UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

MARTA LENA JAHN

A GEOMETRIA DE MATRIZES E DETERMINANTES

PONTA GROSSA
2013

MARTA LENA JAHN

A GEOMETRIA DE MATRIZES E DETERMINANTES

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Calçada

PONTA GROSSA

2013

MARTA LENA JAHN

A GEOMETRIA DE MATRIZES E DETERMINANTES

Dissertação apresentada para obtenção do título de mestre
na Universidade Estadual de Ponta Grossa, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Ponta Grossa,______de___________ de 2013.

____

Prof. Dr. Marcos Calçada – Orientador
Universidade Estadual de Ponta Grossa

____

Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana
Universidade Federal do Paraná

____

Prof. Dr. Marciano Pereira
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Agradecimentos

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, pela paciência e dedicação nestes dois anos.

Em especial, ao professor Dr. Marcos Calçada pela orientação e contribuição nesta dissertação.

Quero agradecer ao professor Dr. Marciano Pereira, pelo apoio e incentivo durante todo o curso.

Aos meus colegas, em especial Ana Eliza Gonçalves Ferreira e Paulo Ricardo Albach, que tornaram os sábados em Ponta Grossa mais especiais.

À minha família, por todo incentivo e apoio.

Resumo

O objetivo deste estudo é propor uma abordagem diferente para o ensino das matrizes, buscando valorizar o aspecto geométrico delas, e dos determinantes. De fato, as matrizes são importantes não apenas como forma de organizar dados numéricos (tabelas), mas também pelas diversas propriedades das operações que definem a álgebra matricial. Todavia, na forma tradicional de ensinar matrizes e determinantes no ensino médio, como tabelas de números e um número associado a uma matriz, respectivamente, as definições das operações matriciais e determinantes, assim como as suas propriedades, tornam-se bastante artificiais. A Geometria não apenas ajuda a tornar estes conceitos mais naturais, como também desenvolve a nossa intuição sobre o assunto. Além disso, os aspectos geométricos das matrizes e determinantes estão presentes em aplicações tecnológicas tais como em Computação Gráfica, por exemplo.

Começaremos este trabalho analisando alguns livros didáticos adotados no ensino médio, para verificar como a teoria de matrizes e determinantes vem sendo abordada em sala de aula; e relacionar essa teoria com os parâmetros curriculares nacionais do ensino médio. Posteriormente, exploraremos o conteúdo geométrico de matrizes e determinantes e proporemos uma metodologia para o seu ensino que valorize este aspecto. Esta abordagem por meio da geometria tem a finalidade de estimular o aluno a deduzir propriedades e refletir sobre os resultados obtidos nas operações realizadas com matrizes, por exemplo, a adição, a multiplicação e também, no cálculo de determinantes. Ao propor esta metodologia, faremos uso do software livre Geogebra, com o intento de propiciar uma melhor visualização do conteúdo pelo aluno.

Palavras-chave: ensino, matrizes, determinantes, geometria, Geogebra.

Abstract

The objective of this study is to propose a different approach to teaching of matrices, seeking value the geometric aspect of them, and determinants. In fact, the matrices are important not only as a way to organize numerical data (tables), but also by the different properties of the operations that define the matrix algebra. However, the traditional way of teaching matrices and determinants in a secondary education, such as tables of numbers and a number associated with a matrix, respectively, the definitions of matrix operations and determinants, as well as their properties become quite unnatural. The Geometry not only turns these concepts more natural, but also develops our intuition about it. Furthermore, the geometrical aspects of the matrices and determinants are present in technological applications such as in Computer Graphics, for example. We begin this work by analyzing some textbooks adopted in secondary education, in order to see how the theory of matrices and determinants have been approached in classrooms, and to relate it to national education curriculum guidelines. Later, we explore the geometric content of matrices and determinants and propose a methodology for teaching, which brings out this aspect. This approach by middle of the Geometry is intended to stimulate the student to deduce properties and reflect on the results in operations with matrices, for example, addition, multiplication and also in the calculation of determinants. In proposing this methodology, we use the free software Geogebra, with the intent of providing a better view of the content for the student.

Keywords: education, matrices, determinants, geometry, Geogebra.

Lista de figuras

Sumário

1. APRESENTAÇÃO

Uma das finalidades deste estudo é servir de motivação para a leitura e interpretação das matrizes em sua forma geométrica. As matrizes fazem parte do conteúdo previsto para o segundo ano do ensino médio. Não é um conteúdo que representa uma grande complexidade para os alunos, porém, propriedades e definições são ensinadas de forma apenas algébrica, deixando assim de esclarecer questionamentos, como por exemplo, sobre a origem das propriedades, da validade dos resultados obtidos nas operações e da interpretação das definições.

Usamos como base para o nosso estudo, o livro *Linear Algebra Through Geometry*, de Thomas Banchoff e John Wermer. O livro traz os conceitos de álgebra linear através de conceitos geométricos nos espaços de dimensão dois, três e quatro. A abordagem é feita inicialmente com vetores e a partir destes, são construídos os conceitos de transformações lineares e matrizes. Para todos os conceitos é dada uma interpretação geométrica. Encontramos no livro uma rica visualização das definições de projeção, transformação linear, produto interno, determinantes, valores próprios, e formas quadráticas.

No nosso estudo partimos da análise dos documentos oficiais sobre o conteúdo de matrizes. O capítulo dois contém uma descrição de estudos já realizados sobre o tema, bem como uma fundamentação teórica para justificar a abordagem por meio da geometria e o uso do software Geogebra na sequência didática.

O capítulo três contém a análise de alguns livros didáticos. Sabemos que os livros didáticos não são os únicos norteadores das sequências didáticas adotadas pelos professores, mas os mesmos exercem uma grande influência na elaboração do planejamento anual do professor. Observamos nas análises que a maioria dos livros pesquisados apenas enfatizam os aspectos algébricos das matrizes; poucos mencionam o aspecto geométrico, que quando abordado, é feito via transformações lineares.

No capítulo quatro, intitulado como *A história das Matrizes e Determinantes*, buscou-se traçar um breve histórico do conceito de matrizes e determinantes, pois julgamos ser importante para o professor conhecer a origem e o processo de evolução de um dado conceito.

No capítulo cinco, apresentamos uma proposta de sequência didática, com suas definições, ilustrações e exemplos. Começamos definindo o que são vetores e a partir dessa definição e notação, as demais operações, projeções, a definição de matriz e de transformações foram construídas.

No capítulo seis, intitulado *Considerações Finais*, apresentamos algumas sugestões de atividades que podem ser usadas em sala de aula e as considerações finais sobre a metodologia da proposta.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nosso objetivo neste capítulo é descrever alguns aspectos dos registros e teorias existentes sobre o objeto de estudo deste trabalho e também buscar uma resposta à seguinte questão: “Por que ensinar matrizes numa interpretação geométrica?”.

Nos textos dos parâmetros curriculares nacionais, não há uma menção direta do conteúdo das matrizes, mas há uma referência à “leitura e interpretação de dados expressos em tabelas.” (Brasil, 1998, p.74), que é uma forma de abordagem das matrizes adotada por muitos livros didáticos.

Nos conteúdos estruturantes das diretrizes curriculares da educação básica da Secretaria do Estado da Educação do Paraná, as matrizes e os determinantes, são citados no conteúdo Números e Álgebra, e segundo as diretrizes, o conteúdo Números e Álgebra é aprofundado no ensino médio:

> de modo a ampliar o conhecimento e domínio deste conteúdo para que o aluno: conceitue e interprete matrizes e suas operações, conheça e domine o conceito e as soluções de problemas que se realizam por meio de determinantes.” (PARANÁ, 2008, p.52).

Sem uma aplicação real, o aluno não sente a necessidade da aprendizagem de certo conceito matemático. Somente quando o aluno percebe que o conteúdo a ser ensinado é necessário para a resolução de uma situação problema, ele se abre para a assimilação. Abordar as matrizes de maneira geométrica permitirá ao aluno, deduzir propriedades e refletir sobre os resultados obtidos nas operações.

Muitos alunos questionam as operações feitas com matrizes. Por que a multiplicação é feita de maneira linha por coluna? O que representa o determinante de uma matriz? Segundo Eves (2011, p.552), a origem da multiplicação de matrizes está nas transformações lineares. Por isso, abordar as matrizes apresentando transformações geométricas, é uma possibilidade de justificar operações e propriedades das matrizes. Ao mesmo tempo, teremos uma ampliação da área da Geometria vista no ensino médio.

A definição e representação das matrizes são feitas em muitos livros didáticos, de forma apenas algébrica. De acordo com os PCN's:

> O conceito de álgebra é muito abrangente e possui uma linguagem permeada por convenções diversas de modo que o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente. Defende-se uma abordagem pedagógica que os articule, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados. (PARANÁ, 2008, p.52)

Existem centenas de relatos, estudos e pesquisas de como podemos tornar a Matemática mais próxima da realidade do aluno. A visualização é um instrumento valioso para apoiar os tipos de experiências mentais que orientam os alunos nas investigações matemáticas e os ajudam a construir conexões lógicas e demonstrações.

> A Geometria oferece um vasto campo de ideias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aprendiz, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização. Ativa as suas estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações formais. A Geometria é, portanto um campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar porque a intuição, o formalismo, abstração e a dedução constituem sua essência. (Fainguelernt, 1993 apud Fainguelernt, 1996 p.54).

Encontramos vários registros de pesquisas sobre o tema.

Destacamos o estudo de Stormowski (2008), por ser um estudo com uma linguagem voltada ao ensino médio. Em sua obra “Estudando matrizes a partir de transformações geométricas”, Stormowski apresenta uma sequência didática para o estudo das matrizes a partir das transformações geométricas de rotação, reflexão, translação, entre outras.

A metodologia adotada por Stormowski foi a engenharia didática, que é uma metodologia de pesquisa baseada na observação e análise de sequências didáticas intencionalmente elaboradas e implantadas. O estudo traz interessantes recursos computacionais que podem ser usados como apoio para a aplicação das atividades em sala de aula.

O estudo de Karrer (2006) aborda as deficiências e dificuldades dos alunos com relação à exploração de diferentes registros, principalmente em relação aos registros matriciais e gráficos na aprendizagem de conceitos da Álgebra Linear no ensino superior. O trabalho sugere diversas atividades de exploração de representações de transformações lineares; voltado mais para o ensino superior, pois tem uma caracterização por meio de representações simbólico-algébrica e matricial mais complexas, incluindo transformações no $\mathbb{R}^3$.

Neste estudo, faremos uso do software Geogebra, que tem por finalidade ajudar na visualização do conteúdo. Optamos pelo Geogebra por ser um software livre e que já está instalado nos laboratórios de informática da maioria das escolas estaduais. O programa está disponível para download em http://www.geogebra.org/cms/.

A alguns anos, D’Ambrosio já discursava sobre a necessidade de rever e aprimorar as práticas pedagógicas adotadas em sala de aula, para a busca e criação de novas metodologias que pudessem contribuir para estimular e desenvolver as habilidades de cada aluno.

> Estamos entrando na era do que se costuma chamar a “sociedade do conhecimento”. A escola não se justifica pela apresentação de conhecimento obsoleto e ultrapassado e muitas vezes morto. Sobretudo ao se falar em ciências e tecnologia. Será essencial para a escola estimular a aquisição, a organização, a geração e a difusão do conhecimento vivo, integrado nos valores e expectativas da sociedade. Isso será impossível de atingir sem a ampla utilização da tecnologia na educação. Informática e comunicações dominarão a tecnologia educativa do futuro. (D’Ambrosio, 1996, p.80).

A utilização de novas tecnologias na Matemática pode motivar o aluno a pensar sobre o que está sendo feito e, ao mesmo tempo, questionar o resultado obtido. Tudo isso pode ser feito de uma forma mais autônoma e independente por parte do aluno.

> Quando o aluno usa o computador para construir o seu conhecimento, o computador passa a ser uma máquina para ser ensinada, propiciando condições para o aluno descrever a resolução de problemas, usando linguagens de programação, refletir sobre os resultados obtidos e depurar suas ideias por intermédio da busca de novos conteúdos e novas estratégias. Nesse caso, o software utilizado pode ser os softwares abertos de uso geral, como as linguagens de programação, sistemas de autoria de multimídia, ou aplicativos como processadores de texto, software para criação e manutenção de banco de dados. (Valente, 1999, p.2).

O software Geogebra, criado por Markus Hohenwarter, pode ser usado para o ensino e aprendizagem da matemática nos vários níveis de ensino. É um programa simples e também já muito usado em sala de aula. O Geogebra traz vários recursos de geometria e de álgebra, que podem ser usados simultaneamente.

É considerado como ferramenta no ensino da matemática, pois:

> É necessário valorizar sempre o trabalho da sala de aula, ou seja, o software Geogebra é apenas um instrumento alternativo na prática pedagógica e poderá conferir maior precisão e rapidez em determinadas ações. Esse recurso tecnológico deverá levar os alunos a compreenderem suas construções geométricas assegurando-lhes os conhecimentos já adquiridos em sala de aula e a promover novas descobertas. (Brant; Montorfano, 2007, p.12)

Além dos recursos de tabelas, gráficos, cálculos e probabilidades, podemos usar o Geogebra como ferramenta para criar desenhos e ilustrações que podem ser usados em trabalhos no Microsoft Word. Todas as ilustrações contidas neste estudo foram feitas no programa Geogebra.

3. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

Analisamos alguns livros didáticos para verificar como o conteúdo das matrizes e determinantes vêm sendo abordados em sala de aula. Os dois primeiros livros abaixo mencionados foram os adotados pelas escolas estaduais de ensino médio da cidade de Palmeira, Paraná, nas duas últimas escolhas feitas.

Na obra *Matemática Completa* (Giovanni; Bonjorno, 2005), o conceito de matriz é apresentado como tabela retangular utilizada para organizar dados numéricos. Todas as operações e propriedades são apresentadas de forma algébrica, sem nenhuma menção da razão destas maneiras de operações. Há um breve relato da ordem de criação dos conceitos de matrizes e determinantes.

Na *Coleção Novo Olhar* (Souza, 2010), o conteúdo matrizes é abordado destacando sua importância na aplicação de bancos de dados, amplamente usados na computação gráfica, na Engenharia, Física e Administração. As operações são todas mencionadas de forma algébrica. Há um exercício resolvido, que menciona as transformações geométricas, mas utiliza-se apenas da rotação.

Os livros *Curso de Matemática* (Bianchini; Paccola, 1994) e *Matemática, Novo Ensino Médio* (Marcondes; Gentil; Greco, 2003) abordam o conteúdo de matrizes apenas algebricamente. Não há menção às transformações geométricas e não apresentam nenhuma referência à história das matrizes.

O livro analisado que mais apresentou a parte geométrica das matrizes foi a obra *Matemática, Contexto e Aplicações* (Dante, 2011). O livro mostra a aplicação das matrizes na computação gráfica, explicando as transformações de rotação, translação e escala, e traz também um exemplo de uma composição de transformações geométricas. A forma de abordagem das propriedades e operações é feita também de maneira algébrica, mas existem exercícios específicos sobre as transformações geométricas no plano, bem como um exercício de composição de duas transformações. No capítulo 7, denominado Vetores (leitura optativa) é feito um estudo sobre vetores no espaço, com conceitos de combinação linear e a caracterização geométrica dos determinantes.

4. A HISTÓRIA DAS MATRIZES E DETERMINANTES

O possível surgimento das matrizes se deu por volta do II a.C.. Há registros, preservados em blocos de barro, de que por volta de 300 a.C. os babilônios estudavam problemas que recaíam em sistemas de equações e eram resolvidos por meio de processos que trazem em sua essência a ideia de matriz. Os chineses, entre 200 a.C. e 100 a.C., também resolviam sistemas lineares com a noção de matrizes e determinantes.

Em 1683 surgiu a primeira publicação sobre a ideia de determinante. Na obra *Methods of solving the dissimulated problem*, de Kowa Seki, nascido no Japão, ele apresentou os métodos matriciais escritos com tabelas. Seki introduziu o conceito de determinantes e explicitou os métodos gerais para calculá-los.

Em meados do século XVII o suíço Gabriel Cramer descobriu uma regra para resolver sistemas lineares de n equações com n incógnitas, conhecida até hoje como regra de Cramer. O termo determinante foi, primeiramente, introduzido por Carl F. Gauss em *Disquisitiones arithmeticae* de 1801, usado nas propriedades das formas quadráticas.

Já Cauchy, em 1812, usou pela primeira vez o termo **determinante** no sentido que conhecemos hoje. O primeiro a usar o termo **matriz** foi Joseph Sylvester, em 1850, tendo definido matriz como um arranjo de termos num quadrilátero. Arthur Cayley, 1858, publicou a *Autobiografia da teoria das matrizes* que contém a primeira definição de uma matriz, em termos abstratos. Foi a observação de Cayley, do efeito de duas transformações sucessivas sobre uma transformação dada, que resultou na definição de multiplicação de matrizes (linhas por colunas).

A teoria dos determinantes que conhecemos hoje se deve em grande parte ao alemão Carl Gustav Jacobi, que viu na notação dos determinantes uma importante ferramenta para resolver problemas em várias áreas, como a física e a economia.

Muitos outros matemáticos deixaram valiosas contribuições na área de determinantes. Nomes como Cardano, Laplace, Leibniz, D'Alembert entre outros, foram responsáveis pela criação e evolução da teoria dos determinantes.

5. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

5.1. O PLANO CARTESIANO

Usamos a notação (a, b) para indicar o par ordenado de números reais a e b. É definido como par ordenado, pois para $a \neq b$, o par (a, b) é diferente do par (b, a). A coordenada a é usualmente chamada de abscissa e a coordenada b de ordenada. De modo geral, é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre pares ordenados e pontos de um plano. Este plano, munido de um sistema de eixos perpendiculares, é chamado de plano cartesiano ortogonal. Recebe este nome em homenagem ao matemático e filósofo René Descartes (1596 – 1650).

Os eixos do sistema são denominados de OX e OY e se encontram num ponto denominado origem O. Para localizar um ponto P no plano, traçamos retas perpendiculares aos eixos passando pelo ponto. A intersecção dessas retas com os eixos determinam as coordenadas (x, y) do ponto P; denotamos assim $P = (x, y)$.

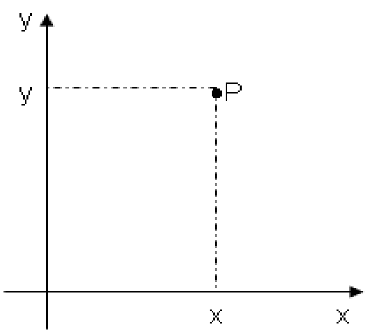

Figura 5.1: Plano cartesiano.

Os eixos *OX* e *OY* dividem o plano em quatro regiões, que denominamos de quadrantes. No primeiro quadrante temos, $x \geq 0$ e $y \geq 0$; no segundo, $x \leq 0$ e $y \geq 0$; no terceiro, $x \leq 0$ e $y \leq 0$; no quarto, temos $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

5.2. Vetores

5.2.1. Vetores na reta

Um vetor é um segmento de reta orientado que vai de um ponto inicial até um ponto final. Se A é o extremo inicial e B é o extremo final denotamos este vetor por $\overrightarrow{AB}$.

Figura 5.2.1: Vetor $\overrightarrow{AB}$.

Como sabemos todo ponto de uma reta tem como coordenada um número real e todo número real é coordenada de exatamente um ponto. Similarmente, todo ponto de uma reta está associado a um único vetor que vai da origem até este ponto e todo vetor que sai da origem define um único ponto na reta.

Dois vetores são chamados de equipolentes quando:

- têm o mesmo comprimento;
- são colineares ou paralelos;
- têm o mesmo sentido;

A palavra vetor tem sua origem na palavra em latim *vehere*, que significa transportar. Como poderemos observar ao longo deste estudo, uma das principais funções de um vetor é deslocar pontos, ou seja, efetuar translações.

5.2.2. Vetores no plano

Vamos definir como vetor num plano, o segmento de reta orientado que tem seu inicio na origem $(0, 0)$ e extremo final num certo ponto de coordenadas (x, y). Este vetor será denotado por uma letra maiúscula, sem a indicação de sentido (seta) do segmento, pois o mesmo sempre será considerado do ponto $(0, 0)$ até o ponto (x, y).

Usaremos para o vetor a notação $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ que representa as coordenadas do ponto *(x, y)*, escritas em forma de coluna, com a primeira coordenada *x* em cima e a segunda coordenada *y* embaixo.

Assim, o segmento de reta que tem início na origem (0,0) e se estende até o ponto (*2*, *4*), será chamado de vetor e denotado por *A*=$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Dizemos que um vetor é nulo quando tem sua origem coincidindo com seu extremo final e então podemos representá-lo por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

5.3. COMPRIMENTO DE UM VETOR

O **comprimento** ou **norma** do vetor A, escrito como $|A|$, é definido pela distância do ponto A=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ até a origem $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Usando o Teorema de Pitágoras, obtemos que:

$$|A| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{5.3.1}$$

Por exemplo, se $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, teremos $|A| = \sqrt{3^2 + 4^2}$= 5.

$|A|$ sempre será positivo, a menos que A=$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, pois neste caso $|A| = 0$.

Os vetores de comprimento igual a 1, são chamados de **vetores unitários**. Sempre podemos normalizar um vetor, ou seja, produzir outro vetor com a mesma direção e sentido que o vetor original, porém com comprimento igual a 1. Este processo consiste em multiplicar o vetor por um escalar. Para tornar o vetor não nulo *X*, num vetor de comprimento igual a 1, multiplicamos *X* por $\left(\frac{1}{|X|}\right)$, pois:

$$\left|\left(\frac{1}{|X|}\right).X\right| = \left|\left(\frac{1}{|X|}\right)\right| |X| = \frac{1}{|X|}.|X| = 1$$

Os vetores unitários podem ser obtidos na interseção dos vetores com a circunferência de centro na origem e raio igual a 1. O vetor unitário $\frac{X}{|X|}$ é o segmento orientado que vai da origem até o ponto de encontro do vetor *X* com a circunferência unitária.

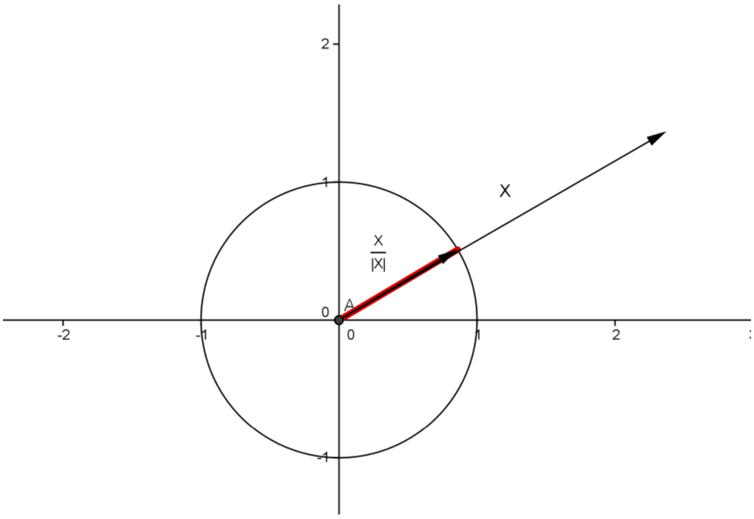

Figura 5.3.1: Vetor unitário $\frac{X}{|X|}$ no círculo.

5.4. SOMA DE DOIS VETORES

A soma de dois vetores é definida algebricamente como sendo o vetor cujas componentes são as somas das respectivas componentes dos vetores dados. Assim, se $A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, temos $A + B = \begin{bmatrix} x+u \\ y+v \end{bmatrix}$.

Geometricamente, interpretamos o resultado de uma adição usando a translação. Para isso, vamos definir o que é uma translação. Podemos associar à translação verbos como transferir para outro lugar ou arrancar um objeto de um lugar e levá-lo para outro.

Matematicamente, a translação é uma transformação que associa ao ponto P um ponto P' em função de um vetor diretor. São transformações que relacionam figuras congruentes, pois não alteram as medidas das figuras.

Na figura abaixo temos a translação do triângulo ABC em função do vetor $\overrightarrow{DE}$.

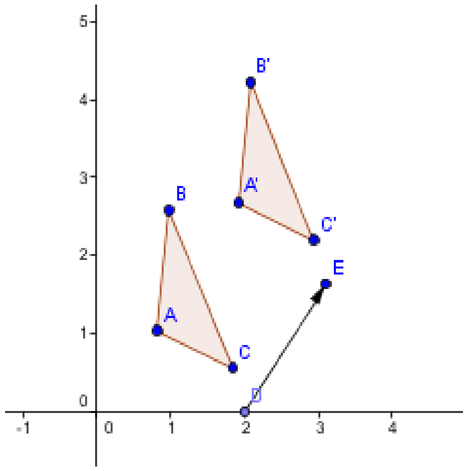

Figura 5.4.1: Translação do triangulo ABC em relação ao vetor $\overrightarrow{DE}$.

Voltando à soma de dois vetores, supondo $A=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$, vamos destacar o triângulo de vértices $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$.

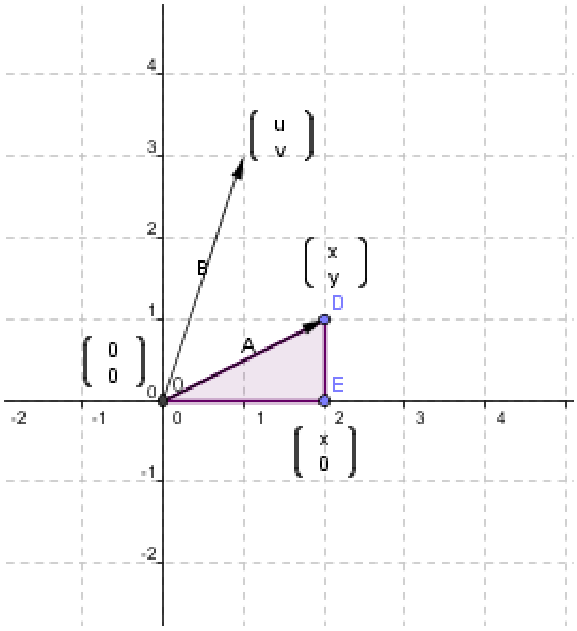

Figura 5.4.2: Triângulo ODE.

Fazendo a translação deste triângulo em relação ao vetor B, obtemos o triângulo O'D'E', onde D' é o ponto final do vetor que representa $A+B$ e é também o quarto vértice do paralelogramo de vértice O, O' e D.

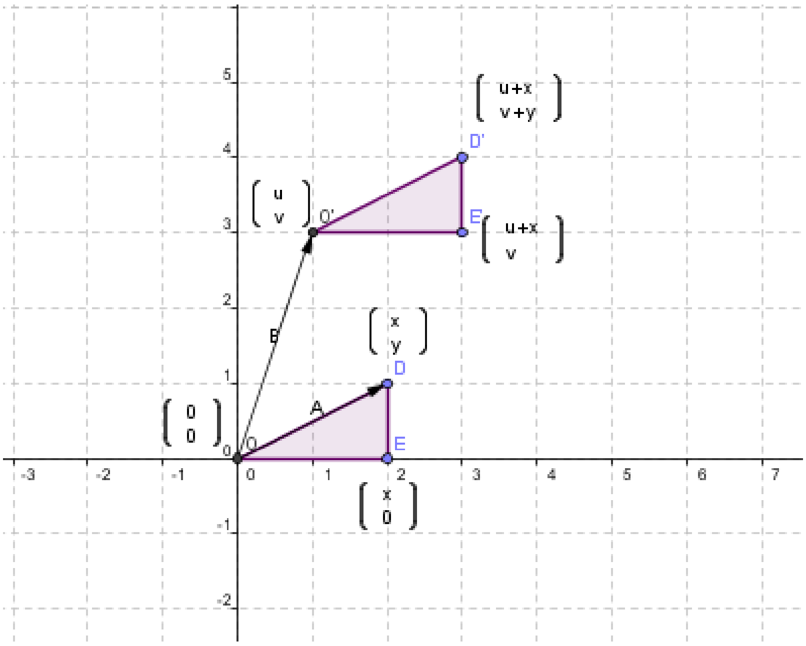

Figura 5.4.3: Translação do triângulo ODE em relação ao vetor B.

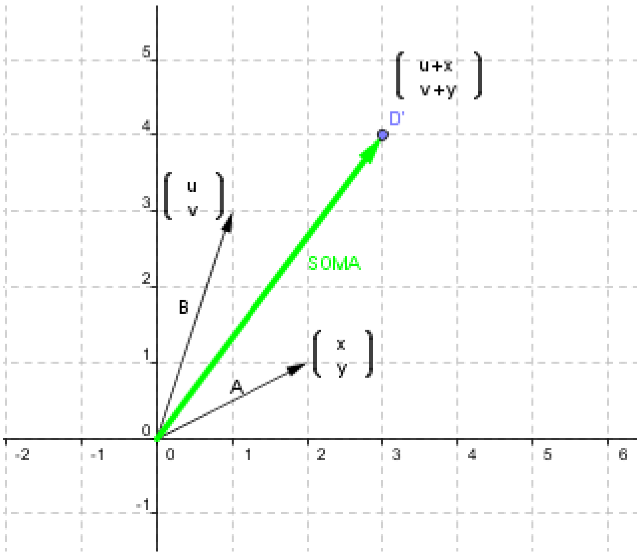

Figura 5.4.4: Coordenadas do vetor $\overrightarrow{OD'}$.

Usamos no raciocínio acima, os vetores A e B, vetores do primeiro quadrante, mas os mesmos argumentos podem ser usados para interpretar a soma de vetores dos outros quadrantes.

Podemos usar o negativo de um vetor para representar a diferença entre X e Y. Dizemos que $-A$ é o negativo de A ou o inverso aditivo de A . Assim, $-A$ tem o mesmo comprimento do vetor A, mesma direção, porém, sentido contrário. Se B é o inverso aditivo de A, então A+B=$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

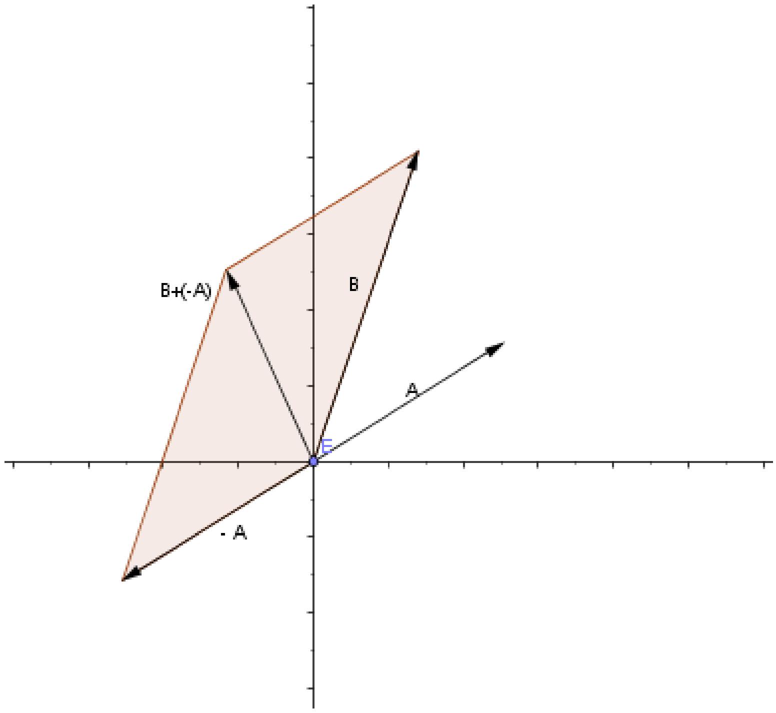

Figura 5.4.5: Vetor *B*+ *(-A)*.

Observando a figura 5.4.5 acima, podemos entender melhor as leis para a soma de vetores apresentadas nas aulas de Física. Para calcular a soma de dois vetores usando a regra do paralelogramo, basta deslizar os dois vetores para um mesmo ponto, de modo que a origem dos dois coincida, e traçar o paralelogramo formado pelos vetores. A soma vetorial será a diagonal maior. Podemos ver que não faz diferença a ordem da adição dos dois vetores, isto é, $A + B = B + A$.

Na Física usamos mais o módulo do vetor, ou seja, o comprimento do vetor. Para calcular o comprimento do vetor $A + B$, destacamos o triângulo formado pelos vetores A e B e pela diagonal. A partir da extremidade do vetor que representa a diagonal, traçamos uma perpendicular à reta que passa pelo vetor A.

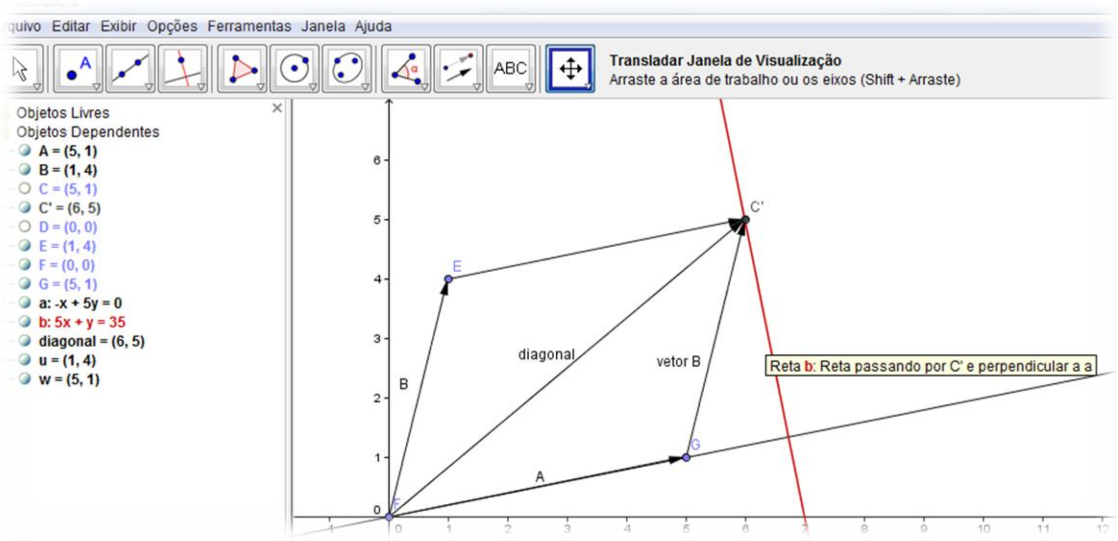

Figura 5.4.6: Triângulo construído a partir da diagonal e o vetor A.

Obtemos assim um triângulo retângulo, cuja altura denominaremos de h e o segmento da extremidade do vetor A até o segmento h, chamaremos de m. Repare que temos na figura abaixo um triângulo retângulo menor formado pelo vetor B e os segmentos h e m. Aplicando Pitágoras neste triângulo menor, tem se

$$|B|^2 = h^2 + m^2$$

ou ainda,
$$h^2 = |B|^2 - m^2 \tag{5.4.1}$$

Ainda neste triângulo, escrevemos $cos\alpha = \frac{m}{|B|}$. Logo:

$$m = |B|cos\alpha. \tag{5.4.2}$$

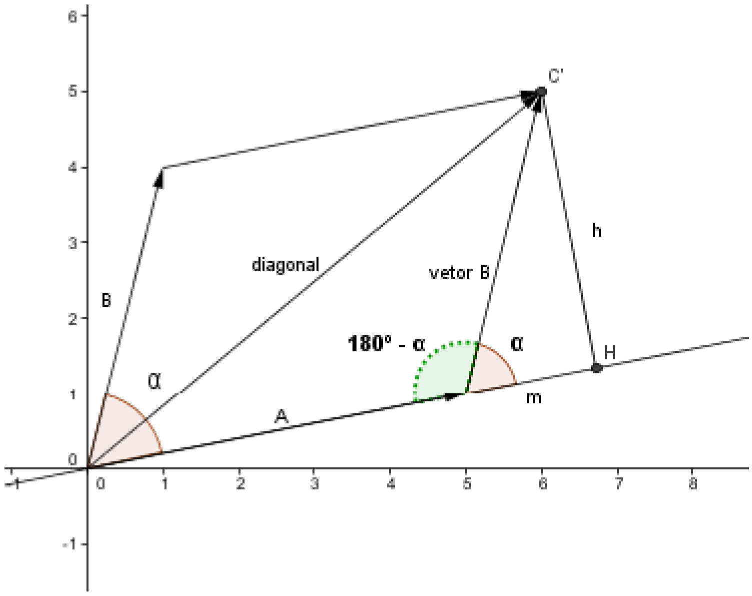

Figura 5.4.7: Ângulos em destaque nos dois triângulos considerados.

Aplicando Pitágoras no triângulo maior e denominando a diagonal de A+B, teremos

$$|A + B|^2 = h^2 + (|A| + m)^2. \qquad (5.4.3)$$

Substituindo as equações (5.4.1) e (5.4.2) na equação (5.4.3), obtemos

$$|A + B|^2 = |B|^2 - m^2 + (|A| + m)^2$$

$$|A + B|^2 = |B|^2 - (cos\alpha.|B|)^2 + (|A| + cos\alpha.|B|)^2$$

$$|A + B|^2 = |B|^2 - cos^2\alpha.|B|^2 + |A|^2 + 2.cos\alpha.|B||A| + cos^2\alpha|B|^2$$

$$|A + B|^2 = |A|^2 + |B|^2 + 2.cos\alpha.|A||B|. \qquad (5.4.4)$$

Essa equação (5.4.4) é conhecida como a **Lei do Paralelogramo.**

Podemos também obter o vetor que representa $X + Y$, deslizando o vetor Y paralelamente a si até a extremidade do vetor X. O vetor $X + Y$, por definição, será o vetor cuja origem coincide com a origem do primeiro vetor e cuja extremidade coincide com a extremidade do segundo vetor. Esta lei, também conhecida como a **lei do triângulo**, pode ser usada também para vetores colineares. Já a lei do paralelogramo só faz sentido se os vetores não estiverem sobre a mesma reta.

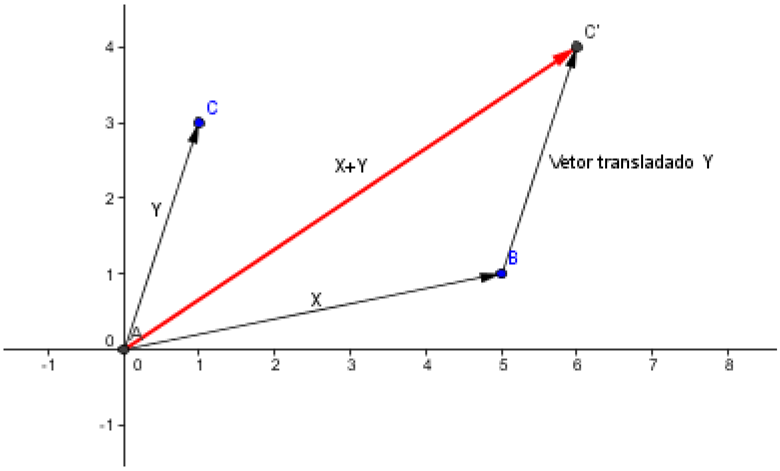

Figura 5.4.8: Lei do triângulo

Propriedades da soma de vetores:

Sejam $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $U = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$ e $R = \begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix}$ vetores quaisquer e m e n números reais, valem as seguintes propriedades:

I) Comutativa: $X + U = U + X$;

$$X + U = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + v \\ y + u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v + x \\ u + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = U + X.$$

Isso pode ser facilmente visto na figura abaixo:

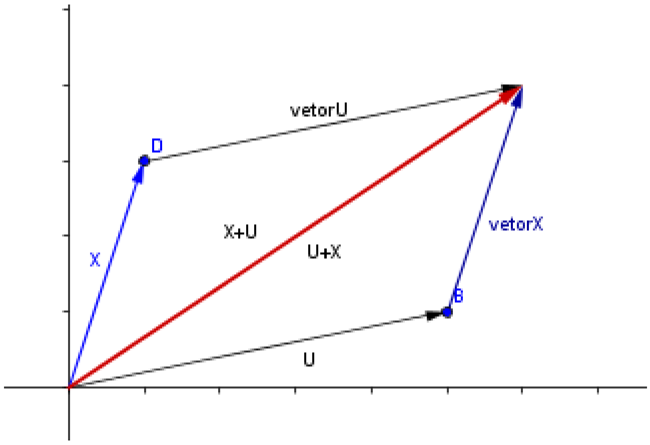

Figura 5.4.9: Propriedade comutativa.

II) Associativa: $(X + U) + R = X + (U + R)$;

$$(X + U) + R = \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} x + v \\ y + u \end{bmatrix}\right) + \begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x + v) + r \\ (y + u) + t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x + (v + r) \\ y + (u + t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v + r \\ u + t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix}\right)$$

$$= X + (U + R).$$

Propriedade vista geometricamente na figura abaixo:

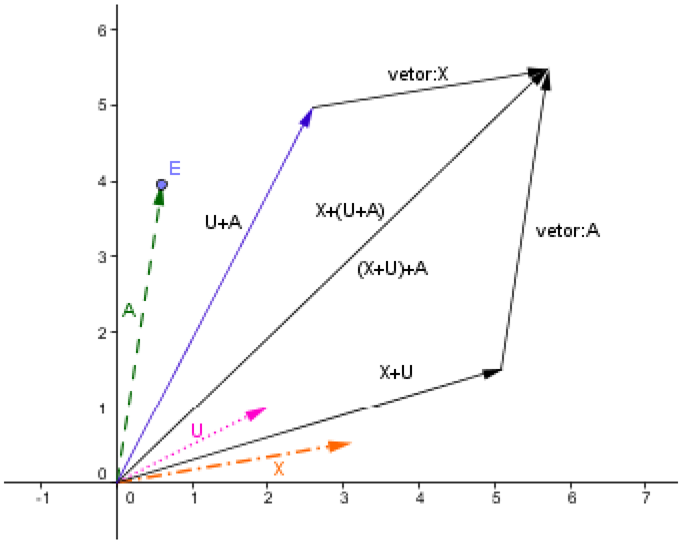

Figura 5.4.10: Propriedade associativa.

III) Elemento neutro: $X + 0 = 0 + X = X$ para todo X.

Seja $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ o vetor nulo.

$$X + 0 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+0 \\ y+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+x \\ 0+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 + X = X.$$

IV) Inverso: Para cada vetor X, existe – X, tal que $X + (-X) = 0$.

Se $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, então existe $-X = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix}$ e

$$X + (-X) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-x \\ y-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5.5. MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR

Dado um vetor $X = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ e um número real *r*, definimos um novo vetor , *r*. X, multiplicando cada coordenada de X por r. Assim, *r*. X = *r*. $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} ru \\ rv \end{bmatrix}$.

Se $r > 1$, teremos um vetor mais longo. Se $0 < r < 1$, teremos um vetor mais curto. Se $r = 1$, teremos o próprio vetor e se $r = 0$ obteremos o vetor nulo. Se $r < 0$, o vetor terá o mesmo comprimento do vetor $|r|X$, porém sentido contrário.

Dois importantes vetores são $E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $E_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, que denominamos **vetores**

bases do plano.

Todo vetor pode ser escrito de maneira única como a soma de um múltiplo de E_1 e um múltiplo de E_2, ou seja, $A=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = u\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = uE_1 + vE_2$.

Um par de vetores, A e B, são **linearmente dependentes** se um é múltiplo do outro. Se $A=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então o par A e B são linearmente dependentes pois 0 = 0.B. Se A é um vetor não nulo e A e B são linearmente dependentes, então $B= t.A$ para um algum $t \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, se A é um vetor não nulo, então o vetor tA, para diferentes valores de t, está na reta determinada pelo vetor A. Assim, se A e B são vetores linearmente dependentes, então o vetor B está na reta determinada pelo vetor A. Todos os vetores múltiplos de A, estão sobre uma mesma reta que passa pela origem. Para obtermos uma reta paralela ao vetor A, que passe pelo ponto U, qualquer, podemos

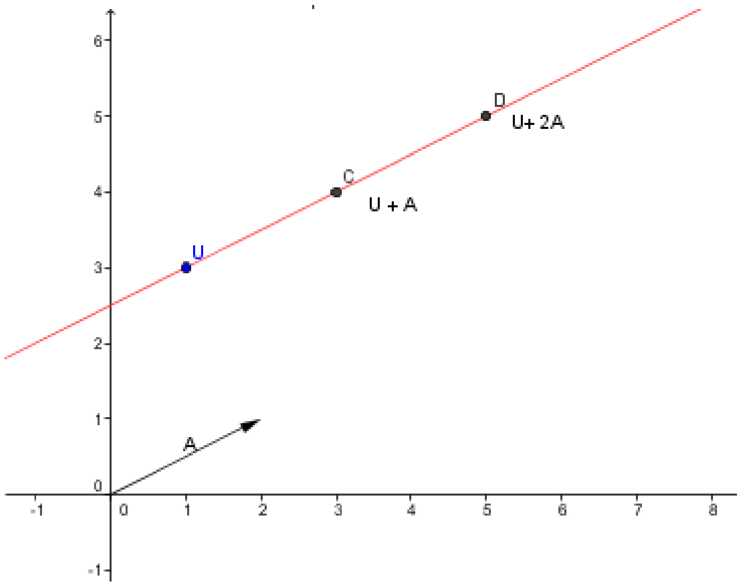

Figura 5.5.1: Reta paralela ao vetor *A* passando pelo ponto U.

somar um vetor tA ao ponto U. Então a reta é dada por U + tA, com $t \in \mathbb{R}$.

Propriedades da multiplicação de vetores por escalares:

Sejam $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} v \\ t \end{bmatrix}$ vetores e r e s números reais, então valem as seguintes propriedades:

i) Distributiva (vetores): $r(X+Y) = rX + rY$;

$$r(X+Y) = r\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v \\ t \end{bmatrix}\right) = r\begin{bmatrix} x+v \\ y+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(x+v) \\ r(y+t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rx+rv \\ ry+rt \end{bmatrix}$$

$$r(X+Y)=\begin{bmatrix}rx\\ry\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}rv\\rt\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+r\begin{bmatrix}v\\t\end{bmatrix}=rX+rY.$$

ii) Distributiva (escalares): $(r+s)X=rX+sX$;

$$(r+s)X=(r+s)\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(r+s)x\\(r+s)y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}rx+sx\\ry+sy\end{bmatrix}$$

$$(r+s)X=\begin{bmatrix}rx\\ry\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}sx\\sy\end{bmatrix}=r\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

$$(r+s)X=rX+sX.$$

iii) Associativa : $r(sX)=(rs)X$;

$$r(sX)=r\left(s\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)=\left(r\begin{bmatrix}sx\\sy\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}rsx\\rsy\end{bmatrix}=rs\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=(rs)X.$$

iv) Elemento neutro: $1.X=X,$ para qualquer X;

$$1.X=1.\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1x\\1y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=X.$$

5.6. PRODUTO INTERNO

Na álgebra linear o conceito do produto interno de dois vetores é muito importante e é dado pela adição do produto das primeiras coordenadas com o produto das segundas coordenadas.

Assim, se $A=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$, são dois vetores quaisquer, o **produto interno** de A e B, é definido por $A\cdot B=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=xu+yv$. O produto interno de um vetor não nulo $Y=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$, com o vetor $V=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ sempre será igual a zero. Contudo, o produto interno de dois vetores não nulos também pode ser igual a zero.

Por exemplo, se $A=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}-3\\2\end{bmatrix}$, teremos

$$A\cdot B=2(-3)+3.2=0.$$

Podemos verificar geometricamente que o produto interno entre dois vetores A e B sempre será igual a zero, se estes vetores estiverem, respectivamente sobre os eixos OX e OY.

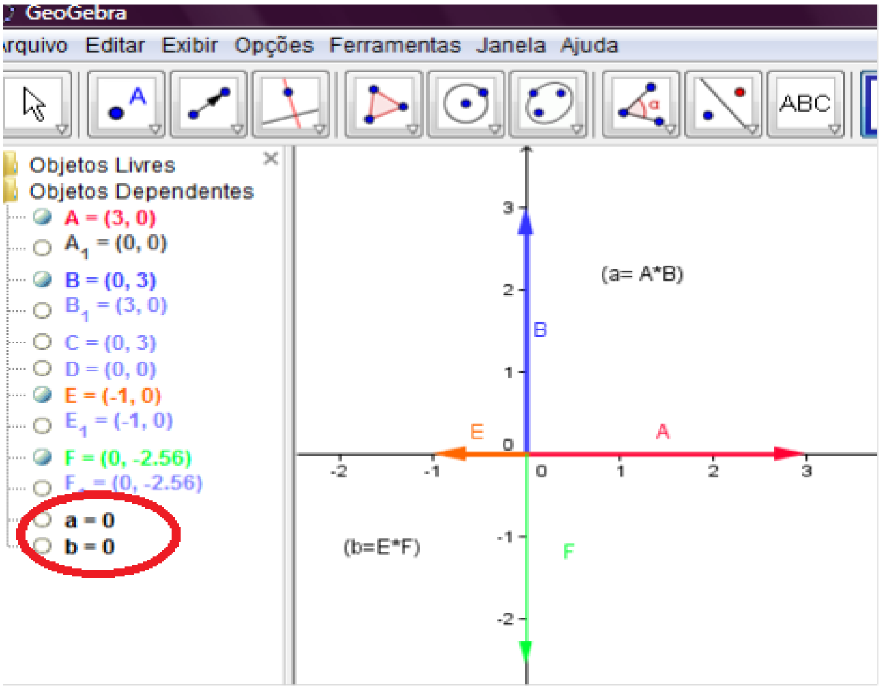

Figura 5.6.1: O produto interno entre vetores localizados sobre os eixos *OX* e *OY*.

Agora, se *A* não está no eixo *OX* nem no eixo *OY*, o produto interno entre *A* e um vetor não nulo *B*, somente será igual a zero, se o vetor *A* é perpendicular ao vetor *B.*

Para provarmos isso, devemos relembrar do coeficiente angular de uma reta. O **coeficiente angular** (ou inclinação) de uma reta não perpendicular ao eixo *OX*, é o número real *m* tal que:

$$m = tan\, \alpha, \tag{5.6.1}$$

sendo α o ângulo entre a reta e o eixo *OX*.

Podemos verificar que, se duas retas são perpendiculares entre si, então o coeficiente angular de uma é o oposto do inverso do coeficiente angular da outra. Sejam as retas r e s, retas perpendiculares, conforme a figura abaixo. O coeficiente angular da reta r é dado por $m = tan\, \alpha,$ e o coeficiente angular da reta s é dado por $n = tg\beta$.

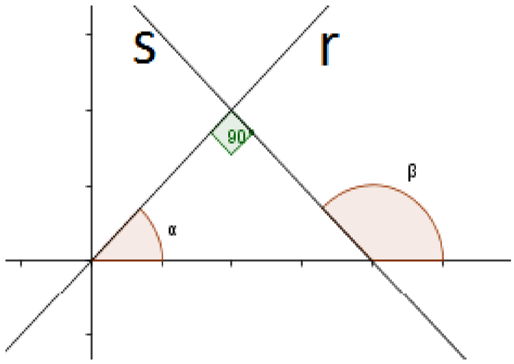

Figura 5.6.2: Retas perpendiculares.

Conforme a figura, temos

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha \ \Rightarrow tg\,\beta = tg\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right),$$

$$tg\,\beta = \frac{sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)},$$

$$tg\,\beta = \frac{sen\frac{\pi}{2} \cdot cos\alpha + sen\alpha \cdot cos\,\frac{\pi}{2}}{cos\frac{\pi}{2} \cdot cos\alpha - sen\frac{\pi}{2} \cdot sen\alpha},$$

como $sen\frac{\pi}{2} = 1$ e $cos\frac{\pi}{2} = 0,$ temos

$$tg\,\beta = \frac{cos\alpha}{-sen\alpha},$$

ou seja,

$$tg\,\beta = -\frac{cos\alpha}{sen\alpha} = \ -\frac{1}{tg\alpha}.$$

então,

$$n = -\frac{1}{m}.$$

Conclusão: Duas retas s e r, de coeficientes angulares n e m, respectivamente, são perpendiculares se, e somente se,

$$n = -\frac{1}{m}. \qquad (5.6.2)$$

Vamos usar este resultado para mostrar que o produto interno entre um vetor *A*, que não está no eixo *OX* nem no eixo *OY*, e um vetor não nulo *B*, somente será igual a zero, se o vetor A é perpendicular ao vetor B.

Seja o vetor A=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ um vetor não nulo e não localizado sobre os eixos OX e OY, a inclinação da reta originada pelo vetor A é dada por $\frac{y}{x}$. Fazendo o produto interno de A com o vetor não nulo B=$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}$, teremos $xv + yu$. Assumindo que o produto interno seja igual a zero, ou seja, $xv + yu = 0$, obtemos

$$xv = -yu.$$

Se u=0, v também será igual à zero. Se $u \neq 0$, $x.v \neq 0$ e assim

$$-1 = \frac{yu}{vx} = \frac{y}{x} \cdot \frac{u}{v}.$$

Então, temos que: ou B=0, ou é a reta que passa pela origem e pelo ponto B=$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$. Como $B \neq 0$, a inclinação da reta é dada por $\frac{u}{v}$. Consequentemente as retas são perpendiculares.

Exemplo: Dado o vetor $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ e o vetor $B = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} \\ 2 \end{bmatrix}$, calculando seu produto interno temos $A \cdot B = 4 \cdot \frac{-1}{2} + 1.2 = 0$ e assim podemos afirmar que o vetor A é perpendicular ao vetor B.

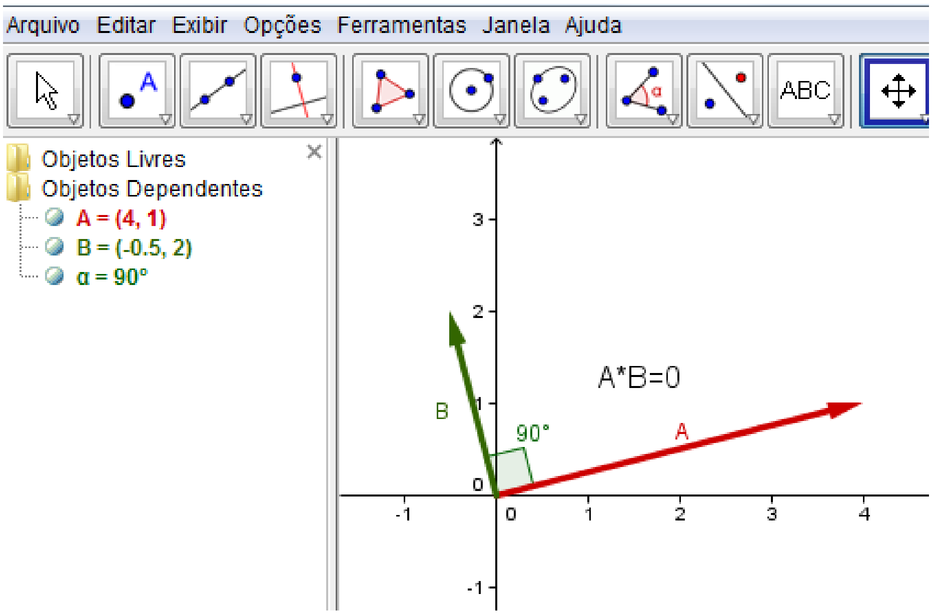

Figura 5.6.3: Vetor *A* perpendicular ao vetor *B*.

Para um vetor X=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, temos $X \cdot X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x^2 + y^2 = |X|^2$, ou seja, o comprimento de um vetor é igual à raiz quadrada do produto interno entre o vetor e ele mesmo.

Para qualquer vetor A=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, teremos $A \cdot E_1$= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$= x. Assim, o produto interno de A com o vetor base E_1 é a coordenada da projeção de A sobre o eixo OX. O produto interno de X com E_2 é a coordenada da projeção de A sobre o eixo OY, pois $A \cdot E_2 .= \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$= y.

Agora vamos escrever o vetor em sua forma polar para obter uma interpretação geométrica do produto interno entre dois vetores. Sejam X e W dois vetores escritos na forma polar, tais que $X = |X| \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix}$ e W um vetor unitário $W = \begin{bmatrix} cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix}$. Então, o produto interno de X e W é dado por

$$X \cdot W = \left(|X| \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} \right) = |X| \left(\begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} \right)$$

$$X \cdot W = |X|(cos\alpha . cos\theta + sen\alpha . sen\theta).$$

Pela identidade trigonométrica, $(cos\alpha . cos\theta + sen\alpha . sen\theta) = cos(\theta - \alpha)$, obtemos

$$X \cdot W = |X| \; cos(\theta - \alpha). \tag{5.6.3}$$

Geometricamente, este número $|X| \; cos(\theta - \alpha)$ representa o cateto adjacente do triângulo retângulo de hipotenusa $|X|$. Logo, o produto interno do vetor X com o vetor unitário W é o comprimento da projeção do vetor X sobre a reta que passa pela origem e tem a direção do vetor W. Se o ângulo entre os vetores for um ângulo obtuso, o produto interno de X e W será um número negativo.

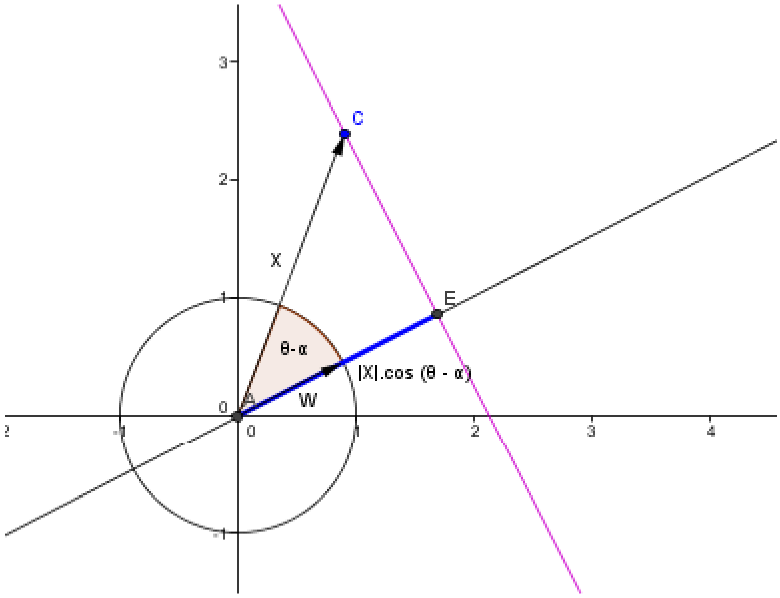

Figura 5.6.4: Triângulo formado pelo vetor X e sua projeção sobre o vetor W.

Se X e W são dois vetores não unitários, então

$$X \cdot U = \left(|X||U| \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\alpha \\ sen\alpha \end{bmatrix} \right) = |X||U| cos(\theta - \alpha). \qquad (5.6.4)$$

Portanto, o produto interno entre X e W é dado pelo produto de seus comprimentos pelo cosseno do ângulo formado entre os dois vetores. Este resultado é importante para calcular o ângulo entre dois vetores e também para mostrar que se o produto interno entre dois vetores A e B é igual à zero, o que implica que os vetores são perpendiculares.

Além disso, podemos usar este resultado para obter um importante resultado da trigonometria, o qual descreveremos a seguir.

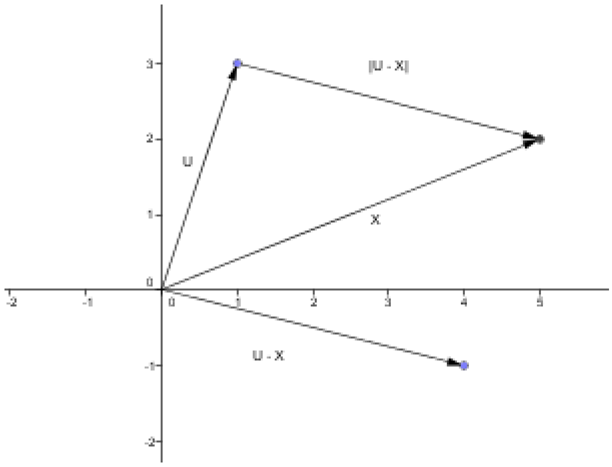

Figura 5.6.5: Vetor *U* - *X*

Considerando a figura acima e calculando o quadrado do comprimento do vetor $|U - X|$, sendo $X = |X| \begin{bmatrix} cos\theta \\ sen\theta \end{bmatrix}$ e $U = |U| \begin{bmatrix} cos\beta \\ \text{sen}\,\beta \end{bmatrix}$, temos

$$|U - X|^2 = (U - X).(U - X) = U.U - X.U - U.X + X.X$$
$$|U - X|^2 = |U|^2 - 2U.X + |X|^2$$
$$|U - X|^2 = |U|^2 + |X|^2 - 2|U||X|\cos(\theta - \beta) \qquad (5.6.5)$$

Este resultado é conhecido na trigonometria como a ***lei do cosseno.*** Um resultado muito usado para calcular o lado de um triângulo qualquer.

5.7. TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Vamos generalizar a projeção de um vetor *X* sobre um vetor *W*. Vimos que o produto interno de *X* e *W*, com *W* unitário, resulta na projeção de *X* sobre a reta que passa pela origem e tem direção do vetor *W*. Então

$$X \cdot W = tW, t \in \mathbb{R}. \qquad (5.7.1)$$

Seja *U* o vetor tal que *U*= *X* – *t* *W*. Como o vetor *U* é perpendicular ao vetor *W*, pois se trata da projeção ortogonal de *X*, teremos que o produto interno de *U* com *W* é igual à zero, ou seja

$U \cdot W = 0 \Rightarrow (X - tW) \cdot W = 0 \Rightarrow X \cdot W - tW \cdot W = 0 \Rightarrow X \cdot W = tW \cdot W.$

Logo,

$$t = \frac{X \cdot W}{W \cdot W}. \qquad (5.7.2)$$

Substituindo a equação (5.7.2) na equação (5.7.1), teremos $X \cdot W = \left(\frac{X \cdot W}{W \cdot W}\right) W$. Assim, as coordenadas da projeção de *X* sobre a reta determinada por *W* e que passa pela origem, são dadas por:

$$\text{Proj.}_W X = \left(\frac{X \cdot W}{W \cdot W}\right) W. \qquad (5.7.3)$$

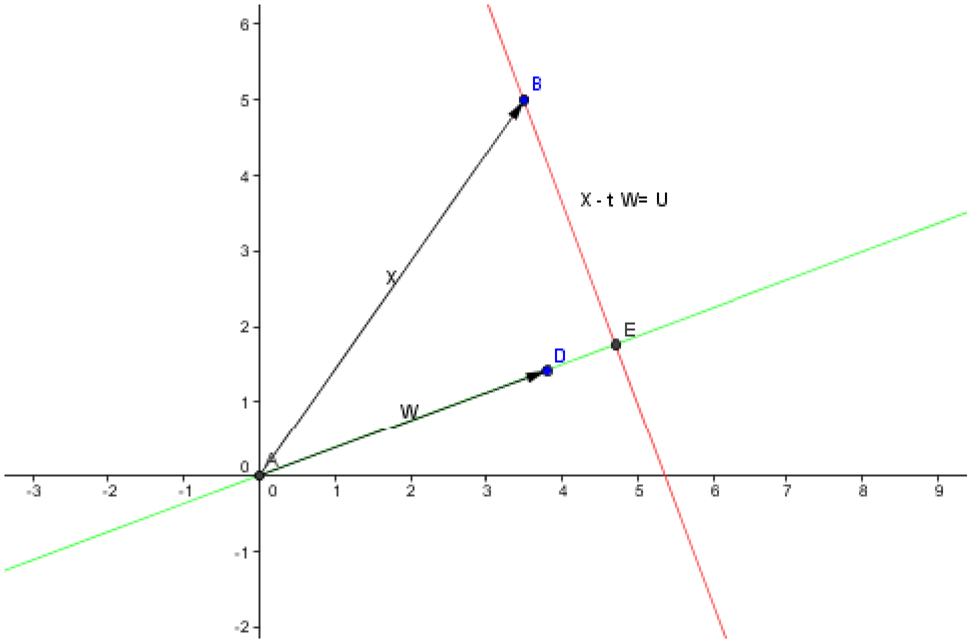

Figura 5.7.1: Projeção de *X* sobre a linha do vetor *W*.

Exemplo: Sejam $B=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$ e $X=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$. Então a projeção de B sobre X, é dada por

$$\text{Proj.}_X B = \frac{3.1+6.1}{3.3+1.1}\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \frac{9}{10}.\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{27}{10}\\ \frac{9}{10}\end{bmatrix}.$$

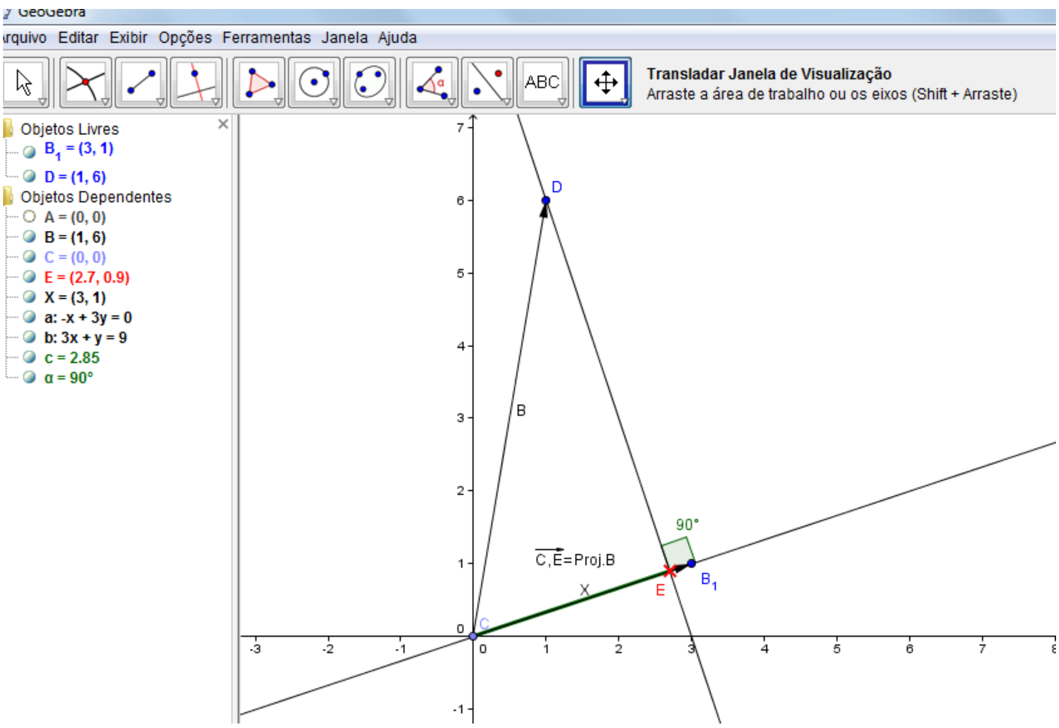

Figura 5.7.2: Projeção do vetor $B=\begin{bmatrix}1\\6\end{bmatrix}$ sobre o vetor $X=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}$.

Podemos ainda, observando a figura, calcular a distância do ponto E ao ponto D. O Triângulo CDE é um triângulo retângulo, com ângulo reto em $\hat{E}$. Assim, pelo teorema de Pitágoras, obtemos

$$|B|^2 = |Proj._X\, B|^2 + |DE|^2$$

$$\sqrt{1^2+6^2}^2 = \sqrt{(2{,}7)^2+(0{,}9)^2}^2 + |AD|^2$$

$$|AD|^2 = 37 - 8{,}1$$

$$|AD| = \sqrt{28{,}9} \cong 5{,}37.$$

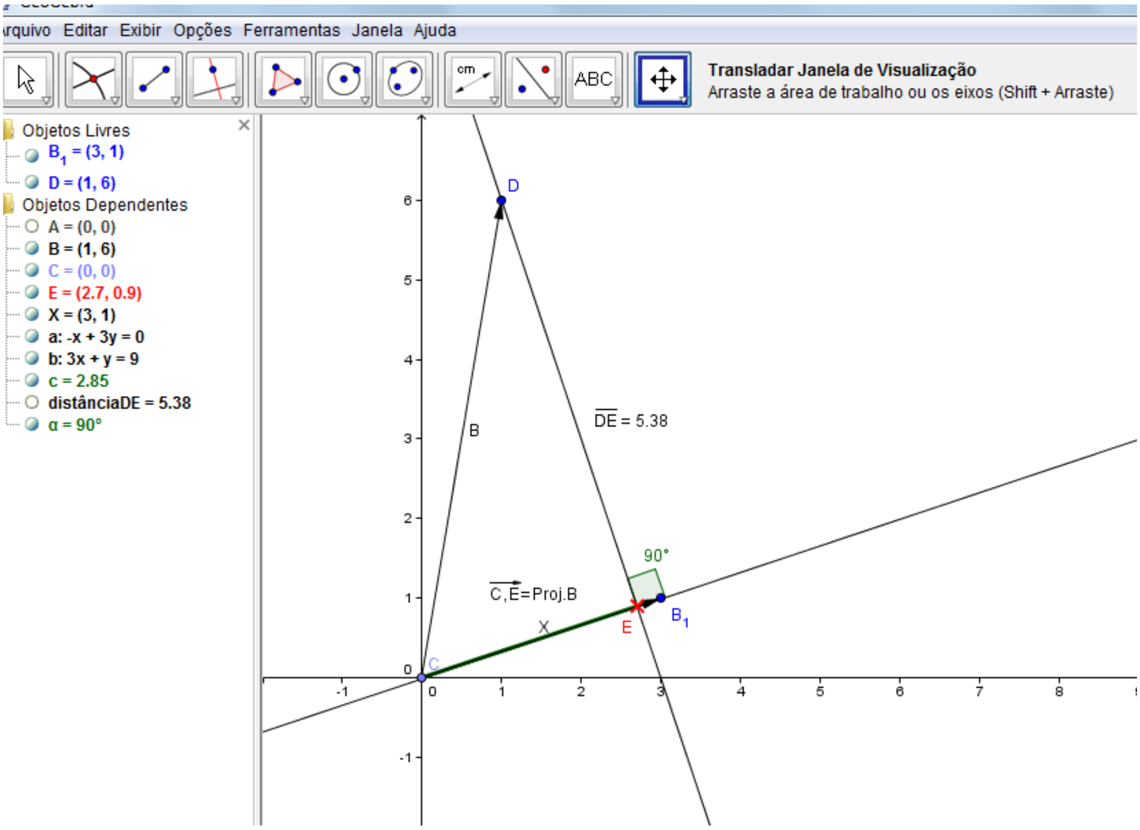

Figura 5.7.3: Comprimento do vetor DE.

Generalizando, para um vetor $X=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ e um vetor $A=\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}$, a distância de *X* até *D*, que chamaremos de d’, é dada por

$$|X|^2 = (d')^2 + |Proj.|^2$$

$$(d')^2 = |X|^2 - |Proj.|^2$$

$$(d')^2 = |X|^2 - \left|\frac{(X.A)}{A.A}A\right|^2$$

$$(d')^2 = x^2 + y^2 - \left|\frac{(xa+yb)}{(a^2+b^2)}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix}\right|^2$$

$$(d')^2 = x^2 + y^2 - \left\| \begin{bmatrix} \frac{a(xa+yb)}{(a^2+b^2)} \\ \frac{b(xa+yb)}{(a^2+b^2)} \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$(d')^2 = x^2 + y^2 - \left(\frac{a(xa+yb)}{(a^2+b^2)}\right)^2 - \left(\frac{b(xa+yb)}{(a^2+b^2)}\right)^2$$, donde obtemos:

$$d' = \left|\frac{xb-ya}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|, \qquad (5.7.4)$$

sendo x e y as coordenadas do vetor *X* projetado sobre o vetor *A* de coordenadas *a* e *b*.

Quando projetamos um vetor *X* sobre certo vetor *W*, podemos afirmar que ocorreu uma transformação com as coordenadas do vetor *X*.

Usando a interpretação e notação de Banchoff;Wermer, (1983, p.30), usamos $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para descrever a transformação ocorrida com o vetor $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Obtemos então x' e y', as novas coordenadas do vetor *X*. Chamamos de **transformação no plano**, uma função que associa cada ponto de um plano a outro ponto do mesmo plano.

Se tivermos um sistema de coordenadas definidas no plano, podemos descrever uma transformação T usando as expressões que relacionam as coordenadas $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ do vetor *X*, com as coordenadas $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ do vetor T(*X*). As transformações podem ser denotadas por letras maiúsculas, T, A, B, R, etc.

Por exemplo, a transformação *A* que faz a projeção do vetor $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sobre o vetor $W=\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, é dada por

I) $$\begin{cases} x' = \frac{(9x+3y)}{10} \\ y' = \frac{(3x+y)}{10} \end{cases}$$

Reescrevendo esta transformação, temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A(X) = \begin{bmatrix} \frac{(9x+3y)}{10} \\ \left(\frac{(3x+y)}{10}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

$\begin{bmatrix} \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}$ é chamada de matriz d transformação de A, e corresponde aos coeficientes de x e y no sistema ***I)*** acima.

Em geral, denotamos por T uma transformação linear, (que será definida adiante), que leva o vetor $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para o vetor $X'= \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, obtendo assim o sistema $\begin{cases} \text{x'} = \text{ax} + \text{by} \\ \text{y'} = \text{cx} + \text{dy} \end{cases}$. Podemos escrever então

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A matriz dos coeficientes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é chamada de **matriz da transformação** T e representada por m(T). Quando uma transformação I leva o vetor $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ para I(X)=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, ou seja, nele mesmo, a matriz da transformação é dada por m(I)= $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e ela é chamada de **matriz identidade.**

Numa transformação, que chamaremos de B, que irá duplicar as coordenadas do vetor X, as novas coordenadas de B(X) serão $\begin{cases} \text{x'} = \ 2\text{x} \\ \text{y'} = \ 2\text{y} \end{cases}$ e a matriz dos coeficientes de x e de y será $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

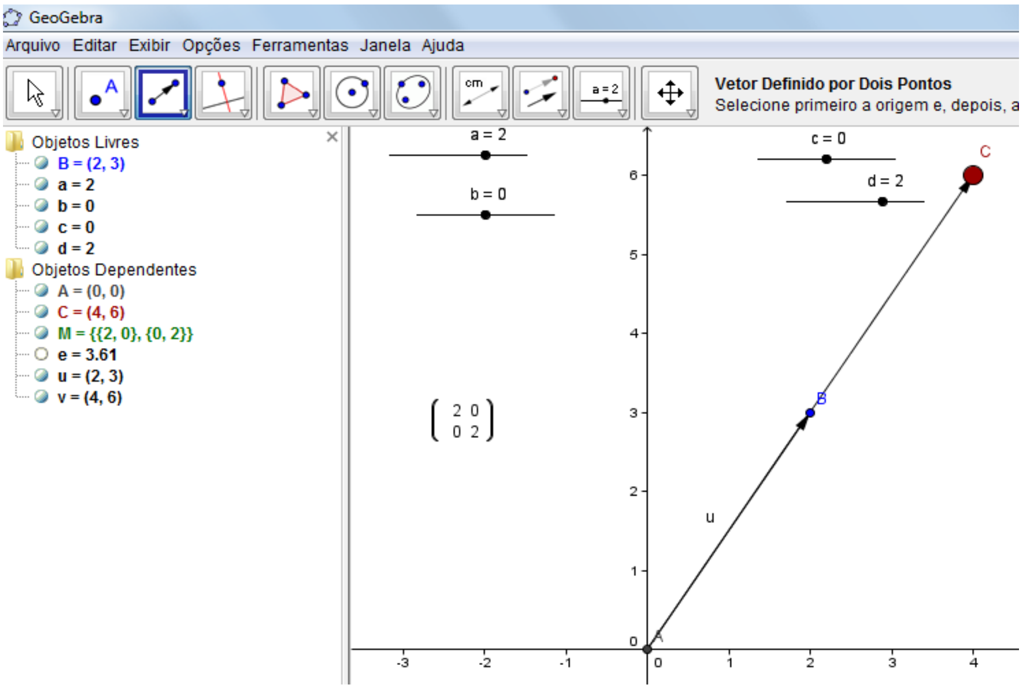

Figura 5.7.4: Vetor *U* duplicado pela transformação B.

Dados, um vetor $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e uma transformação R de rotação de um ângulo de 90º, é fácil verificar que as novas coordenadas do vetor X, serão $\begin{cases} x' = -y \\ y' = \ \ x \end{cases}$. Ou seja, $R(X) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$, sendo a matriz de R dada por $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

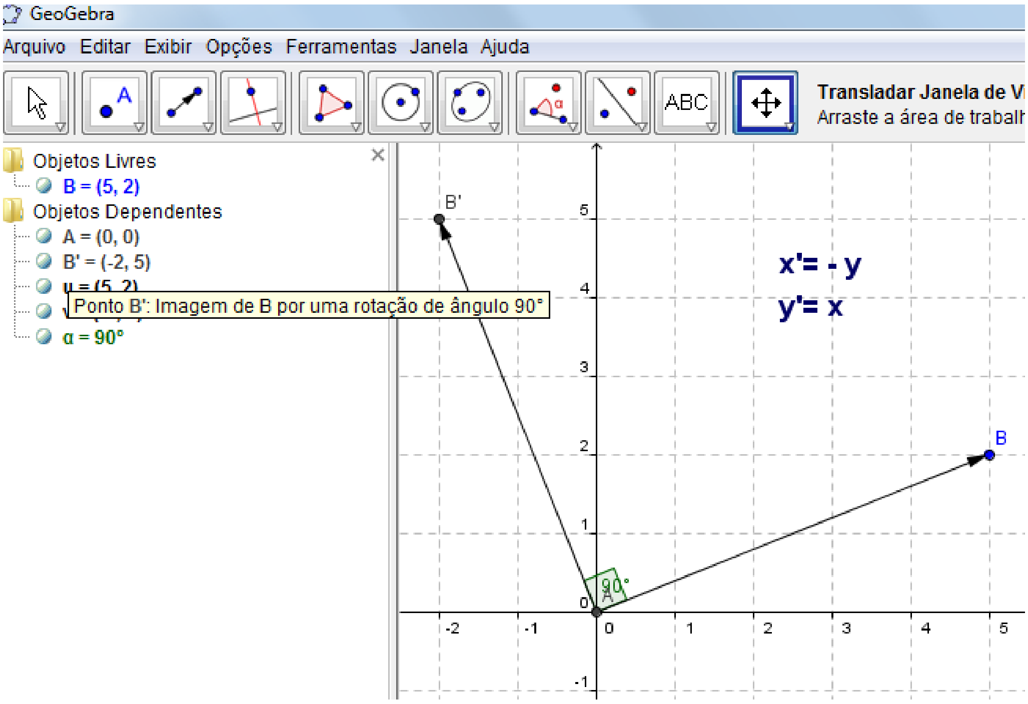

Figura 5.7.5: Rotação.

Vamos analisar o caso em que o ângulo de rotação é um α qualquer. Seja $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, o vetor a ser rotacionado e $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, o vetor obtido pela transformação R. Escrevendo ambos os vetores na forma polar, obtemos

$$\mathrm{R}(X) = X' = |X| \begin{bmatrix} cos(\alpha+\beta) \\ sen(\alpha+\beta) \end{bmatrix}. \qquad (5.7.5)$$

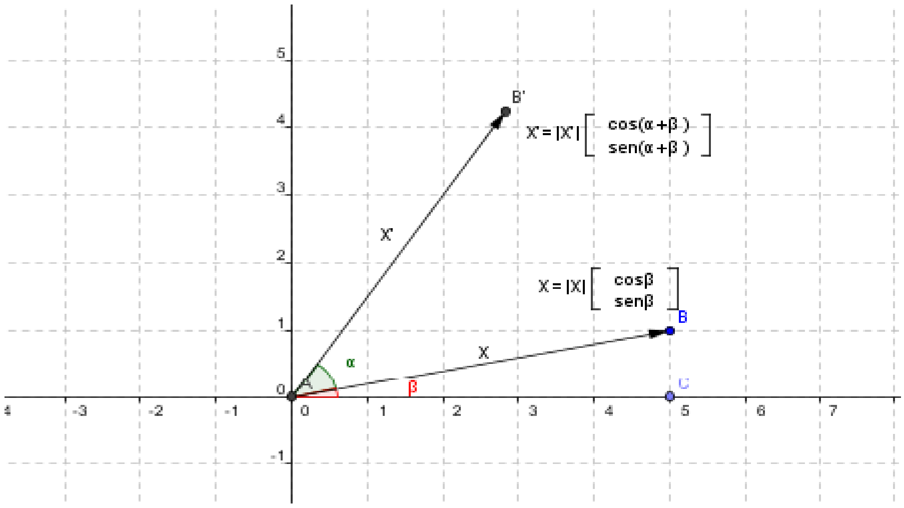

Figura 5.7.6: Rotação do vetor *X* sob um ângulo *α*.

Usando a identidade trigonométrica da soma de dois ângulos, obtemos

$$X' = |X| \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |X|\cos\alpha\cos\beta - |X|\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta \\ |X|\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + |X|\cos\alpha\operatorname{sen}\beta \end{bmatrix}.$$

Mas pela forma polar de $|X|$, temos que $x = |X|cos\beta$ e $y = |X|sen\beta$. Substituindo na equação acima

$$X' = \begin{pmatrix} x\cos\alpha - y\operatorname{sen}\alpha \\ x\cos\alpha + x\operatorname{sen}\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix},$$

ou seja

$$\begin{cases} x' = (cos\alpha)x - (sen\alpha)y \\ y' = (sen\alpha)x + (cos\alpha)y \end{cases}.$$

Assim, a matriz da transformação R, de rotação de um ângulo α, é dada por

$$\begin{bmatrix} cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & cos\alpha \end{bmatrix}. \qquad (5.7.6)$$

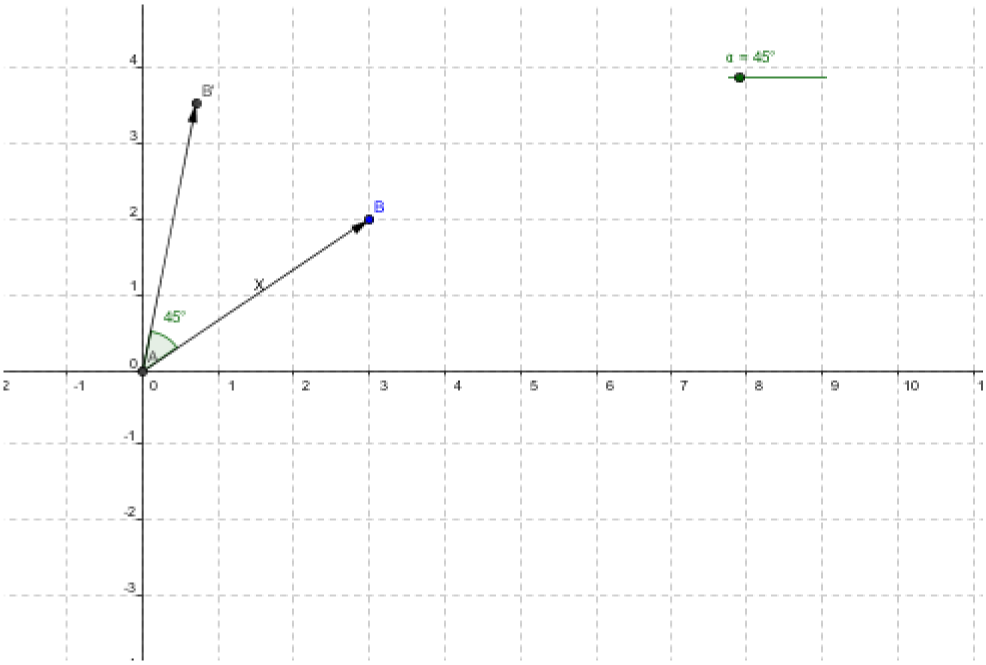

Figura 5.7.7: Aplicativo de rotação no GEOGEBRA.

Pela definição de funções, temos que, dadas duas funções f e g, a igualdade ocorre se f(x)=g(x), para todo x ∈ ℝ. Da mesma forma, podemos afirmar que, dadas duas transformações A e B, teremos A=B desde que A(*X*) = B(*X*), para qualquer vetor *X*. Por exemplo, a transformação de rotação R, sob um ângulo de $\frac{\pi}{2}$ radianos, sentido horário, é igual à transformação de rotação S, sob um ângulo de $\frac{3\pi}{2}$ radianos, sentido anti-horário. Assim, $R_{\frac{-\pi}{2}} = S_{\frac{3\pi}{2}}$.

Segundo Steinbruch/Winterle, (1990, p.76), uma transformação T é uma transformação linear se T preserva as operações de adição e de multiplicação por escalar, isto é, se os seguintes axiomas são satisfeitos:

I. Para quaisquer vetores *U* e *V*, T(*U*+*V*) =T(*U*) + T(*V*).

Seja T uma transformação e $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de transformação. Dados os vetores $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$, temos

T (X+X') = $T\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+x' \\ y+y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(x+x') + b(y+y') \\ c(x+x') + d(y+y') \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} (ax+by) + (ax'+by') \\ (cx+dy) + (cx'+dy') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ax+by) \\ (cx+dy) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (ax'+by') \\ (cx'+dy') \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \mathrm{T}(X) + \mathrm{T}(X').$

II. Para todo vetor *X* e para todo $k \in \mathbb{R}, T(kX) = kT(X)$.

Seja m(T) = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

T (kX) =T$\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} akx + bky \\ cky + dky \end{bmatrix}$ = $k\begin{bmatrix} ax + by \\ cy + dy \end{bmatrix} = k\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

= kT(X).

Dos axiomas ***I*** e ***II,*** obtemos que

$$T(kX + sX') = kT(X) + sT(X'), \text{ para quaisquer } k, s \in \mathbb{R}.$$

Se T é uma transformação linear e m(T) = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, então

$T(E_1) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ e $T(E_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ = $\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$.

5.8. Produto de transformações

Agora vamos analisar a composição de duas transformações.

Exemplo 1: Seja B a transformação de reflexão no eixo *OX* seguida de A, a transformação de reflexão no eixo *OY*. Vamos achar a composta de A com B, denotada por AB. Seja $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Então $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{B} \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix} \xrightarrow{A} \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} \Rightarrow (AB)(X) = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = -X.$

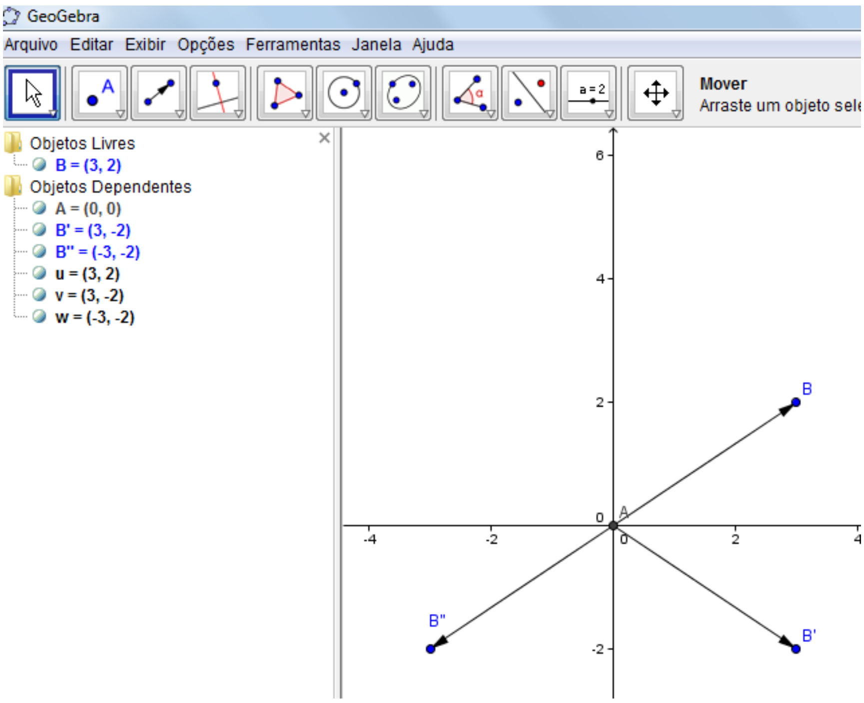

Figura 5.8.1: Exemplo 1: Transformação de reflexão no eixo *OX* e no eixo *OY*.

Exemplo 2: Se quisermos aplicar uma transformação B, que duplica as coordenadas de um vetor e depois uma transformação A, que projeta o vetor $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ sobre o vetor $W = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Primeiramente teríamos: $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2y \end{cases}$, com a matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Depois pela transformação A(X) = $\begin{cases} x'' = \frac{x'+2y'}{5} \\ y'' = \frac{2}{5}(x' + 2y') \end{cases}$, com a matriz $\begin{bmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix}$.

Substituindo, temos, $\begin{cases} x'' = \frac{2x+4y}{5} \\ y'' = \frac{2}{5}(2x + 4y) \end{cases}$. Obtendo assim a matriz de transformação

$$\text{m(AB)} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix}.$$

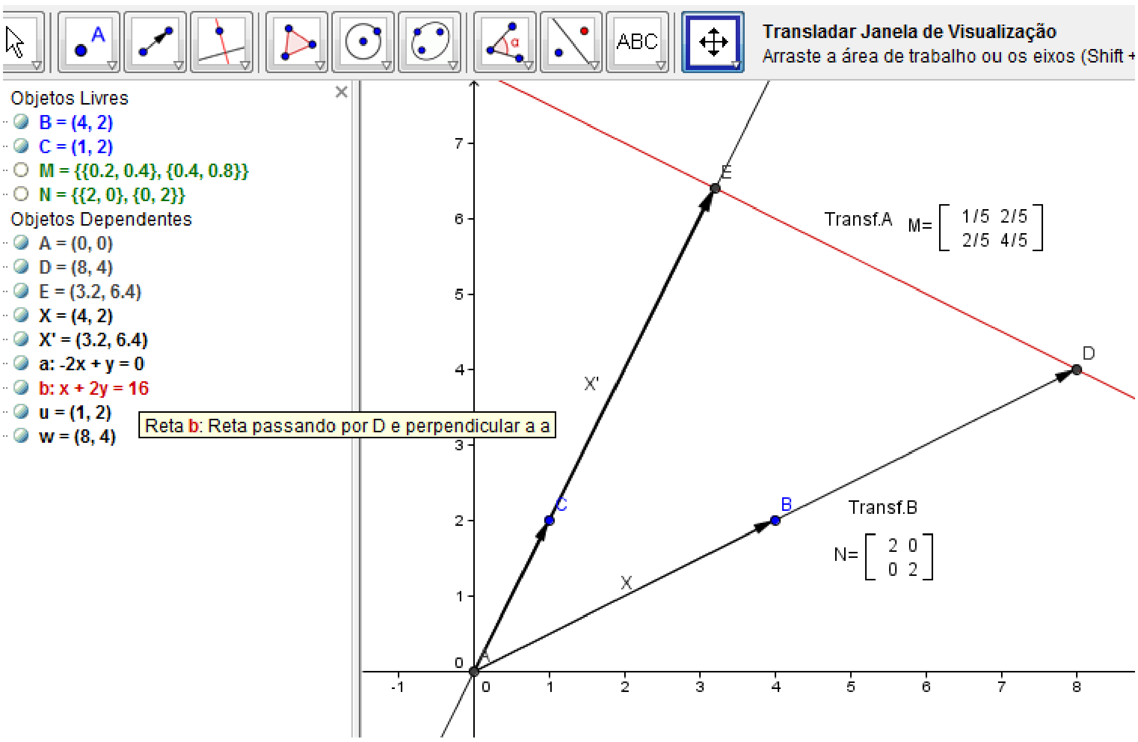

Figura 5.8.2: Exemplo 2 – Transformação B seguida da transformação A.

Algebricamente, consideremos a transformação B como: $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$, com matriz de transformação m(B) = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, e a transformação A como $\begin{cases} x'' = px + qy \\ y'' = tx + sy \end{cases}$, com a matriz de transformação m(A) = $\begin{bmatrix} p & q \\ t & s \end{bmatrix}$, e o vetor $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Aplicando sobre o vetor X a transformação B, seguida da transformação A, teremos

$$\begin{cases} \mathrm{x}'' = \mathrm{p}(\mathrm{ax}+\mathrm{by}) + \mathrm{q}(\mathrm{cx}+\mathrm{dy}) = (pa+qc)x + (bp+qd)y \\ \mathrm{y}'' = \mathrm{t}(\mathrm{ax}+\mathrm{by}) + \mathrm{s}(\mathrm{cx}+\mathrm{dy}) = (ta+sc)x + (bt+sd)y \end{cases}.$$

A matriz de transformação AB é dada por

$$\text{m(AB)} = \begin{bmatrix} (pa+qc) & (bq+qd) \\ (ta+sc) & (bt+sd) \end{bmatrix} \tag{5.8.1}$$

Chamamos a transformação B seguida da transformação A, de **produto de A por B.**

Assim, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} p & q \\ t & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (pa+qc) & (bq+qd) \\ (ta+sc) & (bt+sd) \end{bmatrix}. \tag{5.8.2}$$

Em outras palavras:

$$m(A)m(B) = m(AB) \tag{5.8.3}$$

Podemos assim, entender melhor a maneira peculiar da multiplicação de matrizes apresentadas nos livros didáticos. A definição da multiplicação da maneira exposta acima foi, segundo Boyer (1906, p.407) descrita por Cayley, em 1858, por meio de transformações.

Se tivéssemos a transformação A seguida da transformação B, obteríamos

$$\begin{cases} \mathrm{x}' = \mathrm{a}(\mathrm{px}+\mathrm{qy}) + \mathrm{b}(\mathrm{tx}+\mathrm{sy}) \\ \mathrm{y}' = \mathrm{c}(\mathrm{px}+\mathrm{qy}) + \mathrm{d}(\mathrm{tx}+\mathrm{sy}) \end{cases},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \mathrm{x}' = (\mathrm{ap}+\mathrm{bt})\mathrm{x} + (\mathrm{aq}+\mathrm{bs})\mathrm{y} \\ \mathrm{y}' = (\mathrm{cp}+\mathrm{dt})\mathrm{x} + (\mathrm{cq}+\mathrm{ds})\mathrm{y} \end{cases}$$

ou ainda

$$\text{m(BA)} = \begin{bmatrix} (\mathrm{ap}+\mathrm{bt}) & (\mathrm{aq}+\mathrm{bs}) \\ (\mathrm{cp}+\mathrm{dt}) & (\mathrm{cq}+\mathrm{ds}) \end{bmatrix}. \tag{5.8.4}$$

Comparando a matriz m(BA), (5.8.2) com a matriz m(A B), (5.8.4), vemos que o produto de duas matrizes não é uma operação comutativa, ou seja, a troca da ordem das transformações, em geral, produzirá um resultado diferente. Quando m(A). m(B) =

m(B). m(A), dizemos que A e B comutam.

Por exemplo, se m(A) = $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e m(B) = $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, teremos

$$\text{m(A). m(B)} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \text{m(B). m(A)}.$$

Sejam A e B duas transformações lineares. Representamos por A+B a transformação A(X) + B(X) sobre um vetor X. Assim,

$$(A+B)(X) = A(X) + B(X).$$

Seja m(A) = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz da transformação de A, m(B) = $\begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix}$ a matriz de B e $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ um vetor qualquer. Então

$$(A+B)\,(X) = A(X) + B(X) = A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} tx + my \\ rx + sy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+t)x + (b+m)y \\ (c+r)x + (d+s)y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a+t) & (b+m) \\ (c+r) & (d+s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \qquad (5.8.5)$$

A matriz na expressão (5.8.5) representa a matriz da transformação A+ B.

Definimos **m(A+B) como** a **soma das matrizes m(A) e m(B).** Assim,

$$\text{m(A+B)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+t) & (b+m) \\ (c+r) & (d+s) \end{bmatrix}.$$

Exemplo: Interpretamos geometricamente o resultado acima, usando as transformações A, de matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, a transformação B, de matriz $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, e o vetor $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calculando A($X$) + B($X$) obtemos o vetor Y, o mesmo vetor obtido aplicando a transformação cuja matriz é m(A+B) = $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ sobre o vetor X.

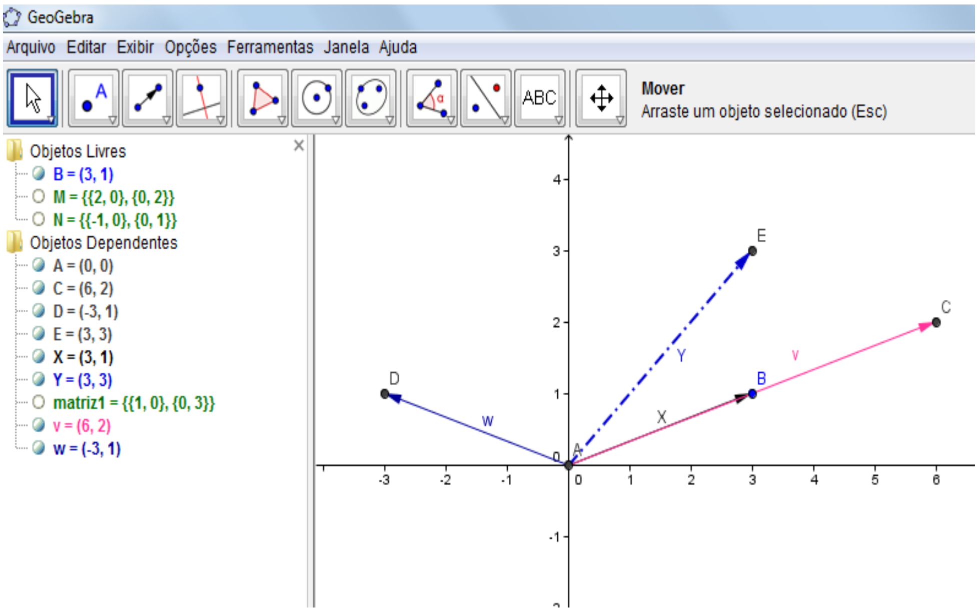

Figura 5.8.3: m(A+B)= m(A) + m(B)

Analogamente, dados uma transformação linear A, de matriz m(A)= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e definimos *t*A, a transformação A de matriz e *t* escalar como

$$(t\text{A})(X) = t\text{A}(X).$$

Consequentemente,

$$\text{m}(t\,\text{A}) = t\,\text{m(A)} \;\; \text{e} \;\; t\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{bmatrix}.$$

Listamos abaixo, as propriedades válidas para as operações matriciais.

Sejam A, B e C transformações lineares com suas matrizes m(A) = $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, m(B) = $\begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix}$ e m(C) = $\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, respectivamente, e α e β escalares.

i) **(α + β) A = αA+ βA** (distributividade)

$$(\alpha + \beta)\,\text{m(A)} = \text{m}(((\alpha + \beta)\,\text{A}) = \begin{bmatrix} (\alpha + \beta)a & (\alpha + \beta)b \\ (\alpha + \beta)c & (\alpha + \beta)d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta a & \alpha b + \beta b \\ \alpha c + \beta c & \alpha d + \beta d \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha\,\text{m(A)} + \beta\,\text{m(A)}.$$

ii) **α (A + B) = αA + αB** (distributividade)

$$\alpha\,[\text{m(A)} + \text{m(B)}] = \alpha\,\text{m(A+ B)} = \alpha\begin{bmatrix} (a + t) & (b + m) \\ (c + r) & (d + s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a + \alpha t & \alpha b + \alpha m \\ \alpha c + \alpha r & \alpha d + \alpha s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha t & \alpha m \\ \alpha r & \alpha s \end{bmatrix} = \text{m}(\alpha\,\text{A}) + \text{m}(\alpha\,\text{B}).$$

iii) **(αβ) A = α(βA)** (associatividade)

$$(\alpha\beta)\ m(A) = (\alpha\beta)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(\beta a) & \alpha(\beta b) \\ \alpha(\beta c) & \alpha(\beta d) \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} \beta a & \beta b \\ \beta c & \beta d \end{bmatrix} = \alpha(\beta\, m(A)).$$

iv) **α(AB) = (αA) B = A (αB)**

$$\alpha\ m(AB) = \alpha\begin{bmatrix} at+br & am+bs \\ ct+dr & cm+ds \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha t+b\alpha r & a\alpha m+b\alpha s \\ c\alpha t+d\alpha r & c\alpha m+d\alpha s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha t & \alpha m \\ \alpha r & \alpha s \end{bmatrix} =$$

$$= m(A)\ m(\alpha B).$$

v) **A + B = B + A** (comutatividade da soma)

$$m(A) + m(B) = m(A+B) = \begin{bmatrix} (a+t) & (b+m) \\ (c+r) & (d+s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+a) & (m+b) \\ (r+c) & (s+d) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = m(B + A).$$

vi) **(A + B) + C = A + (B + C)** (associatividade da soma)

m(A+ B) + m(C) = [m(A) + m(B)] + m(C) =

= m(A) + m(B) + m(C) = m(A) + [m(B) + m(C)]=

= m(A) + m(B+C).

vii) **(AB) C = A (BC)** (associatividade do produto)

$$(m(AB))m(C) = \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at+br & am+bs \\ ct+dr & cm+ds \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a(te)+b(re)+a(mg)+b(sg) & a(tf)+b(rf)+a(mh)+b(sh) \\ c(te)te+d(re)+c(mg)+d(sg) & c(tf)+d(rf)+c(mh)+d(sh) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} te+mg & tf+mh \\ re+sg & rf+sh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\right) =$$

=m(A) (m(B)m(C)) = m(A) m(BC).

viii) **A (B+C) = AB + AC** (distributividade)

$$m\ (A)\ m\ (B+C) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t+e & m+f \\ r+g & s+h \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (at+br)+(ae+bg) & (am+bs)+(af+bh) \\ (ct+dr)+(ce+dg) & (cm+ds)+(cf+dh) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} at+br & am+bs \\ ct+dr & cm+ds \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t & m \\ r & s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \text{m(A)m(B) + m(A)m(C)}$$

= m(AB) + m(AC).

ix) **IA = AI = A** (elemento neutro do produto)

$$\text{m(IA) = m(I) m(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} =$$

$$\text{m(A) m(I)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \text{m(A)}.$$

x) **A + 0 = 0 + A= A** (elemento neutro da soma)

$$\text{m(A + 0)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+a & 0+b \\ 0+c & 0+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \text{m(A)}.$$

xi) **A − *A* = 0** (simétrico)

Para toda matriz A existe uma matriz simétrica denotada por – A tal que:

$$-A = \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} \text{ e m(A – A)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

5.9. INVERSA

Uma vez definida a transformação, podemos agora encontrar um meio, através de uma matriz de transformação, de desfazer a transformação inicial. Para a transformação B, que dobrava o valor das coordenadas de *X*, fica fácil de encontrar a matriz $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, que é a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Note que $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

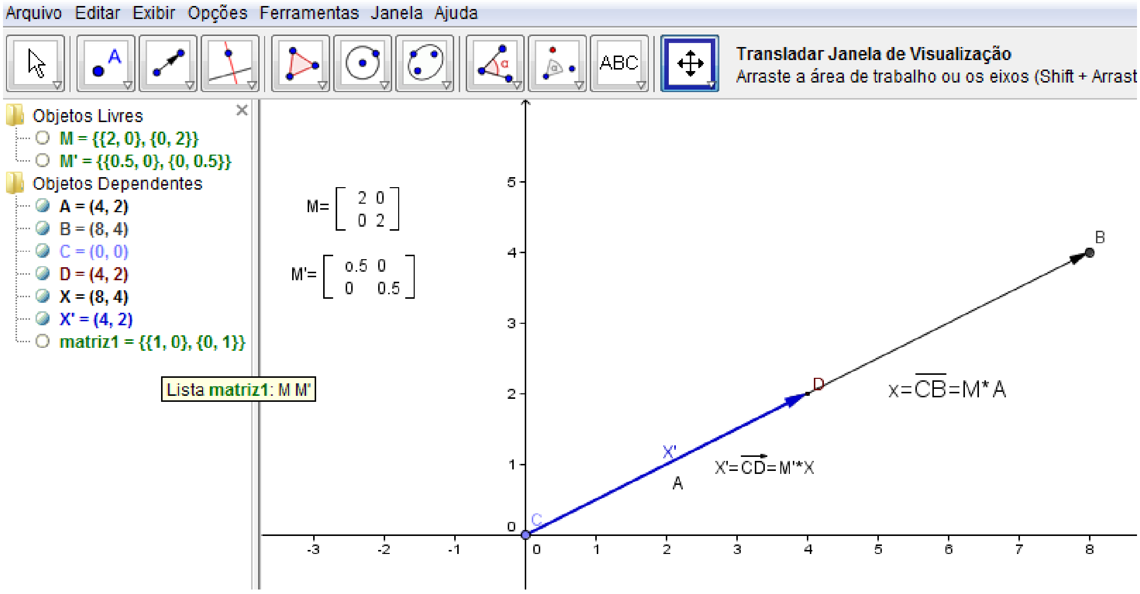

Figura 5.9.1: A inversa de uma transformação.

Consideremos a equação

$$ax=y,$$

onde a e y são números reais dados , sendo $a\neq 0$ e x a incógnita. Para resolver tal equação, multiplicamos ambos os lados pelo inverso do número a.

Assim,

$$\frac{1}{a}ax = \frac{1}{a}y \qquad \text{e} \qquad x = \frac{1}{a}y,$$

pois

$$\frac{1}{a}a = 1 \qquad \text{e} \qquad a.\frac{1}{a} = 1.$$

De modo análogo, queremos achar para uma transformação A, uma transformação B, tal que

$$A.B = B.A = 1. \tag{5.9.1}$$

Neste caso, chamamos a transformação linear B de inversa de A.

Será que A pode assumir mais do que uma inversa? Vamos assumir que B e C são transformações inversas de A. Logo,

$$A.B = I \text{ e } B.A = I \qquad \text{e} \qquad A.C = I \text{ e } C.A = I.$$

De B.A = I, temos (B.A)C = IC = C e pela associatividade, B.(AC) = C. Mas AC = I, assim, BI = C e BI = B, portanto B = C, e a transformação inversa de A é única.

Denotamos a transformação inversa de X como X^{-1}.

Seja P, a transformação de projeção do vetor *X* no eixo *OX*. Vamos supor que B seja a transformação inversa de P. Então teremos BP = I e se multiplicarmos o vetor *X* por (BP) teremos

$$(BP).(X) = X \qquad \text{para todo } X. \qquad (5.9.2)$$

Vamos supor que o vetor $X=\begin{bmatrix}0\\y\end{bmatrix}$ com y≠0. Pela transformação teremos $P(X)=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ e assim, $(BP)(X) = B(P(X)) = B\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = 0$. Mas conforme a equação (5.9.2), devemos ter

$$(BP)(X) = X, \text{ logo } X = 0.$$

Uma contradição, pois *X* não é um vetor nulo. Percebemos assim, que P não tem inversa, ou seja, existem transformações que não admitem inversas.

Quando uma transformação admite inversa? Primeiramente vamos mostrar que:

I. se A possui inversa, denotada de A^{-1}, o único vetor tal que $A(X)=0$ é o vetor $X=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

Sendo $A(X)=0$ e assumindo a existência de A^{-1},teremos:

$$A^{-1}\big(A(X)\big) = (A^{-1}A)(X) = I(X) = X = 0$$

II. O resultado da afirmação em I., é válido somente se $ad-bc\neq 0$, sendo $m(A)=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$.

Vamos supor que $ad-bc=0$. Temos então:

$$A\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-cb+ad\end{bmatrix}=0$$

$A\begin{bmatrix}d\\-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\\-c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ab-bc\\0\end{bmatrix}=0$. Pela afirmação I.,

$\begin{bmatrix}-b\\a\end{bmatrix}=0$ e $\begin{bmatrix}d\\-c\end{bmatrix}=0$ e assim, a,b,c e d são todos iguais a zero e $A(X)=0$ para qualquer *X*, contradizendo a afirmação I.

Vamos supor que A seja uma transformação de matriz $m(A)=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ e que B é a transformação inversa de A com $m(B)=\begin{bmatrix}p & q\\r & s\end{bmatrix}$. Como B é a inversa de A, devemos ter

$$AB=I$$

$$\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p & q\\r & s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}.$$

Assim,

i) $\begin{cases} ap + br = 1 \\ cp + dr = 0 \end{cases}$ e ii) $\begin{cases} aq + bs = 0 \\ cq + ds = 1 \end{cases}$.

Multiplicando a primeira equação de i) por d e segunda equação por b, teremos

$$\begin{matrix} dap + dbr = d \\ bcp + bdr = 0 \end{matrix}.$$

Assim,

$$dap - bcp = d \text{ e } p(da - bc) = d$$

Logo, $p = \frac{d}{da-bc}$ e onde $da - bc \neq 0$.

Com cálculos similares, obtemos:

$$q = \frac{-b}{da-bc}, r = \frac{-c}{da-bc} \text{ e } s = \frac{a}{da-bc}.$$

Podemos escrever então:

$$\text{m(B)}=\begin{bmatrix} \frac{d}{da-bc} & \frac{-b}{da-bc} \\ \frac{-c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \text{m(B)}= \frac{1}{da-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (5.9.3)$$

Conclusão: Se A é uma transformação linear com m(A)=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e A admite inversa, então $ad - bc \neq 0$ e se B é a transformação inversa de A, m(B)=$\begin{bmatrix} \frac{d}{da-bc} & \frac{-b}{da-bc} \\ \frac{-c}{da-bc} & \frac{a}{da-bc} \end{bmatrix}$.

Exemplo: Seja m(A) =$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Verificando se A admite inversa, temos

$3.2 - 2.2 = 2 \neq 0$, então podemos encontrar A^{-1}.

$$\text{m}(A^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{-2}{2} \\ \frac{-2}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Verificando o produto de A por A^{-1} temos

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=I.$$

5.10. DETERMINANTES

O número obtido na operação $ad - bc$, de uma matriz m(A)=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de uma transformação A , é chamado de **determinante** de A e é representado por $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Podemos perceber pela operação descrita acima, que o determinante de uma matriz nos fornece a importante informação de que se uma dada transformação, admite inversa ou não, pois no item 5.9, vimos que uma transformação admite inversa, somente se, dada a matriz m(A) =$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tivermos $ad - bc \neq 0$.

Vamos analisar o paralelogramo cujos lados são os vetores X= $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e A=$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ e um dos vértices em $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

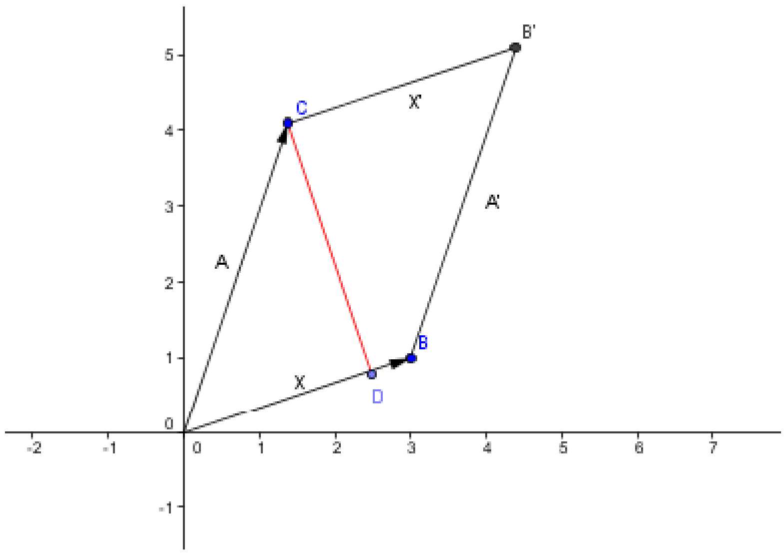

Figura 5.10.1: Paralelogramo de lados *A e X*.

Para calcular a área deste paralelogramo, devemos multiplicar sua base pela altura, que é o segmento $\overline{CD}$, cujo comprimento visto anteriormente, é dado pela equação (5.7.4).

$$\text{Área}= |X||d'| \tag{5.10.1}$$

$$\text{Área}= \sqrt{x^2 + y^2}.\left|\frac{xb - ya}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|$$

$$\text{Área}= |xb - ya|. \tag{5.10.2}$$

Comparando este resultado com o determinante da matriz formada pelos vetores X e A, $\begin{bmatrix} x & y \\ a & b \end{bmatrix}$, verificamos que o determinante da matriz formada pelos vetores que constituem os lados do paralelogramo, é igual à área do mesmo. Podemos escrever então

$$\begin{vmatrix} x & y \\ a & b \end{vmatrix} = \text{área do paralelogramo.} \tag{5.10.3}$$

O número obtido na operação $ad - bc$, de uma matriz m(A)=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de uma transformação A pode ser positivo ou negativo. Vamos analisar agora, como interpretar geometricamente este resultado, com base no estudo de Banchoff/Wermer.

Dados dois vetores ordenados, X e Y, seja α o ângulo entre X e Y , no sentido anti-horário.

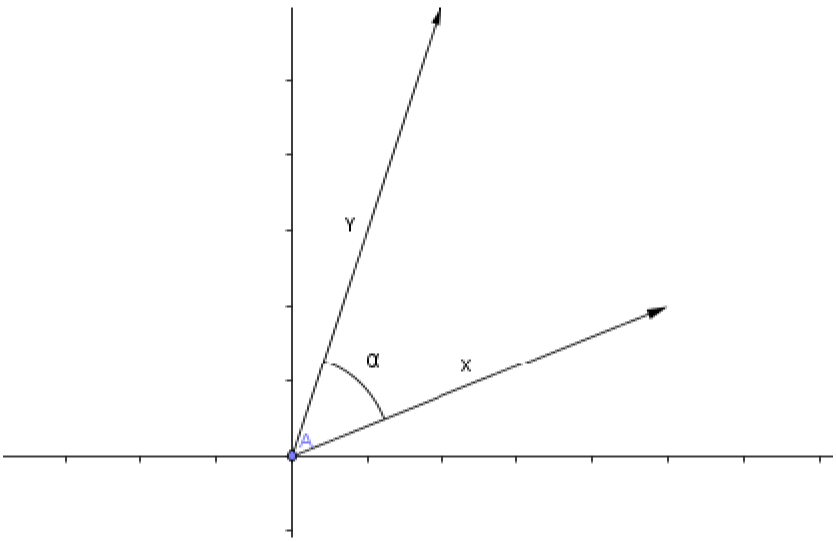

Figura 5.10.2: *X* e *Y* vetores orientados positivamente.

Se $sen\,\alpha > 0$, o par X e Y é **orientado positivamente**, o que ocorre quando temos $0 < \alpha < \pi$.

Se $sen\,\alpha < 0$, o par X e Y é **orientado negativamente**, ou seja, se $\pi < \alpha < 2\pi$.

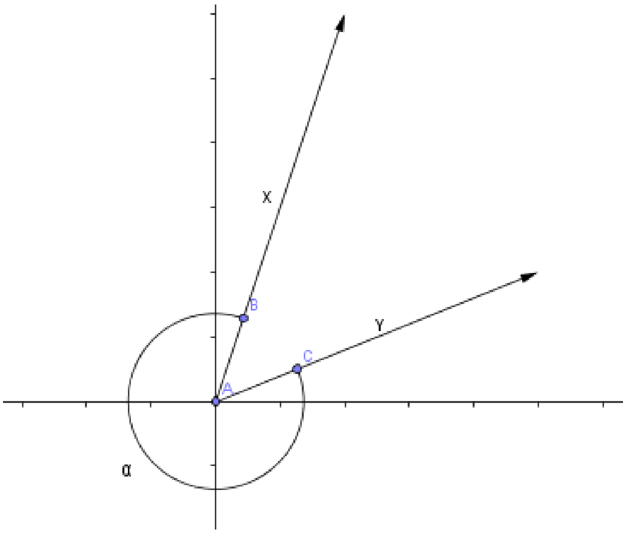

Figura 5.10.3: *X* e *Y* vetores orientados negativamente.

Seja $X=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $Y=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ dois vetores conforme a figura a seguir.

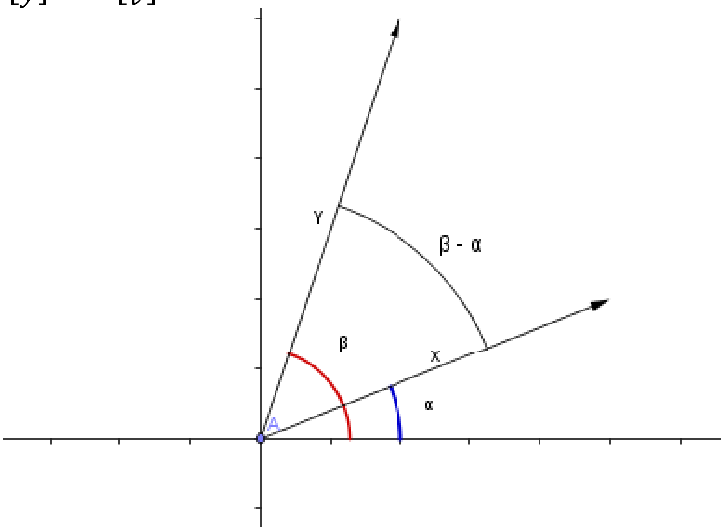

Figura 5.10.4: Ângulo β – α entre os vetores *X* e *Y*.

Para calcular o seno de (β – α), usamos a identidade trigonométrica

$$sen(\beta - \alpha) = sen\beta . cos\alpha - cos\beta . sen\alpha. \quad (5.10.4)$$

Repare que $sen\ \alpha = \frac{y}{|X|}$, $cos\ \alpha = \frac{x}{|X|}$, $sen\ \beta = \frac{v}{|Y|}$ e $cos\ \beta = \frac{u}{|Y|}$. Substituindo estas expressões na igualdade acima, temos

$$sen(\beta - \alpha) = \frac{v}{|Y|} . \frac{x}{|X|} - \frac{u}{|Y|} . \frac{y}{|X|},$$

ou seja,

$$sen(\beta - \alpha) = \frac{v.x - u.y}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{u^2+v^2}} .$$

Para que $sen(\beta - \alpha)$ seja maior que zero, devemos ter $v.x - u.y > 0$. Mas este é o resultado do determinante de $\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix}$. Podemos então afirmar que o par X e Y, é orientado positivamente se, e somente se, $\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} > 0$.

Vamos supor que dada transformação T possua inversa e que o par de vetores X_1 e X_2 é orientado positivamente. Se T(X_1) e T(X_2) também forem um par orientado positivamente, dizemos que a transformação T **preservou a orientação**. E isso ocorre somente se a matriz da transformação T tem determinante positivo.

De fato, seja T uma transformação que admita inversa e m(T)=$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, tal que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0$. Assumindo que os vetores X=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e Y=$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ sejam orientados positivamente, teremos $\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} > 0$. Aplicando a transformação T em X e Y, teremos

$$T(X)=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } T(Y)= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$T(X)=\begin{bmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{bmatrix} \text{ e } T(Y)= \begin{bmatrix} au + bv \\ cu + dv \end{bmatrix}.$$

Agora, vamos verificar se T(X) e T(Y) são orientados positivamente. Para isso calculamos o determinante da matriz: $\begin{bmatrix} ax + by & au + bv \\ cx + dy & cu + dv \end{bmatrix}$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} ax + by & au + bv \\ cx + dy & cu + dv \end{vmatrix} = (ax + by)(cu + dv) - (cx + dy)(au + bv)$$

$$= axcu + axdv + bycu + bydv - cxau - cxbv - dyau - dybv =$$

$$= ad(xv - yu) + bc(yu - xv) = ad(xv - yu) - bc(xv - yu) =$$

$$= (ad - bc)(xv - yu).$$

Mas como $(xv - yu) > 0$, pois X e Y são orientados positivamente, e pela hipótese $(ad - bc)$>0, tem-se

$$\begin{vmatrix} ax + by & au + bv \\ cx + dy & cu + dv \end{vmatrix} > 0.$$

Assim, podemos concluir que T(X) e T(Y) são orientados positivamente. Neste caso, dizemos então que T é uma transformação que preserva a orientação.

Analogamente, podemos concluir que, se $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0$, T não preserva a orientação. Uma transformação de rotação sob um ângulo de 90° preserva a orientação, no entanto, uma transformação de reflexão em torno do eixo *OX* não preserva a orientação.

Seja π o paralelogramo formado pelos vetores *X*=$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e *Y*=$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ orientados positivamente. Vamos chamar de A (π) a imagem de π através da transformação A, sendo m(A)= $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0.$ Em outras palavras A (π) = {A(*V*) / *V* é um vetor em π}.

Já vimos anteriormente, equação (5.10.3), que a área do paralelogramo formado pelos vetores *X* e *Y* é dada por

$$\text{Área } (\pi) = \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix},$$

e como pela hipótese, os vetores são orientados positivamente, temos $\begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix} > 0.$ Substituindo π por A (π), temos:

$$\text{Área } (\text{A } (\pi)) = \begin{vmatrix} ax + by & au + bv \\ cx + dy & cu + dv \end{vmatrix},$$

ou seja,

$$\text{Área } (\text{A } (\pi)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & y \\ u & v \end{vmatrix},$$

isto é,

$$\text{Área } (\text{A } (\pi)) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{Área}(\pi) \qquad (5.10.5)$$

Se tivéssemos $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} < 0,$ Área (A (π)) = $-\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} Área(\pi)$. Podemos então escrever

$$\frac{\text{Área (A}(\pi))}{Área(\pi)} = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right|. \qquad (5.10.6)$$

Concluímos que o valor absoluto do determinante da matriz de uma transformação A é a razão entre a área do paralelogramo depois da transformação e a área do paralelogramo antes da transformação, paralelogramo este formado pelos vetores *X* e *Y.*

Exemplo: Sejam os vetores $X = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ e Y=$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e a transformação M tal que m(M)=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. A área do paralelogramo formado por *X* e *Y* é igual a 14, $\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 14$, e a área do paralelogramo formado por *X'* e *Y'*, obtidos fazendo a transformação, é igual a 28, $\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$ = 28. Verificamos assim que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$ = 2 e a razão entre as áreas é $\frac{28}{14}$ = 2.

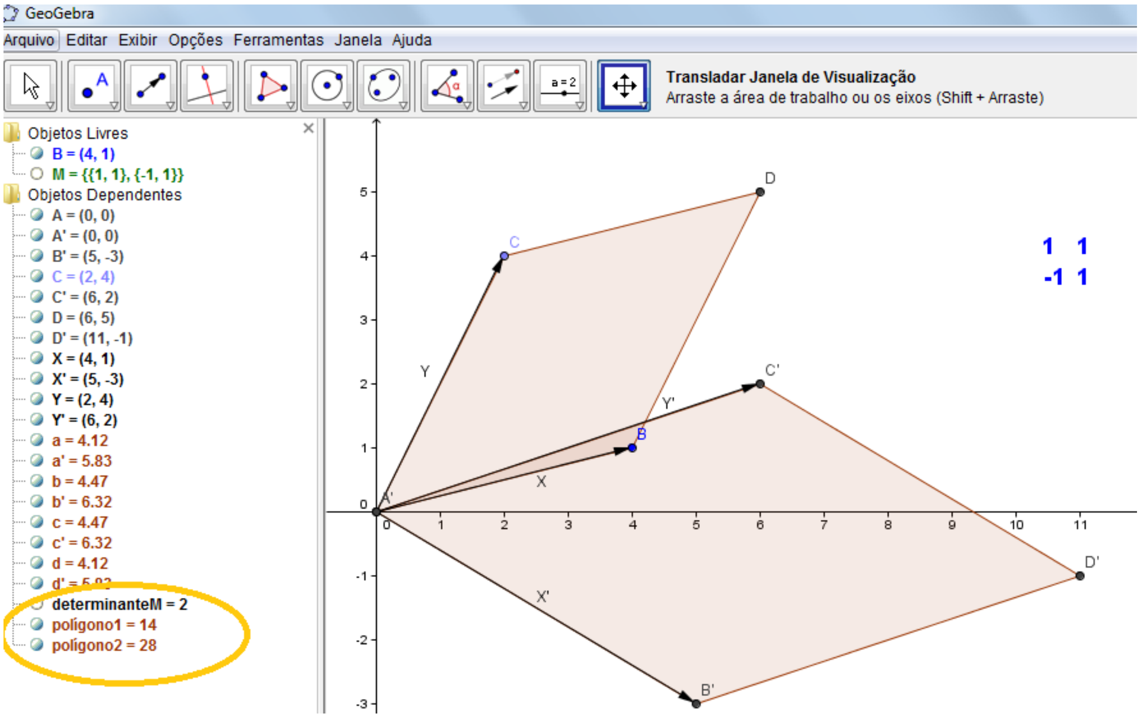

Figura 5.10.5: Exemplo: Razão entre as áreas.

Sejam A e B duas transformações lineares e Q o quadrado unitário tal que $Q = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$. Aplicando as transformações A e B sobre o quadrado Q, teremos

$$(\mathrm{BA})\ (Q) = \mathrm{B}(\mathrm{A}(Q)),$$

e

$$\text{Área}\ ((\mathrm{BA})\ (Q)) = \text{Área}\ (\mathrm{B}(\mathrm{A}(Q))).$$

Usando o resultado na equação (5.10.5), concluímos que

$$\det\ (\mathrm{BA})\ \text{Área}\ (Q) = (\det \mathrm{B})\ \text{Área}\ (\mathrm{A}(Q)),$$

ou seja,

$$\det\ (\mathrm{BA})\ \text{Área}\ (Q) = (\det \mathrm{B})\ (\det \mathrm{A})\ \text{Área}\ (Q).$$

Por definição, a área de Q é igual a 1, por conseguinte

$$\det(BA) = (\det B)(\det A). \tag{5.10.7}$$

O resultado encontrado em (5.10.7) é também conhecido como Teorema de Binet**,** devido ao matemático francês Jacques Philippe Marie Binet, que investigou as bases da teoria das matrizes. Um resultado que facilitou encontrar o determinante da multiplicação entre matrizes, em especial quando estas são de ordem maior que 2.

6. COMENTÁRIOS FINAIS

Procuramos através deste estudo propor uma forma diferenciada de ensinar matrizes e determinantes. A análise feita dos livros didáticos indicou que, apesar de uma crescente preocupação em abordar o aspecto histórico e geométrico das matrizes e determinantes, o conteúdo é abordado apenas de forma algébrica em muitos livros didáticos. Esperamos que este trabalho possa contribuir para desenvolver novas formas de ensino e aprendizagem do conteúdo, abordagens que tornem os conceitos e propriedades das matrizes e determinantes mais significativos.

Assim como no estudo de Thomas Banchoff e John Wermer no livro *Linear Algebra Through Geometry*, a nossa sequência didática tem início com o estudo dos vetores. E a partir destes, vetores representados na forma de coluna, os demais conceitos e propriedades foram desenvolvidos. Para a construção dos conceitos, como a projeção de um vetor, produto interno, transformações lineares, matrizes e determinantes, houve a preocupação em explorar simultaneamente a representação algébrica e o contexto geométrico do objeto matemático.

Há muitas outras considerações a serem feitas sobre o tema. Podemos incluir numa abordagem das matrizes, as transformações geométricas, mencionar os conceitos de homotetia, cisalhamento e a geração de fractais aplicando sucessivas transformações. Em nosso estudo foram mencionadas apenas as matrizes de ordem até 2. Também poderíamos estudar a geometria das matrizes de ordem 3, o que acarretaria em um aumento de complexidade do assunto tanto no aspecto algébrico como no geométrico.

O software Geogebra foi muito útil na elaboração deste trabalho e certamente em sala será um instrumento valioso para um melhor aprendizado. Com o uso do software podemos analisar as diferentes figuras geométricas obtidas nas mais variadas operações e verificar a validade dos resultados algébricos encontrados. Enfatizamos que o software é apenas uma ferramenta, não o objeto de estudo, por isso é de grande importância que, ao fazer uso do Geogebra num exercício, o aluno já tenha conhecimento e domínio dos conceitos, propriedades e operações das matrizes e determinantes.

A seguir, finalizamos nossas considerações apresentando algumas atividades, destinadas aos alunos, que podem orientar o professor no planejamento das aulas destinadas ao estudo das matrizes e determinantes através da geometria.

Atividade 1:

(O objetivo desta atividade é apresentar o ambiente Geogebra ao aluno, realizando operações simples como a adição de vetores e a multiplicação por um escalar, usando algumas ferramentas disponíveis no software).

Construa os vetores $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ $e\ B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e determine:

a) $A + B$
b) $B + A$
c) $A + (-A)$
d) $2B$
e) $\frac{1}{3}\ B$
f) $|A|$
g) A translação do ponto $P = (2,1)$ em relação ao vetor A.

Atividade 2:

(Ao realizar estas tarefas, o aluno deverá usar o Geogebra para conferir suas respostas algébricas e interpretar seu significado geometricamente).

a) Encontre um vetor que seja perpendicular à reta r: 3x + 5y=0 e um vetor sobre a reta r.
b) Encontre o ângulo entre os vetores $U = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $V = \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \end{bmatrix}$.
c) Encontre a projeção de vetor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sobre a reta que passa pelo vetor $U = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
d) Calcule a distância do vetor $U = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ até a reta $3x + 4y = 0$.

Atividade 3:

(Nesta atividade o aluno deverá obter as coordenadas do vetor depois de ocorrer uma dada transformação. Ainda não é necessário escrever a matriz da transformação).

Dado o vetor $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, calcule as coordenadas do vetor T(A), sendo que T é uma transformação:

a) De rotação de 90º.

b) De rotação de 180º.

c) De reflexão em torno do eixo *OX*.

d) De reflexão em torno do eixo *OY.*

e) Escreva as coordenadas do vetor T(X) para um vetor $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, considerando T a transformação descrita no item a), b), c) e d).

Atividade 4*:*

(Este exercício tem como objetivo desenvolver interpretação geométrica de uma matriz de transformação com base na matriz identidade).

Sabendo que todo vetor pode ser escrito de maneira única como a soma de um múltiplo de E_1 e um múltiplo de E_2, escreva as matrizes de transformação abaixo em função da matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e descreva o que acontece com um vetor depois de passar pela transformação de matriz:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

e) Construa no Geogebra um polígono ou um vetor e verifique geometricamente o resultado de cada transformação descrita nos itens a, b, c e d.

f) Dado o vetor $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, use a matriz de rotação, equação (5.7.6), para diferentes valores de α sobre o vetor X. *(Use a ferramenta "seletor" no Geogebra).*

Atividade 5:

Dado o vetor $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, encontre a matriz de transformação:

a) T, tal que T duplique o vetor X.

b) A, tal que A seja a transformação de reflexão em torno do eixo OX.

c) Efetue m(T). m(A).

d) Efetue m(A). m(T).

e) Verifique os resultados das transformações no Geogebra. O que podemos concluir quando invertemos a ordem das transformações?

Atividade 6:

(Este exercício tem como objetivo, levar o aluno a interpretar cada valor $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ *da matriz de transformação).*

Dada a transformação T=$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, calcule T($A$) sendo $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Calcule T($V$) para $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Atividade 7:

Verifique se as matrizes de transformações abaixo possuem inversas. Caso afirmativo, calcule a matriz inversa usando a equação (5.9.3). Verifique no Geogebra o resultado da composição da transformação com sua inversa sobre um vetor qualquer. Use o recurso “matriz inversa” para verificar os resultados.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Atividade 8:

Descreva o paralelogramo formado pelos vetores dados, calcule a área usando a equação (5.10.3) e verifique os resultados no Geogebra:

a) $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

b) $C = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) $E = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $F = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Atividade 9:

Seja $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ a matriz transformação de T.

a) Interprete T geometricamente.

b) Mostre que m(T). m(T) = I

c) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ a matriz de transformação de A. Calcule m(T). m(A) e m(A). m(T) e descreva os resultados.

d) Calcule o produto das matrizes $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e verifique o resultado obtido na equação (5.10.7)

Atividade 10:

Chamamos de isometrias as transformações geométricas que preservam as medidas de comprimento, ou seja, se T é uma transformação isométrica, e X_1 e X_2 dois vetores, então$|\ T(X_1) -\ T(X_2)| = |X_1\ - X_2\ |$.

Para uma transformação T de matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, sabendo que T é uma isometria e com base na equação (5.10.6):

a) Mostre que o determinante de $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é igual a 1 ou a -1.

b) Mostre que T é uma transformação de rotação se o determinante é igual a 1 e é uma reflexão se o determinante é igual a-1.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Banchoff, Thomas; Wermer, John. **Linear Algebra Through Geometry**, Springer-Verlag, New York, 1983.

Bianchini, Ewaldo; Paccola, Herval. **Curso de Matemática**. Editora moderna, 1994.

Boyer, Carl Benjamin. **História da Matemática**. 2ª Ed. São Paulo. Editora Edgard Blücher, 2003.

Brandt, Silvia Tereza Juliani; Montorfano, Carla. **O software Geogebra como alternativa no ensino da geometria em um mini curso para professores.** Artigo, PDE, 2007. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/329-4.pdf. Acesso em: 17/01/2013.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília, 1998.

Castro, C Samira. **Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação**. Dissertação de mestrado, PUC-SP, 2001.

D'Ambrósio, Ubiratan. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. Papirus, Campinas, SP, 1996.

Dante, Luiz Roberto. **Matemática, Contexto e aplicações,** volume 2, 2011, editora Ática.

Eves, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas, SP. Editora da UNICAMP, 2004.

Fainguelernt, Estela Kaufman. **A importância de Diferentes Representações na construção do conhecimento.** In Revista da Educação da AEC, Matérias escolares. Nº 101, p.53 – 70. Out/dez, 1996.

Filho, Clovis Soares e Sá; Machado, Elian de Castro.. **O computador como agente transformador da educação e o papel do objeto de aprendizagem.** Texto. Disponível em : http://www.abed.org.br/seminario2003/texto11.htm. Acesso em : 09/02/2013.

Giovanni, José Ruy e Bonjorno, José Roberto. **Matemática completa, 2ª Série**, 2005, ensino médio, editora FTD.

Karrer, Monica. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria**. Tese de Doutorado, PUC/SP, 2006.

Lima, Elon Lages. **Geometria analítica e álgebra linear**, 2ª Ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

Marcondes, Carlos Alberto dos Santos; Gentil, Nelson; Greco, Sérgio Emílio. **Matemática, Novo Ensino Médio**. Editora Ática, 2003.

PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica- Matemática.** Curitiba: SEED/DEB. 2008.

Sanches, Maria Helena Figueiredo. **Efeitos de uma estratégia diferenciada do ensino dos conceitos de matrizes.** Dissertação de Mestrado, UEC - Campinas, SP, 2002.

Souza, Joamir. **Novo Olhar Matemática, vol. 2**. São Paulo: FDT, 2010.

Steinbruch, Alfredo; Winterle, Paulo**. Introdução à Álgebra Linear**. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 1997.

Stormowski,Vandoir. **Estudando as matrizes a partir de transformações geométricas**. Dissertação de mestrado, UFRGS, 2008.

Valente, José Armando. **O computador na sociedade do conhecimento**. UNICAMP/ OEA_NIED, São Paulo, 1999.