UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado

JOGO DO NIM E GRAFOS

Carolina de Sousa Oliveira

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana

Agosto de 2016

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA

Departamento de Ciências Exatas

PROFMAT - Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

JOGO DO NIM E GRAFOS

Carolina de Sousa Oliveira

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT do Departamento de Ciências Exatas, UEFS, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre**.

Orientador: Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti

Feira de Santana

05 de Agosto de 2016

Ficha Catalográfica - Biblioteca Central Julieta Carteado

Oliveira, Carolina de Sousa

O46j Jogo do NIM e grafos / Carolina de Sousa Oliveira. – Feira de Santana, 2016.

50 f.: il.

Orientador: Haroldo Gonçalves Benatti.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Estadual de Feira de Santana, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT,2016

1. Jogo de Nim. 2. Jogos com grafos. 3. NIM Circular. I. Benatti, Haroldo Gonçalves, orient. II. Universidade Estadual de Feira de Santana. III. Título.

CDU:518

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA
Departamento de Ciências Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

Ata da Sessão pública de defesa de dissertação da discente Carolina de Sousa Oliveira do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Feira de Santana

Aos dezenove dias do mês de agosto de dois mil e dezesseis às 16:00 horas no MT55 - Módulo 5, UEFS , ocorreu a Sessão pública de defesa de dissertação apresentada sob o título **"Jogo do Nim e Grafos"**, da discente **Carolina de Sousa Oliveira**, do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Estadual de Feira de Santana, para obtenção do título de MESTRE. A Banca Examinadora foi composta pelos professores: Haroldo Gonçalves Benatti (Orientador, UEFS), Adson Mota Rocha (UFRB) e Márcia Braga de Carvalho Ferreira (UEFS). A sessão de defesa constou da apresentação do trabalho pela discente e das arguições dos examinadores.

Em seguida, a Banca Examinadora se reuniu em sessão secreta para julgamento final do trabalho e atribuiu o conceito: APROVADO.

Sem mais a tratar, foi lavrada a presente ata, que segue assinada pelos membros da Banca Examinadora e pelo Coordenador Acadêmico Institucional do PROFMAT. Feira de Santana, 19 de agosto de 2016.

Haroldo G. Benatti

Prof. Dr. Haroldo Gonçalves Benatti (UEFS)
Orientador

Adson Mota Rocha

Prof. Me. Adson Mota Rocha (UFRB)

Márcia Braga de Carvalho Ferreira

Profa. Dra. Márcia Braga de Carvalho Ferreira (UEFS)

Visto do Coordenador:

Prof. Dr. Maurício de Araujo Ferreira
Coordenador do PROFMAT / UEFS

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus, por se fazer presente em todos os momentos de minha vida e me presentear com tudo que tenho.

Agradeço aos meus familiares presentes em minha vida, meus pais Maura e Domingos, meus irmãos e em especial meu marido Jilmario, sem ele o caminho seria mais difícil.

A meus amigos pelo companheirismo, especialmente Lisiane e Lais que me ajudaram de forma grandiosa para este trabalho.

A todos os meus colegas de curso que me auxiliaram nessa caminhada, em especial a minha irmã Daniela, Ernesto e Joseane, os quais estiveram sempre próximo.

Aos professores do mestrado, programa PROFMAT-UEFS, que tive a possibilidade de cursar disciplinas, apreendendo e discutindo temas importantes para a minha formação.

Ao meu orientador professor Doutor Haroldo, pelo empenho, paciência e atenção com que acompanhou este trabalho.

Resumo

O trabalho foi elaborado a partir de estudos relacionados a teoria do desenvolvimento de um jogo combinatório imparcial chamado jogo do NIM.

Discorre sobre como se joga e o desenvolver de uma estratégia vencedora, utilizando números binários e em seguida os nímeros.

Apresenta algumas definições de grafo que são utilizadas no desenvolvimento do jogo do NIM com grafos de múltiplas arestas e uma pequena extensão com NIM circular, grafos com peso nas arestas e finalizando, uma aplicação do jogo NIM e grafos no jogo da subtração.

Palavras-chave: Jogo do NIM, Jogos com Grafos, NIM Circular.

Abstract

This work is based in the development theory about an impartial combinatorial game called NIM game.

It talks about how we play and how we develop a winning strategy using binary numbers, and after, nimbers.

This work presents graph definitions which are used in NIM game development with multiple edges, a little extension with Circular NIM, the graph with edge weight. Finally, an application of NIM game and graphs in subtraction game.

Keywords: NIM Game, Game with Graphs, Circular NIM.

Sumário

Introdução

O jogo é algo que sempre fez parte da vida de uma criança, quando jogam conseguem estabelecer concentração e fazer questionamentos, pois desperta curiosidade e atenção dos que se interessam, é um recurso que pode apresentar bons resultados, pois cria situações que permite desenvolver métodos de resoluções de problemas, estimulando a criatividade e participação.

Neste trabalho estudaremos um jogo combinatório, o qual os jogadores têm todas as informações, não haverá relação com sorte para a resolução, alguns exemplos desses jogos são: dama, xadrez e o NIM.

Jogos de cartas como buraco, truco e pôquer não são combinatórios, um dos fatos é que o adversário não deve saber as cartas que o outro tem em mãos, também jogos que são jogados simultaneamente não são combinatórios, como pedra papel e tesoura ou esportes como futebol e tênis, pois jogos desse tipo dependem das habilidades físicas de seus jogadores.

O jogo a ser estudado é o NIM, sua forma mais conhecida é jogado com n pilhas, em cada uma se tem quantidades de moedas $k_1, k_2, ..., k_n$, onde n e k_i, $i = 1, 2, ..., n$, são números inteiros não negativos. Cada jogador só poderá mover moedas da pilha que ele selecionar, no seu momento de jogar o jogador que desejar vencer deve estabelecer, caso possível, uma estratégia vencedora.

O estudo para estabelecer uma estratégia vencedora está diretamente relacionado com a teoria dos jogos matemáticos, campo de investigação da matemática discreta, que necessita do jogador habilidade para a resolução de problemas, raciocínio lógico e generalização de soluções e procedimentos, além de auxiliar na construção e/ou aprimoramento da divisão, conversão para binários dentre outros.

Além do jogo NIM em sua forma mais conhecida, este trabalho estuda a variação do jogo utilizando grafos ou jogando em um grafo, apresentado assim o jogo com grafos de múltiplas arestas, NIM circular, grafos com peso nas arestas e uma aplicação no jogo da subtração, onde o grafo pode ser utilizado para se ter uma estratégia vencedora de forma diferenciada.

A teoria dos grafos é relativamente recente datada de 1735 e permite compreender ou resolver jogos, auxiliando significativamente para o ensino de Matemática podendo construir o conhecimento matemático através da investigação, necessitando de habilidades como explorar, analisar e generalizar resultados.

Capítulo 1

O jogo do NIM

Jogo é um termo do latim "jocus" que significa gracejo. Um jogo é uma atividade estruturada com regras que envolve estimulação mental e/ou física. Eles podem ser utilizados para vários fins, inclusive educacionais.

Cada jogo tem um objetivo a ser alcançado e podem existir condições de vitória, derrota e empate. O jogo pode ser visto como combinatório ou não combinatório.

Em um jogo combinatório, de forma sequenciada, os jogadores sabem, cada um em sua posição atual, a situação em que está o jogo, isto é, tem informação completa sobre o jogo em seu momento de jogar. Além disso, em tais jogos:

1. Não é utilizado algo que leve a aleatoriedade, como dados;

2. Tem-se um conjunto de posições, algumas delas são posições finais, a partir das quais não são possíveis qualquer movimento;

3. Pode-se determinar um conjunto de movimentos válidos entre as posições;

4. Existem dois jogadores, os quais jogam alternadamente, revezando-se de posição para posição;

5. Para finalizar tem-se, de forma geral, a vitória de um dos dois jogadores, porém pode ocorrer o empate para alguns jogos.

Jogos não combinatórios são aqueles em que os jogadores não têm todas as informações, a exemplo dos jogos de carta como buraco, truco e pôquer. Um dos fatos é que neles o adversário não deve saber as cartas que o outro tem em mãos, para que o jogo discorra.

Também não são classificados como combinatórios jogos que são realizadas jogadas simultaneamente, como pedra papel e tesoura ou esportes como futebol, tênis, dentre outros, que dependem da habilidade física de seus jogadores. Não serão abordados jogos não combinatórios neste trabalho.

Os jogos combinatórios são divididos em duas categorias:

- **Imparciais**: Aqueles cujas posições vencedoras e os movimentos disponíveis são os mesmos para ambos os jogadores.

- **Parciais**: Nesses jogos, os movimentos disponíveis, bem como as posições vencedoras, são diferentes para os dois jogadores. Além disso, alguns jogos parciais podem terminar em um empate, ou seja, uma posição em que nenhum jogador ganha.

A característica comum entre jogos combinatórios parciais ou imparciais é a existência de partidas finitas ou infinitas.

Será estudado neste trabalho o jogo NIM que é combinatório imparcial e disputado a partir de uma ou mais pilhas de moedas, com uma quantidade finita de moedas em cada pilha.

O NIM é jogado com n pilhas. Em cada uma delas tem-se quantidades de moedas k_1, k_2,..., k_n, onde n e k_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, são números inteiros não negativos.

Nele têm-se as seguintes regras:

1. Tem-se dois jogadores, que jogam alternadamente;

2. Cada jogador deverá selecionar uma única pilha para cada jogada;

3. Em seu momento de jogar, o jogador somente poderá mover moedas da pilha que ele selecionar;

4. Deve-se retirar pelo menos uma moeda em cada jogada, podendo retirar mais de uma ou até todas as moedas da pilha;

5. O jogador que retirar a última moeda ou as últimas moedas da última pilha será o vencedor.

Um dos jogadores poderá ter uma estratégia vencedora, que se caracterizará em como fazer jogadas que lhe garantirão a vitória independente das jogadas de seu adversário. Como estruturar essa estratégia será estudado mais à frente.

Será analisado o NIM com uma e duas pilhas, em seguida, de forma generalizada. Inicialmente será trabalhado o Exemplo 1.1, em que se terá o jogo NIM com uma pilha.

Exemplo 1.1. Observa-se o jogo em que se tem apenas uma pilha, não vazia. (Figura 1.1)

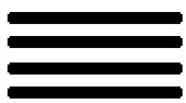

Figura 1.1: Pilha de moedas

O jogador que jogar primeiro, obviamente, terá a vitória, pois tal jogador irá simplesmente retirar todas as moedas existentes, deixando a pilha vazia para o segundo jogador.

Observe, que com uma pilha para qualquer quantidade de moedas, o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora. Pois, ele pode retirar todas as moedas da pilha em sua jogada inicial.

Faz-se, agora, a analise de dois casos do NIM com duas pilhas, o primeiro Exemplo 1.2, quando as duas pilhas têm a mesma quantidade de moedas e o segundo, Exemplo 1.3, quando as duas pilhas têm quantidades distintas de moedas.

Exemplo 1.2. Se ambas as pilhas contêm o mesmo número de moedas. Para ilustrar esse caso, veja Figura 1.2.

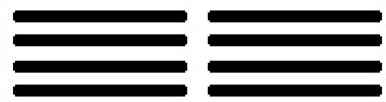

Figura 1.2: Duas pilhas de moedas, com a mesma quantidade.

A posição é facilmente vista como uma vitória para o segundo jogador. Pois, ele poderá retirar moedas na mesma quantidade que foi retirada pelo primeiro jogador e na pilha que não foi mexida, pelo primeiro.

Se o primeiro jogador resolve retirar duas moedas da primeira pilha, o segundo jogador deverá retirar duas moedas da segunda pilha.

Assim, quando o primeiro jogador retirar a última ou as últimas moedas de uma pilha, o segundo jogador poderá fazer o mesmo na outra pilha. Daí pode-se afirmar que o segundo jogador tem uma estratégia vencedora. Tal sequência de movimentos é conhecida como estratégia do espelho.

Nesse caso, a estratégia do espelho pode ser utilizada pelo segundo jogador quando houver duas pilhas com as mesmas quantidades de moedas. Com isso, o primeiro jogador se deparará com duas pilhas de mesma quantidade, não importando quantas moedas e nem de qual pilha ele retira as moedas. O segundo jogador apenas fará a retirada da mesma quantidade de moedas na pilha que não foi escolhida pelo primeiro jogador.

Exemplo 1.3. Nesse exemplo, veja Figura 1.3, serão consideradas duas pilhas com quantidades distintas de moedas.

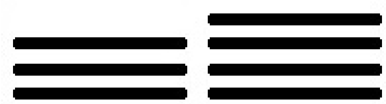

Figura 1.3: Duas pilhas de moedas, com quantidades distintas.

Para iniciar o jogo, o primeiro jogador poderá retirar uma moeda da segunda pilha, deixando assim as duas pilhas com a mesma quantidade de moedas.

Daí, o segundo jogador se encontrará em uma posição equivalente a do primeiro jogador do Exemplo 1.2, o que, independente da sua jogada, o levará a uma derrota, se agora o primeiro jogador seguir uma sequência de movimentos de acordo com a estratégia do espelho, vista anteriormente.

Uma estratégia geral para o jogo NIM foi descoberta pelo geômetra americano Charles Leonard Bouton em 1902, entre os anos de 1896 a 1898, quando realizava seu doutorado em Leipzig, o jogo despertou a sua atenção[15].

Para que se possa compreender o feito de Bouton, será necessário inicialmente realizar uma soma, chamada de soma NIM.

Definição 1.4. Dados dois inteiros não negativos a e b, a soma NIM representada por, a $\oplus$ b, é dada pelo seguinte cálculo:

(i) Escreva a e b em binário;

(ii) Adicione "sem levar um para a próxima casa".

Por exemplo, para calcular 5 $\oplus$ 7

$(5)_{10} = (101)_2$
$(7)_{10} = (111)_2$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \underline{\oplus 111} \\ 010 \end{array}$$

Como $(2)_{10} = (10)_2$

Então, a soma NIM $5 \oplus 7 = 2$

Se N é uma posição NIM de pilhas com k_1, k_2,... , k_n moedas, então a soma NIM de N é definido como sendo:

$$N = k_1 \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n$$

Observe que, neste exemplo tem-se um resultado $(010)_2 \neq 0$, assim existe algum movimento que gerará uma soma nula "0". Pensando dessa forma dar-se início a estratégia desenvolvida por Bouton[2], a qual permitirá identificar uma posição vencedora e uma posição perdedora.

Se o jogador tem uma soma NIM zero (nula) em sua vez de jogar, esta posição é caracterizada como posição perdedora ou posição-L.

Se a soma NIM é diferente de zero (positiva) em sua vez de jogar, tem-se então uma posição vencedora ou posição-W.

Na soma NIM positiva, será chamado de valor mais significativo o 1 que aparece posicionado mais à esquerda.

Será necessário identificar pelo menos um número que possa ter dado origem a este valor significativo, ou seja, uma pilha em que a quantidade de moedas expressa na representação binária tenha o algarismo 1 na mesma ordem do 1 mais significativo.

Inicialmente será identificado o 1 mais significativo em uma soma NIM, por exemplo $9 \oplus 10 = 3$.

$9 = (1001)_2$
$10 = (1010)_2$
$3 = (11)_2$

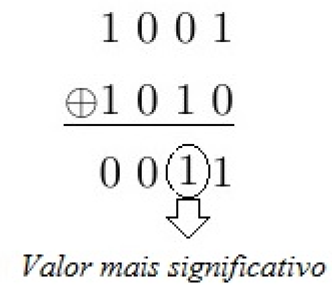

Figura 1.4: Valor mais significativo, o número 1 que encontra-se mais à esquerda na soma NIM.

Tal valor aparece no algarismo de segunda ordem, daí deve-se encontrar uma pilha que deu origem a este 1, ou seja, pilha em que a quantidade de moedas na representação binária tenha o algarismo 1 na mesma ordem do chamado mais significativo.

Neste caso será $(1010)_2$, pois o algarismo de segunda ordem dele também é 1. Trabalhando dessa forma, este valor será útil para estruturar uma estratégia vencedora.

Exemplo 1.5. Considere o jogo do NIM com três pilhas, a primeira com oito, a segunda com nove e a terceira com uma moeda (Figura 1.5). Uma estratégia vencedora poderia ser dada da seguinte forma.

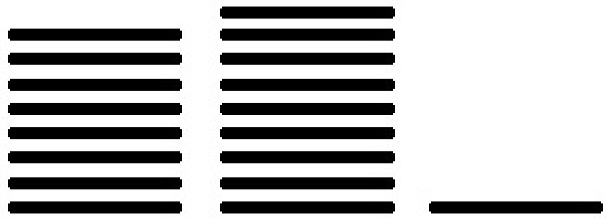

Figura 1.5: Primeiro jogador

Vamos simular um jogo, com as três pilhas, em que inicialmente tem-se a seguinte soma NIM:

$8 = (1000)_2$
$9 = (1001)_2$
$1 = (1)_2$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \oplus 1001 \\ \underline{\oplus \quad\;\; 1} \\ 0000 \end{array}$$

Com o jogo dessa forma, o segundo jogador da partida poderá ter uma estratégia vencedora, pois o primeiro jogador receberá o jogo em uma posição nula e após sua jogada haverá mudança de algum zero para um ou de algum um para zero. Independente da jogada que execute ele deixará uma soma NIM positiva e o seu oponente terá a oportunidade de realizar um movimento para uma posição com soma NIM nula.

1. Suponha então que o primeiro jogador retire duas moedas da primeira pilha, deixando o jogo na posição da Figura 1.6 para o segundo jogador;

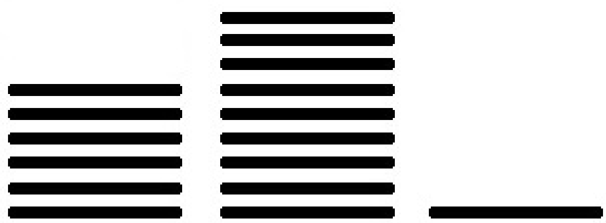

Figura 1.6: Segundo jogador

2. O segundo jogador fará a seguinte soma NIM:

$6 = (110)_2$

$9 = (1001)_2$

$1 = (1)_2$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \oplus 1001 \\ \underline{\oplus \quad\ 1} \\ 1110 \end{array}$$

Seu valor mais significativo (o que traz o 1 mais a esquerda) tem origem, neste caso, na pilha que contém nove moedas. Daí ele poderá fazer a seguinte soma:

$$\begin{array}{r} 1110 \\ \underline{\oplus 1001} \\ 0111 \end{array}$$

Esta soma gera o valor binário da quantidade de moedas que deve estar na pilha que contém nove moedas.

Faz-se então a transformação para a base 10. Obtendo assim o número $111 = 1.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = 4 + 2 + 1 = 7$, que o leva a retirar duas moedas da segunda pilha, deixando o jogo na posição ilustrada na Figura 1.7, a qual tem a soma NIM calculada no item 3.

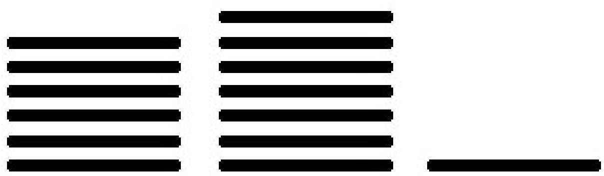

Figura 1.7: Primeiro jogador

3. O primeiro jogador estará com a seguinte soma NIM:

$6 = (110)_2$

$7 = (111)_2$

$1 = (1)_2$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \oplus 111 \\ \underline{\oplus \quad 1} \\ 000 \end{array}$$

Dessa forma, o primeiro jogador em sua nova posição terá novamente uma soma NIM nula, independente de sua jogada ele deixará uma soma positiva. Digamos que ele retire cinco moedas da segunda pilha, deixando para o segundo jogador a posição da Figura 1.8.

Figura 1.8: segundo jogador

4. O segundo jogador estará com o jogo em uma posição cuja a soma NIM é:

$6 = (110)_2$

$2 = (10)_2$

$1 = (1)_2$

$$\begin{array}{r} 110 \\ \oplus \quad 10 \\ \underline{\oplus \quad 1} \\ 101 \end{array}$$

Como o seu valor mais significativo tem origem na primeira pilha $(110)_2$ faz-se então a soma:

$$\begin{array}{r} 101 \\ \underline{\oplus 110} \\ 011 \end{array}$$

Daí, a quantidade de moedas que deve estar na primeira pilha é $1.2^1+1.2^0 = 2+1 = 3$. Retira-se então três moedas da pilha que contem seis moedas, ficando o jogo na posição ilustrada na Figura 1.9 e a soma NIM resultante encontra-se no item 5.

Figura 1.9: primeiro jogador

5. O primeiro jogador tem a posição do jogo com a soma NIM:

$3 = (11)_2$

$2 = (10)_2$

$1 = (1)_2$

$$\begin{array}{rr} & 11 \\ \oplus & 10 \\ \oplus & 1 \\ \hline & 00 \end{array}$$

E mais uma vez sua posição é nula. Qualquer movimento gera uma soma positiva, assim ele retira a moeda da terceira pilha, deixando o jogo da Figura 1.10.

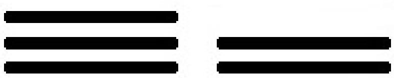

Figura 1.10: segundo jogador

6. Nesta jogada, o segundo jogador deverá deixar para o seu oponente duas pilhas com as mesmas quantidades de moedas. Pois, dessa forma, ele utilizará uma série de movimentos que seguem a estratégia do espelho.

   Nas próximas jogadas, o segundo jogador prossegue retirando da pilha que não foi escolhida pelo primeiro jogador, a mesma quantidade de moedas retiradas pelo primeiro jogador, estratégia já vista no Exemplo 1.2. Então ele retira uma moeda da primeira pilha e a posição que ficará consta na Figura 1.11, cuja soma NIM está no item 7.

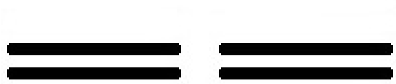

Figura 1.11: primeiro jogador

7. Com o jogo desta forma o primeiro jogador obtém a posição que gera a seguinte soma NIM:

   $2 = (10)_2$

   $2 = (10)_2$

$$\begin{array}{cc} & 10 \\ \oplus & 10 \\ \hline & 00 \end{array}$$

   Continuando em uma posição nula, em que qualquer moeda retirada gera uma posição positiva. Retira-se então as duas moedas da segunda pilha, deixando o jogo na posição da Figura 1.12

Figura 1.12: segundo jogador

8. Com isso o segundo jogador finaliza o jogo, retirando as duas moedas da primeira pilha, sendo declarado vencedor, pois o primeiro jogador não terá moedas na nova posição que é a posição vazia.

Observe que para o segundo jogador ter uma estratégia vencedora, o jogo foi iniciado com uma posição nula para o primeiro jogador.

Poderia ocorrer de forma contrária e o jogo iniciaria em uma posição positiva para o primeiro jogador, como pode ser visto no Exemplo 1.6.

Exemplo 1.6. Se um jogo iniciar com três pilhas, a primeira com cinco, a segunda com três e a terceira com nove moedas, a soma NIM é:

$5 = (101)_2$

$3 = (11)_2$

$9 = (1001)_2$

$$\begin{array}{r} 101 \\ \oplus \quad 11 \\ \underline{\oplus 1001} \\ 1111 \end{array}$$

Dessa forma, o primeiro jogador poderá fazer uma jogada deixando o seu oponente em uma posição nula, para isso deve-se fazer uma soma, em que constará o resultado da soma NIM e uma parcela na qual pode verificar que se encontra o 1 na mesma posição do valor mais significativo:

$$\begin{array}{r} 1001 \\ \underline{\oplus 1111} \\ 0110 \end{array}$$

Dessa maneira tem-se a quantidade de moedas que deve ficar nessa pilha, o número binário correspondente ao valor numérico na base 10, $(110)_2 = 2^2 \ . \ 1 + 2^1 \ . \ 1 + 2^0 = 6$, essa é a quantidade de moedas que deve restar na pilha onde se tem nove moedas, obtendo assim, a seguinte soma NIM:

$$\begin{array}{r} 101 \\ \oplus \ 11 \\ \underline{\oplus 110} \\ 000 \end{array}$$

Contudo, agora temos uma soma NIM que favorece o primeiro jogador, assim, deixando o seu oponente numa posição nula.

Para que o primeiro jogador obtenha a vitória, ele deve continuar em cada jogada em posições positivas, consequentemente deve impor ao segundo jogador posições nulas, para que este sempre gere posições positivas em seus movimentos.

Como dito anteriormente a generalização foi desenvolvida por Bouton e será apresentada a seguir.

Teorema 1.7. *(Teorema de Bouton): Seja N uma posição Nim.*

(i) Se N é uma posição-L, então qualquer movimento é para uma posição-W.

(ii) Se N é uma posição-W, existe um movimento de N que leva a uma posição-L.

Demonstração. Seja n o número de pilhas no jogo NIM e k_i, $1 \leq i \leq n$, o número de moedas na i-ésima pilha, onde n e k_i são inteiros não negativos.

(i) Como N é uma posição-L, temos $k_1 \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n = 0$, sem perda de generalidade, considere um movimento de k_1 para $k_1^{'}$, necessariamente $k_1 \neq k_1^{'}$, assim $k_1^{'} \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n \neq k_1 \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n = 0$. Logo $k_1^{'} \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n \neq 0$ e o movimento gera uma posição-W.

(ii) Suponha que x $= k_1 \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n \neq 0$. Considere o valor mais significativo j, onde consta o 1 mais à esquerda na representação de x (pode ser apontado pela maior ordem que tem o algarismo diferente de 0), pelo menos um k_i deve ter 1 na posição j dessa soma NIM. Assumiremos, sem perda de generalidade, $i = 1$, daí k_1 será visto com o valor que tem 1 na mesma posição que a posição mais significativa da soma NIM. Tomando $k_1^{'}$ = x $\oplus k_1$, necessariamente $k_1^{'} < k_1$, para que haja um movimento disponível a partir de k_1 para $k_1^{'}$ com isso $k_1^{'} \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n =$ x $\oplus k_1 \oplus k_2 \oplus ... \oplus k_n =$ x $\oplus$ x $= 0$, ou seja, o jogo fica em uma posição-L.

□

Se tivermos uma posição-L para quem acaba de receber o jogo, ainda sem efetuar a sua jogada, então ele terá um jogo com soma NIM nula. Se tivermos uma posição-W também para quem acaba de receber o jogo e ainda sem efetuar a sua jogada, então ele terá um jogo com soma NIM positiva.

Para ganhar tal tipo de jogo um determinado jogador, que estiver em uma posição positiva, deverá deixar para seu adversário uma posição com soma NIM nula, para que o outro jogador após efetuar uma jogada, consequentemente deixe o jogo em uma posição com soma NIM positiva.

1.1 Nímeros

Uma outra forma de trabalhar com o jogo é utilizando nímeros, mas para isso, precisamos saber associar o valor de uma pilha NIM com um valor nimérico. Cada pilha do jogo N é associado a seu valor NIM, para $n > 0$, será denotada uma pilha de tamanho n por $*n$.

O jogo NIM mais simples é com o número de moedas zero que corresponde ao nímero $*0$. Se no jogo consta uma moeda, o nímero correspondente é $*1$, assim segue para cada pilha de acordo com a quantidade de moedas existentes.

Haverá, inicialmente, uma correspondência do número de moedas em cada pilha como seu nímero. Além disso, em cada pilha mediante uma jogada, terá sua nova quantidade de moedas equivalente com o seu nímero.

Exemplo 1.8. Em um jogo com quatro pilhas, em que cada pilhas possui sete, seis, quatro e três moedas. Quais são os nímeros correspondentes e quais os possíveis nímeros após uma jogada?

Nímeros correspondentes:

$7 = *7$

$6 = *6$

$4 = *4$

$3 = *3$

Observe a Tabela 1.1 relacionando a quantidade de moedas em cada pilha com a quantidade que poderá ficar após uma jogada:

Número de moedas por pilha	
Antes da jogada	Após a jogada (Poderá ficar)
7	6, 5, 4, 3, 2, 1 ou 0
6	5, 4, 3, 2, 1 ou 0
4	3, 2, 1 ou 0
3	2, 1 ou 0

Tabela 1.1: Quantidade de moedas por pilha e possíveis quantidades depois da jogada.

Com isso o nímero $*7$ poderá ser modificado para $*6, *5, *4, *3, *2, *1$ ou $*0$, podendo ocorrer o mesmo com as outras pilhas. Daí escreveremos da seguinte forma:

$*7 = \{*0, *1, *2, *3, *4, *5, *6\}$

$*6 = \{*0, *1, *2, *3, *4, *5\}$

$*4 = \{*0, *1, *2, *3\}$

$*3 = \{*0, *1, *2\}$

De forma generalizada temos a Definição 1.9.

Definição 1.9. O nímero $*n$ é $*n = \{*0, *1, *2, ..., *(n-1)\}$.

Assim um jogo NIM com uma pilha de n moedas, poderá ser transformada em uma pilha com $0, 1, 2, 3, ...$ ou $n-1$ moedas, por qualquer jogador.

Porém não se deve apenas associar o valor nimérico a cada pilha do jogo, mas fazer também a soma de nímeros.

Para isso averiguemos agora como é feita uma soma nimérica.

1. Seja $n > 0$, onde $n = *n$.

$*n + *n = 0$, pois tal soma equivale ao jogo NIM com duas pilhas, que possui a mesma quantidade de moedas, como já foi visto antes, esta é uma posição nula.

2. $*1 + *2 + *3$, equivale a um jogo com três pilhas, que contém 1, 2 e 3 moedas em cada pilha. Com isso $1 \oplus 2 \oplus 3 = 0$, daí $*1 + *2 + *3 = 0$, acrescentando a ambos os lados $*3$ tem-se $*1 + *2 + *3 + *3 = *3$, por 1. Logo $*1 + *2 = *3$.

3. Como já visto no item 2. $*1 + *2 + *3 = 0$, daí acrescentando $*2$ em ambos os membros tem-se $*1 + *2 + *3 + *2 = *2$, como $*2 + *2 = 0$ ficará $*1 + *3 = *2$

4. Da mesma forma que foi trabalhado no item 2. pode-se obter $*2 + *3 = *1$

De forma análoga, podemos calcular outras somas niméricas, como no Exemplo 1.4 em que temos pilhas com 1, 8 e 9 moedas e a soma NIM é zero, assim $*1 + *8 + *9 = 0$ e da mesma forma que foram feitas as outras somas, teremos então $*1 + *8 = *9$.

A Proposição 1.10 e o Teorema 1.11 a seguir trazem a forma generalizada da soma de nímeros.

Proposição 1.10. *Se N é um jogo imparcial, então*

$$N + N = 0$$

Demonstração. Seja $n > 0$, e $n \in N$.

O jogo $N + N$ representa duas pilhas ambas com tamanho $*n$ de moedas, daí $N + N = *n + *n = 0$, pois a posição de um jogo com duas pilhas que tem a mesma quantidade de moedas é uma posição zero ou nula.

□

Na proposição acima se o jogo apresentar duas pilhas com quantidades de moedas distintas, x e n, os nímeros de tais serão $*x$ e $*n$, onde $*x \neq *n$ e sem perda de generalidade, $x > n$. Por contradição tome $*x = *n$, assim $*x + *n = 0$, isso é um absurdo, pois no jogo $*x + *n$ o primeiro jogador tem uma estratégia vencedora, basta reduzir a pilha de x para n, uma vez que $x > n$, deixando $*n + *n = 0$.

Teorema 1.11. *Se $x_1, x_2, ..., x_n$ são potências de 2 distintas, então:*

$$*x_1 + *x_2 + ... + *x_n = *(x_1 + x_2 + ... + x_n)$$

A demonstração pode ser vista em [16].

Daí para qualquer ordinal escrito como potências de 2 distintas, poderemos encontrar as somas NIM que corresponderão a um determinado nímero, já que a Proposição 1.10 e o Teorema 1.11 dá suporte para trabalhar com soma de nímeros.

Além do que já foi apresentado pode-se utilizar a equivalência de um jogo NIM com um nímero e estabelecer quantas moedas deverão ser retiradas de uma determinada pilha. Para isso, será construída uma tabela que facilitará a observação da soma NIM relacionando-a com a quantidade de moedas existentes na pilha, e determinando quantas moedas restarão em uma pilha para se ter uma estratégia vencedora.

Tal tabela corresponde à soma das pilhas de um jogo, a soma utilizada é $\oplus$, indicando que se trata de uma soma binária ou soma de nímeros, já que pelo Teorema 1.10 a soma nimérica pode ser feita quando temos os números escritos como potências de 2 distintas.

A primeira linha e a primeira coluna da tabela contém os nímeros com os quais irão ser feitas as somas. Como na tabela não há a utilização da $*$ (estrelinha) nos valores, a operação que se encontra é $\oplus$, daí será identificado $1 \oplus 2$ como equivalente a $*1 + *2$.

Observe que $*0 + *0 = *0$, $*1 + *1 = *0$, $*2 + *2 = *0$, $*3 + *3 = *0$ e assim sucessivamente, o que pode ser garantido pela Proposição 1.10.

A partir daqui será utilizado também o Teorema 1.11 para verificar algumas somas.

- $3 = 2^1 + 2^0$, daí tem a equivalência de $*3 = *2 + *1$, como visto anteriormente, podemos obter $*2 = *3 + *1$ e também $*1 = *2 + *3$;

- $5 = 2^2 + 2^0$, daí tem a equivalência de $*5 = *4 + *1$

  (i) Acrescentando $*4$ a ambos os lados da igualdade, $*5 = *4 + *1$, teremos $*5 + *4 = *1$;

  (ii) Acrescentando $*1$ a ambos os lados da igualdade, $*5 = *4 + *1$, teremos $*5 + *1 = *4$.

- $6 = 2^2 + 2^1$, daí a equivalência de $*6 = *4 + *2$

  (i) Acrescentando $*4$ a ambos os lados da igualdade, $*6 = *4 + *2$, teremos $*6 + *4 = *2$;

  (ii) Acrescentando $*2$ a ambos os lados da igualdade, $*6 = *4 + *2$, teremos $*6 + *2 = *4$.

- $7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$, daí a equivalência de $*7 = *4 + *2 + *1$

  (i) Como $*6 = *4 + *2$, teremos $*7 = *6 + *1$, daí $*7 + *6 = *1$ e $*7 + *1 = *6$

  (ii) Como $*3 = *2 + *1$, teremos $*7 = *4 + *3$, daí $*7 + *4 = *3$ e $*7 + *3 = *4$.

- $9 = 2^3 + 2^0$, daí a equivalência de $*9 = *8 + *1$, a partir da soma teremos $*9 + *8 = *1$ e $*9 + *1 = *8$.

Dessa forma poderemos fazer somas para a construção da Tabela 1.2 que segue abaixo.

TABELA DE SOMA NIM																
$\bigoplus$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	9	8	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	9	8	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Tabela 1.2: Soma de cada valor da primeira linha com cada valor da primeira coluna.

Utilizando a Tabela 1.2, trabalharemos com alguns exemplos de equivalência de um jogo com um nímero.

Exemplo 1.12. Um jogo NIM N com três pilhas de cinco, sete e nove moedas poderá ser equivalente a qual jogo de uma única pilha?

Para encontrar o nímero correspondente ao jogo, far-se a soma nimérica:

$*5 + *7 + *9$

$= *5 + *5 + *2 + *8 + *1$

$= *2 + *8 + *1$

$= *10 + *1$

$= *11$

$N = \{*5, *7, *9\} = *11$

Na Tabela 1.2 devem ser observados dois valores que somados chegam a $*11$. Desses dois valores, pelo menos um será correspondente a $*5$, $*7$ ou $*9$, para que, a partir daí, possa ser determinado quantas moedas serão retiradas da pilha correspondente.

Será visualizado na Tabela 1.2 que $*5 + *14 = *11$, observando $*5$ na linha ou coluna não modifica o resultado. Para seguir uma estratégia vencedora, deve-se ter na soma um resultado 0, daí a pilha com 5 moedas deve ficar com 14 moedas, como não é possível retirando moedas, então será observada outra soma.

A próxima soma analisada será $*7 + *12 = *11$, então a pilha com 7 moedas deverá ficar com 12 moedas para que se tenha uma estratégia vencedora, porém, retirando moedas não é possível.

Por fim, será analisada a soma $*9 + *2 = *11$, logo a pilha com 9 moedas deverá ter 2 moedas para uma estratégia vencedora.

Com isso, para que se tenha uma estratégia vencedora deve-se retirar 7 moedas da pilha com 9 moedas.

Observe que este $*7$, originou-se do $*9$, onde $*9 = *2+*7$, essa observação é importante para que se saiba a pilha da qual deve ser retiradas as 7 moedas.

Dessa forma, pode-se então observar o Exemplo 1.5 de forma mais simples.

1. Inicia o jogo com as pilhas contendo, 8, 9 e 1 moedas, delas tem-se a soma de nímeros $*8 + *9 + *1 = *8 + *1 + *8 + *1 = 0$.

   Dessa maneira, observa-se que o primeiro jogador está na posição-L, qualquer movimento feito por ele, levará a uma posição positiva para o seu adversário.

2. Depois o primeiro jogador deixa o jogo com $6, 9$ e 1 moedas para o segundo jogador, que tem a seguinte soma $*6 + *9 + *1 = *6 + *8 + *1 + *1 = *2 + *4 + *8 = *14$. Observando na Tabela 1.2, a pilha que contém 9 moedas deverá ficar com 7, obtendo assim a quantidade de duas moedas a serem retiradas da pilha com 9 moedas, gerando a soma que pode ser vista no item 3.

3. Com isso, o primeiro jogador recebe o jogo com as pilhas contendo $6, 7$ e 1 moedas. Fazendo a soma dos nímeros tem-se $*6+*7+*1 = *6+*1+*6+*1 = 0$. O primeiro jogador encontra-se na posição-L, qualquer movimento gera uma soma positiva. Em seguida, ele retira 5 moedas da segunda pilha.

4. O segundo jogador receberá o jogo com as pilhas contendo $6, 2$ e 1 moedas, o que resultará na seguinte soma $*6 + *2 + *1 = *2 + *4 + *2 + *1 = *4 + *1 = *5$. Observando a tabela, à pilha com 6 moedas deverá ficar com 3 moedas, retirando então 3 moedas e obtendo a soma do item 5.

5. Quando o primeiro jogador recebe o jogo, as pilhas contém $3, 2$ e 1 moedas, cuja soma de nímeros é $*3 + *2 + *1 = *2 + *1 + *2 + *1 = 0$, posição-$L$, qualquer movimento terá soma nimérica diferente de 0. Logo o jogador retirará a moeda da terceira pilha.

6. Neste momento o segundo jogador recebe o jogo com as pilhas contendo 3 e 2 moedas e sua soma de nímeros é $*3+*2 = *2+*1+*2 = *1$. Retirando 1 moeda da primeira pilha, utilizando assim, a estratégia do espelho.

7. Então o primeiro jogador terá um jogo com duas pilhas, ambas contendo 2 moedas, em que $*2 + *2 = 0$, esta é uma posição-L, não existe movimento que faça a soma permanecer 0. Com isso retira a segunda pilha deixando para o segundo jogador a retirada da primeira pilha e consequentemente a vitória do jogo.

Para garantir que qualquer jogo imparcial possa ser interpretado como uma pilha de moedas NIM, uma teoria completa foi dada na década de 1930[15], com o Teorema de Sprague-Grundy 1.15. Nele um jogo imparcial é equivalente a um $*n$ para algum n e $n > 0$.

1.2 Princípio do Menor Excluido

Agora será trabalhado uma variação do jogo NIM, chamado jogo da subtração, este será analisado para que se possa compreender melhor o Princípio do Menor Excluído (mex). Além da utilização nesse momento, posteriormente será abordada a variação do jogo e o mex.

O jogo da subtração neste trabalho será analisado somente com uma pilha, se interessar ao leitor, poderá estudar mais em[1].

Tal variação (jogo da subtração) é dada de forma que se aplicam as mesmas regras do jogo do NIM, além disso, tem-se uma quantidade de moedas a serem retiradas da pilha, ou seja, serão impostas restrições sobre o número de moedas a serem retiradas da determinada pilha.

Por exemplo se pudermos retirar somente 1 ou 2 moedas de uma pilha, como será o jogo? É possível determinar uma estratégia vencedora?

Para ter uma estratégia vencedora, deve-se averiguar cada movimento do jogo, o que seria equivalente a uma pilha, deve ser feita em ordem crescente na quantidade de moedas usadas para cada averiguação, até chegar na pilha em que se tem o jogo inicial.

Inicia com a pilha contendo uma moeda, em seguida duas moedas, depois três moedas e assim sucessivamente, verificando em cada uma delas o que é necessário ser feito para uma estratégia vencedora, observe:

1. Pilha com uma moeda, o jogador que inicia o jogo vence, pois é só retirar a moeda.

2. Pilha com duas moedas, novamente o jogador que inicia o jogo vence, pois é só retirar as duas moedas.

3. Pilha com três moedas, existem duas possibilidades:

   (i) O primeiro jogador retira uma moeda e deixa duas moedas, consequentemente o segundo jogador pode retirar 2 moedas.

   (ii) O primeiro jogador retira duas moedas e deixa uma moeda, daí o segundo jogador retira a moeda.

   O segundo jogador possui uma estratégia vencedora quando o jogo inicia com uma pilha de três moedas.

4. Pilha com quatro moedas, existem novamente duas possibilidades iniciais:

   (i) O primeiro jogador retira uma moeda, deixando somente três moedas. Daí volta para o *item* 3, só que agora a posição inicial do item é do segundo jogador e o primeiro jogador vence o jogo;

   (ii) O primeiro jogador retira duas moedas, deixando duas moedas, o segundo jogador retira as duas moedas e vence o jogo.

   Desse modo, o primeiro jogador possui uma estratégia para vencer o jogo.

5. Pilha com cinco moedas, também existem duas possibilidades iniciais:

   (i) O primeiro jogador retira uma moeda deixando quatro moedas, retornando ao *item* 4. Porém, iniciando tal item com o segundo jogador, se ele toma a decisão do *item* 4(i) terá uma estratégia vencedora, se tomar a decisão do *item* 4(ii), o primeiro jogador terá uma estratégia vencedora;

   (ii) O primeiro jogador retira duas moedas deixando três moedas, voltando assim ao *item* 3. Porém, iniciando o item com o segundo jogador, daí o primeiro jogador vence o jogo.

   Desse modo, o primeiro jogador possui uma estratégia para vencer o jogo.

6. Pilha com 6 moedas, mais uma vez têm-se duas possibilidades:

   (i) O primeiro jogador retira uma moeda deixando apenas cinco moedas. O segundo jogador então pode seguir com as jogadas já vistas no *item* 5. Agora, iniciada a jogada com o segundo jogador, daí conclui-se que ele tem uma estratégia vencedora;

   (ii) O primeiro jogador retira duas moedas e reduz para quatro moedas, dessa forma, volta-se ao *item* 4. Iniciado dessa vez pelo segundo jogador, então ele terá uma estratégia vencedora.

   Conclui-se assim, que o segundo jogador possui uma estratégia vencedora quando o jogo inicia com uma pilha de seis moedas.

casos	Q_I	Q_P	Q_R
1º	1	0	1
2º	2	0, 1	2
3º	3	1, 2	0
4º	4	2, 3	1
5º	5	3, 4	2
6º	6	4, 5	0
7º	7	5, 6	1
8º	8	6, 7	2

Tabela 1.3: Jogo da subtração com 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8 moedas em uma pilha.

- Quantidade de moedas para iniciar a jogada (Q_I)
- Quantidades possíveis após uma jogada (Q_P)
- Quantidade de moedas a serem retiradas para ter uma estratégia vencedora (Q_R)

Se o jogo inicialmente tem sete moedas, para o primeiro jogador chegar na posição em que tem seis moedas, que é a posição onde ele terá uma estratégia vencedora (pois será iniciada pelo segundo jogador), deve-se retirar então uma moeda.

Com isso uma estratégia vencedora é dada quando o adversário está em uma posição que se tem, na quantidade de moedas, um múltiplo de 3.

Em suma, numa pilha de qualquer tamanho pode-se retirar somente 1 ou 2 moedas, uma posição-L é dada quando tem-se um múltiplo de 3 como quantidade de moedas na pilha.

Diante disso constrói-se o conjunto de possíveis quantidades após uma jogada e o valor a ser retirado em cada pilha para se determinar a estratégia vencedora, para os casos onde não se tem uma estratégia vencedora, posição-L, será representada por 0. Observe:

As quantidades possíveis, após uma jogada, determina para cada jogo as possíveis quantidades de moedas a serem retiradas pelo próximo jogador, tendo assim uma estratégia vencedora. A partir dessas quantidades de moedas a serem retiradas, possivelmente pelo próximo jogador, para ter uma estratégia vencedora, o jogador do momento poderá determinar se tem ou não uma estratégia vencedora, assim identificar quantas moedas ele deve retirar.

Observe que a quantidade de moedas a ser retirada pelo jogador é o menor valor excluído do conjunto formado pelas possíveis quantidade de moedas a ser retirada pelo jogador adversário.

Pode-se verificar que quando a quantidade de moedas para iniciar a jogada é 5, tem-se as quantidades possíveis após uma jogada como 3 ou 4. Com isso, o adversário terá uma das duas posições para jogar, formando um conjunto chamado de S, onde, os elementos são as quantidades de moedas a serem retiradas para ter uma estratégia vencedora (do adversário), nesse caso $S = \{0, 1\}$ o menor valor excluído de S é 2, representado por mex $(S) = 2$.

Logo a quantidade de moedas a ser retirada para uma estratégia vencedora do jogador que está no momento efetuando a jogada deverá ser 2.

O mesmo pode ser feito quando a quantidade de moedas para iniciar a jogada é 6, $S = \{1, 2\}$ e o mex $(S) = 0$, logo a quantidade de moedas a ser retirada para uma estratégia vencedora do jogador que está no momento efetuando a jogada deverá ser 0.

Quando $Q_R = 0$ o jogador em questão não possui movimento que o leve à vitória, ou seja, as posições associadas pela tabela anterior a $Q_R = 0$ são posições-L.

Para formalizar tem-se a Definição 1.13 e o Teorema 1.14.

Definição 1.13. Seja S $\subsetneq \mathbb{N}$ será definido como o valor mínimo excluído (mex(S)) o menor inteiro $n \geqslant 0$ tal que $n \notin$ S.

Teorema 1.14. *(Regra mex): Sendo* $a_1, a_2, ..., a_k \in \mathbb{N}$.

Se $N = \{*a_1, *a_2, ..., *a_k\}$ *então* $N = *n$, *em que* $n = mex\{a_1, a_2, ..., a_k\}$.

Demonstração. Considere o jogo $N + *n = 0$

(i) Qualquer que seja a_i com $1 \leqslant i \leqslant k$, temos $a_i \neq n$ assim, suponha que o primeiro jogador realiza um movimento de N para a_i, tem-se, em seguida, o jogo $*a_i + *n \neq 0$, logo posição-W para o segundo jogador.

(ii) Suponha que o primeiro jogador faz um movimento de n para n', onde $n' < n$, tem-se daí a posição $N + *n'$, pela minimalidade de n teremos $n' = a_i$, qualquer que seja a_i com $1 \leqslant i \leqslant k$, então o segundo jogador poderá fazer um movimento de N para $a_i = n'$, obtendo o jogo $*a_i + *n' = 0$, logo posição-L para o primeiro jogador.

Portanto $N = *n$

□

Utilizando o Princípio do Menor Excluído, pode-se reduzir qualquer jogo imparcial finito em um nímero e uma extensão está no Teorema 1.15.

Teorema 1.15. *(Sprague-Grundy): Cada jogo imparcial é equivalente a uma pilha NIM, isto é, para cada jogo* N *existe um inteiro* $n > 0$ *com* $N = *n$.

O Teorema 1.15 é a ampliação do teorema de Bouton e pode ser vista em[15].

Capítulo 2

Nim com Grafos

Agora será analisada uma descrição equivalente de um jogo combinatório jogado com um grafo, utilizando a função de Sprague- Grundy que contém mais informações do que apenas saber se uma posição é uma posição-L ou uma posição-W. Antes de iniciar a descrição do jogo com grafos, faz-se necessário ver algumas definições importantes.

2.1 Definições de Grafos

Definição 2.1. Um grafo simples não-orientado G é um par de conjuntos $G = (V, E)$, onde $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ denominado conjunto dos vértices e um conjunto de arestas E. Em geral, indicaremos uma aresta e por $\{u, v\}$, onde u e v são os extremos de e.

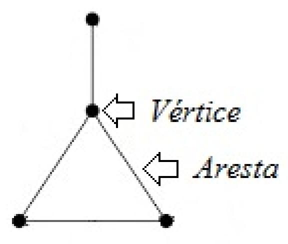

Figura 2.1: Grafo, aresta e vértice

Uma aresta é incidente em um vértice v se possui uma extremidade em v.

Arestas paralelas ou múltiplas são arestas que incidem no mesmo par de vértices (Figura 2.2).

Um laço ou loop é uma aresta que incide em um único vértice (Figura 2.2).

O número de arestas incidentes num vértice v é chamado grau de v.

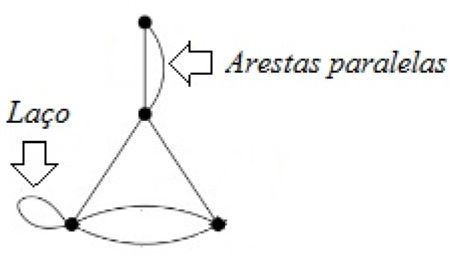

Figura 2.2: Arestas paralelas e laço

Vértices que são conectados por uma aresta são chamados de adjacentes.

Uma aresta é incidente a cada um de seus vértices, duas arestas incidentes ao mesmo vértice e ligadas a vértices distintos são chamadas de adjacentes.

Um vértice que não possui nenhuma aresta incidente é chamado de isolado.

Na Figura 2.3 temos a representação de vértices adjacentes, arestas adjacentes e vértice isolado.

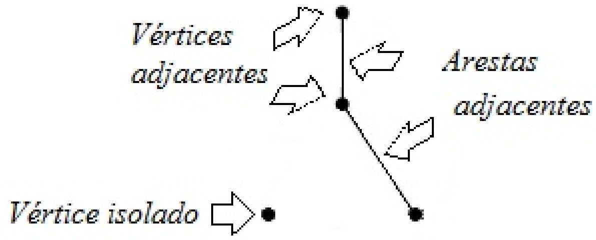

Figura 2.3: vértice isolado

Um grafo sem nenhuma aresta é chamado de grafo nulo.

Um caminho do vértice v_1 para o vértice v_{k+1} é uma sequência v_1, e_1, v_2, e_2, ..., e_k, v_{k+1} de vértices e arestas tais que a aresta e_i incide nos vértices v_i e v_{i+1}, para $i = 1, 2, ..., k$.

Definição 2.2. Um grafo simples é um grafo que não possui laços nem arestas paralelas.

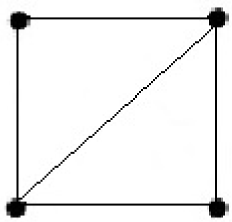

Figura 2.4: Grafo simples

Definição 2.3. Um grafo dirigido G é definido de forma semelhante a um grafo não-orientado com exceção do fato de que é uma associação de cada aresta a um par ordenado de vértices. As setas indicam as direções de saída e chegada dos vértices.

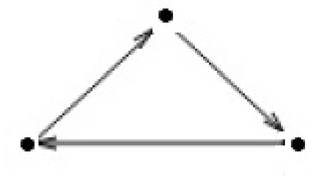

Figura 2.5: Grafo dirigido

Definição 2.4. Um grafo completo de n vértices, indicado por K_n, é um grafo simples com n vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, cujo conjunto de arestas contém exatamente uma aresta para cada par de vértices distintos.

Figura 2.6: K_2

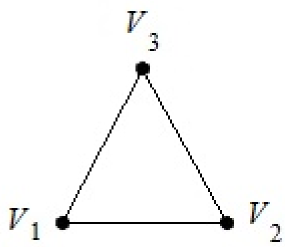

Figura 2.7: K_3

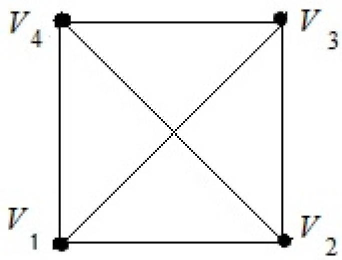

Figura 2.8: K_4

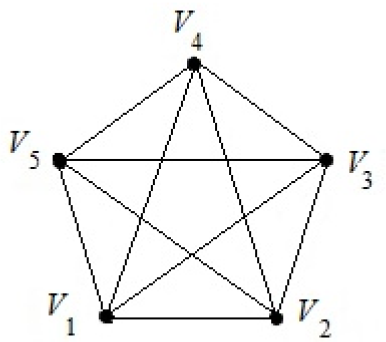

Figura 2.9: K_5

Definição 2.5. Um grafo de n vértice $v_1, v_2, ..., v_n$ e múltiplas arestas é composto por arestas paralelas que são associadas ao mesmo conjunto de vértices, tendo-se então mais de uma aresta entre seus vértices.

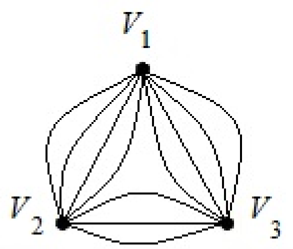

Figura 2.10: Grafo com múltiplas arestas

Definição 2.6. Um grafo cíclico de n vértices, denominado C_n, $n \geqslant 3$ é um grafo simples com n vértices v_1, v_2, . . . , v_n, e arestas v_1v_2, v_2v_3, ..., $v_{n-1}v_n$, v_nv_1.

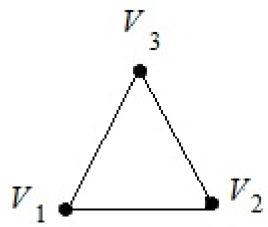

Figura 2.11: C_3

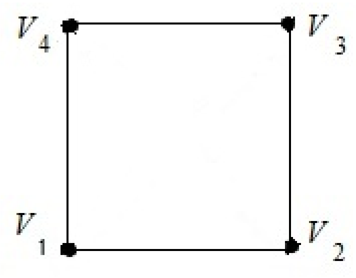

Figura 2.12: C_4

2.2 Jogo com grafos

Uma variação do jogo de NIM, jogado em um grafo G, foi visto por Fukuyama (2003) em[9], e ampliado em[10]. Fukuyama determina estratégias vencedoras, bem como números de Grundy para caminhos, ciclos, árvores e alguns grafos bipartidos. Erickson em 2010 traz uma estratégia vencedora para jogos no grafo completo[6]. Breeann e Akaanchya (2015), consideraram grafos com laços em[8].

Neste trabalho serão reunidas algumas variações do jogo do NIM com grafos.

2.2.1 Grafos com mútiplas arestas

Dado um grafo com n vértices e múltiplas arestas, durante cada jogada, os jogadores se revezarão e escolherão um vértice para remover pelo menos uma aresta incidente do vértice escolhido, podendo retirar arestas indo para um vértice adjacente.

Podem ser removidas arestas de até dois conjuntos, selecionando um único vértice. Este terá dois vértices adjacentes e o jogador poderá remover arestas que são incidentes dos dois vértices adjacentes, a remoção de arestas se dá em uma quantidade desejada pelo jogador.

A quantidade de arestas removidas de um conjunto não está atrelada à quantidade de arestas do outro conjunto.

Por exemplo, o jogador escolhe o vértice v_1 onde tem-se os vértices v_1 e v_2 adjacentes com 3 arestas paralelas e os vértices v_1 e v_3 adjacentes com 5 arestas paralelas. O jogador poderá remover de 0 até 3 arestas v_1v_2 e de 0 até 5 arestas v_1v_3, podendo estas quantidades serem distintas.

O jogador que remover a última aresta ou últimas arestas, deixando para o adversário uma posição com um grafo nulo, ganha o jogo.

Para compreender melhor, será simulado inicialmente um jogo no grafo NIM C_3 com várias arestas, em seguida a solução geral para C_3 com várias arestas (Teorema 2.8) e depois outro no grafo NIM C_4, também, em seguida, a solução geral (Teorema 2.10).

No C_3 teremos as seguintes características de posições:

- Uma posição é considerada posição-L quando o jogador, antes de fazer sua jogada, tem um grafo onde o grau dos vértices são iguais, ou seja, o número de arestas são iguais entre os vértices.

- Uma posição é considerada posição-W, se antes de fazer sua jogada o jogador tiver um vértice com grau diferente de algum outro vértice no grafo, ou seja, entre os pares de vértice, pelo menos um par de vértices adjacentes terá a quantidade de arestas paralelas diferente das quantidades de arestas dos outros pares de vértices.

Portanto, poderá ter uma estratégia vencedora em C_3 o jogador que, em sua posição, tiver o grau de um dos vértices diferente dos outros graus dos vértices. E a estratégia será deixar para o seu adversário esses graus iguais.

Exemplo 2.7. Considere o jogo da Figura 2.13 e dois jogadores.

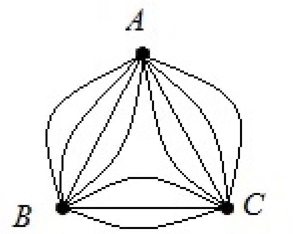

Figura 2.13: Jogador 1

Observe, que o primeiro jogador encontra-se em uma posição-W. Pois, o vértice A tem grau 8 e os vértices B e C tem grau 7. Segue uma simulação de um jogo, onde o primeiro jogador utilizará a estratégia vencedora.

1. O primeiro jogador escolhe o vértice A, vértice de maior grau, remove 1 aresta entre A e C e 1 aresta entre A e B, ficando todos os vértices com o mesmo grau. Restando ao segundo jogador a posição da Figura 2.14.

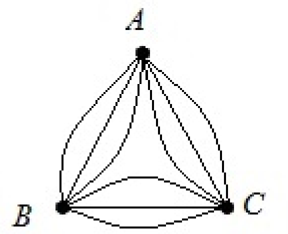

Figura 2.14: Jogador 2

2. O segundo jogador está em uma posição-L, após seu movimento, o jogo ficará inevitavelmente em uma posição-W, pois um dos vértices terá grau distinto de algum outro vértice.

   Daí suponha que o segundo jogador escolha o vértice A e remova 1 aresta entre A e B e 2 arestas entre A e C, deixando o primeiro jogador com a posição da Figura 2.15.

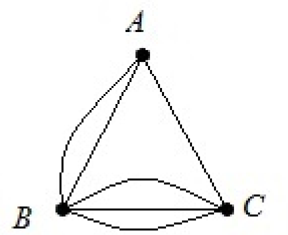

Figura 2.15: Jogador 1

3. Para que o primeiro jogador siga proporcionando ao segundo jogador uma posição-L, ele escolhe o vértice B, vértice que tem maior grau, remove 1 aresta entre B e A e 2 arestas entre B e C, deixando todos os vértices com o mesmo grau e ficando para o segundo jogador a posição da Figura 2.16.

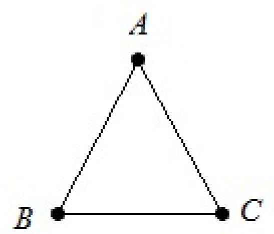

Figura 2.16: Jogador 2

4. Como o segundo jogador encontra-se em uma posição-L, não tem jogada que o faça deixar uma posição-L para seu adversário. Suponha então que o segundo jogador

escolha o vértice B e remove 1 aresta entre B e C, a posição que fica para o primeiro jogador é a da Figura 2.17.

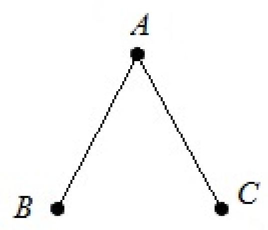

Figura 2.17: Jogador 1

5. Nesta posição o primeiro jogador escolhe o vértice A, que tem maior grau, remove 1 aresta entre A e C e 1 aresta entre A e B, deixando todos os vértices com o mesmo grau, resultando na posição da Figura 2.18.

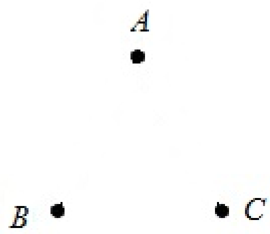

Figura 2.18: Jogador 2

6. Assim o primeiro jogador ganha o jogo. Observe que o segundo jogador está em uma posição em que o grafo é nulo, não tem arestas (Figura 2.18), essa é a posição final para esse jogo.

Para saber como se pode obter a solução geral para C_3 com n arestas, será demonstrado o Teorema 2.8.

Teorema 2.8. *Em um grafo NIM C_3, de múltiplas arestas, tem-se uma posição-L se e somente se $a = b = c$, onde a, b e c são, respectivamente, os números de arestas entre os vértices BC, AC e AB.*

Demonstração.

(i) Seja n o número com maior valor entre a, b e c. Se $n = 0$ então $a = b = c = 0$. Esta é a posição final, uma posição-L.

(ii) Considere agora n como o menor valor entre a, b e c. Sem perda de generalidade assuma $n = a$.

Se $b \neq c$, escolhe-se o vértice A e remove $(c-a)$ arestas entre os vértices A e B e $(b-a)$ arestas entre vértices A e C. Assim teremos novas quantidades de arestas representadas por a', b' e c', em que $c' = c - (c - a) = a = n$ arestas entre A e B, $b' = b - (b - a) = a = n$ arestas entre A e C e $a' = a = n$ arestas entre B e C, então $n = a' = b' = c'$. Essa é uma posição-L.

(iii) Assuma novamente n como o menor valor entre a, b e c.

Se $a = b = n$, daí $c > a$, escolha um vértice que tenha a aresta de valor c como incidente, vértice de maior grau. Sem perda de generalidade, escolha o vértice A, remova $(c - a)$ arestas entre os vértices A e B, obtendo novas quantidades de arestas representadas por a', b' e c', em que $c' = c - (c - a) = a = n$, $a' = n$ e $b' = n$, com isso $c' = a' = b' = n$.

E se tivermos $c = n$ e $a = b > c$, como o jogador pode remover arestas de dois conjuntos de arestas, ele escolhe o vértice C, que tem maior grau, remove $(a - c)$ arestas entre B e C e $(b - c)$ arestas entre A e C. Assim obtendo novas quantidades de arestas representadas por a', b' e c', onde $a' = a - (a - c) = c = n$, $b' = b - (b - c) = c = n$ e $c' = n$, daí teremos $a' = b' = c' = n$. O que implica em deixar uma posição-L para o próximo jogador.

(iv) Seja $a = b = c \neq 0$, pela regra do jogo, o jogador deverá retirar pelo menos uma aresta de algum dos conjuntos de arestas, podendo remover arestas no máximo de dois conjuntos de arestas, independente de seu movimento temos novas quantidades a', b' e c', onde ocorrerá $a' \neq b' = c'$ ou $a' = c' \neq b'$ ou $a' = b' \neq c'$ ou $a' \neq b' \neq c'$ os quatro casos implica que quem joga agora está em uma posição-W.

$\square$

Será trabalhado agora um exemplo no grafo NIM C_4, Exemplo 2.9 que, da mesma forma do grafo NIM C_3, pode ser jogado com múltiplas arestas.

No C_4 teremos as seguintes características de posições:

- Uma posição é considerada posição-L quando o jogador, antes de fazer sua jogada, tem um grafo onde a quantidade de arestas paralelas opostas são iguais.

- Uma posição é considerada posição-W quando o jogador, antes de fazer sua jogada, tem algum vértice com grau diferente de um outro vértice no grafo, ou seja, entre pelo menos um par de vértices adjacentes terá de existir a quantidade de arestas paralelas diferente das quantidades de arestas do outro par de vértices que forma o conjunto de arestas opostas.

Portanto, poderá ter uma estratégia vencedora em C_4, o jogador que em sua posição tem o grau de algum vértice diferente de outros graus dos vértices. E a estratégia será deixar para o seu adversário os conjuntos de arestas opostos com quantidades de arestas iguais.

Para facilitar a compreensão, no Exemplo 2.9 tem-se AD $\neq$ BC e AB $=$ DC, em tal exemplo será feita uma simulação do jogo utilizando esta estratégia.

Exemplo 2.9. Considere o jogo da Figura 2.19 e dois jogadores.

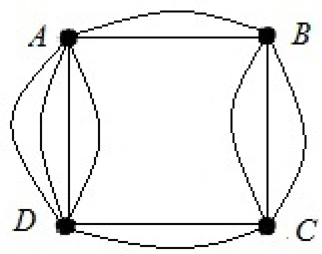

Figura 2.19: Jogador 1

1. O primeiro jogador escolhe um vértice, que tem maior grau, supondo que seja o vértice A. Ele remove 1 aresta entre A e D, para que possa ter AD = BC, uma vez que AB já está igual a DC, deixando assim o segundo jogador com a posição da Figura 2.20.

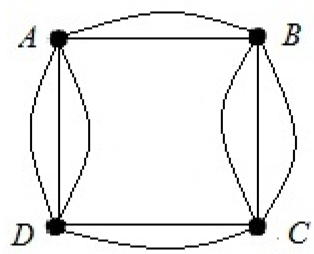

Figura 2.20: Jogador 2

2. Como AD = BC e AB = DC, o segundo jogador encontra-se então em uma posição-L, não tem movimento capaz de gera uma posição-L para o primeiro jogador. Com isso, ele escolhe vértice B e remove 1 aresta entre B e A e 1 aresta entre B e C, deixando o primeiro jogador com a posição da Figura 2.21.

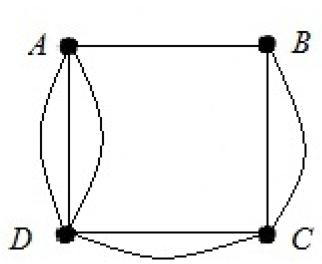

Figura 2.21: Jogador 1

3. Para que o primeiro jogador siga com uma estratégia vencedora, ele escolhe vértice D, de maior grau e remover 1 aresta entre D e A e 1 aresta entre D e C, ficando para o segundo jogador a posição da Figura 2.22.

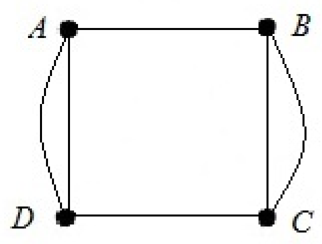

Figura 2.22: Jogador 2

4. Novamente tem-se AD = BC e AB = DC, posição-L, não tem movimento capaz de deixar uma posição-L para o primeiro jogador. Daí o segundo jogador escolhe vértice A e remove 2 arestas entre A e D, ficando para o primeiro jogador a posição representada pela Figura 2.23.

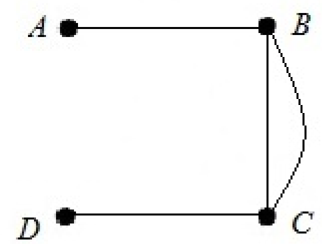

Figura 2.23: Jogador 1

5. Para que se tenha AD = BC e AB = DC, o primeiro jogador escolherá vértice B e removerá 2 arestas entre B e C, resultando na posição da Figura 2.24.

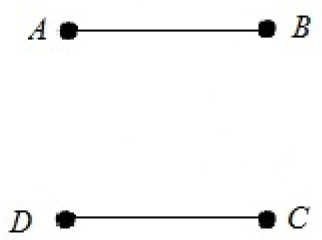

Figura 2.24: Jogador 2

6. Como o segundo jogador esta em uma posição-L, não tem movimento que gere uma posição-L para o primeiro jogador. Com isso, o segundo jogador escolhe o vértice C e remove 1 aresta entre C e D, deixando para o primeiro jogador a posição da Figura 2.25.

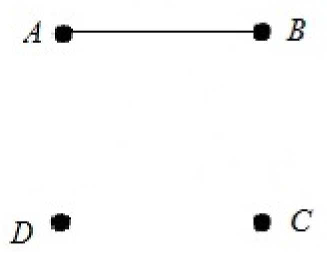

Figura 2.25: Jogador 1

7. Por fim, o primeiro jogador retira a aresta entre A e B e vence o jogo, pois deixa para o segundo jogador a posição da Figura 2.26. Em que há um grafo nulo, sem arestas. Posição final do jogo.

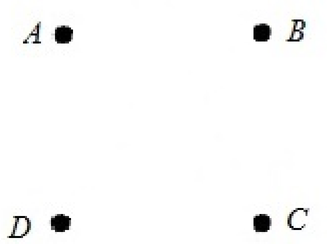

Figura 2.26: Jogador 2

A solução geral para C_4 com n arestas será demonstrada no Teorema 2.10.

Em grafos C_4, a, b, c e d representarão, respectivamente, o número de arestas existentes entre os vértices AC, AB, BD e CD, conforme Figura 2.27.

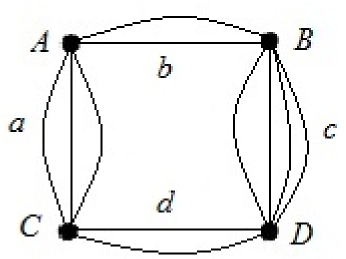

Figura 2.27: Grafo com múltiplas arestas C_4.

Teorema 2.10. *No Grafo NIM C_4 com múltiplas arestas, tem-se uma posição-L se e somente se $a = c$ e $b = d$ tal que a, b, c e d são o número de arestas existentes, respectivamente entre AC, AB, BD e CD.*

Demonstração.

(i) Seja n o maior valor de a, b, c e d.

Se $n = 0$, teremos $a = b = c = d = 0$, o que implica que $a = ceb = d$. Essa é a posição final, uma posição-L.

(ii) Agora assumiremos, sem perda de generalidade para todos os valores de $k > n$, tem-se uma posição-L, se e somente se $a = c$ e $b = d$, em que, se $a \geqslant b \geqslant d > c$, $d = k$ e $c = n$, onde n é o menor valor entre a, b, c e d e k o menor valor entre a, b e c, escolheremos o vértice A. Em seguida, retire $(b - d)$ arestas entre os vértices A e B e retire $(a - c)$ arestas entre os vértices A e C Agora temos novas quantidades de arestas, a', b', c' e d' onde $a' = a - (a - c) = c = n$, $b' = b - (b - d) = d = k$, $c' = c = n$ e $d' = d = k$, assim $a' = c' = n$ e $b' = d' = k$, esta agora é uma posição-L, portanto implica que quem acabou de jogar está em uma posição-W.

(iii) Supondo que $a = c$ e $b = d$, pelas regras do jogo, é necessário que o jogador remova pelo menos uma aresta, de algum dos conjuntos de arestas, podendo remover arestas no máximo de dois conjuntos de arestas, independente de qualquer movimento teremos novas quantidades a', b', c' e d', onde ocorrerá $a' \neq c'$ e $b' = d'$ ou $a' \neq c'$ e $b' \neq d'$ ou $a' = c'$ e $b' \neq d'$, os três casos implica que quem joga agora está em uma posição-W.

$\square$

Trabalharemos a seguir o NIM Circular e sua relação com grafo NIM de múltiplas arestas, de forma pouco aprofundada, porém, deixando um caminho para os estudos do leitor, caso venha desejar uma investigação maior, como por exemplo, uma generalização para o NIM com múltiplas arestas.

2.2.2 NIM Circular

Nim Circular é composto por n pilhas de moedas que estão dispostas em um círculo, havendo alternância de jogadores para remover as moedas de uma ou mais pilhas consecutivas.

O jogador da vez é quem determina, em cada pilha, o número de moedas a serem retiradas, em um movimento. Essas quantidades poderão ser iguais ou diferentes para cada pilha. O jogador que remove a última moeda ganha o jogo.

O jogo é denotado por $CN(n, k)$, onde n é o número de pilhas de moedas e k, com $k \leqslant n$, é o número de pilhas sucessivas nas quais os jogadores poderão remover moedas.

Uma posição em um jogo Nim Circular pode ser representada por $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$, onde p_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, são inteiros não negativos, indica a altura das pilhas de moedas em torno do círculo.

Quando $k = 1$, tem-se o jogo $CN(n, 1)$, onde há n pilhas e podendo retirar moedas somente de uma pilha por vez em cada movimento. Esse é o jogo do NIM. Para $k > 1$

ocorrem mudanças na solução.

Logo abaixo será provado o Teorema 2.11 que permitirá trabalhar com jogos $CN(n, 1)$, $CN(n, n)$ e $CN(n, n-1)$.

Teorema 2.11.

(i) O jogo CN (n, 1) se reduz a Nim , para o qual o conjunto de posições perdedoras é dada por $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$*, onde* $p_1 \oplus p_2 \oplus ... \oplus p_n = 0$

(ii) O jogo CN (n, n) tem uma única posição-L, P = (0, 0, . . . , 0).

(iii) O jogo CN (n, n - 1) tem a seguinte posição-L P = (a, a, . . ., a), onde $a \geqslant 0$.

Demonstração.

(i) Este resultado é o próprio teorema de Bouton visto no capítulo 1 (Teorema 1.7).

(ii) Neste jogo, o jogador que estiver na posição onde $P \neq (0, 0, ..., 0)$ tem sempre uma estratégia vencedora, pois ele pode retirar todas as moedas de todas as pilhas e finalizar o jogo.

(iii) Neste jogo, o jogador inicia verificando as pilhas $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$, $p_i \in P$ com $1 \leqslant i \leqslant n$ e p_i não negativos.

1. Se existe pelo menos um $p_i \in P$ diferente das outras, então identifica-se qual dessas pilhas tem a menor quantidade de moedas, sem perda de generalidade suponha p_1 menor do que todas as outras pilhas, separe esta pilha e selecione todas as outras, tomando assim n - 1 pilhas e reduzindo todas à mesma quantidade de p_1, retirando quantas e de onde for necessário a retirada de moedas.

   Desta forma cada vez que o adversário reduzir em 1 a n - 1 pilhas, não importando a quantidade, o jogador que deixou inicialmente todas as pilhas com a mesma quantidade, deverá fazer o mesmo processo inicial, até que se possa deixar todas as pilhas com a quantidade 0 de moedas.

2. Se todas as pilhas têm a mesma quantidade de moedas, o segundo jogador tem uma posição-W, pois cada vez que o primeiro jogador reduzir em 1 a n - 1 pilhas, não importando a quantidade, o segundo jogador poderá usar a estratégia de (iii)1.

□

O Teorema 2.11 dá respaldo, dentre outros, para os jogos $CN(n, k)$, onde $n = 1, 2, 3, 4$ e $k \leqslant n$ com exceção de $n = 4$ e $k = 2$, ou seja, exceto $CN(4, 2)$. Porém, neste trabalho, será provado que o jogo $CN(n, 2)$ é equivalente ao grafo NIM C_n com múltiplas arestas (Teorema 2.12), assim será possível garantir que o jogo $CN(4, 2)$ é equivalente a C_4 o qual possui resultado já provado no Teorema 2.10.

Teorema 2.12. *O jogo CN (n, 2) é equivalente ao grafo NIM* C_n *com múltiplas arestas.*

Demonstração.

(i) Em $CN(n,2)$ há n pilhas e os jogadores podem escolher duas pilhas consecutivas da qual removem moedas, vamos assumir que existe $k_1, k_2, ..., k_n$ moedas nas pilhas $1, 2, ..., n$, respectivamente, ou seja $P = (k_1, k_2, ..., k_n)$. No jogo grafo NIM Cn teremos n vértices que estão conectados um ao outro por uma quantidade de arestas.

Vamos assumir que há k_1 arestas conectadas aos vértices v_1 e v_2, k_2 arestas conectadas aos vértices v_2 e v_3, k_3 arestas conectadas a v_3 e v_4, continuando desta forma até termos k_n arestas conectadas aos vértices v_n e v_1.

O número de pilhas em $CN(n,2)$ é equivalente ao número de conjuntos de arestas em C_n. O número de moedas em cada pilha de $CN(n,2)$ é equivalente a quantidade de arestas em cada conjunto de arestas conectadas aos respectivos vértices no grafo.

(ii) Em $CN(n,2)$, sem perda de generalidade, vamos assumir que o jogador removerá i moedas da pilha 1 e j moedas da pilha 2, onde $i \leqslant k_1$ e $j \leqslant k_2$ isto implica que nós alcançamos a posição $P' = (k_1 - i, k_2 - j, k_3, ..., k_n)$.

Um movimento equivalente ao NIM no grafo C_n, onde o jogador escolhe o vértice v_2 então move i arestas entre os vértices v_2 e v_1 e j arestas entre os vértices v_2 e v_3. Isso é uma posição no grafo NIM C_n onde há $(k_1 - i)$, conectadas a v_1 e v_2, $(k_2 - j)$ arestas conectadas aos vértices v_2 e v_3, k_3 arestas conectadas aos vértices v_3 e v_4, continuando dessa forma até termos k_n arestas conectadas aos vértices v_n e v_1.

Daí $CN(n,2)$ é equivalente ao grafo NIM Cn com múltiplas arestas.

$\square$

Para a prova de casos além desses vistos aqui, e também para um maior aprofundamento podem ser consultadas [5] e [8].

2.2.3 Grafos com peso nas arestas

O jogo do NIM sobre o grafo com pesos nas arestas ocorre em um grafo que possui n vértices, múltiplas arestas e laços, em que cada aresta tem um peso e um dos vértices é destacado e indicado pela presença de uma peça cujo símbolo é $\triangle$. Neste jogo em seu movimento cada jogador.

(i) Escolhe uma aresta incidente ao vértice onde encontra-se a peça;

(ii) Move a peça do vértice ao longo da aresta até um vértice adjacente;

(iii) Diminui o valor da aresta a qual escolheu-se transportar a peça para um número inteiro não negativo menor;

O jogo termina quando um dos jogadores não consegue mover a peça, uma vez que o valor de cada aresta incidente com o vértice onde a peça se encontra é igual a zero.

Caracteriza-se como uma posição-L, aquelas nas quais antes do seu movimento, o jogador está com a peça em um vértice onde todas as arestas incidentes tem peso zero, ou iniciando um caminho do vértice onde encontra-se a peça, até um vértice que possa deixar a peça onde todos os vértices incidentes tenha peso zero. E esse é um menor caminho, onde a quantidade de jogadas é par.

Caracterize-se como posição-W quando, antes do movimento, o jogador inicia do vértice onde encontra-se a peça, até um vértice que possa deixar a peça onde todos os vértices incidentes tenha peso zero. E esse é um menor caminho, onde a quantidade de jogadas é ímpar.

Um grafo com dois vértices, m arestas onde cada aresta tem peso $k_1, k_2, ..., k_m$ onde k_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ é um número inteiro não negativo e a presença de uma peça é equivalente ao NIM com m pilhas de tamanhos $k_1, k_2, ..., k_m$, onde m e k_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, são inteiros não negativos, esse é o jogo do NIM.

O Exemplo 2.13 traz um jogo no grafo com dois vértices e peso nas arestas. Como o jogo é equivalente ao jogo do NIM trabalhado no capítulo 1, uma estratégia vencedora se dará com nímeros, da mesma forma que foi utilizado no jogo do NIM.

Exemplo 2.13. Tome a Figura 2.28, dois jogadores moverão a peça de um vértice para o outro reduzindo o peso das arestas.

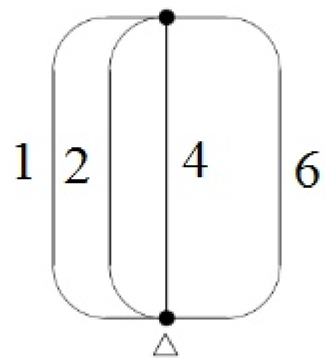

Figura 2.28: Grafo com múltiplas arestas, peso em cada aresta e a peça $\triangle$ para ser movida

Simulação do jogo:

1. O primeiro jogador fará a soma dos nímeros obtendo $*1 + *2 + *4 + *6 = *1 + *2 + *4 + *2 + *4 = *1$, logo ele pode levar a peça de um vértice para o outro deixando a aresta de peso 1 com peso 0.

2. O segundo jogador recebe o jogo em uma posição com a seguinte soma nimérica $*2 + *4 + *6 = *2 + *4 + *2 + *4 = 0$, estando em uma posição-L, não tem movimentos

que deixe a soma nimérica ainda zero. Então leva a peça de um vértice para o outro, reduzindo o peso 6 da aresta para peso 0.

3. O primeiro jogador tem o jogo em uma posição em que poderá utilizar a estratégia do espelho, e faz reduzindo o peso 4 da aresta para 2.

4. Com isso, o segundo jogador na posição-L, sem movimento para deixar também uma posição-L para o primeiro jogador. Então, ele leva a peça para o outro vértice e deixa uma aresta com peso 2, agora, com peso 0.

5. Assim, o primeiro jogador leva a peça para o outro vértice, reduzindo o peso 2 da aresta para peso 0. Isso o leva a vencer o jogo, pois, deixa para o segundo jogador a peça em um vértice que só possui arestas incidentes de peso 0.

Outro grafo com pesos nas arestas, são grafos como o da Figura 2.29, onde os vértices adjacentes indicam uma possível posição, sendo a posição atual dada com a peça $\triangle$.

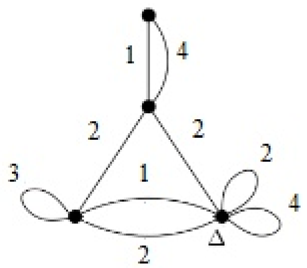

Figura 2.29: Grafo com múltiplas arestas, pesos nas arestas e a peça para movimento

A posição de um jogo NIM G (jogo NIM no grafo G) será correspondente à posição de um jogo NIM H (jogo NIM no grafo H) de forma que, o jogo NIM H é composto por uma única aresta entre os vértices adjacentes, as quais terão o peso definido pela soma nimérica, feita com as arestas paralelas de vértices adjacentes existentes e também a soma obtida com os laços de um mesmo vértice.

Daí uma posição-L no grafo H corresponderá a uma posição-L no grafo G, o mesmo ocorrerá com a posição-W.

Classifica-se cada posição de um jogo NIM H como sendo uma posição-L ou uma posição-W:

- A posição será considerada posição-L se o jogador não tiver opções, formado assim um caminho iniciado do vértice em que se encontra a peça, até um vértice em que a soma nimérica da aresta incidente ou arestas incidentes corresponderá a zero, ou seja, finalizará o caminho em um vértice no qual as arestas incidentes terão soma nimérica zero. E formando um menor caminho cuja quantidade de jogadas é par.

- A posição será considerada posição-W quando formar um caminho iniciado no vértice em que se encontra a peça, até um vértice que a soma nimérica da aresta incidente ou arestas incidentes poderá corresponder a zero, ou seja, finalizará o caminho em um vértice em que as arestas incidentes terão soma nimérica zero. E formando um menor caminho cuja quantidade de jogadas é ímpar.

A estratégia vencedora, inicialmente, consiste em associar para cada posição um grafo onde as múltiplas arestas serão apenas uma única aresta, ou seja, os laços de cada vértice serão separados e as arestas paralelas de vértices adjacentes também, faz a soma NIM de cada um separadamente (os laços de um vértice, obtendo um resultado e separadamente das arestas paralelas obtendo outros resultados).

Com a soma, as arestas que tiveram o seu peso utilizado para cada soma serão substituídas por uma aresta que terá o peso equivalente ao nímero da soma NIM.

Em seguida, se o jogador desejar ter uma estratégia vencedora, deverá deixar a soma NIM igual a zero para cada aresta obtida. Além disso, deverá encaminhar a peça para o vértice adjacente, percorrendo um menor caminho cuja quantidade de jogadas seja ímpar, caso esse caminho exista.

Caso haja somente caminho cuja quantidade de jogadas seja par, pelas regras do jogo, o jogador deverá efetuar uma jogada, seguindo um caminho com quantidade de jogadas par o seu adversário terá uma estratégia vencedora.

Para uma melhor compreensão segue o Exemplo 2.14, onde será utilizado uma estratégia vencedora.

Exemplo 2.14. Tome o grafo da Figura 2.30. Dois jogadores um por vez irão reduzir os pesos das arestas com a peça.

Todas as figuras terão o grafo do jogo e o grafo correspondente com uma aresta e o nímero e os vértices identificados.

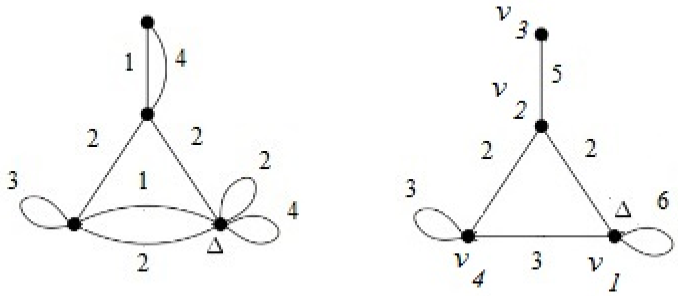

Figura 2.30: primeiro jogador

Soma de nímeros:

a) $*1 + *4 = *5$

b) $*2 + *4 = *6$

c) $*1 + *2 = *3$

1. Para que o primeiro jogador tenha uma estratégia vencedora, ele deverá iniciar o jogo pelo laço de peso 4 e seguir as arestas reduzindo o peso, fazendo com que a soma NIM chegue a zero, trabalhando nos laços do vértice e nas arestas dos vértices adjacentes em um caminho cuja quantidade de jogadas é ímpar. (v_1v_1, v_1v_2, v_2v_3)

   Portanto, a primeira soma a ser observada será b) $*2 + *4 = *6$. Pela TABELA DE SOMA NIM (Tabela 1.2), a soma é igual a 0 se o peso 4 da aresta passar para peso 2.

   Daí o jogador posicionará a peça no mesmo vértice, reduzindo o peso 4 do laço para peso 2, deixando o jogo na posição representada na Figura 2.31.

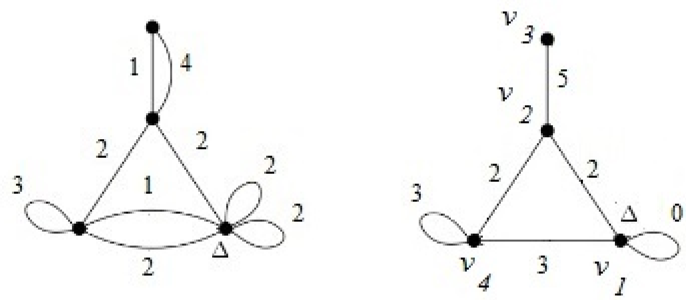

Figura 2.31: segundo jogador

2. O segundo jogador não tem uma estratégia vencedora. Pois, em sua vez, o menor caminho onde, teremos a peça em um vértice com arestas incidentes cuja soma nimérica corresponde a zero é um caminho par (v_1v_2, v_2v_3). Daí reduz a aresta de peso 2 em peso 0, deixando o jogo na posição representada na Figura 2.32.

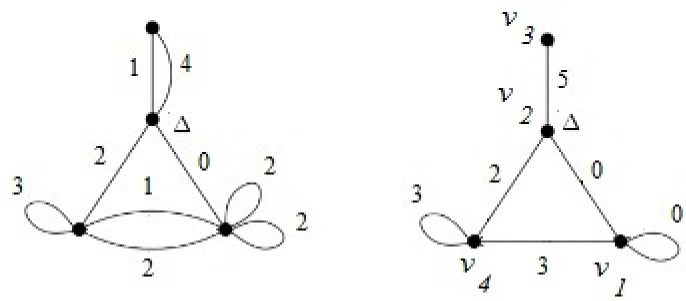

Figura 2.32: primeiro jogador

3. Para que o primeiro jogador siga uma estratégia vencedora, ele deverá trabalhar na aresta dos vértices adjacentes em um caminho cuja quantidade de jogadas é ímpar. (v_2v_3)

O primeiro jogador usa então, a) para fazer a soma nimérica que indicará com base na tabela de soma NIM, o quanto é preciso reduzir para se ter a soma zero.

a) $*1 + *4 = *5$, pela tabela a aresta de peso 4 deve ter peso 1.

Assim, o primeiro jogador leva a peça para o vértice adjacente, reduzindo o peso 4 da aresta para peso 1. Com isso o jogo fica com a posição representada na Figura 2.33.

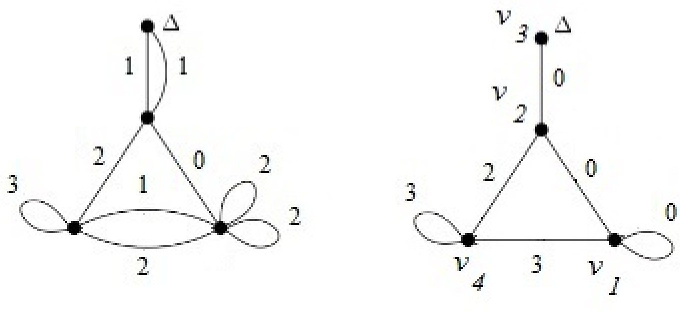

Figura 2.33: segundo jogador

4. O segundo jogador está na posição do jogo que consta na Figura 2.33, encontra-se em um vértice cuja soma nimérica corresponde a zero, tem portanto uma posição-L, não há movimento onde o segundo jogador deixe uma posição-L para o primeiro jogador. Com isso, ele reduz a aresta de peso 1 para peso 0. (Figura 2.34)

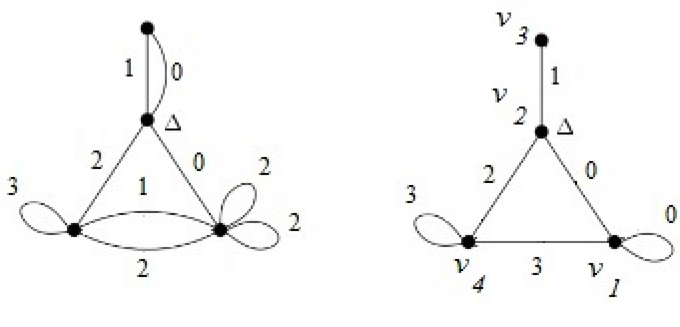

Figura 2.34: primeiro jogador

5. O primeiro jogador finaliza o jogo reduzindo o peso 1 da aresta para peso 0, deixando a posição da Figura 2.35.

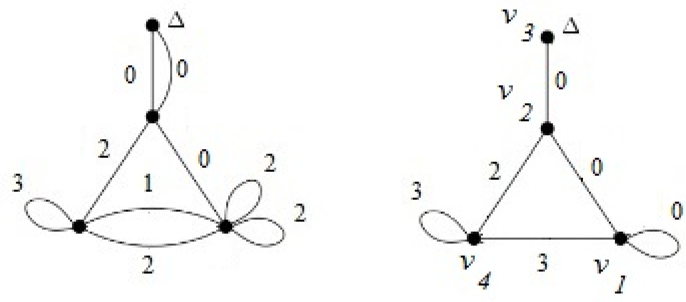

Figura 2.35: segundo jogador

6. O segundo jogador está em uma posição onde todas as arestas incidentes de seu vértice tem peso 0 (Figura 2.35), logo não terá para onde mover a peça, posição-L e finalizando assim, o jogo.

O Teorema 2.15 garante que a estrategia vencedora utilizada para o grafo com uma aresta e o nímero é de fato estratégia vencedora também para o grafo do jogo.

Teorema 2.15. *Seja G um grafo, uma posição em um jogo NIM G pode ter múltiplas arestas. Então, existe um grafo H, no conjunto vértice de G, no qual cada vértices é incidente no máximo com um ciclo, cada par de vértices são incidentes com no máximo uma ligação comum, e uma posição em um jogo NIM H, de tal modo que uma estratégia vencedora no NIM H corresponde a uma estratégia vencedora do NIM G.*

Essa demonstração pode ser vista em [3]. Além disso, fica uma leitura para os que querem se aprofundar mais.

Podendo seguir também para NIM com grafos bipartidos que poderão ser vistos em [9] e [10].

2.3 Aplicação

Para finalizar será feita uma aplicação do jogo NIM em grafos, a qual poderá ser trabalhada no jogo subtração, serão estudados agora o jogo e sua estratégia vencedora. Tal estratégia também será apresentada no grafo.

As regras são iguais as do NIM, mas os jogadores só poderão retirar quantidades fixas de moedas (s). O conjunto que determina as quantidades de moedas que podem ser retiradas será definida por S, $s \in S$.

Tomemos n como a quantidade das moedas de uma pilha e $F(n)$ é a função que associa a cada valor do natural n o seu valor nimérico.

Exemplo 2.16. Em uma pilha com dezenove moedas, os jogadores só poderão retirar até três moedas. Como seria uma estratégia vencedora?

$S = \{1, 2, 3\}$

$n = 19$

$F(0) = \emptyset$, jogo finalizado

$F(1) = \{0\} = *1$

$F(2) = \{0, *1\} = *2$

$F(3) = \{0, *1, *2\} = *3$

$F(4) = \{*1, *2, *3\} = 0 = F(0)$. Se for retirada uma moeda, o jogo irá para a posição $F(3) = *3$, se forem retiradas duas moedas, o jogo irá para a posição $F(2) = *2$, se forem retiradas três moedas o jogo vai para o posição $F(1) = *1$ e o menor valor excluído destes nímeros é 0. Determinando que esta é uma posição-L.

$F(5) = \{0, *2, *3\} = *1 = F(1)$. Se for retirada uma moeda, o jogo irá para a posição $F(4) = 0$, se forem retiradas duas moedas, o jogo irá para a posição $F(3) = *3$, se forem retiradas três moedas, o jogo irá para o posição $F(2) = *2$ e o menor valor excluído destes nímeros é $*1$, determinando que esta é uma posição-W.

Com isso, o jogador da vez deverá retirar uma moeda para ter uma estratégia vencedora.

$F(6) = \{0, *1, *3\} = *2 = F(2)$. Se for retirada uma moeda, o jogo irá para a posição $F(5) = *1$, se forem retiradas duas moedas, o jogo irá para a posição $F(4) = 0$, se forem retiradas três moedas, o jogo irá para o posição $F(3) = *3$ e o menor valor excluído destes nímeros é $*2$, determinando que esta é uma posição-W.

Portanto, o jogador da vez deverá retirar duas moedas para ter uma estratégia vencedora.

$F(7) = \{0, *1, *2\} = *3 = F(3)$. Se for retirada uma moeda, o jogo irá para a posição $F(6) = *2$, se forem retiradas duas moedas, o jogo irá para a posição $F(5) = *1$, se forem retiradas três moedas o jogo irá para a posição $F(4) = 0$ e o menor valor excluído destes nímeros é $*3$, determinando que esta é uma posição-W.

Logo, o jogador da vez deverá retirar três moedas para ter uma estratégia vencedora.

$F(8) = \{*1, *2, *3\} = 0 = F(0)$. Se for retirada uma moeda, o jogo irá para a posição $F(7) = *3$, se forem retiradas duas moedas, o jogo irá para a posição $F(6) = *2$, se forem retiradas três moedas, o jogo irá para o posição $F(5) = *1$ e o menor valor excluído destes nímeros é 0. Determinando que esta é uma posição-L.

Dessa forma, o jogo segue até a quantidade total de moedas.

$F(9) = \{0, *2, *3\} = *1 = F(1)$

$F(10) = \{0, *1, *3\} = *2 = F(2)$

$F(11) = \{0, *1, *2\} = *3 = F(3)$

$F(12) = \{*1, *2, *3\} = 0 = F(0)$
$F(13) = \{0, *2, *3\} = *1 = F(1)$
$F(14) = \{0, *1, *3\} = *2 = F(2)$
$F(15) = \{0, *1, *2\} = *3 = F(3)$
$F(16) = \{*1, *2, *3\} = 0 = F(0)$
$F(17) = \{0, *2, *3\} = *1 = F(1)$
$F(18) = \{0, *1, *3\} = *2 = F(2)$
$F(19) = \{0, *1, *2\} = *3 = F(3)$, pilha NIM inicial desse exemplo. Se for retirada uma moeda, o jogo irá para a posição $F(18) = *2$, se forem retiradas duas moedas, o jogo irá para a posição $F(17) = *1$, se forem retiradas três moedas, o jogo irá para a posição $F(16) = 0$ e o menor valor excluído destes números é $*3$, determinando que esta é uma posição-W.

Então, o jogador da vez deverá retirar três moedas para ter uma estratégia vencedora.

Daí, pode-se concluir que, como no exemplo há dezenove moedas, quem inicia o jogo poderá ter uma estratégia vencedora.

Observe que cada $*n$ é encontrado utilizando o mínimo excluído, com isso, tem-se $F(n+4) = F(n) = *n$, onde $*n$ é o nímero que determina a quantidade a ser retirada da pilha. Assim a estratégia vencedora consistirá em deixar para o seu oponente um múltiplo de 4. Outra forma de observar um valor x (x é o valor que corresponde ao nímero) será $n \equiv x\ (mod 4)$.

Pode-se também observar o jogo com um grafo dirigido, que terá todas as posições possíveis e indicará a posição com o nímero correspondente. Dessa forma o jogador identificará se há uma estratégia vencedora e qual será ela para o jogo. (Figura 2.36)

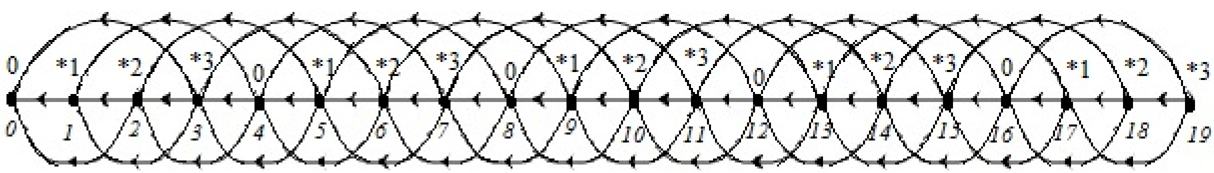

Figura 2.36: Grafo do jogo subtração, jogado em uma pilha com 19 moedas.

A representação no grafo é feita usando pontos para vértices e linhas para os movimentos possíveis. Uma seta é colocada em cada linha para indicar a direção que o movimento seguirá. (grafo dirigido)

Tem-se no grafo, n como o número de moedas. Nesse exemplo, o maior valor de representação do n é 19, a pilha vazia indica que o jogo foi finalizado, representado por $P(0) = \emptyset$. Tem-se também $P(1) = \{0\}$, $P(2) = \{0, 1\}$, para $3 \leqslant k \leqslant n$, $P(k) = \{k-3, k-2, k-1\}$, onde $P(k)$ é o conjunto das possíveis posições, após uma jogada.

Daí, $P(1) = *1$

$P(2) = *2$

$P(3) = *3$

$P(4) = 0$

$P(5) = *1$

.

.

.

$P(19) = *3$

Com isso, para que se tenha uma estratégia vencedora em $P(1)$, deve-se retirar uma moeda e em $P(2)$ duas moedas, seguindo da mesma forma como foi vista para $F(1)$, $F(2)$ até $F(19)$.

Desse modo, o grafo pode ser aplicado a um jogo NIM e ser trabalhado não como algo estritamente necessário. Pois, o jogo não é no grafo, ele é uma maneira para se ter uma possível resolução com a estratégia vencedora do jogo.

A resolução do jogo no grafo, facilita a visualização de forma ampla, deixando explicita a resolução do jogo, o jogador pode observar rapidamente se está em uma posição-W ou uma posição-L, assim possivelmente utilizar a estratégia vencedora.

Capítulo 3

Considerações Finais

O jogo do NIM é estratégico e está relacionado com a teoria matemática, a qual este trabalho procurou dar ênfase, junto com a teoria dos grafos que possibilitou introduzir conceitos teóricos e utilizá-los para desenvolver o jogo de forma diferenciada.

Para o desenvolvimento do jogo, existe uma estratégia vencedora, na qual se tem presente conceitos matemáticos, os sujeitos que desejam utilizá-los necessitam explorar raciocínio lógico, planejar ações, resolver problemas, generalizar soluções observando regularidades e descrever os resultados através de um modelo matemático.

Este trabalho utilizou a teoria dos grafos no desenvolver do jogo e para estuda-lo como uma variação, a qual já foi proposta por alguns autores anteriormente, as investigações contempladas podem ter um maior aprofundamento e serem ampliadas com outros estudos.

Os quais podem ser feitos ou iniciados utilizando as referências contidas ao final do trabalho, elas darão suporte ao leitor para que possa ampliar o conhecimento sobre o assunto.

Referências Bibliográficas

[1] Berlekamp, Elwyn R., Conway, John H. e Guy, Richard K.. *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Vol 3, 2^o ed, A K Peters, 2003.

[2] Bouton, Charles L.. *Nim, A Games with a Complete Mathematical Theory*, 1902.

[3] Clark, Jonathan D.. *Nim on graphs*, Universidade de Auburn, Alabama, 2012.

[4] Duchêne, Eric; Dufour, Matthieu; Heubach, Silvia; Larsson, Urban. *Building Nim*, 2015.

[5] Dufour, Matthieu e Heubach, Silvia. *Circular Nim Games*, 2013.

[6] Erickson, Lindsay. *Nim on the complete graph*, 2010.

[7] Ferguson, Thomas S.. *Game Theory*, Parte I.

[8] Flesch, Breeann e Pradhan, Akaanchya. *Graph Nim*, PURE Insights: Vol . 4, artigo 3, 2015.

[9] Fukuyama, Masahiko. *A Nim game played on graphs*, Universidade de Tokyo, Komaba, Tokyo, 2003.

[10] Fukuyama, Masahiko. *A Nim game played on graphs II*, Universidade de Tokyo, Komaba, Tokyo, 2003.

[11] Gersting, Judith L., Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: Um Tratamento Moderno de Matemática Discreta, LTC Ed. S.A., 2004.

[12] Lima, José Fábio de A., Modelagem e resolução de problemas por meio de grafos: aplicações no ensino básico, Feira de Santana, 2014.

[13] Peres, Yuval. *Game Theory, Alive*, Disponível em: $< http : //www.stat.berkeley.edu/\ peres/gtlect.pdf >$.

[14] Saldanha, Nicolau C.. *Tópicos em jogos Combinatórios*, IMPA, 1991.

[15] Siegal, Aaron N.. *Combinatorial Game Theory*. Ed. American Mathematical Society, volume 146, 2010.

[16] Teixeira, Ralph C.. *Jogos Combinatórios e Números Surreais*. Departamento de Matemática Aplicada, UFF, 2013.