Felipe de Oliveira Pereira

Números Complexos na Educação Básica

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Ronaldo da Silva Busse

Doutor em Matemática – UFRJ

Rio de Janeiro

2016

PEREIRA, Felipe de Oliveira

Números complexos na educação básica/ Felipe de Oliveira Pereira - 2016

Felipe de Oliveira Pereira

Números complexos na educação básica

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em X de Abril de 2016

BANCA EXAMINADORA

Ronaldo da Silva Busse
Doutor em Matemática – UNIRIO

Gladson Octaviano Antunes
Doutor em Matemática – UNIRIO

Leonardo Tadeu Silvares Martins
Doutor em Matemática – UFF

Dedicatória

Aos meus pais e irmão,
aos meus amigos,
à minha namorada e
à Deus.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Ronaldo Busse, por aulas extremamente eficientes e de extrema competência aliada a sua simplicidade. Além da orientação precisa para a elaboração desta monografia.

Aos meus pais Fátima e José responsáveis por minha formação profissional e pessoal.

À minha namorada que esteve presente em todo este processo.

A todos aqueles que de alguma forma ajudaram a semear, cultivar e colher os frutos desses anos de curso.

RESUMO

O objeto de estudo e elaboração deste trabalho se desenvolveu a partir do entendimento que o assunto *Números Complexos* desapareceu ao longo dos últimos anos das ementas escolares. Buscou-se algumas explicações, como a visão dos docentes e suas respectivas formações e atuações em sala de aula. Além dos *Parâmetros Curriculares* e suas orientações.

Frente a essa situação, essa monografia se propõe a mostrar alguns aspectos formais e históricos sobre os Números Complexos, além da análise de alguns livros didáticos referentes ao tema, e outra sobre um questionário respondido por professores que atuam na educação básica desde o 6ºano do ensino fundamental ao 3ºano do ensino médio, para entender como o assunto é abordado e sua relevância vista sob o olhar do docente. Ao final são dadas propostas de aula para que possam contribuir com os docentes que venham a ler este trabalho.

Palavras-chave: Números complexos – Formação - Docentes

ABSTRACT

The object of study and preparation of this work has developed from the understanding that the matter Complex Numbers disappeared over the last few years of school meals . some have sought explanations , as the vision of teachers and their training and performances in the classroom. In addition to the Curriculum Standards and its guidelines .

In this situation , this monograph aims to show some formal and historical aspects of the Complex Numbers , as well as analysis of some textbooks on the topic , and the other on a questionnaire answered by teachers working in primary education from the 6th year of teaching fundamental to the high school 3rd year , to understand how the subject is approached and its relevance seen from the perspective of the teacher . At the end of class proposals are given so that they can contribute to the teachers who read this work.

Key words: Complex numbers - Training - Teaching

SUMÁRIO

Lista de figuras

1. Introdução

A temática deste trabalho se deu pela ausência cada vez mais frequente deste conteúdo nas salas de aula de turmas de Ensino Fundamental e especialmente Médio. A começar pela não apresentação deste conjunto numérico no ensino fundamental, seguido dos vícios de insinuar aos alunos do nono ano que após as equações do segundo grau e o aprendizado dos números reais, não haverá qualquer outro conjunto numérico posterior aos já aprendidos.

A pensar que o conjunto dos números complexos não é o último a que se tem conhecimento, como por exemplo o conjunto do Q*uatérnios.* Muito se questiona sobre dizer, após o aprendizado das equações do segundo grau no nono ano, último ano do ensino fundamental, a não existência de raízes reais. Adotando-se o contexto correto, a frase está correta, a estudar que o surgimento de tal conjunto se dá através das equações de terceiro grau.

Os Números Complexos vem se tornando um assunto estritamente teórico e enunciados limitados?

Ao se questionar sobre alguns porquês do desaparecimento repentino deste conteúdo nas salas de aula, pode-se justificar pela ausência do mesmo nos últimos anos na mais importante porta de acesso à universidade no país, o ENEM, que influencia diretamente na presença facultativa de tal assunto na maioria das escolas brasileiras. Nos seis primeiros anos do modelo do novo ENEM, a partir de 2009, conta-se neste período duas aplicações por ano da prova, ao todo 540 questões somente de Matemática, e em nenhuma delas o assunto foi sequer citado, o que ratifica esta introdução.

Vale a reflexão a partir da citação (Orientações Curriculares para o Ensino Médio, p.80):

> "Sobre o processo de ensino e aprendizagem, uma primeira corrente, historicamente a mais presente nas nossas salas de aula de Matemática, identifica ensino com transmissão de conhecimento, e aprendizagem com mera recepção de conteúdos. Nessa concepção, a aprendizagem é vista como um acúmulo de conhecimentos, e o ensino baseiam-se essencialmente na "verbalização" do conhecimento por parte do professor. Se por um lado essa concepção teórica apresenta a vantagem de se atingir um grande número de alunos ao

> mesmo tempo, visto que a atividade estaria a cargo do professor, por outro lado demanda alunos bastante motivados e atentos à palavra do professor, o que não parece ser o caso para grande parte de nossos alunos, que estão imersos em uma sociedade que oferece uma gama de outras motivações. ”

É comum percebermos uma resistência na abordagem do tema pelos professores de Matemática. Embora conheçam a teoria, através das definições, operações e as distintas formas para representar estes números, há uma certa timidez quanto à legitimidade de trabalhar o ensino deste tópico, culminando assim com a eliminação prática deste conteúdo em muitos dos currículos escolares. A justificativa principal dá-se por uma ausência de aplicação concreta dos números complexos e pouco se discorre sobre a importância destes no desenvolvimento da própria ciência em si.

Todavia, esta ausência implica em um questionamento: “Por que está desaparecendo das salas de aula um assunto que engloba três dos quatro pilares da Matemática moderna, lecionada nas escolas brasileiras, como Geometria Plana e Analítica, Trigonometria e Álgebra? ”

Tal conteúdo, que ainda se encontra nas ementas curriculares, tem sido apenas ensinado para turmas específicas de concursos pré-universitários. O que impede as turmas regulares de aprenderem?

Outras ferramentas, além da caneta/giz e quadro branco/negro, podem ser utilizadas?

A presente dissertação valorizará a abordagem geométrica do assunto, através das demonstrações e atividades propostas com o uso do *Geogebra*. Os alicerces trigonométricos e algébricos não serão esquecidos, afinal são importantes desde a história dos Números Complexos.

Ao fazer uma breve reflexão sobre quais conteúdos estão inseridos na estrutura dos números complexos, observamos a presença de: conjuntos numéricos; razões trigonométricas no triângulo retângulo; adição de arcos; adição, subtração, multiplicação e divisão de polinômios; vetores: adição, subtração, simetria, rotação, translação; geometria plana: polígonos, áreas; plano cartesiano. Com essa riqueza de subitens inseridos, a condução de aulas envolvendo tal tema pode se tornar extremamente rica e interessante para abrir a mente dos alunos, mostrando-o novas e boas formas de pensar, tais ideias serão abordadas e discutidas ao longo dos capítulos desta dissertação.

Assuntos dados por essa terna Geometria, Trigonometria e Álgebra devem ser explorados com seus devidos cuidados para haver um equilíbrio. Não se pode tender a uma única e exclusiva área de direcionamento, é papel do docente mostrar diferentes soluções, quando possível, pelas três áreas abrangentes dentro dos complexos.

Haverá ao longo do trabalho, a análise de alguns livros didáticos referentes ao ensino deste tópico. Segundo o pensamento de Rosa (2003): *"os livros didáticos em sua maioria não abordam o conteúdo dos números complexos de maneira correta"* e outros autores também defendem esta linha sobre a abordagem incorreta por parte dos materiais didáticos. Chegar-se-á algumas conclusões pós-análise.

As formações dos professores estão limitadas a ponto de não ensinarem mais tal conteúdo?

Questionários foram enviados a professores de Matemática de escolas públicas municipais, estaduais e federais, além da rede privada, para melhor entendimento da abordagem e recorrência atual do conteúdo em sala de aula. E ainda, como a tecnologia, através dos softwares matemáticos livres e disponíveis ao acesso de todas as pessoas, pode ajudar na resolução de problemas. Importante ressaltar que o uso da caneta e do quadro branco também serão fundamentais para diversos momentos, o desafio ao docente no equilíbrio entre recursos comuns e tecnológicos é determinante no aprendizado deste e qualquer outro conteúdo.

Ao abrir inúmeros livros didáticos e outros materiais utilizados nas salas de aulas de ensino fundamental e médio, é possível ver a abordagem sobre a história da Matemática ao citar os principais autores. Esta disciplina está presente em cursos de graduação, formações continuadas, pós-graduações, mestrados e doutorados. A mesma, nos últimos anos, tem adquirido um status bastante forte como aliada do ensino, fundamentando novas práticas e metodologias. Todavia, é comum ver que um grande percentual de professores, no exercício diário da profissão, não teve contato com essa disciplina em sua graduação. Buscam assim, através dos livros adotados, uma melhor maneira de trabalhar conceitos matemáticos à luz dos fatos históricos ao qual se inserem.

2. Capítulo 1 – Os Números Complexos

Os números complexos, descobertos e estudados pela primeira vez no século XVI, tiveram até a estrutura estudada atualmente, importantes personagens ao longo dos últimos cinco séculos, sendo alguns deles bastante citados até os dias atuais, apresentados nos livros didáticos e, a seguir, no presente capítulo.

Seu desenvolvimento abrangeu várias áreas. A importância para aplicação dos mesmos está desde a construção de aeronaves até o termostato da geladeira, entre outras.

Aulas de números complexos podem apresentar e retomar inúmeros conceitos importantes, afinal, sobre os mesmos podem tratar a álgebra, a geometria e a trigonometria. Pode-se também correlacionar matérias já estudadas anteriormente pelos alunos, considerando que a abordagem atual para os números complexos se dá com mais frequência nas turmas finais do ensino médio, segundo e terceiro anos, respectivamente.

No presente capítulo, será apresentado, através das seções, o surgimento destes números, sua linha histórica, os conceitos, definições e propriedades, além das demonstrações matemáticas para a construção dos mesmos.

2.1. O surgimento dos números complexos

O entendimento e estudo mais aprofundado, e com as notações atuais, se constrói a partir da resolução das equações de terceiro grau. Todavia, o surgimento dos números complexos, por diversas vezes é associado à resolução de equações do segundo grau, cujo discriminante seja negativo.

A narrativa da *RPM-OBMEP, Ed. especial, ano 2013*, (WAGNER et al.,2013) é interessante em todo seu conteúdo nas páginas dedicadas ao surgimento e desenvolvimento dos números complexos, desde às suas personagens e sua linha histórica, a qual será fonte principal para o desenvolvimento da presente seção 2.1 desta dissertação.

A história se inicia com *Niccolò Fontana* (1500-1557), conhecido nas publicações e estudos como *Tartaglia* (que significa, em italiano, gago), apelido adquirido quando criança após uma invasão à sua cidade natal, Brescia, quando soldados o feriram no rosto e este o causou uma gagueira permanente. Ele não foi o primeiro a estudar sobre estas equações, estudos mostram que *Scipione del Ferro* (1465-1562), professor da Universidade de Bolonha, foi o descobridor primitivo. Antes do seu falecimento ensinou seu método aos discípulos *Annibale Della Nave* e *António Maria Fior*.

No ano de 1535, se iniciou uma disputa entre *Tartaglia* e *Fior*, diga-se de passagem, tais duelos eram comuns à época, pois muitas vezes a permanência em uma cátedra era associado ao bom desempenho nestes confrontos.

Todos os problemas propostos por *Fior* eram equações da forma $X^3 + aX = b$ e, no mês de fevereiro deste ano, *Tartaglia* havia resolvido todos os problemas propostos por *Fior*, sendo declarado o vencedor.

A notícia da sua vitória se tornou um acontecimento e logo foi espalhada. Até chegar a outra personagem importante desta história, *Girolamo Cardano* (1501-1576), nascido em Pavia, e nesta época ocupava uma cadeira de medicina na Universidade de Pavia, sendo ainda membro do Colégio Médico de Milão. O fato de ser médico nos traz o questionamento de perguntar qual seria seu envolvimento com os estudos dos números complexos, a se pensar na distância entre estas duas ciências. Uma resposta pode ser encontrada na autobiografia de *Cardano*, por *Gabriel Naudé, 1643*:

> "Não somente era ele inquestionavelmente um médico notável, como foi também provavelmente o primeiro e único homem a se distinguir em todas as ciências ao mesmo tempo. É uma das ilustrações da Natureza daquilo que um homem é capaz de atingir. Nada de significativo lhe era desconhecido em filosofia, medicina, astronomia, matemática, história, metafísica ou as ciências sociais, ou em outras áreas mais remotas do conhecimento. Ele também errava, é claro, isto é apenas humano; é maravilhoso, porém, quão raramente ele errava."

Cardano convidou *Tartaglia* para ir à sua casa e o convenceu para que o contasse os segredos das resoluções de tais equações. Sob a forma de versos, *Tartaglia* lhe ensinou a regra de resolução, sem lhe mostrar a demonstração desta, com a condição do juramento que *Cardano* jamais publicaria tal segredo.

Porém, de posse da solução, e tentado a publicar tais resultados, em visita a cidade Florença, após visitar *Della Nave*, discípulo de *del Ferro*, foi apresentado a um manuscrito, de trinta anos antes, que continham a existência da tal fórmula proposta por *Tartaglia*. Em consequência, quebrou o juramento feito, e em 1545, na cidade de Nuremberg, escreveu e intitulou a obra que o tornou conhecido no continente, o *Ars Magna*.

Para resolução de tais equações *Tartaglia* e *Cardano* não se utilizaram de coeficientes negativos e ao invés da equação geral de terceiro grau, foram considerados três possíveis casos:

$$x^3 + ax = b$$
$$x^3 = ax + b$$
$$x^3 + b = ax$$

Nos oito versos contados por *Tartaglia* a *Cardano*, as equações do primeiro tipo são "cubo e coisa igual a número", do segundo tipo são "quando o cubo estiver sozinho" e para o terceiro "a terceira dessas nossas contas se resolve como a segunda, se observas bem que suas naturezas são quase idênticas".

Ele se propõe a resolver o primeiro caso, denominando a época, em seus versos, o termo independente b por "número" e a utilização de duas novas variáveis para designá-lo:

$$U + V = b$$

Em outro verso diz: "...que seu produto seja sempre igual ao cubo da terça parte da coisa", matematicamente:

$$UV = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

Por último, diz que "o resíduo geral das raízes cúbicas subtraídas será tua coisa principal", logo:

$$x = \sqrt[3]{U} - \sqrt[3]{V}$$

Para resolução, em termos atuais, têm-se algumas trocas de variáveis apresentadas para resolução das fórmulas de *Cardano* e *Tartaglia*, serão adotadas novas notações:

$$X = u + v$$

a = p

b = q

Ao substituir em $X^3 + aX + b = 0$, *Cardano* obteve:

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0$$
$$u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$$
$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

Neste momento, resolveu igualar $3uv + p = 0$, logo:

$$u^3 + v^3 = -q$$

$$3uv = -p \Rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

Veja que ao assumirmos u^3 *e* v^3 como raízes de uma equação do segundo grau descobrimos acima as relações de soma e produto, lembramos que uma equação do segundo grau pode ser escrita da seguinte maneira:

$x^2 - Sx + P = 0$, sendo S a soma entre as raízes e P o produto entre as mesmas.

Temos assim:

$$t^2 + qt - \frac{p^3}{27} = 0$$

$$\Delta = \ q^2 - 4.1.\left(-\frac{p^3}{27}\right)$$

$$\Delta = \ q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

$$t = \ -\frac{q}{2} \pm \ \sqrt{\frac{q^2}{4} + \ \frac{p^3}{27}}$$

A solução da equação cúbica inicial, $X^3 + aX + b = 0$, utilizando-se as substituições iniciais, é dada por:

$$x = \ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \ \sqrt{\frac{q^2}{4} + \ \frac{p^3}{27}}} + \ \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \ \sqrt{\frac{q^2}{4} + \ \frac{p^3}{27}}}$$

Nesta demonstração acima, *Cardano* utilizou-se de resultados já demonstrados em outros capítulos anteriores de seu livro, ditas nos dias atuais por cubo da soma e da diferença. A fórmula atual denominada como cubo da soma de dois termos foi enunciada em *Ars Magna, cap. VI, p.52* da seguinte forma: *"Se uma quantidade é dividida em duas partes, o cubo do inteiro é igual ao cubo das duas partes mais o triplo do produto de cada uma pelo quadrado da outra"*.

A forma geral da equação do terceiro grau dada por: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, pode-se reduzir ao caso acima mediante a mudança de variável $x = y - \frac{a}{3}$. Tal redução era conhecida por *Tartaglia* e tal fato foi determinante para que o mesmo vencesse o duelo contra *Fior*. Sendo assim, *Tartaglia* tinha conhecimento de um método geral para resolução de equações deste tipo.

Historicamente, as equações do segundo grau surgiram por volta de 1700 a.C. e já levavam a resoluções com radicais negativos, mas em momento algum há registros de que estas foram responsáveis ou sugeriram o uso dos números complexos.

Equações eram vistas como uma formulação matemática de problemas concretos e quando na resolução apareciam raízes quadradas de números negativos, era um indicativo de que o problema apresentado não possuía solução. E somente as equações do terceiro grau trouxeram posteriormente a necessária utilização dos números complexos.

No ano de 257 d.C., *Diophanto*, na obra *Arithmetica* traz o seguinte problema: "Um triângulo retângulo tem área igual a 7 e perímetro de 12 unidades. Encontre o comprimento dos seus lados. "

Na notação atual, adotando-se por $x\ e\ y$ para representar o comprimento dos catetos, tem-se:

$$12^2 = x^2 + y^2$$

$$\frac{1}{2}\, xy = 7$$

$$x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2$$

Tomando-se y em função de x, se obtém a equação:

$$24x^2 - 172x + 336 = 0$$

$$\Delta = (-172)^2 - 4(24)(336)$$

$$\Delta = 29584 - 32256$$

$$\Delta = -2672$$

Ele observou que só solucionaria se $\left(\frac{172}{2}\right)^2 \geq 336\,.\,24$. Sendo assim, não houve solução. Logo, não há necessidade de se buscar e trazer um sentido para a expressão $\sqrt{-2672}$, sendo -2672 o discriminante da equação.

Anos mais tarde, no século XII, o matemático indiano *Bháskara* (1114-1185) escreveu sobre o assunto:

> "O quadrado de um afirmativo é afirmativo; e a raiz quadrada de um afirmativo é dupla: positiva e negativa. Não há raiz quadrada de um negativo; pois ele não é um quadrado."

Séculos mais tarde, os tais problemas sem solução, cujas raízes quadradas continham números negativos foi citado na obra de *Cardano*, no capítulo 37 do *Ars Magna*, ele apresentou o problema de dividir o segmento de medida 10 em dois outros cujo produto seria 40. Ao denominarmos um segmento por x e outro por $(10 - x)$, obtém-se a equação do segundo grau:

$$x^2 - 10x + 40 = 0$$

Cuja solução é representada por:

$$S = \{5 \pm \sqrt{-15}\}$$

Embora respeitasse seus contemporâneos mediante a tais resoluções ditas inexistentes quando as raízes fossem negativas, após o problema apresentado ele escreveu: "deixando as torturas mentais envolvidas e multiplicando $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$, obtém-se $25 - (-15)$, que é igual a 40."

Ignorando-se mais uma vez o fato das respostas apresentarem raízes negativas. Ao final, ele denomina essas expressões por *raízes sofísticas* da equação sendo *"tão sutis quanto inúteis"*.

A necessidade dos números complexos era iminente, e um dos admiradores da obra escrita por *Cardano*, o engenheiro hidráulico italiano *Raphael Bombelli* (1526-1573) nascido em 1530 na cidade de Bolonha, julgava que o texto contido na mesma não era tão claro e se propusera a escrever um, sobre os mesmos assuntos, no qual um principiante conseguisse ler e estudá-lo sem a necessidade de qualquer outro suporte ou referência.

Sendo assim, em 1572, na cidade de Veneza, publicou, em três volumes, a obra *l'Algebra*, que anos mais tarde se tornaria bastante reconhecida e relevante. Em um dos capítulos ele faz o estudo de equações cujo grau não era superior a quatro. Uma das equações usadas como exemplo $x^3 = 15x + 4$ se utiliza da fórmula apresentada por *Cardano* e obtém a raiz:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{4 - 125}}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Ele também denomina a raiz representada na expressão como *sofística* e percebe ainda que $x = 4$ é de fato uma raiz da equação proposta. E apesar dos radicais de números negativos há uma solução para a equação que propôs. Faz-se necessária a compreensão do fato:

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3$$

Sendo:

$$\left(\sqrt{-1}\right)^3 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{-1}\right) = -\sqrt{-1}$$

Então:

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1}$$

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$$

$$\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

Logo, retomando a equação percebeu que:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$$x = \left(2 + \sqrt{-1} \right) + \left(2 - \sqrt{-1} \right) = 4$$

E realmente, ao substituirmos na equação, percebemos a validade da resposta:

$$x^3 - 15x - 4 = 0 \Rightarrow 4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$$

Ele notara a clara importância do seu achado e diz:

> "Eu achei uma espécie de raiz cúbica muito diferente das outras, que aparece no capítulo sobre o cubo igual a uma quantidade e um número.
> ... A princípio, a coisa toda me pareceu mais baseada em sofismas que na verdade, mas eu procurei até que achei uma prova... .
> Isto pode parecer muito sofisticado, mas, na realidade, eu tinha essa opinião, e não pude achar a demonstração por meio de linhas [i.e.geometricamente], assim, tratarei da multiplicação dando as regras para mais e menos."

As dificuldades para escrita da época eram evidentes, por exemplo, a expressão encontrada acima $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$ era escrita na forma $R^3\ |2pR|0 - 121||$, sendo R *radix* para raiz quadrada, p *plus* para indicar a soma e R^3 para raiz cúbica.

O trabalho de *Bombelli*, foi extremamente importante para os estudos posteriores de tais números, sendo os números complexos utilizados para resolver equações de terceiro grau, porém haveria uma contradição eminente sobre a não existência destes números. O primeiro a admitir, para raízes imaginárias, uma associação e construção com elementos geométricos foi o inglês *John Wallis* (1616-1703), geômetra, professor da universidade de Oxford. Em sua obra *Tratado de Álgebra* (1685), o mesmo constava sua nova perspectiva, cap. LXVI (Vol. II, p.286) na versão em latim. Esta já tinha sido relatada em uma carta endereçada a *John Collins*, datada em 6 de maio de 1673, a qual consta uma construção ainda diferente das encontradas em seu livro. *Wallis* ao fim de um problema apresentado em seu livro conclui:

"Não podemos dizer que é 40, nem -40... Mas sim que é $\sqrt{-1600}$ (a suposta raiz de um quadrado negativo) ou $10\sqrt{-16}$ ou $20\sqrt{-4}$ ou $40\sqrt{-1}$."

Devido à época, essa conclusão não foi explorada e nem teve a repercussão por parte dos seus contemporâneos.

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), dedicado à Matemática, apesar de ter estudado medicina e direito inicialmente, focou-se em álgebra, em equações diferenciais, ordinárias e parciais, nas aplicações do cálculo e nas funções de variáveis complexas, mecânicas e dinâmicas. No ano de 1747, publicou em sua obra *Reflexións sur Ia cause générale des vents* que expressões algébricas referentes aos números complexos são da forma $a + b\sqrt{-1}$. Porém, sem formular uma prova mais satisfatória para outras expressões como da forma $(a + bi)^{(c+di)}$, o que posteriormente seria estudado por *Euler*.

Abraham De Moivre (1667-1754), nascido na França e tendo ido morar na Inglaterra desde os 18 anos de idade, estudou sozinho Matemática baseado na obra *Principia* de *Newton*, teve seu foco de trabalho em trigonometria, probabilidade e cálculo de anuidades. Teve seus trabalhos publicados pela primeira vez em 1707, dando continuidade apenas em 1722 aos seus estudos e trabalhos de quinze anos atrás, quando chegou às fórmulas usadas nos livros didáticos atuais, *a Primeira e Segunda fórmulas de De Moivre,* utilizadas para a radiciação e potenciação dos números complexos, que serão demonstradas e citadas de forma mais abrangente nas seções a seguir. Seu estudo se restringiu à casos particulares, sem nunca enunciar ou demonstrar os casos gerais de tais fórmulas.

A demonstração acima coube a *Leonhard Euler* (1707-1783), em 18 de outubro de 1740, endereçou uma carta a *Jean Bernoulli* afirmando que "$y = e^{ix} + e^{-ix}$ e $y = 2cos\varphi$ eram soluções de uma mesma equação diferencial" e em 1743 publicou o resultado:

$$cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \; e \; sen\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$$

Em 1748, demonstrou a fórmula de *De Moivre* e estendeu a validade do seu resultado para todo expoente real *n*. Sendo assim, a existência de raízes no campo complexo se estabeleceu de forma definitiva. A compreensão de Euler sobre os complexos era bastante direta, tão como sua utilização, apesar dos desafios que tal conjunto numérico apresentava à época para ele e seus contemporâneos. Se auto questionava sobre a legitimidade de tais números, o que pode ser notado em um trecho da sua obra *Vollstándige Anleitung zur Algebra, de 1768*, em que relatou:

> "... a raiz quadrada de um número negativo não pode ser incluída entre os números possíveis. Consequentemente, devemos dizer que esses são números impossíveis. E essa circunstância nos conduz a tais números, que por sua natureza são impossíveis, e que são chamados costumeiramente de imaginários, pois eles só existem na imaginação."

Segundo JÚNIOR, 2009, a atual representação geométrica dos números complexos é atribuída ao norueguês *Caspar Wessel* (1745-1818), sendo reconhecido como o primeiro a ter apresentado as regras para esta tal composição. Em 1797 apresentou ao *Royal Danish Academy of Sciences and Letters* seu trabalho, em dinamarquês, que fora publicado apenas após dois anos no jornal da academia. A sua proposta está baseada em uma evidente consideração em que a variação de direção oriunda das operações algébricas também poderia e deveria ser representada por símbolos. *Wessel* não tinha pretensões em desconectar a Álgebra da Geometria. Embora continuasse fiel ao espírito cartesiano, para ele, a geometria analítica trazia a aplicação da Álgebra à Geometria, vista como uma ideia moderna à época. De início, não havia diferenças relevantes em relação ao trabalho de Descartes, somente restavam dúvidas em relação a apresentação, por exemplo, do produto $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Na pesquisa para uma "realização geométrica" dos objetos contestados, o suíço *Jean-Robert Argand* (1768-1822) teve uma intuição muito similar à de *Wessel*. Seu trabalho é visto como o mais esclarecedor na representação das quantidades imaginárias. Apesar de modesto pesquisador, sua obra contribuiu como uma das grandes descobertas do século XIX, as quais são citadas até os dias atuais em todos os livros didáticos que abordam o tema números complexos, títulos como "representações de *Argand* e "plano de *Argand*" nos remetem à grande relevância de seu trabalho. Muitos matemáticos de grande renome, das mais diversas nacionalidades o descrevem como o verdadeiro "engenheiro" desta nobre e importante descoberta. O reconhecimento não ocorreu de forma imediata, devido à simplicidade dos exemplos fornecidos por *Argand*, através de peso, capital e temperatura.

Carl Friederich Gauss (1777-1855) foi o real responsável por ampliar a aceitação da interpretação geométrica destes números. Desde 1815, já conhecia a representação gráfica dos complexos embasado pelo seu conhecimento em relação a demonstração do Teorema fundamental da Álgebra.

Porém, como ficariam números que tivessem partes além das tais imaginárias? Como representá-los? Gauss trouxe a forma bidimensional a estes números, através do plano cartesiano complexo, no qual todo complexo poderia ser representado através de um par de coordenadas. Em 1831, escreve um artigo referindo-se aos matemáticos ainda receosos sobre a existência de tais números: *"O significado intuitivo dos números complexos fica completamente estabelecido e não se precisa mais para admitir estas quantidades no domínio da aritmética."*.

Este conceito matemático fundamentado dentre séculos de pesquisas, possui seus colaboradores até chegar na abordagem atual. Seguem alguns abaixo, em distintos países e momentos, relevantes para tal conteúdo:

Tartaglia (1500-1557)	•Descobriu uma fórumula geral para resolver equações do tipo $x^3 + px + q = 0$; •Não publicou a sua descoberta.
Cardano (1501-1576)	•Publicou em sua obra Ars Magna a fórmula de Tartaglia.
Bombelli(1506-1573)	•Seguiu os estudos de Cardano; •Escreveu, baseado em Cardano, sua obra l'Algebra que se tornou bastante relevante; •Considerou a raiz quadrada de -1 como um número imaginário; •Desenvolveu regras para trabalhar com esse número.
Euler (1707-1783)	•Usou pela primeira vez a notação i para representar a raiz quadrada de -1; •Demonstrou a fórmula de De Moivre.
Gauss (1777-1855)	•Estudou a representação geométrica dos números complexos; •Em 1832, introduziu a expressão "números complexos" para designar esses números.

Figura 1 – Tabela 1: Resumo período histórico

2.2. A Matemática dos Números Complexos

Esta seção procura diferenciar os trabalhos já escritos sobre o tema em questão, com uma linguagem mais simples, e procura como público alvo professores que não trabalham tal assunto por limitações de não o terem visto no seu ensino médio regular nem tampouco na graduação. Para a abordagem a seguir será utilizado o conceito de vetores, assunto pouco trabalhado nas aulas de Matemática e mais usual nas aulas de Física. Serão apresentadas também as definições referentes aos números complexos.

<u>Definição 1</u>: Define-se o vetor determinado por um segmento orientado AB é o conjunto de todos os segmentos orientados equipolentes a AB.

$$\vec{v} = \{XY / XY \sim AB\}, XY \text{ é } um\ segmento\ qualquer\ do\ conjunto.$$

O vetor determinado por AB é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou $B - A$ ou $\vec{v}$.

Um mesmo vetor $\overrightarrow{AB}$ é determinado por uma infinidade de segmentos orientados, denominados *representantes* desse vetor, sendo todos equipolentes entre si.

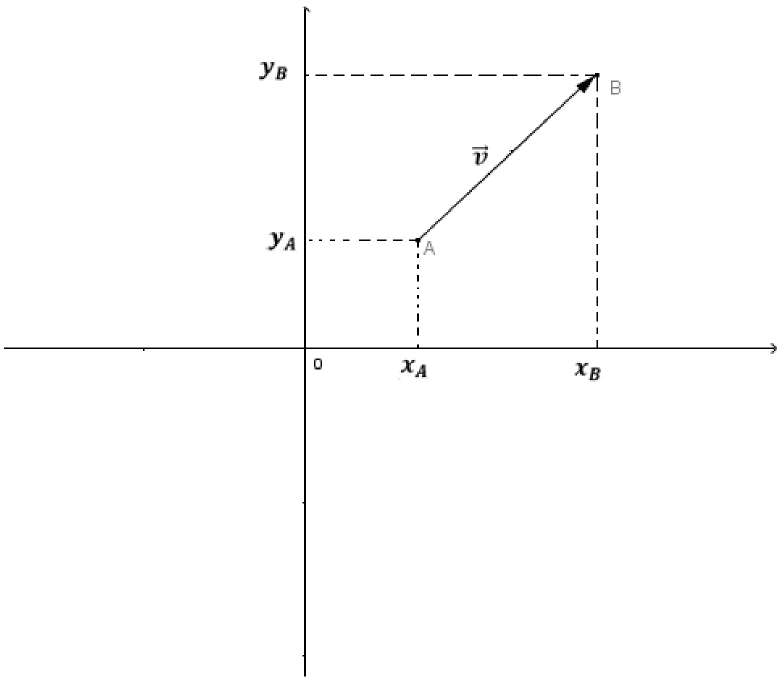


Figura 2 – Representação de um vetor dados os extremos

A partir das coordenadas de um vetor é satisfatório que tomemos o ponto A como origem do sistema de coordenadas cartesianas, definindo-o por $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$, sendo O a origem $(A \equiv O)$ e P um ponto qualquer de R^2.

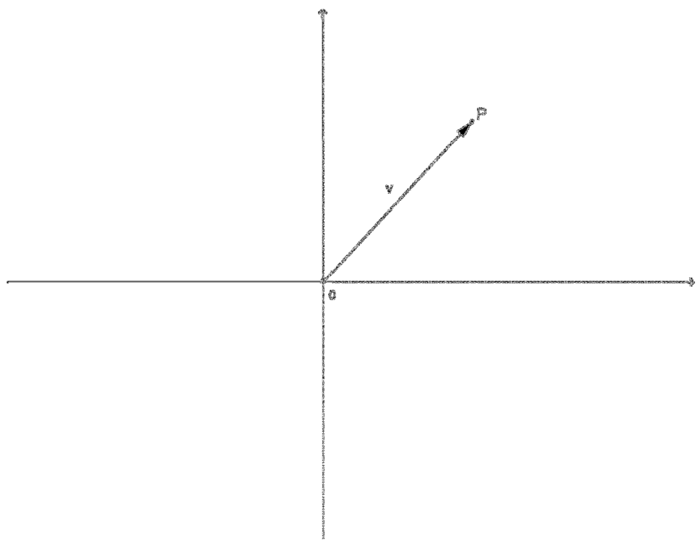


Figura 3 – Representação genérica de um vetor no plano cartesiano

Da definição acima, todo vetor possui módulo, obtido cartesianamente a partir do cálculo da distância entre dois pontos dados do plano, sendo o módulo a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos previamente conhecidos. Em $\overrightarrow{OP} = (a, b)$, os catetos são $a \; e \; b$, logo o módulo de $\vec{v}$ é definido por $|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, calculado através do Teorema de Pitágoras, cujo *quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos*.

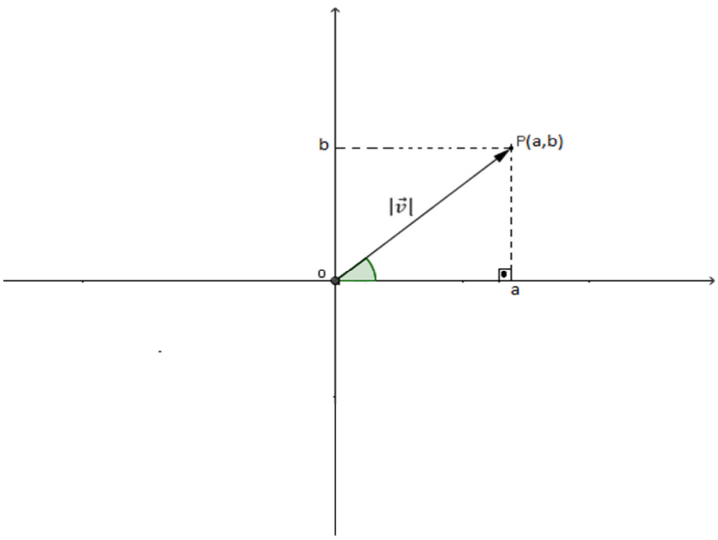


Figura 4 – Módulo de um vetor

<u>Definição 2</u>: $\mathbb{C}$ é o conjunto dos elementos da forma $a + bi, a \in \mathbb{R} \; e \; b \in \mathbb{R}$, munido das operações de soma e produto. Sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, tem-se:

S: $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$

P: $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$

Observações:

I. Um número complexo é um número da forma $z = a + bi$, onde a, b são números reais chamados, respectivamente, parte real e parte imaginária de z e i é dita unidade imaginária.

II. A definição de cada uma das operações é motivada pelas propriedades dos reais, considerando $i^2 = -1$.

Adição: $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$

$$\boxed{\boldsymbol{z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i}}$$

Multiplicação: $z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di)$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + ad \cdot i + bc \cdot i + bd \cdot i^2, \qquad com\ \mathbf{i^2 = -1}$$

$$\boxed{\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}}$$

III. O simétrico de um número complexo z é dado por $-z = -a - bi$.

IV. A subtração de dois números complexos, $z_1\ e\ z_2$, é dada por:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

Definição 3: Dado um número complexo $z = a + bi$, definimos o seu conjugado como sendo o número $\bar{z} = a - bi$.

Observações:

V. O produto entre um complexo z e seu conjugado $\bar{z}$ é:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in R$$

Proposição: Todo número complexo $z \neq 0$ possui inverso z^{-1} dado por:

$$\boxed{z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

Demonstração:

Sejam os números complexos $z_1 = a + bi \; e \; z_2 = x + yi$, tais que $z_1 \cdot z_2 = 1$. Logo:

$$(a + bi) \cdot (x + yi) = 1$$
$$(ax - by) + (ay + bx)i = 1$$
$$(ax - by) = 1 \; e \; (ay + bx) = 0$$

Uma das fórmulas de solucionar esse sistema será utilizando-se a *Regra de Cramer*, cuja matriz será:

$$\begin{cases} ax - by = 1 \\ bx + ay = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{matrix} a & -b \\ b & a \end{matrix} \;\vdots\; \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Sendo os determinantes $\Delta, \Delta x, \Delta y$ dados por:

$$\Delta = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2$$
$$\Delta x = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a$$
$$\Delta y = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b$$

A solução do sistema $S = \{\left(\frac{\Delta x}{\Delta}, \frac{\Delta y}{\Delta}\right)\}$:

$$S = \{\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right)\}$$

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \ e \ y = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

O inverso (z_1^{-1}) representado por $z_2 = x + yi$ será:

$$z_2 = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}\ i$$

$$z_2 = \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2}$$

■

VI. A divisão de dois números complexos, $z_1 \ e \ z_2$, é dada por:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{\sqrt{|z_2|}}}$$

<u>Observação</u>: Assim como na definição das operações de soma e multiplicação, aqui é possível obter a divisão por intermédio das propriedades dos reais, considerando $i^2 = -1$:

$$z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{\mathrm{z_1}}{\mathrm{z_2}} = \frac{\mathrm{a + bi}}{\mathrm{c + di}}$$

Multiplicando-se o numerador e o denominador da fração pelo conjugado do denominador, obtém-se:

$$\frac{\mathrm{z_1}}{\mathrm{z_2}} = \frac{\mathrm{a + bi}}{\mathrm{c + di}} \cdot \frac{\mathrm{c - di}}{\mathrm{c - di}}$$

$$\frac{\mathrm{z_1}}{\mathrm{z_2}} = \frac{\mathrm{(ac - ad \cdot i) + (bc \cdot i - bd \cdot i^2)}}{\mathrm{c^2 - d \cdot i^2}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{z_1}}{\mathrm{z_2}} = \frac{\mathrm{(ac + bd) + (bc - ad)i}}{\mathrm{c^2 + d^2}}}$$

Essa é a forma mais utilizada pelos livros didáticos e respectivamente pelos docentes da educação básica, vista como mais acessível no universo dos alunos.

2.2.1. A Geometria dos Números Complexos

Geometricamente, um número complexo $z = a + bi$ pode ser representado por um ponto no plano cartesiano, cujas coordenadas são dadas por (a, b). Sendo assim podemos identificar o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos com o conjunto $\mathbb{R}^2$. Além disso, tomando-se P por (a, b), temos o vetor $\vec{z} = \overrightarrow{OP} = (a, b)$.

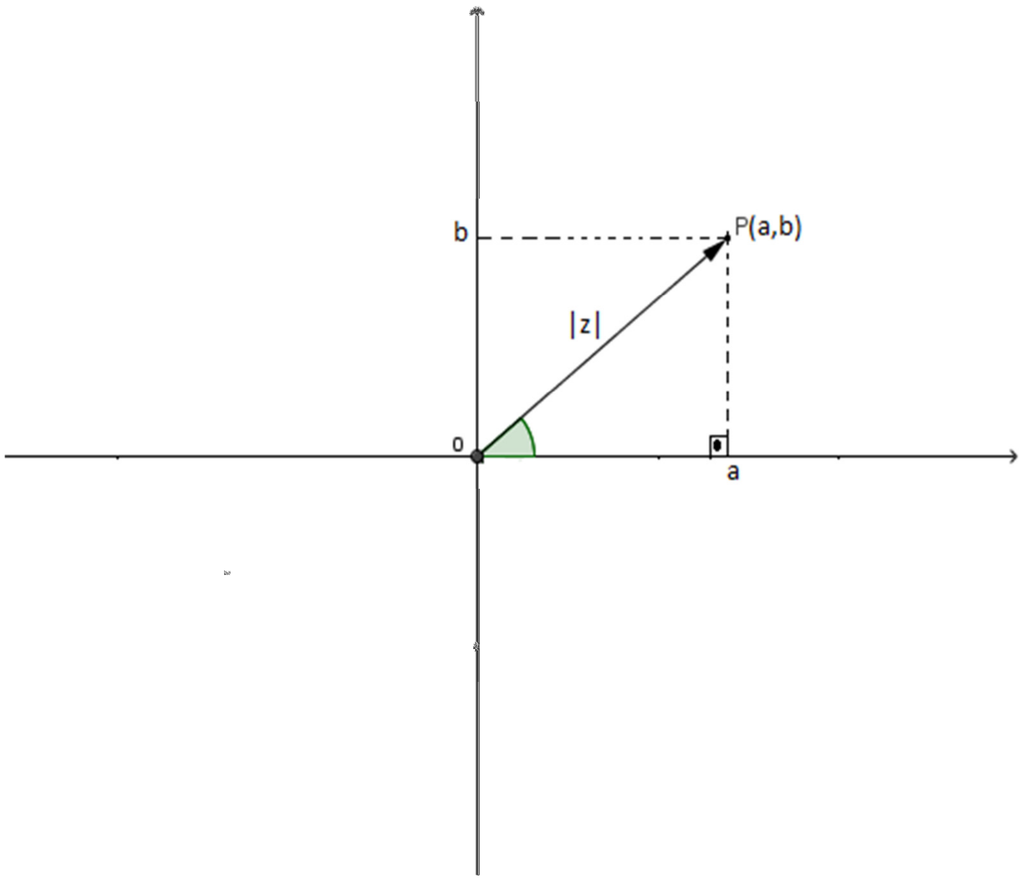


Figura 5 – Representação geométrica de um número complexo

A partir da representação acima, sejam os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$. Assim, tem-se:

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$$

$$z_1 - z_2 = (a - c, b - d)$$

Obtém-se $|z|$ através do *Teorema de Pitágoras*, sendo $|z|^2 = a^2 + b^2$ e a partir da *observação VI,* conclui-se que:

$$\boxed{|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$$

Afinal faz sentido, pois o produto $z \cdot \bar{z}$ é real, como visto acima e por isso o módulo $|z| \in \mathbb{R}^+$.

Define-se a partir de $\vec{z}$, $\vec{\bar{z}}$ como conjugado do vetor $\vec{z}$. Tomando-se os dois vetores a partir da mesma origem, têm-se um triângulo isósceles de base 2b e altura a. Denomina-se o módulo dos vetores citados pela letra grega $\boldsymbol{\rho}$. É possível obter através de uma rotação vertical em relação ao eixo das abscissas.

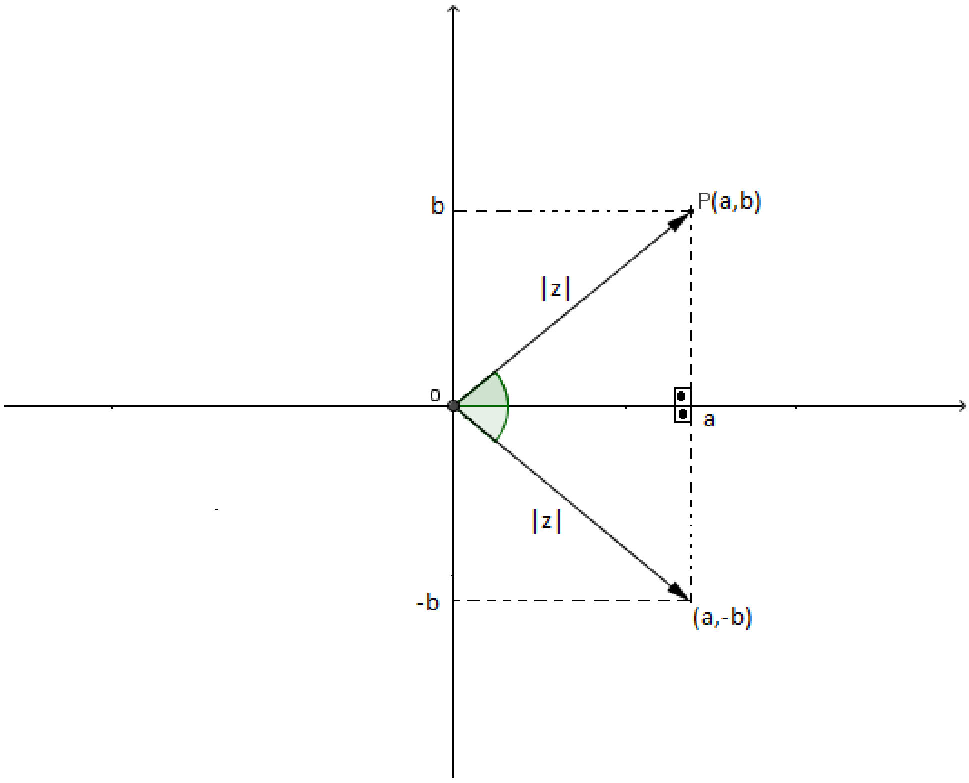


Figura 6 – Representação do número complexo e seu conjugado

A partir da representação de complexos por pontos pertencentes ao plano, temos que a adição e subtração de dois ou mais complexos dá-se por vetores construídos a partir da origem do plano. Por exemplo, dados os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, constrói-se $\vec{u}$ a partir da origem, obtém-se $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ através da translação de $\overrightarrow{v}$ em relação também à origem. Sendo a soma de vetores obtida no plano através da *regra do paralelogramo* ao se colocar os dois vetores através da mesma origem, toma-los como lados de um paralelogramo e o vetor soma resultante será a diagonal desse paralelogramo. Outra maneira de obter a soma vetorial é através da construção de um triângulo colocando-se a origem de um vetor sobre a extremidade do outro e o vetor resultante é obtido através da origem do primeiro e extremidade do último, independente da ordem, afinal a soma vetorial é comutativa, isto é, $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Abaixo a soma está sendo construída através da *regra do paralelogramo:*

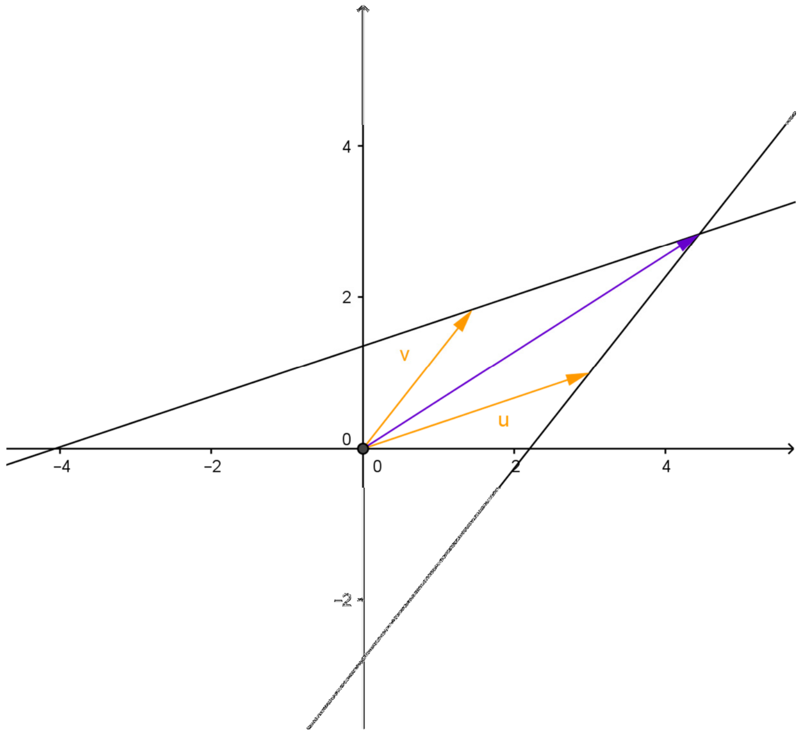


Figura 7 – Representação geométrica da adição de vetores

A diferença de vetores é feita de maneira análoga, o vetor $\vec{u} - \vec{v}$ é obtido após a construção de $\vec{u}$ a partir da origem e o vetor $-\vec{v}$, dado $\vec{v} = (c, d)$, temos que $-\vec{v} = (-c, -d)$, simétrico em relação à origem.

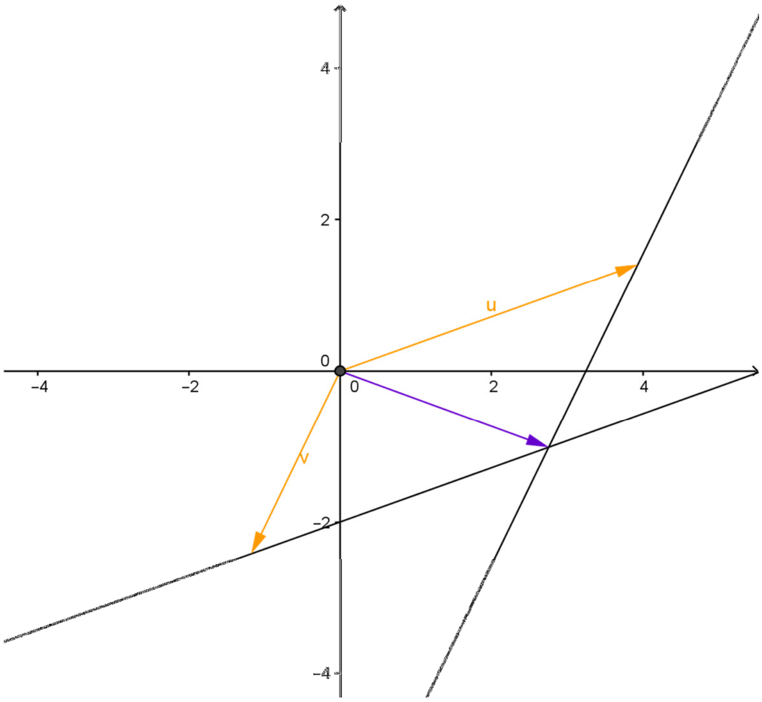


Figura 8 – Representação geométrica da subtração de vetores

Em ambos os casos acima, utilizou-se tanto para a soma $(\vec{u}+\vec{v})$ quanto para a diferença $(\vec{u}-\vec{v})$, a regra do paralelogramo para adicionar vetores em plano cartesiano, na qual os vetores dados são os lados de um paralelogramo e a resultante é obtida através de sua diagonal.

Definição 4: Dado um número complexo $z = a + bi$, define-se a forma trigonométrica ou polar como sendo a representação

$$z = \rho \cdot (cos\theta + i \cdot sen\theta) \equiv \rho \cdot (cis(\theta)).$$

Define-se por *argumento* de z, o ângulo θ, obtido a partir do eixo horizontal, no sentido anti-horário, medido até o vetor $\vec{z}$, conforme a circunferência trigonométrica e seus respectivos ângulos e quadrantes. E o seu *módulo* $|z|$ será representado, em muitas demonstrações e operações, pela letra grega ρ. A partir do mesmo temos o cateto adjacente ao ângulo reescrito por $\boxed{\rho \cdot cos\theta}$ e o cateto oposto por $\boxed{\rho \cdot sen\theta}$, tomando-se o novo par de coordenadas $\boxed{(\rho \cdot cos\theta, \rho \cdot sen\theta)}$.

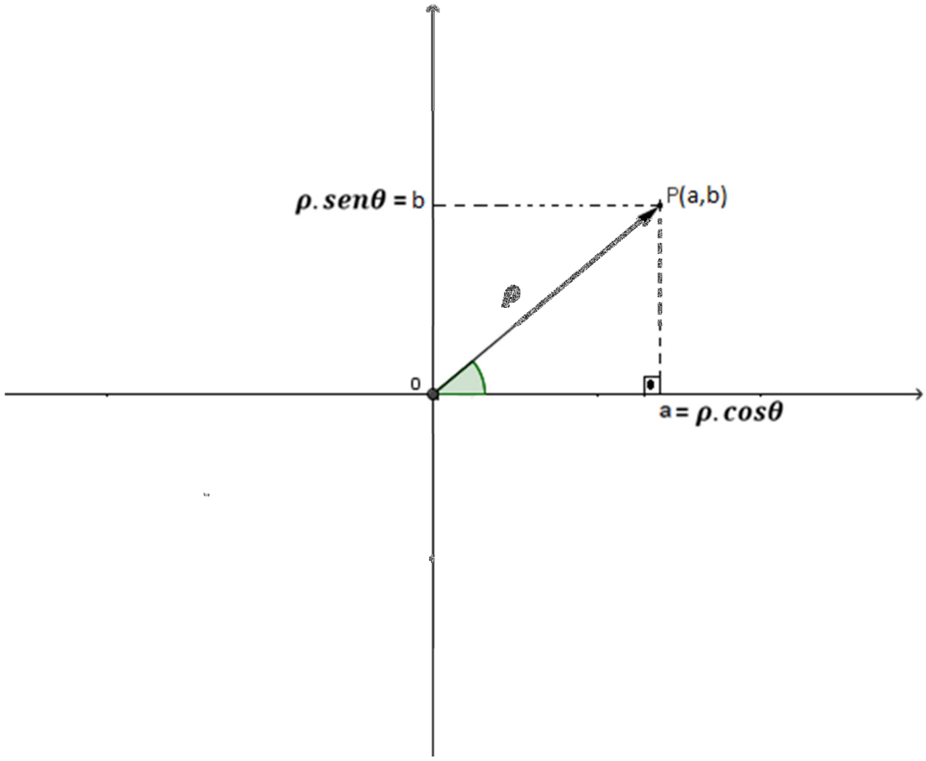


Figura 9 –Representação geométrica das coordenadas polares do número complexo z

Para representar geometricamente as operações de multiplicação e divisão, vamos utilizar a forma polar dos números complexos, dada por

$$z_1 = \rho_1 (\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\theta_1) \quad \text{e} \quad z_2 = \rho_2 (\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\theta_2).$$

<u>Multiplicação</u>

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 (\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\theta_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2[(cos\theta_1 cos\theta_2 - sen\theta_1 sen\theta_2) + i(sen\theta_1 cos\theta_2 + cos\theta_1 sen\theta_2)]$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1\rho_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sen(\theta_1 + \theta_2)]}$$

Na última igualdade foram utilizadas as fórmulas de adição de arcos:

$$sen(a + b) = sen(a). cos(b) + sen(b). cos(a)$$

$$cos(a + b) = cos(a). cos(b) - sen(a). sen(b)$$

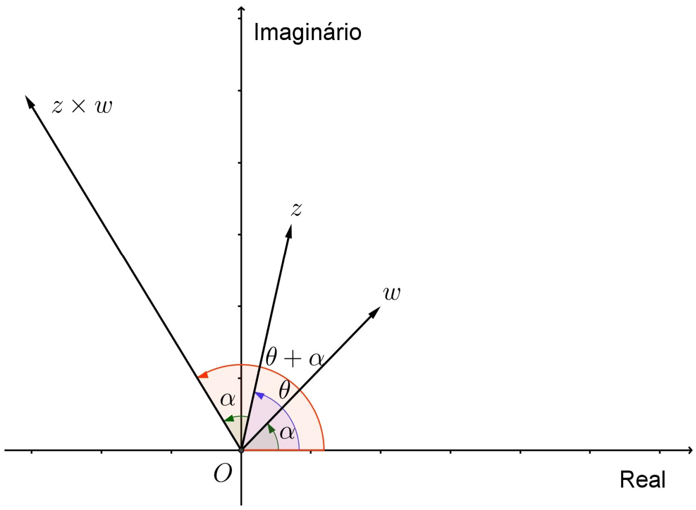


Figura 10 – Representação do plano cartesiano contendo a multiplicação de dois números complexos

Inverso

Para um caso particular, se $|z| = 1$, então o inverso de z é o seu conjugado.

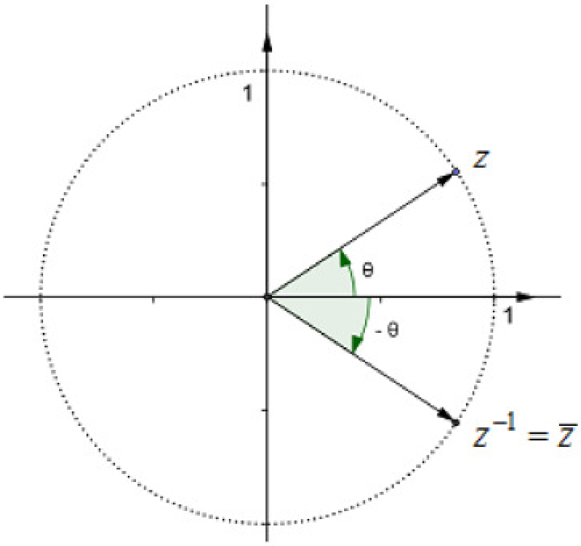


Figura 11 – Representação do número complexo z e seu inverso z^{-1} no plano cartesiano limitados por uma circunferência de raio unitário

Divisão

O quociente $\frac{z_1}{z_2}$, sendo $z_2 \neq 0$, é definido através do produto de z_1 pelo inverso de z_2:

$$\boxed{z_1 \cdot z_2^{-1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 . \overline{z_2}}{|z_2|^2}}$$

E pode ser representada também da seguinte forma:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 \, (\, cos\theta_1 + i \; sen\theta_1)}{\rho_2 \, (\cos \theta_2 + i \; sen \; \theta_2)}$$

De maneira análoga, faz-se a racionalização do denominador e obtém-se:

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \, (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \; sen(\theta_1 - \theta_2))}$$

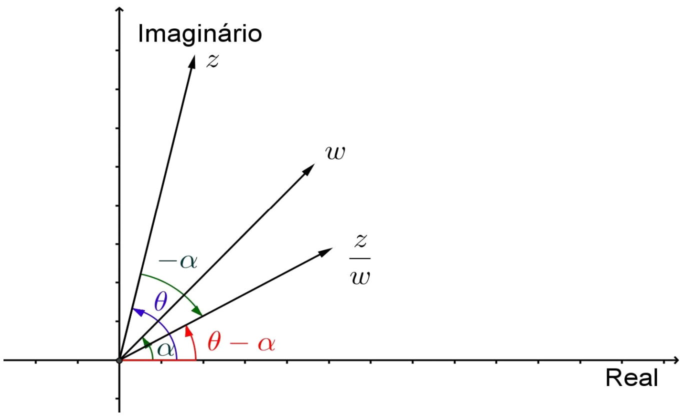


Figura 12 – Representação do plano cartesiano contendo a divisão de dois números complexos

As aplicações geométricas sobre o plano e as fórmulas foram inicialmente construídas, com exemplos simples, pelo matemático francês *Abraham de Moivre* $(1667 - 1754)$ e posteriormente por *Euler*.

2.2.2. A primeira fórmula de De Moivre

$$\boxed{z^n = \rho^n \, (\cos(n\theta) + i \cdot sen(n\theta))}$$

Prova:

Será realizada a demonstração por indução.

Para **$\mathbf{n = 1}$** ***:***

$$z^1 = \rho^1 \cdot cis(1 \cdot \theta) = \rho \cdot cis\,\theta$$

Como hipótese de indução, suponha que a fórmula seja válida para $n = k$, isto é,

$$z^k = \rho^k \cdot cis(k \cdot \theta) = \rho^k\,[cos(k \cdot \theta) + i \cdot sen(k \cdot \theta)]$$

Então, tem-se para $\boldsymbol{n = k + 1}$ **:**

$$z^{k+1} = \rho^{k+1} \cdot cis[(k+1) \cdot \theta]$$
$$z^{k+1} = z^k \cdot z^1$$
$$z^{k+1} = \rho^k \cdot cis(k \cdot \theta) \cdot \rho \cdot cis\,\theta$$
$$z^{k+1} = \rho^k \cdot \rho \cdot cis(k \cdot \theta + \theta)$$
$$z^{k+1} = \rho^{k+1} \cdot cis[(k+1)\theta]$$

■

Para ***n inteiro e negativo***:

Seja k, inteiro e positivo, tal que $\boldsymbol{n = -k}$:

$$z^n = (\rho \cdot cis\theta)^n = (\rho \cdot cis\theta)^{-k} = \frac{1}{(\rho \cdot cis\theta)^k}$$
$$= \frac{1(cos0 + isen0)}{\rho^k \cdot cis(k \cdot \theta)}$$
$$= \rho^{-k} \cdot cis(0 - k \cdot \theta)$$
$$= \frac{1}{\rho^k}\,cis(-k \cdot \theta)$$
$$= \rho^n \cdot cis(n \cdot \theta)$$

■

2.2.3. A segunda fórmula de De Moivre

$$w^n = z, então\ w = \sqrt[n]{\rho} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta+360°\cdot k}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta+360°\cdot k}{n}\right)\right),$$
$$onde\ \ k\ \in \mathbb{N}, 0\ \leq k\ < n.$$

Segue a demonstração da mesma:

Seja $z = \epsilon\ \cdot\ cis\alpha$:

$$z^n = \ (\epsilon\ \cdot\ cis\alpha)^n = \ \rho \cdot cis\theta$$

Ao aplicar a primeira fórmula de *De Moivre* ao primeiro membro desta equação, temos:

$$\epsilon^n \cdot cis(n \cdot \alpha) = \ \rho \cdot cis\theta$$

Para que dois complexos na forma trigonométrica sejam iguais, é necessário e suficiente que tenham argumentos congruentes e módulos iguais:

$$\epsilon^n = \rho => \ \epsilon = \sqrt[n]{\rho}\ \ e\ \ n \cdot \alpha = \ \theta + 2k\pi => \alpha = \ \frac{\theta + 2k\pi}{n}\ , k\ \in \mathbb{Z}$$

Sendo assim:

$$\sqrt[n]{\rho \cdot cis\theta} = \ \sqrt[n]{\rho}\ \left(cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \cdot sen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), k \in \mathbb{Z}\ e\ 0\ \leq k\ < n$$

As raízes enésimas de um número complexo não nulo z são n números complexos distintos de mesmo módulo $\sqrt[n]{\rho}$ e os seus argumentos comporão uma progressão aritmética de primeiro termo $\frac{\theta}{n}$. Tomando uma breve interpretação geométrica, dado as raízes enésimas de z , as imagens dessas raízes no plano complexo serão vértices de um polígono regular de n vértices inscrito numa circunferência de raio $\sqrt[n]{\rho}$ e centrados na origem do plano complexo. A explorar a partir desta, questões envolvendo áreas, apótemas e perímetros de polígonos regulares e ainda círculos e circunferências.

Abaixo, a representação das raízes enésimas de z dadas por $w_i, i \in \mathbb{N}$, em uma circunferência de raio $\rho^{\frac{1}{n}}$ e ângulos $\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{360°}{n}, k \in \mathbb{N}$.

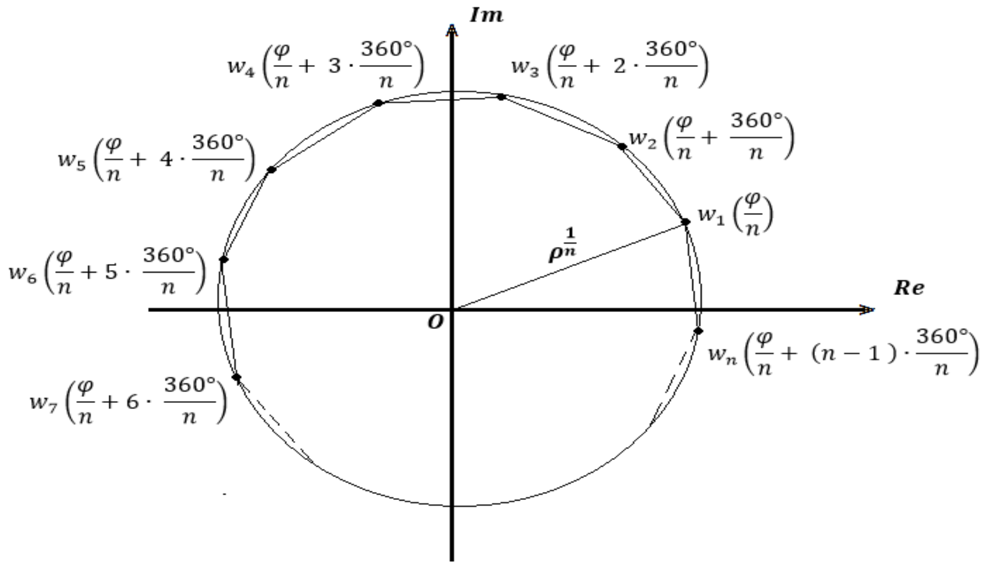


Figura 13 – Representação do plano cartesiano contendo as raízes enésimas obtidas através da 2ª fórmula de *De Moivre*

Diferentemente dos demais conjuntos numéricos, não é possível ordenar os números complexos, ou seja, dizer quem é maior ou menor. Talvez o cálculo de seu módulo poderia representar tal tamanho, todavia esbarraria na condição de termos infinitos complexos de mesmo ''tamanho'' sendo iguais mesmo com escritas distintas, o que seria uma grande contradição.

2.2.4. Rotações a partir de Complexos

Segundo CASTRO, Luciano as rotações obtidas a partir do produto de complexos são as maiores contribuições dos mesmos em relação à geometria.

Teorema: Seja $z \in C$, $\boxed{\boldsymbol{i \cdot z}}$ é o resultado da rotação em torno da origem por um ângulo de 90° no sentido positivo (anti-horário).

Observação:

VII. As potências de i:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$
$$i^3 = -i$$
$$\ldots$$

Tornam-se cíclicos a partir de i^3, geometricamente, como cada potência é obtida da anterior multiplicada por i, então geometricamente nos indica giros de 90°:

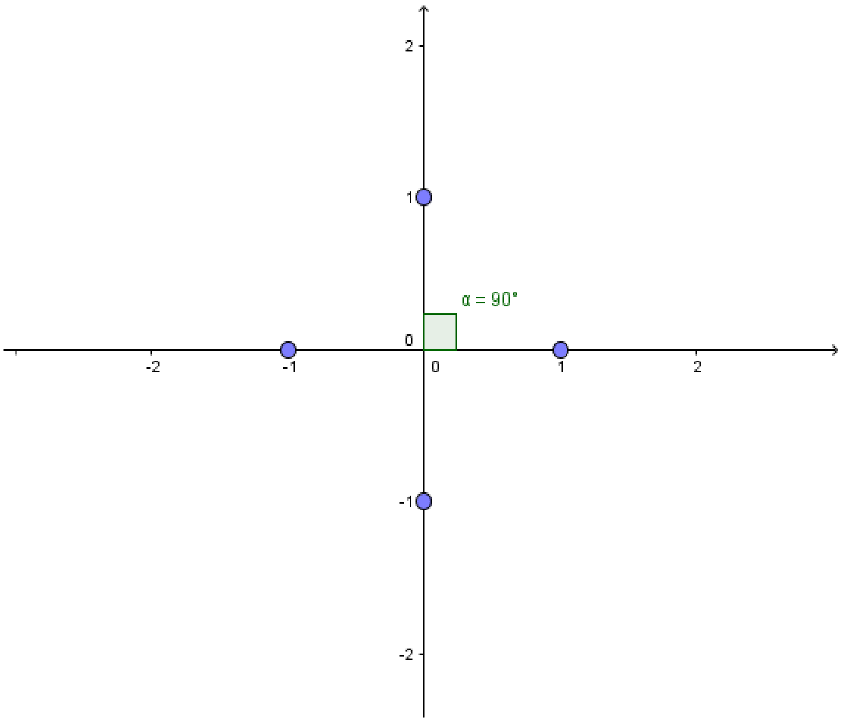


Figura 14 – Representação geométrica do plano contendo os complexos $\{\pm 1\ ;\ \pm i\}$

VIII. Seja o complexo $z' = z.i$:

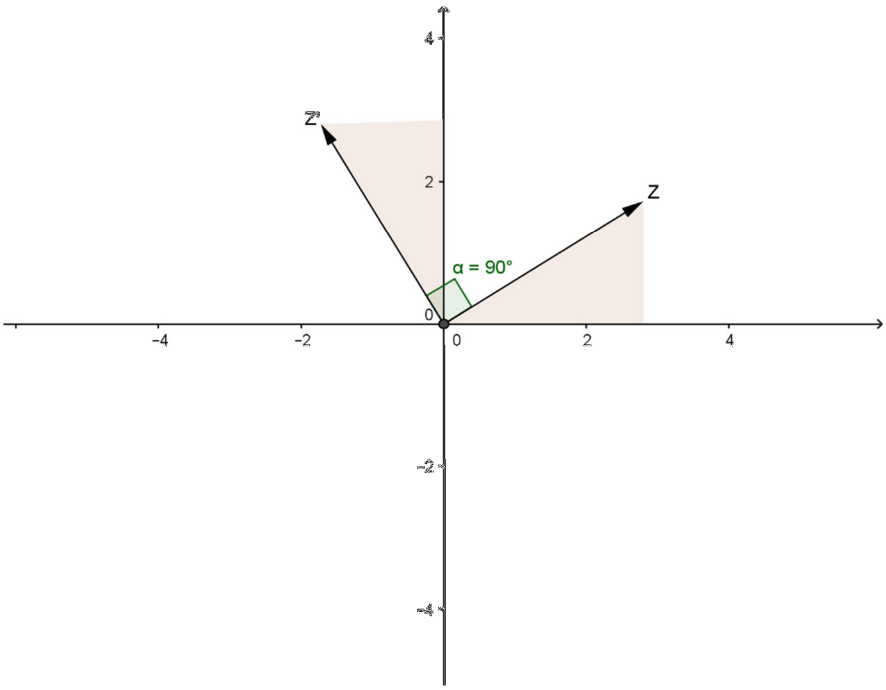


Figura 15 – Representação vetorial de $z' = z \cdot i$

Os triângulos da cor cinza são congruentes, pois seus ângulos são congruentes entre si, no plano cartesiano $z = (a, b)\ e\ z' = (-b, a)$:

$$z = a + bi\ e\ z' = -b + ai$$

Caso sejam feitas as contas, ao considerar as propriedades dos números reais, tem-se:

$$z' = iz = i(a + bi)$$
$$z' = ai + bi^2$$
$$z' = ai - b$$
$$z' = -b + ai$$

2.3. Para que servem os números complexos?

Esta seção traz um questionamento comum às aulas de Matemática, especialmente de Números Complexos. Para que servem? O acesso à informação traz a necessidade de contextualizações constantes durante as aulas, sendo um desafio atual para o docente nas salas de aula do Ensino Básico. Na presente seção, são apresentados alguns exemplos de aplicações para os números complexos.

As aulas de Matemática, em sua maioria, estão pautadas por demonstrações matemáticas seguidas de exercícios resolvidos. Sobre as demonstrações do teoremas e fórmulas, vale uma reflexão, segundo (MATHIAS, p.8):

> "As demonstrações não são atos de certificação de verdades a priori ou a manipulação matemática sem sentido, mas sim resultados obtidos em circunstâncias inerentes ao meio sociocultural e aos desejos do matemático que demonstra. O objetivo final de uma demonstração é dar uma explicação que sobreviva ao crivo do indivíduo, da escola, do meio científico e do meio sociocultural. A sua necessidade, o seu aspecto, o seu tipo e a sua função devem, então, ser determinados pelos próprios meios que a demonstração perpassa. Neste sentido, o verbo demonstrar ganha destaque, em detrimento do substantivo demonstração, situando uma ação fundamental do matemático, que tem início na necessidade e interrupção na suficiência, parâmetros socioculturais."

Além das demonstrações, é importante trazer outras aplicações dos números complexos. É notável o papel importante de tais números na Matemática, em rotações, translações, trigonometria, geometria, além de outras áreas como astronomia, circuitos elétricos, estudo de motores e correntes alternadas. São incontáveis as suas utilidades.

As aplicações dos números complexos se darão muitas vezes através de fórmulas bastante sofisticadas e específicas, as quais perderão sentido caso sejam demonstradas em turmas de ensino médio, por exemplo. Sua apresentação pode ser feita de forma ilustrativa para acrescentar e despertar o interesse dos alunos para estudarem esses números de forma mais profunda posteriormente à esta aula.

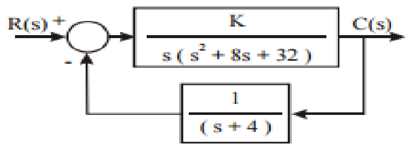
Para engenharia, os números complexos são explorados em áreas como o projeto de controladores que envolve sempre a escolha da localização de pólos e zeros do sistema em malha fechada, que deve ser traduzida através da escolha da estrutura do controlador e dos seus parâmetros (como em controladores P, PI, PD e PID).

O PID (Proporcional-Integral-Derivativo) é o algoritmo de controle mais usado na indústria e tem sido utilizado em todo o mundo para sistemas de controle industrial. A popularidade dos controladores PID pode ser atribuída em parte ao seu desempenho robusto em uma ampla gama de condições de funcionamento e em parte à sua simplicidade funcional, que permite aos engenheiros operá-los de forma simples e direta.

Como o nome sugere, o algoritmo PID é composto por três coeficientes: proporcional, integral e derivativo, que são variados para obter a resposta ideal.

Em um sistema de controle típico, a variável do processo é o parâmetro do sistema que precisa ser controlado como temperatura (ºC), pressão (psi) ou fluido (l/min). Um sensor é usado para medir a variável de processo e fornecer feedback para o sistema de controle. O set point é o valor desejado ou comando para a variável de processo, tais como 100ºC, no caso de um sistema de controle de temperatura.

Veja um exemplo para a montagem de um sistema de controle:

	$1 + G(s)H(s) = 1 + \dfrac{K}{s^4 + 12\,s^3 + 64\,s^2 + 128\,s}$

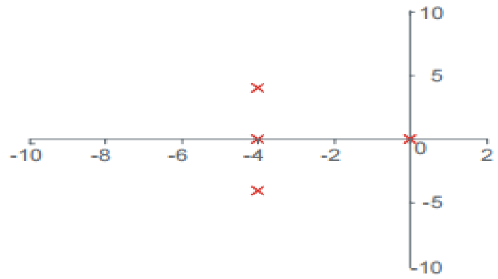
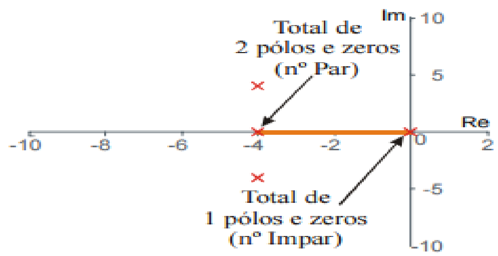
1. Escrever o polinômio característico do modo que o parâmetro de interesse (K) apareça claramente:	$1 + KP(s) = 1 + K\,\dfrac{1}{s^4 + 12\,s^3 + 64\,s^2 + 128\,s}$
2. Fatorar o polinômio P(s) em termos dos n_P pólos e n_Z zeros.	$P(s) = \dfrac{1}{s(s+4)(s+4+4i)(s+4-4i)}$
3. Assinalar os pólos e zeros de malha aberta no plano s com os símbolos correspondentes: **X = Pólos e O = Zeros.** **O LGR começa nos pólos e termina nos zeros.**	
4. Assinalar os segmentos do eixo real que são LGR. **O LGR se situa à esquerda de um número ímpar de pólos e zeros.**	
5. Determinar o nº de lugares separados,	**LS = n_P = 4**
6. LGR é simétrico em relação ao eixo real .	

Figura 16 – Montagem de um sistema de controle:PID

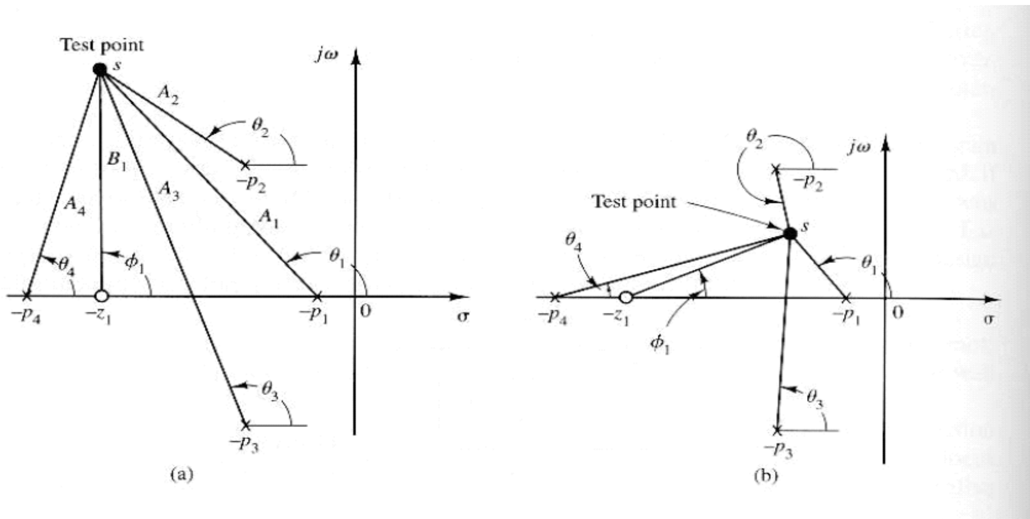


Figura 17 – Representação de dois pontos de teste para a montagem de um sistema de controle

Os itens a e b, na figura, são ângulos de dois pontos de teste em relação os pólos e zeros G(s)H(s).

Como G(s)H(s) é um número complexo, podemos escrever as seguintes equações:

Condição do módulo: $|G(s)H(s)| = 1$.

Condição do ângulo: $\pm 180°.(2k + 1), k \in N$.

Tais números têm aplicações para Aerodinâmica, *Joukowski* (1906) utilizando transformações geométricas, denominadas *transformações conformes*, técnica usada para solucionar problemas com domínios complexos que tem sido utilizada em outras áreas da engenharia, como hidrodinâmica, dinâmica dos fluidos, equações diferenciais parciais, além da própria aerodinâmica. Esta é uma extensão do cálculo de soluções exatas de problemas com valores na fronteira para regiões simples, como círculos, quadrados e anéis e podem ser resolvidas com relativa simplicidade incluindo-se o caso de fronteiras de maior complexidade.

A função adotada é $f(z) = z + \frac{1}{z}$, que representa a soma da identidade com a respectiva inversa multiplicativa. Sendo assim, para a circunferência de raio unitário centrada na origem definida como o conjunto de pontos da forma $z = e^{i\theta}$, $0 < \theta < 2\pi$, tem-se f(z) $f(z) = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta) = 2.Re(e^{i.\theta})$. A circunferência transforma-se em um segmento de reta no eixo real complexo.

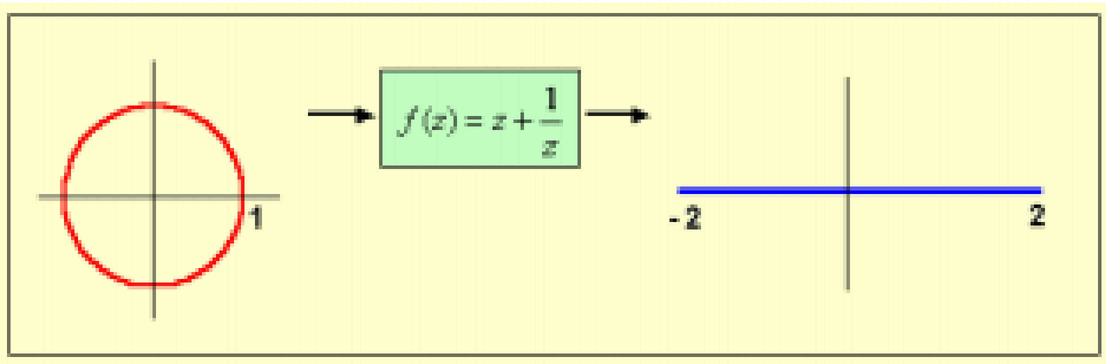


Figura 18 – Transformação da circunferência unitária no conjunto de pontos pertencentes à reta real

A partir desta, podem se construir outras funções e modelos, através de dilatações na circunferência e deslocamentos do centro ao longo do eixo real. Uma das aplicações das transformações conformes, desenvolvida por *Joukowski*, foi o desenvolvimento da teoria de aerofólios usando função de variável complexo, através do deslocamento do centro da circunferência no plano complexo. Aplicando a transformação de *Joukowski* nos modelos matemáticos de aerofólios sobre um cilindro (ou círculo no caso bidimensional), os engenheiros aeronáuticos estabelecem previsões das forças de sustentação e arrasto nas asas de um avião cujas seções transversais possuem certas formas de aerofólios, que permite calcular a força do levantamento responsável pela sustentação do voo de um avião.

Em outras áreas, como na eletrônica e eletricidade, a análise de circuitos de correntes alternadas é feita com a ajuda de números complexos. Grandezas como a potência aparente (medida em volt-ampère) e a impedância (medida em ohms) são dois exemplos de quantidades complexas. A impedância, por exemplo, quando escrita na forma complexa, respectivamente na forma polar, seu argumento (ângulo) representa a defasagem entre a corrente aplicada e a corrente no circuito e o seu módulo representa a resistência elétrica. Já a potência aparente, quando representada na forma complexa polar, seu argumento descreve a defasagem entre a tensão e a corrente, sendo o cosseno deste ângulo importante na determinação do aproveitamento de energia que está sendo gasta. É importante observar que, na Física e Engenharia, quando representamos um número complexo, usamos j ao invés de i para representar a unidade imaginária, pois para estas duas áreas, i representa a corrente elétrica.

Como o corpo dos números complexos facilita desenhar ou modelar qualquer forma da natureza, como a geometria fractal (formas geométricas de dimensão fracionária, que servem para descrever formas irregulares da superfície terrestre, além de modelar fenômenos imprevisíveis aparentemente), numa tela de computador (computação gráfica), pode-se dizer que estes têm sua função, além da engenharia, também na biologia.

3. Capítulo 2 – Os Números Complexos e a Educação Básica

Os números complexos, segundo os parâmetros curriculares, são facultativos na educação básica, sendo assim estão presentes em algumas ementas e planejamentos escolares e excluídos em outras.

A seguir, no presente capítulo, ao longo das seções serão apresentados os números complexos sob os pontos de vista dos *Parâmetros curriculares nacionais (PCN's)* e das *Orientações curriculares para o Ensino Médio*, a análise de quatro livros didáticos utilizados amplamente no ensino médio e por último a visão dos docentes, que atuam nas redes pública e privada, através de um questionário respondido pelos mesmos, para avaliar a atual abordagem nas diferentes escolas em suas distintas realidades.

3.1. Ensino dos Números Complexos

Os números complexos são ensinados atualmente ao final do terceiro ano do ensino médio na maioria das escolas e em alguns casos deixado de fora das ementas curriculares. Esta linha facultativa é defendida nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (p.93 e 94):

> "Outro tópico que pode ser tratado como tema complementar é o estudo mais aprofundado dos números complexos. Por um lado, podem-se explorar os aspectos históricos da introdução dos números complexos e de seu papel fundamental no desenvolvimento da álgebra. Por outro lado, podem-se explorar as conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano."

Segundo os *PCN's*, o ensino da Matemática deve contribuir para aplicação dos conteúdos ensinados em situações cotidianas, nos mais variados contextos entre outras áreas do conhecimento, além do desenvolvimento de estratégias que o guiem até mesmo em suas atividades profissionais presentes ou futuras, independente da sofisticação dessas técnicas:

> "Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver

problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais.

No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional. Não se trata de os alunos possuírem muitas e sofisticadas estratégias, mas sim de desenvolverem a iniciativa e a segurança para adaptá-las a diferentes contextos, usando-as adequadamente no momento oportuno."

A inspiração deste trabalho se deu, pela importância que foi dada a este conteúdo pelos professores que tive no Ensino Médio regular entre os anos de 2005 a 2007 ao citarem, por exemplo, a utilização de tais números na engenharia e que seus estudos poderiam ser aprofundados e ampliados.

Tal assunto me despertou o interesse para pesquisá-lo e expor ao longo desta dissertação e ao questionar a ausência do mesmo nas salas de aula atuais foram encontradas algumas explicações, como por exemplo, um quadro contido em PCN+ traduz bem essa ausência ao mostrar que o conteúdo é facultativo e não faz parte da ementa obrigatória das turmas de ensino médio, desde a primeira à terceira série, ao dar ênfase apenas a outros assuntos a serem abordados.

1ª série	**2ªsérie**	**3ªsérie**
• Noção de função; funções analíticas e não analíticas; análise gráfica; sequências numéricas; função exponencial ou logarítmica.	• Funções seno, cosseno e tangente. • Trigonometria do triângulo qualquer e da primeira volta	• Taxas de variação de grandezas

• Trigonometria no triângulo retângulo		
• Geometria plana: semelhança e congruência; representações de figuras	• Geometria espacial: poliedros; sólidos redondos; propriedades relativas à posição; inscrição e circunscrição de sólidos. • Métrica: áreas e volumes; estimativas	• Geometria analítica: representações no plano cartesiano e equações; intersecção e posições relativas de figuras.
• Estatística: descrição de dados; representações gráficas	• Estatística: análise de dados • Contagem	• Probabilidade

Figura 19 – Tabela 2: orientações *PCN+*

A Matemática do ensino médio, de forma tradicional, introduz os números complexos como a extensão dos conjuntos numéricos. O isolamento do tema em relação à resolução de equações perde total sentido para aqueles que não darão continuidade dos seus estudos nessa área e, assim, o mesmo pode ser tratado como parte flexível nos currículos escolares.

Em consequência, outro tópico a ser conduzido como tema complementar é o estudo mais aprofundado sobre os números complexos. A se pensar, quão interessante é explorar as discussões em torno das brilhantes resoluções geométricas que ajudaram a elucidar certos problemas na Antiguidade e do seu papel fundamental no desenvolvimento da Álgebra, além das conexões entre as operações com números complexos e as transformações geométricas no plano. Estes poderiam ser apresentados e introduzidos através da histórica necessidade de ampliação do conjunto de soluções de uma equação.

Desde o surgimento, em meados do século XVI, para utilização em equações de terceiro e quarto graus, estes números sempre foram tratados com desconfiança e incertezas. Um pouco deste medo reflete-se nos nomes adotados como "complexos" e "imaginários".

Ao longo de dois séculos, XVI à XVIII, se deu a compreensão sobre propriedades geométricas e a percepção que os mesmos não são apenas números irreais. Representam-se por vetores do plano, somam-se ou subtraem-se através de rotações do plano e multiplicam-se por meio das translações do mesmo. Sem dúvidas, a utilização dos recursos computacionais são de grande valia e tornam-se um instrumento relevante nestas demonstrações.

Todavia, o fenômeno da *algebrização* tomou conta da maior parte dos conteúdos matemáticos ensinados nas escolas brasileiras, desconsiderando-se a riqueza das aplicações geométricas. Sendo assim, para o aluno, não se perde a formalidade da Álgebra traduzida em suas equações e incógnitas, na cabeça dos mesmos apenas o "x" se tornara "i" no sentido oculto da unidade imaginária. Validam-se assim apenas as leis e propriedades operatórias da Álgebra.

Segundo (SANTOS, CARDOSO e SACRAMENTO, 2013) a Álgebra é considerada uma das principais fontes de dificuldade enfrentadas em todos os níveis de ensino, devido à má compreensão de seus significados. Desta forma, é necessário desenvolver o pensamento algébrico por meio de processos onde o foco na linguagem não deva ser a única manifestação, assim como a manipulação algébrica mecânica dos processos.

Oportunidades de mostrá-los e demonstrá-los como entes geométricos são claramente desperdiçados, mesmo após chegar-se na dita forma trigonométrica ou polar destes números, aquele que está iniciando em tal conteúdo continua com a visão algébrica impregnada sem sequer aplicar os conhecimentos referentes aos números complexos em problemas de geometria.

As provas pré-universitárias, os vestibulares, concursos e as avaliações escolares elaboradas envolvendo este conteúdo ratificam ainda mais o uso contínuo e exclusivo da álgebra nas mesmas. Enunciados como "Calcule/ Determine/ Obtenha o valor de $(1 + 3i).(2 + i)$" se tornaram prioridades. As variações nas questões se dão em enunciados mais ou menos complicados, porém neste mesmo estilo e padrão algébrico. A falta de tempo e estrutura nas escolas, além da necessidade eminente da contextualização a todo custo debatida amplamente na pedagogia atual, dificultam mais a cobrança de tal conteúdo. Tais contextualizações mal formuladas são colocadas em cheque segundo as Orientações curriculares para o Ensino Médio, p.95:

> "Vale uma ressalva sobre as ineficazes contextualizações artificiais, em que a situação evocada nada tem de essencialmente ligada ao conceito ou ao procedimento visado, como também não são educativas as contextualizações pretensamente baseadas na realidade, mas com aspectos totalmente fantasiosos."

Veja abaixo uma definição comumente adotada em aulas sobre números complexos:

"Denomina-se o conjunto $\mathbb{C}$ dos números complexos por: $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in R, i^2 = -1\}$, sendo i a unidade imaginária."

A definição acima é a mais presente nos livros didáticos há anos. Você, professor, consegue ver falhas na mesma?

Nos anos anteriores, ao longo do ensino fundamental, falou-se para os alunos sobre as construções dos conjuntos numéricos até se chegar ao conjunto dos números reais ao longo das séries anteriores e a definição $i^2 = -1$, gera questionamentos para os próprios docentes que a estão fazendo. Ao pensar, na álgebra a todo custo, que vem sendo praticada intensamente ao passar dos últimos anos é, sem dúvidas, satisfatório associar as resoluções das equações do segundo grau ao surgimento dos números complexos, o que não soa natural nos pontos de vista histórico e didático. A longo prazo, como dito anteriormente, o aluno trata a unidade "i" apenas como incógnita qualquer de uma equação dada que ele tenha aprendido. A se imaginar, este caminho tornou-se mais natural do que parece, em vias das provas aplicadas sem quaisquer exigências de demonstrações e conteúdos escritos pelos próprios discentes.

As demonstrações em sala de aula têm sido cada vez mais raras, por uma série de fatores, aplicadas somente na prática dos exercícios, não despertando o potencial dos alunos para conclusões e formas intuitivas de pensar. Tal perfil escolar tem afetado no rendimento universitário dos alunos, em sua maioria, jamais viram ou tentaram qualquer demonstração. E as Orientações curriculares para o Ensino Médio (p.95) mostram outro caminho:

> "A história da Matemática oferece oportunidades de contextualização importantes do conhecimento matemático, em que a articulação com a história pode ser feita nessa perspectiva, tais como a crise dos irracionais no desenvolvimento da ciência grega, que tem conexão com obstáculos até hoje presentes na aprendizagem desse conceito.
>
> A ampliação e o aprofundamento da explicitação da estruturação lógica da Matemática são necessários ao aluno do ensino médio, devendo-se valorizar os vários recursos do pensamento matemático, como a imaginação, a intuição, o raciocínio indutivo e o raciocínio lógico-dedutivo, a distinção entre validação matemática e validação empírica, e favorecer a construção progressiva do método dedutivo em Matemática. "

Enfim, faz-se necessária uma nova leitura que reavalie a aplicabilidade dos complexos, pois as justificativas atuais para o uso dos mesmos estão se esvaziando, a expansão algébrica é insuficiente para mantê-los nas propostas curriculares atuais. Se não for pensada uma concepção numérica nova, capaz de renovar a percepção que os nossos alunos têm das práticas matemáticas cotidianas que agem sobre as questões de medida e contagem, é inútil tal expansão dos complexos para ajudar na interpretação e compreensão de problemas apresentados. Esta nova ideia estaria conectada com a habilidade que os números complexos possuem para transformações geométricas no plano.

3.2. Uma breve análise dos livros didáticos

Foram analisados 4 livros didáticos usados pela maioria das escolas do país para as turmas de ensino médio. Ao longo das observações sobre os livros, iremos perceber que os mesmos se assemelham bastante quanto ao corpo estrutural, exercícios propostos e história contada sobre a origem e desenvolvimento do que se estuda atualmente sobre o conjunto dos números complexos. Serão descritas a estrutura adotada por cada um deles, desde o número de páginas, volume, objetivos e pontos de maior relevância.

Pode-se perceber que o conteúdo números complexos é voltado para turmas de terceiro ano de ensino médio, como propõem os livros, em seus respectivos terceiro volume das coleções voltadas para turmas de ensino médio.

As análises serão individuais para os quatro livros, ao trazer duas tabelas que iniciarão e encerrarão cada uma destas. A tabela inicial conterá informações do livro, desde o autor ao percentual de páginas dedicadas aos números complexos, tema desta dissertação. Já a tabela final trará a definição formal adotada pelo autor ou autores, além das características da abordagem, os objetivos gerais e os pontos relevantes a serem destacados no capítulo e no livro.

MATEMÁTICA: Ciências e aplicações

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo, Nilze de Almeida

TÍTULO	MATEMÁTICA: Ciências e

	aplicações
AUTOR(ES)	• Iezzi, Gelson • Dolce, Osvaldo • Degenszajn, David • Périgo, Roberto • De Almeida, Nilze
EDITORA	Saraiva
VOLUME/ ANO DA EDIÇÃO	3 ; 2010
NÚMERO DE CAPÍTULOS	8
NÚMERO DE PÁGINAS	272
NÚMERO DE PÁGINAS DO CAPÍTULO DE NÚMEROS COMPLEXOS (%)	38 ; ≈ 13,97%

Figura 20 – Tabela3: informações estatísticas do primeiro livro didático analisado

Nesta sexta edição, 2010, o conteúdo encontra-se no volume 3, voltado para as turmas de terceiro ano do ensino médio.

Está presente no capítulo 5 desta edição, com início na página 122 e término na página 159. São, ao todo, 9 subdivisões do conteúdo.

A introdução do capítulo dá-se por um trecho histórico desde Girolamo Cardano, século XVI, a Gauss, século XIX, trecho comumente apresentado pelos livros e trabalhos escritos sobre os números complexos.

Para definir o conjunto dos números complexos o autor traz uma abordagem por coordenadas cartesianas:

Chama-se **conjunto dos números complexos** o conjunto $\mathbb{C}$ de todos os pares ordenados de números reais para os quais valem as seguintes definições:

(I) Igualdade: $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$

(A) Adição: $(a, b) + (c, d) \Leftrightarrow (a + c, b + d)$

(M) Multiplicação: $(a, b) \cdot (c, d) \Leftrightarrow (ac - bd, ad + bc)$

Após os três exemplos iniciais, os autores trazem observações importantes como as potências da unidade imaginária e a representação geométrica dos números complexos.

Em seguida, representam-se a forma algébrica, o conjugado, o quociente na forma algébrica, o módulo e o argumento, a forma trigonométrica e suas respectivas operações.

O livro procura conversar e interagir com o leitor propondo algumas situações:

> Pense nisto: O método usado para calcular a raiz quadrada de um número complexo na forma algébrica seria facilmente aplicável, caso o índice da raiz fosse um número maior que dois, como, por exemplo, no cálculo de $\sqrt[3]{3-4i}$?

> Pense nisto: O método usado para calcular a raiz quadrada de um número complexo na forma algébrica seria facilmente aplicável, caso o índice da raiz fosse um número maior que dois, como, por exemplo, no cálculo de $\sqrt[3]{3-4\mathrm{i}}$?

(MATEMÁTICA: Ciências e aplicações, vol.3, 2010, p.128)

> Pense nisto: Como seriam demonstradas a 2ª e a 7ª propriedades?

(MATEMÁTICA: Ciências e aplicações, vol.3, 2010, p.131)

> Pense nisto: Qual é a particularidade dos complexos $(x+xi)^n$ em que x é um número real não nulo e n é um número inteiro par?

(MATEMÁTICA: Ciências e aplicações, vol.3, 2010, p.134)

> Pense nisto: Dado um complexo na forma algébrica, como você procederia para escrevê-lo na forma polar, ou vice-versa, no caso de o argumento não ser um arco notável ?

(MATEMÁTICA: Ciências e aplicações, vol.3, 2010, p.144)

Ao longo do capítulo, algumas definições importantes também são destacadas para o leitor:

A imagem de $\bar{z}$ é o ponto simétrico da imagem de z, em relação ao eixo real.

(MATEMÁTICA: Ciências e aplicações, vol.3, 2010, p.130)

Geometricamente, o módulo de um número complexo é a distância de sua imagem à origem do plano de Gauss.

Dois números complexos são iguais se, e somente se, os seus módulos são iguais e seus argumentos são congruentes.

(MATEMÁTICA: Ciências e aplicações, vol.3, 2010, p.142)

Geometricamente, a imagem de $z.i$ é obtida de uma rotação de 90° da imagem de z, no sentido anti-horário.

(MATEMÁTICA: Ciências e aplicações, vol.3, 2010, p.147)

No presente capítulo, são 83 exercícios propostos, 25 complementares, além de um desafio na última página. E ainda, outros 19 exercícios resolvidos.

Definição formal	**Características da abordagem**	**Objetivos do capítulo**	**Destaques**

"Chama-se conjunto dos números complexos o conjunto C de todos os pares ordenados de números reais para os quais valem as seguintes definições: (I) Igualdade: (a,b) = (c,d) ⇔ a=c e b=d (A) Adição: (a,b) + (c,d) ⇔ (a+c, b+d) (M) Multiplicação: (a,b).(c,d) ⇔ (ac-bd, ad+bc) Assim, z ∈C => z = (a,b), em que a ∈R e b ∈R. "	Ao longo de todo capítulo há muitas figuras ilustrativas e desenvolvimentos geométricos, mesclando com a abordagem algébrica das fórmulas desenvolvidas e demonstradas.	Os autores não trazem os objetivos a serem trabalhados no capítulo, porém ao ler o mesmo, é possível perceber que traz as definições de forma clara e objetiva, com demonstrações mais curtas e fórmulas finais destacadas para os leitores.	. Desafios propostos aos leitores ao longo do capítulo; . Fórmulas principais destacadas para os leitores de forma bastante clara.

Figura 21 – Tabela4: resumo do primeiro livro didático analisado

Matemática: Contexto & Aplicações
Luiz Roberto Dante

TÍTULO	MATEMÁTICA: Ciências e aplicações
AUTORES	Dante, Luiz Roberto
EDITORA	Ática
VOLUME/ ANO DA EDIÇÃO	3 ; 2011
NÚMERO DE CAPÍTULOS	8
NÚMERO DE PÁGINAS	264
NÚMERO DE PÁGINAS DO CAPÍTULO DE NÚMEROS COMPLEXOS (%)	36 ; $\approx$ 13,65%

Figura 22 – Tabela 5: informações estatísticas do segundo livro didático analisado

Nesta primeira edição, 2011, o conteúdo encontra-se no volume 3, voltado para as turmas de terceiro ano do ensino médio.

Está presente no capítulo 6 desta edição, com início na página 136 e término na página 171. Foi subdividido e distribuído em 10 tópicos, além das atividades adicionais e uma leitura histórica final, presente na última página do capítulo.

O capítulo se inicia citando a relação dos números complexos com a teoria dos fractais:

> O primeiro desses fractais é chamado conjunto de Mandelbrot e as outras são réplicas contidas nele. Por definição, o conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos pontos N do plano complexo que satisfazem uma sequência iterativa, isto é, que se forma por repetição de uma ou mais ações.

(Matemática: Contexto & Aplicações, Vol.3, 2011, p.136)

Em seguida, faz uma breve citação histórica, ao longo de três parágrafos, em uma linha do tempo iniciada no século XVI até o século XVIII. Propõe 3 atividades referentes às citações históricas anteriores.

No primeiro tópico, a introdução, abordam-se e relembram-se os conjuntos numéricos até chegar no conjunto dos números complexos e a definição da unidade imaginária:

Sabemos que, se $x \in \mathbb{R}$, então $x^2 \geq 0$. Assim, a equação $x^2 + 1 = 0$ não tem solução em $\mathbb{R}$, pois:

$$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$$

e não existe um número real **x** que elevado ao quadrado resulte -1. Por isso, temos de estender o conjunto dos números reais para obter um novo conjunto chamado de conjunto dos números complexos ($\mathbb{C}$).

(Matemática: Contexto & Aplicações, Vol.3, 2011, p.138)

Já o segundo tópico traz a definição dos números complexos através de pares ordenados:

Uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837 segundo o qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais em que estão definidas:

- Igualdade:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \; e \; b = d$$

- Adição:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow (a + c, b + d)$$

- Multiplicação:

$(a, b) \cdot (c, d) \Leftrightarrow (ac - bd, ad + bc)$

(Matemática: Contexto & Aplicações, Vol.3, 2011, p.138)

A partir daí, os demais tópicos passam por forma algébrica, representação geométrica, conjugado, divisão, módulo, forma trigonométrica e suas respectivas operações binômias, trinômias e outras aplicações.

Ao longo do capítulo o livro propõe reflexões:

> **Para refletir**
>
> Números complexos da forma z=a+bi têm argumento $\frac{3\pi}{2}$ para a>0 e $\frac{\pi}{2}$ para a<0.

(Matemática: Contexto & Aplicações, Vol.3, 2011, p.161)

> **Para refletir**
>
> Para a>0:
>
> $a + ai$ tem argumento $\frac{\pi}{4}$; $a + ai$ tem argumento $\frac{3\pi}{4}$;
>
> $-a - ai$ tem argumento $\frac{5\pi}{4}$; $-a - ai$ tem argumento $\frac{7\pi}{4}$.

(Matemática: Contexto & Aplicações, Vol.3, 2011, p.162)

Ao todo são 55 exercícios propostos que se dividem em atividades individuais e em dupla, outros 9 de vestibulares brasileiros dos mais diversos estados da federação, além de 1 desafio adicional em equipe e outras 3 atividades iniciais sobre a história dos números complexos. Além de 50 exemplos resolvidos, todos distribuídos ao longo dos tópicos.

Definição formal	Características da abordagem	Objetivos do capítulo	Destaques
"Uma boa maneira de definir esse conjunto é a proposta por Gauss em 1831 e reforçada por Hamilton em 1837 segundo o qual o conjunto dos números complexos é um conjunto de pares ordenados de números reais em que estão definidas: • Igualdade: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\Rightarrow \boldsymbol{a}=\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$ • Adição: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\Rightarrow(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}+\boldsymbol{d})$ • Multiplicação: $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c},\boldsymbol{d})\Rightarrow(\boldsymbol{ac}-\boldsymbol{bd},\boldsymbol{ad}+\boldsymbol{bc})$"	.Algébrica e toma como ponto de partida definições de autores que contribuíram com a construção do conjunto dos números complexos. A partir das mesmas, toma suas próprias notações, apresentando ainda as demais propriedades.	Segundo o autor: "Neste capítulo estudaremos a construção do conjunto dos números complexos, definindo suas operações e representações."	. Autor único . Seção mostrando outras aplicações dos complexos: -aplicações à Geometria, trazendo alguns exemplos resolvidos, com imagens demonstrativas do plano obtido; -aplicação à Engenharia elétrica .Leitura final trazendo, ao longo de uma página inteira, um pouco da história dos números complexos.

Figura 23 – Tabela 6: resumo do segundo livro didático analisado

Matemática
Manoel Paiva

TÍTULO	MATEMÁTICA: Ciências e aplicações
AUTORES	Paiva, Manoel
EDITORA	Moderna
VOLUME/ ANO DA EDIÇÃO	3 ; 2010
NÚMERO DE CAPÍTULOS	10
NÚMERO DE PÁGINAS	440
NÚMERO DE PÁGINAS DO CAPÍTULO DE NÚMEROS COMPLEXOS (%)	41 ; ≈ 9,32%

Figura 24 – Tabela 7 informações estatísticas do terceiro livro didático analisado

Nesta segunda edição, 2010, o conteúdo encontra-se no volume 3, voltado para as turmas de terceiro ano do ensino médio.

Está presente no capítulo 6 desta edição, com início na página 234 e término na página 275. Encontra-se subdividido em 4 seções, além dos apêndices finais com exercícios complementares e de revisão. A introdução traz um questionamento relevante para ser abordado em sala de aula:

> A descoberta do número como abstração de quantidades observadas no cotidiano foi o primeiro e, talvez, o mais importante feito matemático da humanidade. Foi uma longa e árdua caminhada desde os números naturais até os números reais. Mas seriam os números reais o último estágio na escalada do conceito do número?

(Matemática vol.3, 2010, p.236)

Na última página do presente capítulo, o livro propõe a análise da resolução de um exercício respondido por um aluno e faz o respectivo comentário referente a solução apresentada e propõe que o leitor a refaça, como proposta de diálogo com o mesmo. Interessante e bastante atual a proposta.

As seções se iniciam fixando, à esquerda da página, os objetivos propostos para serem discutidos ao longo de cada uma, além dos termos e conceitos que serão utilizados.

Nas duas primeiras seções, o livro cita um resumo histórico dos números complexos, ao falar sobre a primeira proposta em torno do seu surgimento, no século XVI, citando os italianos, *Tartaglia*, *Cardano* e *Bombelli*, pioneiros no conteúdo. Na sequência o autor traz a definição da unidade imaginária:

> A insuficiência dos números reais se revela na radiciação: não existem, em R, raízes quadradas, quartas, sextas,... de números negativos. Para que a radiciação seja sempre possível, os matemáticos ampliaram o conceito de número, definindo o número **i,** não real, que chamaram de **unidade imaginária,** e que satisfaz a seguinte condição:
>
> $$i^2 = i \cdot i = -1$$

(Matemática vol.3, 2010, p.237)

A primeira seção, além da introdução, define a unidade imaginária, a forma algébrica e os conjugados:

> **Número complexo** é todo número da forma a + bi, em que $\{a, b\}\ C\ R\ e\ i$ é a unidade imaginária.

(Matemática vol.3, 2010, p.237)

Já na segunda, são apresentadas as operações na forma algébrica, além da potenciação da unidade imaginária, dos números e complexos, além da sua radiciação.

A terceira apresenta a representação geométrica dos complexos. E a quarta, e última, finaliza com a forma trigonométrica e as suas operações: multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Ao longo do capítulo são 35 exercícios resolvidos, 81 exercícios propostos, 85 exercícios complementares e 4 de revisão final, sendo distribuídos estes exercícios propostos e resolvidos nas quatro seções apresentadas.

Foi possível observar, sobre o livro, pequenas citações históricas, uma boa organização das seções através dos tópicos de resumo iniciais, bons exercícios propostos em todos os níveis de dificuldade e uma boa gama de soluções e dicas para os exercícios resolvidos:

1) Determinar x, com $x \in R$, de modo que o número complexo $8 + (3x - 6)i$ seja real. **Resolução** O número $8 + (3x - 6)i$ é real se, e somente se, a parte imaginária é zero, isto é: $3x - 6 = 0$ Assim, concluímos que $x = 2$.

(Matemática vol.3, 2010, p.238)

Um breve resumo sobre tópicos e abordagens importantes do livro:

Definição formal	Características da abordagem	Objetivos do capítulo	Destaques
"Número complexo é todo número da forma a+bi, em que {a,b} C R e i é a unidade imaginária."	Há uma mescla entre uma abordagem algébrica no desenvolvimento das fórmulas e suas respectivas demonstrações, além da colocação de ilustrações geométricas, ao longo dos capítulos, distribuídos nas seções que subdividem o mesmo.	Segundo o autor: "Neste capítulo, vamos ampliar o campo numérico, apresentando os números complexos. Estudaremos suas representações, relações e operações." Na seção 1: "A impossibilidade da extração de raízes quadradas, quartas, sextas etc. de números negativos motivou a criação de um novo conjunto numérico." Na seção 3: "Por meio de uma relação	. Autor único .No apêndice final, há a resolução de um problema por um aluno, sendo feita a análise e propondo ao leitor que refaça a resolução, fazendo a correção da mesma.

		biunívoca, representa-se por um plano o conjunto dos números complexos. ”	

Figura 25 – Tabela 8: resumo do terceiro livro didático analisado

Matemática Ensino Médio
Kátia Stocco Smole, Maria Ignez Diniz

TÍTULO	MATEMÁTICA: Ciências e aplicações
AUTORES	• Smole, Kátia Stocco; • Diniz, Maria Ignez
EDITORA	Saraiva
VOLUME/ ANO DA EDIÇÃO	3 ; 2010
NÚMERO DE CAPÍTULOS	12
NÚMERO DE PÁGINAS	352
NÚMERO DE PÁGINAS DO CAPÍTULO DE NÚMEROS COMPLEXOS (%)	26 ; $\approx$ 7,39%

Figura 26 – Tabela 9: informações estatísticas do quarto livro didático analisado

Nesta sexta edição, 2010, o conteúdo encontra-se no volume 3, voltado para as turmas de terceiro ano do ensino médio.

Está presente no capítulo 6 desta edição, com início na página 236 e término na página 261. Encontra-se subdividido em 5 partes, na unidade 10 e está subdividido em 5 seções, além de um apêndice final, denominado CONEXÃO, que trata da aplicação dos complexos na aerodinâmica e construção das aeronaves.

As outras introduzem o capítulo trazendo uma visão geral sobre os números complexos:

Nesta unidade, você conhecerá um novo campo numérico, o dos **números complexos.** Esse é um exemplo interessante de um conhecimento que nasce na Matemática para a resolução de equações que, por exemplo, a Física e áreas da engenharia utilizam em modelos para explicar fenômenos relacionados à eletricidade e movimentos em fluidos como ar ou água.

(Matemática Ensino Médio vol.3, 2010, p.236)

Já na primeira seção, o primeiro parágrafo cita uma equação do segundo grau com discriminante negativo para introduzir o conjunto dos números complexos. Na sequência, traz-se um pouco de história ao falar sobre *Cardano* e *Bombelli*, século XVI, além de mencionar outros importantes autores para a construção do que aprendemos hoje sobre os números complexos, entre eles, Girard, Descartes, Euler e Gauss. Ao fim da seção, questionam:

Mas, afinal, o que são os números complexos?

(Matemática vol.3, 2010, p.237)

As outras seções apresentam as definições dos números complexos e suas respectivas operações, as propriedades, o módulo e a forma trigonométrica, usados como títulos das seções.

Para interagir e dialogar com os leitores, as autoras propõem exercícios que sejam inventados pelo leitor:

invente você

1. Invente uma equação para ser resolvida em C cuja solução seja $\{-4i, 4i\}$
2. Elabore exercícios sobre operações com números complexos.

(Matemática vol.3, 2010, p.244)

invente você

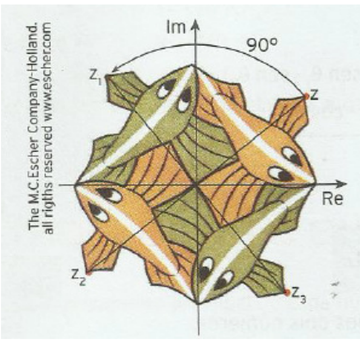
3.Elabore um problema sobre números complexos cuja pergunta seja: Qual é o módulo e qual é o argumento de $z + \bar{z}$?

4.Elabore um problema envolvendo representação gráfica e afixo de um número complexo.

(Matemática vol.3, 2010, p.250)

As definições relevantes são destacadas ao longo das páginas e das seções, assim como a forma algébrica, igualdade, adição, subtração, multiplicação, conjugado, divisão, módulo, argumento, operações na forma trigonométrica e as fórmulas de *De Moivre*.

Ao longo do capítulo, são 16 exercícios resolvidos, 62 exercícios propostos e 11 exercícios para recordar outros conteúdos. Durante o capítulo, há uma seção sobre as simetrias e rotações obtidas a partir de um número complexo, citando obras do artista *Maurits C. Escher*:



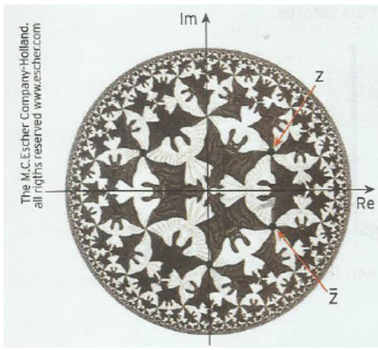


Figura 27 – Imagem retirada do livro: Matemática vol.3, 2010, p.252

Definição formal	**Características da abordagem**	**Objetivos do capítulo**	**Destaques**
"Número complexo é todo par ordenado $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ que é escrito na forma $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{bi}$, onde $\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{b}$ são números reais e i é a unidade imaginária, isto é, $\boldsymbol{i^2} = \boldsymbol{-1}\ \boldsymbol{ou}\ \boldsymbol{i} = \sqrt{\boldsymbol{-1}}$. Essa forma é chamada de **forma algébrica de um número complexo.**"	A abordagem do livro constrói-se de maneira algébrica em sua maior parte, no desenvolvimento parcial e completo de fórmulas. Excetuando-se os dois apêndices citados nos destaques do livro acima.	Segundo as autoras: "O objetivo desta unidade não é o tratamento exaustivo dos números complexos e de suas propriedades, mas sim que os alunos conheçam um pouco da história de como a Matemática foi se construindo pelas mãos dos seres humanos, em sua cultura e tempo, bem como possam rever e aprofundar os conhecimentos que possuem sobre as operações e suas aplicações na resolução de equações."	. Trabalhar as rotações no plano, através de obras artísticas, como as de *Escher*; . Trazer outras aplicações dos números complexos, como nas últimas páginas que são citadas a utilização dos complexos na construção de aeronaves. . O livro escrito por mulheres, afinal no universo matemático, os livros didáticos adotados em sua maioria são escritos por homens.

Figura 28 – Tabela 10: resumo do quarto livro didático analisado

Como foi dito acima, a estrutura dos capítulos, ordenações, história e definições se assemelham bastante em todos os livros. Os diferenciais entre os livros se dão nas quantidades propostas de exercícios, e nos apêndices finais de cada capítulo analisado, em destaque o segundo livro analisado que contém um apêndice complementando a introdução histórica que é feita por todos os livros vistos acima.

Segundo os *PCN's*, os conteúdos abordados nos livros didáticos devem ajudar o aluno no desenvolvimento de estratégias que contribuam com as formas de pensar, na capacidade de resolver problemas genuínos e poder aplicar o conteúdo a outras áreas de conhecimento inclusive. Em geral, os livros analisados trazem exercícios resolvidos, ao mostrar formas de construir as respostas, ao trazer um equilíbrio entre as demonstrações algébricas e geométricas. Apenas dois deles trouxeram outras aplicações possíveis para os números complexos, deixam a desejar nesse aspecto, pois estas aplicações são bons exemplos a serem trazidos para as salas de aula e o livro didático se torna, muitas vezes, o único alicerce da aula para os alunos e o professor.

3.3. Números complexos na escola: A visão dos docentes

Para elaboração desta seção, foi elaborado um questionário e repassado a professores que atuam na educação básica em escolas distribuídas, geograficamente, no estado do Rio de Janeiro.

O questionário pode ser definido:

> “como a técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas e etc.”
>
> (GIL, 2008, p. 121)

O objetivo foi entender através de professores da rede pública, municipal, estadual e federal, além da rede privada, como/se o assunto vem sendo trabalhado, se sua abordagem é mais algébrica ou geométrica. Ao longo do mesmo, procura-se saber sobre este professor como foi sua graduação, se houve abordagem do assunto ao longo da sua formação, se quando o mesmo era aluno da educação básica o assunto foi aprendido ou não e saber o quanto esta ausência ou presença pode influenciar o enfoque dado em sala de aula.

Responderam o questionário, ao todo, nove professores que atuam no estado, município, escolas federais, como Pedro II e IFRJ, além de escolas bastante reconhecidas da rede privada, todas situadas no município do Rio de Janeiro, distribuídas nos mais diversos bairros da cidade.

Foram 12 perguntas, distribuídas ao longo de duas páginas:

Pergunta 1: Há quantos anos leciona Matemática?

Foi interessante observar que foram vistas opiniões de docentes recém-formados e outras que já possuem mais de 20, 30 e até 40 anos de profissão..

Pergunta 2: Formou-se em Universidade:
(   ) Pública   (   ) Privada

Houve nessa pergunta uma igualdade nas formações entre públicas e privadas.

Pergunta 3: Trabalha atualmente em:
(   ) Rede Pública municipal
(   ) Rede Pública estadual
(   ) Rede Pública federal
(   ) Rede Privada

Nos presentes questionários analisados há professores de todas as redes citadas e atuantes em duas ou mais delas:

- Municipal: 4
- Estadual: 4
- Federal: 2
- Privada: 6

Pergunta 4: Qual(is) série(s) leciona?

( ) 6º ano Ensino Fundamental **( ) 1º ano Ensino Médio**

( ) 7º ano Ensino Fundamental **( ) 2º ano Ensino Médio**

( ) 8º ano Ensino Fundamental **( ) 3º ano Ensino Médio**

( ) 9º ano Ensino Fundamental

A rede pública municipal do Rio de Janeiro abrange atualmente quase 100% dos alunos do ensino fundamental e a rede pública estadual abrange quase 100% do ensino médio. Os docentes participantes, em quase sua totalidade, atuam em pelos menos duas redes, conforme citadas na pergunta 3 acima. Além de trabalharem tanto no ensino fundamental quanto médio.

Pergunta 5: O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?

( ) Não

( ) Apenas Ensino Fundamental

( ) Apenas Ensino Médio

( ) Ambos

De maneira unânime, entre os docentes participantes, houve o aprendizado apenas durante o ensino médio.

<u>Pergunta 6</u>: O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?

(   ) Sim   (   ) Não

Apenas um dos docentes participantes não tiveram aulas de números complexos durante a sua graduação na universidade.

<u>Pergunta 7</u>: Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente:

(   ) Sim   (   ) Não

Apesar de não terem sido ensinados durante seu ensino fundamental, 89% dos professores participantes citam a existência da unidade imaginária nas turmas de ensino fundamental ao qual lecionam, todavia limitam-se a esta, sem uma abordagem mais ampla que, segundo eles, virá a partir do ensino médio. Contudo, o assunto é encaminhado para as turmas de terceiro ano e, quando ensinado, em aulas específicas nas últimas semanas de aula.

<u>Pergunta 8</u>: Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum software, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.

(   ) Apenas o recurso tecnológico, sem o software

(   ) Apenas o software

(   ) Ambos

(   ) Nenhum

Nos últimos anos, tem sido amplamente debatido o uso da tecnologia em sala de aula e o tema abrange tópicos como a infraestrutura das escolas, o nível de interesse das turmas e dos seus respectivos alunos, a otimização do bom uso da tecnologia, o tempo adequado para se poderem trabalhar os conteúdos.

Desde a falta de estrutura das escolas à metodologia adotada pelos docentes, a utilização dos recursos tecnológicos é bastante rara nas aulas de Matemática e pôde se observar ao longo das respostas, 67% dos entrevistados disseram não usar nenhum recurso tecnológico, e justificaram das seguintes formas:

> *"A falta de tempo devido a quantidade de conteúdos é a principal causa. "*

> *"Está associado a minha metodologia em conjunto com a falta de tempo. Em operações na forma trigonométrica gostaria de usar algum recurso. "*

<u>Pergunta 9</u>: O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.

(   ) Sim **(   ) Não**

Entre todos os entrevistados, 7 responderam positivamente. Nesta pergunta é importante ressaltar algumas respostas dadas:

> *"Sim, mesmo para aqueles alunos que não farão um curso na área das exatas. Primeiramente pela construção de um raciocínio."*

> *"Dá ao aluno a visão da necessidade de criação de novos números para solução de problemas que surgem e a visão de alguns sistemas onde números complexos são usados (sistema monetário, sistema métrico, etc)."*

<u>Pergunta 10</u>: O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

O objetivo desta pergunta era investigar a linha adotada atualmente nas escolas, se há um alinhamento nas abordagens, como estão sendo trabalhadas. E as respostas coincidiram com os livros didáticos, ao usarem em uma aula inicial raízes complexas obtidas a partir de uma equação do segundo grau que possuem o discriminante negativo. E as respostas se assemelham, exceto na primeira em destaque:

> *"Sempre começo pelo problema clássico proposto por Cardano. Ele mostra como algo que "não existe" fornece respostas que satisfazem as condições exigidas."*

> *"Inicio usando equações do segundo grau com o sinal do discriminante sendo negativo."*

> *"Sim. Primeiramente mostro as raízes complexas de uma equação do 2°grau. Mostro a forma algébrica do número e suas propriedades. Efetuo as operações básicas e a forma trigonométrica."*

<u>Pergunta 11</u>: Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:

(   ) No Ensino Fundamental

(   ) No Ensino Médio

(   ) Em ambos

(   ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? (   ) SIM (   ) NÃO

Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?

(   ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos

(   ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica

(   ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.

(   ) outros

Por trabalharem com ensino médio e ensinarem o conteúdo, os docentes questionados consideraram satisfatória a abordagem do conteúdo, desconsiderando os possíveis motivos para a ausência do conteúdo.

Quando não considera satisfatória a abordagem, o docente quer dizer que esta não existiu ou foi suficientemente curta e direta, como a maioria respondeu nas perguntas anteriores que ensinam o conteúdo, pode-se concluir que estes consideraram breve e insuficiente a abordagem. Um dos docentes justificou através do modelo do Novo ENEM e outros justificaram pelo vestibular da UERJ:

> *"A ausência do assunto no ENEM, deixa a abordagem apenas para o 3°ano do ensino médio, pois o mesmo só é abordado no vestibular da UERJ."*

> *"Outros vestibulares, como a primeira fase da UERJ, também não abordam o*

<u>Pergunta 12</u>: Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

Como já era esperado, essa pergunta houve a maior variação de respostas, dentre algumas que citaremos. No geral, observou-se que não há um padrão de abordagem para tal conteúdo e os professores se sentem livres ao iniciá-los nas suas aulas. De fato, professores com mais tempo de sala de aula citaram mais a abordagem geométrica, já os mais novos citaram a abordagem algébrica, o que não pode ser diagnosticado como um padrão dos novos cursos de graduação, talvez justificado pelo curto tempo que o professor atualmente tem para trabalhar cada assunto em sala de aula. Podem-se destacar algumas respostas:

> *"Mais algebricamente, até mesmo pela falta da tecnologia. A partir do plano de Gauss, mostro a parte trigonométrica e suas operações."*

> *"Sim, de forma simples, operações e algumas propriedades, visando despertar no aluno o interesse em conhecer universos diferentes daqueles em que estavam acostumados."*

“Inicialmente, como já dito, inicio com exemplo de equações que não possuam raízes reais, em geral, com equações do segundo grau. Em seguida faço as operações fundamentais, soma, subtração e multiplicação na forma algébrica seguido de aplicações e exercícios. Vejo grande abandono nas escolas do ensinamento de equações do tipo $x^n = z$ (2ª relação de De Moivre), em grande parte, pela pouca cobrança em concursos de acesso à graduação.”

do mesmo o seguinte quadro quantitativo:

DADOS RELEVANTES	QUANTIDADE
QUANTIDADE TOTAL DE DOCENTES	9
ATUA NA REDE PÚBLICA MUNICIPAL	4
ATUA NA REDE PÚBLICA ESTADUAL	4
ATUA NA REDE PÚBLICA FEDERAL	1
ATUA NA REDE PARTICULAR	6
APRENDEU NÚMEROS COMPLEXOS NA EDUCAÇÃO BÁSICA	9
APRENDEU NÚMEROS COMPLEXOS NA GRADUAÇÃO	8
FORMOU-SE EM UNIVERSIDADE PRIVADA	3
FORMOU-SE EM UNIVERSIDADE PÚBLICA	6
UTILIZA RECURSOS TECNOLÓGICOS EM SUAS AULAS	3
CONSIDERA O ASSUNTO RELEVANTE PARA O DESENVOLVIMENTO DO ALUNO	7
TRABALHA COM ENSINO FUNDAMENTAL II E CITA OS NÚMEROS COMPLEXOS EM SUAS AULAS	6

Figura 29 – Tabela 11: resumo das informações extraídas dos questionários

A partir da análise destes dados, levantam-se algumas questões como a realidade das escolas varia e influencia diretamente no potencial, aprendizado e interesse dos alunos. É notável que não há um padrão de abordagem para o assunto.

O uso do questionário é uma ferramenta que apresenta suas vantagens e desvantagens. Dentre as vantagens da elaboração e uso do questionário para a realização da pesquisa podemos citar: a possibilidade de atingir participantes de diferentes áreas geográficas, a não exposição dos participantes à influência das opiniões do pesquisador entre outras. Já as desvantagens são: impedir o auxílio ao informante quando este não entende corretamente as instruções ou perguntas e não oferecer a garantia de que a maioria das pessoas o devolvam devidamente preenchido, o que pode implicar a significativa diminuição da representatividade da amostra (GIL, 2008).

4. Capítulo 3 – Propostas de aula

Professor, o que deve ser dito na primeira aula de números complexos?

Duas hipóteses:

A primeira, se você ou seu colega que foi professor daquela turma em questão nos anos finais do ensino fundamental contou aos alunos um pouco sobre os números complexos e mostrou parcialmente sua existência, pronto, seu caminho está facilitado. Você deve lembrar e retomar aos alunos sobre o mesmo e a partir daí está livre para uma apresentação mais formal e estruturada.

A segunda, você está diante de uma turma que nunca ouviu falar em números complexos, que tem para si que o conjunto dos números reais englobam todos os outros e não há nada que o contenha. Convenhamos que está apresentada uma situação muito mais comum que a primeira. Portanto, o seu desafio agora será maior. Dizer logo e com pressa que $i^2 = -1$ e que $z = a + bi$ pertence ao conjunto dos números complexos?

Pare um segundo agora, se coloque no lugar do seu aluno e pense se ele entendeu alguma coisa do que isso realmente quer dizer! Como pode uma potência DE EXPOENTE PAR DAR UM RESULTADO NEGATIVO? Você ou seus colegas disseram a vida toda para ele e deram errado em todas as provas no ensino fundamental e no primeiro ano do ensino médio quando ele fazia isso e agora quer o convencer do contrário. Neste caso não fique chateado se nenhum dos alunos não entender nada ou lhe fizer questionamentos como esse, pois essa frase foi colocada com certa imposição na cabeça deles sem entendimento para ninguém.

Pense agora, um outro começo neste caso não seria melhor? Traga a história da matemática para aquele que está lhe vendo e ouvindo, crie raízes com os séculos anteriores, persuada-o com os devidos e corretos porquês. Mostre a ele que o passar das séries na escola está intimamente ligado aos conjuntos numéricos que ele vem aprendendo, desde o conjunto dos números naturais, no início de seu desenvolvimento cognitivo, fora até mesmo da escola, até o conjunto dos números reais, através das equações do segundo grau. Situe-o nesta linha temporal, crie uma sequência lógica para que este jovem o compreenda de maneira lúdica e com fins concretos.

O presente capítulo trará a proposta de atividades para se trabalhar os aspectos geométricos e algébricos dos números complexos. A primeira proposta, que chamaremos de *aula 1*, é voltada para questão geométrica e consiste de dois exercícios a serem utilizados em sala de aula. Um exercício inicial, com um enunciado curto, de caráter mais formal que visa a abordagem geométrica através de rotações obtidas pelo produto com a unidade imaginária, citadas no *capítulo 1*, na *seção 2.2*. Já o segundo exercício apresentado, dá-se um problema contextualizado de forma lúdica, que visa a utilização do software *Geogebra* em sala de aula, contendo a demonstração do passo a passo do uso desta ferramenta. Apresenta-se ainda uma solução formal para a utilização dos conceitos desenvolvidos na seção supracitada.

A segunda proposta, denominada de *aula 2*, irá explorar a relação dos números complexos com as raízes de polinômios, formas de abordar esses exercícios, ao calcular as áreas dos polígonos obtidos a partir destas raízes, explorar ainda a circunferência trigonométrica, afinal o teorema apresentado trará o módulo unitário, de tamanho congruente ao raio da circunferência.

Para a aula 1 há a necessidade do conhecimento prévio do aluno em alguns conteúdos, como por exemplo, geometria analítica e as propriedades dos números complexos.

<u>Aula 1</u>

ESTRUTURA	
Tempos de aula	1 a 2
Duração (min)	50 a 100
Série indicada	3°ano ensino médio
Material	Computador, Quadro branco
Uso de Geogebra	Sim

Pré-requisitos	Conhecimentos sobre Geometria Analítica
Conteúdo	Números complexos e Geometria Analítica

Figura 30 – Tabela 12: Estrutura da primeira aula proposta

Nesta primeira proposta de aula, seriam apresentados dois problemas a serem aplicados em turmas de 3°ano do ensino médio, pois são exigidos conhecimentos em vetores, distância entre dois pontos, números complexos.

Aulas com utilização de softwares, como o *Geogebra*, precisam ser bem planejadas e estruturadas para otimizar o tempo e atenção dos alunos. Para (MERCADO, 2002, p.133), sobre o uso de softwares:

> "possa ser um auxiliar para o aluno, tornando-o uma ferramenta que represente um diferencial, a busca de uma escola de qualidade. E a chave para a integração das tecnologias com o ensino é um bom planejamento."

E, segundo (OLIVEIRA, 2001, p. 87):

> "o software educativo [...] pode instrumentalizar o professor na sua tarefa de levar o aluno à aprendizagem de conceitos relacionados com conteúdos curriculares".

A proposta desta aula é apresentar dois tipos de problema, ambos ligados à geometria, cujo conteúdo gera atualmente inúmeras dificuldades de compreensão ao aluno. Segundo (SALGADO, 2011, p.44):

> "Um enorme empecilho existente para o aprendizado da geometria são imagens mentais inadequadas. Esse empecilho pode ser amenizado com um aumento no número de exemplos e maior contato direto dos alunos com as construções geométricas. Algo muito importante para a didática da matemática e a didática em geral é que ao ser inserido um software de geometria dinâmica na sala de aula, o aluno é convidado à interatividade."

O primeiro problema tem uma abordagem mais formal e contém a construção de um quadrado através da obtenção de suas respectivas coordenadas, trabalha-se em paralelo com a geometria analítica. E o objetivo do outro será atrair os alunos, ao contar uma história lúdica, sem deixar de dar ênfase à matemática contida no mesmo.

Este segundo problema pode ser demonstrado e resolvido de algumas maneiras e opcionalmente o caminho escolhido foi através dos números complexos, ao trazer a relevância de suas rotações no plano cartesiano, ao ressaltar alguns pontos principais. O professor pode buscar e trazer aos alunos outras soluções com abordagem de outros conteúdos matemáticos.

Seguirão alguns comentários, como sugestões e questionamentos, que podem ser repassados aos alunos.

Problema 01

Seja um quadrado $ABCD$ de lados $A(1,2)\ e\ B(5,6)$. Obtenha as coordenadas dos vértices $C\ e\ D$ pertencentes, respectivamente, ao primeiro e segundo quadrantes.

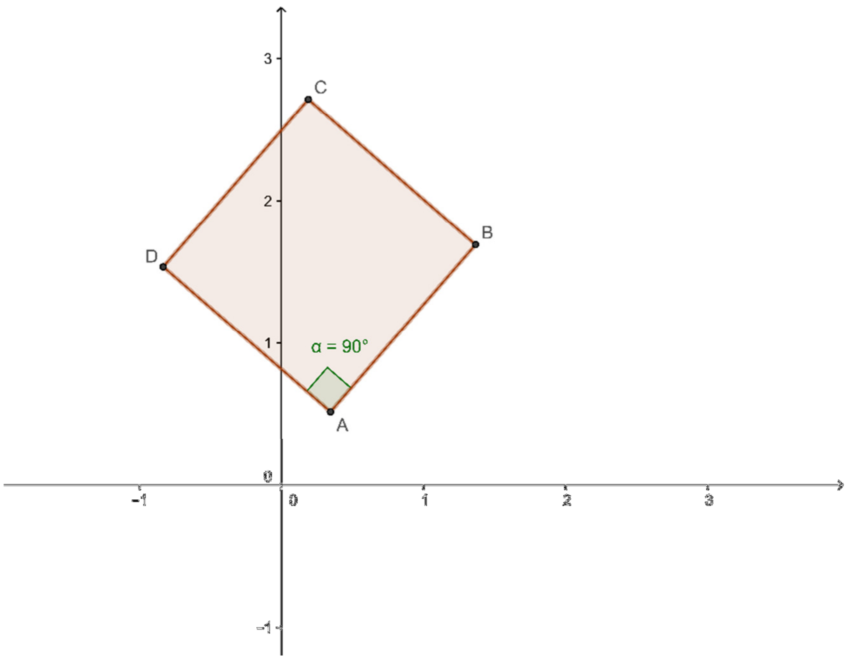


Figura 31 – Plano cartesiano utilizado na atividade proposta da aula 1

<u>Comentários</u>:

- É verdade que ao ler este problema a última solução que vem à cabeça é por números complexos, pensa-se nos conceitos de geometria analítica que podem ser igualmente aplicados, todavia o enfoque da nossa aula é a abordagem através dos números complexos e uma ideia/solução diferente da qual já estamos habituados a fazer. A elaboração tanto do enunciado quanto da resolução dá-se de maneira simples a favor que o mesmo sirva de exemplo e molde para demais exercícios com uma estrutura parecida a esta. E que os conceitos que irão ser tratados possam ajudar os docentes que lerão este trabalho;
- É importante frisar neste exercício a unidade imaginária $i = (0,1)$ nas rotações de ângulos de 90°;
- Utilizar-se-á o conceito de vetores;
- Uma forma de resolver o exercício é mostrar aos alunos os conceitos que serão utilizados naquela questão e por se tratar de turmas de terceiro ano do ensino médio é natural que a resolução através do cálculo da distância entre dois pontos pertencentes ao plano cartesiano. Persuada-os sobre a relevância da utilização da rotação de complexos e como ela os irá ajudar tanto na resolução desse problema inicial como, por exemplo, em problemas com enunciados mais elaborados.

Para a resolução, calcula-se as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AB} = B - A$$

$$\overrightarrow{AB} = (5,6) - (1,2)$$

$$\overrightarrow{AB} = (4,4)$$

Para obter o ponto D, simétrico ao ponto B em relação ao ponto A, deve-se rotacionar 90°, no sentido positivo (anti-horário) o vetor $\overrightarrow{AB}$.

Vimos ao longo das seções anteriores que esta rotação é obtida através do produto pelo complexo $i = (0,1)$.

Sendo $z_1 = (a, b)\ e\ z_2 = (c, d)$:

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd, ad + bc)$$

Logo:

$$\overrightarrow{AB} \cdot i = (-4,4)$$

Simétrico em relação ao ponto A:

$$D = (x, y) = (-4,4) + (1,2) = (-3,6)$$

De forma análoga, obtém-se o ponto C, simétrico ao ponto A em relação ao ponto B, deve-se rotacionar 90°, no sentido positivo (anti-horário) o vetor $\overrightarrow{DA}$:

$$\overrightarrow{DA} = A - D$$
$$\overrightarrow{DA} = (1,2) - (-3,6)$$
$$\overrightarrow{DA} = (4, -4)$$

Logo:

$$\overrightarrow{DA}. i = (-4,4)$$

Simétrico em relação ao ponto B:

$$C = (x, y) = (-4,4) + (5,6) = (1,10)$$

Problema 02

O problema a seguir, foi apresentado na Revista do Professor de Matemática, n°47, 2001, editada por CARNEIRO, José Paulo e seu enunciado adaptado por ROSEMBERG, Jhonny, 2013.

O tesouro perdido

Recentemente um aventureiro descobriu um manuscrito descrevendo a localização de um tesouro enterrado em certa ilha (plana). O manuscrito identifica perfeitamente a ilha e dá as seguintes instruções:

Qualquer um que desembarque nesta ilha verá imediatamente duas pedras grandes, que chamarei de $P_1\ e\ P_2$, e também uma palmeira, denominada P. Eu enterrei o tesouro em um ponto X que pode ser encontrado assim:

1. Caminhe de P para P_1 contando seus passos. Chegando em P_1, vire para a esquerda e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto A.

2. Volte ao ponto P .

3. Caminhe de P para P_2 contando seus passos. Chegando em P_2, vire para a direita e dê exatamente o mesmo número de passos para chegar ao ponto B.

4. O ponto X, local do tesouro, está na reta que liga $A\ e\ B$ e a mesma distância desses dois pontos.

Chegando à ilha o aventureiro achou rapidamente as pedras descritas no mapa.

Mas, para sua surpresa, a palmeira havia se desintegrado com o decorrer dos anos, não conseguindo localizá-la, então desistiu da busca.

Um aluno ao ler o problema, nas mesmas condições, diz que seria capaz de localizar o tesouro.

Mostre como você resolveria o problema, isto é, dê as coordenadas de X em função das coordenadas de $P_1(x, y)\ e\ P_2(a, b)$.

Resolução: Um dos questionamentos iniciais ao estar lendo este exercício é se perguntar como se dará a utilização dos números complexos para resolução do problema apresentado.

Dica 1: Ao multiplicar-se um número complexo z pelo número complexo i, no plano, há uma rotação de 90° de z no sentido (positivo) anti-horário. E ao multiplicar-se z pelo número complexo $-i$ há uma rotação de 90° no sentido (negativo) horário.

Dica 2: Utilize-se do conceito de vetores utilizado ao longo do trabalho.

Solução: A seguir serão mostrados os passos para construção do problema utilizando-se do software *Gegebra*, gratuito e de fácil download e utilização.

Passos no software:

1. Ao abrir o programa, irá se deparar com o plano cartesiano. Para não exibir o mesmo, basta clicar com o botão direito do mouse e terá a palavra *“Eixos”*, basta clicar na mesma para sumir com os eixos e ficar com a tela totalmente branca.

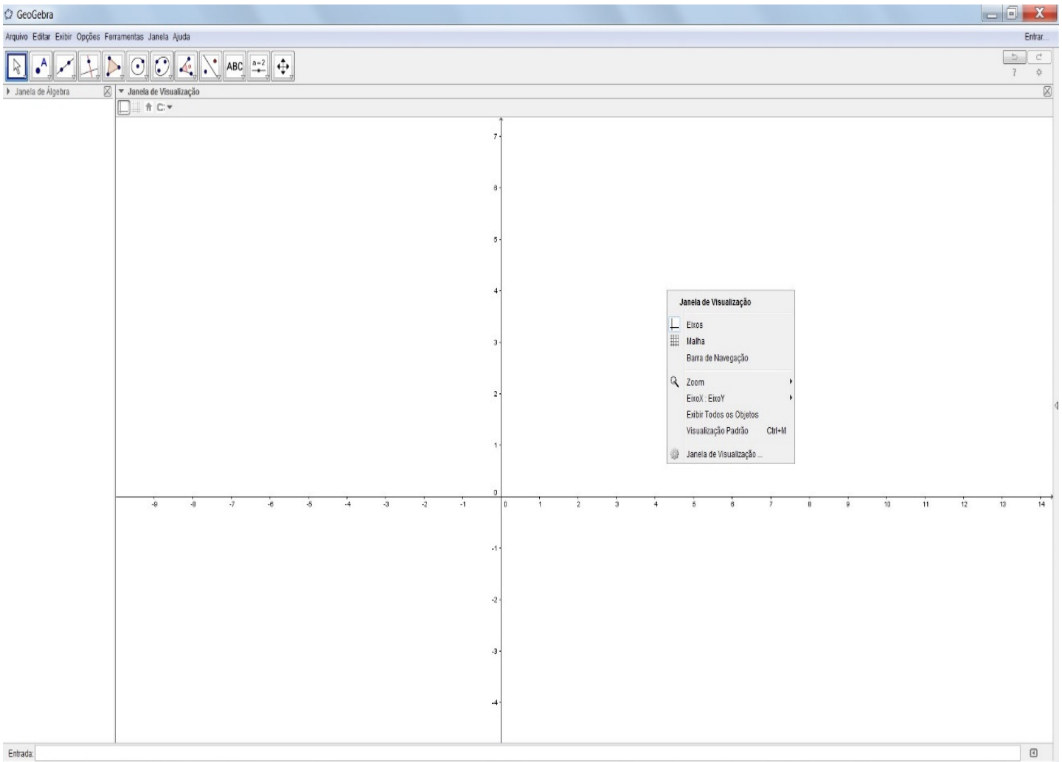


Figura 32 – Passo 1: Construção *Geogebra*

2. Crie os pontos A,B (pedras P_1 e P_2) e C(palmeira). Clique com o mouse na tela branca inicial. Confirme se a opção selecionada contém o desenho de um ponto e uma letra, conforme a figura abaixo, com a caixinha de opções na cor azul selecionada acima com a forma de um ponto e uma letra A.

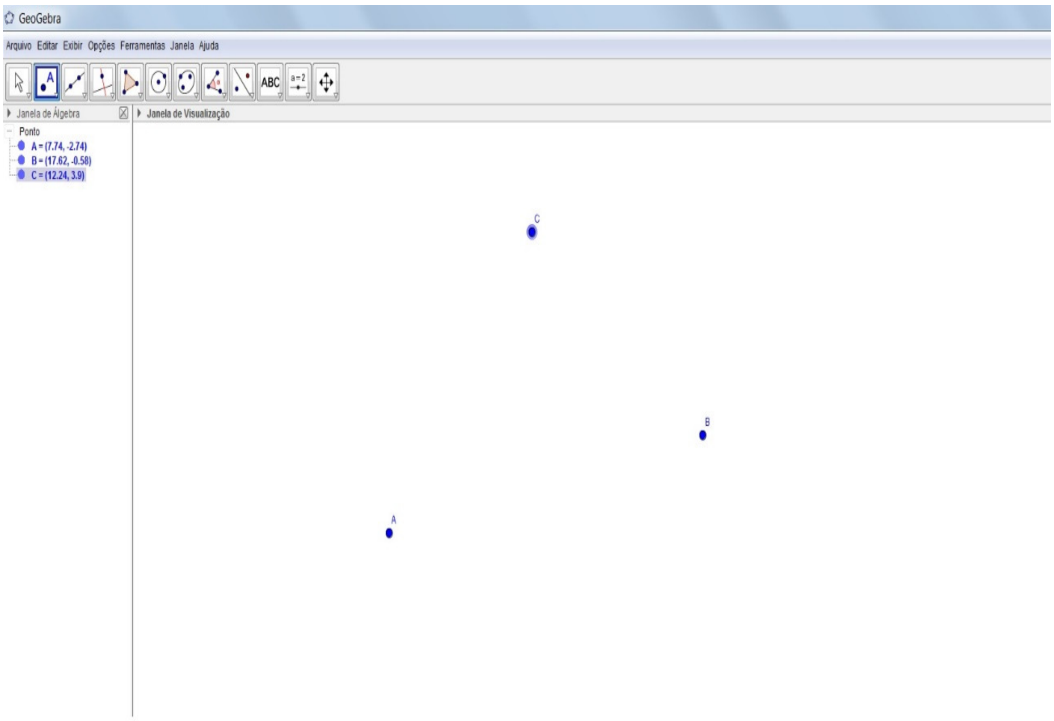


Figura 33 – Passo 2: Construção *Geogebra*

3. Construa o segmento $\overline{CA}$, clicando na terceira opção superior contadas da direita para esquerda, selecionando a opção *segmento*. Em seguida, clique com o botão direito do mouse sobre o mesmo, selecione a opção *Exibir Rótulo* para desaparecer o nome "*a*" que será dado, pelo software, ao segmento e ainda com o botão direito clicado selecione *propriedades*, *cor* e alterar a cor preta inicial.

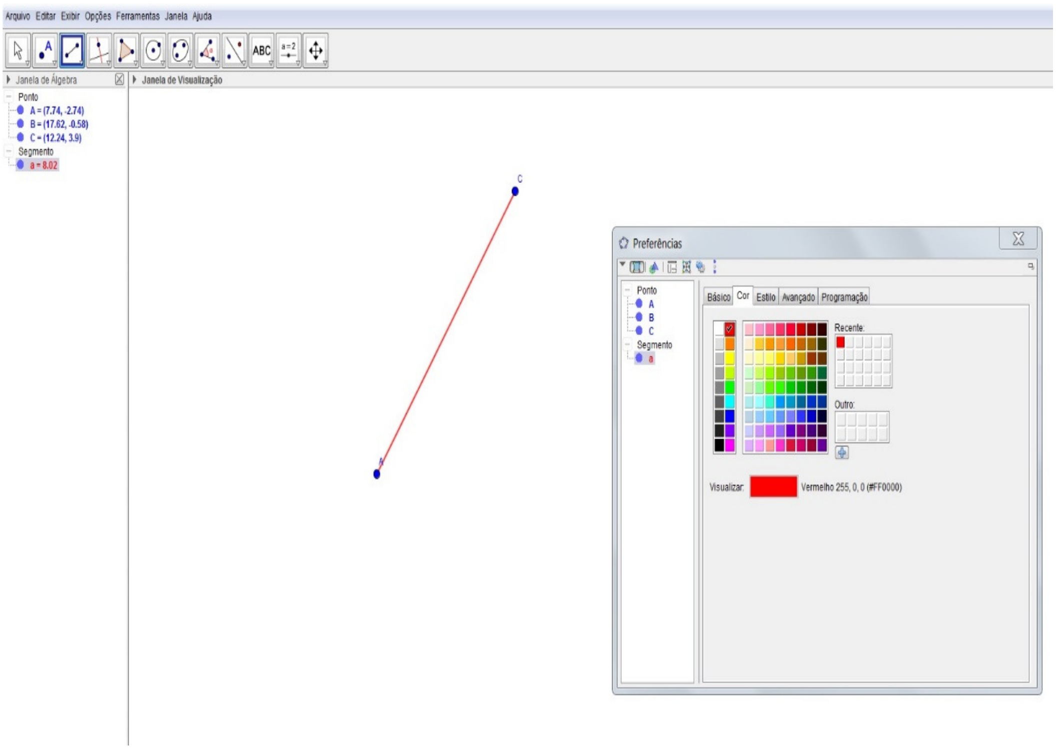


Figura 34 – Passo 3: Construção *Geogebra*

4. Giro à esquerda. Clique na terceira opção superior, da direita à esquerda, selecione a opção *Rotação em torno de um ponto*, clique sobre o segmento $\overline{CA}$ e em seguida no ponto A, aparecerá uma caixa de digitação, coloque $-90°$.

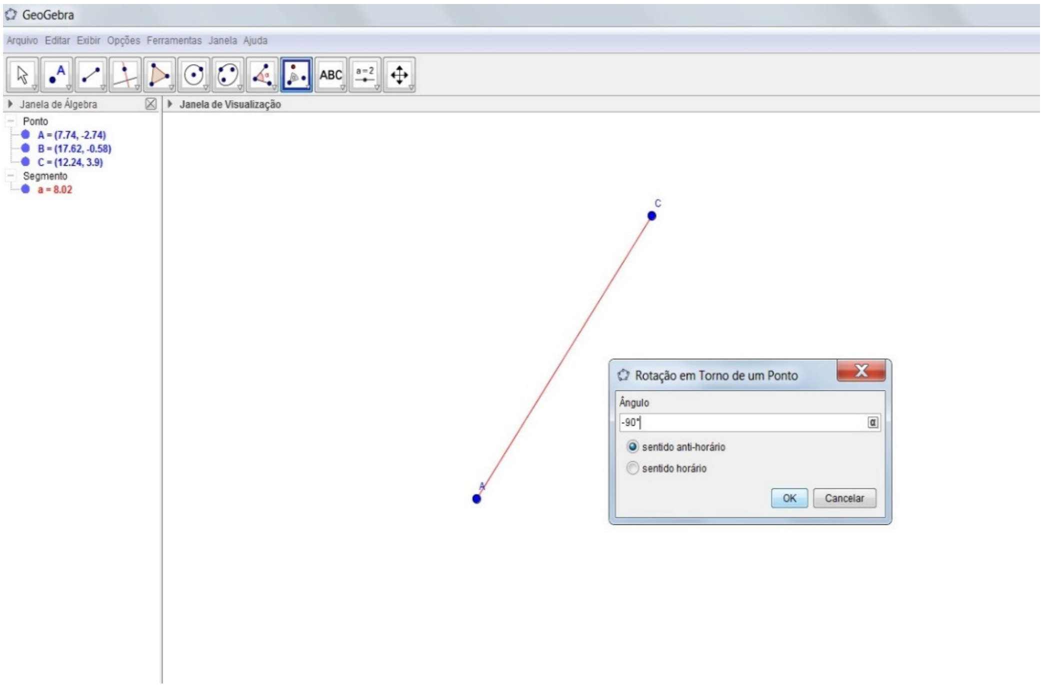


Figura 35 – Passo 4: Construção *Geogebra*

5. Crie, de forma análoga ao *passo 3*, o segmento $\overline{CB}$ e faça um giro a partir do mesmo, análogo ao *passo 4*, ao clicar em $\overline{CB}$, em seguida em B e digitar na caixa 90°.

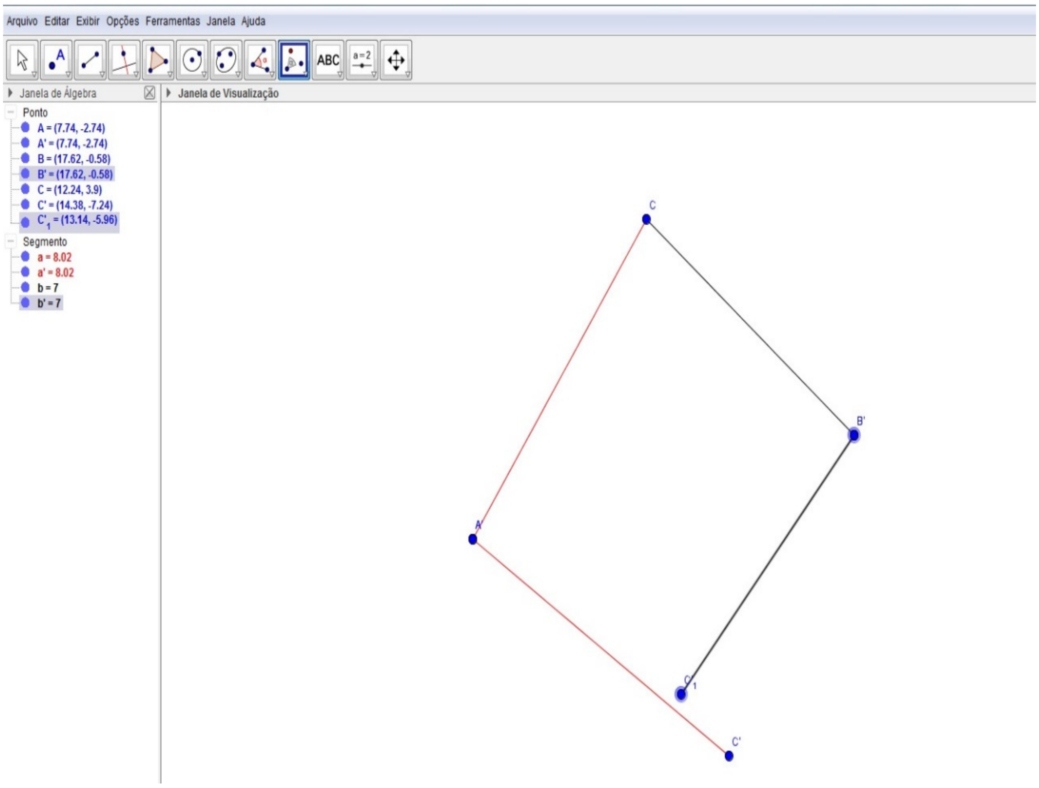


Figura 36 – Passo 5: Construção *Geogebra*

6. Construa o segmento $\overline{C'C_1{}'}$ e marque seu ponto médio, ao clicar na opção ponto (**. *A***) e selecione <u>*Ponto médio ou centro*</u>, troque o nome do ponto *D* para ponto T, para representar o tesouro.

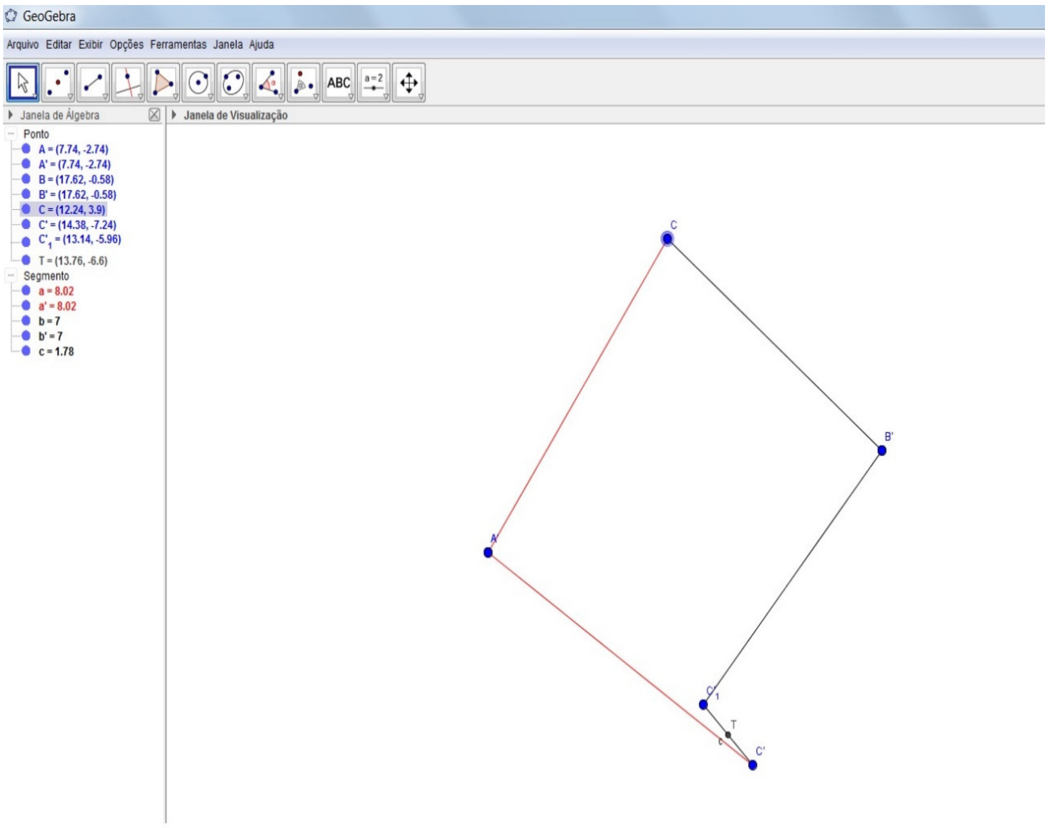


Figura 37 – Passo 6: Construção *Geogebra*

E após essa construção, surge ***<u>a parte mais interessante</u>***. Clique sobre o ponto C e mova-o. Perceberá que o ponto T permanecerá estático, ou seja, não importa a posição da palmeira, conhecendo-se a posição do tesouro não irá se alterar.

O mais interessante neste problema é, além de utilizar-se do conceito de complexos para um enunciado inicialmente lúdico, notar que para encontrar o tesouro não se necessita da posição da palmeira. Lembre-se que a mesma é representada através do ponto C, o que significa que não importa onde ela está, o tesouro será sempre encontrado no mesmo lugar.

As explicações matemáticas, através do uso dos números complexos, para observar que a posição da palmeira não é importante, veja a figura final novamente, agora com algumas alterações de nomes e cores:

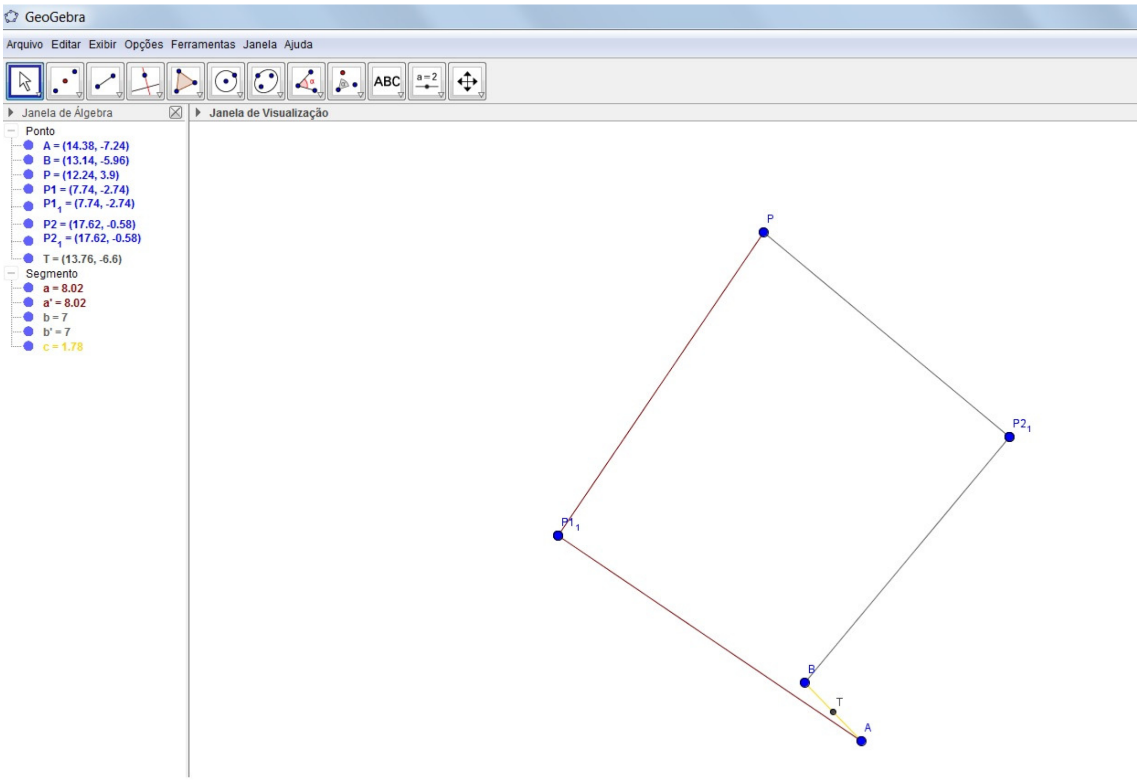


Figura 38 – Construção final *Geogebra*

I. O ponto A é obtido através da rotação do vetor $\overrightarrow{P1_1}$ no sentido horário:

$\overrightarrow{P1_1A} = \overrightarrow{P1_1P} \cdot (-i)$ (indica uma rotação de $-90°$)

$A - P_1 = (P - P_1)(-i)$

$A = P1_1 + P1_1 \cdot i - P \cdot i$

E:

$\overrightarrow{P2_1B} = \overrightarrow{P2_1P} \cdot i$ (indica uma rotação de $90°$)

$B - P2_1 = (P - P2_1)\, i$

$B = P2_1 - P2_1 \cdot i + P \cdot i$

Ao resolver o sistema obtido a partir das duas equações:

$$\begin{cases} A = P1_1 + P1_1 \cdot i - P \cdot i \\ B = P2_1 - P2_1 \cdot i + P \cdot i \end{cases}$$

$$A + B = P1_1 + P2_1 + (P1_1 - P2_1)i$$

Como T está situado no ponto médio de $A\ e\ B$, tem-se:

$$T = \frac{A+B}{2} = \frac{P1_1 + P2_1}{2} + \frac{P1_1 - P2_1}{2} i$$

Observe que ao fazer as contas o ponto P se anula, sendo desnecessária a posição da palmeira.

Vetorialmente a posição do tesouro $T = \frac{A+B}{2} = \frac{P1_1+P2_1}{2} + \frac{P1_1-P2_1}{2} i$ é dada pelo vetor $\frac{\overrightarrow{P2_1P1_1}}{2}$ com rotação de 90° no sentido anti-horário devido o produto com a unidade imaginária, obtido a partir do vetor $\overrightarrow{P2_1P1_1} = P1_1 - P2_1$ cuja origem será dada pelo ponto $\frac{P1_1+P2_1}{2}$, ponto médio do segmento de extremidades $P1_1\ e\ P2_1$.

A construção do Geogebra tem a origem no ponto médio M e vetor $\vec{v}$ como vetor resultante:

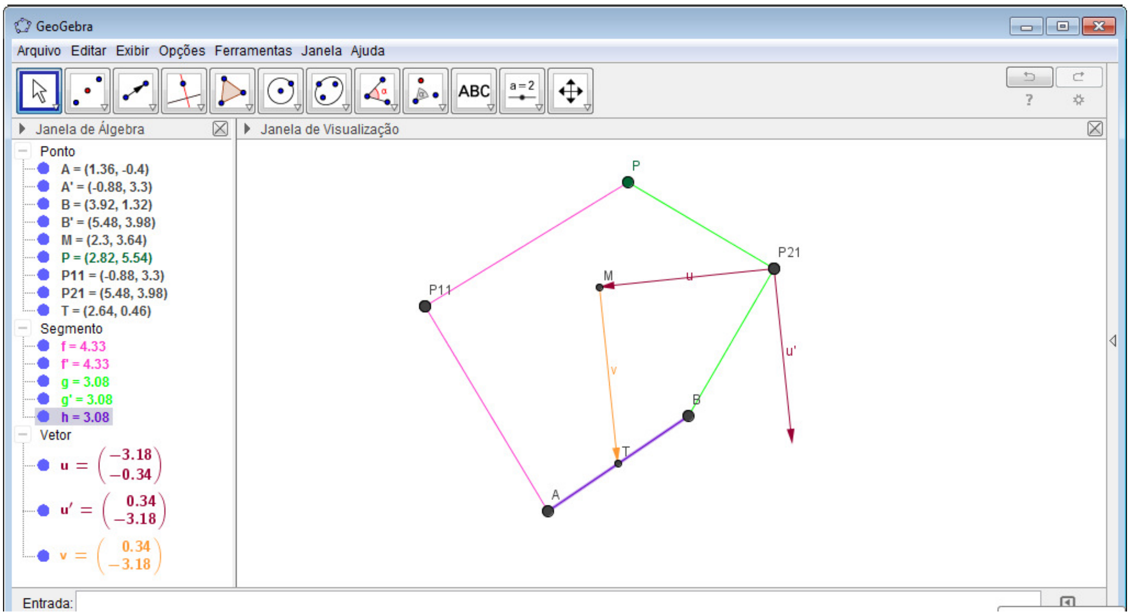


Figura 39 – Construção final vetorial Geogebra

Aula 2

ESTRUTURA	
Tempos de aula	1 a 2
Duração (min)	50 a 100
Série indicada	3°ano ensino médio
Material	Quadro Branco
Uso de Geogebra	Não
Pré-requisitos	Conhecimentos sobre Polinômios
Conteúdo	Números complexos e polinômios

Figura 40 – Tabela 13: Estrutura da primeira aula proposta

A aula inicial possuía uma proposta geométrica em sua abordagem, para esta segunda proposta iremos introduzir um Teorema para ser discutido/trabalhado algébrica e geometricamente.

Esta aula requer que o aluno tenha um conhecimento prévio de polinômios e na primeira e segunda fórmulas de *De Moivre.*

Antes da introdução do teorema pode-se discutir sobre as raízes n-ésimas da unidade.

Utilizar-se-á da fórmula de *De Moivre* para radiciação de complexos:

$$w^n = z, então\ w = \sqrt[n]{\rho}\,.\left(\cos\left(\frac{\theta+360°.k}{n}\right) + i\ sen\left(\frac{\theta+360°.k}{n}\right)\right), onde\ k \in \mathbb{N}, 0 \leq k < n.$$

Ao tratar-se da unidade, toma-se $z = 1.$ Geometricamente, $z = (1,0)$, logo $\rho = 1\ e\ \theta = 0°$. Sendo, na forma trigonométrica, $z = cis0°$.

Tem-se $k = \{0,1,2, \dots, n-1\}$, sendo o primeiro valor de $k = 0,$ ao substituí-lo na fórmula, para qualquer que seja o valor de n:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{1}\, cis\left(\frac{0° + 360°.0}{n}\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = cis0°$$

Logo, $z = 1$ sempre será raiz de si mesmo.

<u>E as demais raízes</u>?

Retome a fórmula e observe que a mesma, utilizando-se de:

$$\sqrt[n]{1} = 1, \forall\, n$$

$$\theta = 0°$$

Logo, as demais raízes serão encontradas a partir de:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{1}\, cis\left(\frac{0° + 360° \cdot k}{n}\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = cis\left(\frac{360° \cdot k}{n}\right)$$

Por exemplo, ao descobrir as raízes cúbicas da unidade teremos:

$$n = 3\ e\ k = \{0,1,2\}$$

$$z_1 = z = 1$$

$$z_2 = cis\left(\frac{360 \cdot 1}{3}\right) = cis(120°)$$

$$z_3 = cis\left(\frac{360 \cdot 2}{3}\right) = cis(240°)$$

$$S = \{cis0°, cis120°, cis240°\}$$

Como consequência, as raízes quartas da unidade serão:

$$S = \{cis0°, cis90°, cis180°, cis270°\}$$

Ao obter essa conclusão, é importante notar que estes afixos serão vértices de polígonos de $n\ lados$, inscritos em uma circunferência de raio unitário. O que ainda nos permitirá abordar e trabalhar a *circunferência trigonométrica* através de seus senos e cossenos, além de explorar as áreas destas figuras. Observar também que os ângulos compõem uma progressão aritmética de razão $\frac{360°}{n}$ e $a_1 = 0°$.

Segue por NICODEMOS, José Jorge o teorema:

***Teorema*:** As n raízes do polinômio $p(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1$ são as raízes $(n + 1)$-ésimas da unidade, exceto a própria unidade.

É importante lembrar que todo polinômio de grau n possui, no máximo, n raízes complexas distintas.

Observe que os coeficientes do polinômio $(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n)$ compõem uma progressão geométrica de $a_1 = 1\ e\ q = x$, e o mesmo representa a soma desta progressão, cuja fórmula é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 \cdot (q^n - 1)}{q - 1}}$$

Sendo assim, $p(x) = S_n$ pode ser reescrito por:

$$p(x) = \frac{1 \cdot (x^{n+1} - 1)}{x - 1}$$

$$p(x) = \frac{(x^{n+1} - 1)}{x - 1}\ , \forall\ x \neq 1$$

Como $(x^{n+1} - 1)$ é divisível por $(x - 1)$, o seu quociente será dado por:

$$q(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x + 1$$

Por isso, excetua-se a unidade como raiz do polinômio, por exemplo.

Exemplos:

1)Calcule as raízes de $x^2 + x + 1 = 0$.

Resposta:

Haverá dois modos de resolver o problema:

1ªsolução:

O aluno utilizar-se-á de forma natural a *fórmula de Bháskara* e ao constatar o discriminante negativo, obterá as respostas na forma algébrica $z = a + bi$.

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$
$$\Delta = -3 < 0$$

Logo, as raízes serão:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2.1}$$
$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$
$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2} = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$S = \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \, ; \, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right\}$$

2ªsolução:

Seja $n = 2$, então suas raízes se darão pelas raízes cúbicas $(n + 1 \Rightarrow 2 + 1 = 3)$ da unidade, exceto a própria unidade, logo:

$$\rho = \sqrt[3]{1} = 1 \; e \; \theta = \frac{360°}{3} n, \qquad para \; n = \{1,2\}$$
$$\boxed{x_n = cis \left(\frac{360°}{3} n \right)}$$

$$x_1 = cis 120° = cos(120°) + isen(120°)$$
$$x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$$x_2 = cis 240° = cos(240°) + isen(240°)$$

$$x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$S = \{cis120°; cis240°\}$$

Sendo esta solução equivalente à anterior, escrita na forma trigonométrica dos números complexos. O módulo unitário presente nas soluções facilita a associação das soluções com a circunferência trigonométrica.

2) Considere o polinômio $p(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Faça o que se pede:
a) Calcule as raízes.

b) Determine a área do polígono obtido a partir dos afixos das raízes deste polinômio.

<u>Respostas</u>:

a) Neste caso $n = 7$, então suas raízes serão dadas por $\sqrt[8]{1}$ exceto a própria unidade, tendo por base $cis\left(\frac{360°}{n}\right)$, o conjunto solução será dado por:

$$S = \{cis45°, cis90°, cis135°, cis180°, cis225°, cis270°, cis315°\}$$

$$x_1 = cis45° = cos(45°) + isen(45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_3 = cis135° = cos(135°) + isen(135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_5 = cis225° = cos(225°) + isen(225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_7 = cis315° = cos(315°) + isen(315°) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$x_2 = cis90° = cos(90°) + isen(90°) = i$$

$$x_4 = cis180° = cos(180°) + isen(180°) = -1$$

$$x_6 = cis270° = cos(270°) + isen(270°) = -i$$

Observe que cada raiz de índice ímpar é obtida através da rotação de i a partir da anterior e igualmente para cada raiz de índice par, afinal o produto pela unidade imaginária faz uma rotação de 90° a partir do número complexo dado, sem que altere o seu módulo.

$$x_3 = i \cdot x_1 \qquad x_4 = i \cdot x_2$$
$$x_5 = i \cdot x_3 \qquad x_6 = i \cdot x_4$$
$$x_7 = i \cdot x_5$$

Veja:

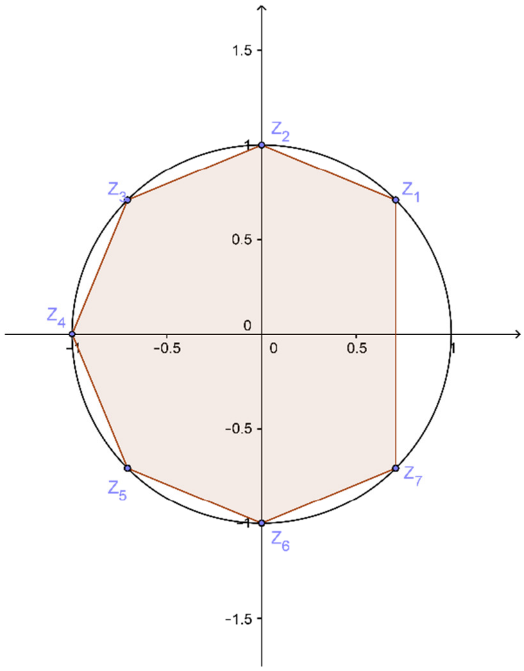


Figura 41 – Plano cartesiano da aula proposta 2

Lembre-se que esta é uma circunferência de raio unitário e para o auxílio de cálculos geométricos poderia ser utilizado o ponto $(1,0)$ como suporte, obtendo-se um octógono regular.

Observe que os ângulos formam uma progressão aritmética de razão 45°.

b)Seja O a origem do plano cartesiano acima. Perceba que os triângulos $z_1Oz_2, z_2Oz_3, z_3Oz_4, z_4Oz_5, z_5Oz_6, z_6Oz_7$ são da forma:

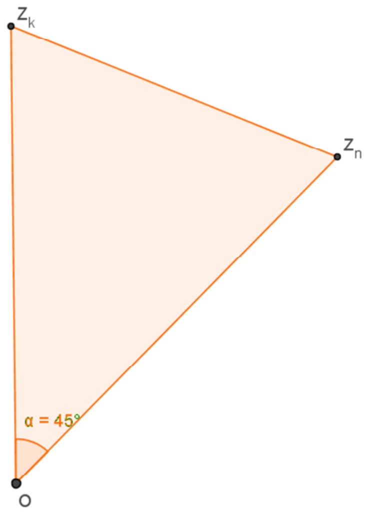


Figura 42 – Triângulo utilizado para resolução do problema na aula proposta 2

Com $n = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Os lados que formam o ângulo de 45° são iguais ao raio da circunferência, sendo este *unitário*. Sua área pode ser calculada por:

$$\boxed{A = \frac{a \cdot b \cdot sen\alpha}{2}}$$

Neste caso, $a = b = 1\ e\ \alpha = 45°$. Logo cada triângulo acima possui área igual a:

$$A = \frac{1 \cdot 1 \cdot sen45°}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{4}\ u.a.$$

O triângulo z_1Oz_7 possui o ângulo com vértice em O igual a 90° $(45° + 45°)$. Sendo os catetos dados pelo raio da circunferência. Sua área será igual a metade do produto dos catetos:

$$A = \frac{1 \cdot 1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}\ u.a.$$

A área do heptágono $z_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7$ será:

$$A = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{3\sqrt{2} + 1}{2}\ u.a.$$

Há outras formas de se calcular essa área, acima foi citado apenas um exemplo da mesma.

A partir dos exemplos acima, surgem outros exemplos como sugestão. Por exemplo, pode-se pedir ao aluno para calcular estas raízes na forma algébrica, utilizando-se dos conhecimentos da *circunferência trigonométrica,* além de calcular a área do polígono cujos vértices são os números complexos que compõem as raízes do polinômio dado, conforme o exemplo colocado anteriormente.

Conforme citações ao longo dos capítulos desta dissertação, a contribuição mais relevante dos números complexos para o estudo da Matemática se dá através das suas aplicações geométricas. Apesar dos conceitos algébricos utilizados ao longo da aula acima, a geometria não será e nem poderá ser deixada de lado.

CONCLUSÃO

O assunto *Números Complexos*, desde os 15 anos, quando o vi a primeira vez no final do segundo ano do ensino médio, sempre me despertou interesse e inúmeras curiosidades que iam além das poucas demonstrações feitas e inúmeras fórmulas dadas e a serem decoradas. Quais seriam as aplicações? Afinal, aprenderíamos tal assunto simplesmente por uma mera ementa escolar a ser seguida e finalizada? Sempre acreditei que existiriam aplicações. Outro questionamento se deu para seu surgimento, o que sempre me interessou, pois, a linha histórica, na minha opinião, nos faz entender muito sobre o contexto que tal assunto se desenvolveu e com a cobrança de cumprimento dos prazos e calendários de provas, as aulas tem se encaminhado para o ensino de fórmulas e fórmulas, as quais muitas vezes não dão sentido à cabeça do aluno para uma continuidade em tal aprendizado.

Um dos objetivos da escolha deste trabalho foi entender, através dos colegas docentes, das orientações curriculares, das provas pré-universitárias regionais e federais, um pouco do desaparecimento deste conteúdo de sala de aula.

As surpresas ao escrever esta dissertação foram muitas, desde a sutileza necessária ao escrever sobre *Números Complexos*, a elaboração das figuras, linha histórica e propriedades. Valorizou-se bastante o uso do *Geogebra* ao longo da dissertação, por ser uma importante ferramenta que pode ser utilizada em sala de aula.

O conteúdo, ao tratar das fórmulas e demonstrações, além do período histórico, foram citados e escritos de forma direta e sucinta, afinal para elaboração dos capítulos estruturados acima, foram lidos inúmeros livros e trabalhos, que os descrevem de maneira completa. O foco se deu através da visão dos docentes, para as aplicações dos números complexos, afinal a relação com situações e utilizações cotidianas se faz cada vez mais útil e necessária para os conteúdos lecionados em sala de aula, pois os alunos, na era da informação, nos trazem cada vez mais estes questionamentos. Além da análise dos livros didáticos e sugestões das aulas, especialmente a segunda delas.

A realidade da educação brasileira e outras dificuldades encontradas tem trazido inúmeras dificuldades para as salas. As aulas de Matemática, em diversas situações, têm se tornado uma mera robotização para os alunos, sem qualquer atrativo senão o colorido dos materiais, quando existem. Abordagens e demonstrações geométricas têm se perdido com o passar dos anos. Houve um convencimento natural de que os alunos sejam incapazes de compreender e aprender alguns assuntos, realidade que atinge a maioria das escolas, sem esquecer das situações adversas que se tem em muitas delas.

O trabalho apresentado procurou dividir experiências e trazer numa linguagem mais direta, novas visões e sugestões, com embasamento estatístico e textual. Devido ao avanço da tecnologia, já presente em muitas salas de aula, e as mudanças constantes e frequentes nos planos educacionais, é natural que o professor se veja preso à dualidade do formal e do novo.

Referências bibliográficas

[1] PINTO JUNIOR, Ulisses. **A HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS: "das qutoradouantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand".** 2009. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Matemática, Ufrj, Rio de Janeiro, 2009. Cap. 7.

[2] CARNEIRO, José Paulo; WANDERLEY, Augusto. **OS NÚMEROS COMPLEXOS E A GEOMETRIA DINÂMICA.** 2010. 10 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mate, Uerj, Rio de Janeiro, 2010. Cap. 10.

[3] MILIES, César Polcino. **Breve História da Álgebra Abstrata.** 2010. 54 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de MatemÁtica, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de S˜ao Paulo, São Paulo, 2010. Cap. 5.

[4] OLIVEIRA, Carlos Nely Clementino de. **NÚMEROS COMPLEXOS:** Um estudo dos registros de representação e de aspectos gráficos. 2010. 191 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado em Educação Matemática, Puc/sp, São Paulo, 2010. Cap. 4.

[5] SANTOS NETO, Alípio dos; LAZZARI, Maria de Lourdes; QUEIROZ, Maria Eveline Pinheiro Villar de. **ORIENTAÇÕES CURRICULARES PARA O ENSINO MÉDIO:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. 2006. 134 f. - Secretaria de Educação, Ministério da Educação, Brasília, 2006.

[6] ALMEIDA, Salomão Pereira de. **NÚMEROS COMPLEXOS PARA o ENSINO MÉDIO:** Uma Abordagem Com História, Conceitos Básicos e Aplicações. 2013. 53 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Ufcg, Campina Grande, 2013. Cap. 5

[7] BRASIL. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Linguagens, códigos e suas tecnologias. Brasília: Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2002. 244p.

[8] CALDEIRA, Cláudia Rosana da Costa. **O Ensino dos Números Complexos numa Perspectiva Histórica:** de Tartaglia ao Uso das TICs. 2010. 11 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ppg Ensino da Matemática, Ufrgs, Rio Grande do Sul

[9] MATHIAS, Carlos. **Um Olhar Humanista sobre os Números Complexos.** 23 f. - Curso de Matemática, Uff, Rj

[10] SÁNCHEZ, Jesús A. P.; CARNEIRO, José Paulo Q.. **A ILHA DO TESOURO:** Dois problemas e duas soluções. 2001. 4 f. Rpm 47, Sbm, Mérida, Venezuela, 2001.

[11] LIMA, Elon Lages; WAGNER, Eduardo; RPM, Comitê Editorial da. **Revista do Professor de Matemática - OBMEP.** 2013. 185 f. Rpm - Obmep, Sbm, Rio de Janeiro, 2013.

[12] NICODEMOS, José Jorge. **Utilizando Conexões para o Estudo de Polinômios.** 2013. 24 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Profmat, Unirio, Rio de Janeiro, 2013. Cap. 4

Anexo 1

QUESTIONÁRIO

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática?

____

2. Formou-se em Universidade:

( ) Pública ( ) Privada

3. Trabalha atualmente em:

( ) Rede Pública municipal

( ) Rede Pública estadual

( ) Rede Pública federal

( ) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?

( ) 6º ano Ensino Fundamental

( ) 7º ano Ensino Fundamental

( ) 8º ano Ensino Fundamental

( ) 9º ano Ensino Fundamental

( ) 1º ano Ensino Médio

( ) 2º ano Ensino Médio

( ) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?

( ) Não

( ) Apenas Ensino Fundamental

( ) Apenas Ensino Médio

( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?

( ) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente

( ) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.

( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*

( ) Apenas o *software*

( ) Ambos

( ) Nenhum

____

____

____

____

____

____

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.

( ) Sim ( ) Não

____

____

____

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

____

____

____

____

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:

( ) No Ensino Fundamental

( ) No Ensino Médio

( ) Em ambos

( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? ( ) SIM ( ) NÃO

Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?

( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos

( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica

( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.

( ) outros

____

____

____

____

____

12. Em uma aula com duração de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

____

____

____

____

____

____

____

____

Anexo 2

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática?
13 anos

2. Formou-se em Universidade:
(x) Pública ( ) Privada

3. Trabalha atualmente em:
( ) Rede Pública municipal
(x) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
(x) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?
( ) 6º ano Ensino Fundamental
(x) 7º ano Ensino Fundamental
(x) 8º ano Ensino Fundamental
( ) 9º ano Ensino Fundamental
(x) 1º ano Ensino Médio
(x) 2º ano Ensino Médio
(x) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?
( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(x) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?
(x) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente
(x) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.
( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
( ) Apenas o *software*
( ) Ambos
(x) Nenhum

A falta de tempo devido a quantidade de conteúdos é a principal causa

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.
(X) Sim ( ) Não

PARA A APRENDIZAGEM POIS VOCÊ ABORDA BASTANTE ALGEBRISMO E RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS E PARA O DESENVOLVIMENTO POR DESCOBRIREM QUE OS $\mathbb{C}$ FORAM UMA FORMA DE SUPERAR ABSTÁCULOS EM $\mathbb{R}$.

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

VOLTO AO ESTUDO DAS EQUAÇÕES DE SEGUNDO GRAU QUANDO O DESCRIMINANTE É NEGATIVO E A PARTIR DALÍ, DESENVOLVEMOS AS POSSIBILIDADES, INTERPRETAÇÃO NO PLANO E A NECESSIDADE DE TERMOS DUAS RETAS, IMAGINÁRIA E REAL.

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:
( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? ( ) SIM (X) NÃO
Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?
(X) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
( ) outros

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

COMEÇARIA COM A PROBLEMÁTICA DA RAIZ QUADRADA DE NÚMERO NEGATIVO, DEPOIS ALGEBRIZAVA INICIALMENTE PARA TERMINAR COM VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA. O IDEAL SERIA O INVERSO, POREM O POUCO TEMPO NÃO PERMITE UMA MAIOR ANALISE E VISUALIZAÇÃO ESPONTÂNEA.

Anexo 3

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não *serão divulgados na pesquisa*.

1. Há quantos anos leciona Matemática?

____

2. Formou-se em Universidade:
( ) Pública (X) Privada

3. Trabalha atualmente em:
(X) Rede Pública municipal
(X) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
( ) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?
(X) 6º ano Ensino Fundamental
( ) 7º ano Ensino Fundamental
(X) 8º ano Ensino Fundamental
( ) 9º ano Ensino Fundamental
( ) 1º ano Ensino Médio
(X) 2º ano Ensino Médio
( ) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?
( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?
(X) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente
( ) Sim (X) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.
( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
( ) Apenas o *software*
( ) Ambos
(X) Nenhum

Ausência de equipamentos adequado

O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.

( ) Sim (X) Não

Procura-se outros método de colocar o assunto

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

Nesse ano de 2015 não. Em anos anteriores, inicio usando equações do 2º grau com Δ negativo (valor do Δ).

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:

( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? (X) SIM ( ) NÃO

Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?

( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
( ) outros

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

Mais algebricamente, (até mesmo pela falta da tecnologia). A partir do plano Gauss, mostro a parte trigonométrica e suas operações.

Anexo 4

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática?

12 anos

2. Formou-se em Universidade:

(X) Pública ( ) Privada

3. Trabalha atualmente em:

( ) Rede Pública municipal
( ) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
(X) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?

(X) 6º ano Ensino Fundamental
( ) 7º ano Ensino Fundamental
(X) 8º ano Ensino Fundamental
( ) 9º ano Ensino Fundamental
(X) 1º ano Ensino Médio
(X) 2º ano Ensino Médio
(X) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?

( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?

(X) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente

(X) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.

( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
( ) Apenas o *software*
( ) Ambos
(X) Nenhum

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.

(X) Sim ( ) Não

Para podermos ajudar e mostrar aos alunos, soluções de equações sem soluções.

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

Não.

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:

( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? (X) SIM ( ) NÃO

Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?

( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
( ) outros

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

Acho que uma abordagem mais geométrica seria mais fácil para compreensão do aluno. Como os alunos tem no 1º ano uma abordagem forte sobre trigonometria, fica fácil essa abordagem.

Anexo 5

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática?
há mais de vinte e cinco anos.

2. Formou-se em Universidade:
(X) Pública ( ) Privada

3. Trabalha atualmente em:
(X) Rede Pública municipal
(X) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
( ) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?
(X) 6º ano Ensino Fundamental
(X) 7º ano Ensino Fundamental
(X) 8º ano Ensino Fundamental
(X) 9º ano Ensino Fundamental
(X) 1º ano Ensino Médio
(X) 2º ano Ensino Médio
(X) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?
( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?
(X) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente
(X) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.
( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
( ) Apenas o *software*
( ) Ambos
(X) Nenhum

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.

(X) Sim ( ) Não

Sim como objetivo de ampliar o conhecimento, despertar para o "imaginário"

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

Sim, de forma simples, operações e algumas propriedades, visando despertar no aluno o interesse em conhecer universos diferentes daqueles em que estavam acostumados.

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:

( ) No Ensino Fundamental

(X) No Ensino Médio

( ) Em ambos

( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? (X) SIM ( ) NÃO

Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?

( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos

( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica

( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.

( ) outros

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

Seria mais algébrico, ressaltando as operações entre os números.

Anexo 6

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática?
3 ANOS

2. Formou-se em Universidade:
(X) Pública ( ) Privada

3. Trabalha atualmente em:
( ) Rede Pública municipal
(X) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
( ) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?
(X) 6º ano Ensino Fundamental
(X) 7º ano Ensino Fundamental
(X) 8º ano Ensino Fundamental
(X) 9º ano Ensino Fundamental
(X) 1º ano Ensino Médio
(X) 2º ano Ensino Médio
(X) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?
( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?
(X) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente
(X) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.
( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
(X) Apenas o *software*
( ) Ambos
( ) Nenhum

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.
(X) Sim ( ) Não

É IMPORTANTE MOSTRAR AOS ALUNOS A NECESSIDADE DA EXTENSÃO ALGÉBRICA DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS E SUAS APLICAÇÕES NA MATEMÁTICA.

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

SIM. PRIMEIRO EU FALO DO CONTEXTO HISTÓRICO DA ORIGEM DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 3º GRAU. EM SEGUIDA, MOSTRO A NECESSIDADE DE DEFINIR UMA UNIDADE IMAGINÁRIA EM PROBLEMAS DE EQUAÇÃO DO 2º GRAU. DEPOIS TRABALHO AS FORMAS ALGÉBRICAS E TRIGONOMÉTRICAS E SUAS PROPRIEDADES.

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:
( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? ( ) SIM (X) NÃO
Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?
( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
(X) outros

OS NÚMEROS COMPLEXOS NÃO É ABORDADO. DE FORMA GEOMÉTRICA. TALVEZ PORQUE NÃO É ENSINADO VETORES NA EDUCAÇÃO BÁSICA.

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

FALAR SOBRE O CONTEXTO HISTÓRICO DOS NÚMEROS COMPLEXOS COM UM DIRECIONAMENTO MAIS ALGÉBRICO.

Anexo 7

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática?

SEIS ANOS

2. Formou-se em Universidade:

(X) Pública ( ) Privada

3. Trabalha atualmente em:

(X) Rede Pública municipal
( ) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
(X) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?

( ) 6º ano Ensino Fundamental	(X) 1º ano Ensino Médio
( ) 7º ano Ensino Fundamental	(X) 2º ano Ensino Médio
(X) 8º ano Ensino Fundamental	(X) 3º ano Ensino Médio
(X) 9º ano Ensino Fundamental	

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?

( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?

(X) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente

(X) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.

( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
(X) Apenas o *software*
( ) Ambos
( ) Nenhum

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.
(X) Sim ( ) Não
É IMPORTANTE QUE O ALUNO CONHEÇA OUTROS CONJUNTOS NUMÉRICOS ALÉM DOS REAIS E SUAS PROPRIEDADES.

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.
SIM. PRIMEIRAMENTE MOSTRO AS RAÍZES COMPLEXAS DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU. MOSTRO A FORMA ALGÉBRICA DO NÚMERO E SUAS PROPRIEDADES. EFETUO AS OPERAÇÕES BÁSICAS E A FORMA TRIGONOMÉTRICA.

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:
( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? (X) SIM ( ) NÃO
Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?
( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
( ) outros

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.
ALGÉBRICO. EM 50 MINUTOS MOSTRARIA SOMENTE A EXISTÊNCIA DE UM NOVO CONJUNTO NUMÉRICO.

Anexo 8

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática?
SETE ANOS.

2. Formou-se em Universidade:
(X) Pública ( ) Privada

3. Trabalha atualmente em:
( ) Rede Pública municipal
( ) Rede Pública estadual
(X) Rede Pública federal
( ) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?
( ) 6º ano Ensino Fundamental
(X) 7º ano Ensino Fundamental
(X) 8º ano Ensino Fundamental
(X) 9º ano Ensino Fundamental
( ) 1º ano Ensino Médio
(X) 2º ano Ensino Médio
( ) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?
( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?
(X) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente
(X) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.
( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
( ) Apenas o *software*
( ) Ambos
(X) Nenhum
ESTÁ ASSOCIADO A MINHA METODOLOGIA EM CONJUNTO COM A FALTA DE TEMPO EM OPERAÇÕES NA FORMA TRIGONOMÉTRICA GOSTARIA DE USAR ALGUM RECURSO.

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.
(X) Sim ( ) Não

AJUDA NO DESENVOLVIMENTO DE ALGUMAS EQUAÇÕES QUE NÃO POSSUI RAÍZES REAIS. ALÉM DE REFORÇAR, ATRAVÉS DE APLICAÇÕES O ENSINO DA TRIGONOMETRIA.

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

SIM. INTRODUZO O CONTEÚDO ATRAVÉS DE UMA EQUAÇÃO DO 2º GRAU QUE NÃO POSSUA RAÍZ REAL, APÓS TENTO FAZER COM QUE O ALUNO INTENDA QUE O NÚMERO COMPLEXO É ESCRITO COM UMA COORDENADA REAL E OUTRA IMAGINÁRIA, SEGUIDO DE SUAS OPERAÇÕES ALGÉBRICAS E GEOMÉTRICAS.

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:
( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? ( ) SIM (X) NÃO
Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?
(X) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
( ) outros

OUTROS VESTIBULARES, COMO A PRIMEIRA FASE DA UERJ, TAMBÉM NÃO ABORDAM O TEMA.

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

INICIALMENTE, COMO JÁ DITO, INÍCIO COM EXEMPLO DE EQUAÇÕES QUE NÃO POSSUAM RAÍZES REAIS. EM GERAL, COM EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU. EM SEGUIDA FAÇO AS OPERAÇÕES FUNDAMENTAIS, SOMA, SUBTRAÇÃO E MULTIPLICAÇÃO NA FORMA ALGÉBRICA. SEGUIDO DE APLICAÇÕES E EXERCÍCIOS. VEJO GRANDE ABANDONO NAS ESCOLAS DO ENSINAMENTO DE EQUAÇÕES DO TIPO $x^n = z$ (2ª RELAÇÃO DE MOIVRE), EM GRANDE PARTE, PELA POUCA COBRANÇA EM CONCURSOS DE ACESSO A GRADUAÇÃO.

Anexo 9

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não *serão divulgados na pesquisa.*

1. Há quantos anos leciona Matemática?

43 anos

2. Formou-se em Universidade:

( ) Pública (X) Privada

3. Trabalha atualmente em:

(X) Rede Pública municipal
( ) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
(X) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?

( ) 6º ano Ensino Fundamental
(X) 7º ano Ensino Fundamental
( ) 8º ano Ensino Fundamental
( ) 9º ano Ensino Fundamental
(X) 1º ano Ensino Médio
(X) 2º ano Ensino Médio
(X) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?

( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?

(X) Sim ( ) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente

(X) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.

( ) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
( ) Apenas o *software*
( ) Ambos
(X) Nenhum

Não uso pois a escola não dispõe de recursos

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.
(X) Sim ( ) Não

Dá ao aluno a visão da necessidade da criação de novos números para solução de problemas que surgem e a visão de alguns sistemas onde números complexos são usados. (sistema monetário, sistema métrico, etc.)

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

Sim. A necessidade de resolver raízes quadradas de negativos para solução de equações do 2º grau

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:
( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? (X) SIM ( ) NÃO
Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?
( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
( ) outros

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

Os dois, pois costumo mostrar numa função quadrática que não temos as raízes, mas seu gráfico é plenamente possível

Anexo 10

Estimado Professor,

Este questionário foi elaborado com a finalidade acadêmica de pesquisa sobre a abordagem do Ensino dos Números complexos na Educação básica. Agradeço, de antemão, por sua colaboração e solicito que o questionário seja respondido atentamente. Ressalto que as respostas não gerarão danos ou punições aos professores, alunos e a instituição. Além disso, os dados não serão divulgados na pesquisa.

1. Há quantos anos leciona Matemática? 36

____

2. Formou-se em Universidade:
( ) Pública (X) Privada

3. Trabalha atualmente em:
( ) Rede Pública municipal
( ) Rede Pública estadual
( ) Rede Pública federal
(X) Rede Privada

4. Qual(is) série(s) leciona?
(X) 6º ano Ensino Fundamental
(X) 7º ano Ensino Fundamental
(X) 8º ano Ensino Fundamental
(X) 9º ano Ensino Fundamental
(X) 1º ano Ensino Médio
(X) 2º ano Ensino Médio
( ) 3º ano Ensino Médio

5. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua formação no Ensino Fundamental e/ou Médio?
( ) Não
( ) Apenas Ensino Fundamental
(X) Apenas Ensino Médio
( ) Ambos

6. O assunto Números Complexos foi ensinado durante a sua graduação na universidade?
( ) Sim (X) Não

7. Ao ensinar conjuntos numéricos no Ensino Fundamental, você cita o conjunto dos números complexos? Responda apenas se você trabalha com turmas de Ensino Fundamental atualmente
(X) Sim ( ) Não

8. Durante suas aulas, o(a) senhor(a) usa algum recurso tecnológico? E de algum *software*, como o Geogebra? Descreva, caso use, o método utilizado. E o não uso, caso ocorra, estaria associado à falta de tempo para todos os conteúdos, à sua metodologia, entre outros. Justifique.
(X) Apenas o recurso tecnológico, sem o *software*
( ) Apenas o *software*
( ) Ambos
( ) Nenhum

____
____
____
____
____

9. O(A) senhor(a) considera o assunto relevante para aprendizagem e desenvolvimento do aluno? Justifique.
(X) Sim ( ) Não

Sim, mesmo para aqueles alunos que não farão um curso na área das exatas. Principalmente pela construção de um raciocínio.

10. O(A) senhor(a) ensina o conteúdo no Ensino Médio? Descreva o método e a abordagem utilizada.

Sempre começo pelo problema clássico proposto por Cardano. Ele mostra como algo que "não existe" fornece respostas que satisfazem as condições exigidas.

11. Na escola em que leciona, o conteúdo números complexos é abordado:
( ) No Ensino Fundamental
(X) No Ensino Médio
( ) Em ambos
( ) Não é abordado

Na escola em que leciona, você considera que o conteúdo números complexos é abordado de forma satisfatória? (X) SIM ( ) NÃO
Caso sua resposta tenha sido não, a que você atribui essa situação?
( ) a ausência do conteúdo na prova do Novo ENEM, nos últimos 6 anos
( ) excesso de conteúdo a.ser abordado na Educação Básica
( ) influência dos gestores escolares, direção e coordenação.
( ) outros

A ausência desse assunto no ENEM, deixa a abordagem apenas para o 3º ano do EM pois o mesmo só é cobrado no vestibular da UFRS.

12. Em uma sala de aula, de 50 minutos, do assunto, descreva como seria a abordagem, se teria um direcionamento mais algébrico ou geométrico.

Como o histórico desse assunto é mais ligado à resolução de equações a abordagem teria um direcionamento mais algébrico embora sem deixar de relacionar a reta com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e o plano com o conjunto $\mathbb{C}$ dos nºs complexos.