



Universidade Federal de Goiás  
Regional Jataí  
Coordenação de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## A Matemática da Fila do Banco

Murilo Antonio de Oliveira

Jataí-Go

2015

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor:	Murilo Antonio de Oliveira		
E-mail:	murilooliveirabr@yahoo.com.br		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor			
Agência de fomento:		UF:	Sigla:
País:		CNPJ:	
Título:	A Matemática da Fila do Banco		
Palavras-chave:	Teoria das Filas, Estatística.		
Título em outra língua:	The Mathematics the Queue of Bank		
Palavras-chave em outra língua:	Queueing Theory, Statistics.		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	27/08/2015		
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT		
Orientador (a):	Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva		
E-mail:	gecirlei@yahoo.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão f'aca) usando o padrão do Acrobat.

  
 Assinatura do (a) autor (a)

Data: 27/08/2015

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**Murilo Antonio de Oliveira**

## **A Matemática da Fila do Banco**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG, Polo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.  
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico, Estatística e Teoria das Filas.  
Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva

Jataí-Go

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Oliveira, Murilo Antonio de;  
A Matemática da Fila do Banco [manuscrito] / Murilo Antonio de;  
Oliveira. - 2015.  
46 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Dr. Gercirlei Francisco da; Silva.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional  
Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Jataí, 2015.  
Bibliografia.

Inclui siglas, abreviaturas, símbolos, gráfico, tabelas, lista de figuras,  
lista de tabelas.

1. Teoria das Filas . 2. Estatística. I. Silva, Dr. Gercirlei Francisco da;,  
orient. II. Título.

## A Matemática da Fila do Banco

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 27 de agosto de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva**  
Presidente da Banca  
Coordenação Matemática-UFG/Jataí



---

**Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa**  
Membro interno - UFG/Jataí



---

**Prof. Dr. Aladir Ferreira da Silva Junior**  
Membro externo - IFG/Jataí

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Murilo Antonio de Oliveira** licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Goiás Câmpus Jataí, especialista em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio pela Universidade Federal de Goiás Câmpus Jataí, durante a graduação foi bolsista do programa bolsa de licenciatura da Universidade Federal de Goiás e monitor da disciplina de Física Geral já na especialização foi monitor de Cálculo Diferencial e Integral I, atualmente é acadêmico do curso de Engenharia Civil no Instituto Federal de Goiás Câmpus Jataí.

Dedico este trabalho a minha esposa, meu filho e aos meus pais sem os quais a materialização deste sonho não seria possível.

# Agradecimentos

Agradeço à Deus por ter me dado saúde e força durante toda esta caminhada, ao meu orientador prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva pela paciência e apoio, aos mestres que durante todo o curso compartilharam o seu tempo e conhecimento, ao amigo Sean Mardem pela grande ajuda na redação do abstract, aos colegas de trabalho por terem permitido minhas ausências, em especial à Raquel Regina Carneiro por ter possibilitado o início deste sonho, Geraldo Antonio Machado, Éximo Alfaix Neto e Sebastião Martins Cabral Neto por possibilitarem a continuação da caminhada, aos demais colegas de trabalho e ainda aos amigos de curso que de forma direta ou indireta foram importantes para o meu crescimento durante toda esta jornada.



## Resumo

As filas tem presença marcante em nossa sociedade e nos acompanham desde o início da civilização. Algumas vezes manifestam-se de forma tradicional e apresentam caráter bastante visual assemelhando-se assim ao modelo que temos em nossas mentes, mas às vezes manifestam-se de formas variadas e tornam-se imperceptíveis ao olhar não familiarizado com a Teoria das Filas. O presente texto teve como propósito mostrar a aplicabilidade da matemática, estatística e Teoria das Filas a problemas reais tal como a fila de guichê de caixa de uma agência bancária da cidade de Jataí-Go. Para isso apresentamos um breve histórico da Teoria das Filas, contemplando o seu surgimento, o primeiro problema estudado, as definições e os termos empregados visando subsidiar um embasamento teórico em nível básico. Por ter se pautado na análise da fila do caixa de uma agência bancária complementarmente apresentamos um breve histórico do Sistema Financeiro Nacional - SFN no qual todos os bancos encontram-se inseridos e a lei municipal que normatiza o tempo máximo de espera em fila. Após escolhido uma agência bancária na cidade de Jataí-Go conseguimos com a autorização do gerente a fita detalhe dos caixas, a qual nos apresenta os dados referentes a movimentação diária. O período de análise refere-se ao mês de novembro do ano de 2014. Após a devida organização e catalogação os dados foram tratados sob o olhar da Teoria das Filas ilustrando a aplicabilidade desta teoria. Os resultados possibilitaram trabalhar alguns conceitos básicos da matemática, em específico o conceito de média. Contudo, resultados e análises mais elaboradas deixaram de ser tratadas no presente texto, devido a sua complexidade, mas serão analisados em textos futuros que poderão ter este como ponto de partida.

### Palavras-chave

Teoria das Filas, Estatística.

## **Abstract**

Waiting lines are boldly present in our society following us since the beginnings of civilization. Sometimes they occur in a traditional way with a well-seen aspect and thus look like similar to the model we already have in mind, but also there are times in which waiting lines occur in different formats becoming unperceivable to the common observer not yet introduced to the Queuing Theory. The present study aims in demonstrating the applicability of Mathematics. Statistics and the Queuing Theory to real tasks such as the waiting line of a bank cashier in the City of Jataí-Goiás. In this regard we present a short history of the Queuing Theory embracing its advent, the first task to be dealt with, the definitions and the adopted terminology looking forward to subsidize a theoretical base in an introductory level. As our object of observation is a waiting line of a bank cashier we additionally present a short history of the National Financial System in which comprehends every bank, and also the municipal law that rules the maximum waiting time in a line. After the choice of a bank agency in the City of Jataí-Goiás we succeeded to get access to the detailing tape of the cashiers under managers authorization. The tape has all the data about daily transactions. The time of analysis refers to the month of November 2014. After appropriate organization and data cataloging, they were processed according to the Queuing Theory illustrating its applicability. Results allowed us to work a few mathematical concepts, specially the idea of average. However, more detailed results and analysis were not dealt with in this work due to its complexity but will be considered in future studies that might take the present work as a starting point.

## **Keywords**

Queueing Theory, Statistics.

## Lista de Figuras

1	Síntese do Sistema Financeiro Nacional - SFN . . . . .	17
2	Sistema com Filas . . . . .	21
3	Modelo de Senha para o Caixa . . . . .	27
4	Layout do Saguão de Atendimento da Agência X . . . . .	28
5	Fita Detalhe dos Caixa A e B . . . . .	31
6	Planilha com os Dados do dia 03 de novembro de 2014 . . . . .	31
7	Quantidade de Cliente por Dia . . . . .	32
8	Quantidade Válida de Cliente por Dia . . . . .	33
9	Atendimento por Caixa . . . . .	33
10	Tempo de Atendimento e de Espera . . . . .	35
11	Média de Chegadas por Intervalos de 10 Minutos . . . . .	37
12	Média de Chegadas por Intervalos de 10 Minutos - Aproximação para Inteiros . . . . .	38
13	Comparativo: Probabilidade Teórica Versus Probabilidade Real . . . . .	39

## Lista de Tabelas

1	Dias Úteis de Novembro de 2014 . . . . .	29
2	Atendimento por Caixa . . . . .	34
3	Média de Chegadas . . . . .	36
4	Média Aproximada para Números Inteiros . . . . .	37
5	Média de Atendimento: Clientes por Minuto . . . . .	40
6	Tempo Médio Diário de Permanência na Fila . . . . .	42

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
1.1	O Sistema Financeiro Nacional - SFN . . . . .	15
1.2	Lei Municipal Sobre o Tempo de Permanência em Fila nas Agências Bancárias de Jataí-Go . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Tópicos de Teoria das Filas</b>	<b>20</b>
2.1	Teoria das Filas/Teoria de Filas . . . . .	20
2.2	A Notação de Kendall . . . . .	24
2.3	Variáveis Fundamentais . . . . .	24
2.4	A Fila do Banco . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Os Dados</b>	<b>29</b>
3.1	Análises Iniciais . . . . .	29
3.2	Aplicando a Teoria das Filas . . . . .	35
3.3	As Variáveis Randômicas Fundamentais . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>44</b>

# 1 Introdução

A palavra fila automaticamente nos remete ao conceito que permeia a maioria dos dicionários de língua portuguesa e com certeza a mente de grande parte da população mundial, o de uma série de pessoas ou coisas em linha reta. Esta palavra nos faz pensar ainda em uma fila de pessoas aguardando para serem atendidas no supermercado, em um hospital, na bilheteria do cinema (ou qualquer outro tipo de bilheteria), na barbearia, em uma agência bancária e etc., mas as filas não acontecem apenas desta forma, o certo é que elas existem quando navios aguardam uma vaga no porto, quando máquinas aguardam para serem reparadas em uma oficina, quando aviões sobrevoam um aeroporto aguardando autorização para aterrizarem, quando veículos encontram-se numa praça de pedágio, quando programas esperam por espaço na memória, quando ligações aguardam para serem completadas numa central telefônica etc..

Como podemos observar as filas estão presentes na nossa vida mais do que podemos imaginar e nos acompanham desde o início da civilização, mas foi somente no século XX que elas foram vistas como um problema extremamente sério e que precisava ser estudado. Em 1909 o matemático dinamarquês Agner Krarup Erlang (1878-1929) começou os estudos para determinar a quantidade de linhas telefônicas necessárias para que uma central pudesse conectar todas as ligações que passassem por ela. Basicamente o problema estudado por Erlang se resumia no fato de que se uma central telefônica possuísse apenas uma linha e se uma pessoa ligasse para outra as demais teriam que esperar, por outro lado se existisse uma linha para cada pessoa muito dinheiro seria desperdiçado, desta forma era preciso determinar a quantidade mínima de linhas para completar a maior quantidade de ligações possíveis.

Foi justamente do problema de congestionamento de linhas telefônicas que surgiu toda a Teoria das Filas que conhecemos hoje, sendo que em 1917 Erlang publicou o seu trabalho mais importante *"Solution of some Problems in the Theory of Probabilities of Significance in Automatic Telephone Exchanges"* onde ele documentou toda sua experiência no assunto.

Dos estudos iniciais de filas até o ano de 1945 pouco foi feito para aplicar a teoria proposta por Erlang às áreas diferentes da telefonia. A Segunda Guerra Mundial (1939-1945) pode ser vista como grande divisor de águas, pois após o seu término vários problemas começaram a ser propostos e estudados tais como: tempo médio de espera de pedestres para atravessar uma rua sem sinal, escoamento de barcos em terminais

portuários, máquinas aguardando para serem reparadas, fluxo de pacientes em um hospital, planejamento de transportes dentre outros.

Hoje a Teoria das Filas é aplicada a uma ampla gama de áreas tais como: engenharias, administração, logística, informática e etc. visando solucionar diversos tipos de problemas.

Um problema comum e bastante corriqueiro na vida de todos é a fila presente nas agências bancárias, trata-se de um problema de mão dupla, de um lado estão as pessoas (clientes ou usuários) esperando para serem atendidas e do outro os funcionários dessas instituições que tem o serviço demandado.

Como todos sabem filas grandes causam estresse e aborrecimento, são responsáveis ainda pelo desperdício de horas de trabalho ou de lazer de quem tem que esperar para ser atendido. Um fato que talvez nem todos saibam ou ainda que não seja de conhecimento ou de interesse é que grandes filas causam também estresse e descontentamento de funcionários de bancos que não conseguem atender de imediato a todos que aguardam.

Notamos então que a fila presente na agência bancária é um problema pertinente que merece ser estudado e compreendido. Apesar de toda essa complexidade não existe uma grande quantidade de textos abordando apenas a fila do banco seja em caráter introdutório ou não. Como trabalho pioneiro e relevante de nível não introdutório destacamos A Teoria das filas aplicada aos serviços Bancários de Amidani [1].

Seguindo uma linha introdutória buscaremos ao longo do texto mostrar a aplicabilidade da matemática e estatística a problemas reais por intermédio da Teoria das Filas, nesse sentido utilizaremos dados reais referentes a fila do guichê de caixa de uma agência bancária da cidade de Jataí-Go que será sempre denominada de agência X. Mas inicialmente faz-se necessário descrevermos o ambiente regulatório no qual as agências bancárias encontram-se inseridas.

## 1.1 O Sistema Financeiro Nacional - SFN

O Sistema Financeiro Nacional é um conjunto de órgãos responsáveis por regulamentar, fiscalizar e executar operações necessárias à circulação do crédito e da moeda na economia. A legislação vigente e a Febraban (Federação Brasileira de Bancos) [4] o divide em: entidades normativas, supervisoras e operacionais.

Segundo a Febraban [4] as entidades normativas estabelecem políticas, regras e parâmetros gerais do sistema financeiro não possuindo função executiva sendo composto

pelo Conselho Monetário Nacional - CMN, órgão de maior importância do Sistema Financeiro Nacional (composto pelo Ministro da Fazenda, na qualidade de presidente, Ministro do Planejamento Orçamento e Gestão e pelo presidente do Banco Central); pelo Conselho Nacional de Seguros Privados - CNSP, responsável por fixar normas e diretrizes da política de seguros privados, fiscalizar as Sociedades Seguradoras, de Capitalização, Entidades Abertas de Previdência Privada, Resseguradoras e Corretores de Seguros e pelo Conselho Nacional de Previdência Complementar - CNPC, responsável por regular o regime de previdência complementar operado por entidades fechadas de previdência.

As entidades supervisoras executam as normas estabelecidas pelos órgãos normativos. Atualmente é composta pelo Banco Central do Brasil - BCB, autarquia federal responsável por garantir a liquidez da economia, manter reservas internacionais em nível adequado, estimular a poupança e zelar pela estabilidade; pela Comissão de Valores Mobiliários - CVM, autarquia federal responsável por fiscalizar e desenvolver o mercado de valores mobiliários no Brasil estimulando a formação de poupança e sua aplicação em valores mobiliários; pela Superintendência de Seguros Privados - SUSEP, órgão responsável por fiscalizar e controlar o mercado de seguros, previdência privada aberta, capitalização e resseguro e pela Superintendência Nacional de Previdência Complementar - PREVIC, entidade que supervisiona e fiscaliza entidades fechadas de previdência complementar.

As entidades operadoras atuam diretamente no mercado e subdividem-se em órgãos oficiais que são o Banco do Brasil S.A. - BB, mais antigo banco comercial do Brasil, criado em 12 de outubro de 1808; Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social - BNDES, empresa pública vinculada ao Ministério do Desenvolvimento, Indústria e Comércio Exterior responsável por linhas de financiamento de longo prazo e Caixa Econômica Federal - CEF, empresa pública criada em 12 de janeiro de 1861; Demais entidades operadoras aí incluído as Instituições Financeiras Monetárias, instituições autorizadas a captar depósitos à vista do público; Demais Instituições Financeiras, instituições não autorizadas a receber depósito à vista tais como agência de fomento, associação de poupança e empréstimo, Bancos de câmbio e etc.; Outros Intermediários Financeiros, Administradoras de Consórcio, Sociedade de Arrendamento Mercantil e etc. e instituições auxiliares Bolsas de Valores: Mercadorias, Futuros e Balcão Organizado.

A figura 1 apresenta uma síntese do Sistema Financeiro Nacional.



Figura 1: Síntese do Sistema Financeiro Nacional - SFN



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

Como podemos observar os bancos são parte integrante do Sistema Financeiro Nacional - SFN, e Lima [9] os define como

... conjunto de instituições cuja função é promover e facilitar a transferência de recursos dos agentes superavitários (poupança disponível) para os setores deficitários da economia (setores carentes de investimentos para produção).

Estas instituições (bancos) são ainda separadas pelas funções que exercem, segundo Lima [9]

- aos bancos comerciais voltados para a captação no varejo e ao crédito tradicional de curto e médio prazo;
- aos bancos de investimento e de desenvolvimento voltados para prazos mais longos, inclusive com recursos externos, atendendo basicamente ao mercado de capitais;
- às sociedades de crédito, financiamento e investimento, atendendo ao crédito de consumo;

- às instituições do Sistema Financeiro de Habitação (SFH), respondendo pelo financiamento habitacional;
- às corretoras, intermediando negócios no mercado acionário, e às distribuidoras na ponta final de clientes para o mercado de capitais.

Hoje é comum um banco exercer todas as funções supra citadas, caracterizando o chamado banco múltiplo <sup>1</sup>.

Agindo como intermediador entre agentes superavitários e deficitários os bancos têm suas atividades classificadas como prestação de serviço. Costa [2] afirma que serviço é caracterizado por ser essencialmente intangível e por não resultar na propriedade de nada. Além desses fatos podemos destacar que os serviços apresentam variabilidade, causam percepções diferentes e principalmente não podem ser estocados.

É justamente a impossibilidade de estocar os serviços o causador de graves problemas, pois em dias de pouco movimento a mão de obra fica em vários momentos completamente ou parcialmente ociosa, já em dias de grande fluxo geralmente é incapaz de atender a demanda o que pode ocasionar grandes filas e transtornos para quem demanda o serviço e para quem tem o serviço demandado.

Além de obedecerem todas as diretrizes dos órgãos normatizadores do Sistema Financeiro Nacional - SFN, os bancos, ainda são subordinados a legislações municipais que versão por exemplo sobre o tempo de permanência dos clientes na fila dos bancos.

## **1.2 Lei Municipal Sobre o Tempo de Permanência em Fila nas Agências Bancárias de Jataí-Go**

Visando regulamentar o tempo de permanência das pessoas em fila de caixa nas agências bancárias de Jataí a Câmara Municipal aprovou a Lei nº 2.793 [8], de 18 de abril de 2007 sancionada pelo prefeito municipal. Esta lei estabelece no seu artigo 2º o tempo máximo de permanência das pessoas na fila, sendo:

- I - 30 minutos em dia de véspera de, ou após feriados;
- II - 20 minutos em dias normais;
- III - 20 minutos em dias de pagamento de funcionários públicos municipais, estaduais e federais e de vencimentos e recebimentos.

---

<sup>1</sup>banco que possui mais de uma carteira, sendo que uma dessas carteiras deve ser obrigatoriamente comercial ou de investimento.

Ficou assim revogada a Lei nº 2.171 [7], de 13 de junho de 2000 que estabelecia 30 (trinta) minutos como tempo máximo de permanência e não fazia nenhuma distinção de dia. A Lei nº 2.793 ainda exige a implantação de senha de atendimento impressa mecanicamente com o horário de chegada para possibilitar o cômputo do tempo de permanência na fila e estabelece também que as instituições mantenham quadro de aviso em local visível com o telefone da Coordenadoria Municipal de Defesa do Consumidor - PROCON, bem como multa pecuniária para o seu descumprimento.

Já o Decreto nº 708 [3], de 23 de abril de 2007 traz a regulamentação da Lei 2.793 e no seu artigo 3º define:

- I - Cliente: todo o consumidor que, no âmbito da agência bancária, agências de correio e casas lotéricas, utilizar-se de caixas e equipamentos de auto-atendimento;
- II - Filas de atendimento: aquele que conduz o cliente aos caixas e equipamentos de auto-atendimento;
- III - Tempo de espera: aquele computado desde a entrada do cliente na fila de atendimento até o início deste.

Encerrada as considerações iniciais torna-se imprescindível abordar conceitos de Teoria das Filas para subsidiar análises futuras sendo justamente este caminho que iremos seguir.

## 2 Tópicos de Teoria das Filas

Nesta seção abordaremos os principais tópicos da Teoria das Filas com destaque para a nomenclatura e simbologia utilizada.

### 2.1 Teoria das Filas/Teoria de Filas

Para Prado [11] a Teoria das Filas é um método analítico que aborda o assunto por meio de fórmulas matemáticas, já Flogiatti & Mattos [5] fazem uma pequena alteração no vocábulo denominando-o Teoria de Filas sendo que:

A **Teoria de Filas** consiste na modelagem analítica de processos ou sistemas que resultam em espera e tem como objetivo determinar e avaliar quantidades, denominadas **medidas de desempenho**, que expressam a produtividade/operacionalidade desses processos.

Flogiatti & Mattos [5] destacam ainda as medidas de desempenho, pois através da quantidade de pessoas na fila, tempo de espera pelo atendimento e tempo ocioso dos prestadores do serviço torna-se possível efetuar ajustes, melhorias e o correto dimensionamento do sistema. Um conceito importante ilustrado na figura 2 também destacado é o de sistema com Fila:

... qualquer processo onde usuários oriundos de uma determinada população chegam para receber um serviço pelo qual esperam, se for necessário, saindo do sistema assim que o serviço é completado. Essa espera acontece quando a demanda é maior do que a capacidade de atendimento oferecido, em termos de fluxo. [5]

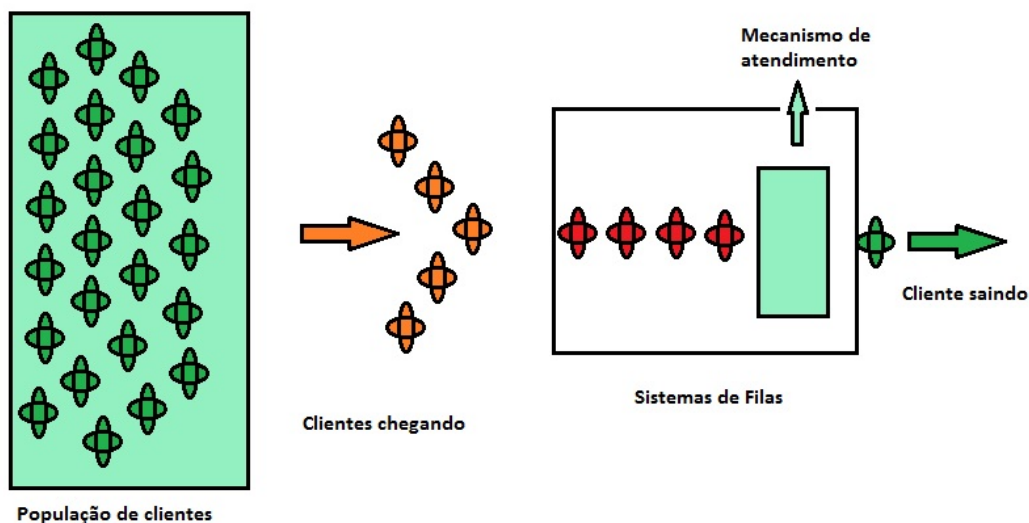
O termo usuário <sup>2</sup> utilizado acima serve para caracterizar pessoas, objetos, programas ou qualquer outro ente que aguarde para receber um serviço ou ser atendido.

O fluxo de chegada dos usuários pode ocorrer de duas formas: determinística ou aleatória. Será determinística se é conhecido o fluxo de chegadas, ou seja, o número de chegadas e os instantes em que elas acontecem, caso contrário será aleatória e como o próprio vocábulo sugere não é conhecido o número de chegadas e nem os instantes em

---

<sup>2</sup>Também é comum utilizar a palavra cliente no lugar de usuário

Figura 2: Sistema com Filas



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

que elas acontecem e neste caso o comportamento será estocástico e caracterizado por uma distribuição de probabilidade.

Após o ingresso dos usuários no sistema é preciso saber qual é a disciplina de atendimento, processo pelo qual os usuários são selecionados para serem atendidos. As disciplinas de atendimento mais utilizadas são:

- FIFO (*first in - first out*): os usuários são atendidos na ordem das chegadas. Essa disciplina de atendimento é a mais comumente adotada. Como exemplos, têm-se a venda de ingressos num cinema, atendimento bancário, carregamento de navios num porto.
- LIFO (*last in - first out*): o primeiro usuário a ser atendido é o que chegou por último. Como exemplos, tem-se a utilização de estoques verticais ou horizontais, como o carregamento de contêineres em navios.
- PRI (*priority service*): o atendimento aos usuários segue uma ou mais prioridades preestabelecidas pela gerência do sistema. Como exemplos, podem ser mencionados a internação hospitalar ou cirurgias, a exploração de poços petrolíferos e tarefas a serem processadas por um computador.

- SIRO (*service in random order*): o atendimento aos usuários segue uma ordem aleatória. Como exemplos desta disciplina, têm-se a contemplação de consórcios e a seleção de ganhadores de concursos populares. [5]

O atendimento ao usuário <sup>3</sup> selecionado por qualquer uma das disciplinas elencadas acima ocorrerá nos canais, postos de serviço ou mecanismo de atendimento. Esses canais de atendimento podem ser finitos ou infinitos e além disso podemos ter canal único com fase única, canal único com fases múltiplas, canais múltiplos com fase única, canais múltiplos com fases múltiplas e misto. Segundo Moraes et all [10]:

**Canal único, fase única:** Este é o tipo mais simples de estrutura da fila de espera, e há fórmulas diretas disponíveis para solucionar o problema do comportamento-padrão da distribuição de chegadas e dos serviços. Quando as distribuições não são padronizadas, o problema é facilmente resolvido através do uso da simulação computacional. Um exemplo típico de uma situação de canal único, fase única, é um salão de beleza com uma única pessoa.

**Canal único, fases múltiplas:** O sistema de lavagem de carros é uma ilustração porque uma série de serviços (aspirar, molhar, lavar, enxaguar, secar, limpar os vidros e estacionar) é realizada em uma sequência bastante uniforme. Um fator crítico no caso do canal único com séries de serviços é a quantidade de itens permitidos à frente de cada serviço, o que, por sua vez, constitui filas de espera separadas.

**Canais múltiplos, fase única:** Os caixas em um banco e os guichês nas lojas de departamentos exemplificam esse tipo de estrutura. A dificuldade com esse formato consiste no fato de que os diferentes tempos de serviço dedicados a cada cliente resultam em velocidade e fluxo desigual entre as filas. Este procedimento faz com que alguns clientes sejam atendidos antes de outros que chegaram mais cedo, assim como um certo grau de troca entre as filas por parte dos clientes. Modificar esta estrutura para garantir o atendimento das chegadas em ordem cronológica poderia levar a uma situação de fila única, na qual, à medida que um servidor torna-se disponível, o próximo cliente na fila é atendido. O principal problema deste tipo de

---

<sup>3</sup>clientes e usuários são sinônimos para a Teoria das Filas

estrutura é que esta requer um controle rígido da fila para manter a ordem e direcionar os clientes para os servidores disponíveis. Em certas instancias a atribuição de números aos clientes, por ordem de chegada, ajuda a aliviar este problema.

**Canais múltiplos, fases múltiplas:** Este caso é similar ao anterior, exceto que dois ou mais serviços são realizados em sequência. A admissão de pacientes em um hospital segue este padrão, porque uma sequência específica de etapas é, geralmente, completada: contato inicial no balcão de admissões, preenchimento de formulários, confecção das pulseiras de identificação, obtenção de um quarto, acompanhamento do paciente até o quarto, e assim por diante. Uma vez que vários servidores estão geralmente disponíveis para este procedimento, poderá ser atendido mais de um paciente por vez.

**Misto:** Nesse tópico geral, consideram-se duas subcategorias: (1) estruturas múltiplas para canais únicos e (2) estruturas de caminhos alternativos. Em (1), encontram-se tanto as filas que se unem em uma única fila para o serviço de fase única, como no cruzamento de pontes, em que duas pistas se juntam em uma, quanto as filas que se juntam em uma para o serviço de fases múltiplas, como as linhas de submontagem que se conectam em uma linha principal. Em (2), encontram-se duas estruturas que diferem nas exigências de fluxo direcional. A primeira é similar ao caso da estrutura de canais múltiplos, fases múltiplas, com a diferença de que (a) pode haver mudança de um canal para o próximo depois que o primeiro serviço foi realizado e (b) o número de canais e fases pode variar - novamente - depois da realização do primeiro serviço.

O sistema de filas engloba a fila bem como o mecanismo de atendimento (canal). Sua capacidade pode ser finita, ou seja, existe um número máximo de usuários que o sistema comporta ou sua capacidade pode ser infinita. Como exemplo de sistema de capacidade finita temos o de um estacionamento de veículos que admite um número máximo de carros, já para o caso de capacidade infinita Flogiatti & Mattos [5] citam o caso de um porto onde navios chegam para descarregamento aguardando, caso seja necessário no mar.

Para simplificar a escrita de toda a caracterização de um sistema de filas exposta até aqui foi proposto um sistema de notação que será descrita a seguir.

## 2.2 A Notação de Kendall

David George Kendall (1918-2007) <sup>4</sup> propôs em 1953 a seguinte notação A/B/C/D/E/F para descrever um sistema com fila. Cada letra possui um significado específico a saber:

- A: distribuição dos intervalos entre chegadas sucessivas;
- B: distribuição do tempo de atendimento/serviço;
- C: capacidade de atendimento/número de atendentes;
- D: capacidade física máxima do sistema;
- E: tamanho da população que fornece clientes;
- F: disciplina de atendimento empregada;

Os dois primeiros termos (A e B) dependem do tipo de distribuição a que se referem, podendo ser:

- M: distribuição exponencial negativa/markoviana/Poisson;
- $E_m$ : distribuição Erlang do tipo m;
- $H_m$ : distribuição hiperexponencial do tipo m;
- distribuição Determinística;
- distribuição Geral (não especificada);

Por exemplo um sistema com fila em que o ritmo de chegada é markoviano, o ritmo de atendimento é Erlang de terceiro grau, existe seis atendentes, a capacidade máxima do sistema é de vinte e dois clientes, a população que fornece clientes é infinita e a disciplina de atendimento utilizada é o primeiro que chega é o primeiro a ser atendido pode ser escrito resumidamente pela notação de Kendall da seguinte forma  $M/E_3/6/22/\infty/FIFO$ , o que simplifica bastante a escrita.

Além da notação exposta existem ainda variáveis importantes que serão descritas a seguir.

## 2.3 Variáveis Fundamentais

Abaixo trazemos as variáveis randômicas fundamentais e os símbolos que as representam.

---

<sup>4</sup>matemático e estatístico inglês



- $\lambda$ : Ritmo médio de chegada
- $\mu$ : Ritmo médio de atendimento
- TS: Tempo médio de permanência no sistema (TF + TA)
- NS: Número médio de clientes no sistema (NF + NA)
- IC: Intervalo médio entre chegadas, por definição

$$IC = \frac{1}{\lambda}$$

- TF: Tempo médio de permanência na fila
- NF: Número médio de clientes na fila
- TA: Tempo médio de atendimento ou de serviço, por definição

$$TA = \frac{1}{\mu}$$

- $c$ : Capacidade de atendimento ou quantidade de atendentes
- NA: Número médio de clientes que estão sendo atendidos
- $\rho$ : Taxa de utilização do sistema

$$\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$$

Além das variáveis existe também algumas relações básicas a saber:

- NS = NF + NA (número médio de clientes no sistema é igual ao número médio de clientes na fila mais número de clientes que estão sendo atendidos)
- TS = TF + TA (tempo médio de permanência no sistema é igual ao tempo médio de permanência na fila mais o tempo médio de atendimento ou de serviço)

Feito o embasamento teórico necessário podemos agora comentar alguns aspectos da fila do banco.

## 2.4 A Fila do Banco

Inicialmente os bancos possuíam vários guichês de caixa para atendimento ao público, o processo era pouco ou quase nada informatizado, e era necessário o emprego de muita mão de obra. Amidani [1] descreve uma agência bancária que disponibilizava até 33 guichês de caixa para atendimento ao público.

Outro fato incomum e estranho para os dias atuais é o sistema de várias filas uma para cada guichê de caixa, prática bastante comum na época à todos os bancos.

Esse regime de várias filas uma para cada caixa possui alguns problemas graves. Amidani [1] cita:

- a. preferência: muitas vezes, percebemos guichês vazios, enquanto dois ou três clientes se enfileiravam diante de um certo caixa; notamos que certos tipos de clientes preferiam certos tipos de caixa (p. exemplo, um cliente mais humilde e pouco experiente prefere o caixa mais paciente, não se importando com a velocidade no atendimento); e caixas com vasto circulo de relações sociais são mais procurados, etc.
- b. localização do guichê: outro fato que comprovamos e que boa parte dos clientes não percorre o saguão, escolhendo um dos guichês, mas fica logo nos próximos à entrada. Várias vezes notamos clientes "aglomerados" frente aos primeiros caixas (perto da entrada), enquanto os últimos atendiam bem menor numero de pessoas. [1]

Outro grande problema que pode ser apontado para este regime de filas é que se ocorre algum problema com o guichê de caixa, falta de troco por exemplo, a fila que está com problemas é interrompida enquanto as demais continuam com fluxo normal, bem como observamos com frequência nas filas de supermercado.

Devido a estes e outros problemas passou-se a utilizar fila única, popularmente conhecida como fila indiana, com vários guichês de caixa (canais ou postos) de atendimento.

Atualmente é adotado o sistema de fila única para vários guichês de caixa, mas agora os clientes esperam sentados. Para organizar a fila é emitido senhas numeradas. Por força do decreto N° 708 [3], de 23 de abril de 2007 e por questões de organização dos bancos a senha passa ser emitida com a identificação do banco, identificação da agência, número da senha, tipo de atendimento solicitado (ATENDIMENTO CAIXA OU ATENDIMENTO), ordem de prioridade (atendimento convencional ou prioritário), data, hora de chegada e o número de protocolo.

Figura 3: Modelo de Senha para o Caixa

BANCO XXXXX AGÊNCIA X
ENDEREÇO DA AGÊNCIA
NÚMERO DA SENHA
TIPO DE ATENDIMENTO (CONVENCIONAL OU PRIORITÁRIO)
DATA E HORA
NÚMERO DO PROTOCOLO

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

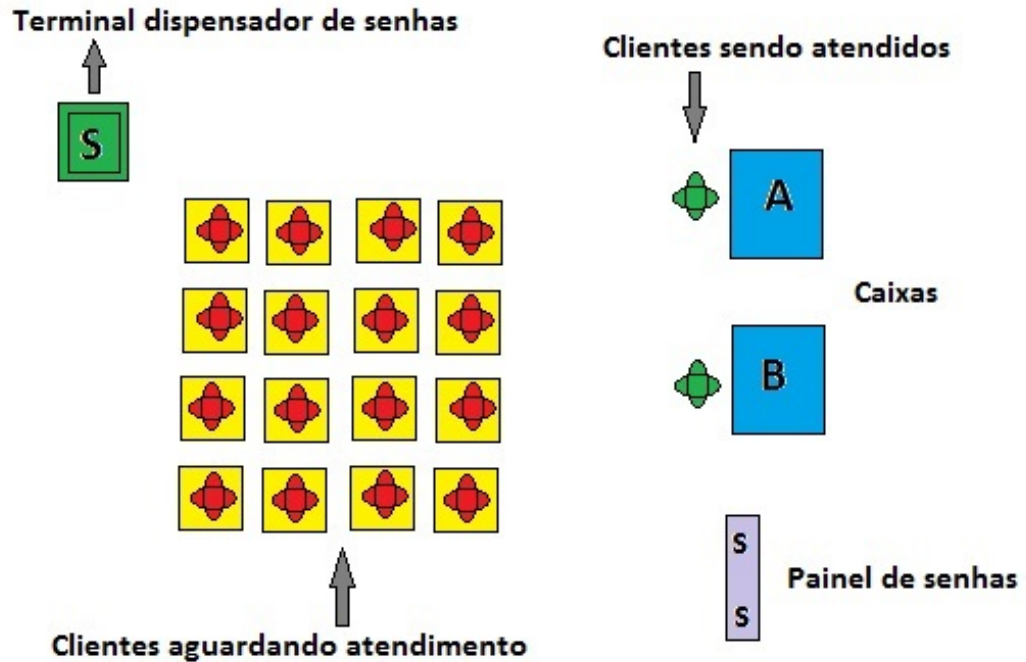
A agência X em questão, possui um terminal dispensador de senhas responsável pela impressão da senha de atendimento. O cliente dirige-se a este terminal e faz a impressão de sua senha. Inserindo o cartão, informando agência e conta ou ainda apertando qualquer tecla aparecerá uma gama de opções referentes ao atendimento e duas relativas ao caixa (CAIXA CONVENCIONAL e CAIXA PRIORITÁRIO) a figura 3 mostra um modelo de senha gerada pelo terminal de senhas.

A opção CAIXA PRIORITÁRIO de acordo com a Resolução 2.878 conhecida como Código de Defesa do Consumidor Bancário é reservada as pessoas portadoras de deficiência física, com mobilidade reduzida, de forma temporário ou definitiva, idosos com idade igual ou superior a sessenta e cinco anos, gestantes, lactantes e pessoas acompanhadas por criança de colo. Os demais clientes devem retirar a senha CAIXA CONVENCIONAL.

Após retirar a senha os clientes passam a aguardar no saguão de atendimento (figura 4). O atendimento pode ser prestado por qualquer um dos dois caixas existentes na agência X, caixa A ou caixa B. Trata-se de uma fila única com canais múltiplos de atendimento e de fase única.

A disciplina de atendimento adotada na agência X é a FIFO (primeiro que chega é o primeiro a ser atendido) intercalada com a PRI (serviço prioritário), essa junção de

Figura 4: Layout do Saguão de Atendimento da Agência X



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

dois regimes distintos ocorre para obedecer o código de defesa do consumidor bancário que como vimos estabelece à alguns clientes certa prioridade no atendimento.

Entendido o sistema de fila adotado podemos a seguir tratar dos dados reais que foram coletados na agência X.

## 3 Os Dados

Nesta seção descreveremos os dados coletados bem como o procedimento de coleta.

### 3.1 Análises Iniciais

Jataí possui uma população em 2015 estimada em 95.998 habitantes, segundo o censo do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística - IBGE [6]. A cidade conta 05 agências lotéricas, 02 agências dos correios e 14 agências bancárias sendo 3 do Banco do Brasil, 2 da Caixa Econômica Federal, 01 do Bradesco, 01 do Santander, 01 HSBC, 03 do Itaú Unibanco, 01 do Sicredi, 01 do Sicoob e 01 do Unicred.

Em meio a todas essas agências bancárias escolhemos uma para realizarmos a coleta dos dados referentes à fila do caixa e sua análise. As ferramentas teóricas utilizadas foram a Teoria das Filas e a estatística.

Os dados coletados referem-se ao mês de novembro do ano de 2014 e a análise proposta não tem como objetivo subsidiar nenhum juízo de valor, mas apenas ilustrar a aplicabilidade da teoria supra citada, nesse sentido sempre que necessário denominaremos a agência escolhida de agência X

O mês de novembro possuiu os seguintes dias úteis 03, 04, 05, 06, 07, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26, 27 e 28. A tabela 1 traz a separação dos dias acima levando em consideração os dias da semana.

Tabela 1: Dias Úteis de Novembro de 2014

segunda-feira	terça-feira	quarta-feira	quinta-feira	sexta-feira
03, 10, 17 e 24	04, 11, 18 e 25	05, 12, 19 e 26	06, 13, 20 e 27	07, 14, 21 e 28

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

Os dados foram obtidos da fita detalhe dos caixas, por meio dela é possível obter o instante de chegada de cada usuário, o instante que sua senha foi chamada pelo caixa, o tempo de espera (tempo decorrido do instante em que a senha é retirada até o chamado do caixa) quantidade de usuários atendidos em um dia, o serviço solicitado

---

<sup>5</sup>arquivo no formato pdf que abrange o instante de abertura, a movimentação realizada ao longo do dia (saque, depósito, transferência, etc.) e o fechamento do dia de trabalho do caixa

(saque, depósito em conta corrente e poupança, TED<sup>6</sup>, DOC , desconto de cheque, pagamento de boletos e etc.) e o tempo de duração do serviço solicitado etc..

Como a agência X possui dois caixas foi necessário efetuar a coleta dos dados do caixa A e do caixa B em separado. Posteriormente estes dados foram digitados conjuntamente em planilhas do software Excel 2007<sup>©</sup> de tal forma que a ordem de retirada das senhas se mantivessem em ordem cronológica e contivesse os dados dos dois caixas. O processo foi realizado para os vinte dias úteis do mês de novembro de 2014.

A figura 5 mostra um trecho da fita detalhe dos caixas A e B para exemplificar, já figura a 6 apresenta um trecho da planilha com os dados organizados por ordem cronológica referente ao dia 03 de novembro de 2014.

---

<sup>6</sup>transferência eletrônica disponível - operação utilizada para transferir valores entre contas de bancos diferentes

<sup>7</sup>documento de ordem de crédito - trata-se também de operação utilizada para transferir valores entre contas de bancos diferentes

Figura 5: Fita Detalhe dos Caixa A e B

<p style="text-align: center;"><b>INICIO ATENDIMENTO</b></p> <p>03/11/2014 10.01.01 CAIXA A          HORA CHEGADA: 10.00.20 TEMPO ESPERA: 00.00.41          ( HORARIO DE BRASILIA )          PROTOCOLO: 2          SENHA DE ATENDIMENTO CAIXA: P01</p> <hr/> <p>DESC CHEQUE          AGENCIA: XXXX          CONTA.....: YYYYYYY          CHEQUE.....: ZZZZZZZ          VALOR.....: RRRRRR          CLIENTE.....: WWW EEE TTTTGG</p> <hr/> <p style="text-align: center;"><b>FIM DO ATENDIMENTO</b>          03/11/2014 10.03.21</p>	<p style="text-align: center;"><b>INICIO ATENDIMENTO</b></p> <p>03/11/2014 10.01.40 CAIXA B          HORA CHEGADA: 10.00.08 TEMPO ESPERA: 00.01.32          ( HORARIO DE BRASILIA )          PROTOCOLO: 1          SENHA DE ATENDIMENTO CAIXA: C01</p> <hr/> <p>DEP CONTA POUPANCA          VALOR.....: XXXXXX</p> <hr/> <p>DEP CONTA CORRENTE          VALOR.....: YYYYYYY</p> <hr/> <p style="text-align: center;"><b>FIM DO ATENDIMENTO</b>          03/11/2014 10.04.16</p>
---	---

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

Figura 6: Planilha com os Dados do dia 03 de novembro de 2014

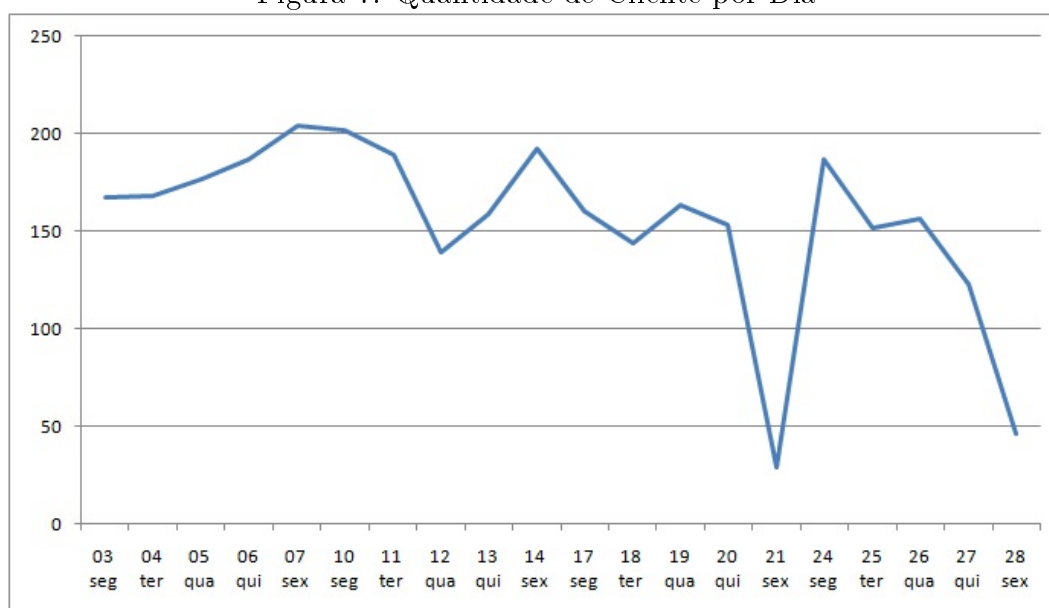
	CAIXA	SENHA	HORÁRIO DE CHEGADA	INÍCIO DO ATENDIMENTO	TEMPO DE ESPERA	SERVIÇO EXECUTADO	ENCERRAMENTO DA SESSÃO DE ATENDIMENTO
2	B	C01	10:00:08	10:01:40	0:01:32	DEPOSITOU	10:04:18
3	A	P01	10:00:20	10:01:01	0:00:41	DESCONTOU DE CHEQUE	10:03:21
4	B	C02	10:00:33	10:04:39	0:04:06	SACOU/PAGOU	10:06:43
5	A	P02	10:00:46	10:03:27	0:02:41	TRANSFERIU DINHEIRO ENTRE CONTAS	10:05:03
6	A	P03	10:00:57	10:05:11	0:04:14	DESCONTOU CHEQUE	10:06:52
7	B	C03	10:01:11	10:06:57	0:05:46	DESCONTOU CHEQUE/PAGOU BOLETO	10:09:47
8	B	C04	10:01:22	10:10:15	0:08:53	PAGOU BOLETO	10:13:25
9	A	P04	10:02:13	10:07:16	0:05:03	SACOU	10:09:11
10	B	C07	10:03:08	10:18:34	0:15:26	DEPOSITOU/SACOU	10:21:29
11	B	C08	10:03:19	10:22:19	0:19:00	PAGOU BOLETO	10:23:35
12	A	P05	10:03:46	10:09:34	0:05:48	SACOU	10:11:07
13	B	C09	10:03:58	10:23:43	0:19:45	PAGOU BOLETO	10:25:55
14	A	C10	10:04:09	10:24:43	0:20:34	SACOU/DESCONTOU CHEQUE	10:28:50
15	B	C11	10:04:20	10:26:06	0:21:46	SACOU/DESCONTOU CHEQUE	10:30:06
16	A	C12	10:04:31	10:28:59	0:24:28	SACOU/PAGOU BOLETO	10:30:54
17	B	C13	10:04:47	10:30:55	0:26:08	DESCONTOU CHEQUE	10:34:14
18	A	C14	10:04:59	10:31:01	0:26:02	DESCONTOU CHEQUE	10:34:21
19	B	C15	10:05:21	10:34:22	0:29:01	PAGOU BOLETO	10:37:39
20	A	C16	10:05:40	10:35:14	0:29:34	DEPOSITOU	10:36:11

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

O método de coleta de dados que comentamos acima e utilizamos no nosso trabalho possui algumas limitações, pois a falta de energia, falta de papel no terminal dispensador de senhas, papel preso no equipamento, problemas de hardware e software dentre outros prejudicam e atrapalham o entendimento da fita detalhe dos caixas e em alguns casos inviabiliza totalmente o processo.

A figura 7 apresenta a quantidade de clientes atendidos por dia no mês de novembro, nela é possível perceber como os dias 21 e 28 destoam dos demais dias é possível ainda observar a irregularidade na quantidade de clientes atendidos por dia, o que é totalmente esperado, pois o processo de chegada é aleatório não sendo possível prever a quantidade de clientes que chegam para serem atendidos.

Figura 7: Quantidade de Cliente por Dia



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

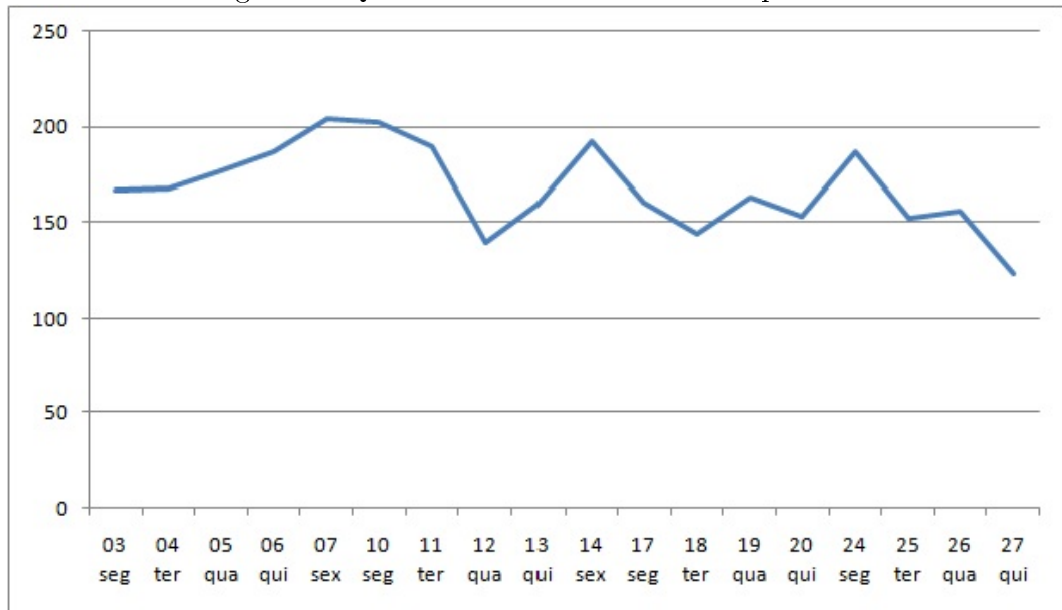
A grande irregularidade observada nos dias 21 e 28 de novembro de 2014 é justificada por falta de energia elétrica no dia 21 e por problemas de hardware no terminal dispensador de senhas no dia 28, como estes dois dias não representam o que realmente aconteceu optamos por excluí-los obtendo assim somente dados condizentes com a realidade e mais próximos de um padrão (figura 8).

Feita a consideração acima nos ocuparemos de agora em diante apenas com os dias 03, 04, 05, 06, 07, 10, 11, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 20, 24, 25, 26 e 27 de novembro.

Por meio da análise que realizamos foi possível observar também que a quantidade de clientes atendidos por caixa varia, a tabela 2 apresenta a quantidade de clientes atendidos por cada caixa, já a figura 9 o percentual médio de clientes atendidos por cada um dos caixas. Em geral o caixa B atendeu em praticamente todos os dias mais clientes do que o caixa A, a discrepância apontada talvez se deva ao fato do caixa A ser o caixa destinado ao atendimento de clientes que possuem *status* de prioritário (idosos,



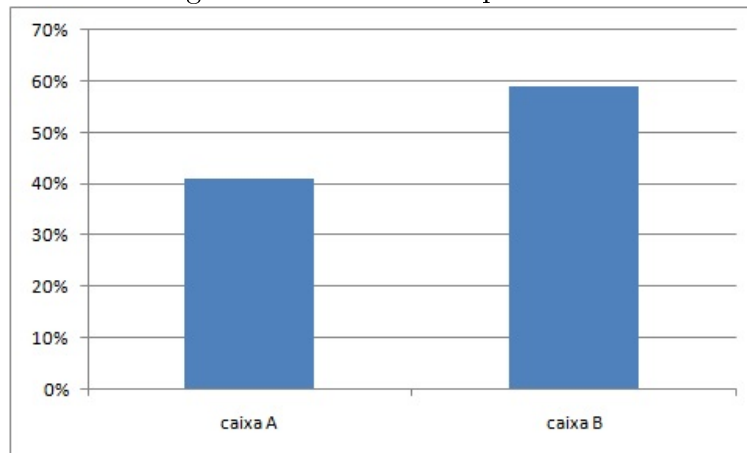
Figura 8: Quantidade Válida de Cliente por Dia



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

gestantes, deficientes físicos, etc.).

Figura 9: Atendimento por Caixa



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

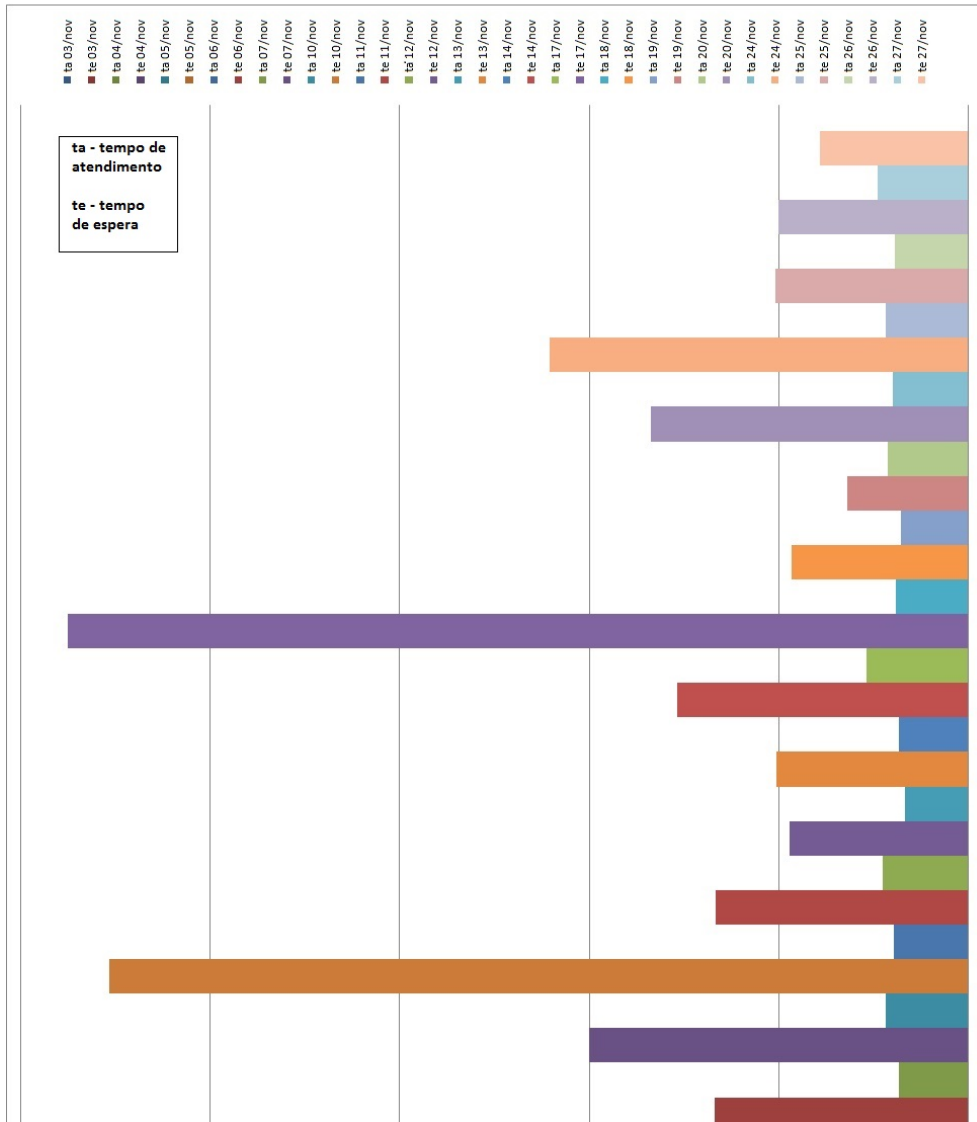
Tabela 2: Atendimento por Caixa

dia	quantidade de clientes: caixa A	quantidade de clientes: caixa B
03/nov	64	103
04/nov	81	87
05/nov	83	93
06/nov	81	106
07/nov	93	111
10/nov	81	121
11/nov	83	106
12/nov	54	85
13/nov	57	102
14/nov	99	93
17/nov	59	101
18/nov	49	93
19/nov	52	110
20/nov	96	153
24/nov	78	109
25/nov	83	151
26/nov	72	84
27/nov	35	88
Total	1300	1896

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

A observação conjunta do tempo médio de espera e do tempo médio de atendimento possibilita ver claramente que o tempo de espera é sempre superior ao tempo de atendimento, conforme simples observação da figura 10.

Figura 10: Tempo de Atendimento e de Espera



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

Feita todas as considerações e análises iniciais nos ocuparemos de agora em diante em analisar os dados obtidos à luz da Teoria das Filas.

### 3.2 Aplicando a Teoria das Filas

A agência X funciona de segunda a sexta-feira das 10:00 às 15:00, o sistema de fila adotado é o de fila única em que o primeiro cliente que chega é o primeiro cliente a ser

atendido (*first in first out* - FIFO), este sistema só é interrompido quando existe alguma senha de atendimento prioritário (*priority service* - PRI), vale ressaltar que o cliente com prioridade é colocado no início da fila, mas sem interromper o atendimento já iniciado ao cliente de menor prioridade. Por simplicidade consideraremos que trata-se apenas de um sistema de disciplina de atendimento FIFO.

Para as análises dividimos as cinco horas de atendimento dedicada ao público em subintervalos de 10 minutos cada e calculamos o número de chegadas que ocorreram em cada um desses subintervalos. Repetimos este processo para cada um dos 18 dias analisados. Posteriormente efetuamos a média de chegadas para cada um dos subintervalos obtendo assim os dados da tabela 3.

Tabela 3: Média de Chegadas

número de chegadas	média	número de chegadas	média
0	0,3889	11	0,7778
1	1,0000	12	0,2222
2	2,5556	13	0,2222
3	4,0000	14	0,0556
4	4,3889	15	0,1667
5	4,6667	16	0,1667
6	3,6111	17	0,1111
7	2,8889	18	0,1111
8	2,0000	19	0,0556
9	0,8333	20	0,0556
10	1,0556	—	—

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

A tabela 4 apresenta os dados da tabela 3, mas agora com a média de chegadas aproximada para números inteiros.

Tendo por base os dados da tabela 3 e os dados da tabela 4 confeccionamos os gráficos das figuras 11 e 12. Os dois gráficos sugerem visualmente Poisson como distribuição de probabilidade mais adequada.

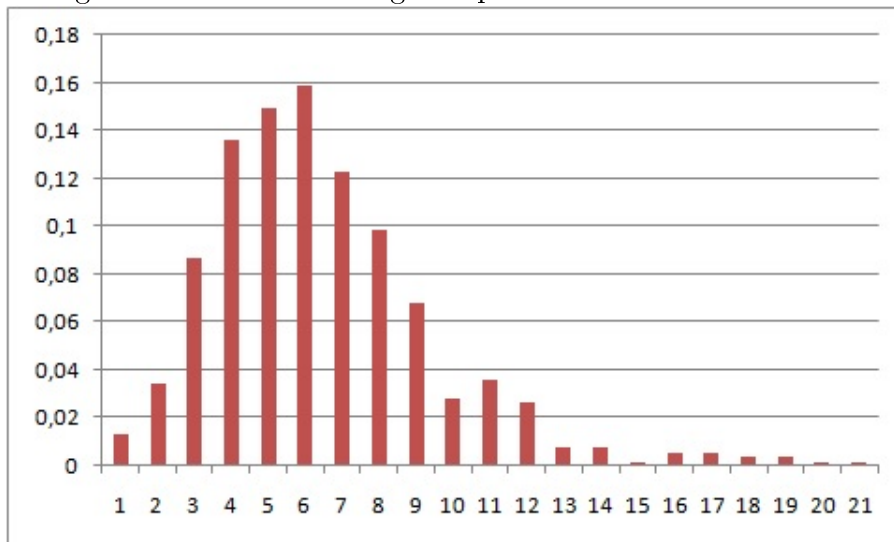
Segundo Prado [11]

Tabela 4: Média Aproximada para Números Inteiros

número de chegadas	média	número de chegadas	média
0	0	11	1
1	1	12	0
2	3	13	0
3	4	14	0
4	4	15	0
5	5	16	0
6	4	17	0
7	3	18	0
8	2	19	0
9	1	20	0
10	1	—	—

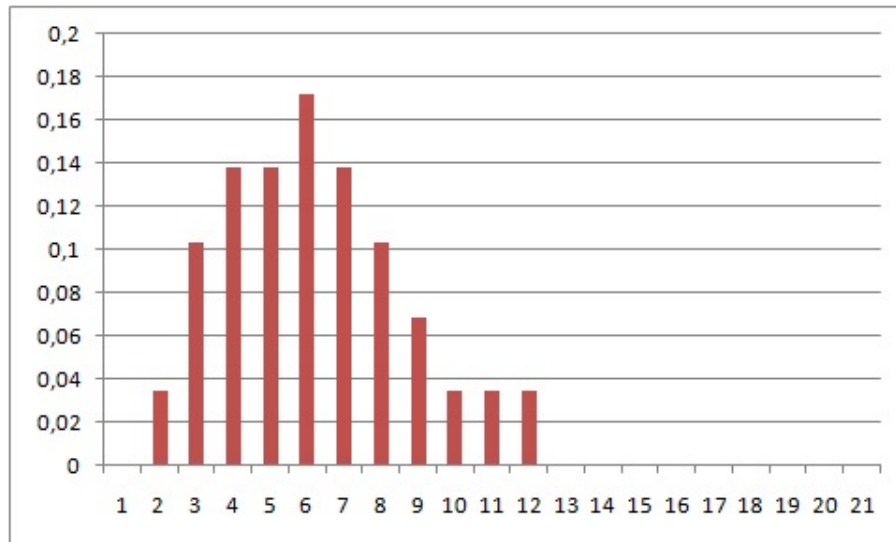
fonte: desenvolvido pelo próprio autor

Figura 11: Média de Chegadas por Intervalos de 10 Minutos



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

Figura 12: Média de Chegadas por Intervalos de 10 Minutos - Aproximação para Inteiros



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

A distribuição de Poisson tem se mostrado aplicável a inúmeros tipos de processos de chegadas na vida prática e, assim, seu uso é bastante difundido em modelagem de filas.

A observação visual não é suficiente para afirmar e garantir que realmente se trata da distribuição de Poisson. Para certificarmos este fato realizamos o teste qui-quadrado utilizando o software estatístico R , por meio desta análise verificamos que o ritmo médio de chegadas  $\lambda$  realmente obedece a distribuição de Poisson.

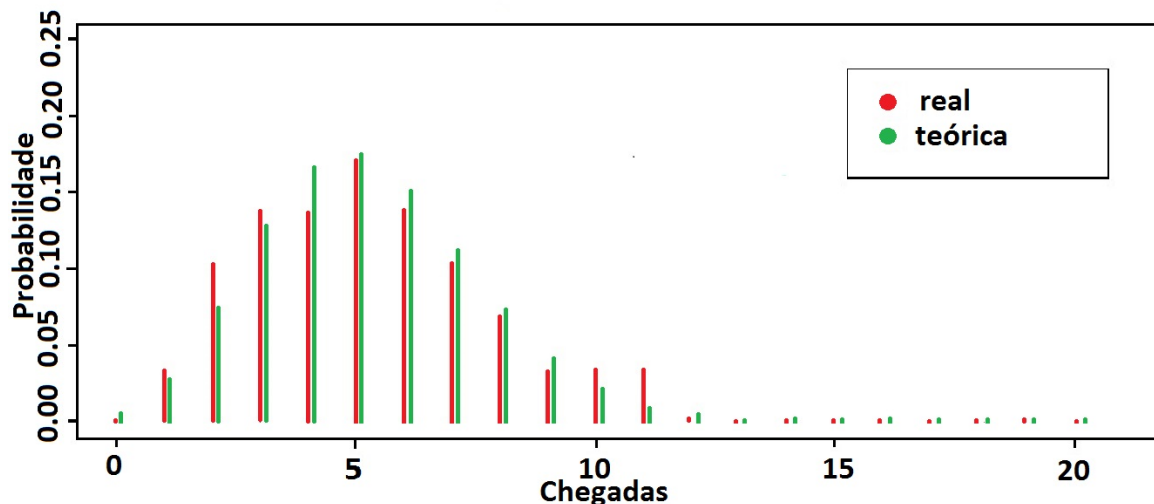
A figura 13 apresenta a probabilidade teórica e a probabilidade real em um mesmo gráfico mostrando como realmente estão próximas estas distribuições.

Agora tendo certeza que o ritmo de chegadas  $\lambda$  segue a distribuição de Poisson é possível afirmarmos que o intervalo entre chegadas segue a distribuição exponencial negativa. Prado [11] afirma ainda que

Se, ao analisar um processo de chegada, constatarmos que o ritmo de chegada segue a distribuição de Poisson, podemos, então, afirmar que os intervalos entre chegadas seguirão a distribuição exponencial negativa.

<sup>8</sup>software estatístico gratuito disponível para download no site [www.r-project.org](http://www.r-project.org)

Figura 13: Comparativo: Probabilidade Teórica Versus Probabilidade Real



fonte: desenvolvido pelo próprio autor

De posse dessas duas certezas analisaremos a seguir os dados sobre o olhar das variáveis randômicas fundamentais tratadas na seção 2.3.

### 3.3 As Variáveis Randômicas Fundamentais

Com base nos dados da tabela 2 construímos a tabela 5 que apresenta a quantidade de clientes atendidos por minuto em cada um dos dias do mês analisado. Estes valores foram obtidos da divisão do total de clientes atendidos em cada dia (dados na tabela 2) pelo tempo de atendimento em minutos (300 minutos).

Por exemplo, no dia 06 de novembro o caixa A atendeu 81 clientes, sendo assim sua média de atendimento para este dia é dada por:

$$\begin{aligned}
 M_A &= \frac{81}{300} \\
 &= 0,2700 \text{ clientes por minuto}
 \end{aligned}$$

Repetindo o processo para cada um dos 18 dias e para cada um dos caixas obtemos a média diária que consta na tabela 5. A última linha apresenta a média mensal para cada caixa, 0,2309 clientes por minuto para o caixa A e 0,3280 clientes por minuto para

Tabela 5: Média de Atendimento: Clientes por Minuto

dia	Caixa A	Caixa B	Total Caixa A e Caixa B
03/nov	0,2133	0,3433	0,5567
04/nov	0,2700	0,2900	0,5600
05/nov	0,2767	0,3100	0,5867
06/nov	0,2700	0,3533	0,6233
07/nov	0,3100	0,3700	0,6800
10/nov	0,2700	0,4033	0,6733
11/nov	0,2767	0,3533	0,6300
12/nov	0,1800	0,2833	0,4633
13/nov	0,1900	0,3400	0,5300
14/nov	0,3300	0,3100	0,6400
17/nov	0,1967	0,3367	0,5333
18/nov	0,1633	0,3100	0,4733
19/nov	0,1767	0,3667	0,5433
20/nov	0,1900	0,3200	0,5100
24/nov	0,2600	0,3633	0,6233
25/nov	0,2267	0,2767	0,5033
26/nov	0,2400	0,2800	0,5200
27/nov	0,1167	0,2933	0,4100
Total	4,1567	5,9033	10,0600
Média	0,2309	0,3280	0,5589

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

o caixa B, além disso a média geral que foi de 0,5589 clientes atendidos por minuto no total mensal.

Podemos então estabelecer um elo com as Variáveis Fundamentais apresentadas



na seção 2.3. Temos que o ritmo médio de atendimento mensal  $\mu$  é dado por 0,5589 clientes por minuto ou 5,5889 clientes a cada intervalo de dez minutos, logo

$$\mu = 0,5589 \text{ clientes por minuto}$$

ou ainda

$$\mu = 5,5889 \text{ clientes a cada intervalo de dez minutos}$$

O ritmo médio de atendimento, tempo médio de atendimento ou de serviço é facilmente calculado da seguinte forma

$$\begin{aligned} TA &= \frac{1}{\mu} \\ &= \frac{1}{0,5589} \\ &= 1,7892 \text{ minutos por cliente} \end{aligned}$$

Para obter a média de chegadas  $\lambda$  inicialmente somamos o total de clientes atendidos pelo caixa A com o total de clientes atendidos pelo caixa B, esses valores estão expressos na última linha da tabela 2. Dividimos o resultado da soma por 5400 (esse número refere-se ao produto da quantidade de dias observados pelo tempo de atendimento diário que é de 300 minutos). Algebricamente,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1300 + 1896}{5400} \\ &= \frac{3196}{5400} \\ &= 0,5919 \text{ cliente por minuto} \end{aligned}$$

ou ainda,  $\lambda = 5,919$  clientes a cada intervalo de 10 minutos, ou seja, chegam 5,919 clientes a cada intervalo de 10 minutos.

Como o intervalo médio entre chegadas  $IC$  é dado pela divisão de 1 por  $\lambda$  temos

$$\begin{aligned} IC &= \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{0,5919} \\ &= 1,6895 \text{ minutos por cliente} \end{aligned}$$

logo o intervalo médio entre chegadas é de 1,6895 chegadas por minuto.

Para o cálculo do tempo médio de permanência na fila TF faz-se necessário o uso da tabela 6 (confeccionada por meio dos dados das planilhas diárias) que apresenta o tempo médio de permanência na fila em cada um dos dias analisados. O tempo de permanência compreende o tempo que decorre da emissão da senha até o instante em que o usuário é chamado para iniciar o seu atendimento.

Tabela 6: Tempo Médio Diário de Permanência na Fila

dia	tempo médio	dia	tempo médio
03/nov	21:54	14	11:04
04/nov	08:27	17	34:14
05/nov	06:37	18	06:43
06/nov	09:38	19	04:35
07/nov	14:24	20	12:04
10/nov	32:40	24	15:55
11/nov	09:36	25	07:19
12/nov	06:46	26	07:11
13/nov	07:17	27	05:38
Total	1:57:19	—	1:44:43

fonte: desenvolvido pelo próprio autor

Como são 18 dias analisados somamos os dois totais parciais 1:57:19 (uma hora cinquenta e sete minutos e dezenove segundos) e 1:44:43 (uma hora quarenta e quatro minutos e quarenta e três segundos) e dividimos a soma pela quantidade de dias analisados (18 dias).

$$\begin{aligned}
 TF &= \frac{1 : 57 : 19 + 1 : 44 : 43}{18} \\
 &= \frac{3 : 42 : 02}{18} \\
 &= 12 : 20 \\
 &= 12,3333 \text{ minutos}
 \end{aligned}$$

Portanto o tempo médio de permanência na fila TF foi 12 minutos e 20 segundos (12,3333 minutos) a média pode ser considerada boa mas tivemos um dia bastante crítico em que foi registrado 32 minutos e 40 segundos, tempo esse muito acima do que a legislação aponta como ideal.

Nos 18 dias analisados foram atendidos 3018 clientes, por conta disso o número médio de clientes na fila (NF) registrado no período foi de 167,6667 clientes por dia.

$$\begin{aligned}NF &= \frac{3018}{18} \\ &= 167,6667 \text{ clientes por dia}\end{aligned}$$

Somando o tempo médio de permanência na fila (TF) com o tempo médio de atendimento (TA) obtêm-se o tempo médio de permanência no sistema.

$$\begin{aligned}TS &= TF + TA \\ &= 12,3333 + 1,7892 \\ &= 14,1225 \text{ minutos}\end{aligned}$$

Como a agência possui dois caixas de atendimento temos que a variável  $c$  (capacidade de atendimento ou quantidade de atendentes), assume 2 como valor. Desta forma a taxa de utilização do sistema  $\rho$  vale

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{\lambda}{c\mu} \\ &= \frac{0,5919}{(2)(0,5589)} \\ &= 0,5295\end{aligned}$$

Nosso sistema pode então ser considerado estável, pois segundo Prado [11] um sistema será estável se  $\rho$  for um valor menor do que 1, este é o nosso caso pois obtemos  $\rho = 0,5295$ .

## 4 Considerações Finais

O propósito principal deste trabalho foi explorar alguns conceitos da Teoria das Filas, mesmo que de forma bastante introdutória, pois trata-se de um texto que objetiva apresentar aplicações do uso da matemática à professores e alunos da educação básica. Em particular citamos o conceito de média bastante explorado ao se trabalhar com o tempo médio de espera, número médio de chegadas, tempo médio de permanência na fila entre outros.

Como destacado, um texto mais profundo sobre o assunto fugiria do objetivo principal deste programa de mestrado, necessitaria de mais tempo para trabalhar a temática e ainda a complementação da análise por meio de outras importantes ferramentas tais como simulação computacional por exemplo.

Mesmo tendo seguindo a ideia de ser um texto introdutório temos a convicção de que este fato não foi empecilho para a utilização de dados reais que foram obtidos *in loco*, pelo contrário, serviu para mostrar a aplicabilidade da matemática e da estatística por intermédio da Teoria das Filas.

Como evidenciado a Teoria das Filas presta-se a análise e solução de uma ampla gama de problemas reais onde a fila é visível e onde não a percebemos. O número reduzido de textos que tratam exclusivamente das filas em banco e a presença marcante e corriqueira destas filas no cotidiano subsidiaram nossa escolha por esta temática.

Devido a complexidade do tema buscaremos em outro momento mais oportuno realizar a análise dos dados obtidos sob outros aspectos da Teoria das Filas que não foram contemplados neste texto adotando uma análise mais profunda. Faremos ainda a comparação do período analisado com o mesmo período de anos anteriores e subsequentes.

## Referências

- [1] AMIDANI, L. R.: *A Teoria das filas aplicada aos serviços Bancários*. São Paulo, 1974. 138p. Dissertação (Mestrado em Administração de empresas) - Programa de Pós-Graduação em Administração - PPGA, Fundação Getúlio Vargas Escola de Administração de Empresas de São Paulo. São Paulo, 1974.
- [2] COSTA, N. P., *Marketing para Empreendedores: um guia para montar e manter um negócio: um estudo da administração mercadológica*. Rio de Janeiro, RJ: Qualitymark, 2003, 500p.
- [3] DECRETO 708 JATAÍ. DECRETO 708, DE 23 DE ABRIL DE 2007. Regulamenta a Lei nº 2.793, de 18 de abril de 2007, que dispõe sobre o atendimento de cliente em estabelecimento bancário no Município. **Diário Oficial** (do Município de Jataí), Jataí, p. 3, 23 de abr. 2007.
- [4] [https://www.febraban.org.br/febraban.asp?id\\_pagina=31](https://www.febraban.org.br/febraban.asp?id_pagina=31)], acesso em 21/04/2015
- [5] FOGLIATTI, M. C.; MATTOS, N. M. C., *Teoria de Filas*. Rio de Janeiro, RJ: Interciência, 2007, 290p.
- [6] <http://www.cidades.ibge.gov.br/xtras/perfil.php?lang=&codmun=521190&search=goias|jatai>], acesso em 16/01/2015
- [7] LEI 2.171 JATAÍ. LEI 2.171, DE 13 DE JUNHO DE 2000. Estabelece tempo para atendimento de clientes pelas instituições financeiras locais e dá outras providências. **Diário Oficial** (do Município de Jataí), Jataí, p. 1, 13 de jun. 2000.
- [8] LEI 2.793 JATAÍ. LEI 2.793, DE 18 DE ABRIL DE 2007. Revoga a Lei nº 2.171, de 13 de junho de 2000 e restabelece tempo de espera para atendimento de usuários e clientes pelas instituições financeiras locais, agências dos correios e casas lotéricas. **Diário Oficial** (do Município de Jataí), Jataí, p. 2, 18 de abr. 2007.
- [9] LIMA, I. S.; GALARDI, N.; NEUBAUER, I., *Fundamentos dos investimentos financeiros*. São Paulo, SP: Atlas, 2008, 150p.
- [10] MORAES, F. G. DE; SILVA, F. DA S.; REZENDE, T. A., *Introdução à Teoria das Filas*. Cuiabá: coloquios/CO-2.06, 2011. 33 p. Disponível em: <[www.sbm.org.br/docs/coloquios/CO-2.06.pdf](http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/CO-2.06.pdf)>. acesso em 21/04/2015

- [11] PRADO, D. S. DO, *Teoria das filas e da simulação*. 5. ed. São Paulo, SP: Falconi, 2014, 152p.