Universidade Federal de Goiás
Regional Jataí
Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional

Matemática e Música: Uma Proposta de Aprendizagem

Rafayane Barros Cabral

JATAÍ - GO
2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Rafayane Barros Cabral		
E-mail:	rafayaneb@hotmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não			
Vínculo empregatício do autor	Professora efetiva do estado		
Agência de fomento:	Sec. da Educação de Estado	Sigla: SEDUCE	
País: BRASIL	UF: GO	CNPJ:	
Título:			
Palavras-chave:	música, matemática, aprendizagem, trigonometria, som		
Título em outra língua:			
Palavras-chave em outra língua:	music, math , learning, trigonometry, sound,		
Área de concentração:	Matemática do ensino básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)			
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT		
Orientador (a):	Claudiney Goulart		
E-mail:	claudineygoulart@hotmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a) Data: 13 / 01 / 2016

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Rafayane Barros Cabral

Matemática e Música:
Uma Proposta de Aprendizagem

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Claudiney Goulart

JATAÍ - GO

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Cabral, Rafayane Barros
Matemática e Música [manuscrito] : Uma proposta de apresndizagem / Rafayane Barros Cabral. - 2015.
lxii, 62 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Claudiney Goulart.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí , Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí, 2015.
Bibliografia. Anexos.
Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Música. 2. Matemática. 3. Trigonometria. 4. Som. 5. Aprendizagem. I. Goulart, Claudiney, orient. II. Título.

Rafayane Barros Cabral

Matemática e Música: Uma proposta de aprendizagem

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 17 de dezembro de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Claudiney Goulart

Prof. Dr. Claudiney Goulart
Presidente da Banca – UFG/Jataí

Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa
Membro – UFG/Jataí

Prof. Dr. Paulo Henrique de Souza
Membro – IF/Jataí

Rafayane Barros Cabral graduou-se em Matemática pela UNIRV em Rio Verde-GO, durante a graduação foi bolsista do Coral Musical da instituição, especializou-se em Metodologia do Ensino Fundamental pela UFG Goiânia-GO e, é professora efetiva do Estado de Goiás desde 2006.

Agradecimentos

Quero agradecer primeiramente à Deus, que me deu sabedoria nos momentos cruciais, força para continuar lutando e perseverança para jamais desistir, pois sempre confiei que Ele está no controle, à minha família e amigos que me apoiaram e tiveram muita paciência comigo, em especial meu marido Tiago e minha filha Nicolle, aos colegas de Mestrado que seguraram essa barra junto comigo, dentre eles quero destacar minha amiga Neades, ao professor Dr. Claudiney Goulart, pela orientação desete trabalho, ao professor Dr. Esdras Costa pela ajuda na configuração deste trabalho e por aceitar participar da banca examinadora, ao Dr. Paulo Henrique de Souza por ter aceitado participar da banca examinadora e, finalmente à CAPES pelo o incentivo financeiro.

“A Música de tão perfeita, é pura Matemática; a Matemática de tão simples, é deslumbrante como a Música. A Música parece uma equação; a equação bem formulada é cheia de harmonia e sonoridade.” (Albert Einstein)

Resumo

Investigamos assuntos envolvendo matemática e música, sugerindo resolução de problemas musicais com o auxílio da matemática, de modo que os alunos possam estabelecer relações entre a Matemática e Música. Abordaremos Frações, funções Exponenciais, Logarítmicas e Trigonométricas, Progressão Geométrica (P.G.) e Mínimo Mútiplo Comum (m.m.c.), propondo um trabalho diversificado. A música é envolvente e dificilmente não despertará curiosidade e interesse, atraindo os mais variados grupos, desde virtuoses musicais a simples ouvintes. Através deste estudo, foi possível perceber o quanto a matemática está ligada a música e como é interessante essas conexões, de modo que o aluno aprenderá melhor matemática quando se insere a música no contexto. Estudos de comprovam que através da música pode-se até curar determinadas doenças, ajudar o aluno a melhorar sua autoestima, socializar-se melhor, contribuir para o seu aprendizado nas mais variadas disciplinas (não só a matemática), aumentar sua capacidade de concentração, dentre outros benefícios [2]. Destacamos também alguns fatos históricos, relacionamos o Som e a Trigonometria, a Matemática e a Música, definimos alguns elementos básicos da Teoria musical, ressaltamos algumas contribuições de Euler no campo da Matemática e a Teoria Musical e finalmente, sugerimos uma estratégia de trabalho em sala de aula utilizando a Teoria musical como motivação.

Palavras Chave: música, matemática, aprendizagem, ondas, som.

Abstract

We investigate matters involving mathematics and music, suggesting solving musical problems with the aid of mathematics, so that students can establish relationships between mathematics and music. We discuss fractions, exponential, logarithmic and trigonometric, Geometric Progression (G.P.) and Least Common Mútiplo (lcm), offering a diverse work. The music is engaging and hard not to arouse curiosity and interest, attracting a wide variety of groups, from musical virtuosos simple listeners. Through this study, we notice how the math is on the music and how interesting those connections, so that the student will learn math best when inserting the music into context. Studies show that through music you can even cure certain diseases, help students improve their self-esteem, socialize better, contribute to their learning in various disciplines (not only mathematics), increase your ability to concentrate, among other benefits [2]. We also highlight some historical facts relate Sound and trigonometry, Mathematics and Music, we define some basic elements of musical theory, we highlight some contributions of Euler in the field of mathematics and music theory and finally suggest a room on business strategy class using the Music Theory as motivation.

Keywords: music, math, learning, waves, sound.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Abordaremos aqui alguns aspectos intrínsecos entre a Matemática e a Música, bem como os benefícios relacionados ao estudo da Música, incluindo melhoria na aprendizagem, na socialização, na saúde física e mental, na autoestima entre outros. Faremos um breve apanhado histórico, com o auxilio de alguns autores que estudaram o assunto.

A maioria dos estudantes percebem a Matemática como uma disciplina ruim para se estudar e sem utilidade, ressalta [4]. Porém dificilmente haverá alguém, mesmo sem conhecimento musicais profundos, que não aprecie música, pois em geral a música está presente em muitos momentos em nossas vidas.

Em 2009, desenvolvi um projeto chamado "Coral Escolar", com duração de 2 anos, o qual havia uma carga horária de 14 horas/aulas semanais, dividas da seguinte forma:

- Aulas de Teoria Musical três vezes por semana;
- Aulas de solfejo três vezes por semana;
- Aulas de ritmo três vezes por semana;
- Vocalizes em todos os ensaios;
- Ensaios diários com partituras.
- Apresentações musicais mensais

Esse projeto era desenvolvido com alunos do ensino fundamental no contraturno, eram meus alunos na disciplina de matemática no turno vespertino e participavam do coral no turno matutino, assim pude observar que os alunos envolvidos nesse projeto começaram a fazer conexões entre a Matemática e a Música. Ao fazer minha especialização pude registrar essa experiência em meu trabalho de conclusão de curso.

No trabalho que estamos realizando junto ao PROFMAT, propomos resolução de problemas musicais com o auxílio da Matemática, de modo que os alunos possam estabelecer relações entre a Matemática e Música.

Em [5] é relatado que:

> Pessoas talentosas em termos matemáticos frequentemente manifestam um considerável interesse pela música, talvez isso aconteça porque a música se apresenta como um campo extremamente fértil para a mente matemática...

Isso não acontece por acaso, a relação entre a Música e a Matemática existe desde a antiguidade, identificada nos estudos pitagóricos sobre a Música, fato de fundamental importância para sua evolução [1].

Alunos que praticam Música, apresentam um grande esforço em se destacar nas demais áreas do conhecimento, não apenas em Matemática [3]. Dessa forma, nota-se que é interessante explorar problemas envolvendo Música como uma ferramenta para o aprendizado da Matemática.

Em [2] é ressaltado sobre o poder terapêutico da música e sua contribuição na cura de algumas enfermidades, assim podemos supor que é possível utilizar a música para minorar alguns problemas relacionados à aprendizagem de Matemática. Há estudos que comprovam que alunos que estudam música podem ter sua inteligência ampliada. Em [3], Bastian fez um experimento com alunos da educação básica num período de 4 anos e aqueles que foram submetidos a educação musical expandida tiveram um desempenho no teste de QI (111) significativamente superior ao dos alunos que não usufruíram de uma educação musical durante o período QI(105).

Quando o aluno tem a oportunidade de estudar Música, o professor de Matemática que também tenha algum conhecimento musical, poderá estabelecer algumas relações entre a Matemática e a Música, possibilitando ao aluno, estudante de música, se interessar pela Matemática. Para aqueles que não tiveram essa chance, pode-se introduzir a Teoria Musical superficialmente, mostrando aos alunos o quanto de Matemática há na Música, tornando-a mais próxima, mesmo que estes alunos não tenham grandes habilidades musicais, certamente apreciam algum ritmo musical, o que já é o suficiente para despertar interesse nessa relação música/matemática.

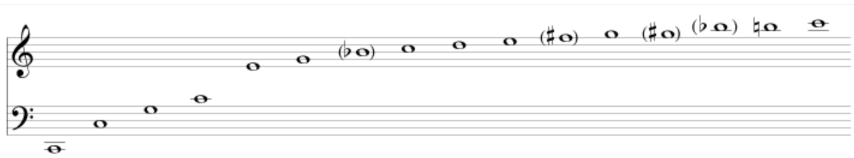
Um exemplo interessante que ilustra o quanto a Matemática está presente na Música pode se observado quando Pitágoras notou que ao pressionar uma corda a 3/4 de sua extremidade e tocando a mesma obtinha um som uma quarta acima do som original produzido pela corda sem ser pressionada, se pressionasse 2/3, obtinha um quinta acima, e 1/2, uma oitava acima. Observar o quanto a música está relacionada com a matemática é útil ao abordar, por exemplo, frações utilizando apenas um violão para chamar atenção dos alunos da educação básica, que frequentemente demonstram dificuldades nesse assunto.

É interessante perceber que muitos dos termos matemáticos são utilizados frequentemente na música, mas será que se trata da mesma coisa? Por exemplo: Em Matemática, a série harmônica é a série infinita definida como:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

Já a série harmônica (em música) é uma série infinita, composta de ondas senoidais com todas as frequências múltiplas inteiras da frequência fundamental. O nome harmônica é devido à semelhança com a proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda a vibrar: 1, 1/2, 1/3, 1/4, ...[18].

Figura 1: Série harmônica de Sol



Nota	C2	C3	G3	C4	E4	G4	(Bb4)	C5	D5	E5	(F#5)	G5	(G#5)	(Bb5)	B5	C6
Freq. (Hz)	65,41	130.81	196,22	261,63	327,03	392,44	457,85	523,25	588,66	654,06	719,47	784,88	850,28	915,69	981,10	1046,50
Freq. Temp. (Hz)	65,41	130.81	196,00	261,63	329,63	392,00	466,16	523,25	587,33	659,26	739,99	783,99	830,61	932,33	987,77	1046,50
Diferença (cents)	0	0	+2	0	-14	+2	-31	0	+4	-14	-49	+2	+41	-31	-12	0

Fonte: http://www.ime.usp.br/~kon/MAC5900/aulas/Aula2.html

A semelhança não é uma mera coincidência, de fato, a série harmônica em matemática é exatamente a mesma coisa que a série harmônica em música, porém usadas com finalidades distintas, e este não é um fato isolado, há muitos conteúdos matemáticos que podemos relacionar com a música.

Neste trabalho, trataremos sobre alguns aspectos históricos na evolução da Música, bem como a sua relação com a Matemática, será feita uma relação entre a trigonometria e som e, entre a Matemática e Música. Faremos algumas definições a cerca da Teoria Musical, pensando naqueles que são desprovidos de qualquer conhecimento no assunto. Será destacado algumas contribuições de Euler entre a Matemática e a Música, em seguida faremos algumas sugestões para o trabalho da Matemática inserida na Música, e finalmente apresentaremos algumas sugestões de atividades que podem ser feitas em sala de aula ou extraclasse, tendo a Música como motivação para ensino de diversos conceitos matemáticos.

Capítulo 1

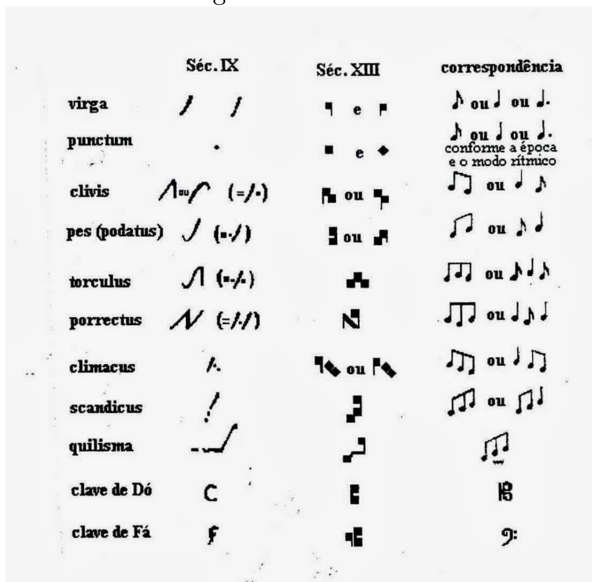
Breve Contexto Histórico

Nesse capítulo destacaremos alguns momentos em que foram encontrados registros remotos de possíveis manisfestações envolvendo Música, incluindo alguns indícios sobre o início de seus estudos e, onde supostamente possa ter sido percebido a sua relação com a Matemática e o estudo sistemático dessas relações, observado também em outras culturas.

Não se sabe ao certo o início das primeiras manifestações musicais, mas um registro bastante antigo é o Salmo 51 de Davi, registrado por volta do século X a.C., pois os Salmos era uma maneira do povo de Israel louvar à Deus.

Um osso de urso com idade entre 43.000 e 82.000 anos encontrado em 1995 nos Alpes da Eslováquia, apresentava buracos que produziam sons que possuíam elementos fundamentais da atual escala diatônica [1]. Porém os primeiros registros de notações musicais foram entre os séculos IV e V [17]. Os neumas possibilitavam ao cantor conhecer a direção da melodia, mas não indicavam com precisão as notas, foram se desenvolvendo graficamente no decorrer do século IX ao XIII, da seguinte forma:

Figura 1.1: Neumas



Fonte:http://historiadamusicaxx.blogspot.com.br/p/hca.html

Já os primeiros indícios da existência de relações entre a Matemática e a Música ocorreu por volta do século VI a.C., na escola Pitagórica, estes pensadores relacionaram intervalos musicais com o conceito matemático de *frações* [1]. Pitágoras, por sua vez, almejava entender o que chamamos hoje em dia de harmonia. A busca pela harmonia cósmica já era objeto de estudo de inúmeros cientistas da idade Média [19]. Da antiguidade até o Renascimento, conhecia-se sete planetas, nesse sentido Pitágoras definiu a conceito de harmonia das esferas, coincidindo com sete sons harmônicos.

Os gregos desenvolveram o tetracordes e depois uma escala com sete tons, Pitágoras, Arquidas, Aristoxeno, Eristóstenes desenvolveram diferentes critérios de afinidade [1]. Eristótenes elaborou a diferenciação entre intervalos calculados aritmeticamente entre 284 e 202 a.C., entre muitos outros registros pertinentes a Matemática e Música.

Os chineses desenvolveram desde os tempos antigos as sequências pentatônica contendo a partir do Dó, Ré, Mi, Sol e Lá., que corresponde as 5 primeiras notas do ciclo das quintas, comparadas aos cinco elementos da filosofia natural: água, fogo, madeira, metal e terra [6].

Capítulo 2

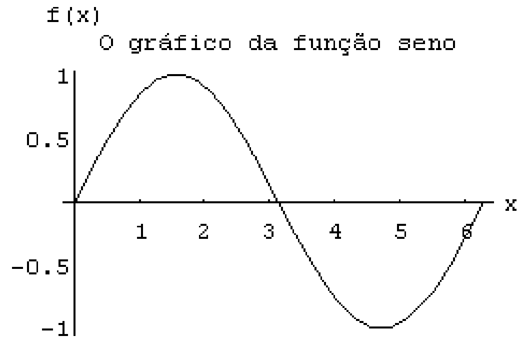
Funções Trigonométricas e o Som

Queremos entender como se comporta o som, se existe uma função trigonométrica (ou funções) que seja capaz de exprimir esse comportamento, definindo na sequência importantes caracteríscas do som e da Música.

Pitágoras foi pioneiro em estabelecer relações entre a matemática e a música, ao realizar experimentos com uma corda, percebendo que o som produzido representava uma determinada fração do som original. A partir daí conseguiu organizar uma escala musical por volta do século VI a.c.. Estudiosos musicais buscaram desenvolver novas teorias, fazendo uma aproximação mais precisa entre os sons e a matemática [8].

Ao observarmos o movimento de um ponto P sobre uma circunferência de raio 1 no sentido anti-horário, temos que seu percurso pode ser determinado por uma função seno, o qual tem valor máximo em y=1. Se representarmos esse movimento por um período indefinido teremos:

Figura 2.1: Função Seno



Fonte: http://www.mtm.ufsc.br/~taneja/MATREDE/Math2/Math21/Math21.html

Enquanto o tempo t varia de 0 a 1 segundo, o ângulo α varia de 0 a 2π, ou seja, o ponto P completou um ciclo em um segundo. O número de ciclos realizados em um segundo, denominado *frequência.*

Linck [8] desenvolveu um modelo matemático que mostram que as notas musicais podem ser representadas por ondas senoidais, que se define pela seguinte fórmula geral:

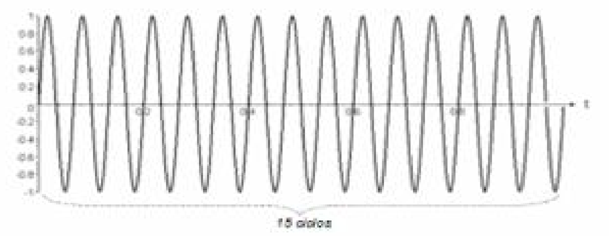
$$Y = A \cdot sen(bx + c)$$

Temos que Y é a variação da pressão; A é a amplitude máxima da onda, $b = 2\pi f$, onde f é a frequência, x representa o tempo em segundos e c a fase, que se trata do momento em que a curva senoide se inicia. Dessa forma podemos reescrever a fórmula:

$$Y = A \cdot sen(2\pi f x + c)$$

Vejamos o gráfico de uma frequência de 15 Hz:

Figura 2.2: 15 ciclos por segundo



Fonte: [16] Matemática e Música: Relações e suas implicações no Ensino da Matemática

Como é observado por Med em [9]:

> A frequência, e por consequência o período e o comprimento da onda, relacionam-se com a percepção de alturas (ou seja, o quão grave ou agudo um som é) .

Assim pode-se relacionar a frequência com algumas notas musicais, por exemplo o lá central que possui uma frequência de 440 Hz[1] . Dessa forma é importante entender o que é o som.

O Som é uma onda longitudinal que se propaga através da matéria, seja sólido, líquido ou gasoso, o qual não pode ser percebido caso não haja um meio material. É importante destacar suas propriedades. A *intensidade* é a propriedade que o som tem de ser mais forte ou mais fraco, a *Altura* é a propriedade que o som tem de ser mais grave ou agudo e o *Timbre* é a qualidade do som [8]. A amplitude é a altura da onda em relação ao seu ponto médio, que nada mais é que a intensidade do som. A *frequência* é o número de vezes que uma onda completa seu movimento e volta ao seu estado inicial dentro de uma determinada unidade de tempo, que pode ser dada em Hertz (Hz), ou seja, ela está associada com a rapidez com que uma onda se propaga, conforme [13].

[1] O $Lá_4$ com frequência de 440 Hz, é o mais utilizado na afinação de instrumentos.

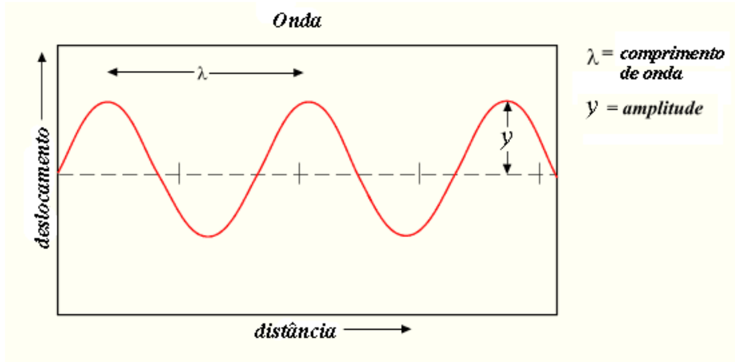


Figura 2.3: O Som
Fonte: https://anasoares1.wordpress.com/

Ratton (2002), citado por [9] destaca que o ouvido humano só capta sons entre 20 a 20.000 Hz, de modo que os sons entre 20 e 200 Hz são ditos graves e sons entre 5.000 a 20.000 Hz são ditos agudo. Os sons entre 200 e 500 Hz são chamados de sons intermediários. Chamamos de infrassons aqueles abaixo de 20 Hz e ultrassons aqueles acima de 20.000 Hz.

Observe a diferença de algumas frequências de notas musicais entre a escala Temperada e a escala Pitagórica[2].

Notas	**Temperada**	**Pitagórica**
$Dó_4$	260,7 Hz	261,6 Hz
$Dó_4\#$	278,4 Hz	277 Hz
$Ré_4$	293 Hz	294Hz
$Ré_4\#$	309 Hz	311 Hz
Mi_4	330 Hz	330 Hz
$Fá_4$	347,7 Hz	349 Hz
$Fá_4\#$	371 Hz	370 Hz
Sol_4	392 Hz	392 Hz
$Sol_4\#$	417 Hz	415 Hz
$Lá_4$	**440 Hz**	**440 Hz**
$Lá_4\#$	463,5 Hz	466 Hz
Si_4	495 Hz	494 Hz
$Dó_5$	521,4 Hz	523 Hz

Fonte: [13] Matemática e Música: De Pitágoras ao dias de hoje.

O timbre, como já foi dito anteriormente, é a qualidade do som, permitindo que façamos a distinção de uma mesma nota ao ser tocada em um piano ou em um violão, conforme [13].

[2]Veremos mais detalhes sobre as escalas Temperada e Pitagórica no Capítulo 3.

Por exemplo, formas arredondadas de ondas em gráficos da função seno produzem timbres mais suaves e formas mais pontiagudas produzem sons mais estridentes.

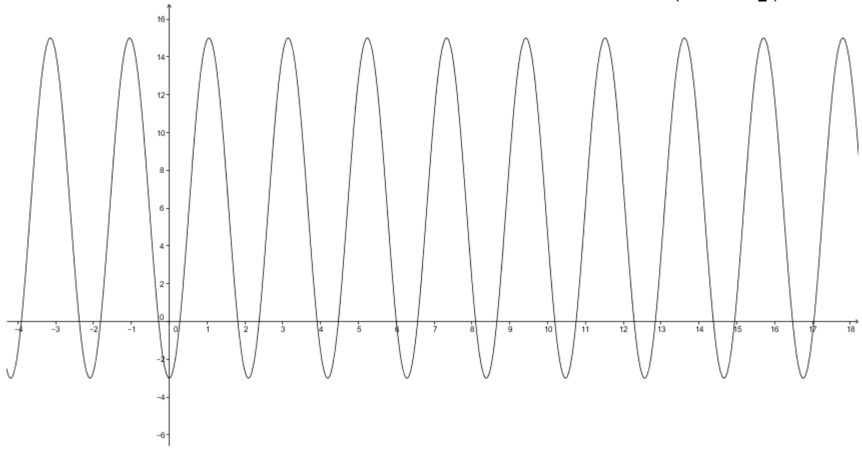
Queremos destacar o trabalho de [13], que utiliza a seguinte forma genérica: $f(x) = a + b.sen(c.x + d)$, a qual ele analisa a variação dos coeficiente a, b, c e d.

- O coeficiente a realiza uma translação, ou seja, um deslocamento vertical do gráfico.
- O coeficiente b promove uma ampliação ou redução vertical do gráfico.
- O coeficiente c promove uma ampliação ou redução horizontal do gráfico.
- O coeficiente d realiza uma translação, ou seja, um deslocamento horizontal do gráfico.

Façamos então a aplicação para:
$f(x) = 6 + 9.sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$
$a = 6$ →eixo central da onda
$b = 9$ →amplitude
$c = 3$ →relativo ao período[3]
$d = -\frac{\pi}{2}$ →relativo a fase

[3] Segundo [13] uma função é dita periódica quando sua representação gráfica se repete em intervalos regulares, chamados período. As funções periódicas comuns que são ensinadas na educação básica são as funções trigonométricas.

Figura 2.4: Gráfico da função $f(x) = 6 + 9.sen\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$



Fonte: Própria

Temos que uma série de frequências sonoras produzem a característica que nos permite reconhecer a fonte do som, essa série é denominada série harmônica. Conforme [13], ao ouvirmos uma nota, podemos identificar também uma série de outras frequências secundárias mais agudas, que não perceberemos sozinhas, esse conjunto de sons define o timbre de cada instrumento.

Série harmônica é o conjunto de sons que acompanham um som fundamental (som gerador, som principal) [9]. Em uma série harmônica os intervalos que a formam começam com oitavas justas e ficando sempre menores, ou seja:

8ª J - 5ª J - 4ª J - 3ª M - 3ª m - 3ª m - 2ª M - 2ª M - 2ª M - 2ª M - 2ª m ...

Os harmônicos da série soam com intensidades diferentes em cada instrumentos ressalta [13], porém nenhum instrumento produz um som puro, o diapasão fornece um som mais limpo que as demais formas de som.

Capítulo 3

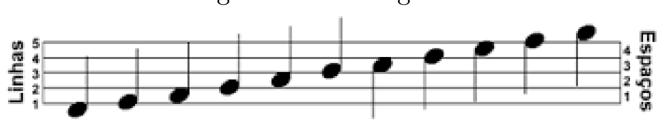
Teoria da Música

Faremos, neste capítulo, algumas definições a cerca da Teoria Musical, pensado em principiantes na música, para que deste modo, as propostas educacionais que se seguem, possam ser compreendidas.

Para estabelecer relações entre a Matemática e a Música é importante que sejam definidos alguns elementos da Música.

O pentagrama é a disposição de cinco linhas paralelas horizontais e quatro espaços, onde é possível escrever as notas musicais, contam-se as pautas e as linhas de baixo para cima [13].

Figura 3.1: Pentagrama



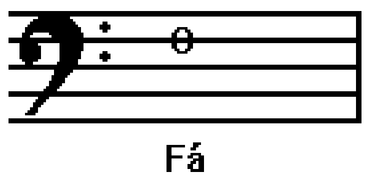
Fonte: http://www.sotutorial.com/index.php/tutoriais-teorial-musical/teoria-musical-003-pentagrama/

A palavra clave vem do latim que significa chave, atualmente utiliza-se três tipos de claves, destaca [13]:

Figura 3.2: Clave de Sol

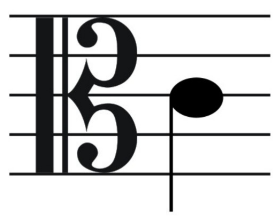
A clave de Sol marca seu lugar da nota sol na segunda linha.
Fonte: http://julianajaremczuk.blogspot.com.br/2013/07/partitura.html

Figura 3.3: Clave de Fá



A clave de Fá marca seu lugar da nota fá na 4ª linha.
Fonte: http://www.geocities.ws/asomatica/Teoria/ApostilaII.htm

Figura 3.4: Clave de Dó



A clave de Dó indica a colocação da nota dó.
Fonte: http://www.fotolog.com/celofane/68093156/

O nome de cada nota nas linhas e nos espaços, de acordo com [11], são:

Figura 3.5: Notas Musicas

Fonte: https://incentivomusical.wordpress.com/tag/pentagrama/

3.1 Semitom

Abordaremos nessa seção os tipos de semitom.

O semitom é o menor intervalo entre dois sons consecutivos quaisquer, dessa forma a soma de dois semitons teremos um tom. Como podemos grafar esses intervalos? Assim podemos definir os acidentes, são eles:

- Sustenido: eleva a altura da nota em um semitom, analogamente o dobrado sustenido eleva um tom inteiro e o triplo sustenido três semitons;
- Bemol: abaixa a altura da nota em um semitom, analogamente o dobrado bemol abaixa um tom inteiro e o triplo bemol três semitons;
- Bequadro: anula o efeito dos acidentes anteriores, sustenido ou bemol.

O Sistema Natural define com precisão o número de vibrações para cada nota e as relações entre elas, ressalta [13]. Temos que o *Coma* é a nona parte de um tom, por exemplo: entre Dó e Ré existem 9 comas, entre Dó e Dó# são 5 comas e entre o Réb e Ré também são 5 comas, logo Dó# $\neq$ Réb, já no Sistema Temperado essa diferença é eliminada, ou seja, em uma escala temperada entre Dó e Dó# são 4,5 comas e entre o Réb e Ré também são 4,5 comas, assim teremos Dó#=Réb.

Semitom é o menor intervalo adotado entre duas notas na música ocidental, que podem ser classificados em:

Natural: É formado por notas naturais, só existem dois semitons naturais, Mi - Fá e Si - Dó (esses semitons também são diatônicos).

Diatônico: É formado por notas de nomes diferentes.

Cromático: É formado por notas de nomes iguais.

Existem também os acordes, por exemplo em um teclado, ao tocarmos simultaneamente as notas dó, mi e sol, teremos o acorde de Dó representada pela letra C, são eles:

Tabela 3.1: Acordes

A	B	C	D	E	F	G
lá	si	dó	ré	mi	fá	sol

Fonte: [9] Teoria da Música.

3.2 Intervalos

Será definido nesta seção os tipos de intervalos.

Para [9], intervalo é a diferença de altura entre dois sons, a relação existente entre duas alturas, ou ainda, o espaço que separa um som do outro. Os intervalos podem ser:

- Melódicos: Formados por notas sucessivas;
- Harmônicos: Formados por notas simultâneas;
- Ascendentes: A primeira nota é mais grave que a segunda;
- Descendentes: A primeira nota é mais aguda que a segunda.

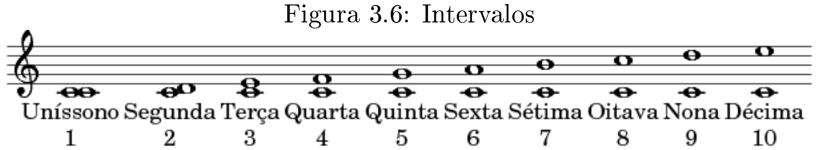
Assim, é importante estabelecer sua classificação, temos intervalos de:

- Primeira: compreende dois sons com o mesmo nome e mesma altura. Ex.: $Dó_3 - Dó_3$
- Segunda menor: É composto por um semitom. Ex.: $Dó_3 - Dó_3\#$
- Segunda maior: É composto por um tom. Ex.: $Dó_3 - Ré_3$
- Terça menor: É composto por um tom e 1 semitom, exemplo, $Dó_3 - Ré_3\#$.
- Terça maior: É composto por dois tons. Ex.: $Dó_3 - Mi_3$
- Quarta justa: É composto por dois tons e um semitom, Ex.: $Dó_3 - Fá_3$

- Quarta maior: É composto por 6 semitons, ou 3 tons, Ex.: $Dó_3 - Fá_3\#$.
- Quinta justa: É composto por 3 tons e um semitom, Ex.: $Dó_3 - Sol_3$.

- Sexta menor: É composto por 3 tons ou 2 semitons, Ex.: $Dó_3 - Sol_3\#$.
- Sexta maior: É composto por 4 tons e um semitom, Ex.: $Dó_3 - Lá_3$.
- Sétima menor: É composto por 4 tons e 2 semitons, Ex.: $Dó_3 - Lá_3\#$.
- Sétima maior: É composto por 5 tons e 1 semitons, Ex.: $Dó_3 - Si_3$.
- Oitava justa: É composto por 5 tons e 2 semitons, Ex.: $Dó_3 - Dó_4$.

Figura 3.6: Intervalos



Fonte: http://professorwagnerluciano.blogspot.com.br/

Todos esses intervalos supra citados, são intervalos simples, aqueles intervalos que possuem mais de oito notas dentro do intervalo, ou seja, com mais de 6 tons, são chamados de intervalos compostos.

3.3 Valores

Pretendemos nessa seção destacar as divisões dos valores de cada nota musical e sua respectiva pausa.

Conforme [17] a música é representada por figuras chamados notas, as quais variam de acordo com a duração do som e silêncio, e recebem nomes distintos, dessa forma é importante estudarmos sobre os valores relativos ao som e ao silêncio.

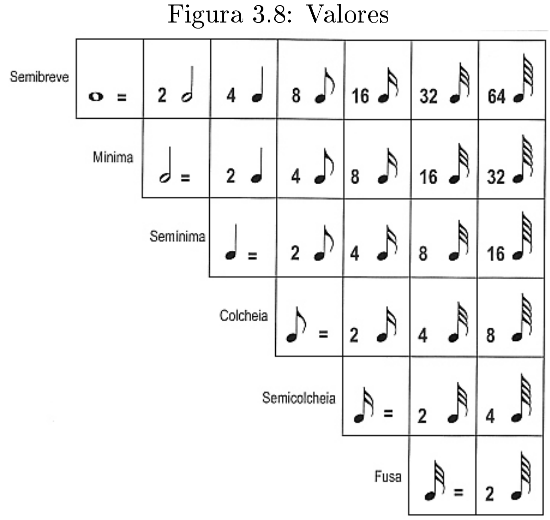
Figura 3.7: Valores

Som	Pausa	Nome e Duração
		Semibreve - 4 tempos
		Semínima - 2 tempos
		Mínima - 1 tempo
		Colcheia - 0,5Tempos
		Semicolcheia - 0,25 tempos
		Fusa - 0,125 tempos
		Semifusa - 0,0625 tempos

Fonte: http://julianajaremczuk.blogspot.com.br/2013/07/partitura.html

É importante ressaltar também a equivalência de cada nota musical em uma divisão binária de valores, de acordo com o esquema abaixo:

Figura 3.8: Valores



Fonte: http://www.portalmusica.com.br/entenda-as-figuras-ritmicas-ou-figuras-musicais/

A figura é formada por trê partes: cabeça, haste e badeirola. A haste é um traço vertical colocado à direita da figura quando para cima e à esquerda quando para baixo. Note que na divisão binária uma semibreve equivale duas mínimas, ou 4 semínimas e assim por diante, mas também podemos ter uma divisão ternária, onde uma semibreve corresponde a

3 mínimas e, a 9 semínimas, e etc., análogo ao binário, que no caso é o mais utilizado.

Segundo [9], a fórmula de compasso, colocada no começo de cada peça musical, indica o tamanho do compasso, em geral em forma de fração, onde o numerador define quantas figuras cabem no compasso e o denominador a sua espécie: $\frac{3}{4} = \frac{Quantidade}{Qualidades}$ dos valores. Dessa forma iremos analisar um trecho da seguinte obra musical.

Figura 3.9: Arranjo

Fonte: http://www.danielwolff.com.br/arquivos/File/Lute_Vihuela_Port.htm

[1] [2]

Seguindo o pensamento de Med [9], concluimos que a Teoria da Música com suas regras específicas constitui uma ciência exata.

[1]Em uma divisão binária, a unidade é divida em duas partes, conforme a figura 3.8

[2]Note que nesse arranjo, o compasso é quaternário, porém cabem apenas duas semínimas em cada compasso. Figura 3.9

Capítulo 4

Música e Matemática

Falaremos aqui sobre como foi feita a classificação das notas musicais e as frequências relacionadas a cada uma delas. Faremos ainda um paralelo entre a escala Pitagórica e a escala Temperada, destancando como foi feito o sistema de temperamento entre as notas musicais.

No século IX, Guido d'Arezzo, um monge italiano, fez a classificação dos sons, retirando de um hino a São João Batista, o seguinte esquema de [10]:

Hino a São João Batista	
UTqueant laxix	Para que possam
REsonare fibris	Ressoar as
MIra gestorum	Maravilhas dos seus feitos
FAmuli tuorum	Com largos cantos
SOLve polluti	Apaga os erros
LAbii reatum	Dos lábios manchados
Sancte **I**oannes	Ó São João

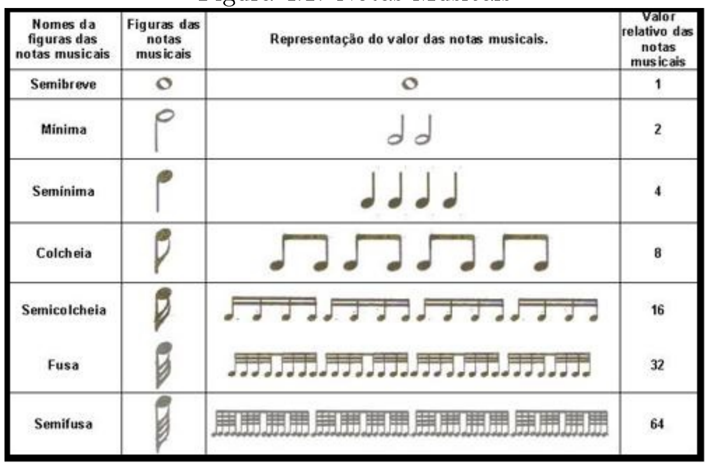
Fonte: Álgebra dos Tons [10]

Porém no século XVI Giusepe Doni, músico italiano, propôs mudar Ut para Dó, para facilitar a pronúncia, sendo então sete notas musicais, podendo variar de acordo com a altura, por exemplo, o lá central possui um frequência de 440 Hz, o lá uma oitava abaixo possui uma frequência de 220 Hz, já o lá uma oitava acima do lá central possui uma frequência de 880 Hz, ou seja, toda sequência de oitavas de uma nota específica é uma P.G. (Progressão Geométrica)[1] de razão 2.

[1]Uma P.G. é uma sequência de números a qual cada termo, começando pelo segundo, é igual ao produto entre termo anterior

Podemos relacionar também o tempo de duração de cada nota:

Figura 4.1: Notas Musicais



Nomes da figuras das notas musicais	Figuras das notas musicais	Representação do valor das notas musicais.	Valor relativo das notas musicais
Semibreve			1
Mínima			2
Semínima			4
Colcheia			8
Semicolcheia			16
Fusa			32
Semifusa			64

Fonte:http://essaseoutras.xpg.uol.com.br/figuras-musicais-duracao-do-som-pulsacao-nome-e-valor-das-notas/

Mas o que é Música? Para Med [9] A música é a arte de combinar sons simultânea e sucessivamente, com ordem, equilíbrio e proporção dentro do tempo, mas Linck [8] ressalta que a música é um sucessão de som e silêncio organizada ao longo do tempo, a qual possui melodia, harmonia e ritmo. A melodia é o conjunto de sons apresentados de forma sucessiva, na harmonia os sons se apresentam de forma simultânea e o ritmo é a ordem e a proporção que os sons são apresentados.

Pensando nisso, observamos que escala musical com sete notas repetirá a primeira nota no oitavo som, porém, mais agudo, já na a escala musical criada por Pitágoras não possuía a mesma distância entre as notas, de modo a medida que os sons evoluíam, não havia uma repetição com a mesma proporção, assim trata-se de uma escala em espiral, e não cíclica, o que dificulta a transposição de músicas para outros tons, além de nunca se coincidir com o ciclo das quintas, que trata-se de um ciclo com intervalos de quintas justas (formada por 3 tons e um semitom) entre as notas. Por exemplo, entre dó e sol há um intervalo de quinta justa, entre sol e ré também, e assim por diante.

e uma constante, chamada de razão da progressão geométrica.

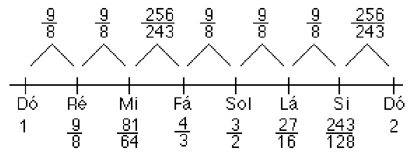
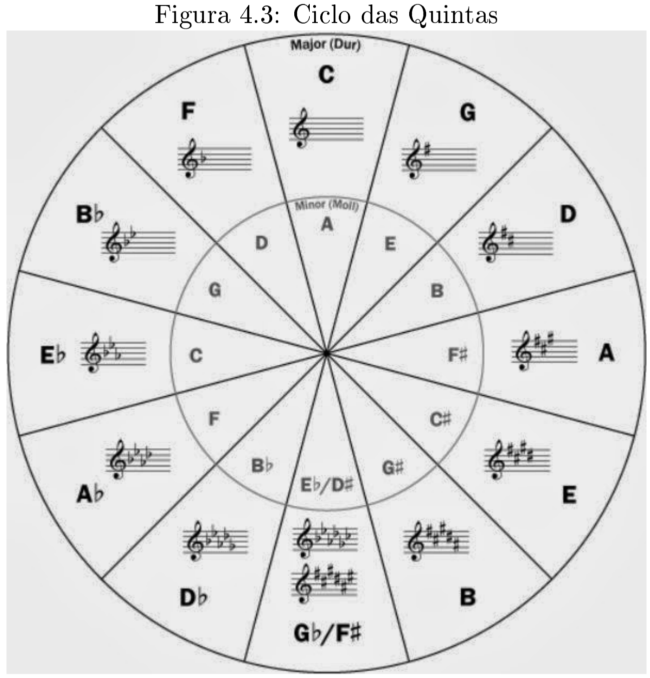


Figura 4.2: Escala Pitagórica
Fonte: http://www.dmu.uem.br/lappso/index.php?title=Taa_ch1.11

Figura 4.3: Ciclo das Quintas



Fonte: http://scherzocoimbra.blogspot.com.br/2013/10/ciclo-de-quintas.html

Euler havia percebido que na divisão aritmética feita por Pitágoras, utilizando o Percurso da Quintas, teríamos que percorrer 12 quintas para obter 7 oitavas exatas [4], mas isso só será verdade se estivermos falando de uma escala musical temperada, do contrário, admitiríamos que $3^{12} = 2^{19}$, pois um intervalo de quinta justa trata-se de 2/3 do som original, como são 12 sons, incluindo os acidentes, teríamos $\frac{3^n}{2^n} = 2^p$, com n = 12 e p = 7, o que é uma contradição, pois para que $3^n = 2^{p+n}$, então não será possível encontrar uma solução inteira.

Com isso fez-se necessário a criação da escala temperada, que trata-se da divisão das notas de uma escala musical com a mesma distância entre os sons, veja [10], acarretando assim, numa leve desafinação, que para alguns pitagóricos da época, com o temperamento da escala, a música deixaria de ser sagrada e passaria a ser humana. Dessa forma as sete notas passariam a ser 12 notas, sendo 7 notas naturais mais 5 acidentes, ou seja:

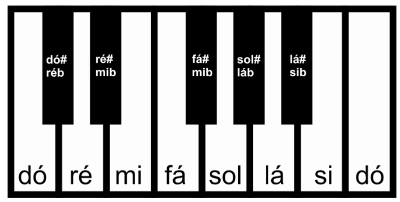
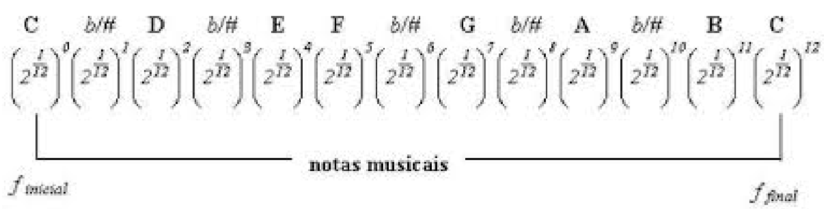


Figura 4.4: Escala musical temperada
Fonte: http://www.brunoagora.com/2012_03_01_archive.html

Para se ter um valor preciso dessa divisão dos intervalos, foi feito o seguinte cálculo: se o dó central equivale a 1, o dó uma oitava acima teria o dobro da sua altura, assim, se são 12 intervalos, teremos $i^{12} = 2$, logo $i = \sqrt[12]{2}$, o que nos dá aproximadamente i = 1,0594631, tornando mais fácil a transposição de musicas para o tom desejado. Assim temos:

Figura 4.5: Relação entre as frequências das notas



Fonte: [6] Matemática e Música

Perceba que se queremos encontrar uma frequência em relação ao Dó central por exemplo, basta multiplicar a fração que correspondente àquela nota. Se a nota Dó possui uma frequência aproximada de 264 Hz, qual será frequência de Fá dentro da mesma oitava? Basta multiplicar 264 por 4/3, ou seja, a nota fá pertencente a essa mesma oitava possui uma frequência de 352 Hz.

Essas relações são muito utilizadas por fabricantes de instrumentos musicais, explica [6], mesmo sem saberem o motivo, entendem a sua importância..

4.1 Euler e a Música

Nesse seção poderemos vislumbrar algumas das inúmeras comtribuições de Leonard Euler no campo da Teoria Musical envolvendo fortemente a Matemática.

Utilizando a Teoria Musical, Euler tenta mostrar que pode-se utilizar números para se obter intervalos consonantes, e encontrar um critério para separar consonâncias de dissonâncias, veja [7]. Dessa forma Euler definiu um grau de afabilidade d(n) para cada número natural.

Seja $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2}.p_3^{a_3}...p_m^{a_m}$, temos que $d(n) = a_1(p_1 - 1) + ... + a_m(p_m - 1) + 1$

O que Euler ainda precisava era de aplicabilidade em intervalos arbitrários, sendo assim o grau de consonância de um intervalo ou acorde deve ser o grau de afabilidade do mínimo múltiplo comum (m.m.c.) dos números envolvidos: d(a:b) = d(mmc(a,b)).

Dois exemplos podem ilustrar a definição de Euler. A terça maior 4/5:

$$\text{m.m.c}(4,5) = 20,\ d(20) = 2(2\text{-}1)+(5\text{-}1)+1 = 7$$

O acorde maior 4:5:6:

$$\text{mmc}(4,5,6) = 60\ ,\ d(60) = 2(2\text{-}1)+(3\text{-}1)+(5\text{-}1)+1 = 9$$

Euler utilizou números imaginários na função 2^xpara obter ondas que se tratava de uma determinada nota musical, descobrindo assim que cada nota depende das coordenadas do número imaginário a qual corresponde afirma [15].

Em [7] Knobloch observa que:

> Tanto a matemática como a música possuem uma linguagem técnica de símbolos que nos permite articular os padrões que criamos ou descobrimos. A música é muito mais que mínima e colcheias que dançam na pauta musical. Da mesma forma, os símbolos matemáticos ganham vida quando a matemática é tocada na mente.

Na sequência, Euler desenvolveu a função zeta, a qual utilizava para expressar algumas importantes propriedades dos números primos. Segundo [15], temos que ao misturar ao acaso os números imaginários com a função zeta de Euler, Riemann descobriu uma nova maneira de escutar os tons misteriosos dos números primos, era uma música que apenas matemáticos da época poderiam ouvir.

Conforme [7] uma série de potência é um polinômio que continua até o infinito. A análise das funções transcendentais nada mais é que uma expansão natural da álgebra. A decomposição de polinômios em fatores pode ser aplicado às funções transcendentes que são equações de grau infinito, ao buscar dedução de uma fórmula para calcular essa série que Euler definiu a função zeta:

$\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + ...$, se n for par.

Através dessa função foi possível tocar uma música que revelasse os segredos dos números primos de acordo com [15]. As senoides criadas por essa função revelavam uma estrutura harmônica oculta. O som podia ser representado por um gráfico onde o eixo horizontal representava o tempo e o eixo horizontal representava o volume, que trata-se da intensidade do som, a altura e cada momento representado. Ao reproduzir o gráfico escalonado que contava o número de primos da mesma forma, somou as alturas das funções de onda, derivando da paisagem zeta, assim ao serem tocadas ao mesmo tempo, tais ondas reproduziam o som dos números primos.

Euler também fez uma classificação sistemática dos usuais intervalos musicais de acordo com o seu valor numérico e desenvolveu uma teoria musical com significado e em ordem nesta lista. Sua tabela, em *Tentamen* (obra de Euler), envolve os números primos 2, 3 e 5. Quando usou o conjunto {2, 3, 5 e 7}, em seu memorial *Conjecture sur la raison de quelques dissonances generalement recues dans la musique* (Conjectura sobre a razão de algumas dissonâncias geralmente recebido em música), foi considerado uma novidade, pois o conjunto mais utilizado era {2, 3, 5}, que foi usado por seus predecessores na pós-Renascença no mundo ocidental.

Tabela 4.1: Classificação de Intervalos Musicais

$2/1$	Oitava Justa
$3/2$	Quinta Justa
$4/3$	Quarta Justa
$5/4$	Terça Maior
$6/5$	Terça Menor
$9/8$	Tom Maior
$10/9$	Tom Menor
$16/15$	Semitom diatônico
$25/24$	Semitom Cromático
$81/80$	Didymus Comma

Fonte: [12] Mathematics and group theory in music

O Didymus Comma, vem do latin, que significa, “Coma Gêmeo”, como existem 9 comas entre dois tons, o intervalo $81/80$ é imperceptível ao ouvido humano. Essa tabela de classificação de intervalos musicais, possui fatores primos que pertencem ao conjunto $\{2, 3, 5\}$.

Capítulo 5

Proposta de ensino de conteúdos matemáticos inseridos na Música.

Nos capítulos anteriores estabelecemos uma relação próxima entre alguns conteúdos de Matemática e Música. O que pretendemos neste capítulo é propor uma metodologia de ensino da matemática para os alunos da educação básica, quer seja em um trabalho sistemático ou esporádico, a exploração de 10 problemas em aula expositiva ou em forma de debates, os quais envolvam Matemática e Música sugeridos por [19] (Problemas e Gabarito em anexo).

Temos como objetivo mostrar a professores e alunos como é possível tornar o ensino de Matemática mais interessante e menos complicado. Não será explorado um assunto e sim daremos sugestões para que possam ser desenvolvidas atividades em sala de aula ou atividades extraclasse, assim despertando o professor para o tema aqui discutido e, a partir das ideias sugeridas, eles possam desenvolver suas próprias atividades, podendo até mesmo ser sugeridas por alunos.

Acreditamos ainda que este trabalho é importante para que os alunos percebam algumas das inúmeras relações existentes entre a Matemática e a Música, tornando o seu ensino mais prazeroso, possibilitando maior aprendizagem.

Pode ainda realizar atividades extra curriculares que envolvam Matemática e Música, onde será possível utilizar instrumentos musicais para demonstrar de forma prática essas relações, fazer alguns experimentos (exemplo: monocórdio de Pitágoras). Aos alunos que tenham interesse em aprender tocar algum instrumento, desenvolver projetos para o seu ensino sistemático e da Teoria Musical propriamente dita.

5.1 Estratégia através de vídeo aulas

Nessa seção queremos propor algumas vídeo aulas que envolvam Matemática e Música.

Observamos que na internet, por exemplo no Youtube, existem vídeo aulas disponíveis que mostram de forma muito interessante, inúmeros elementos presentes tanto na Matemática quanto na Música.

Aqui sugerimos alguns vídeo aulas que consideramos interessantes:

1. Matemática e Música partes 1 e 2, estes vídeos foram produzidos pela UNIVESP TV e apresentado pelo professor Carlos Eduardo Granja, que ressalta o fato de que na antiguidade a Música era ensinada como uma ciência exata, mostrando a sua evolução ao longo da história, bem como os principais filósofos e matemáticos que tiveram grandes contribuições nessa área. Faz alusões acerca de assuntos diversos nos campos da Matemática e Música, abordando de forma dinâmica cada tema. Essas vídeo aulas estão disponíveis nos seguintes links:

- <https://www.youtube.com/watch?v=ETPzsN-vgE8>
- <https://www.youtube.com/watch?v=GFZngfZU6Yk>

2. Matemática em toda parte, esse vídeo sugere algumas propostas para o ensino da Matemática de forma mais criativa.

Este vídeo está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Z93YDhKfgkc>

3. Arte e Matemática, estabelece paralelos entre a Matemática Pura e a Matemática Aplicada, Cinema e Teatro, Escultura e Pintura, e entre os diferentes tipos de música. Define algumas características do som e as relações existentes entre a Matemática e a Música.

Este vídeo está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=8X53JhvHxO0>

4. Matemática da Música, afirma que a Música é um exercício de aritmética secreto, segundo Leibniz, filósofo e matemático, e explorando músicas clássicas e populares para mostrar a presença da Matemática na Música.

Este vídeo está disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=IV_SajId4XI>

Pode-se ainda explorar o editor de gráficos Geogebra na construção de gráficos relacionados aos sons e às funções trigonométricas, dessa forma os alunos poderão visualizar as funções no plano, em três dimensões ou através de animações. [1]

5.2 Uma proposta em 4 aulas

Queremos sugerir nessa seção o trabalho realizado por Teixeira em [17], como proposta de ensino em 4 aulas adaptadas.

Aula 1 - Conhecendo o violão: Apresentar, aos discentes um breve texto, ressaltando as partes de um violão e apresentá-lo aos mesmos de forma que cada discente possa conhecer um violão com as "suas próprias mãos". As cordas de um violão possuem espessuras diferentes e produzem notas diferentes. O violão em geral é afinado de forma que contando as cordas de cima para baixo, tenha a seguinte sequência: MI, SI, SOL, RÉ, LÁ, MI. Observe que temos duas notas mi, no entanto, as mesmas possuem alturas diferentes, sendo uma mais aguda do que a outra.

Atividade 1

Os alunos poderão "conhecer"o violão com as suas próprias mãos, recomenda-se que o discente possa "tocar"o violão. Em seguida o aluno, com o auxílio de um diapasão eletrônico, de preferência embutido no próprio violão, afinará o violão.

Aula 2 - Relação entre a Matemática e a Música

Apresentar aos discentes um texto (anexo pág. 57) e aplicar os problemas:

Problema 1:

Com o auxílio de uma fita métrica, meça o comprimento da corda de um violão, de modo que a medida seja feita da pestana (início) até o rastilho (fim). Calcule o comprimento da corda que produz a oitava, a quarta e a quinta de cada uma das seis cordas do violão. Descubra, utilizando um afinador, quais são as notas produzidas pelos respectivos comprimentos. Anote os resultados na tabela abaixo:

[1] O Geogebra está diponível para download no site: https://www.geogebra.org/download

Tabela 5.1: Relação entre o Comprimento e a Nota

	Comprimento			Nota		
Corda	Oitava	Quarta	Quinta	Oitava	Quarta	Quinta
Mi_2						
$Lá_2$						
$Ré_3$						
Sol_3						
$Lá_3$						
Mi_4						

Fonte: [17]Matemática na Música A Escala Cromática e as Progressões Geométricas

Aula 03 - Rever os principais conceitos e definições de Progressão Geométrica.

Atividade 01

Para combater certa enfermidade, Emanuel Carlos está realizando um tratamento no qual deve ingerir doses diárias de certo medicamento durante cinco dias. Veja na tabela abaixo, a quantidade de medicamento que Emanuel Carlos ingeriu em cada dia. Verifique se as doses diárias ingeridas por Emanuel Carlos formam um Progressão Geométrica, conforme os dias vão se passando.

Tabela 5.2: Medicamento

Dia	Medicamento (ml)
1	16
2	32
3	64
4	128
5	256

Fonte: [17] Matemática na Música A Escala Cromática e as Progressões Geométricas

Aula 04 - Progressão Geométrica nos Trastes de um Violão.

Para esta atividade o aluno necessita de materiais básicos para anotações e um instrumento de medida milimetrado.O professor deve pedir aos alunos que meçam as distâncias de 20 trastes até o rastilho do violão. Em seguida os alunos devem anotar os resultados obtidos em uma tabela. Após as anotações, o professor deve pedir aos alunos que verifiquem se as medidas obtidas formam uma P.G., determinando aproximadamente, a razão da mesma.

5.3 Proposta do autor

Para finalizar, queremos propor algumas questões para iniciantes na música, com o apoio da matemática.

Observe a seguinte peça musical:

Figura 5.1: Asa Branca

Fonte: http://xandi02.blogspot.com.br/

1. O que significa a fração na armadura da clave?

R. Significa que em cada compasso cabem 4 semínimas, ou duas mínima, ou ainda, uma semibreve e, que o compasso é quaternário.

2. Quantas colcheias cabem em cada compasso?

R. Como a colcheia vale a metade da semínima, então caberão 8 colcheias em cada compasso em uma tabela de valores binários.

3. Existe um erro no compasso 12, qual?

R. Há mais notas do que cabem nesse compasso, possui 4 semicolcheias a mais.

4. Que fração da semibreve equivale uma colcheia?

R. $\frac{1}{8}$

Acreditamos que um trabalho diferenciado em Matemática com foco na Música, poderá proporcionar um aprendizado de qualidade aos alunos, além de fazer com que se interessem muito mais pela Matemática.

Considerações Finais

Nesse capítulo queremos trazer à luz sobre a importância da Matemática em nossas vidas, gostando dela ou não, ela sempre nos acompanhará, propondo que ao estudar música seja possível facilitar o estudo da Matemática, que é tão útil para todos nós. Queremos relatar aqui também nossa experiência a frente do projeto “Coral Escolar” que foi muito rico e trouxe muitos benefícios para comunidade escolar, mas que infelizmente teve que ser interrompido.

A Matemática está em toda parte, nas artes, na construção, na natureza e em nosso cotidiano, no entanto Gardner [5] coloca que frequentemente pessoas com habilidades matemáticas demonstram interesse na Música.

Ao estudar Música, identifiquei a necessidade de haver uma compreensão significativa em Matemática, pois se o indivíduo tem dificuldade no aprendizado de Matemática, consequentemente apresentará dificuldade no aprendizado da Teoria Musical. Propomos um trabalho diferenciado envolvendo essas duas áreas, de modo que ao estudar Música, o aluno se interesse pela Matemática.

Ao desenvolver o projeto "Coral Escolar" onde trabalho, que teve duração de 2 anos, tive a oportunidade de ensinar um pouco de Teoria Musical aos alunos envolvidos no projeto, de forma que os próprios alunos observaram a proximidade entre música e a matemática.

Pude observar também que alguns alunos com déficits de aprendizagem em matemática, melhoraram consideravelmente. Os alunos do projeto, de um modo geral, se mostraram mais concentrados e preparados para assumir determinadas responsabilidades.

A música é envolvente e tanto quanto a Matemática, ela está muito presente em nossas vidas, sendo apreciada pelos mais variados grupos étnicos, sociais e culturais.

Ao realizar esse trabalho, observamos que há poucos estudos sobre o assunto, mesmo percebendo que desde muito antes Pitágoras essas conexões foram observadas, assim o desenvolvimento de um trabalho sistemático ou em eventuais projetos, explorando este contexto Matemática/Música poderá trazer resultados surpreendentes.

Anexos

Problemas

Nessa seção apresentaremos uma miscelânea de exercícios que acreditamos que possam auxiliar o professor que esteja interessado em utilizar a Música no ensino da Matemática.

Os problemas foram retirados de [13]. Foram feitas algumas adaptações nos enunciados.

1. Coloque e encaixe as frações $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \frac{64}{81}$ e $\frac{128}{243}$ em ordem decrescente na sequência de notas abaixo:

$Dó_1$ $Ré_1$ Mi_1 $Fá_1$ Sol_1 $Lá_1$ Si_1 $Dó_2$

1 ___________________________ $\frac{1}{2}$

2.Descubra que frações da corda correspondem ao $Ré_3$ e o $Lá_4$, e generalize para que se possa encontrar qualquer nota em qualquer oitava.

3.O processo utilizado por Pitágoras para encontrar as 7 notas é chamado de *Ciclo das Quintas,* ou seja, encontrou a quinta da primeira nota e as quintas de cada quinta até passar pelas 7 notas. Seja um corda de comprimento 1, representando a nota $Dó_1$, complete a seguinte sequência de quintas:

$Dó_1$, _____, _____, _____, _____, _____, _____

4. Partindo da nota Dó, cuja a frequência 65 Hz, calcule:

A) As frequências de $Dó_2$ e $Dó_3$

B) As frequências de Sol_1 e Mi_2

C) Deduza a fórmula para generalizar o cálculo da frequência da oitava em relação a qualquer nota dada.

5. Interpolar dois meios entre 5 e 40, é o mesmo que intercalar dois números entre esses, de forma que a razão entre cada termo seja a mesma. Em linguagem matemática seria (5, x, y, 40)

A)Calcule x e y.

B)Calcule o 5º e o 6º termo.

C) Denominando os termos da sequência $a_,$, a_2, a_3... , encontre uma forma de generalizar o problema, ou seja, calcule o a_n.

6. Note que as casas do violão vão ficando mais estreitas à medida que se avança no braço, isso ocorre pois a frequência e o comprimento da corda são grandezas inversamente proporcionais, ou seja, a medida que a corda diminui a frequência aumenta.

A) Suponha que um violão cuja primeira casa tem 3,6 cm de largura, qual a deverá ser a largura da 2ª casa? E a 4ª casa?

B) Encontre a fórmula para calcular a largura de uma casa qualquer de um violão. Denomine l_1, l_2, ... l_n a largura das casas.

7. A figura abaixo mostra um violão. A 5ª corda, de baixo para cima, deve ser afinada em Lá, cuja a frequência é 110 Hz. A partir dela, afina-se as outras cordas.

Figura 5.2: Violão

Fonte:http://musicaplena.com/violao-uma-grande-aventura/

As notas do violão, de baixo para cima, são Mi, Si, Sol, Ré, Lá, Mi.

O esquema abaixo mostra a posição das três últimas cordas (mais graves) do violão, numa sequência de oitavas. lembre-se que a gama de frequência audíveis compreende 10 oitavas (0 a 9), portanto nessa sequência, a 5ª corda corresponde ao $Lá_2$.

Tabela 5.3: Frequências

6ª					5ª					4ª	
Mi_2	Fá	Fá#	Sol	Sol#	$Lá_2$	Lá#	Si	Dó	Dó#	$Ré_3$	Ré#
?					110					?	

Fonte: [13] Matemática e Música: de Pitágoras ao dias de hoje.

A partir da razão da P.G. calculada no problema do temperamento da escala, calcule a frequência das notas das cordas do violão tomando a 5ª corda - Lá 110 Hz - como referência.

8. Utilizando o programa *geogebra,* esboce o gráfico das seguintes funções:

A) $f(x) = sen(x) + sen(2x)$

B)$f(x) = sen(x) + sen(2x) + sen(3x)$

C) Definindo a função $f(x) = sen(x)$como sendo a representação de uma nota musical, o que seria a função $f(x) = sen(2x)$ em relação a essa nota? E a função $f(x) = sen(3x)$?

9. Ainda explorando o programa *geogebra,* esboce o gráfico da seguintes funções:

A) $f(x) = sen(x)$ e $f(x) = 2sen(x)$

B) Os gráficos representam a mesma nota? Explique o que você entendeu.

C) Esboce o gráfico da função $f(x) = xsen(x)$, para $x > 0$. O que você pode concluir?

10. Suponha que a nota Sol_1,de frequência aproximada 100 Hz, seja tocada em dois instrumentos musicais distintos.

A) Quais são as frequências dos harmônicos superiores?

B) Tomando os 4 primeiros harmônicos, esboce os gráficos das funções que representam a referida nota tocada nos dois instrumentos:

Instrumento A:

$$f(x) = 10sen(2\pi.100.x) + 4sen(2\pi.f_2.x) + 2sen(2\pi.f_3.x) + 1sen(2\pi.f_4.x)$$

Instrumento B:

$$f(x) = 10sen(2\pi.100.x) + 2sen(2\pi.f_2.x) + 1sen(2\pi.f_3.x) + 0,5sen(2\pi.f_4.x)$$

C) Suponha que os instrumentos sejam flauta e violino, analisando os gráficos construídos, qual representa o som emitido pela flauta e qual representa o violino? Por que?

Gabarito

Apresentaremos nessa seção a solução dos problemas propostos por [13].

1. Pode-se resolver esse problema de duas formas: Reduzindo as frações a um mesmo denominador (mmc), ou calculando os valores aproximados utilizando calculadora, assim temos:

$Dó_1\ Ré_1\ Mi_1\ Fá_1\ Sol_1\ Lá_1\ Si_1\ Dó_2$

1 —- $\frac{8}{9}$—-$\frac{64}{81}$—-$\frac{3}{4}$—-$\frac{2}{3}$—$\frac{16}{27}$—$\frac{128}{243}$ –$\frac{1}{2}$

2. $Ré_3 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{8}{9} = \frac{2}{9}$

$Lá_4 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{16}{27}$

Genericamente, qualquer nota X_n, de oitavas superiores, pode ser obtida por:

$Dó_n = \left(\frac{1}{2}\right).Dó_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.Dó_1$

$Ré_n = \left(\frac{1}{2}\right).Ré_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.Ré_1$

$X_n = \left(\frac{1}{2}\right).X_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.X_1$

3. As quintas podem ser obtidas da seguinte maneira:

$\mathbf{Dó_1}$ $Ré_1\ Mi_1\ Fá_1$ $\mathbf{Sol_1}$

$\mathbf{Sol_1}$ $Lá_1\ Si_1\ Dó_2$ $\mathbf{Ré_2}$

$\mathbf{Ré_2}$ $Mi_2\ Fá_2\ Sol_2$ $\mathbf{Lá_2}$

$\mathbf{Lá_2}$ $Si_2\ Dó_3\ Ré_3$ $\mathbf{Mí_3}$

$\mathbf{Mí_3}$ $Fá_3\ Sol_3\ Lá_3$ $\mathbf{Si_3}$

$\mathbf{Si_3}$ $Dó_4\ Ré_4 Mi_4$ $\mathbf{Fá_4}$

As Quintas são: $\mathbf{Dó_1}$, $\mathbf{Sol_1}$, $\mathbf{Ré_2}$, $\mathbf{Lá_2}$, $\mathbf{Mí_3}$, $\mathbf{Si_3}$, $\mathbf{Fá_4}$

4. A) $65x2 = 130Hz$ - $Dó_2$

$65x2^2 = 260Hz$ - $Dó_3$

B) $Sol_1 = \frac{3}{2}.Dó_1 = 65.\frac{3}{2} = 97,5$ Hz

$Mi_2 = 2x\frac{81}{64}.Dó_1 = \frac{81}{32}.65 = 164,5$ Hz

C) $Dó_n = 2.Dó_{n-1} = 2^{n-1}.Dó_1.X_n = X_{n-1} = 2^{n-1}.X_1$

5. A) O professor pode mostrar ao aluno que, intuitivamente, percebe-se que a razão da sequência é 2: (5, 5.2, 5.2.2, ...). Mas também pode ser resolvido de modo formal, denominando uma constante multiplicativa k:

$x = 5k$

$y = 5k^2$

$40 = 5k^3 \Longrightarrow k^3 = 8 \Longrightarrow k = 2$

logo, $x = 5.2 = 10$ e $y = 5.2^2 = 20$

B) Os próximos termos são $a_5 = 5.2^4 = 80$ e $a_5 = 5.2^5 = 160$

C) Tomando $a_1 = 5$, genericamente, pode-se escrever:

$a_n = 5.2^{n-1} = a_1.k^{n-1}$

6. A) $l_2 = \frac{l_1}{1,06} = \frac{3,6}{1,06} \approx 3,4$cm

$l_5 = \frac{l_1}{1{,}06^4} = \frac{3{,}6}{1{,}26} \approx 2,86\text{cm}$

B) $l_n = \frac{l_1}{(1{,}06)^{n-1}}$

Pode-se perceber que há um problema por trás desse problema. Mostramos que os comprimentos de corda e as frequência estão em progressão geométrica. Mas a largura das casas do violão também estão? Faremos uma demonstração para provar que tanto as casas quanto o comprimento das cordas estão em progressão geométrica (P.G.) a uma mesma razão.

Demonstração:

Seja c o comprimento útil da corda solta. Denotemos c_1o comprimento útil da corda pressionada na 1ª casa do violão, c_2, o comprimento da mesma pressionada na 2ª casa, ..., temos que a largura l_1 da 1ª casa serrá a diferença entre c e c_1, e assim por diante.

Sabe-se que os comprimentos de corda estão em P.G. decrescente de razão $q = 2^{-\frac{1}{12}} \approx \frac{1}{1{,}06}$, então, em linguagens matemáticas, temos:

$l_1 = c - c_1$

$l_2 = c_1 - c_2 = c.q - c_1.q = (c - c_1).q = l_1.q$

.

.

.

$l_n = c_{n-1} - c_1 = c.q^{n-1} - c_1.q^{n-1} = (c - c_1).q^{n-1} = l_1.q^{n-1}$

Portanto, as larguras estão em P.G. da mesma razão $q \approx \frac{1}{1{,}06}$

7. Tomando a $Lá_2 = 110$ Hz como referência:

A 6ª corda, Mi_2, está 2,5 tons ou 5 semitons abaixo. Logo,

$Mi_2 = \frac{110}{\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5} = 82,4$ Hz

A 5ª corda é o $Lá_2 = 110$.

A 4ª corda, $Ré_3$, está 2,5 tons ou 5 semitons acima. Logo,

$Ré_3 = 110.\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^5 = 146,8$ Hz

A 3ª corda, Sol_3, está a 5 tons ou 10 semitons acima, Logo,

$Sol_3 = 110.\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{10} = 196$ Hz

A 2ª corda, Si_3, está a 7 tons ou 14 semitons acima, Logo,

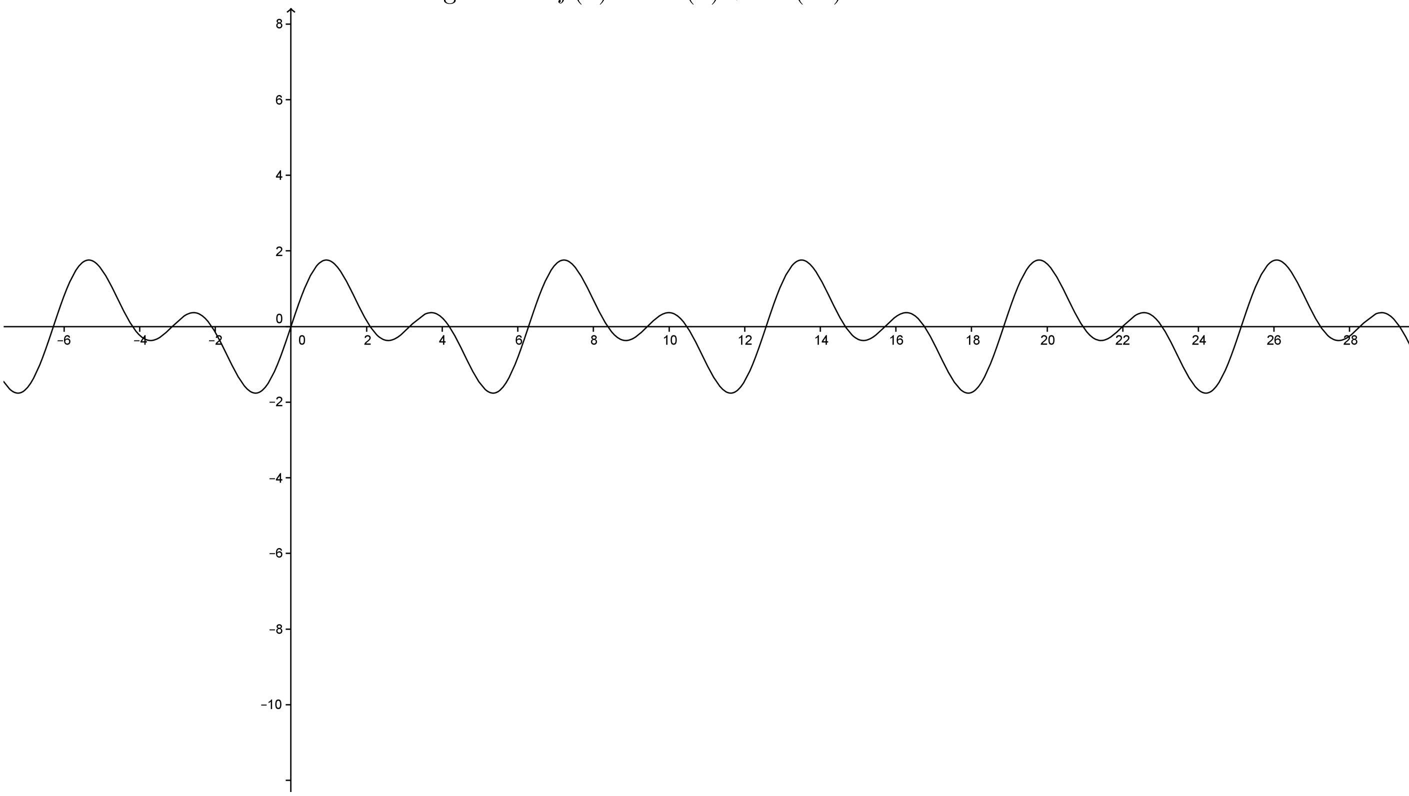
$Si_3 = 110.\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^{14} = 246,9$ Hz

Note que a 1ª corda, Mi_4, tem o dobro da frequência do Mi_3, que por sua vez tem o dobro da frequência do Mi_2, logo o Mi_4tem 4 vezes a frequência do Mi_2, logo

$Mi_4 = 329,6$ Hz

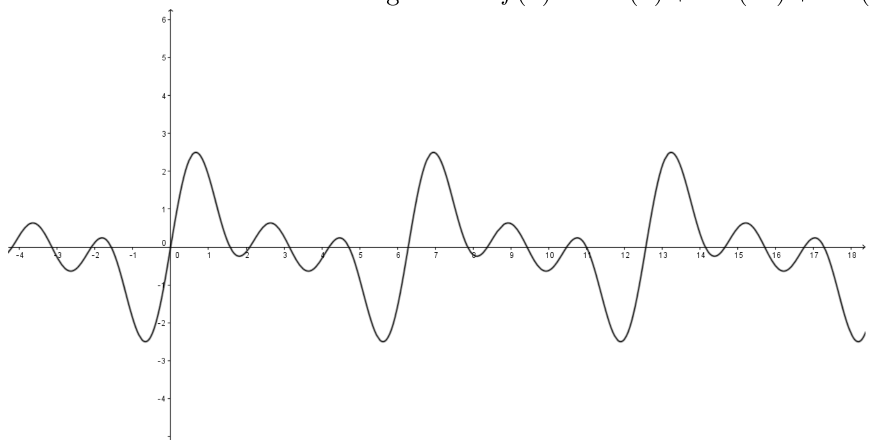
8. A) e B)

Figura 5.3: $f(x) = sen(x) + sen(2x)$



Fonte: Própria

Figura 5.4: $f(x) = sen(x) + sen(2x) + sen(3x)$



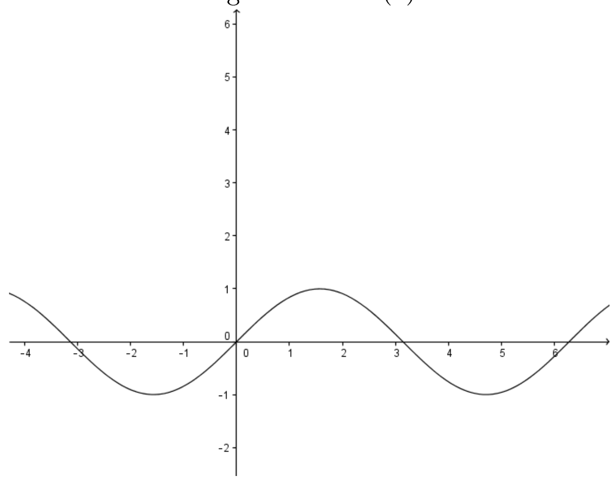
Fonte: Própria

C) Os gráficos acima mostram que a função $sen(x)$ é a nota escolhida. A Função $sen(2x)$ é a oitava e a função $sen(3x)$ é a quinta oitava, porque a frequência da quinta de uma nota é $\frac{3}{2}$ de sua frequência. Tomando o intervalo de uma oitava, [1,2], para transpor a nota que se encontra no intervalo de $[2^1, 2^2]$, basta dividi-la por 2.

Analogamente, que nota seria o $8^{\underline{o}}$ harmônico da série, isto é: sen(9x)? Basta observar que $9 \in [2^3, 2^4]$ e, portanto, devemos dividir 9 por 2^3. A fração $\frac{9}{8}$ corresponde à $2^{\underline{a}}$ em relação a tônica, a frequência fundamental tocada.

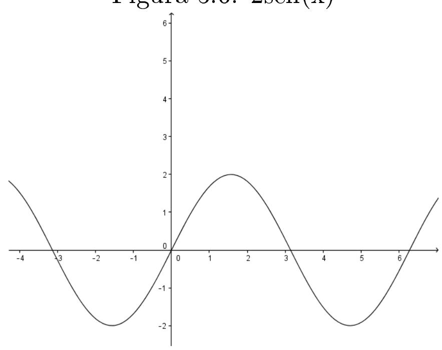
9. A)

Figura 5.5: Sen(x)



Fonte: Própria

Figura 5.6: 2sen(x)

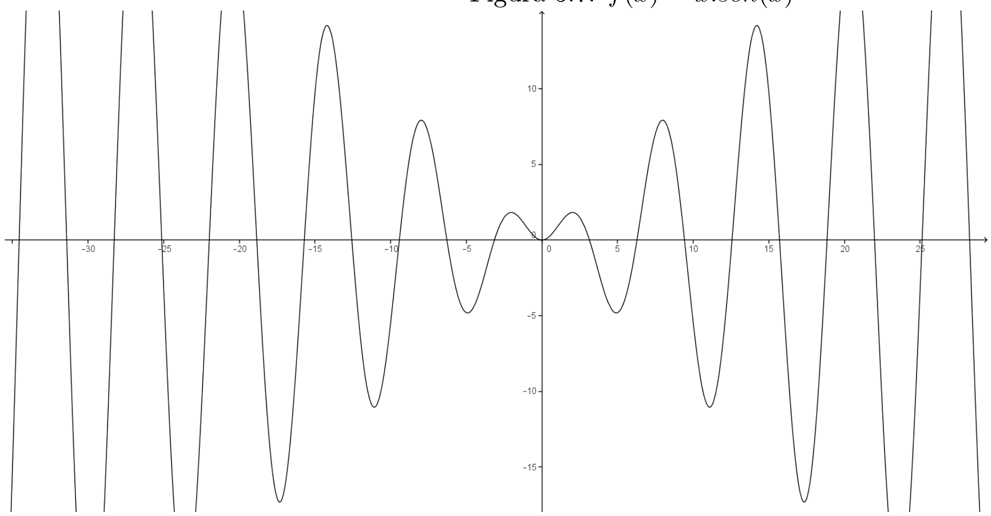


Fonte: Própria

B) Sim, representam a mesma nota. O parâmetro que variou foi a intensidade do som, o volume.

C)

Figura 5.7: $f(x) = x.sen(x)$



Fonte: Própria

O gráfico sugere um aumento indefinido de som.

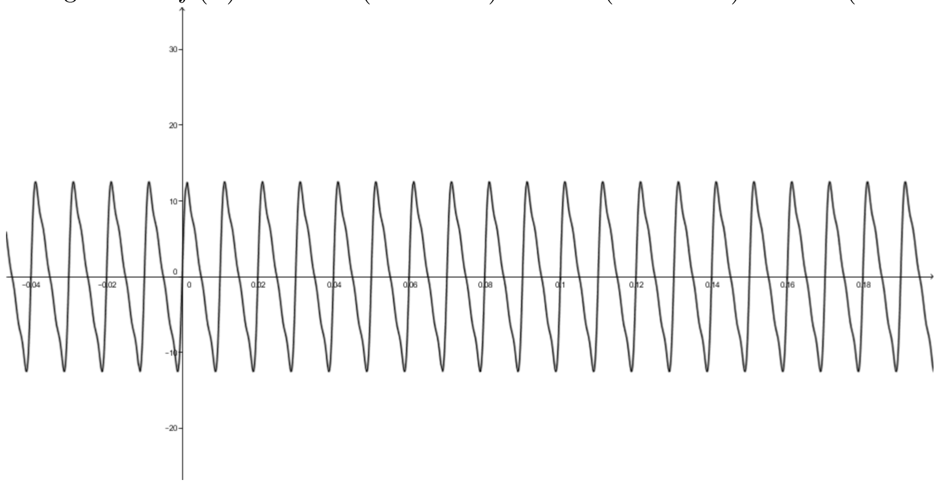
10. A) As frequências são: $f_2 = 100.2 = 200$ Hz, $f_3 = 100.3 = 300$ Hz, $f_4 = 100.4 = 400$ Hz, ..., $f_n = 100.n = 100n$

B) As funções são:

Instrumento A:

$$f(x) = 10sen(2\pi.100.x) + 4sen(2\pi.f_2.x) + 2sen(2\pi.f_3.x) + 1sen(2\pi.f_4.x)$$

Figura 5.8: $f(x) = 10sen(2\pi.100.x) + 4sen(2\pi.200.x) + 2sen(2\pi.300.x) + 1sen(2\pi.400.x)$

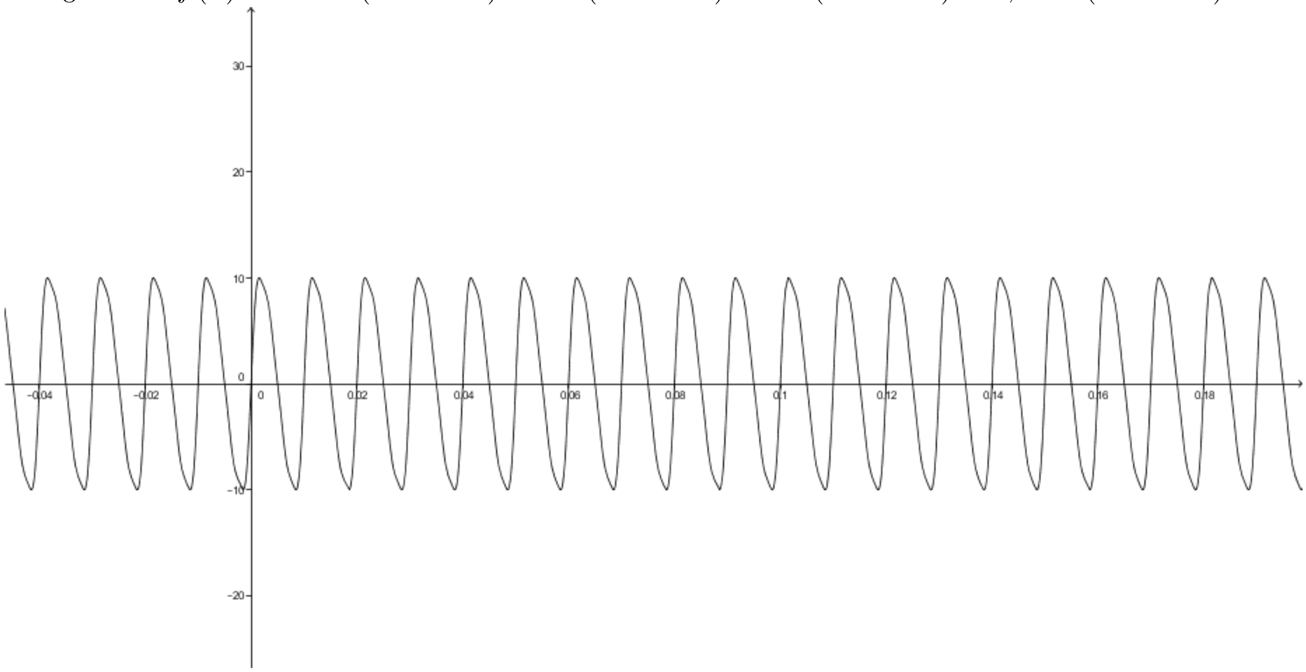


Fonte: Própria

Instrumento B:

$$f(x) = 10sen(2\pi.100.x) + 2sen(2\pi.f_2.x) + 1sen(2\pi.f_3.x) + 0,5sen(2\pi.f_4.x)$$

Figura 5.9: $f(x) = 10sen(2\pi.100.x) + sen(2\pi.200.x) + sen(2\pi.300.x) + 0,5sen(2\pi.400.x)$



Fonte: Própria

C) O 1º caso representa a nota tocada no violino, pois apresenta harmônicos superiores mais intensos, porém o 2º trata-se da flauta, pois é pobre em harmônicos superiores.

Instrumentos Temperados

Nessa seção daremos exemplos de instrumentos temperados, que basicamente trata-se de instrumentos que possuem divisões, por exemplo o violão possui trastes para mostrar onde devem ser feitas as divisões.

Figura 5.10: Violão 1

Fonte: http://www.cifraclub.com.br/noticias/colunas/j-lutheria-p14.html

Figura 5.11: Piano

Fonte:http://cursopianoparatodos.com/?attachment_id=432

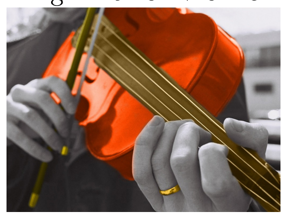
Figura 5.12: Flauta transversal

Fonte: www.consevatorioorpheus.com.br

Instrumentos Não Temperados

Nessa seção daremos exemplos de instrumentos não temperados. O violino é ótimo exemplo, note que ele é um instrumento não temperado, pois não possui divisões.

Figura 5.13: Violino



Fonte: http://escolaimb.com.br/cursos/violino-curso-escola-musica-conservatorio-butanta-campo-limpo/

Figura 5.14: Cello

Fonte:http://camerataversatil.com.br/blog-instrumentos.html

Figura 5.15: Flauta Doce

Fonte:http://educacao.umcomo.com.br/articulo/como-saber-que-flauta-doce-comprar-391.html

Texto referente à aula 2, Capítulo 5.

Não se sabe ao certo sobre a origem da Música, mas sabe-se que desde os homens das cavernas a mesma esteve presente, em forma de gemidos e através de sons de percussão, que eram obtido com o "bater" das mãos nos corpos ou em objetos. Do mesmo modo, não se tem certeza de quando o homem começou a relacionar a Matemática e a Música, mas pelo menos em registros, tal relação teria sido observada pelo Matemático e Filósofo grego Pitágoras no século VI a.C.

Pitágoras fez observações em um monocórdio, instrumento semelhante a um violão com apenas uma corda, e fez correspondências com frações aos sons emitidos com a vibração da corda. Observou que, alguns comprimentos de cordas produziam sons que eram agradáveis. Pitágoras estabeleceu as Consonâncias Perfeitas, ou seja, oitava, quinta e quarta, que são notas produzidas pelas frações 1/2 , 2/3 e 3/4 do comprimento da corda "solta". Com o passar do tempo surgiram outras frações que produziram sons que também são agradáveis, surgindo a necessidade de se dar nomes a estes sons que seriam notas musicais. As notas musicais, depois de um processo de nomeação, atualmente tem-se nomes de DÓ, RÉ, MI, FÁ SOL, LÁ e SI tendo também uma correspondências com letras C, D, E, F, G, A, B.

Referências Bibliográficas

[1] ABDOUNUR, O. J., **Matemática e Música: O pensamento analógico na construção**. 3ª edição, editora Escrituras, São Paulo –SP. 2003.

[2] ANDRADE, M., **Namoros com a medicina.** 3ª edição, Editora Terapêutica Musical. São Paulo – SP, 1972.

[3] BASTIAN, H. G., **Música na escola: A contribuição do ensino da música no aprendizado e no convívio social da criança**. Editora Paulinas, São Paulo – SP, 2009.

[4] CAMARGOS, C. B. R., **Música e Matemática: A harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem.** 2010. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Ouro Preto – MG.

[5] GARDNER, H., **Inteligências Múltiplas: A Teoria na prática.** Porto Alegre: Artmed, 1995, Reimpressão 2007.

[6] JULIANI, Juliana Pimentel, **Matemática e Música.** Universidade Federal de São Carlos, São Carlos-SP. 2003.

[7] KNOBLOCH, E., **Euler transgressing limits: The Infinite and Music Theory**, Quaderns d'Història de l'Enginyeria volum IX, Berlin, 2008.

[8] LINCK, Fábio Gomes, **Música e Matemática: Experiências didáticas em dois diferentes contextos**. UFRS - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre - RS. 2010.

[9] MED, Bohumil, **Teoria da música**, $4^{\underline{a}}$ edição, Editora Musimed, Brasília - DF - 1996.

[10] MORAIS, Marcos Vinícius Gomes, **Álgebra dos Tons**, disponível em: <https://www.ucb.br/sites/100 /103/... /MarcosViniciusGomesMorais.pdf>, acesso: 09/11/2015 às 10:23.

[11] NOBRE, José. **Apostila de Teoria Musical,** Projeto Fortalecimento Musical, Secretaria Estadual da Cultura - SECULT, Ceará - 2006.

[12] PAPADOPOULOS, Athanase. **Mathematics and group theory in music**,vol. II (ed. L. Ji, A. Papadopoulos and S.-T. Yau), H.. 2014.

[13] PEREIRA, Marcos, **Matemática e Música: De Pitágoras aos dias de hoje.** UNIRIO. Rio de Janeiro - RJ. 2013.

[14] ROSSI, Sueli da Silva, **Funções Trigonométricas e os Sons Musicais**, UEL - Universidade Estadual de Londrina, Londrina - SP - 2008.

[15] SALTOY, Marcus du, **The Music of Prime**, Special Markets Department, HarperCollins Publishers, New York, - USA - 2003.

[16] SOUZA, Luciana Gastaldi e Sardinha, et al, **Matemática e Música: Relações e sua implicações no ensino da Matemática**, disponível em: http://www.uel.br/ pos/ musica/ pages/arquivos/2009-Minicurso-Matem%C3% A1tica%20e%20M%C3% BAsica%20(ANAIS-XXV% 20semana%20da%20matem%C3%A1tica).pdf, acesso: 09/11/2015 às 10:27.

[17] TEIXEIRA, Alexandre Carlos da Silva, **Matemática na Música A Escala Cromática e as Progressões Geométricas**, UFG, Catalão - GO, 2015.

[18] WIKIPÉDIA, **Série Harmônica (música)**, disponível: <http://pt.wikipedia.org/wik i/S%C3%A 9rie_harm% C3%B4nica _(m%C3%BAsica)>, acesso: 15/05/14 às 19:23.

[19] WIKIPÉDIA, **Série Harmônica (matemática)**, disponível: <http://pt.wikipedia .org/wiki/S%C 3%A9rie_ harm%C3% B3nica_(matem%C3%A1tica)>, acesso: 15/05/14 às 19:23.