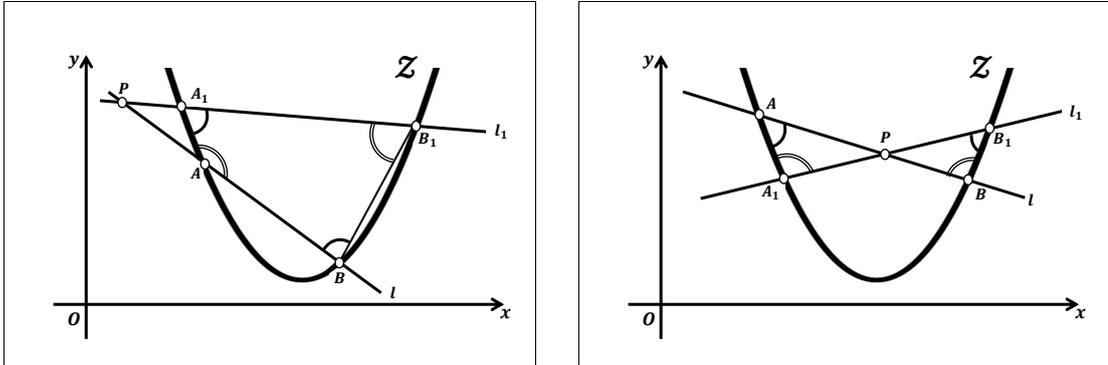


Figura 5.7:  $P$  não pertencente ao ciclo  $\mathcal{Z}$ .

Daí

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PA_1}} = \frac{\overline{PB_1}}{\overline{PB}},$$

isto é,  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PA_1} \cdot \overline{PB_1}$  e  $Pot_{\mathcal{Z}}(P)$  é independente da escolha da reta  $l$ .

■

Dizemos que o ponto  $P$  é interior à  $\mathcal{Z}$  se  $P \notin \mathcal{Z}$  e toda reta que passa por  $P$  intersecta o ciclo  $\mathcal{Z}$ . Como no caso euclidiano temos:

- $Pot_{\mathcal{Z}}(P) > 0$ , se  $PA$  e  $PB$  têm o mesmo sentido, isto é,  $P$  é exterior ao ciclo  $\mathcal{Z}$ ;
- $Pot_{\mathcal{Z}}(P) < 0$ , se  $PA$  e  $PB$  têm sentidos opostos, isto é,  $P$  é interior ao ciclo  $\mathcal{Z}$ ;
- $Pot_{\mathcal{Z}}(P) = 0$ , se  $P$  pertence ao ciclo  $\mathcal{Z}$ .

**Proposição 5.5.** Se o ciclo  $\mathcal{Z}$  for tangenciado pela reta  $PT$  em  $T$ , temos  $Pot_{\mathcal{Z}}(P) = \overline{PT}^2$ .

**Demonstração 5.5.** Considere o ciclo  $\mathcal{Z}$  de equação  $y = ax^2$ . Aplica-se a rotação cíclica (4.6) tal que o ponto  $T$  seja levado ao  $T'(0,0)$ ,  $A$  ao  $A'$ ,  $B$  ao  $B'$  e  $P$  ao  $P' = (x'_P, 0)$  que está na interseção da reta por  $A'$  e  $B'$  com  $Ox$ , conforme ilustrado na figura 5.8. A tangência é preservada, pois  $\mathcal{Z}$  é preservado e retas são levadas em retas pela rotação cíclica.

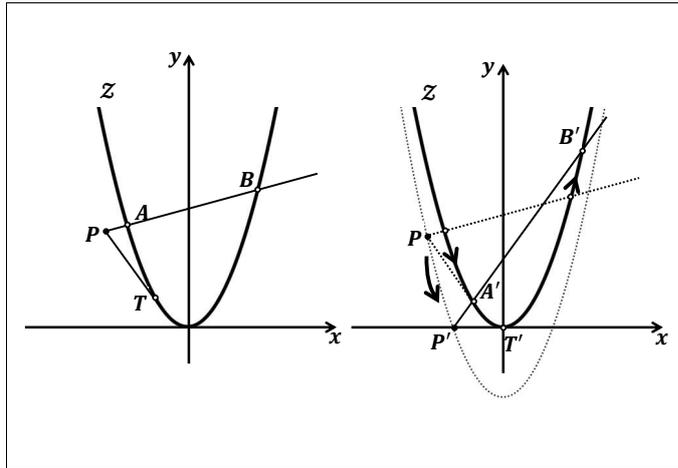


Figura 5.8: Potência do ponto  $P$  quando  $T \in \mathcal{Z}$ .

A potência de  $P'$  é dada por

$$\begin{aligned} \text{Pot}_{\mathcal{Z}}(P') &= d(P', A')d(P', B') \\ &= (x_{A'} - x_{P'})(x_{B'} - x_{P'}). \end{aligned}$$

Como a declividade  $k'$  da reta por  $A'$  e  $B'$  é dada por

$$k' = \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} = \frac{y_{A'} - y_{P'}}{x_{A'} - x_{P'}} = \frac{y_{B'} - y_{P'}}{x_{B'} - x_{P'}}$$

e  $y_{P'} = 0$ , segue que

$$\text{Pot}_{\mathcal{Z}}(P') = (x_{A'} - x_{P'})(x_{B'} - x_{P'}) = \frac{y_{A'}y_{B'}}{k'^2} = \frac{y_{A'}y_{B'}(x_{B'} - x_{A'})^2}{(y_{B'} - y_{A'})^2}.$$

A distância de  $P'$  a  $T'$  é dada por  $d(P', T') = (x_{P'} - 0)$  em que  $x_{P'}$  é obtido de

$$\begin{aligned} \frac{y_{B'} - y_{A'}}{x_{B'} - x_{A'}} &= \frac{y_{A'}}{x_{A'} - x_{P'}} \\ x_{P'} &= \frac{x_{A'}y_{B'} - y_{A'}x_{B'}}{y_{B'} - y_{A'}}. \end{aligned}$$

Daí

$$x_{P'}^2 = \frac{(x_{A'}y_{B'} - y_{A'}x_{B'})^2}{(y_{B'} - y_{A'})^2}.$$

Segue que

$$\text{Pot}_{\mathcal{Z}}(P') - x_{P'}^2 = \frac{(y_{B'} - y_{A'})(y_{A'}x_{B'}^2 - y_{B'}x_{A'}^2)}{(y_{B'} - y_{A'})^2}.$$

O fator  $(y_{A'}x_{B'}^2 - y_{B'}x_{A'}^2)$  é nulo, já que  $y' = ax'^2$ , pois o ciclo é invariante. Assim  $Pot_{\mathcal{Z}}(P') - x_{P'}^2 = 0$ . Logo

$$\begin{aligned} Pot_{\mathcal{Z}}(P') &= x_{P'}^2 \\ d(P', A')d(P', B') &= d(P', T')^2. \end{aligned}$$

Como a rotação cíclica é uma isometria, segue que

$$d(P, A)d(P, B) = d(P, T)^2.$$

■

Sejam  $\mathcal{Z}$  um ciclo de equação  $ax^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$  e  $l$  uma reta de equação  $y - y_0 = k(x - x_0)$  que passa por  $P(x_0, y_0)$ . Sejam  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  os pontos de interseção de  $l$  com  $\mathcal{Z}$ . Substituindo a equação da reta  $l$

$$y = kx + (y_0 - kx_0)$$

na equação do ciclo  $\mathcal{Z}$ , temos

$$x^2 + 2(b_1 + b_2k)x + [2b_2(y_0 - kx_0) + c] = 0. \quad (5.2)$$

Mas

$$-2(b_1 + b_2k) = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2b_2(y_0 - kx_0) + c = x_1 \cdot x_2,$$

pois  $x_1$  e  $x_2$  são raízes de (5.2).

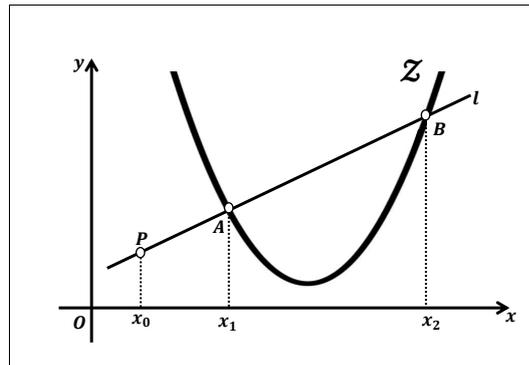


Figura 5.9: Potência em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$ .

A potência de  $P$  em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$  (vide figura 5.9) é dada por

$$\begin{aligned} Pot_{\mathcal{Z}}(P) &= \overline{PA} \cdot \overline{PB} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \\ &= x_0^2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_1 \cdot x_2. \end{aligned}$$

De acordo com a observação que segue de (5.2)

$$Pot_{\mathcal{Z}}(P) = x_0^2 + 2b_1x_0 + 2b_2y_0 + c.$$

Portanto, a potência de um ponto  $P$  em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$  é obtida substituindo-se os valores de  $x$  e  $y$  no lado esquerdo da equação de  $\mathcal{Z}$  pelas coordenadas  $(x_0, y_0)$  de  $P$ .

O conjunto de pontos cujas potências em relação a um ciclo  $\mathcal{Z}$  têm valor constante  $k$  é dado por

$$x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = k \quad \text{ou} \quad x^2 + 2b_1x + 2b_2y + (c - k) = 0,$$

ou seja, um ciclo paralelo ao ciclo  $\mathcal{Z}$  dado. Dois ciclos paralelos não possuem eixo radical.

**Proposição 5.6.** *O eixo radical  $e_{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}$  de dois ciclos  $\mathcal{Z}_1$  e  $\mathcal{Z}_2$ , não paralelos e de mesmo raio é uma reta especial.*

**Demonstração 5.6.** *sejam  $\mathcal{Z}_1$  e  $\mathcal{Z}_2$  dois ciclos não paralelos de equações  $x^2 + 2b_{11}x + 2b_{12}y + c_1 = 0$ , com  $b_{12} \neq 0$  e  $x^2 + 2b_{21}x + 2b_{22}y + c_2 = 0$ , com  $b_{22} \neq 0$  respectivamente. O raio de um ciclo de equação  $y = ax^2 + 2bx + c$  é dado por*

$$r = \frac{1}{2a}.$$

No ciclo  $\mathcal{Z}_1$  temos

$$y = -\frac{1}{2b_{12}}x^2 - \frac{b_{11}}{b_{12}}x - \frac{c}{2b_{12}},$$

assim

$$r = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2b_{12}}\right)} = -b_{12}.$$

Analogamente, o raio de  $\mathcal{Z}_2$  vale  $r = -b_{22}$ . Para determinarmos o conjunto dos pontos de mesma potência em relação a  $\mathcal{Z}_1$  e a  $\mathcal{Z}_2$ , devemos resolver a equação

$$x^2 + 2b_{11}x + 2b_{12}y + c_1 = x^2 + 2b_{21}x + 2b_{22}y + c_2.$$

Como  $\mathcal{Z}_1$  e  $\mathcal{Z}_2$  possuem o mesmo raio e são não paralelos, temos  $b_{12} = b_{22}$  e  $b_{11} \neq b_{21}$  e segue que a equação de  $e_{\mathcal{Z}_1\mathcal{Z}_2}$  é

$$2b_{11}x + c_1 = 2b_{21}x + c_2,$$

$$x = \frac{c_2 - c_1}{2(b_{11} - b_{21})}.$$

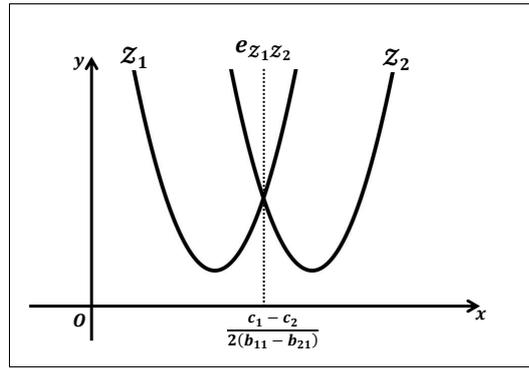


Figura 5.10: Eixo radical  $e_{Z_1Z_2}$  de dois ciclos de mesmo raio.

■

**Proposição 5.7.** *O eixo radical  $e_{SZ}$  de uma circunferência  $S$  e um ciclo  $Z$  é uma reta ordinária.*

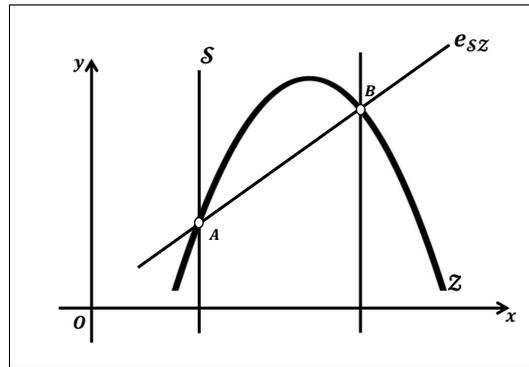


Figura 5.11: Eixo radical  $e_{SZ}$  entre o ciclo e a circunferência.

**Demonstração 5.7.** *Igualando as equações de  $S$  e  $Z$ , temos*

$$x^2 + 2bx + c = x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c_1.$$

*Portanto a equação de  $e_{SZ}$  (vide figura 5.11) é*

$$y = \frac{2b - b_1}{2b_2}x + \frac{c_1 - c}{2b_2}.$$

■

**Proposição 5.8.** *O eixo radical  $e_{Z_1Z_2}$  de dois ciclos  $Z_1$  e  $Z_2$  de raios diferentes é uma reta ordinária.*

**Demonstração 5.8.** *Sejam  $Z_1$  e  $Z_2$  dois ciclos de raios diferentes, conforme ilustra a figura 5.12. De  $x^2 + 2b_{11}x + 2b_{12}y + c_1 = x^2 + 2b_{21}x + 2b_{22}y + c_2$  obtemos  $2y(b_{12} - b_{22}) =$*

$(b_{21} - b_{11})2x + c_2 - c_1$ . Como os raios são diferentes,  $b_{12} \neq b_{22}$ , então

$$y = \frac{b_{21} - b_{11}}{b_{12} - b_{22}}x + \frac{c_2 - c_1}{2(b_{12} - b_{22})}.$$

■

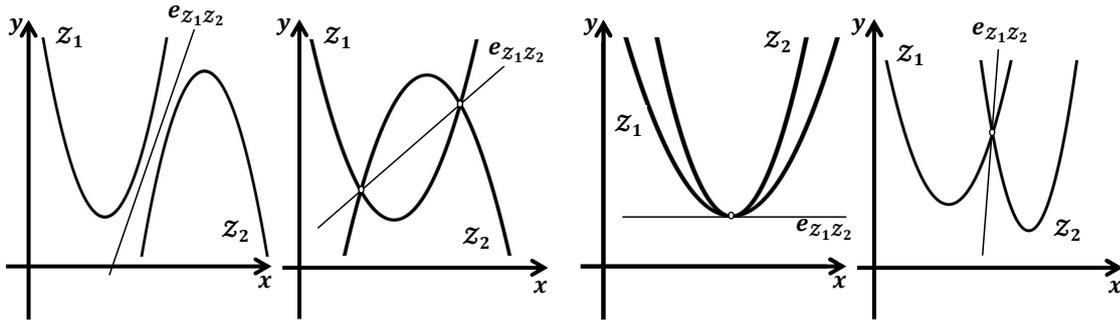


Figura 5.12: Eixo  $e_{z_1z_2}$  entre ciclos de raios diferentes.

Na geometria euclidiana vimos que existe um único ponto  $R$ , chamado de centro radical, que possui a mesma potência em relação a três circunferências com centros não colineares. Similarmente, na geometria de Galileu, sejam cada uma das três curvas  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  um ciclo ou uma circunferência; se dois eixos radicais  $e_{\gamma_1\gamma_2}$ ,  $e_{\gamma_1\gamma_3}$  ou  $e_{\gamma_2\gamma_3}$  dos três pares de curvas  $(\gamma_1, \gamma_2)$ ,  $(\gamma_1, \gamma_3)$  ou  $(\gamma_2, \gamma_3)$  se intersectam num ponto  $R$ , então o terceiro eixo radical passa por  $R$ . Este fato se explica com o mesmo argumento da proposição 5.2. Na figura 5.13 abaixo estão ilustrados os dois possíveis casos.

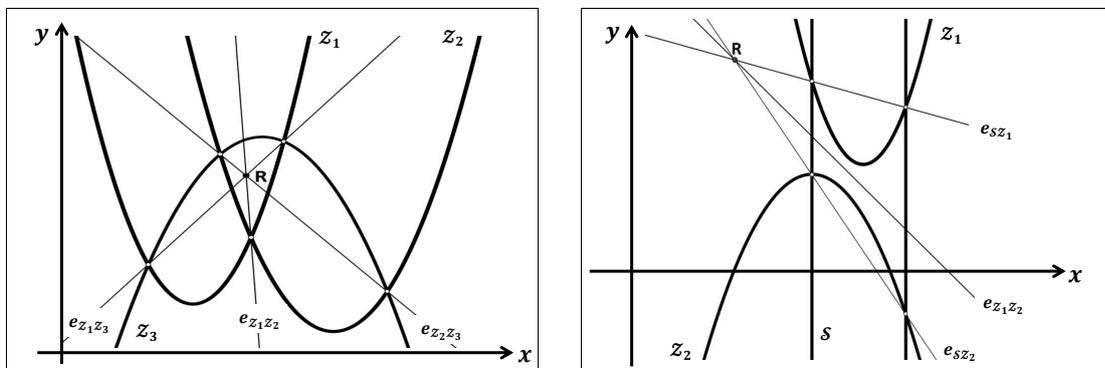


Figura 5.13: Centro radical  $R$ .

## 5.2 Inversão

### 5.2.1 Inversão na circunferência euclidiana $\Gamma$

**Definição 5.3.** [10] Seja  $\Gamma$  uma circunferência de raio  $r$  e centro  $O$ . Para qualquer ponto  $P \neq O$ , o inverso  $P'$  de  $P$  em relação à circunferência  $\Gamma$  é o único ponto  $P'$  da semirreta  $\overrightarrow{OP}$  (vide figura 5.14), tal que

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

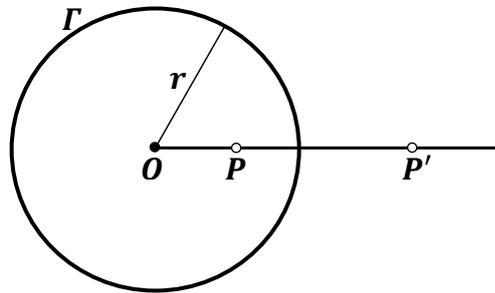


Figura 5.14: Inversão em relação à circunferência  $\Gamma$ .

A circunferência  $\Gamma$  é chamada de *circunferência de inversão*. O próximo resultado segue diretamente da definição de inversão em  $\Gamma$  [3].

#### Proposição 5.9.

- $P = P'$  se, e somente se,  $P$  está sobre a circunferência de inversão;
- Se  $P$  está no interior de  $\Gamma$ , então  $P'$  é exterior a  $\Gamma$  e se  $P$  é exterior a  $\Gamma$ , então  $P'$  está no interior de  $\Gamma$ ;
- $(P')' = P$ .

**Proposição 5.10.** Suponha que  $P$  esteja no interior de  $\Gamma$ . Seja  $TQ$  a corda de  $\Gamma$  por  $P$  que é perpendicular a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ . Então, o inverso  $P'$  de  $P$  em relação a  $\Gamma$  é o ponto de interseção das tangentes a  $\Gamma$  por  $T$  e  $Q$ .

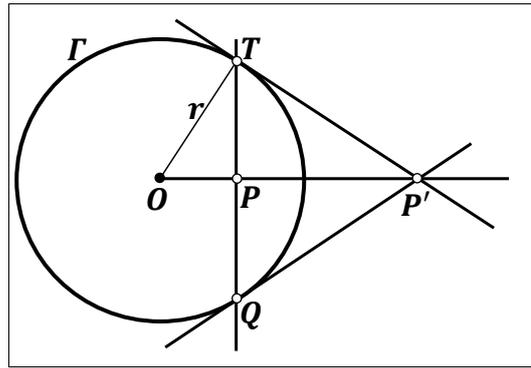


Figura 5.15: Inversão com  $P$  no interior de  $\Gamma$ .

**Demonstração 5.10.** *Suponha que a tangente a  $\Gamma$  intersecte a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  em  $P'$ , conforme ilustrado na figura 5.15. O triângulo retângulo  $\triangle OPT$  é semelhante ao triângulo retângulo  $\triangle OP'Q$ . Portanto, os lados correspondentes são proporcionais e como  $\overline{OT} = r$ , obtemos*

$$\frac{\overline{OP}}{r} = \frac{r}{\overline{OP'}}.$$

*Isso mostra que  $P'$  é o inverso de  $P$ . Por reflexão em torno de  $OP$ , vemos que a tangente a  $\Gamma$  em  $Q$  também passa por  $P'$  e, assim,  $P'$  está na interseção das tangentes.*

■

**Proposição 5.11.** *Suponha que  $P$  seja exterior a  $\Gamma$  e considere  $M$  como o ponto médio de  $OP$ . Seja  $\sigma$  a circunferência de centro  $M$  e raio  $\overline{OM} = \overline{MP}$ , conforme ilustra a figura 5.16. Então,  $\sigma$  intersecta  $\Gamma$  em dois pontos  $T$  e  $Q$ , as retas por  $PT$  e  $PQ$  são tangentes a  $\Gamma$  e o inverso  $P'$  de  $P$  em relação a  $\Gamma$  é a interseção de  $TQ$  e  $OP$ .*

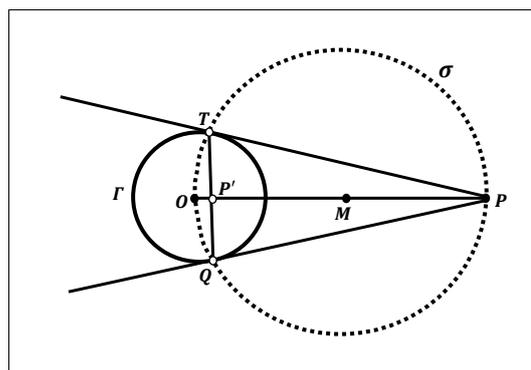


Figura 5.16: Inversão com  $P$  no exterior de  $\Gamma$ .

**Demonstração 5.11.** *Como  $P$  é exterior a  $\Gamma$ ,  $\sigma$  e  $\Gamma$  se intersectam em dois pontos  $T$  e  $Q$ <sup>1</sup>. Como  $\widehat{OTP}$  e  $\widehat{OQP}$  são ângulos inscritos em semicircunferências de  $\sigma$ , eles*

<sup>1</sup>Princípio de continuidade circular: Se uma circunferência  $\Gamma$  tem um ponto no interior e um ponto no exterior de outra circunferência  $\Gamma_1$ , então as duas circunferências se intersectam em dois pontos[10].

são retos e, portanto as retas por  $PT$  e  $PQ$  são tangentes a  $\Gamma$ . A corda  $TQ$  intersecta a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  no ponto  $P'$ , então  $P$  é o inverso de  $P'$ . Portanto,  $P'$  é o inverso de  $P$  em  $\Gamma$ .

■

**Proposição 5.12.** *Suponha que  $P$  seja um ponto exterior à  $\Gamma$  e considere  $\Gamma_1$  a circunferência centrada em  $P$  que passa por  $O$  e intersecta  $\Gamma$  em  $T$  e  $Q$ . Sejam  $\sigma$  e  $\sigma_1$  circunferências de centros  $P$  e  $Q$  e de raios  $\overline{OT} = \overline{OQ}$ , conforme ilustrado na figura 5.17. Então,  $P' \neq O$ , tal que  $P' \in \sigma \cap \sigma_1$  é o inverso de  $P$  em relação a  $\Gamma$ .*

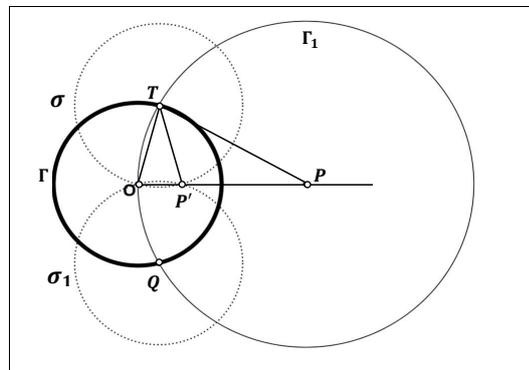


Figura 5.17: Inversão em relação a circunferência  $\Gamma$  com  $P$  no exterior.

**Demonstração 5.12.** *O triângulo  $\triangle POT$  é isósceles, pois  $PT$  e  $PO$  são raios de  $\Gamma_1$ . Logo  $\widehat{POT} \cong \widehat{PTO}$ . O triângulo  $\triangle TOP'$  também é isósceles pois  $OT$  e  $P'T$  são raios de  $\sigma$ . Logo  $\widehat{TOP'} \cong \widehat{TP'O}$ . Segue da semelhança dos triângulos  $\triangle POT$  e  $\triangle TOP'$  que*

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \frac{\overline{OT}}{\overline{OP'}}.$$

Portanto

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = \overline{OT}^2 = r^2.$$

■

**Proposição 5.13.** *A inversão numa circunferência é uma transformação que associa cada circunferência (reta) do plano a uma circunferência ou a uma reta.*

**Demonstração 5.13.** *A inversão na circunferência  $\Gamma$  de centro na origem  $O(0,0)$  e raio  $r$  leva o ponto  $P(x,y) \neq (0,0)$  ao ponto  $P'(x',y') = P'(\lambda x, \lambda y)$ ,  $\lambda > 0$ , sobre a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  (vide figura 5.18), tal que*

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2.$$

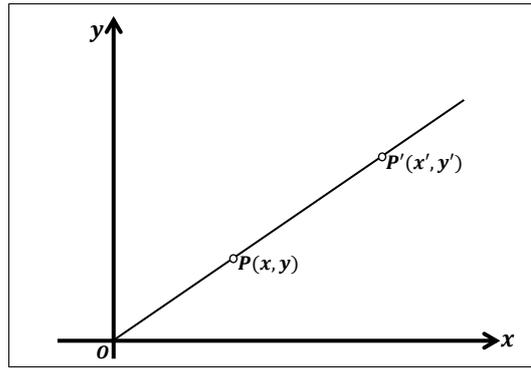


Figura 5.18: Circunferência em circunferência.

Logo

$$\begin{aligned} r^2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ &= (x^2 + y^2)\lambda. \end{aligned}$$

Daí

$$\lambda = \frac{r^2}{x^2 + y^2}.$$

Fazendo  $k = r^2$ , temos

$$x' = k \frac{x}{x^2 + y^2} \quad e \quad y' = k \frac{y}{x^2 + y^2}$$

ou

$$x = k \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \quad e \quad y = k \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

Seja  $P$  um ponto da circunferência (reta)  $\sigma$  dada pela equação

$$a(x^2 + y^2) + 2b_1x + 2b_2y + c = 0.$$

A imagem de  $\sigma$  pela inversão em  $\Gamma$  é a curva  $\sigma'$  de equação

$$\begin{aligned} 0 &= a \left( k \frac{x'}{x'^2 + y'^2} \right)^2 + a \left( k \frac{y'}{x'^2 + y'^2} \right)^2 + 2b_1k \frac{x'}{x'^2 + y'^2} + 2b_2k \frac{y'}{x'^2 + y'^2} + c \\ &= a'(x'^2 + y'^2) + 2b'_1x' + 2b'_2y' + c', \end{aligned}$$

onde  $c' = ak^2$ ,  $a' = c$ ,  $b'_1 = b_1k$  e  $b'_2 = b_2k$ .

Temos as seguintes situações:

- Se  $a = 0$  e  $c = 0$ ,  $\sigma$  é uma reta que passa pelo centro  $O$  da circunferência de inversão. Então  $a' = 0$  e  $c' = 0$ ,  $\frac{b'_1}{b'_2} = \frac{b_1}{b_2}$ , com  $b_2 \neq 0$ . Logo  $\sigma'$  é a mesma reta que passa por  $O$ .

- Se  $a = 0$  e  $c \neq 0$ ,  $\sigma$  é uma reta que não passa pelo centro  $O$  da circunferência de inversão, então  $a' \neq 0$  e  $c' = 0$ . Logo  $\sigma'$  é uma circunferência que passa por  $O$ .
- Se  $a \neq 0$  e  $c = 0$ ,  $\sigma$  é uma circunferência que passa pelo centro  $O$  da circunferência de inversão, então  $a' = 0$  e  $c' \neq 0$  e  $\sigma'$  é uma reta que não passa por  $O$ .
- Se  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ ,  $\sigma$  é uma circunferência que não passa pelo centro  $O$  da circunferência de inversão, então  $a' \neq 0$  e  $c' \neq 0$ . Logo  $\sigma'$  é uma circunferência que não passa por  $O$ .

Portanto  $\sigma'$  é uma circunferência ou uma reta. ■

**Proposição 5.14.** A inversão na circunferência  $\Gamma$  preserva o ângulo entre retas invertendo sua orientação.

**Demonstração 5.14.** Sejam  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O$  e raio  $r$ ,  $l_1$  e  $l_2$  duas retas concorrentes. São três casos a serem analisados.

- As duas retas  $l_1$  e  $l_2$  passam pelo centro  $O$ .  
As imagens  $l'_1$  e  $l'_2$  das retas  $l_1$  e  $l_2$  pela inversão em  $\Gamma$  coincidem com  $l_1$  e  $l_2$ . Sejam  $P'$  imagem de  $P$  na reta  $l_2$  e  $Q'$  imagem de  $Q$  na reta  $l_1$ , conforme mostra a figura 5.19.

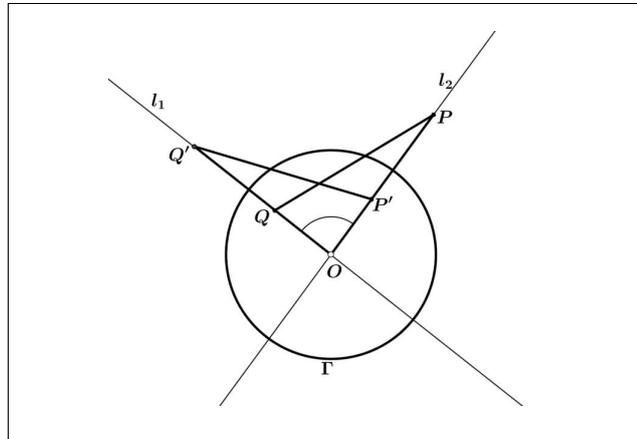


Figura 5.19: Ângulo entre  $l_1$  e  $l_2$  com  $l_1$  e  $l_2$  passando por  $O$ .

Segue da definição de inversão que os triângulos  $\triangle OPQ$  e  $\triangle OQ'P'$  são semelhantes. Logo  $\widehat{POQ} \cong \widehat{Q'OP'}$ , como afirmado.

- $l_1$  passa por  $O$  e  $l_2$  não.  
A imagem  $l'_1$  de  $l_1$  é a reta  $l_1$ , enquanto que a imagem  $l'_2$  de  $l_2$  é uma circunferência que passa por  $O$ . Se o ponto  $A$  é tal que  $A \in l_1 \cap l_2$ , então a imagem do ângulo  $\hat{A} = \delta_{l_1 l_2}$  pela inversão em  $\Gamma$  é  $\hat{B} = \delta_{l'_1 l'_2}$ . Conforme mostra a ilustração da figura 5.20.

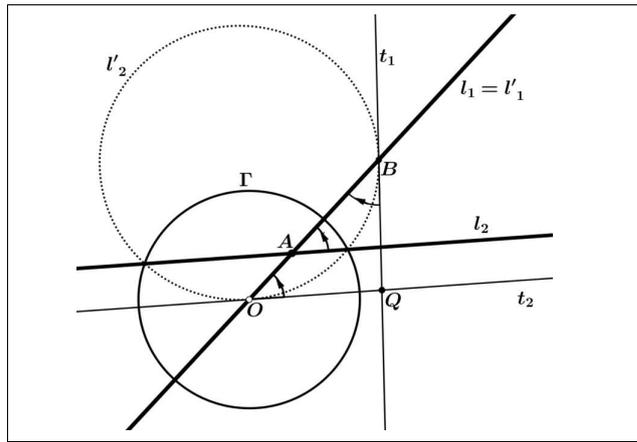


Figura 5.20: Ângulo entre  $l_1$  e  $l_2$  com  $l_1$  passando por  $O$  e  $l_2$  não.

Temos que  $\widehat{B} = \delta_{l'_1 l'_2} = \delta_{l_1 t_1}$ , onde  $t_1$  é a tangente a  $l'_2$  em  $B$ . A reta tangente  $t_2$  a  $l'_2$  em  $O$  é paralela à reta  $l_2$ , caso contrário, existiria um ponto  $P$ , tal que  $\{P\} = t_2 \cap l_2$ , com  $P \neq O$ , pois  $O \notin l_2$ . Assim, a imagem de  $P$  seria  $P' \in t'_2 \cap l'_2$ . Como  $t_2 = t'_2$ , teríamos  $P'$  e  $O$  pertencentes à reta  $t_2$  e à circunferência  $l'_2$ , o que seria um absurdo, pois  $t_2$  é tangente a  $l'_2$ . Portanto,  $\delta_{l_1 l_2} \cong \delta_{l'_1 t_2}$  pois são correspondentes. Seja  $\{Q\} = t_1 \cap t_2$ , segue  $\overline{QO} = \overline{QB}$ , logo o triângulo  $\triangle OQB$  é isósceles, portanto  $\delta_{l_1 l_2} \cong \delta_{l_1 t_2} \cong \delta_{l_1 t_2}$ , com orientação invertida.

- As retas  $l_1$  e  $l_2$  não passam pela origem  $O$ .  
As imagens  $l'_1$  e  $l'_2$  das retas  $l_1$  e  $l_2$  são circunferências que passam pela origem  $O$ . A imagem do ângulo  $\widehat{A} = \delta_{l_1 l_2}$  será o ângulo  $\widehat{B} = \delta_{l'_1 l'_2} = \delta_{t_2 r_2}$ , formado pelas retas  $t_2$  e  $r_2$  tangentes a  $l'_1$  e  $l'_2$ , respectivamente, em  $B \in l'_1 \cap l'_2$ , conforme ilustra a figura 5.21.

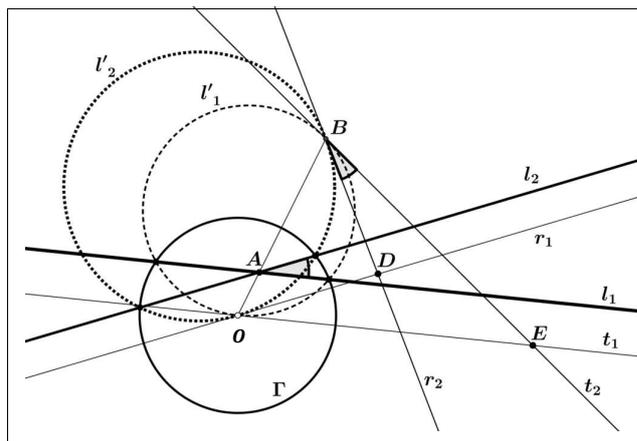


Figura 5.21: Ângulo entre  $l_1$  e  $l_2$  com  $l_1 \cap l_2 \neq O$ .

Sejam  $t_1$  e  $r_1$  as retas tangentes às circunferências  $l'_1$  e  $l'_2$  em  $O$ . Como  $t_1 \parallel l_1$  e  $r_1 \parallel l_2$  os ângulos

$\widehat{O} = \delta_{l_1 l_2} \cong \delta_{t_1 r_1}$  e  $\widehat{A} = \delta_{l_1 l_2}$  são congruentes, pois são correspondentes. Seja  $\{D\} = r_1 \cap r_2$ , logo o triângulo  $\triangle DOB$  é isósceles, assim

$$\widehat{DOB} \cong \widehat{DBO}.$$

Seja  $\{E\} = t_1 \cap t_2$ , logo o triângulo  $\triangle EOB$  é isósceles, assim

$$\widehat{EOB} \cong \widehat{EBO}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \widehat{A} \cong \delta_{t_1 r_1} &\cong \widehat{EOB} - \widehat{DOB} \\ &\cong \widehat{EBO} - \widehat{DBO} \\ &\cong \delta_{t_2 r_2} = \widehat{B}. \end{aligned}$$

Portanto  $\delta_{l_1 l_2} \cong \delta_{l_1 l_2}$  pela inversão em  $\Gamma$ , com orientação invertida.

■

## 5.2.2 Inversão na circunferência de Galileu $\mathcal{S}$

**Definição 5.4.** Uma inversão na circunferência  $\mathcal{S}$  de centro  $Q$  e raio  $r$  é uma transformação que associa cada ponto  $A \neq Q$  ao ponto  $A' \in \overrightarrow{QA}$ , tal que  $\overline{QA} \cdot \overline{QA'} = r^2$ .

Uma inversão na circunferência de Galileu  $\mathcal{S}$  é chamada de *inversão de 1ª espécie*.

Para determinarmos a imagem  $A'$  de um ponto  $A \neq Q$  por uma inversão de 1ª espécie, traçamos um ciclo  $\mathcal{Z}$  por  $A$  intersectando  $\mathcal{S}$  em  $B$  e  $C$ , tal que os raios  $QB$  e  $QC$  de  $\mathcal{S}$  sejam tangentes à  $\mathcal{Z}$  em  $B$  e  $C$ . Então  $A'$  é o segundo ponto de interseção de todos os ciclos que passam por  $A$  e que são tangenciados pelos raios a partir do centro  $Q$ , incluindo a reta  $l$  por  $Q$  e  $A$ . Veja a figura 5.22.

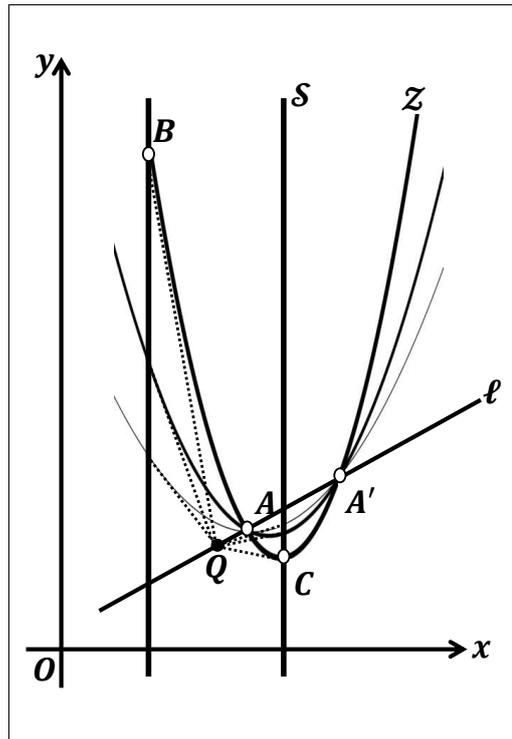


Figura 5.22: Inversão na circunferência de Galileu.

Esta construção se justifica pela potência do ponto  $Q$  em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$ . Temos

$$Pot_{\mathcal{Z}}(Q) = \overline{QA} \cdot \overline{QA'} = \overline{QC}^2 = r^2.$$

Se  $A \in \mathcal{S}$ , então todos os ciclos  $\mathcal{Z}$  tangenciados pelo raio  $QA$  são tangentes uns aos outros em  $A$ ; desta forma temos  $A = A'$ . Uma consequência da definição da inversão de 1ª espécie é que ela leva cada reta especial  $m$  a uma reta especial  $m'$ , tal que o produto das distâncias do centro  $Q$  até  $m$  e  $m'$  vale  $r^2$ .

**Proposição 5.15.** *A inversão de 1ª espécie associa o ciclo (reta)  $z$  ao ciclo ou reta  $z'$ .*

**Demonstração 5.15.** *Seja  $\mathcal{S}$  uma circunferência de centro  $O(0,0)$  e raio  $r$ . Uma inversão de 1ª espécie leva o ponto  $A(x, y) \neq O$  ao ponto  $A'(x', y') = A'(\lambda x, \lambda y) \in \overrightarrow{OA}$ , tal que  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = k$ , onde  $k = r^2$ . Logo*

$$\begin{aligned} k &= x \cdot x' \\ &= x \cdot \lambda x, \end{aligned}$$

daí

$$\lambda = \frac{k}{x^2}.$$

Segue então que

$$x' = \frac{k}{x} \quad e \quad y' = k \frac{y}{x^2}$$

ou

$$x = \frac{k}{x'} \quad e \quad y = k \frac{y'}{x'^2}.$$

O ciclo (ou reta)  $z$  tem equação

$$y = ax^2 + 2bx + c.$$

Logo a equação da curva  $z'$  é

$$k \frac{y'}{x'^2} = a \frac{k^2}{x'^2} + 2b \frac{k}{x'} + c,$$

ou seja,

$$y' = \frac{c}{k} x'^2 + 2bx' + ak.$$

Assim a equação da curva  $z'$  é  $y' = a'x'^2 + 2b'x' + c'$ , onde

$$a' = \frac{c}{k}, \quad b' = b, \quad c' = ka.$$

Temos as seguintes situações:

- Se  $a = 0$  e  $c = 0$ ,  $z$  é uma reta que passa por  $O$ , então  $a' = 0$  e  $c' = 0$ . Logo  $z'$  é a mesma reta que passa pelo centro  $O$ , conforme ilustrado na figura 5.23.

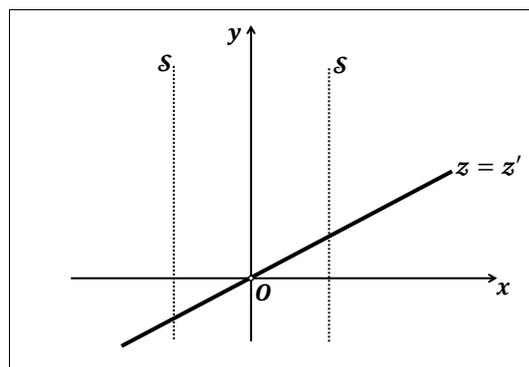


Figura 5.23: Uma reta que passa pela origem é levada na mesma reta.

- Se  $a = 0$  e  $c \neq 0$ ,  $z$  é uma reta que não passa por  $O$ , então  $a' \neq 0$  e  $c' = 0$ . Logo  $z'$  é um ciclo que passa pelo centro  $O$ . Veja a figura 5.24.

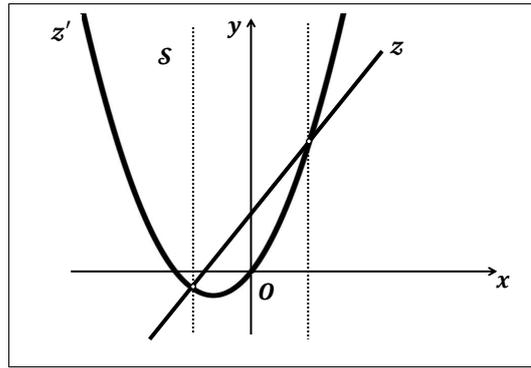


Figura 5.24: Uma reta que não passa por  $O$  é levada no ciclo que passa por  $O$ .

- Se  $a \neq 0$  e  $c = 0$ ,  $z$  é um ciclo que passa por  $O$ , então  $a' = 0$  e  $c' \neq 0$ . Logo  $z'$  é uma reta que não passa pelo centro  $O$ . Veja a figura 5.24.
- Se  $a \neq 0$  e  $c \neq 0$ ,  $z$  é um ciclo que não passa por  $O$ , então  $a' \neq 0$  e  $c' \neq 0$ . Logo  $z'$  é um ciclo que não passa pelo centro  $O$ . Observe a figura 5.25.

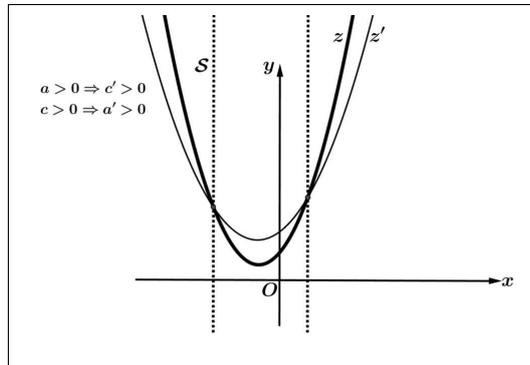
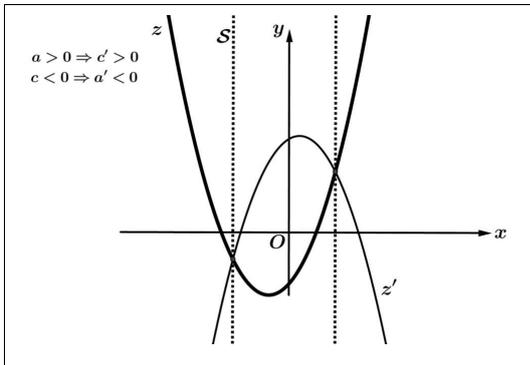


Figura 5.25: Ciclos que não passam por  $O$  são levados em ciclos que não passam por  $O$ .

■

### 5.2.3 Inversão no ciclo $\mathcal{Z}$

**Definição 5.5.** Uma inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ , também chamada de inversão de  $2^a$  espécie, é uma aplicação que deixa fixo cada ponto de  $\mathcal{Z}$  e leva cada ponto  $P$  exterior a  $\mathcal{Z}$  ao ponto  $P'$ , interseção do diâmetro  $d$  por  $P$  com a corda  $AB$ , onde  $A$  e  $B$  são os pontos de interseção das tangentes à  $\mathcal{Z}$  a partir de  $P$ , conforme ilustra a figura 5.26.

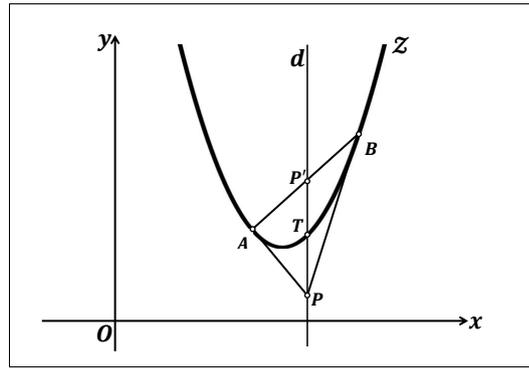


Figura 5.26: Inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ .

Equivalentemente, uma inversão de 2ª espécie leva um ponto  $P$  ao ponto  $P'$  na reta especial  $d$  (diâmetro) por  $P$ , tal que  $\mathcal{Z}$  bissecta o segmento  $PP'$  no ponto  $T$ . Portanto,

$$\overline{PT} = \overline{TP'} \quad \text{ou} \quad \delta_{PT} = \delta_{TP'}.$$

De fato  $\overline{AP} = \overline{PB}$ , logo  $d$  intersecta  $AB$  no ponto médio. Segue que a reta  $t$  tangente ao ciclo  $\mathcal{Z}$  em  $T$  é paralela à corda  $AB$ . Se  $M \in AP \cap t$ , então  $\overline{AM} = \overline{MT}$ . Segue que a reta especial  $l$  por  $M$  é equidistante das retas especiais  $d$  e  $f$ , em que  $f$  passa por  $A$ . Se  $N \in l \cap AB$ , então  $MN$  é base média do triângulo  $\triangle APP'$ , conforme mostra a figura 5.27.

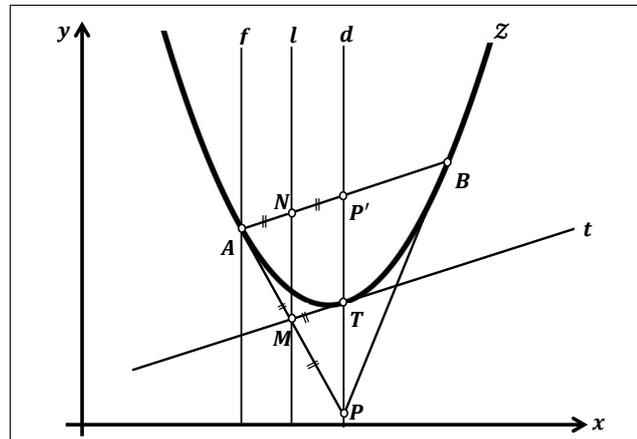


Figura 5.27: Inversão em relação ciclo  $\mathcal{Z}$ .

Note que

$$\frac{\overline{PP'}}{2} = \overline{MN} \quad \text{e} \quad \overline{TP'} = \overline{MN},$$

logo

$$\overline{PP'} = 2\overline{TP'}.$$

Mas  $\overline{PP'} = \overline{PT} + \overline{TP'}$ , daí  $\overline{PT} = \overline{TP'}$ .

**Proposição 5.16.** *Uma inversão de 2ª espécie associa o ciclo (reta)  $z$  ao ciclo ou reta  $z'$ .*

**Demonstração 5.16.** *Seja  $\mathcal{Z}$  um ciclo de equação  $y = \alpha x^2$ . Uma inversão de 2ª espécie leva o ponto  $P(x, y)$  ao ponto  $P'(x', y') = P'(x, y')$  da reta especial  $\ell$  por  $P$ , tal que  $T(x, \alpha x^2) \in PP' \cap \mathcal{Z}$  seja ponto médio do segmento  $PP'$ , conforme ilustrado na figura 5.28.*

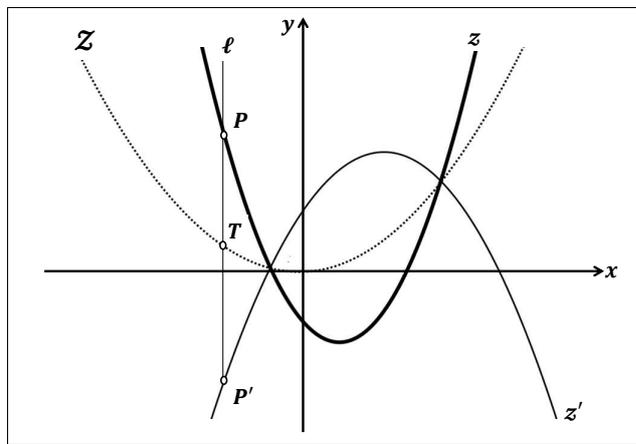


Figura 5.28: Ciclo  $z$  levado no ciclo  $z'$ .

Segue que  $\overline{P'T} = \overline{TP}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \alpha x^2 - y' &= y - \alpha x^2 \\ y &= 2\alpha x^2 - y'. \end{aligned}$$

Mas  $x = x'$ , logo

$$y = 2\alpha x'^2 - y'.$$

Então uma inversão de 2ª espécie no ciclo  $\mathcal{Z}$  leva o ciclo (reta)  $z$  de equação  $y = ax^2 + 2bx + c$  à curva  $z'$  de equação

$$2\alpha x'^2 - y' = ax'^2 + 2bx' + c,$$

isto é

$$y' = a'x'^2 + 2b'x' + c',$$

onde

$$a' = 2\alpha - a, \quad b' = -b \quad e \quad c' = -c.$$

Como as curvaturas de  $z$ ,  $z'$  e  $\mathcal{Z}$  são  $\rho = 2a$ ,  $\rho' = 2a'$  e  $\mathcal{P} = 2\alpha$ , respectivamente,

temos

$$\begin{aligned}\rho' &= 2(2\alpha - a) \\ &= 2\mathcal{P} - \rho.\end{aligned}$$

Desta forma uma inversão de 2ª espécie leva um ciclo de curvatura  $\rho = 2\mathcal{P}$  numa reta e leva uma reta num ciclo de curvatura  $2\mathcal{P}$ . A figura 5.29 ilustra este caso. Nos demais casos um ciclo será levado noutra ciclo.

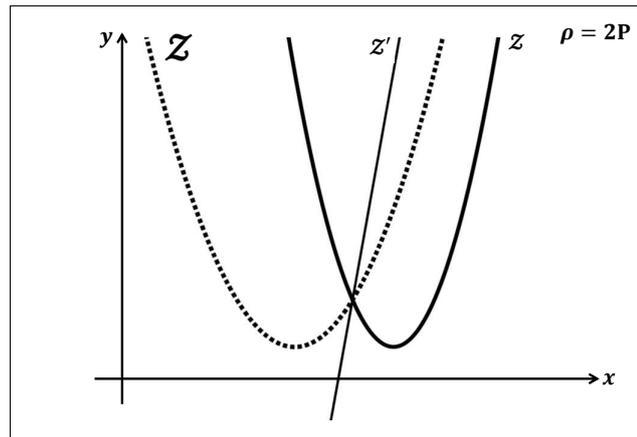


Figura 5.29: Ciclo  $z$  levado na reta  $z'$ .





## Capítulo 6

# Proposta de atividades para a sala de aula

Neste capítulo, propomos quarenta e uma atividades para a sala de aula que ilustram como o trabalho com uma geometria não euclidiana pode auxiliar na aprendizagem de conceitos da geometria euclidiana. Estas atividades, que independem de conhecimentos prévios a respeito da geometria de Galileu, estão distribuídas em nove seções onde são explorados alguns conceitos básicos e técnicas da geometria euclidiana tais como transformações geométricas, relações no triângulo, o teorema de Pitágoras e construções com régua e compasso. Além disso, as atividades trabalham muito a mudança de quadros (desenvolvimento dos conceitos tanto sob o aspecto da geometria euclidiana quanto da geometria analítica) e a mudança de representações, ora algébrica, ora geométrica [12] e [13].

Algumas atividades se enquadram na metodologia de resolução de problemas[1] e [15], enquanto que outras direcionam mais o aluno para que chegue a uma determinada construção ou resultado. Tal como sugerido pelos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) [5] e [6], várias atividades têm foco nas construções geométricas com régua e compasso, na visualização e aplicação de propriedades. As atividades podem ser aplicadas no 3º ano do ensino médio, dentro do conteúdo de geometria analítica ou até mesmo no 1ª ano, durante o estudo de funções.

Apesar de não mencionarmos nada a respeito, por não ser o foco desta dissertação, programas de geometria dinâmica podem ser usados no desenvolvimento de várias atividades.

A última seção deste capítulo apresenta sugestões para a mediação das atividades que indicam como proceder em sala de aula. De forma geral, o objetivo da mediação é subsidiar o aluno na resolução das tarefas para que siga seu próprio caminho.

## 6.1 Medida de distâncias

Considere o triângulo  $\triangle ABC$ , cujas coordenadas dos vértices são  $A(0, 2)$ ,  $B(3, 4)$  e  $C(5, 0)$ .

### Atividade 1

1. Marque, no mesmo sistema de coordenadas ortogonais, o triângulo  $\triangle ABC$  e sua imagem,  $\triangle A_1B_1C_1$ , pelo cisalhamento

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = 2x + y. \end{cases}$$

2. Repita o procedimento do item anterior para o quadrilátero  $PQMN$ , onde  $P(-1, -2)$ ,  $Q(0, 3)$ ,  $M(4, 5)$  e  $N(2, 0)$ .
3. Utilizando os itens 1 e 2, qual é a relação entre os comprimentos das projeções dos lados do triângulo  $\triangle ABC$  e do quadrilátero  $PQMN$  sobre o eixo  $Ox$  e os comprimentos das projeções das respectivas imagens pelo cisalhamento, sobre o eixo  $Ox$ ?
4. Como podemos calcular os comprimentos destas projeções?

### Atividade 2

1. Como calculamos a distância entre dois pontos na geometria euclidiana?
2. O cisalhamento da atividade 1 preserva a distância euclidiana entre dois pontos?
3. Calcule a distância  $d(A, B) = x_B - x_A$ , onde  $A(0, 2)$  e  $B(3, 4)$ . Repita o procedimento para  $d(A_1, B_1)$  em que  $A_1$  e  $B_1$  são as imagens de  $A$  e  $B$  pelo cisalhamento da atividade 1. Qual relação pode ser observada entre as distâncias  $d(A, B)$  e  $d(A_1, B_1)$ ?
4. Se dois pontos pertencem a uma mesma reta paralela ao eixo  $Oy$  como calcular a distância nos dois modelos de geometria?(Euclidiana e galileana)

### Atividade 3

1. Marque no mesmo sistema de coordenadas o triângulo  $\triangle A_1B_1C_1$  da atividade 1 e sua imagem  $\triangle A'B'C'$  pela translação

$$\begin{cases} x' = x_1 + 3 \\ y' = y_1 + 1. \end{cases}$$

2. A translação é uma transformação que preserva distâncias nas duas geometrias? Justifique.
3. Escreva a transformação  $T$  composta pelo cisalhamento da atividade 1 e pela translação do item 1 desta atividade. Represente no plano o triângulo  $\triangle ABC$  e sua imagem  $\triangle A'_1B'_1C'_1$  pela transformação  $T$ .

#### Atividade 4

1. Quais são as medidas galileanas dos lados do triângulo  $\triangle ABC$ , cujas coordenadas dos vértices são  $A(0, 2)$ ,  $B(3, 4)$  e  $C(5, 0)$   $\triangle ABC$ ?
2. Qual relação pode ser observada entre as medidas do item anterior?
3. Esta relação é válida na geometria euclidiana?

## 6.2 Medida de ângulo

**Material:** Papel quadriculado.

Sejam  $r_1$  e  $r_2$  retas de equações  $x + y - 5 = 0$  e  $2x - y - 1 = 0$ .

#### Atividade 5

1. Determine as coordenadas do ponto  $A \in r_1 \cap r_2$  e faça a representação gráfica no sistema de coordenadas ortogonais.
2. Trace a reta  $m$  de equação  $x = x_A + 1$ , onde  $x_A$  é a abscissa do ponto  $A$  obtido no item 1. Determine as coordenadas dos pontos  $B$  e  $C$ , tais que,  $B \in r_1 \cap m$  e  $C \in r_2 \cap m$ .

#### Atividade 6

1. Calcule a distância especial  $\delta_{BC}$ , em que  $B$  e  $C$  são os pontos cujas coordenadas foram obtidas na atividade anterior.
2. Obtenha o valor de  $k_2 - k_1$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são as declividades das retas  $r_1$  e  $r_2$ .
3. Compare os resultados obtidos nos dois itens anteriores.
4. Escolha duas retas que se intersectam e repita os procedimentos dos itens 2 da atividade anterior e 1 e 2 desta atividade.

### Atividade 7

1. Sob o cisalhamento da atividade 1 determine  $k'_2 - k'_1$ .
2. Na geometria de Galileu, o cisalhamento e a translação deixam invariantes as medidas de distância e ângulo. Com base nessa informação, como você definiria o ângulo entre duas retas nessa geometria?
3. Com base na atividade 5, descreva um procedimento para medir o ângulo entre duas retas concorrentes quaisquer.
4. Na geometria de Galileu uma reta paralela ao eixo  $Oy$  é chamada de *reta especial*, caso contrário, a reta é chamada de *reta ordinária*. O que dizer da medida do ângulo entre uma reta ordinária e uma reta especial?

#### 6.2.1 Triângulos

**Material:** Papel quadriculado, régua e compasso.

Considere as retas  $r_1 : x + 2y = 8$ ,  $r_2 : x - 2y = -4$  e  $r_3 : 3x - 2y = 8$  e os pontos  $\{A\} = r_1 \cap r_3$ ,  $\{B\} = r_1 \cap r_2$  e  $\{C\} = r_2 \cap r_3$ .

### Atividade 8

1. Determine as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
2. Trace as retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  num sistema de coordenadas ortogonais e marque as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ .
3. Quais são as medidas galileanas dos ângulos  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  do triângulo  $\triangle ABC$ ?
4. Qual relação existe entre os ângulos do triângulo  $\triangle ABC$ ?

### Atividade 9

1. Utilize o compasso para determinar os pontos médios dos segmentos, cujos comprimentos representam os ângulos(Galileu)  $\widehat{A}$ ,  $\widehat{B}$  e  $\widehat{C}$  e trace as semirretas de origem nos vértices e que passam pelos respectivos pontos médios obtidos.
2. As três bissetrizes de  $\triangle ABC$  possuem um único ponto comum?
3. Compare o que foi observado anteriormente com o que ocorre na geometria euclidiana.

## 6.3 Circunferência

### 6.3.1 Primeira definição

Considere o lugar geométrico formado pelo conjunto dos pontos  $M$  que estão a uma distância fixa  $r$  de um ponto  $Q$ .

#### Atividade 10

1. Represente no sistema de coordenadas ortogonais o conjunto  $\Gamma$  dos pontos  $M$ , considerando  $r$  medido de forma euclidiana.
2. Represente no sistema de coordenadas ortogonais o conjunto  $\mathcal{S}$  dos pontos  $M$ , considerando  $r$  medido de forma galileana.
3. Qual é o nome das figuras que ilustram os conjuntos  $\Gamma$  e  $\mathcal{S}$ ?
4. O ponto  $Q$  é único para os dois conjuntos  $\Gamma$  e  $\mathcal{S}$ ?

### 6.3.2 Segunda definição

As atividades 11, 12 e 13 se enquadram no âmbito da geometria euclidiana.

#### Atividade 11

**Material:** régua, compasso, papel vegetal

1. Trace um segmento  $AB$ . Trace um ângulo  $\alpha$  no papel vegetal. Utilizando este ângulo marque pontos que enxergam  $AB$  segundo  $\alpha$ .
2. Ligue os pontos obtidos no item anterior. Qual seria a curva candidata a passar por estes pontos?
3. Trace com régua e compasso a curva candidata.
4. Somente os pontos desse arco enxergam  $AB$  segundo o ângulo  $\alpha$ ? Faça uma figura representativa.

#### Atividade 12

1. Descreva uma construção com régua e compasso do arco capaz do ângulo  $\alpha = \angle BAX$  dado, sobre um segmento  $AB$  dado?
2. Construa o arco capaz do ângulo  $\alpha = \angle BAX$  sobre o segmento  $AB$ .
3. Construído o primeiro arco, construa o segundo.

### Atividade 13

1. Sejam um segmento  $AB$  e um ângulo  $\alpha = \angle BAX$ . Considerando-se que  $N$  e  $M$  estão em semiplanos opostos em relação a  $AB$ , trace com régua e compasso, na mesma construção:
  - a) o arco capaz  $\widehat{AB}$  de  $\alpha = \widehat{AMB}$  sobre  $AB$ .
  - b) o arco capaz de  $\widehat{ANB} = 180^\circ - \alpha$  sobre  $AB$ .
2. O teorema *Um quadrilátero é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares*, permite estabelecer alguma relação entre os arcos obtidos no item anterior?
3. Utilizando-se dos termos “horário” e “anti-horário” para determinar a orientação de um ângulo, diga qual é a orientação dos ângulos  $\alpha = \angle AMB$  e  $\angle ANB = 180^\circ - \alpha$  do item 1.
4. Usando a construção anterior, qual condição deve ser imposta ao ângulo  $\alpha$  para que todos os pontos da circunferência enxerguem  $AB$  sob este ângulo?

## 6.4 Ciclo

Nesta seção as atividades deverão ser desenvolvidas utilizando distância e ângulo da geometria de Galileu.

### Atividade 14

**Material:** kit para construção do ciclo e papel A3.

Segue em anexo as imagens do kit, denominado *parabolator*, utilizado na realização desta atividade.

1. Quais são os objetos geométricos essenciais à medição de um ângulo na geometria de Galileu?
2. Identifique esses objetos essenciais no kit distribuído.
3. Escolha um segmento  $AB$  e marque os pontos  $A$  e  $B$  numa folha; determine o ângulo sob o qual os pontos  $M$  enxergarão o segmento  $AB$ .
4. Use o kit para marcar esses pontos  $M$  sobre a folha.

### Atividade 15

Para deduzirmos uma equação para o ciclo  $\mathcal{Z}$ , considere um segmento ordinário  $AB$  de extremos  $A(a_1, a_2)$  e  $B(b_1, b_2)$  sobre  $\mathcal{Z}$  e um ponto  $M(x, y) \in \mathcal{Z}$  tal que  $\widehat{AMB} = \alpha$ .

1. Determine as declividades  $k_1$  de  $MA$  e  $k_2$  de  $MB$ .
2. Escreva a expressão do ângulo  $\alpha$ .
3. Por que o valor  $b_1 - a_1$  deve ser diferente de zero?
4. Escrevendo a equação obtida no item 2 para o ciclo  $\mathcal{Z}$ , na forma  $y = ax^2 + 2bx + c$ , quais são os valores de  $a$ ,  $2b$  e  $c$ ?
5. Qual é a curva descrita pela equação do item 4 na geometria euclidiana?

### Atividade 16

**Material:** Papel quadriculado e régua.

Sejam  $\mathcal{Z}$  um ciclo de equação  $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 6$  e  $P(2, 0)$  um ponto do plano.

1. Escreva as equações das retas  $t_1$  e  $t_2$  passando por  $P$  e tangentes ao ciclo  $\mathcal{Z}$ .
2. Determine as coordenadas de  $\{A\} = t_1 \cap \mathcal{Z}$  e  $\{B\} = t_2 \cap \mathcal{Z}$ . Marque estes pontos no plano  $xOy$  e trace o ciclo  $\mathcal{Z}$  e as retas  $t_1$  e  $t_2$ .
3. Verifique que o ponto  $C(6, 6)$  pertence a  $\mathcal{Z}$ . Obtenha a medida do ângulo  $\widehat{ACB}$ .
4. Escolha um ponto  $D \in \mathcal{Z}$ . Determine a medida do ângulo  $\widehat{ADB}$  e compare com a medida do ângulo  $\widehat{ACB}$ .
5. Quais são as medidas dos ângulos  $\widehat{PAB}$  e  $\widehat{PBA}$ ?

### Atividade 17

1. De acordo com a atividade 16, qualifique o triângulo  $PAB$  quanto aos lados. Justifique.
2. Determine as coordenadas de  $M$ , ponto médio de  $AB$ . Classifique em especial ou ordinária a reta que passa por  $P$  e  $M$ .
3. A altura  $PM$  é bissetriz de  $\widehat{APB}$ ? Por que?
4. O que você observou no item 3 ocorreria na geometria euclidiana?

## 6.5 Rotação cíclica

**Material:** papel quadriculado.

### 6.5.1 Parte 1

Considere o ciclo  $\mathcal{Z}$  de equação  $y = x^2$ .

#### Atividade 18

1. Trace o ciclo  $\mathcal{Z}$  no plano  $xOy$ .
2. Obtenha a imagem  $\mathcal{Z}_1$  de  $\mathcal{Z}$  pelo cisalhamento

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 - 3x_1. \end{cases}$$

3. Trace a imagem  $\mathcal{Z}_1$  no mesmo plano de  $\mathcal{Z}$ .
4. Escolha um ponto  $A$  tal que  $A \in \mathcal{Z}$ , determine a sua imagem  $A_1$  pelo cisalhamento dado e marque  $A$  e  $A_1$  na representação do item anterior.
5. Qual é a distância (Galileu) entre  $A$  e  $A_1$ ?

#### Atividade 19

1. Obtenha as coordenadas do ponto  $A'$  imagem de  $A_1$  (obtido no item 4 da atividade anterior) pela translação

$$\begin{cases} x' = x_1 + \frac{3}{2} \\ y' = y_1 + \frac{9}{4}. \end{cases}$$

Marque este ponto no mesmo plano  $xOy$  da atividade 18. Determine a relação entre  $y'$  e  $x'$ .

2. Qual é a distância entre os pontos  $A$  e  $A'$  na geometria de Galileu?

#### Atividade 20

1. Escreva uma transformação  $T$  composta pelo cisalhamento do item 2 da atividade 18 e a translação do item 1 da atividade 19.
2. Escolha um ponto  $P \in \mathcal{Z}$ , obtenha sua imagem  $P'$  pela transformação  $T$  do item anterior e represente estes pontos no plano  $xOy$ .

3. Qual é o efeito da transformação  $T$  sobre um ponto de  $\mathcal{Z}$ ?
4. Denotando a transformação  $T$  de rotação cíclica, dê a sua definição.

### 6.5.2 Parte 2

São dados os pontos  $A(-2, 2)$ ,  $B(1, \frac{1}{2})$  e  $C(3, \frac{9}{2})$ .

#### Atividade 21

1. Quais são as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo  $\triangle ABC$ , na geometria de Galileu?
2. Qual é a equação do ciclo que contém os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$ ?
3. Qual é a distância (Galileu) do ponto  $B$  à origem?

#### Atividade 22

1. Obtenha a imagem  $B_1$  de  $B$  pelo cisalhamento

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 - vx_1, \end{cases}$$

para  $v = -1$ .

2. Escreva a expressão da rotação cíclica que leva o ponto  $B$  à origem.
3. Obtenha as imagens  $A'$  e  $C'$  de  $A(-2, 2)$  e  $C(3, \frac{9}{2})$  pela rotação cíclica do item anterior.

#### Atividade 23

1. Trace, no mesmo sistema  $xOy$ , o ciclo que passa por  $A$ ,  $B$  e  $C$  e os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , em que  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  são as imagens de  $A$ ,  $B$  e  $C$  pela rotação cíclica da atividade anterior.
2. Quais são as medidas dos lados e dos ângulos do triângulo  $\triangle A'B'C'$ ?
3. Qual é a relação entre as medidas dos lados e dos ângulos dos triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ ?

## 6.6 Potência de um ponto em relação a uma circunferência euclidiana

### 6.6.1 Identificando a potência de um ponto

**Material:** régua, compasso, papel vegetal.

#### Atividade 24

1. Trace uma circunferência euclidiana  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $5cm$ .
2. Trace duas retas  $r$  e  $s$ , secantes a  $\Gamma$ , passando por um ponto  $P$  no exterior de  $\Gamma$ .
3. Sejam  $A, B \in r \cap \Gamma$  e  $C, D \in s \cap \Gamma$ . Compare os lados dos triângulos  $\triangle PAD$  e  $\triangle PCB$ .
4. Existe alguma relação de proporcionalidade entre as medidas dos lados dos triângulos obtidas no item anterior? Qual?
5. Seja  $q$  uma reta qualquer por  $P$  que intersecte  $\Gamma$  em  $E$  e  $F$ . Por que o produto  $\overline{PE} \cdot \overline{PF}$  independe da escolha da reta  $q$ ?
6. Formalize e demonstre o resultado obtido.

#### Atividade 25

1. Trace uma circunferência de centro  $O$ , raio  $5cm$  e as cordas  $AB$  e  $CD$  que se intersectam em um ponto  $P$  no interior de  $\Gamma$ .
2. Compare os lados dos triângulos  $\triangle PAC$  e  $\triangle PDB$ . Identifique uma proporcionalidade entre as medidas dos lados desses triângulos.
3. Sabendo que a medida algébrica de um segmento orientado é o número real que corresponde à diferença entre as abscissas da extremidade e da origem desse segmento, o que difere no produto  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  quando o ponto  $P$  é interior ou exterior à circunferência?
4. Se o ponto  $P \in \Gamma$ , então  $P = A$ . Qual é o valor de  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ ?

#### Atividade 26

1. Denote por  $Pot(P) = \overline{PA} \cdot \overline{PB}$ . Trace a tangente  $PT$  a  $\Gamma$  em  $T$  e determine  $Pot(P)$ .
2. Mostre que  $Pot(P) = d^2 - r^2$ , em que  $d = \overline{PO}$  e  $r$  é a medida do raio de  $\Gamma$ .

## 6.6.2 Potência de forma analítica

### Atividade 27

**Material:** papel quadriculado, régua e compasso.

1. Trace no sistema  $xOy$  uma circunferência  $\Gamma$  centrada na origem  $O$  e de raio  $5\text{cm}$ . Marque o ponto  $P(7, 3)$  e trace uma reta passando por  $P$ , secante a  $\Gamma$ .
2. Determine o valor de  $Pot(P)$ .
3. Escreva a equação da circunferência  $\Gamma$  na forma  $x^2 + y^2 + 2px + 2qy + f = 0$ . Substitua  $x$  e  $y$  no lado esquerdo da equação pelas coordenadas do ponto  $P$  e compare com o valor de  $Pot(P)$  obtido no item anterior. Como se explica isso?
4. Descreva o conjunto cujos pontos possuem a mesma potência  $Pot(P)$  em relação a  $\Gamma$  obtido no item anterior.

## 6.7 Potência de um ponto em relação a um ciclo

**Material:** papel quadriculado e régua.

Sejam a reta  $l : 3x - 2y = 0$  e o ciclo  $\mathcal{Z} : y = \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ . Utilize a distância da geometria de Galileu nas atividades seguintes.

### Atividade 28

1. Determine as coordenadas dos pontos de interseção  $A$  e  $B$  entre a reta  $l$  e o ciclo  $\mathcal{Z}$ .
2. Trace no plano  $xOy$  o ciclo e a reta. Marque os pontos  $A$  e  $B$ .
3. Calcule o produto  $d(P, A) \cdot d(P, B)$ , onde  $P(0, 0)$ .
4. Escreva a equação do ciclo  $\mathcal{Z}$  na forma  $x^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$  e substitua as coordenadas do ponto  $P$  no lado esquerdo desta equação. Compare com o resultado do item anterior. Como se explica o observado?

### Atividade 29

1. Determine a equação da reta tangente a  $\mathcal{Z}$  por  $P$ . Qual é a distância  $d(P, T)$ , onde  $T$  é o ponto de tangência?
2. Qual é a relação entre  $d(P, T)$  e  $d(P, A) \cdot d(P, B)$  do item 3 da atividade anterior?

## 6.8 Inversão na circunferência euclidiana

Nas atividades seguintes, considere as medições das distâncias e dos ângulos da geometria euclidiana.

A inversão na circunferência  $\Gamma$  de centro  $O$  e raio  $r$  é uma transformação que leva cada ponto  $P \neq O$  a um único ponto  $P' \in \overrightarrow{OP}$ , semirreta de origem em  $O$  que passa por  $P$ , tal que  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ . A imagem  $P'$  é chamada de o inverso de  $P$  pela inversão em  $\Gamma$ .

### 6.8.1 Construção do inverso de um ponto $P$

**Material:** régua e compasso.

#### Atividade 30

1. Trace uma circunferência  $\Gamma$  de centro em  $O$  e raio  $r$ . Marque um ponto  $P \neq O$  no interior de  $\Gamma$ .
2. Trace a semirreta  $\overrightarrow{OP}$  e a reta  $l$  perpendicular a  $\overrightarrow{OP}$  por  $P$ . Marque os pontos  $\{T_1\} = l \cap \Gamma$  e  $\{T_2\} = l \cap \Gamma$ .
3. Trace a reta  $t$  perpendicular à reta  $OT_1$  passando por  $T_1$ . Marque  $P' = t \cap OP$ .
4. Por que o ponto  $P'$  é o inverso do ponto  $P$  pela inversão em  $\Gamma$ ?
5. O ponto  $P'$  poderia ser interior a  $\Gamma$ ?

#### Atividade 31

1. Trace uma circunferência  $\Gamma$  de centro em  $O$  e raio  $r$ . Marque um ponto  $P$  no exterior de  $\Gamma$ .
2. Trace uma circunferência  $\Gamma_1$  com centro em  $P$  e raio  $OP$ . Marque os pontos  $T_1$  e  $T_2$  de interseção entre  $\Gamma$  e  $\Gamma_1$ .
3. Com o centro em  $T_1$  e raio  $OT_1$  trace a circunferência  $\gamma$ . A circunferência  $\gamma$  intersecta  $\overrightarrow{OP}$  em  $P' \neq O$ , imagem de  $P$ .
4. Por que o ponto  $P'$  é o inverso do ponto  $P$  pela inversão em  $\Gamma$ ?
5. Qual é a imagem  $P'$  do ponto  $P$ , se  $P \in \Gamma$ ?

### Atividade 32

1. Trace uma circunferência  $\Gamma$  de centro em  $O$  e raio  $r$ . Determine as imagens  $A'$  e  $B'$  de  $A$  e  $B$  pela inversão em  $\Gamma$ , se  $O, A$  e  $B$  são não colineares.
2. Utilizando a definição de inversão, mostre que os triângulos  $\triangle OB'A'$  e  $\triangle OAB$  são semelhantes.

## 6.8.2 Inversão na circunferência de forma analítica

**Material:** Papel quadriculado, régua e compasso.

Seja  $\Gamma$  uma circunferência de centro  $O(0, 0)$  e raio  $r = 4\text{cm}$ .

### Atividade 33

1. Trace a circunferência  $\Gamma$  no sistema de coordenadas  $xOy$ . Escolha e marque um ponto  $P \neq O$ . Trace a semirreta  $\overrightarrow{OP}$ .
2. Determine as coordenadas do ponto  $P'$ , inverso de  $P$  pela inversão em  $\Gamma$ . Marque este ponto no plano  $xOy$  do item 1 .
3. Qual seria a imagem de uma reta que passa pelo centro  $O$  da circunferência  $\Gamma$ ?

### Atividade 34

1. Trace no sistema de coordenadas  $xOy$  a circunferência  $\Gamma$  e a reta  $l$  que passa pelos pontos  $A(6, 2)$  e  $B(2, -6)$ .
2. Determine as coordenadas das imagens  $A'$  e  $B'$  de  $A$  e  $B$  pela inversão em  $\Gamma$  e marque estes pontos no sistema  $xOy$ .
3. Determine as coordenadas de  $P \in l$ , pé da perpendicular a  $l$  baixada de  $O$  e de sua imagem  $P'$  pela inversão em  $\Gamma$ . Marque estes pontos.
4. Utilize a definição de inversão para mostrar que os triângulos  $\triangle OA'P'$  e  $\triangle OPA$  são semelhantes. Conclua que o ângulo  $\widehat{OA'P'}$  é reto e, portanto, o triângulo  $\triangle OA'P'$  está inscrito numa circunferência de diâmetro  $OP'$ .
5. Escreva a equação da circunferência  $l'$  que passa pelos pontos  $O, A'$  e  $P'$ .

### Atividade 35

1. Sejam  $C(x, y)$  um ponto e  $C'(x', y')$  o seu inverso em relação a  $\Gamma$ . Por que  $x = \lambda x'$  e  $y = \lambda y'$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ?
2. Determine as equações da reta  $l$  do item 1 da atividade 34 e de sua imagem  $l'$ , pela inversão em  $\Gamma$ . Utilize a definição de inversão e o item anterior.
3. Qual curva descreve a equação de  $l'$  obtida no item anterior?
4. Compare a equação de  $l'$  do item anterior com a obtida no item 5 da atividade 34.
5. De maneira geral qual será a imagem pela inversão em  $\Gamma$  de uma reta que não passa pela origem?

## 6.9 Inversão no ciclo

**Material:** régua e papel quadriculado.

Nas atividades desta seção considere a medição das distâncias e dos ângulos na geometria de Galileu.

### 6.9.1 Inverso de um ponto

Sejam o ciclo  $\mathcal{Z}$  de equação  $y = \frac{1}{4}x^2$  e  $P(-3, y)$ , com  $y \neq \frac{9}{4}$ .

### Atividade 36

1. Trace no plano  $xOy$  o ciclo  $\mathcal{Z}$  e marque o ponto  $P \notin \mathcal{Z}$ .
2. Seja  $l_1$ , a reta especial por  $P$ . Determine as coordenadas dos pontos  $T_1$  e  $P'$ , tais que  $\{T_1\} = l_1 \cap \mathcal{Z}$  e  $\overline{PT_1} = \overline{T_1P'}$ . Marque estes pontos no plano. O ponto  $P'$  é chamado de inverso ou imagem de  $P$  pela inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ .
3. Escolha os pontos  $Q \in l_2$  e  $R \in l_3$  em que  $l_2$  e  $l_3$  são as retas especiais de equações  $x = 1$  e  $x = -2$ , respectivamente. Determine os pontos  $Q'$  e  $R'$ , inversos de  $Q$  e  $R$  pela inversão em  $\mathcal{Z}$ . Marque estes pontos no plano.

### Atividade 37

1. Se os pontos  $P, Q$  e  $R$  da atividade anterior estiverem alinhados, escreva a equação da reta que os contém. Se não, escreva a equação do ciclo que os contém.
2. Repita o procedimento do item anterior para as imagens  $P', Q'$  e  $R'$  e trace a curva por estes pontos.

### 6.9.2 Inverso de uma reta ordinária

**Material:** régua e papel quadriculado.

Seja  $\mathcal{Z}$  um ciclo de equação  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

### Atividade 38

1. Trace no mesmo sistema  $xOy$  o ciclo  $\mathcal{Z}$  e a reta  $z$  de equação  $x - y = 3$ .
2. Trace uma reta especial  $m$  e sejam  $\{P\} = m \cap z$  e  $\{T\} = m \cap \mathcal{Z}$ . Determine a expressão da distância especial  $\overline{TP}$ .
3. Determine a expressão das coordenadas de  $P' \in m$ , tal que  $\overline{TP} = \overline{P'T}$ .
4. Qual é a curva  $z'$  que contém os pontos  $P'$ ? Esboce esta curva no mesmo sistema de coordenadas dos itens anteriores.
5. Chamamos de curvatura  $\rho$  o dobro do valor do coeficiente do termo do segundo grau da equação do ciclo. No caso da curva ser uma reta, a curvatura  $\rho$  será nula. Quais são os valores das curvaturas de  $\mathcal{Z}$  e  $z'$ ?

### Atividade 39

1. A curva  $z'$  da atividade anterior é chamada de inverso ou imagem de  $z$  pela inversão em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$ . Determine  $w'$ , imagem de  $w$  pela inversão em relação a  $\mathcal{Z}$ , onde  $w$  é a reta de equação  $2x + y = 1$ .
2. Trace, num sistema de coordenadas  $xOy$ , a reta  $w$  e as curvas  $w'$  e  $\mathcal{Z}$ .
3. Quais são as curvaturas de  $w'$  e  $\mathcal{Z}$ . Compare com as curvaturas obtidas no item 5 da atividade anterior. Há alguma relação entre elas?
4. Conjecture a respeito do inverso de uma reta ordinária em relação a um ciclo  $\mathcal{Z}$ .

### 6.9.3 Inverso de um ciclo

#### Atividade 40

Seja  $\mathcal{Z}$  o ciclo de equação  $y = \frac{1}{4}x^2$ .

1. Trace no mesmo sistema  $xOy$  o ciclo  $\mathcal{Z}$  e o ciclo  $z$  de equação  $y = x^2 - x - 2$ .
2. Trace a reta especial  $m$ , tal que  $m \cap z = \{P\}$  e  $m \cap \mathcal{Z} = \{T\}$ . Determine a expressão da distância especial  $\overline{TP}$ , para um ponto  $P$  qualquer de  $z$ .
3. Para um ponto  $P$  qualquer de  $z$ , determine a expressão das coordenadas de  $P' \in m$ , tal que  $\overline{TP} = \overline{P'T}$ .
4. Qual é a curva  $z'$  que contém os pontos  $P'$ ? Esboce esta curva no mesmo sistema de coordenadas dos itens anteriores.
5. Quais são os valores das curvaturas de  $\mathcal{Z}$ ,  $z$  e  $z'$ ?

#### Atividade 41

Seja  $\mathcal{Z}_1$  o ciclo de equação  $y = \frac{1}{2}x^2$ .

1. Trace no mesmo sistema  $xOy$  o ciclo  $\mathcal{Z}_1$  e o ciclo  $z$  de equação  $y = x^2 - x - 2$ .
2. Determine  $z'$ , imagem de  $z$  pela inversão em relação a  $\mathcal{Z}_1$ .
3. Qual é a curva  $z'$ ? Faça o esboço de  $z'$  no sistema  $xOy$  do item 1.
4. Quais são os valores das curvaturas de  $\mathcal{Z}_1$  e do ciclo  $z$ ?
5. Conjecture a respeito do inverso de um ciclo em relação a um ciclo  $\mathcal{Z}$ .
6. Generalize os resultados obtidos sobre a inversão de uma reta e de um ciclo em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$ .

## 6.10 Sugestões para a mediação das atividades

Quando se faz uso da metodologia de resolução de problemas, há uma forte atividade de investigação tanto por parte do professor quanto por parte do aluno [1] e [15]. Esta metodologia é caracterizada por considerar os estudantes como participantes ativos, os problemas bem definidos e sua resolução coordenada. O professor deixa de ser expositor e assume o papel de mediador. Desta forma, na aula, o aluno assume o papel principal e o professor o papel secundário. É necessário um período de adaptações para que os alunos se familiarizem com a metodologia e criem coragem para errar e corrigir seus próprios erros.

As atividades propostas podem ser desenvolvidas em grupos ou individualmente. Os participantes podem adotar as mais variadas estratégias para chegar à solução. Entre elas encontram-se: fazer um desenho, testar, usar raciocínio lógico, trabalhar do fim para o começo, escrever uma equação, fazer um gráfico, utilizar a régua para medir, conceber problemas auxiliares para resolver o problema original, etc.

Assim, para auxiliar o trabalho do professor na aplicação das atividades propostas, apresentamos uma sequência de sugestões para a sua mediação.

### 6.10.1 Mediação para a seção 6.1 - Medida de distâncias

Esta seção é composta por três atividades que têm como objetivo principal mostrar como é calculada a distância entre dois pontos na geometria de Galileu.

#### Atividade 1

Nos dois primeiros itens o professor deve acompanhar se os alunos estão traçando de forma correta os polígonos no papel quadriculado. Podem ser feitos alguns questionamentos como por exemplo: o que acontece com as imagens dos pontos que estão sobre o eixo  $Oy$  pelo cisalhamento? Se um lado é levado sobre um lado ou não. Em caso afirmativo, como confirmar este fato?

Nos itens 3 e 4, alguns alunos podem não saber o que é projeção sobre o eixo  $Ox$  o professor pode explicar previamente. O papel quadriculado favorece a visualização. Para encerrar a atividade 1, calcula-se os comprimentos das projeções utilizando a diferença entre as abscissas dos extremos dos segmentos.

#### Atividade 2

O item 1 pede a distância entre dois pontos na geometria euclidiana: alguns alunos podem não se recordar deste fato. Neste caso, o professor deve interferir, citando o teorema de Pitágoras. No item 2 os alunos devem observar que o cisalhamento não preserva distâncias euclidianas. O professor deve estar atento para que os alunos redijam esta conclusão claramente. O objetivo do terceiro item é fazer com que os alunos percebam que o comprimento da projeção de um segmento sobre o eixo  $Ox$  é invariante sob o cisalhamento e, a partir desta informação, definir a distância algébrica entre dois pontos na geometria de Galileu como a diferença das abscissas destes pontos. O último item da atividade trabalha a distância entre dois pontos pertencentes a uma mesma reta vertical. O aluno vai observar que esta distância na geometria de Galileu é nula.

O professor pode ajudar na definição de *distância especial*. Se tiver propostas de definição, o professor deve analisar todas elas com a turma para ver se são ou não viáveis verificando se são invariantes pelas transformações de Galileu. Na sequência,

formalizar como diferença das ordenadas dos pontos e introduzir a notação  $\delta_{AB}$  para a distância especial entre os pontos  $A$  e  $B$  e  $d(A, B) = d_{AB}$  para a distância ordinária entre  $A$  e  $B$ .

No Final desta seção, o professor deve reforçar a ideia de uma geometria não euclidiana, denominada geometria de Galileu, onde o cisalhamento e a translação são isometrias próprias. O termo isometria pode não ser compreendido pelos alunos, desta forma, o professor deve adequar a linguagem fazendo uma análise etimológica do termo isometria.

### Atividade 3

O objetivo desta atividade é fazer com que os alunos percebam que a translação preserva a distância nas duas geometrias. O professor deve reforçar o termo *isometria* e enfatizar que a transformação  $T$  composta pelo cisalhamento e pela translação é uma isometria no plano de Galileu.

### Atividade 4

Esta atividade é para fixação do cálculo de distâncias na geometria de Galileu. No segundo item, o aluno vai relacionar os lados de um triângulo na geometria galileana e concluir que a igualdade obtida não é válida na euclidiana. Na mediação, o professor deve fazer os alunos abordarem a desigualdade triangular.

## 6.10.2 Mediação para a seção 6.2 - Medida de ângulo

As atividades desta seção visam o estudo do ângulo entre duas retas ordinárias (não verticais) e dos triângulos na geometria de Galileu.

### Atividade 5

Os dois itens desta atividade vão nortear os alunos para a definição de ângulo nesta nova geometria. As coordenadas do ponto  $A$  de interseção das duas retas  $r_1$  e  $r_2$  podem ser obtidas graficamente ou algebricamente resolvendo-se o sistema formado pelas duas equações.

### Atividade 6

No item 1, caso alguns alunos utilizem a régua para medir a distância especial  $\delta_{BC}$ , o professor pode solicitar que determinem a distância calculando a diferença das ordenadas e vice-versa. O item 2 pede a diferença entre as declividades  $k_2$  e  $k_1$  das retas  $r_2$  e  $r_1$ ; se necessário o professor pode aproveitar para recordar o conceito de declividade (coeficiente angular) da reta e como efetuar o seu cálculo. O próximo

item solicita a comparação dos resultados; caso estes não sejam iguais, o professor deve indagar por que são diferentes, se devem ser iguais e, se for o caso, como corrigir. O objetivo do item 4 é fixar o processo do cálculo da medida do ângulo entre duas retas.

### Atividade 7

O objetivo do primeiro item é verificar que o ângulo é preservado sob o cisalhamento. O cálculo de  $k'_1 - k'_2$  pode ser efetuado de várias formas. Caso os alunos apresentem dificuldades, o professor pode mediar a obtenção das imagens de  $r_1$  e  $r_2$  pelo cisalhamento; por exemplo, para  $r_1$  temos  $y = -x + 5$ . Aplicando

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y, \end{cases}$$

temos  $y' = 2x' + (-x' + 5) = x' + 5$ , logo  $k'_1 = 1$ . Da mesma forma o aluno descobre o valor de  $k'_2$  e verifica a invariância do ângulo sob o cisalhamento. Outra maneira bem simples é obter  $A'$ , imagem de  $A$  do item 1 da atividade 4. Como os pontos de interseção das retas  $r_1$  e  $r_2$  com o eixo  $Oy$  são mantidos pelo cisalhamento, o aluno pode utilizar estes pontos e calcular  $k'_1$  e  $k'_2$ . A definição de ângulo pode ser feita utilizando a distância especial. Para descrever um procedimento de medição, o aluno pode citar a diferença entre as declividades ou mencionar o item 2 da atividade 5

### Atividade 8

Esta atividade deve conduzir o aluno à descoberta da relação entre os ângulos de um triângulo. Após marcar os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  e traçar as retas  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$ , ao invés de utilizar a régua para medir os ângulos, o professor pode sugerir que os alunos utilizem os conhecimentos de geometria analítica para descobrir os valores com precisão. No item 4, o aluno deve concluir que  $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$ . O professor deve questionar se este resultado vale para qualquer triângulo na geometria de Galileu e se seria possível na euclidiana.

### Atividade 9

Nesta atividade os alunos descobrirão que na geometria de Galileu as três bissetrizes de um triângulo não se intersectam em um único ponto como na geometria euclidiana. No item 1, o uso do compasso para determinar os pontos médios dos segmentos cujos comprimentos determinam os ângulos, pode ser substituído pelo uso da régua. O teorema de Ceva garante este único ponto na geometria euclidiana. Na conclusão desta seção, o professor deve fazer alguns questionamentos sobre retas perpendiculares e a não existência de triângulos equiláteros e retângulos na geometria de Galileu.

### 6.10.3 Mediação para a seção 6.3 - Circunferência

Primeiramente apresentamos a definição de circunferência, sem nos referirmos à curva que iremos estudar. O objetivo é que os alunos verifiquem nas duas geometrias a curva que representa esta definição.

#### Atividade 10

No primeiro item os alunos traçarão a circunferência euclidiana  $\Gamma$  e no segundo a circunferência galileana  $\mathcal{S}$ , representada por um par de retas especiais. Neste momento, o professor pode reforçar o que são retas especiais (verticais) e ordinárias (não verticais). Após definir circunferência, o último item trabalha a questão do centro da circunferência nas duas geometrias. Na geometria euclidiana este ponto é único, mas na galileana não. Na realidade, o professor deve fazer os alunos observarem que existem infinitos pontos centrais e que eles estão sobre uma reta especial a uma mesma distância das retas que formam  $\mathcal{S}$ .

Na mediação, vale a pena o professor reforçar que os alunos estão trabalhando com duas geometrias distintas. É possível propor um debate questionando: até onde a geometria euclidiana permite uma visão correta do mundo?

As atividades 11, 12 e 13 se enquadram no âmbito da geometria euclidiana. Elas têm como objetivo a construção da circunferência utilizando o conceito de arco capaz. Para isso, o professor deve estar ciente da seguinte definição:

*Uma circunferência é o conjunto de pontos a partir dos quais um segmento  $AB$  é visto sob ângulo  $\alpha$  com medida e orientação constantes.*

#### Atividade 11

No item 1 o professor pode proceder da seguinte forma:

- Peça aos alunos que tracem um ângulo  $\alpha$  qualquer no papel vegetal e, em seguida, um segmento  $AB$  qualquer numa folha branca;
- Coloque o papel vegetal sobre a folha branca de modo que os extremos  $A$  e  $B$  do segmento pertençam aos lados do ângulo  $\alpha$ ;
- Utilize (com cuidado) a ponta seca do compasso sobre o vértice do ângulo  $\alpha$  para marcar o ponto na folha branca;
- Repita o procedimento anterior algumas vezes, sempre atento para que os extremos  $A$  e  $B$  do segmento pertençam aos lados do ângulo  $\alpha$ ;
- Para concluir, utilize lápis ou caneta para realçar os pontos marcados com a ponta do compasso.

No item 2, ao ligar os pontos, muitos alunos suspeitarão que estes pertencem ao arco de circunferência  $\widehat{AB}$ . Para mediar a construção com régua e compasso, peça aos alunos que escolham um dos pontos marcados e procedam como se fossem construir uma circunferência passando por  $A$ ,  $B$  e pelo ponto escolhido. Ao responder negativamente à pergunta do item 4, provavelmente os alunos construirão a seguinte figura 6.1.

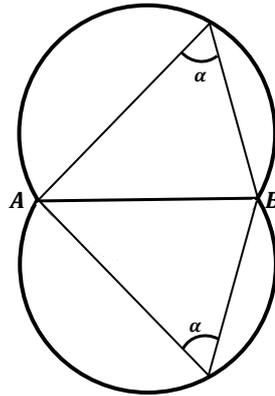


Figura 6.1: Arco capaz do ângulo  $\alpha$ .

Caso usem o outro arco (do suplementar), o professor deve perguntar se o ângulo é  $\alpha$ .

### Atividade 12

Uma justificativa para a construção do arco capaz do ângulo  $\alpha = \widehat{BAX}$  é a seguinte:

O centro  $O$  da circunferência que contém o arco pertence à mediatriz  $m$  do segmento  $AB$ . Seja  $p$  a reta perpendicular a  $AX$  em  $A$ , assim  $\{O\} = m \cap p$ . Mas  $\overline{AO} = \overline{BO}$  e  $\widehat{BAO} \cong \widehat{ABO} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ , pois o triângulo  $\triangle AOB$  é isósceles. Segue então que o ângulo central  $\widehat{AOB} = 2\alpha$  e portanto o ângulo inscrito  $\widehat{APB} = \alpha$ , para todo ponto  $P$  pertencente ao arco  $\widehat{AB}$ .

O aluno deve ter a liberdade de escolher como construir o arco capaz. Se necessário, uma forma de construir com régua e compasso o arco capaz do ângulo  $\alpha = \widehat{BAX}$  dado, sobre o segmento  $AB$  dado, basta seguir os seguintes passos [19]:

- Trace a mediatriz de  $AB$ .
- Trace a semirreta  $\overrightarrow{AX}$  tal que  $\alpha = \widehat{BAX}$ .
- Trace por  $A$  a semirreta  $\overrightarrow{AY}$  perpendicular a  $\overrightarrow{AX}$ .

- A interseção de  $\overrightarrow{AY}$  com a mediatriz, é o ponto  $O$ , centro do arco capaz. Com centro em  $O$  desenhe o arco  $AB$

Para obter o centro  $O'$  do segundo arco, basta traçar uma circunferência com centro em  $A$  e raio  $AO$ . O centro  $O'$  será o ponto de interseção desta circunferência com a mediatriz de  $AB$ .

### Atividade 13

Ao traçar na mesma construção os arcos capazes de dois ângulos suplementares, os alunos notarão que estes arcos parecem estar contidos numa mesma circunferência euclidiana. Caso julgue necessário, o professor pode demonstrar o teorema do quadrilátero inscrito, que será utilizado para justificar a relação do item 2. No terceiro item, atenção com a orientação, conforme ilustra a figura 6.2.

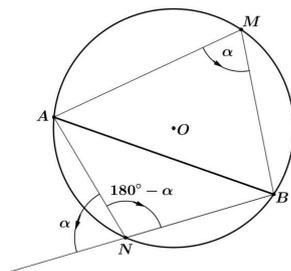


Figura 6.2: Orientação do ângulo  $\alpha$ .

O ângulo  $\alpha$  tem orientação anti-horária e  $180^\circ - \alpha$  tem orientação horária. Impondo a condição de que o ângulo  $\alpha$  tenha sempre a mesma orientação, todos os pontos da circunferência enxergarão o segmento  $AB$  sob este ângulo.

#### 6.10.4 Mediação para a seção 6.4 - Ciclo

A Primeira definição de circunferência, dada como o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância  $r$  de um ponto  $Q$ , leva a um par de retas especiais  $\mathcal{S}$ , chamadas de circunferência de Galileu. A segunda definição de circunferência, dada pelo conjunto de pontos a partir dos quais um segmento  $AB$  é visto sob o ângulo  $\alpha$  com medida e orientação constantes, gera na geometria de Galileu uma curva chamada de ciclo. Esta curva é equivalente à parábola na geometria euclidiana.

### Atividade 14

A partir do conceito de ângulo definido na geometria de Galileu, os alunos devem traçar os pontos que enxergam o segmento ordinário  $AB$  sob um ângulo  $\alpha$  de sua escolha. Para isso os alunos receberam um kit de madeira, cujas imagens estão em anexo. Espera-se que os alunos consigam identificar os objetos essenciais para a construção de um ângulo na geometria de Galileu, ou seja, que eles identifiquem que devemos ter dois segmentos de comprimentos invariantes: um sendo a base e o outro sendo a altura de um triângulo. O professor deve questionar se é sempre possível achar um triângulo de base (paralela ao eixo  $Oy$ ) e altura fixas tal que os prolongamentos de dois de seus lados passem pelos pontos dados  $A$  e  $B$ ?

Utilizando o kit os alunos deverão conseguir observar que a base do triângulo está sempre numa direção paralela ao eixo  $Oy$ . Como a medida de um ângulo nada mais é do que o comprimento da base de um triângulo de altura fixa, este kit permite a obtenção dos triângulos que satisfazem esses requisitos de forma dinâmica e, dessa forma, os pontos que enxergam o segmento ordinário  $AB$  dado sob o ângulo  $\alpha$  dado.

### Atividade 15

Esta atividade é composta de um roteiro para a dedução da equação do ciclo na geometria de Galileu. Ao final, o aluno deverá concluir que o ciclo  $\mathcal{Z}$  equivale a uma parábola da geometria euclidiana. Desenvolvendo corretamente os cálculos, o aluno chegará à forma

$$y = \frac{\alpha}{b_1 - a_1}x^2 + \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{b_1 - a_1}x + \frac{\alpha a_1 b_1 + b_1 a_2 - b - 2a_1}{b_1 - a_1}.$$

No item 3,  $b_1 - a_1$  será diferente de zero, pois  $AB$  é um segmento ordinário. Para escrever a equação na forma  $y = ax^2 + 2bx + c$ , temos

$$\begin{aligned} a &= \frac{\alpha}{b_1 - a_1}, \\ 2b &= \frac{b_2 - a_2 - \alpha(b_1 + a_1)}{b_1 - a_1}, \\ c &= \frac{\alpha a_1 b_1 + b_1 a_2 - b - 2a_1}{b_1 - a_1}. \end{aligned}$$

### Atividade 16

O objetivo desta atividade é verificar algumas propriedades do ciclo  $\mathcal{Z}$ . Para auxiliar o aluno na solução do primeiro item, o professor deve observar que a equação da reta que passa por  $P(2,0)$  é da forma  $y = k(x - 2)$ , onde  $k$  é a declividade. O aluno deve perceber que ele tem que resolver um sistema de equações. Ao substituir a equação da reta na equação dada para o ciclo  $\mathcal{Z}$ , obtém-se após as manipulações,

uma expressão do tipo  $x^2 - (6 + 2k)x + 12 + 4k = 0$ . Como queremos que a reta seja tangente, então teremos um único ponto de interseção com  $\mathcal{Z}$ , logo o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac$  da equação quadrática deve ser nulo. Desta forma obtemos  $k_1 = 1$  e  $k_2 = -3$ . Portanto as equações de  $t_1$  e  $t_2$  são  $y + 3x = 6$  e  $y - x = -2$ .

No item 2, temos  $A(0, 6)$  e  $B(4, 2)$ , obtidos pela substituição direta das equações de  $t_1$  e  $t_2$  na equação de  $\mathcal{Z}$ . O ângulo  $\widehat{ACB}$  pode ser medido com a régua ou obtido pela diferença das declividades de  $BC$  e  $AC$ . No quarto item, o aluno deverá obter um ângulo  $\widehat{ADB}$  congruente ao ângulo  $\widehat{ACB}$ . Para concluir a atividade 16, as medidas dos ângulos  $\widehat{PAB}$  e  $\widehat{PBA}$  devem ser iguais. Estes valores também podem ser obtidos com o uso da régua ou com a diferença das declividades.

### Atividade 17

No primeiro item, o triângulo  $\triangle PAB$  é isósceles, pois  $\widehat{PAB} \cong \widehat{PBA}$ . No item seguinte como as abscissas de  $M$  e  $P$  são iguais, a reta será especial. Para concluir a atividade, diferentemente do que ocorre na geometria euclidiana, na geometria de Galileu a altura  $PM$  do triângulo isósceles  $\triangle PAB$  não coincide com a bissetriz de  $\widehat{APB}$ . Para que os alunos notem esta diferença, é importante que traçam um triângulo isósceles e a bissetriz do ângulo no vértice.

### 6.10.5 Mediação para a seção 6.5 - Rotação cíclica

Nesta seção estudaremos a transformação denominada rotação cíclica. As atividades levarão os alunos a conhecerem esta transformação de forma gradativa.

### Atividade 18

Provavelmente nesta atividade o professor não precisará intervir, apenas verificar se os alunos estão desenvolvendo os itens de forma correta. Para facilitar a posição do desenho, sugerir que tracem o eixo  $Ox$  no papel quadriculado a uns 15cm da borda superior.

### Atividade 19

Nesta atividade, após os cálculos e as marcações corretas, os alunos devem notar que  $y' = x'^2$ , portanto  $A' \in \mathcal{Z}$  e que a distância (Galileu) entre  $A$  e  $A'$  é igual à quantia transladada  $x' - x = \frac{3}{2}$ . Para concluir, o professor deve chamar a atenção para o fato de  $A'$  ser imagem de  $A$  por uma composta de duas transformações.

### Atividade 20

O objetivo desta atividade é que o aluno escreva a rotação cíclica de forma direta, sem a necessidade de fazer o cisalhamento e na sequência a translação. No item 1, a transformação  $T$  composta pelo cisalhamento e a translação é dada por

$$\begin{cases} x' = x + \frac{3}{2} \\ y' = y + 3x + \frac{9}{4}. \end{cases}$$

O item seguinte verificará se a transformação  $T$  obtida está levando o ponto  $P \in \mathcal{Z}$  em outro ponto  $P' \in \mathcal{Z}$ . Nos itens 3 e 4 o aluno deverá observar que a transformação  $T$  leva o ciclo em si próprio e a partir daí escrever uma definição para rotação cíclica.

### Atividade 21

As distâncias solicitadas nos itens 1 e 3 podem ser calculadas a partir da definição ou diretamente da marcação no papel quadriculado. A equação  $y = \frac{1}{2}x^2$  do ciclo pode ser obtida através da solução de um sistema de equações. Para montar o sistema basta substituir os pontos na equação do ciclo.

### Atividade 22

No item 1, o aluno deve obter  $B_1(1, -\frac{1}{2})$  como imagem de  $B$  pelo cisalhamento

$$\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y - x. \end{cases}$$

No segundo item, para obter a expressão da rotação, fazemos a translação

$$\begin{cases} x' - x_1 = -1 \\ y' - y_1 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

do ponto  $B_1$ , obtido no item anterior, para a origem. Agora substituímos  $x_1$  e  $y_1$  no cisalhamento, chegamos a

$$\begin{cases} x' = x - 1 \\ y' = y - x + \frac{1}{2} \end{cases}$$

que é a rotação cíclica desejada. Para melhor compreensão, o professor na sua mediação deve solicitar aos alunos que tracem o ciclo e marquem estes pontos. Utilizando a rotação obtida chegamos a  $A'(-3, \frac{9}{2})$  e  $B'(2, 2)$ .

### Atividade 23

Após traçar corretamente o ciclo e os triângulos  $\triangle ABC$  e  $\triangle A'B'C'$ , utilizando as declividades para calcular os ângulos destes triângulos e a malha quadriculada do papel para medir os lados, o aluno deverá notar que os ângulos e os lados dos triângulos são preservados pela rotação cíclica. No último item, ele deverá observar que vale a relação

$$\frac{\overline{AB}}{\widehat{C}} = \frac{\overline{AC}}{\widehat{B}} = \frac{\overline{BC}}{\widehat{A}} = 2.$$

Analogamente no triângulo  $\triangle A'B'C'$ . Ao finalizar esta seção, o professor poderá debater com os alunos sobre a orientação da rotação cíclica de acordo com o sinal do coeficiente  $v$  do cisalhamento. É importante que o professor faça os alunos generalizarem o resultado que foi obtido de um exemplo particular.

### 6.10.6 Mediação para a seção 6.6 - Potência de um ponto em relação a uma circunferência euclidiana

O objetivo das atividades desta seção é estudar a potência de um ponto em relação a uma circunferência euclidiana. Na próxima seção, estes resultados serão estendidos à geometria de Galileu.

### Atividade 24

Ao concluir esta atividade o aluno deverá perceber que o produto  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$ , independe da reta que passa por  $P$ . No item 3, o aluno poderá fazer as comparações com uma régua ou utilizando o papel vegetal. A segunda opção favorece a visualização da semelhança entre os triângulos  $\triangle PAD$  e  $\triangle PCB$ , procedendo da seguinte maneira:

- Coloque o papel vegetal sobre os traços obtidos nos itens 1 e 2 e trace o triângulo  $\triangle PA_v D_v$ , onde  $A_v$  e  $D_v$  indicam as marcações dos pontos  $A$  e  $D$  sobre o papel vegetal.
- Ponha o vértice  $P$  marcado no papel vegetal sobre o ponto  $P$  traçado na folha branca, de modo que  $PD$  fique sobre  $PB$  e  $PA$  sobre  $PC$ . Pode ser que seja ao contrário, dependendo de como foram marcados os pontos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  sobre a circunferência.

Ao realizar o procedimento, o aluno notará que parece que  $A_v D_v \parallel BC$ . Daí poderá focar o seu raciocínio para tentar mostrar e escrever a proporção

$$\frac{\overline{PD}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}.$$

No quinto item, o aluno traçará uma reta  $q$  passando por  $P$  e intersectando  $\Gamma$  nos pontos  $E$  e  $F$ . Utilizando a proporção obtida da semelhança dos triângulos do item anterior, poderá concluir que

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD} = \overline{PE} \cdot \overline{PF}.$$

Para finalizar a atividade, o professor deverá auxiliar o aluno a enunciar o teorema das secantes: *Se por um ponto  $P$  exterior à circunferência  $\Gamma$  traça-se duas secantes que intersectam  $\Gamma$  em  $A, B, C$  e  $D$ , respectivamente, então vale a relação  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ .* E daí formalizar sua demonstração utilizando a semelhança de triângulos e o teorema do quadrilátero inscrito, ou as propriedades do arco capaz de um ângulo sobre um segmento(corda).

### Atividade 25

Nos dois primeiros itens os alunos poderão proceder de forma análoga à atividade anterior. Após verificar que quando  $P$  é interior à circunferência  $\Gamma$ , também vale  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ , o aluno deverá observar no terceiro item que  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  é positivo se  $P$  é exterior à circunferência e negativo se interior e concluir que  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  é nulo se  $P \in \Gamma$ .

No término dessa atividade o professor poderá chamar o produto  $\overline{PA} \cdot \overline{PB}$  de potência do ponto  $P$  em relação à circunferência  $\Gamma$ .

### Atividade 26

No item 1, os alunos precisam determinar que  $Pot(P) = \overline{PT}^2$ . O professor pode iniciar solicitando que os alunos ilustrem a situação, conforme figura 6.3.

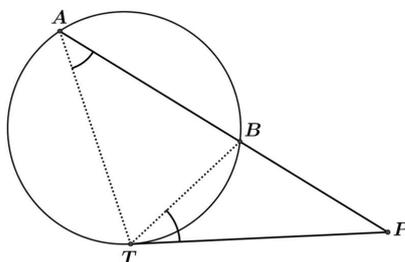


Figura 6.3: Relação secante-tangente.

Para mostrar que os triângulos  $\triangle PAT$  e  $\triangle PTB$  são semelhantes, talvez seja necessário mostrar antes que o ângulo  $\widehat{BTP}$ , chamado de ângulo de segmento,

equivale à metade do ângulo central correspondente ou metade da medida do arco  $\widehat{AB}$  correspondente. Como o ângulo  $\widehat{PAT}$  é inscrito, logo  $\widehat{BTP} \cong \widehat{PAT}$ . O ângulo  $\widehat{APT}$  é comum, daí segue da semelhança dos triângulos  $\triangle PAT$  e  $\triangle PTB$  que  $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PT}^2 = Pot(P)$ .

No item 2, o professor pode iniciar solicitando aos alunos que ilustrem a situação, dando a liberdade de escolha do ponto  $P$  no interior ou exterior da circunferência, mas ressaltando que a reta deve passar por  $P$  e por  $O$ . O resultado decorre diretamente de  $\overline{PA} = d - r$  e  $\overline{PB} = d + r$ .

### Atividade 27

No item 1, o professor pode sugerir que a reta que passa por  $P$  intersecte a circunferência em pontos mais simples, como por exemplo,  $B(-5, 0)$ . Para os cálculos de  $\overline{PA}$  e de  $\overline{PB}$  utilizando os conhecimentos da geometria analítica, o uso da calculadora pode acelerar o processo. Tanto no item 2 quanto no 3, a potência será a mesma,  $Pot(P) = 33$ . Para justificar, basta considerar a reta que passa por  $P(x_0, y_0)$  e pelo centro  $O(a, b)$  da circunferência  $\Gamma$ , assim temos que

$$\begin{aligned} Pot_{\Gamma}(P) &= d^2 - r^2 \\ &= (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2. \end{aligned}$$

Como a equação da circunferência  $\Gamma$  é

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0,$$

segue que a potência de  $P(x_0, y_0)$  em relação à  $\Gamma$  é obtida substituindo-se  $x$  e  $y$  no lado esquerdo da equação de  $\Gamma$ , pelas coordenadas  $x_0$  e  $y_0$  de  $P$ . Para concluir a atividade, o conjunto de todos os pontos  $P$  que possuem a mesma potência  $Pot(P) = 33$  será dado por  $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 25 = 33$ , ou seja, uma circunferência centrada na origem e com raio  $\sqrt{58}$ .

### 6.10.7 Mediação para a seção 6.7 - Potência de um ponto em relação a um ciclo

As atividades desta seção têm como objetivo trabalhar a potência de um ponto em relação a um ciclo na geometria de Galileu.

### Atividade 28

Nos itens 1 e 2 o professor precisa apenas acompanhar os alunos para verificar se estão realizando as atividades de forma correta. Nos itens 3 e 4, os alunos

obterão a mesma potência  $Pot(P) = 4$ . Para explicar o item 4, sejam  $\mathcal{Z}$  um ciclo de equação  $ax^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$ ,  $l$  uma reta de equação  $y - y_0 = k(x - x_0)$  que passa por  $P(x_0, y_0)$  e  $A(x_1, y_1)$  e  $B(x_2, y_2)$  os pontos de interseção de  $l$  com  $\mathcal{Z}$ . A potência de  $P$  em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$  é dada por

$$\begin{aligned} Pot_{\mathcal{Z}}(P) &= \overline{PA} \cdot \overline{PB} \\ &= (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) \\ &= x_0^2 - (x_1 + x_2)x_0 + x_1 \cdot x_2. \end{aligned}$$

Substituindo a equação da reta  $l$

$$y = kx + (y_0 - kx_0)$$

na equação do ciclo  $\mathcal{Z}$ , temos

$$x^2 + 2(b_1 + b_2k)x + [2b_2(y_0 - kx_0) + c] = 0.$$

Mas

$$-2(b_1 + b_2k) = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad 2b_2(y_0 - kx_0) + c = x_1 \cdot x_2,$$

pois  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes, já que  $A$  e  $B$  estão sobre  $\mathcal{Z}$ . Logo segue que

$$\begin{aligned} Pot_{\mathcal{Z}}(P) &= x_0^2 + 2(b_1 + b_2k)x_0 + 2b_2(y_0 - kx_0) + c \\ &= x_0^2 + 2b_1x_0 + 2b_2kx_0 + 2b_2y_0 - 2b_2kx_0 + c \\ &= x_0^2 + 2b_1x_0 + 2b_2y_0 + c. \end{aligned}$$

Portanto, a potência de um ponto  $P$  em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$  é obtida substituindo-se os valores de  $x$  e  $y$  no lado esquerdo da equação de  $\mathcal{Z}$  pelas coordenadas  $(x_0, y_0)$  de  $P$ .

### Atividade 29

Como  $P(0, 0)$ , logo a reta que passa por  $P$  tem equação do tipo  $y = kx$ . Substitua esta equação na equação do ciclo. Da equação obtida, imponha  $b^2 - 4ac = 0$ , pois queremos que o ponto de interseção seja único. Assim, teremos duas retas tangentes ao ciclo passando por  $P$ . Suas equações serão  $y = -3x$  e  $y = x$  e os pontos de tangência serão  $T_1(2, 2)$  e  $T_2(-2, 6)$ . O aluno poderá concluir que  $Pot(P) = d(P, T)^2$ .

### 6.10.8 Mediação para a seção 6.8 - Inversão na circunferência euclidiana

Objetivo dessa seção é introduzir a inversão na circunferência euclidiana através das representações geométrica e algébrica.

#### Atividade 30

Nesta atividade o aluno deverá construir com régua e compasso, o ponto  $P'$ , imagem de  $P$  pela inversão na circunferência euclidiana  $\Gamma$ . Considerando o ponto  $P$  no interior de  $\Gamma$ , os três primeiros itens dão as instruções para a construção. Para justificar, o aluno deverá usar a semelhança dos triângulos  $\triangle OPT_1$  e  $\triangle OT_1P'$ . Finalizando a atividade, como  $P$  é interior, o ponto  $P'$  não pode ser interior, pois, seria impossível na geometria euclidiana termos  $\overline{OP} < r$ ,  $\overline{OP'} < r$  e  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = r^2$ .

#### Atividade 31

Os três primeiros itens desta atividade dão as instruções para a construção do ponto  $P'$ , inverso de  $P$ , com  $P$  no exterior de  $\Gamma$ . Após a construção, conforme ilustra a figura 6.4, o professor deve fazer os alunos perceberem que os triângulos  $\triangle POT_1$  e  $\triangle T_1OP'$  são isósceles com o ângulo da base  $\widehat{POT_1}$  comum. Desta forma, os triângulos  $\triangle POT_1$  e  $\triangle T_1OP'$  são semelhantes. No último item, os alunos devem concluir que se  $P \in \Gamma$  então  $P = P'$ .

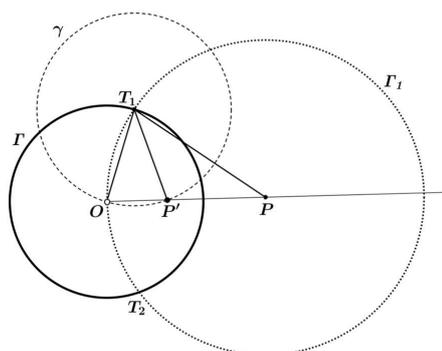


Figura 6.4: O inverso  $P'$  do ponto  $P$  exterior a  $\Gamma$ .

#### Atividade 32

No item 1, caso ache necessário, o professor pode sugerir que o ponto  $A$  seja externo e o ponto  $B$  seja interno para fixar as construções da atividade anterior. Neste caso, a construção seria conforme ilustra a figura 6.5.

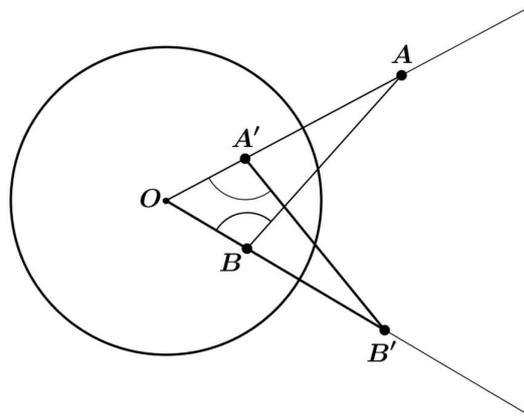


Figura 6.5: Os triângulos  $\triangle OB'A'$  e  $\triangle OAB$  são semelhantes.

Aplicando a definição de inversão na circunferência, temos  $\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'}$ . Da proporcionalidade dos lados, conclui-se que os triângulos  $\triangle OB'A'$  e  $\triangle OAB$  são semelhantes, já que o ângulo em  $O$  é comum.

As próximas atividades desta seção, trabalharão a inversão na circunferência euclidiana de forma analítica.

### Atividade 33

Para determinar as coordenadas de  $P'$  pela inversão na circunferência, o professor poderá auxiliar os alunos, procedendo da seguinte maneira:

- Mostrando que  $P(x, y)$  e  $P'(x', y')$  estão sobre a mesma semirreta  $\overrightarrow{OP}$ , logo  $P'(x', y') = P'(\lambda x, \lambda y)$ .
- Pela definição de inversão temos

$$\begin{aligned} r^2 &= \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} \\ 4^2 &= (x^2 + y^2)\lambda. \end{aligned}$$

- Substituir o valor de  $\lambda$  obtido em  $P'(\lambda x, \lambda y)$ , chegando a

$$x' = 16 \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{e} \quad y' = 16 \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Onde  $x$  e  $y$  são as coordenadas do ponto  $P$  escolhido pelos alunos.

Para concluir a atividade, os alunos devem observar que, as imagens de todos os pontos de uma reta que passa pelo centro da circunferência, pertencem a esta mesma reta. Portanto o inverso de uma reta que passa pelo centro  $O$  está contido na própria reta.

### Atividade 34

Os itens 1 e 2 podem ser desenvolvidos procedendo-se como na atividade anterior. No item 3, o professor pode começar recordando que se duas retas  $l$  e  $p$  são perpendiculares, então o produto de suas declividades vale  $-1$ . O professor deve fazer questionamentos cujas respostas levem os alunos às conclusões desejadas. Para descobrir as coordenadas de  $P$ , os alunos podem proceder da seguinte maneira:

- Obtenha a declividade  $k_l$  da reta  $l$  que passa por  $A$  e  $B$ .
- Escreva a equação da reta perpendicular à reta  $l$  que passa por  $O$ .
- Resolva o sistema formado pelas equações da reta  $l$  e da perpendicular para obter as coordenadas de  $P$ .

As coordenadas esperadas são  $P(4, -2)$ ,  $A'(\frac{12}{5}, \frac{4}{5})$ ,  $B'(\frac{4}{5}, -\frac{12}{5})$  e  $P'(\frac{16}{5}, -\frac{8}{5})$ . Após os cálculos e as devidas marcações, os alunos chegarão à seguinte ilustração, conforme figura 6.6.

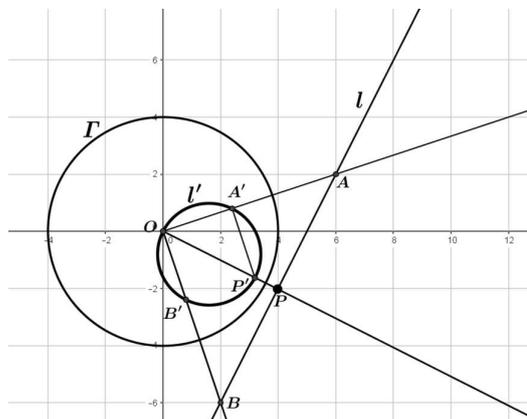


Figura 6.6: A imagem de uma reta que não passa pelo centro da circunferência de inversão.

Outra forma de proceder é considerar a semelhança entre os triângulos  $\triangle OPQ$  e  $\triangle OP'Q'$ , sua imagem pela inversão. O ângulo  $\widehat{OPQ}$  é congruente ao ângulo  $\widehat{OQ'P'}$ ; logo, se  $\widehat{OPQ}$  é reto,  $\widehat{OQ'P'}$  é reto e, dessa forma  $Q$  está sobre a circunferência de diâmetro  $OP'$ . Resta mostrar que todo ponto desta circunferência é imagem de

um ponto da reta; mas isso pode ser deixado de lado ou proposto aos alunos como exercício.

Na conclusão do item 4, o professor deve reforçar a propriedade do ângulo reto inscrito na semicircunferência. Para escrever a equação da circunferência  $l'$  passando por  $A'$ ,  $O$  e  $P'$ , descubra as coordenadas do centro  $O'(\frac{8}{5}, -\frac{4}{5})$  fazendo a interseção das retas perpendiculares a  $\overrightarrow{OA'}$  e  $\overrightarrow{OP'}$ . Determine o valor do raio  $\overline{OO'}$  e conclua que  $(x - \frac{8}{5})^2 + (y + \frac{4}{5})^2 = \frac{16}{5}$  é a equação da circunferência  $l'$ .

### Atividade 35

Nesta atividade os alunos irão obter a imagem  $l'$  da reta  $l$  pela inversão na circunferência  $\Gamma$ , pela definição de inversão. O primeiro item é uma recapitulação dos procedimentos descritos na sugestão da atividade 33. Para escrever a equação de  $l'$ , imagem da reta  $l$  de equação  $2x - y = 10$ , o professor pode sugerir o seguinte procedimento:

- Utilizando a definição de inversão,  $\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2} = r^2$  e o item 1, obtenha  $\lambda = \frac{r^2}{x'^2 + y'^2}$ , com  $r = 4$ .
- Como  $x = \lambda x'$  e  $y = \lambda y'$ , substitua estes valores na equação da reta  $l$ , utilizando o valor de  $\lambda$  obtido anteriormente.

Após as devidas manipulações, a equação de  $l'$  será dada por  $x'^2 + y'^2 - \frac{16}{5}x' + \frac{8}{5}y' = 0$ . Os alunos deverão observar que esta equação descreve uma circunferência. Quando fizerem a comparação com a equação de  $l'$  do item 5 da atividade 34, comprovarão que se trata da mesma equação.

Outra possibilidade seria utilizar o resultado da atividade 34. Basta construir a reta  $t$  perpendicular à reta  $l$  passando por  $O$ ; achar a imagem  $P'$  da interseção de  $t$  com  $l$  e encontrar o ponto médio de  $OP'$  para traçar a circunferência imagem. Isso pode ser feito analiticamente ou com régua e compasso.

No último item, os alunos deverão fazer a observação de que a imagem, pela inversão na circunferência, de uma reta que não passa pela origem, é uma circunferência que passa pela origem.

### 6.10.9 Mediação para a seção 6.9 - Inversão no ciclo

As atividades desenvolvidas nesta seção farão o estudo da inversão no ciclo de Galileu.

### Atividade 36

Após o esboço do ciclo no item 1, o segundo item descreve o procedimento para a obtenção do inverso de um ponto  $P$  em relação ao ciclo  $\mathcal{Z}$ . É importante que o professor enfatize que, a distância especial entre o ponto e o ciclo é igual à distância especial entre o ciclo e a imagem do ponto. A figura 6.7 mostra uma possível forma de esboço.

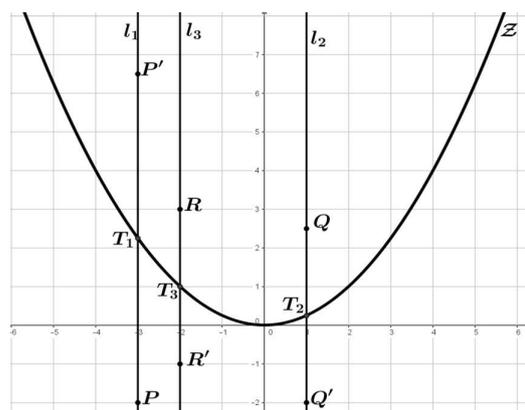


Figura 6.7: Imagens de  $P$ ,  $Q$  e  $R$  pela inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ .

### Atividade 37

Nesta atividade, caso os alunos tenham dúvida se os três pontos estão alinhados, o professor deve fazer os alunos observarem o que significa estes três pontos serem colineares e, a partir disso, tirarem suas conclusões de como verificar este fato. Se os três pontos não são colineares, então para escrever a equação do ciclo será necessário montar um sistema envolvendo as coordenadas dos três pontos e resolvê-lo para descobrir os coeficientes da equação.

### Atividade 38

Após o esboço do ciclo  $\mathcal{Z}$  e da reta  $z$ , os alunos deverão observar que as coordenadas do ponto  $P$  são  $(x, x - 3)$  e as de  $T$  são  $(x, \frac{1}{2}x^2)$  e daí obter  $\frac{1}{2}x^2 - x + 3$  para a distância especial  $\overline{PT}$ . No item 3, as coordenadas de  $P'$  são  $(x' = x, y')$ , fazendo  $\overline{PT} = \overline{TP'}$ , os alunos chegarão a  $y' = x'^2 - x' + 3$ . Visto que esta equação descreve um ciclo, o esboço feito pelo aluno será do tipo ilustrado na figura 6.8.

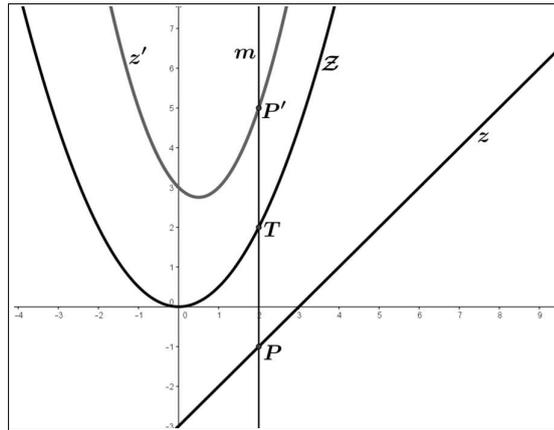


Figura 6.8: Imagem da reta  $z$  pela inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ .

Concluindo a atividade, a curvatura de  $\mathcal{Z}$  será  $\mathcal{P} = 1$  e de  $z'$  será  $\rho' = 2$ .

### Atividade 39

Para auxiliar os alunos na realização desta atividade e reforçar o estudo de inversão no ciclo realizado na atividade anterior, o professor pode proceder da seguinte forma:

- Solicite que tracem o ciclo  $\mathcal{Z}$  e a reta  $w$ .
- Estimule para que descubram que as coordenadas de um ponto  $P$  qualquer,  $P \in w$  e de um ponto  $T \in \mathcal{Z}$ , que estejam sobre uma mesma reta especial, são  $P(x, 1 - 2x)$  e  $T(x, \frac{1}{2}x^2)$ .
- Peça que escrevam a expressão da distância especial entre estes dois pontos.
- Finalmente peça que descubram a expressão para as coordenadas do ponto  $P'(x' = x, y')$ , tal que a distância especial entre  $P$  e  $T$  seja a mesma que entre  $T$  e  $P'$ .

Desta forma, chegarão a  $P'(x', x'^2 + 2x' - 1)$ . Ou seja,  $y' = x'^2 + 2x' - 1$  é a equação de um ciclo  $w'$ , imagem da reta  $w$  pela inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ . Veja o esboço na figura 6.9.

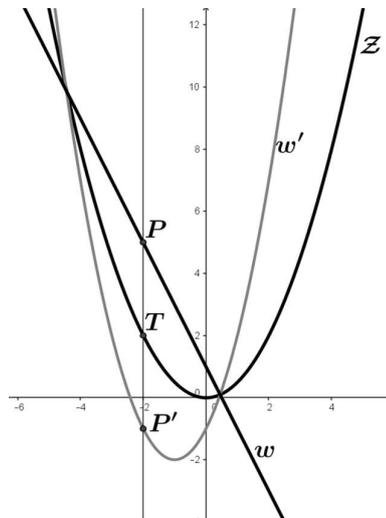


Figura 6.9: Imagem da reta ordinária  $w$  pela inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ .

No item 3, os alunos observarão que a curvatura de  $\mathcal{Z}$  vale  $\mathcal{P} = 1$  e a de  $w'$  vale  $\rho' = 2$ . Comparando com o item 5 da atividade 38, notarão que a curvatura da imagem é o dobro da curvatura do ciclo de inversão. Encerrando esta atividade, os alunos poderão escrever a seguinte conjectura:

*A imagem de uma reta ordinária, pela inversão num ciclo  $\mathcal{Z}$ , será um ciclo com curvatura igual ao dobro da curvatura do ciclo de inversão  $\mathcal{Z}$ .* A redação dos alunos não precisa ser esta, mas o sentido deve ser o mesmo.

#### Atividade 40

O objetivo desta atividade é obter a imagem  $z'$  de um ciclo  $z$  pela inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ . O procedimento será análogo ao das atividades 38 e 39. Os alunos deverão considerar  $P \in z$  com coordenadas  $(x, x^2 - x - 2)$  e  $T \in \mathcal{Z}$  com coordenadas  $(x, \frac{1}{4}x^2)$ , ambos na mesma reta especial  $m$ . Sendo  $P'(x' = x, y')$  o inverso de  $P$ , fazendo  $\overline{PT} = \overline{TP'}$ , obterão  $y' = -\frac{1}{2}x^2 + x + 2$ . Logo a curva que passa pelos pontos  $P'(x', -\frac{1}{2}x^2 + x + 2)$  será o ciclo  $z'$ , imagem de  $z$ , pela inversão em  $\mathcal{Z}$ , conforme ilustrado na figura 6.10.

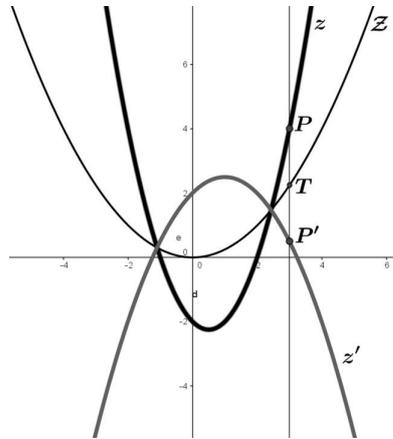


Figura 6.10: Imagem do ciclo  $z$  pela inversão no ciclo  $\mathcal{Z}$ .

As curvaturas de  $\mathcal{Z}$ ,  $z$  e  $z'$  são, respectivamente,  $\mathcal{P} = \frac{1}{2}$ ,  $\rho = 2$  e  $\rho' = -1$ .

### Atividade 41

Aplicando a definição de inversão no ciclo  $\mathcal{Z}_1$ , estudada nas atividades anteriores, os alunos descobrirão a imagem  $z'$  de  $z$ , fazendo

$$\frac{1}{2}x^2 - y' = x^2 - x - 2 - \frac{1}{2}x^2,$$

como  $x = x'$ , chegarão à equação  $y' = x' + 2$  da reta  $z'$ . O esboço está apresentado na figura 6.11.

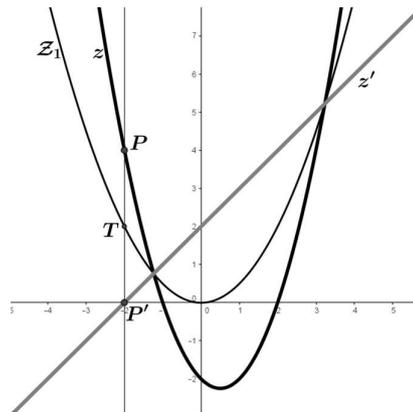


Figura 6.11: Imagem  $z'$  do ciclo  $z$  pela inversão no ciclo  $Z_1$ .

As curvaturas de  $Z_1$  e  $z$  são  $\mathcal{P} = 1$  e  $\rho = 2$ . No item 5, a conjectura esperada é equivalente a:

*A imagem  $z'$  de um ciclo  $z$ , pela inversão no ciclo  $Z$ , será uma reta se a curvatura de  $z$  for o dobro da curvatura do ciclo de inversão  $Z$  e será um ciclo caso contrário.*

No entanto, o professor deve ficar aberto a outras formulações. Ele deve deixar os alunos cientes de que para fazer uma conjectura, eles devem argumentar em que aspectos os resultados obtidos permitem um determinado enunciado. A generalização, solicitada no item 6, pode ser formulada da seguinte forma:

- *Se  $z$  for uma reta, então sua imagem  $z'$  pela inversão no ciclo  $Z$ , será um ciclo de curvatura igual ao dobro de  $Z$ ;*
- *Se  $z$  for um ciclo de curvatura igual ao dobro de  $Z$ , então sua a imagem  $z'$  será uma reta;*
- *Se  $z$  for um ciclo de curvatura diferente do dobro de  $Z$ , então sua a imagem  $z'$  será um ciclo.*

# Considerações Finais

Neste trabalho apresentamos a Geometria de Galileu. Diferentemente de Gauss, Bolyai e Lobachevsky, que haviam criado uma geometria não euclidiana a partir da negação do postulado das paralelas, esta geometria originou-se no estudo da mecânica, mais precisamente no *princípio da relatividade* de Galileu. Vimos que a geometria de Galileu é representada por um grupo de isometrias geradas pelas transformações do tipo

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = vx + y + b. \end{cases}$$

Analizamos as propriedades invariantes por estas transformações.

Utilizamos um modelo cartesiano de forma que retas tenham expressões similares às expressões adotadas no modelo cartesiano da geometria euclidiana. Mostramos como é determinada a distância entre dois pontos e o ângulo entre duas retas na geometria de Galileu. Fizemos a estruturação desse modelo geométrico estudando algumas propriedades e traçamos um paralelo com os análogos na geometria euclidiana. A utilização de um modelo cartesiano simplificou este estudo e permitiu uma melhor compreensão das diferenças entre as duas geometrias.

Observamos que a parábola, chamada de ciclo, faz o papel da circunferência na geometria de Galileu. Daí estendemos o estudo da potência de um ponto em relação a uma circunferência e o conceito de inversão na circunferência para o ciclo de Galileu. Aproveitando a oportunidade, mesclamos as construções geométricas com o estudo analítico.

Com base no referencial teórico desenvolvido, elaboramos uma sequência de atividades para serem aplicadas em sala de aula envolvendo as duas geometrias: euclidiana e galileana. Para deixar mais claro o que se pretende com elas, inserimos sugestões de como o professor deve proceder nas mediações das atividades. Como o estudo de geometrias não euclidianas reforçam o ensino da geometria euclidiana, esperamos que estas atividades não sejam vistas como uma simples curiosidade matemática e sim

como uma oportunidade de desenvolvimento de habilidades de visualização, desenho e argumentação lógica, como indica os PCNEM (Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio) [6].

A proposta de atividades apresentada ainda pode explorar questões relacionadas à física, polígonos e áreas. O estudo da geometria de Galileu não se esgotou neste trabalho. Para futuro estudo, seria interessante analisar os quadriláteros e suas relações com o *Princípio de dualidade*, a medida de superfície, o inciclo e o circunciclo de um triângulo.

# Referências Bibliográficas

- [1] ALLEVATO, N.S.G.; ONUCHIC, L.R.A. *Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da resolução de problemas*. Uma nova possibilidade para o trabalho em sala de aula. Rio Claro-SP, UNESP, 2006.
- [2] BARBOSA, JOÃO L.M. *Geometria euclidiana plana*, quinta edição. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade brasileira de matemática, Rio de Janeiro-RJ, 2002.
- [3] BAKEL'MAN, I. Y. *Inversions*. The university of Chicago press, 1974.
- [4] BOYER, CARL B. *História da Matemática*, ed 2, São Paulo: Edgar Blucher, 1996.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, MEC, 1998. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?id=12598:publicacoes&option=com\\_content&view=article%20](http://portal.mec.gov.br/index.php?id=12598:publicacoes&option=com_content&view=article%20)>. Acesso em 16/12/2015.
- [6] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília, MEC, 1999. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?id=12598:publicacoes&option=com\\_content&view=article%20](http://portal.mec.gov.br/index.php?id=12598:publicacoes&option=com_content&view=article%20)>. Acesso em 16/12/2015.
- [7] CAVICHIOLO, C.V. *Geometrias Não-Euclidianas na formação inicial do professor de matemática: o que dizem os formadores*. Dissertação de Mestrado, UFPR, Curitiba, 2011. Disponível em: <[http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/bitstream/handle/1884/26964/DISSERTACAO\\_CAVICHIOLO\\_VF\\_05\\_1frm-e\\_11.pdf?sequence=1](http://dspace.c3sl.ufpr.br/dspace/bitstream/handle/1884/26964/DISSERTACAO_CAVICHIOLO_VF_05_1frm-e_11.pdf?sequence=1)>. Acesso em 23/12/2015.

- 
- [8] EDWARDS JR,C. HENRY; PENNEY, DAVID E. *Introdução à álgebra linear*. Ed. 1, Rio de Janeiro:Editora LTC, 1998.
- [9] EVES HOWARD. **Introdução à história da matemática**. Traduzido por Hygino H. Domingues, ed 2, Campinas-SP: Editora da UNICAMP, 1997.
- [10] GREENBERGER, MARVIN JAY. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History* . 4th Edition, New York: W. H. Freeman and Company, 2008.
- [11] KITTEL, C., KNIGHT, W. D., RUDERMAN, M.A.*Mecânica - Curso de Física de Berkeley*. Vol 1, ed. Universidade de Brasília-Edgard Blucher Ltda, São Paulo.
- [12] LIMA, ELON LAGES. *Coordenadas no Plano*, segunda edição. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade brasileira de matemática, Rio de Janeiro-RJ, 1992.
- [13] LIMA, ELON LAGES. *Isometrias*. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade brasileira de matemática, Rio de Janeiro-RJ, 1996.
- [14] PATAKI, I. *Geometria Esférica para a formação de professores: uma proposta interdisciplinar*. Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo, 2003. Disponível em:<[http://www.sapientia.pucsp.br/tde\\_busca/arquivo.php?codArquivo=5060](http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=5060)>. Acesso em 06/01/2016.
- [15] POZO, J. I. (Org.) e ECHEVERRÍA, M. P. P. *A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: Artmed, 1998.
- [16] TENENBLAT, KETI. *Introdução à geometria diferencial*. Brasília: Editora Edgard Blucher , 2008.
- [17] YAGLOM, ISAAK MOISEEVICH. *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. Nauka, Moscow, 1969.
- [18] YAGLOM, ISAAK MOISEEVICH. *Felix Klein and Sophus Lie*. Evolution of the idea of Symmetry in the Nineteenth Century. Boston, Basel,Birkhauser 1988.
- [19] WAGNER, EDUARDO. *Construções Geométricas*, sexta edição. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade brasileira de matemática, Rio de Janeiro-RJ, 1993.

# Anexo

Segue as imagens do kit de madeira utilizado para traçar o ciclo de Galileu na atividade 14 do capítulo 6. Este kit é chamado de *parabolator*. Ele permite marcar no plano o conjunto de pontos a partir dos quais um segmento  $AB$  é visto sob um ângulo  $\alpha$  com medida e orientação constantes.

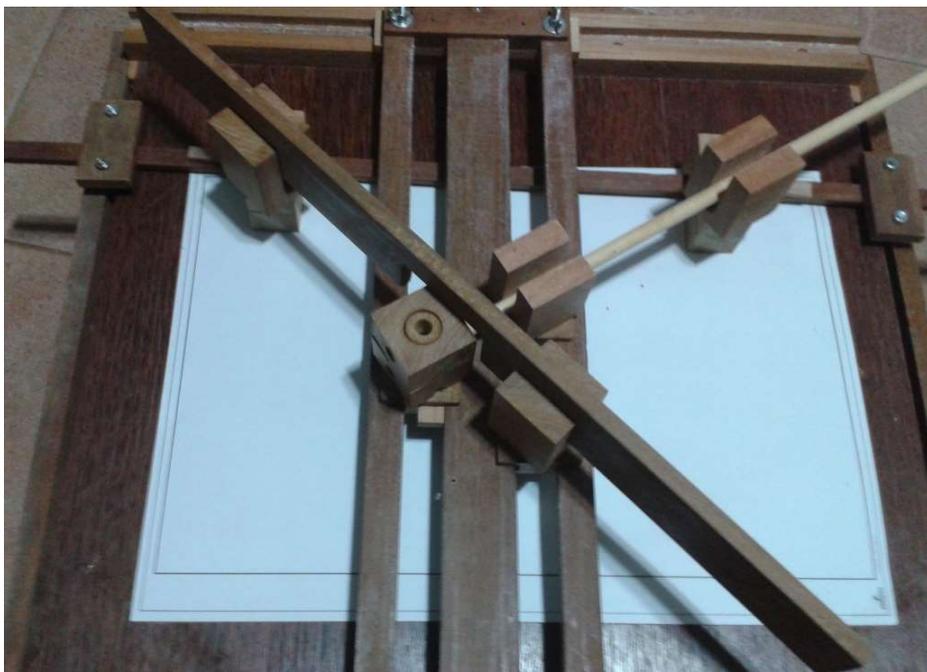


Figura 6.12: Parabolator visto de cima.

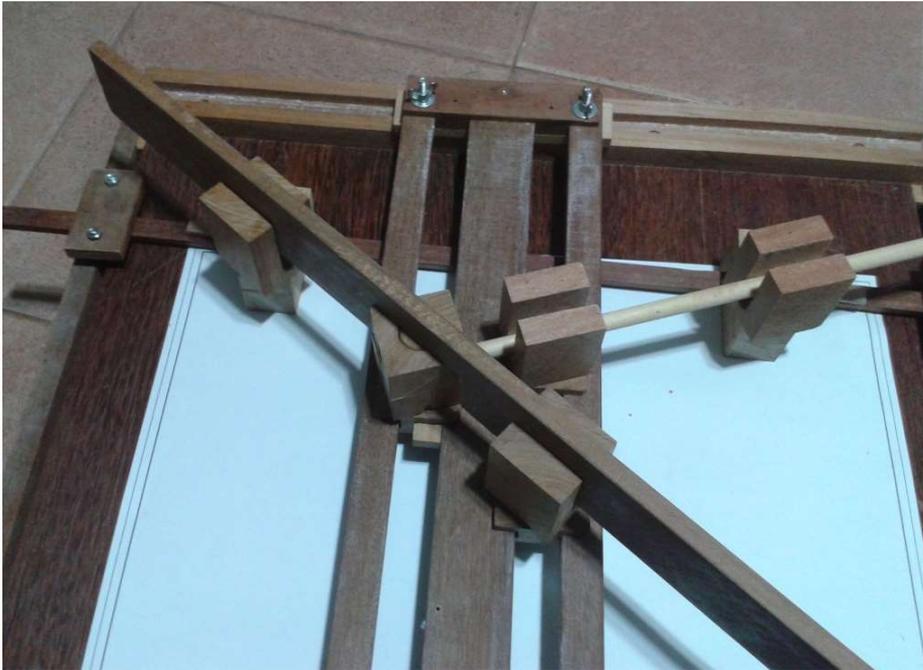


Figura 6.13: Paleta alinhando os três pontos.



Figura 6.14: Marcação do ponto.



Figura 6.15: Inversão da paleta para marcar os pontos do outro ramo do ciclo.

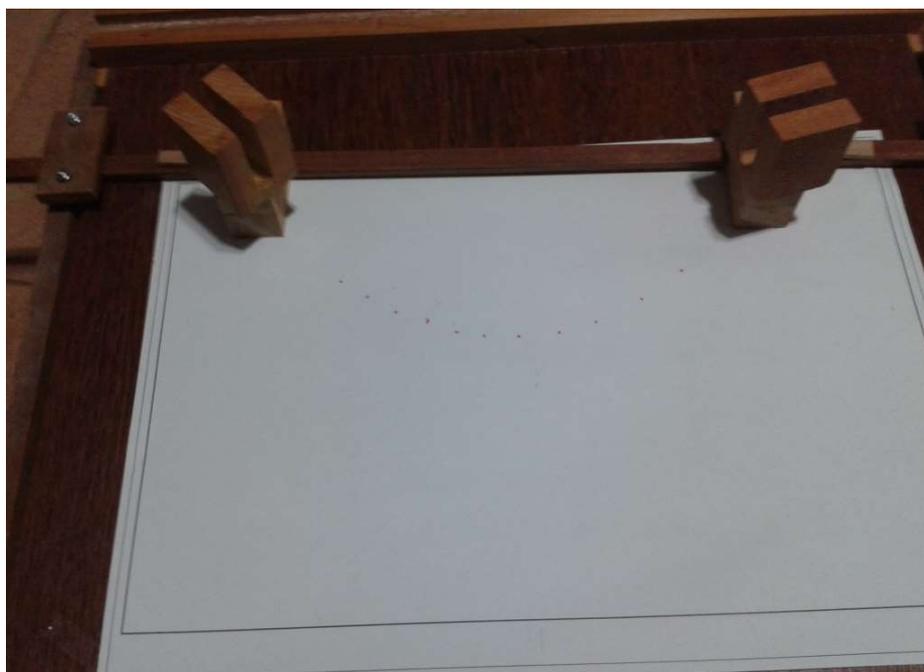


Figura 6.16: Pontos marcados com parabolator.

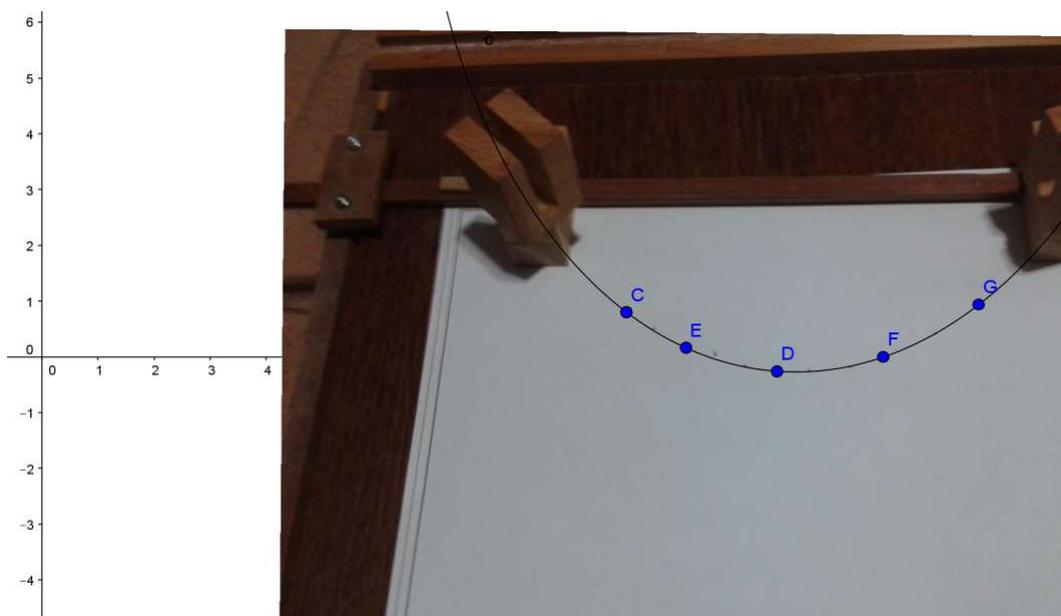


Figura 6.17: Ciclo traçado pelos pontos com o auxílio do *geogebra*.