



Universidade Federal de Goiás  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



# ESTUDO DA GEOMETRIA FRACTAL CLÁSSICA

Ricardo Anselmo Zanotto

Jataí

2015

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

Autor (a):	Ricardo Anselmo Zanotto		
E-mail:	proff.raz@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página?	<input checked="" type="checkbox"/> Sim	<input type="checkbox"/> Não	
Vínculo empregatício do autor	Professor		
Agência de fomento:	Prefeitura Municipal Montividiu	Sigla:	
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	22.175.429/0001-52
Título:	ESTUDO DA GEOMETRIA FRACTAL CLÁSSICA		
Palavras-chave:	Fractal, Geometria não-euclidiana, Estudo dos fractais, Conteúdos e fractais, Aplicações de fractais		
Título em outra língua:	STUDY OF CLASSIC FRACTAL GEOMETRY		
Palavras-chave em outra língua:	Fractal, Non-Euclidean Geometry, Study of fractals, Content and fractals, Fractal Applications		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	12/12/2015		
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT		
Orientador (a):	Prof. <sup>a</sup> Dr. <sup>a</sup> Luciana Aparecida Elias		
E-mail:	lucianaeliasmat@gmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			


\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

  
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 12 / 05 / 2016

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**Ricardo Anselmo Zanotto**

# **ESTUDO DA GEOMETRIA FRACTAL CLÁSSICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luciana Aparecida Elias

Jataí

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Zanotto, Ricardo Anselmo  
Estudo da Geometria Fractal Clássica [manuscrito] / Ricardo  
Anselmo Zanotto. - 2015.  
LXVII, 67 f.: il.

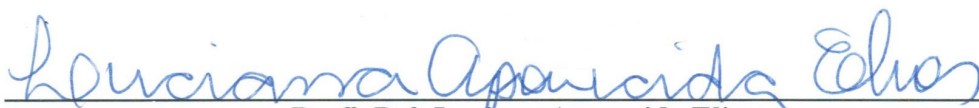
Orientador: Profa. Dra. Luciana Aparecida Elias.  
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional  
Jataí, Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT -  
Profissional), Jataí, 2015.  
Bibliografia. Apêndice.  
Inclui lista de figuras, lista de tabelas.

1. Fractal. 2. Geometria não-euclidiana. 3. Estudo dos fractais. 4.  
Conteúdos e fractais. 5. Aplicações de fractais. I. Elias, Luciana  
Aparecida, orient. II. Título.

# RICARDO ANSELMO ZANOTTO

## Estudo da Geometria Fractal Clássica

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 12 de dezembro de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr.ª. Luciana Aparecida Elias**  
Coordenação de Matemática-REJ/UFG  
Presidente da Banca



---

**Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa**  
Membro - Coordenação de Matemática-REJ/UFG



---

**Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza**  
Membro-IF/GO

em branco

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Ricardo Anselmo Zanotto** graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade de Rio Verde - FESURV no fim do ano de 2009, desde o início de sua graduação (2007) até hoje trabalha como professor de Matemática em escolas públicas e particulares; em 2013 ingressou no programa de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, ao qual vem fazer sua defesa com esse trabalho de conclusão.

em branco



*Dedico este trabalho à toda minha família que esteve ao meu lado em todos os momentos, acompanhando minhas passadas na corrida em busca de conhecimento, me incentivando sempre à estudar.*

em branco

# Agradecimentos

Primeiramente agradeço a DEUS por ter concedido mais uma oportunidade em minha vida; por ter me dado esperança, força e coragem para que eu pudesse cursar esse mestrado.

Aos meus queridos pais Sétimo Zanotto e Marilei Inês Zanotto, que além de seu amor por mim, me deram apoio, companheirismo e acima de tudo acreditaram em mim.

Agradeço à minha esposa Ivone M. C. Zanotto por me acompanhar nas horas de alegrias, dificuldades, preocupações e estudos; sendo paciente e compreensível... Obrigado paixão.

Agradeço à minha orientadora Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Luciana Aparecida Elias que me fez crescer dentro dos conhecimentos adquiridos, sendo muito prestativa na orientação e intervenção no trabalho desenvolvido.

À toda família, pelo incentivo e apoio.

Agradeço a todos os amigos que participaram do curso juntamente comigo, sempre apoiando e incentivando a estudar.

À todos os professores do PROFMAT do Pólo da Universidade Federal de Jataí e aos professores do IMPA e SBM, pelo ótimo trabalho desenvolvido com os mestrandos.

À CAPES pelo apoio financeiro durante o curso.

em branco

## **Resumo**

Este trabalho é uma pesquisa sobre parte da geometria não euclidiana que há pouco vem sendo muito estudada, os fractais. Abordamos temas iniciais da geometria não-euclidiana e no decorrer do trabalho expomos nosso estudo sobre fractais, seu histórico, construções, principais fractais (conhecidos como fractais clássicos). Também abordamos relações entre conteúdos dos anos escolares e como usar fractais nos mesmos; como também algumas de suas aplicações que vem ajudando muitas pesquisas a se difundirem e apresentarem melhores resultados.

### **Palavras-chave**

Fractal, Geometria Não-Euclidiana, Estudo dos Fractais, Conteúdos e Fractais, Aplicações de Fractais.

em branco

## **Abstract**

This is a research about a part of the non-Euclidean geometry that has recently been very studied. It was addressed initial themes of the non-Euclidean geometry and it was exposed the studies about fractals, its history, buildings and main fractals (known as classic fractals). It was also addressed the relation among the school years contents and how to use fractals; as well as some of its applications that have helped a lot of researches to spread and show better results.

## **Keywords**

Fractal, Non-Euclidean Geometry, Study of fractals, Content and fractals, Fractal Applications.

em branco



## Lista de Figuras

1	Cinco Iterações da Curva de Koch . . . . .	31
2	Três Iterações da Curva de Peano . . . . .	32
3	Cinco Iterações do Triângulo de Sierpinski . . . . .	33
4	Quatro Iterações do Tapete de Sierpinski . . . . .	34
5	Três Iterações dos Conjuntos de Cantor . . . . .	35
6	Três Iterações do Dürer Pentagonal . . . . .	36
7	Três Iterações do Dürer Octagonal . . . . .	38
8	Seis Iterações da Árvore Bifurcada . . . . .	39
9	Três Iterações da Árvore Pitagórica Fundamental . . . . .	40
10	Três Iterações dos Conjuntos de Cantor . . . . .	41
11	Três Iterações da Curva de Peano . . . . .	43
12	Cinco Iterações da Curva de Koch . . . . .	45
13	Três Iterações da Ilha de Koch . . . . .	47
14	Cinco Iterações do Triângulo de Sierpinski . . . . .	48
15	Quatro Iterações do Tapete de Sierpinski . . . . .	50
16	Montanha Sendo Criada por Computação Gráfica . . . . .	55
17	Couve com Zoom, Mostrando sua Igualdade . . . . .	55
18	Samambaia . . . . .	56
19	Raio . . . . .	56
20	Pulmão . . . . .	57
21	Triângulo Isósceles Central do Dürer Pentagonal . . . . .	62
22	Triângulo Isósceles Central do Dürer Octagonal . . . . .	62

em branco

## Lista de Tabelas

1	Curva de Peano . . . . .	44
2	Curva de Koch . . . . .	46
3	Triângulo de Sierpinski . . . . .	49
4	Quadrado de Sierpinski . . . . .	51

em branco

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>23</b>
<b>2</b>	<b>Definição, Propriedades e Histórico da Geometria dos Fractais</b>	<b>25</b>
2.1	Introdução aos Fractais . . . . .	25
2.1.1	Definição . . . . .	25
2.2	Características . . . . .	26
2.2.1	Auto Similaridade . . . . .	26
2.2.2	Dimensão . . . . .	26
2.2.3	Iteração . . . . .	27
2.3	Histórico . . . . .	27
2.3.1	Geometria Não Euclidiana . . . . .	27
2.3.2	Fractais . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Tipos de Fractais e Suas Construções</b>	<b>30</b>
3.1	Fronteira . . . . .	30
3.1.1	Construção da Curva de Koch . . . . .	30
3.1.2	Construção da Curva de Peano . . . . .	31
3.2	Remoção . . . . .	32
3.2.1	Construção do Triângulo de Sierpinski . . . . .	33
3.2.2	Construção do Tapete de Sierpinski . . . . .	34
3.2.3	Construção do Conjunto de Cantor . . . . .	35
3.3	Dürer . . . . .	35
3.3.1	Construção do Dürer Pentagonal . . . . .	36
3.3.2	Construção do Dürer Octogonal . . . . .	37
3.4	Árvores . . . . .	37

3.4.1	Construção da Árvore Bifurcada com Ângulo de Bifurcação igual a $120^\circ$ e Escala de Redução igual a $\frac{1}{2}$ . . . . .	38
3.4.2	Construção da Árvore Pitagórica Fundamental . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Fractais Clássicos</b>	<b>40</b>
4.1	Conjuntos de Cantor . . . . .	40
4.2	Curva de Peano . . . . .	42
4.3	Curva de Koch . . . . .	44
4.4	Triângulo e Quadrado de Sierpinski . . . . .	47
4.4.1	Triângulo de Sierpinski . . . . .	48
4.4.2	Quadrado de Sierpinski . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Fractais e Conteúdos</b>	<b>52</b>
5.1	Outras Aplicações . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Considerações finais</b>	<b>58</b>
<b>7</b>	<b>Apêndice</b>	<b>61</b>
7.1	Cálculo da Porcentagem de Redução do Lado do Fractal Dürer Pentagonal e Dürer Octogonal . . . . .	61
7.2	Cálculo da Porcentagem de Redução do Lado do Fractal Árvore Pitagórica Fundamental . . . . .	64

# 1 Introdução

Vemos no cotidiano escolar algumas dificuldades de atrairmos os alunos para o estudo da Matemática. Visando melhorar essa questão, propomos nesse trabalho uma pesquisa entorno dos fractais, buscando analisar a geometria não-euclidiana e mostrando também que é uma parte da Geometria que traz à realidade aos alunos em seu cotidiano, assim deixando os temas da Geometria nas séries iniciais do Fundamental II e no Ensino Médio mais atrativa para os mesmos.

No Capítulo 2 abordamos a definição usual de fractal, bem como as propriedades que o definem, trazendo também o histórico da geometria não euclidiana, e chegando à geometria do fractal e seu criador, Benoit B. Mandelbrot, e também um pouco de seu estudo sobre fractais.

No Capítulo 3 mostramos as formas de criação de fractais, sejam eles por fronteira, remoção, durer ou árvores. Exemplificamos alguns destes fractais, passos para sua construção e suas formas após seguir tais passos.

No Capítulo 4 trazemos como tema alguns dos principais fractais, conhecidos como Fractais Clássicos, entre eles os Conjuntos de Cantor, a Curva de Koch, o Triângulo e o Quadrado de Sierpinski; juntamente a eles um estudo mais aprofundado de suas iterações e dimensões.

No Capítulo 5 destacamos algumas propostas de trabalho relacionando alguns conteúdos de Ensino Fundamental II e Ensino Médio, auxiliando o professor que tiver interesse de alguma maneira a inovar sua aula usando os fractais. Ainda nesse capítulo trazemos outras aplicações dos fractais externos à Matemática.

em branco



## 2 Definição, Propriedades e Histórico da Geometria dos Fractais

### 2.1 Introdução aos Fractais

#### 2.1.1 Definição

A palavra fractal foi criada por Mandelbrot [2], onde em uma de suas primeiras obras sobre, afirmou que criou a palavra do adjetivo em latim *fractus*, que significa quebrar, gerar fragmentos irregulares, fracionar. Sendo então esse seu significado aceito até hoje. Sua primeira definição existente foi feita também por Mandelbrot em sua obra: [2, The Fractal Geometry of Nature], onde ele a definiu da seguinte maneira.

*“A fractal is by definition a set for which the Hausdorff Besicovitch dimension strictly exceeds the topological dimension.”*

Em tradução livre temos que a definição de fractal é um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica. Essa definição não é bem aceita, onde muitos estudiosos vem reformulando esse significado, não deixando ao certo uma definição apropriada aos fractais, e sim proposto por Kenneth John Falconer (em 1985 e 1990) um significado a partir de caracterizações, onde, segundo ele e [3]:

*“Um conjunto  $F$  é fractal se, por exemplo:*

- *$F$  possui alguma forma de “autossimilaridade” ainda que aproximada ou estatística;*
- *A dimensão fractal, definida de alguma forma, é maior que a sua dimensão topológica;*

- *O conjunto  $F$  pode ser expresso através de um procedimento recursivo ou iterativo.*”

No entanto, até hoje não temos uma definição formalizada aos fractais, mas nada que não nos impeça de entender seu conceito singular e de que repassá-lo de forma simples e objetiva.

## **2.2 Características**

Os fractais foram caracterizados por K. J. Falconer (para melhor compreensão de seu significado) de três maneiras, que são: *auto similaridade*, *dimensão* e *iteração*.

### **2.2.1 Auto Similaridade**

Como o próprio nome sugere a auto similaridade nos fractais mostra o que eles têm de mais belo, ou seja, cada vez que se aproxima a figura você observa que parte do fractal é igual ou muito similar ao todo, verifica que o conjunto fractal da figura observada é formado por pequenas cópias unidas dessas partes. Assim, fractal fica caracterizado por fragmentos unidos que geram um imagem do próprio fragmento.

### **2.2.2 Dimensão**

A dimensão do fractal é uma dimensão fracionária, diferentemente da dimensão euclidiana tida como dimensão inteira, nos fractais, quase sempre nos deparamos com um resultado fracionário para determinar sua dimensão. Mas afinal, o que as dimensões calculam nos fractais? Elas mostram em geral o espaço ocupado, ou preenchido pela figura, buscam associar aos fractais sua aspereza, espessura, densidade, textura, ou seja, determinam muito seu grau de irregularidade, caracterizando assim sua forma.

Sua dimensão é calculada segundo [3] utilizando a seguinte fórmula:

$$D = \frac{\log(n)}{\log(m)},$$

onde  $D$  é dimensão,  $n$  é o número de peças e  $m$  é o fator de aumento. Essa fórmula vem de início da dimensão nos inteiros (que encontramos na geometria, como ponto, reta e plano, conseguindo-se calcular comprimento, área e volume), onde:

$$n = m^D,$$

seguindo a formulação anterior,  $n$  é o número de peças dadas,  $m$  é o fator de aumento e  $D$  é a dimensão. Assim, utilizando a propriedade de divisão de logaritmo em uma mesma base, obtemos a primeira fórmula.

### **2.2.3 Iteração**

Sua terceira e muito importante característica, mostra a iteração no fractal, ou seja, uma constante repetição infinita. Alguns autores a chamam de complexidade infinita, por apresentar como sua principal criação os algoritmos matemáticos, ou seja, a característica de iteração do fractal o deixa cada vez mais complexo dependendo da quantidade de repetições do algoritmo que façamos.

## **2.3 Histórico**

### **2.3.1 Geometria Não Euclidiana**

Desde muitos anos a geometria foi uma das maiores áreas de curiosidade, de estudo e de conhecimento do ser humano. Tudo começou muito cedo, principalmente com Euclides (conhecido como o pioneiro no estudo das formas geométricas e suas demonstrações,

há quem diga que ele seja o “pai da geometria”). Em meados de 300 a.C., Euclides criou sua mais importante obra conhecida como “Os Elementos”, essa obra composta por treze livros contém todo seu conhecimento de geometria dividido por áreas de conhecimento e iniciando-se por postulados elaborados por ele.

Sua obra iniciava-se com o Livro I, onde continha logo de início sem nenhuma introdução, uma lista de vinte e três definições (não bem definidas como hoje, na forma deles naquela época); logo já descrevia cinco postulados e cinco noções comuns. Nosso estudo é voltado aos seus postulados, sendo mais focado no quinto postulado, pelo qual Euclides escreveu o seguinte “(...) que, se uma reta cortando duas retas faz os ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, as retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram desse lado em que os ângulos são menores que dois ângulos retos”.

Dentre todos seus postulados o único que gerou dúvida foi justamente o quinto postulado, tanto que durante muitos séculos incontáveis matemáticos tentaram ou reformular o quinto postulado ou criar um novo postulado que o substituiria. Mas poucos tiveram êxito em seus trabalhos, porém no início do século XIX como muitos geômetras já haviam feito muitos esforços que foram acumulados ao longo de cerca de 2000 anos, finalmente tal descoberta foi feita e não por um único homem e sim três geômetras, Carl Friedrich Gauss, Wolfgang Bolyai e Nikolai Ivanovich Lobachewsky, onde anos mais tarde tiveram seus devidos reconhecimentos por tal feito e foi “criada” uma nova área dentro da geometria conhecida atualmente como Geometria Não Euclidiana.

### **2.3.2 Fractais**

Depois da criação da Geometria Não-Euclidiana, e após muitos estudos sobre ela, haviam algumas figuras na geometria em que não se conseguiam especificar qual sua

origem, ou seja, não conheciam e nem conseguiam determinar como tal figura era criada. Em meados do século XIX e início do século XX (entre os anos de 1857 e 1913), um grupo de cientistas, visando organizar essas figuras, realizaram um trabalho onde catalogaram esses objetos e/ou figuras como “monstros matemáticos” também conhecidos como “casos patológicos”, pois essas formas pareciam sair das categorias usuais de linhas unidimensionais, bidimensionais e planos tridimensionais; alguns cientistas ainda julgavam tais figuras como “demônios”, pois não teriam significativo valor para a ciência.

Tais figuras ainda eram dignas de fascínios, pois como eram tidas como complexas, se transformaram em grandes focos de estudos dos cientistas. A partir dos anos 50, o francês Benoit Mandelbrot, que na época trabalhava na IBM (Centro de Pesquisa Thomas Watson), conseguiu, usando um antigo trabalho de Cantor (Conjuntos de Cantor) resolver um problema de ruídos nas linhas telefônicas entre computadores, mostrando que tais ruídos se comportavam como parte desses conjuntos. Assim, conseguindo estabelecer um padrão de regularidade para algo que parecia não ter solução. Após tal feito Mandelbrot passou a aplicar suas ideias em diversas áreas, aliado a recursos computacionais da IBM.

Foi então que Mandelbrot, verificando “aberrações” matemáticas, ou seja, termos que não apresentavam padrões, através de suas análises apresentavam alguma certa ordem. Assim, veio a formulação dos fractais, que vieram a abrilhantar a ciência do CAOS, e assim muitos estudiosos conseguiram também identificar alguma ordem em fenômenos que antes eram inexplicáveis.

## 3 Tipos de Fractais e Suas Construções

Temos muitas formas de construirmos e por que não criarmos fractais. Mostramos aqui alguns desses métodos para que possamos, a partir do momento que saber como a construção do fractal funciona, fazermos a construção e até mesmo inovarmos e criarmos fractais diversificados. Portanto, vejamos alguns desses métodos.

Os mais conhecidos e usados são as construções e/ou criações pelo método da fronteira; método de remoção; método de Dürer e o método de árvores. Descrevemos cada um desses métodos e mostramos alguns exemplos de fractais que foram obtidos utilizando esses métodos.

### 3.1 Fronteira

O método da fronteira consiste em formar uma iteração por meio de um aumento em determinado “pedaço” do fractal, ou seja, a partir de um todo dividimos ele em partes iguais. Após substituímos algumas dessas partes por mais de uma da mesma medida, formando um conjunto de comprimento maior que o inicial.

Exemplificando esse método abaixo para uma melhor compreensão, vejamos o exemplo da construção da Curva de Koch e da Curva de Peano.

#### 3.1.1 Construção da Curva de Koch

Para construí-la devemos proceder da seguinte maneira:

**1º Passo** - Traçar um segmento de reta qualquer;

**2º Passo** - Dividir esse segmento em três partes iguais;

**3º Passo** - Na parte central construir dois novos segmentos, fazendo um triângulo equilátero;

**4º Passo** - Apagar a base do triângulo equilátero formado;

**5º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir na figura gerada, em cada segmento de reta, os procedimentos a partir do segundo passo.

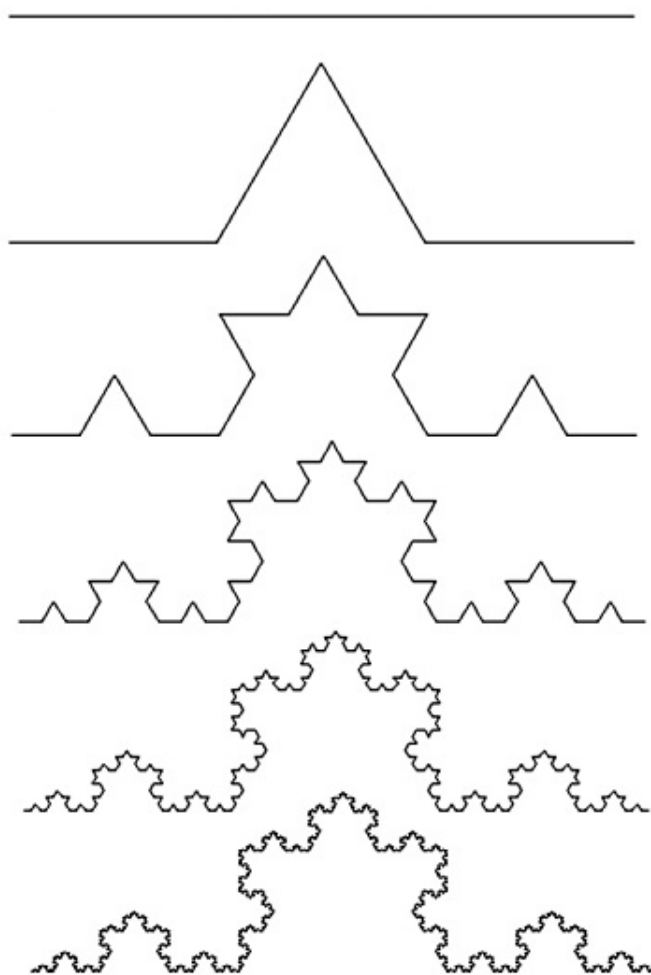


Figura 1: Cinco Iterações da Curva de Koch

### 3.1.2 Construção da Curva de Peano

Para construí-la devemos proceder da seguinte maneira:

- 1º Passo** - Traçar um segmento de reta qualquer;
- 2º Passo** - Dividir esse segmento em três partes iguais;
- 3º Passo** - Na parte central construir seis novos segmentos, gerando um quadrado acima e abaixo dessa parte central;
- 4º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir na figura gerada, em cada segmento de reta, os procedimentos a partir do segundo passo.

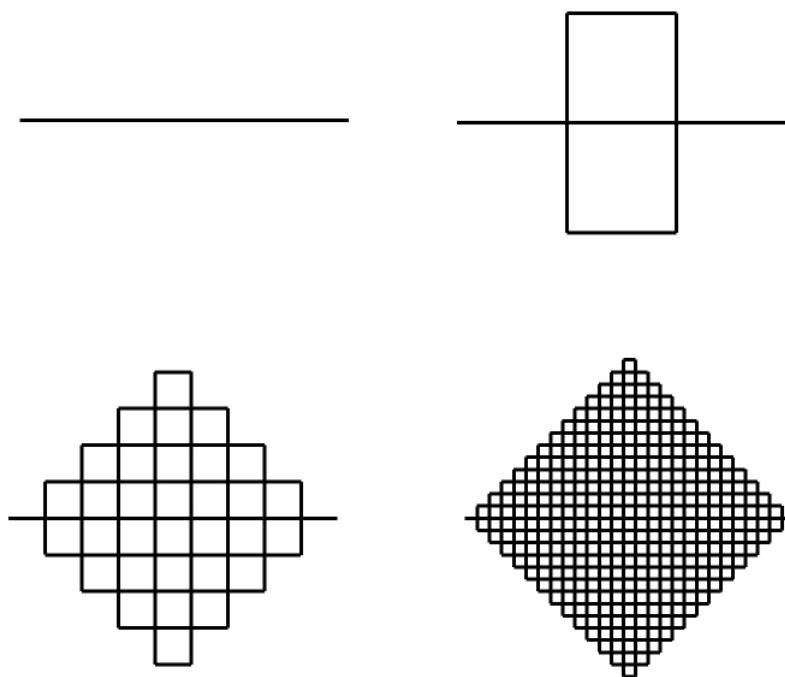


Figura 2: Três Iterações da Curva de Peano

### 3.2 Remoção

Os fractais criados pelo método de remoção, como o próprio nome já induz; consiste em criar um fractal por meio da remoção de partes dele.

Veja os exemplos da construção do Triângulo de Sierpinski, Quadrado de Sierpinski (chamado de Tapete de Sierpinski) e o Conjunto de Cantor.



### 3.2.1 Construção do Triângulo de Sierpinski

Para construí-lo devemos proceder da seguinte maneira:

**1º Passo** - Construir um triângulo equilátero qualquer;

**2º Passo** - Determinar os pontos médios de cada lado do triângulo;

**3º Passo** - Traçar segmentos interligando os pontos médios, formando um novo triângulo equilátero no centro do triângulo anterior;

**4º Passo** - Remover esse novo triângulo equilátero;

**5º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir em cada triângulo gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

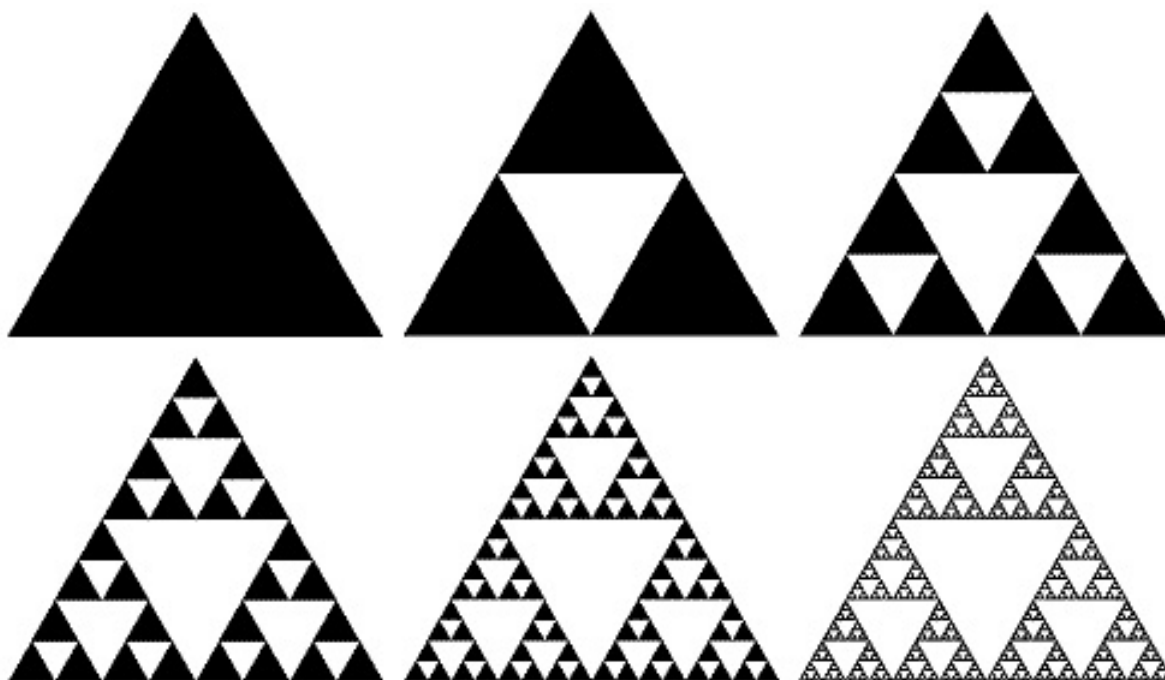


Figura 3: Cinco Iterações do Triângulo de Sierpinski

### 3.2.2 Construção do Tapete de Sierpinski

Para construí-lo devemos proceder da seguinte maneira:

**1º Passo** - Construir um quadrado qualquer;

**2º Passo** - Dividir cada lado do quadrado em três partes iguais;

**3º Passo** - Traçar segmentos interligando os pontos formados por essas divisões, formando nove quadrados internos ao maior;

**4º Passo** - Remover o quadrado central dos nove formados;

**5º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir em cada quadrado gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

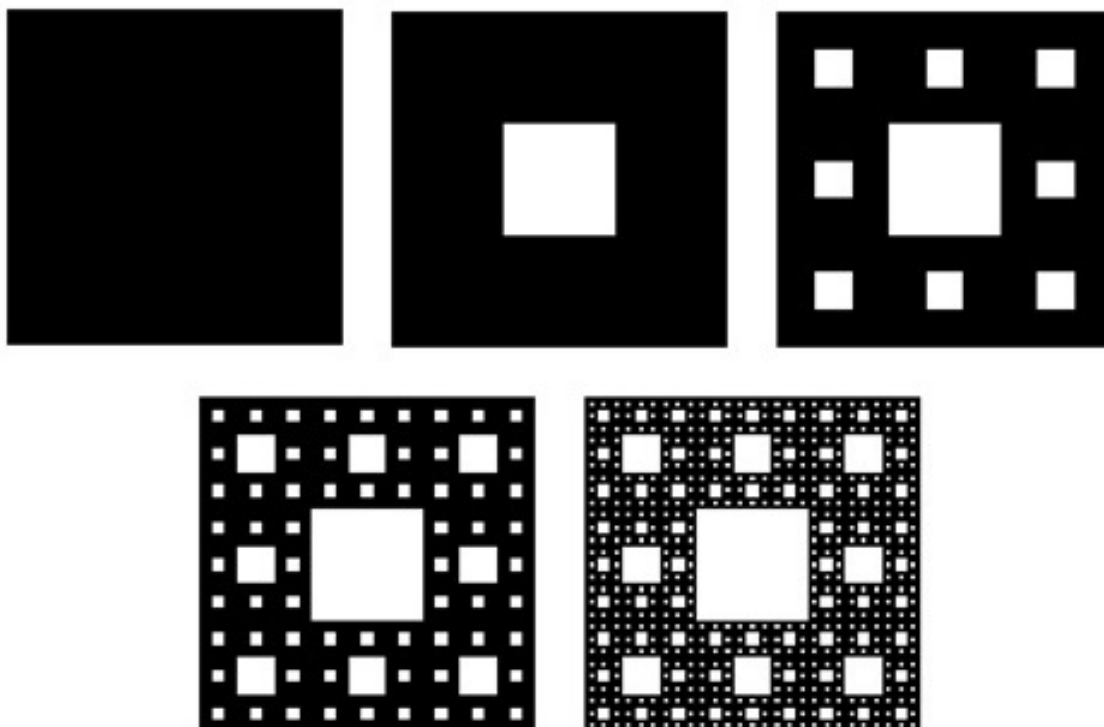


Figura 4: Quatro Iterações do Tapete de Sierpinski

### 3.2.3 Construção do Conjunto de Cantor

Para construí-lo devemos proceder da seguinte maneira:

**1º Passo** - Construir um segmento de reta qualquer;

**2º Passo** - Dividir esse segmento em três partes iguais;

**3º Passo** - Remover a parte central;

**4º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir em cada segmento gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

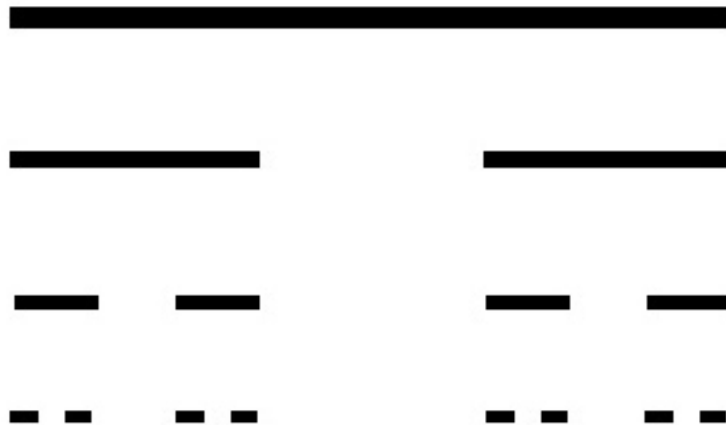


Figura 5: Três Iterações dos Conjuntos de Cantor

### 3.3 Dürer

Fractais do tipo Dürer são fractais criados por meio de polígonos regulares, fazendo-se a translação do polígono inicial em escala menor e ajustando dentro desse polígono com encontro dos vértices.

Veja alguns exemplos da criação dos fractais de Dürer Pentagonal e Octogonal.

### 3.3.1 Construção do Dürer Pentagonal

Para construí-lo devemos proceder da seguinte maneira:

**1º Passo** - Construir um pentágono regular;

**2º Passo** - Nos extremos de um dos lados do pentágono inicial, construir dois pentágonos regulares menores que tenham um vértice comum, de maneira que um de seus ângulos coincida com o ângulo do pentágono regular inicial;

**3º Passo** - Repetir o segundo passo para cada lado do pentágono inicial;

**4º Passo** - Remover os cinco triângulos intermediários e o pentágono central.

**5º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir em cada pentágono gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

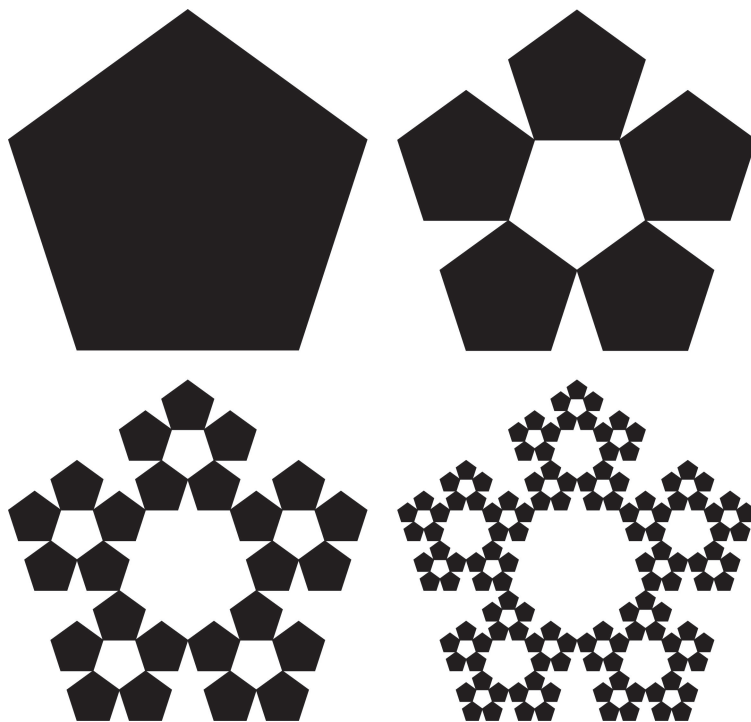


Figura 6: Três Iterações do Dürer Pentagonal

### 3.3.2 Construção do Dürer Octogonal

Para construí-lo devemos proceder da seguinte maneira:

**1º Passo** - Construir um octógono regular;

**2º Passo** - Nos extremos de um dos lados do octógono inicial, construir dois octógonos regulares menores que tenham um lado comum, de maneira em que um de seus ângulos coincida com o ângulo do octógono regular inicial;

**3º Passo** - Repetir o segundo passo para cada lado do octógono inicial;

**4º Passo** - Remover os oito triângulos intermediários e o hexadecágono estrelado central.

**5º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir em cada octógono gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

## 3.4 Árvores

Estes fractais como o nome também sugere, se assemelham muito às árvores. Sua criação parte mediante de ângulo de bifurcação e uma escala de redução. A partir desse ângulo se tem a repetição da figura original (seja ela um segmento ou outra figura geométrica), e a partir da escala de redução se determina o comprimento de cada nova ramificação.

Veja os exemplos de criações dos fractais da Árvore bifurcada com ângulo de bifurcação de  $120^\circ$  e escala de redução  $1 : 2$  e da Árvore pitagórica fundamental.

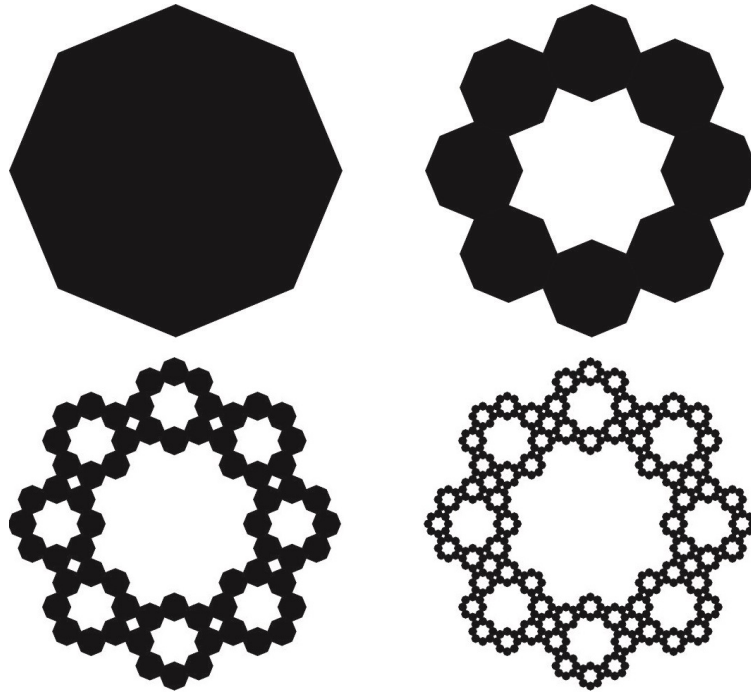


Figura 7: Três Iterações do Dürer Octagonal

### 3.4.1 Construção da Árvore Bifurcada com Ângulo de Bifurcação igual a $120^\circ$ e Escala de Redução igual a $\frac{1}{2}$

Para construí-la devemos proceder da seguinte maneira:

- 1º Passo** - Construir um segmento de reta na vertical;
- 2º Passo** - Na extremidade superior do segmento, traçar uma perpendicular à reta vertical;
- 3º Passo** - A partir dessa extremidade que pode ser chamada de vértice, usando a perpendicular traçada medir  $30^\circ$  de cada lado e construir dois novos segmentos com metade do tamanho do segmento inicial, obtendo assim um ângulo central de  $120^\circ$ ;
- 4º Passo** - Apagar a perpendicular traçada;

**5º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir em cada segmento gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

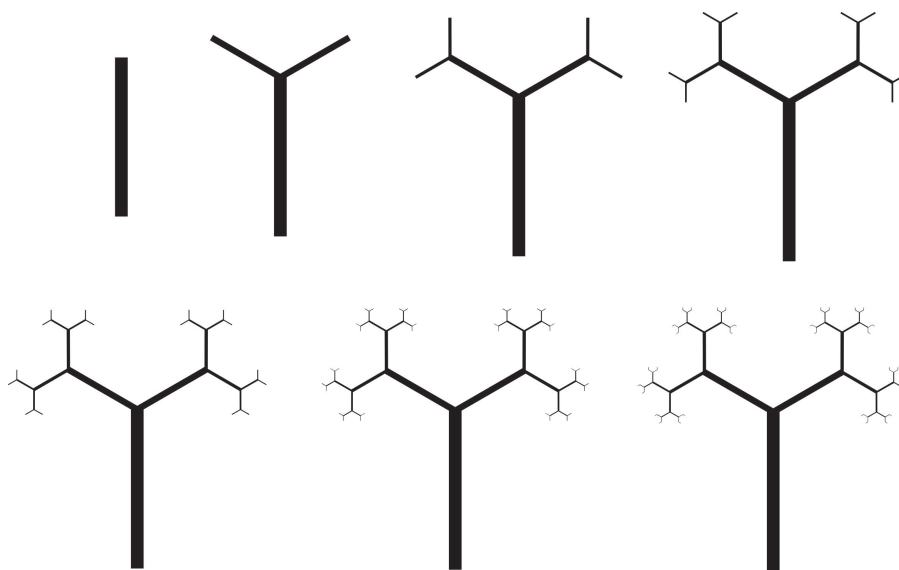


Figura 8: Seis Iterações da Árvore Bifurcada

### 3.4.2 Construção da Árvore Pitagórica Fundamental

Para construí-la devemos proceder da seguinte maneira:

- 1º Passo** - Construir um triângulo retângulo usando o terno pitagórico fundamental (3, 4, 5) e sobre seus catetos e hipotenusa construir os respectivos quadrados;
- 2º Passo** - Construir sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto, um novo triângulo retângulo semelhante ao inicial, tendo por hipotenusa justamente esse lado;
- 3º Passo** - Sobre seus catetos, construir nesse triângulo, seus respectivos quadrados;
- 4º Passo** - Para continuar a iteração devemos repetir em cada triângulo retângulo gerado, os procedimentos a partir do segundo passo.

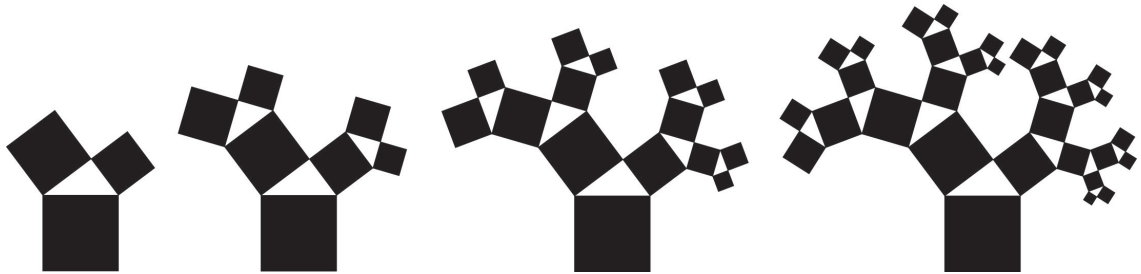


Figura 9: Três Iterações da Árvore Pitagórica Fundamental

## 4 Fractais Clássicos

Antes da definição de fractais apresentada por Benoit Mandelbrot, já existiam alguns objetos matemáticos com características dos mesmos, dentre eles o Conjunto de Cantor; a Curva de Peano; a Curva de Hilbert; a Curva de Koch; o Triângulo e o Tapete de Sierpinski e o de Fatou e Julia. Estes objetos eram conhecidos como “monstros matemáticos”, até mesmo por “demônios” e acreditava-se que não tinham grande valor científico. Hoje tais figuras são classificadas como fractais clássicos. Vejamos como surgiram alguns desses “monstros”, quem desenvolveu e também seu cálculo de dimensão segundo definição dimensional anterior e também para alguns o cálculo de perímetro e área.

### 4.1 Conjuntos de Cantor

O criador do fractal conhecido hoje como “Conjunto de Cantor”, foi Georg Cantor, que nasceu em 1845 na Rússia e faleceu em 1918. Durante sua vida adotou nacionalidade alemã, sendo professor da Universidade de Halle; dedicou boa parte de seus estudos às pesquisas relacionadas às fundamentações matemáticas, principalmente na área de Teoria dos Conjuntos. Ele foi o pioneiro nesse estudo, tanto que, hoje temos Cantor como fundador de tal teoria.

Cantor foi o primeiro matemático a quebrar a noção intuitiva de dimensão, onde



em 1883, provou que se pode esquadriñar o espaço euclidiano de forma contínua, ou seja, podemos localizar todos os pontos de um plano com apenas uma coordenada. Seu trabalho gerou o conhecido Conjunto de Cantor, também chamado de Polvo de Cantor ou Poeira de Cantor (nome inicial adotado por muitos pesquisadores), esse fractal é um subconjunto infinito de pontos contidos no intervalo unitário  $[0,1]$ .

Vamos analisar o que acontece com a Poeira de Cantor; partindo da construção feita na Seção 3.2.3. Considerando um segmento inicial. Chame tal segmento de intervalo

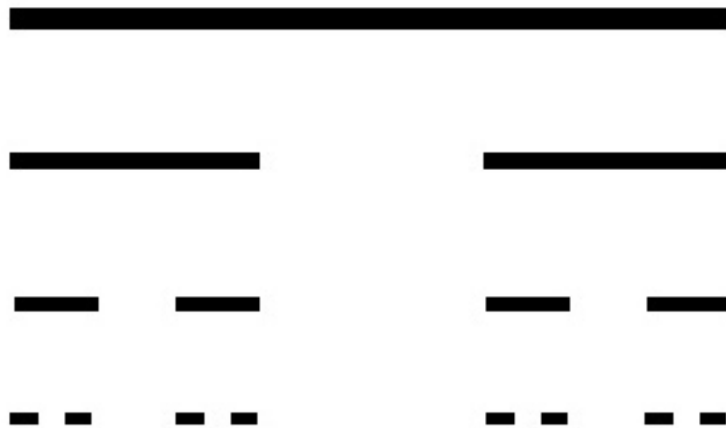


Figura 10: Três Iterações dos Conjuntos de Cantor

*I*. Sem perda de generalidade, podemos considerar  $I = I_0 = [0, 1]$ . Dividindo-o em três partes congruentes e desprezando a parte central, surge a união disjunta de dois intervalos fechados, o que gera a primeira iteração com intervalo  $I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , e cada um com comprimento  $\frac{1}{3}$ . Refazendo a iteração nos intervalos  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$  e  $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ , determinamos uma nova união disjunta de quatro intervalos obtemos a segunda iteração com  $I_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right]$ , que possui intervalos congruentes medindo  $\frac{1}{9}$  cada um.

Se repetirmos essa iteração infinitamente, conseguimos obter o  $I_n$  que é a união

disjunta de  $2^n$  intervalos fechados, de  $\left(\frac{1}{3}\right)^n$  de comprimento cada um.

Com essas informações podemos calcular a dimensão fractal da Poeira de Cantor. Em cada iteração percebemos que cada segmento é dividido em três partes e retira-se o segmento central. Assim, a cada iteração, obtemos dois novos segmentos de cada segmento da iteração anterior; logo o número de peças é  $n = 2$ . O coeficiente de redução é  $r = \frac{1}{3}$ , o que significa que nosso fator de ampliação é  $m = 3$ . Portanto, a dimensão fractal da Poeira de Cantor é dada por

$$D = \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log 2}{\log 3} \approx 0,63092.$$

## 4.2 Curva de Peano

A Curva de Peano é uma curva descrita pelo matemático italiano Giuseppe Peano, nascido em 1858 na cidade de Cuneo e falecido em Turim no ano de 1932. Peano foi professor da Academia Militar de Turim (mesma Academia onde trabalhou Joseph Louis Lagrange em 1755), na qual fez enormes contribuições à Matemática, principalmente relacionada às preocupações dos grandes matemáticos da época.

Seus trabalhos, utilizando notações e rigor de lógica, surpreenderam os matemáticos contemporâneos, tanto que em 1890, tratando do aprofundamento das noções de continuidade e dimensão, publica sua famosa curva, proposta de forma a preencher completamente um espaço bidimensional (como um quadrado).

Estudando a curva de Peano, observamos que a curva vai preenchendo uma região quadrada cuja diagonal é dada pelo segmento inicial, observe na Seção 3.1.2 sua construção.

A área dessa região quadrada, caso o segmento inicial tenha medida  $x$ , será dada por  $A = l^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$ .

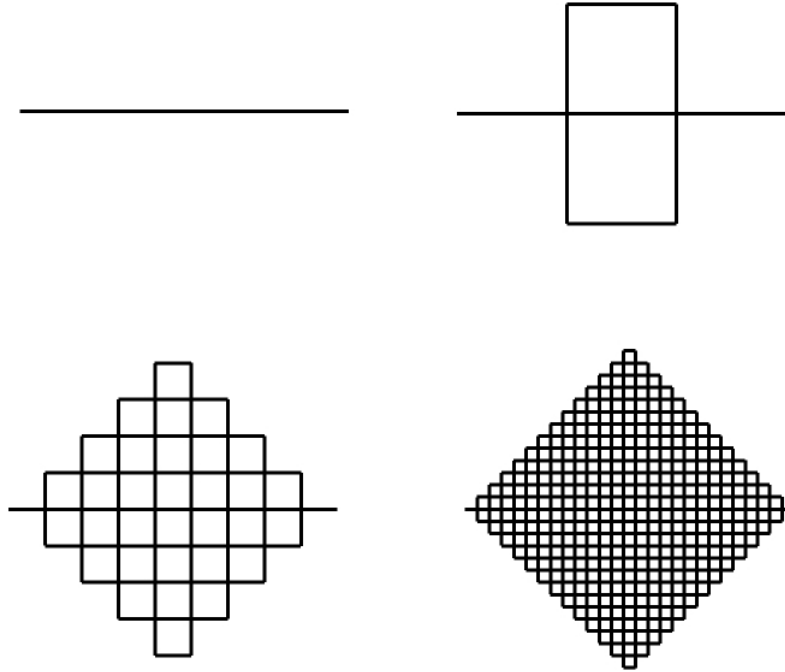


Figura 11: Três Iterações da Curva de Peano

Para calcular o comprimento da curva de Peano denotamos um comprimento inicial sendo  $x$ ; assim a iteração  $I_0 = x$ . Fazendo a primeira iteração, o número de segmentos passa para nove, onde o comprimento de cada um é a terça parte do inicial, portanto o comprimento total da primeira iteração é  $I_1 = \frac{9}{1} \cdot \frac{x}{3} = \frac{9x}{3} = 3x$ . Continuando para a próxima iteração teremos  $9^2 = 81$  segmentos, com cada um medindo  $\frac{x}{3^2} = \frac{x}{9}$ , assim para a segunda iteração temos,  $I_2 = \frac{81}{1} \cdot \frac{x}{9} = \frac{81x}{9} = 9x = (3)^2x$ . Verificamos que então para  $n$  iterações, temos  $9^n$  segmentos, onde cada segmento tem comprimento  $\frac{x}{3^n}$ , o que gera  $I_n = \frac{9^n}{1} \cdot \frac{x}{3^n} = \frac{9^n x}{3^n} = \left(\frac{9}{3}\right)^n x = 3^n x$ , observe a Tabela 1: Curva de Peano .

Agora podemos então calcular a dimensão do fractal Curva de Peano. Sabemos que em cada iteração obtemos, em cada segmento uma criação de nove novos segmentos, o que mostra que o número de peças é  $n = 9$ , onde cada um desses segmentos são a terça parte do anterior. Logo o coeficiente de redução é  $r = \frac{1}{3}$ , o que significa que nosso

Número de Segmentos	Medida de Cada Segmento	Comprimento TOTAL
1	$x$	$I_0 = 1x = x$
9	$\frac{x}{3}$	$I_1 = \frac{9}{1} \cdot \frac{x}{3} = \frac{9x}{3} = 3x$
81	$\frac{x}{9}$	$I_2 = \frac{81}{1} \cdot \frac{x}{9} = \frac{81x}{9} = 9x = (3)^2x$
729	$\frac{x}{27}$	$I_3 = \frac{729}{1} \cdot \frac{x}{27} = \frac{729x}{27} = 27x = (3)^3x$
...	...	...
$9^n$	$\frac{x}{3^n}$	$I_n = \frac{9^n}{1} \cdot \frac{x}{3^n} = \frac{9^n x}{3^n} = \left(\frac{9}{3}\right)^n x = 3^n x$

Tabela 1: Curva de Peano

fator de ampliação é  $m = 3$ . Assim, calculando sua dimensão, temos

$$D = \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log 9}{\log 3} = 2.$$

### 4.3 Curva de Koch

A Curva de Koch, como o próprio nome sugere é uma curva geométrica, criada entre 1904 e 1906, foi um dos primeiros fractais a serem criados. Descrita pelo matemático sueco Niels Fabian Helge Von Koch, que nasceu e morreu na cidade de Estocolmo na Suécia, cidade onde graduou-se e também tornou-se doutor em matemática pela Universidade de Estocolmo. Segundo Barbosa [3], no artigo intitulado “*Une méthode géométrique élémentaire pour l’étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*”, Koch definiu sua curva como um exemplo de curva contínua em todo o intervalo, porém não diferenciável em parte alguma, sendo o limite para o qual a curva tende a construção repetida para cada segmento conforme a Seção 3.1.1.

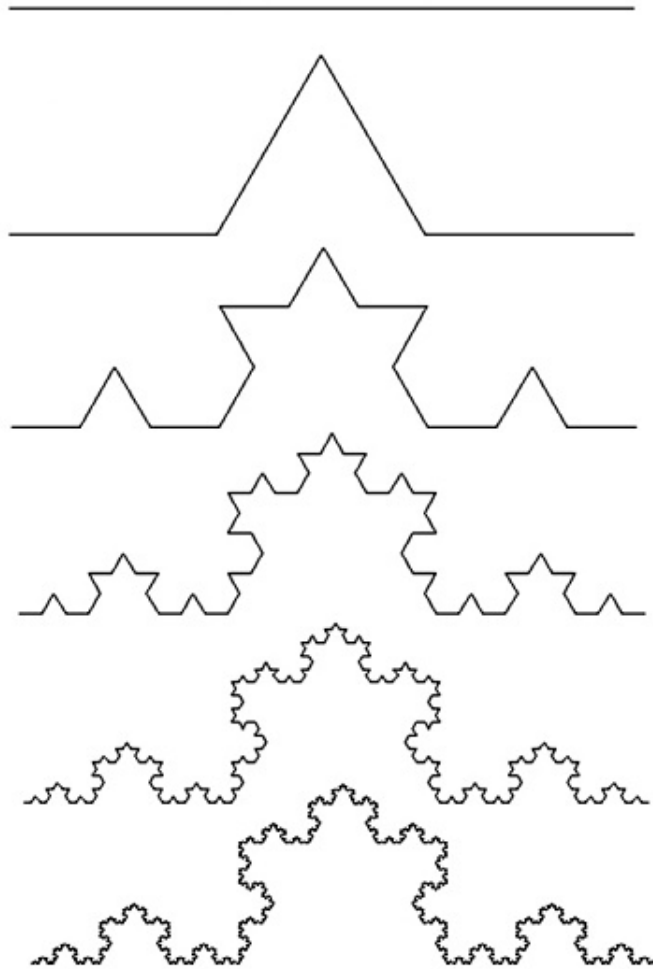


Figura 12: Cinco Iterações da Curva de Koch

Começamos por fazer uma análise da Curva de Koch, começando pelo número de segmentos em cada iteração. Seja  $n$  (o número da iteração) e  $I$  (o número de segmentos), temos em  $I_0$  somente um segmento; começando as iterações, temos em  $I_1$ , 4 segmentos; em  $I_2$ , temos 16 segmentos, em  $I_3$ , 64 segmentos; assim em  $n$  iterações temos  $I_n = 4^n$  segmentos.

Agora vamos analisar o comprimento da curva de Koch, chamamos  $C$  (o comprimento de cada segmento). A partir de um segmento inicial de comprimento igual a  $x$ ,

temos  $C_0 = x$ , após a primeira iteração  $C_1 = \frac{x}{3}$ ; na segunda iteração  $C_2 = \frac{x}{9} = \frac{x}{3^2}$ , na terceira iteração  $C_3 = \frac{x}{27} = \frac{x}{3^3}$ , assim, na iteração  $n$ ,  $C_n = \frac{x}{3^n}$ .

Tendo então o número de segmentos de cada iteração e o tamanho de cada segmento por iteração, conseguimos calcular o comprimento total da Curva de Koch, basta multiplicar o número total de segmentos pelo comprimento de cada segmento na iteração. Assim, como comprimento total, observe a Tabela 2: Curva de Koch abaixo.

Número de Segmentos	Comprimento de Cada Segmento	Comprimento TOTAL
$I_0 = 1$	$C_0 = x$	$Ct_0 = 1x = x$
$I_1 = 4$	$C_1 = \frac{x}{3}$	$Ct_1 = \frac{4}{1} \cdot \frac{x}{3} = \frac{4x}{3}$
$I_2 = 16$	$C_2 = \frac{x}{9}$	$Ct_2 = \frac{16}{1} \cdot \frac{x}{9} = \frac{16x}{9}$
$I_3 = 64$	$C_3 = \frac{x}{27}$	$Ct_3 = \frac{64}{1} \cdot \frac{x}{27} = \frac{64x}{27}$
...	...	...
$I_n = 4^n$	$C_n = \frac{x}{3^n}$	$Ct_n = \frac{4^n}{1} \cdot \frac{x}{3^n} = \left(\frac{4}{3}\right)^n x$

Tabela 2: Curva de Koch

Para calcular a dimensão fractal da curva de Koch devemos observar que a cada iteração são obtidos quatro novos segmentos. Logo  $n = 4$ , e que o coeficiente de redução é  $r = \frac{1}{3}$ , que mostra que tem coeficiente de aumento  $m = 3$ . Portanto,

$$D = \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,26186.$$

Uma curiosidade da curva de Koch é que ela também pode ser aplicada aos lados de um triângulo equilátero, gerando o que é conhecida como Ilha de Koch, Floco de Neve

de Koch ou Estrela de Koch; o interessante é que esse fractal corresponde à mesma curva, porém a sua construção é iniciada a partir de um triângulo equilátero. Observe a Figura 10 do Floco de Neve de Koch:

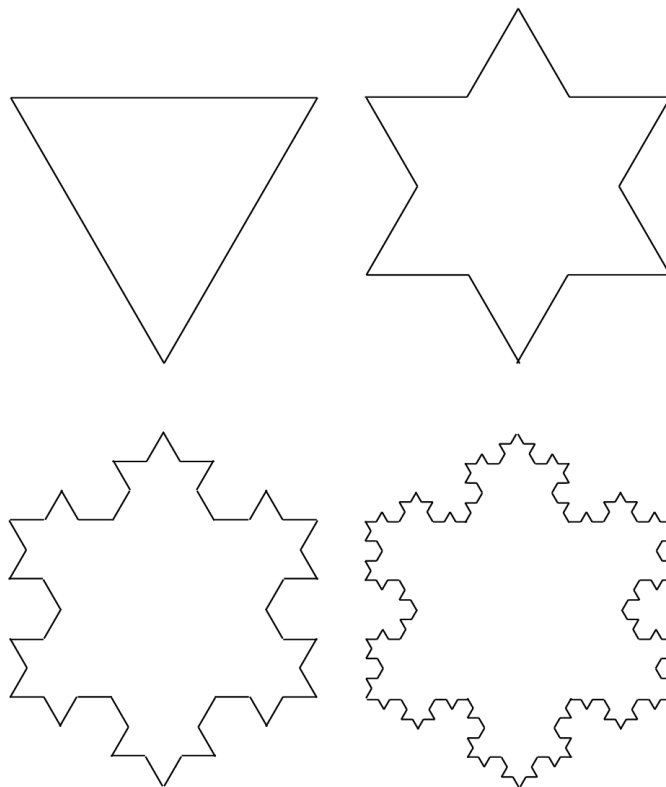


Figura 13: Três Iterações da Ilha de Koch

#### 4.4 Triângulo e Quadrado de Sierpinski

O Triângulo e o Quadrado de Sierpinski, foram desenvolvidos pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski, que nasceu em 1882 e morreu em 1969. Foi professor de Física e Matemática na Universidade de Varsóvia na Polônia. Teve grande reputação, principalmente na década 1920-1930, a ponto de uma das crateras lunares ter o seu nome. Em 1916, Sierpinski apresentou seus famosos “monstros” no trabalho: “*Sur une courbe*

*cantorienne qui content une image biunivoquet et continue de toute courbe donnée*” da Academia de Ciências de Paris, onde complementava uma publicação anterior de 1915 e posteriormente fez algumas outras publicações na obra *Leçons sur les nombres transfini*, publicada em 1928.

#### 4.4.1 Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski é uma figura geométrica obtida através de um processo recursivo de remoção de partes. Trata-se de um conjunto autossimilar de um triângulo equilátero, como já vimos anteriormente na Seção 3.2.1.

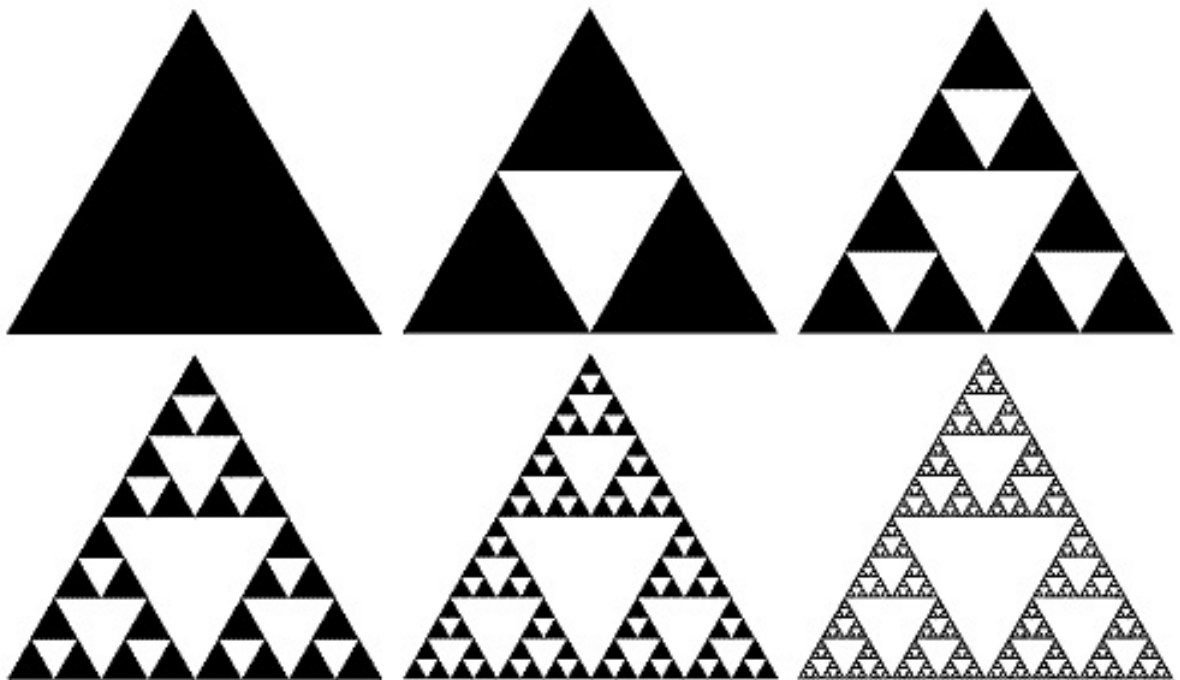


Figura 14: Cinco Iterações do Triângulo de Sierpinski

Analisando o triângulo de Sierpinski, observamos que chamando o comprimento inicial dos lados do triângulo de  $x$ , temos a iteração  $C_0 = x$ . Fazendo a primeira iteração, o tamanho do segmento inicial passa a ser a metade do comprimento inicial, portanto o comprimento do lado de cada novo triângulo será  $C_1 = \frac{x}{2}$ . Continuando para



a próxima iteração temos que o comprimento de cada novo triângulo é  $C_2 = \frac{x}{4} = \frac{x}{2^2}$ . Verificamos que então para  $n$  iterações, teremos que o comprimento de cada segmento dos triângulos será  $C_n = \frac{x}{2^n}$ . Agora a quantidade de triângulos gerados por cada iteração é em  $I_0 = 1$ , na segunda iteração obtemos em cada triângulo anterior três novos triângulos, ou seja, temos  $I_1 = 3$ , continuando as iterações, na segunda temos  $I_2 = 9 = 3^2$ , assim continuando até  $n$  iterações, obtemos  $I_n = 3^n$ , observe a Tabela 3: Triângulo de Sierpinski a seguir.

Comprimento do Lado de Cada Triângulo	Quantidade de Triângulos
$C_0 = x$	$I_0 = 1$
$C_1 = \frac{x}{2}$	$I_1 = 3$
$C_2 = \frac{x}{4}$	$I_2 = 9$
$C_3 = \frac{x}{8}$	$I_3 = 27$
...	...
$C_n = \frac{x}{2^n}$	$I_n = 3^n$

Tabela 3: Triângulo de Sierpinski

Agora, calculando a dimensão do fractal do triângulo de Sierpinski; sabemos que em cada iteração temos em cada triângulo três novos triângulos, o que mostra que o número de peças é  $n = 3$ ; cada um desses triângulos possuem lados como sendo a metade do anterior, logo o coeficiente de redução é  $r = \frac{1}{2}$ , o que significa que nosso fator de ampliação é  $m = 2$ . Assim, calculando sua dimensão, obtemos

$$D = \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log 3}{\log 2} \approx 1,58496.$$

#### 4.4.2 Quadrado de Sierpinski

O Quadrado de Sierpinski também chamado de Tapete de Sierpinski é uma figura plana que ocorre em sua iteração a “retirada” de partes como mostramos em sua construção, é um fractal de remoção como vimos na Seção 3.2.2.

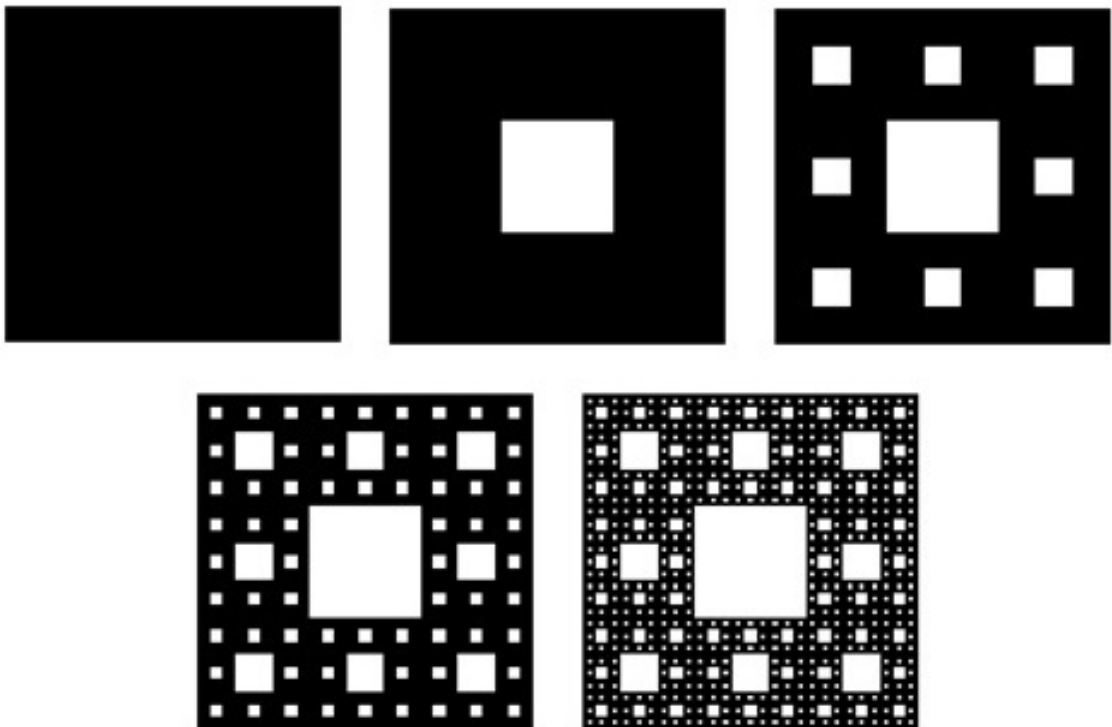


Figura 15: Quatro Iterações do Tapete de Sierpinski

Analisando este fractal, observamos que chamando o comprimento inicial do lado do quadrado de  $x$ , temos a iteração  $C_0 = x$ . Fazendo a primeira iteração, o tamanho do segmento inicial passa a ser a terça parte do comprimento do quadrado inicial. Portanto o comprimento do lado de cada novo quadrado passa a ser de  $C_1 = \frac{x}{3}$ . Continuando para a próxima iteração temos que o comprimento de cada novo quadrado é  $C_2 = \frac{x}{9} = \frac{x}{3^2}$ . Verificamos que então para  $n$  iterações, obtemos que o comprimento de cada segmento dos quadrados é dado por  $C_n = \frac{x}{3^n}$ . Agora a quantidade de quadrados

gerados por cada iteração é de  $I_0 = 1$ , na segunda iteração obtemos em cada quadrado anterior oito novos quadrados, ou seja, temos  $I_1 = 8$ , continuando as iterações, na segunda temos  $I_2 = 64 = 8^2$ , assim continuando até  $n$  iterações, obtemos  $I_n = 8^n$ . Veja a Tabela 4: Quadrado de Sierpinski.

Comprimento do Lado de Cada Quadrado	Quantidade de Quadrados
$C_0 = x$	$I_0 = 1$
$C_1 = \frac{x}{3}$	$I_1 = 8$
$C_2 = \frac{x}{9}$	$I_2 = 64$
$C_3 = \frac{x}{27}$	$I_3 = 512$
...	...
$C_n = \frac{x}{3^n}$	$I_n = 8^n$

Tabela 4: Quadrado de Sierpinski

Agora, calculando a dimensão do fractal do quadrado de Sierpinski; sabemos que em cada iteração temos em cada quadrado teremos oito novos quadrados, o que mostra que o número de peças é  $n = 8$ . Cada um desses quadrados possuem lados como sendo a terça parte do anterior, logo o coeficiente de redução é  $r = \frac{1}{3}$ , o que significa que nosso fator de ampliação é  $m = 3$ . Assim, calculando sua dimensão, obtemos

$$D = \frac{\log n}{\log m} = \frac{\log 8}{\log 3} \approx 1,89279.$$

## 5 Fractais e Conteúdos

O grande desafio dos professores no Ensino Fundamental II e Ensino Médio tem sido responder aos alunos sobre a aplicabilidade dos conteúdos de Matemática; no decorrer dos 7 anos de estudo, nos deparamos com conteúdos que na maior parte das vezes não são interessantes aos alunos, tanto que os desmotivam e fazem com que conclua por si próprios que “(...) matemática é muito difícil, ou (...) não gosto de matemática”. Para tentar amenizar isso e fazer com que os alunos possam ter prazer ao desenvolver atividades de matemática, tratamos alguns conteúdos que podemos abordar a geometria do fractal como um auxílio ao professor, buscando desempenhar no educando um gosto por tal conteúdo, visando uma aprendizagem dinâmica, visto que os fractais clássico são belas figuras e que despertam curiosidade.

Conteúdos como área e perímetro de figuras planas, que são muito estudados durante os anos de 6º e 7º do Ensino Fundamental II, podem ser auxiliados ao se analisar os fractais de fáceis construções como: Curva de Koch, Triângulo e Quadrado de Sierpinski. O professor pode pedir aos educandos que façam as construções em folha de malha quadriculada ou de malha triangular usando diferentes medidas já pré-definidas. Assim após tal confecção, estudar as definições de perímetro e área, aplicando cálculos nas figuras construídas.

Para estudar frações com seus alunos o professor pode usar como auxílio o fractal Conjuntos de Cantor, de fácil comparação dimensionada, podendo definir várias divisões e mantendo proporções de uma iteração a outra, usando razão e proporção juntamente com o estudo de frações. Bem como fazer até comparações na música que usa muito em seu compasso musical frações geradas pelo Conjunto de Cantor como:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ , e assim mantendo uma mesma razão. Ainda para se estudar fração podemos usar os outros fractais de remoção como: o Triângulo e Quadrado de Sierpinski;

como são fractais que possuem divisões padronizadas, pode-se usá-los para ensinar a formação de uma fração, uma quantidade comparada a um todo.

Em turmas de 8º anos o professor pode aplicar o uso de fractais no cálculo e estudo de ângulos internos e externos em figuras geométricas, usando praticamente todos os fractais aqui estudados. O professor pode no decorrer desse conteúdo usando como auxílio trabalhar com as figuras dos fractais e propor a seus alunos que calculem a soma dos ângulos internos de figuras fechadas, propor também para que se determine alguns ângulos mediante algumas medidas já pré-definidas, entre outros.

Para alunos que cursam o 9º ano do Ensino Fundamental, podemos usar os fractais em aplicação nas razões trigonométricas, bem como no cálculo usual dessas razões. Utilizando os fractais do tipo Dürer, que utilizam muito de ângulos e cálculo de seno, cosseno e tangente, para determinar seus lados ou fator de redução do lado da figura. Pode-se, utilizando esses fractais, propor até mesmo a construção manual dos mesmos, visando fixar o ensinamento que o educando vem adquirindo desde o início do Ensino Fundamental II.

Partindo para nível de Ensino Médio, o professor pode trabalhar com inúmeras áreas de conhecimento da Matemática, basta que ele tenha uma certa criatividade e disposição para querer usar os fractais em seus estudos. Além de todos os conteúdos que foram mencionados no Ensino Fundamental II (que o professor do Ensino Médio também pode usá-los como uma maneira de revisar conteúdos já estudados), aprofundando mais seu estudo no Ensino Médio. O professor pode utilizar na trigonometria, reforçando a Lei dos Senos com os fractais dos tipos Dürer e Árvore (observe o apêndice com alguns desses cálculos), que necessitam para facilitar os cálculos feitos por alunos de 9º ano com trigonometria inicial. Também pode-se utilizar o cálculo de logaritmo e nos mesmos as transformações de bases logarítmicas, bem como cálculos exponenciais,

muito utilizados nos fractais em seus cálculos de dimensão fractal, podendo analisar todos os fractais aqui estudados, visto que todos possuem dimensão calculada a partir de uma relação exponencial que foi modificada para uma razão de logaritmos (vimos essa mudança por meio de cálculos anteriormente).

Agora cabe a você, caro colega, dedicação ao estudo para melhor entendimento dos fractais, podendo e usando essa grande amplitude de possibilidades que os fractais nos trazem, utilizando-as em seus conteúdos transmitidos aos alunos. Conseguindo usar fractais, os alunos começarão a pensar melhor no por que e para que estudar a Matemática em sala, o porque da Geometria e em até outros porquês. Tornando as aulas mais dinâmicas e interessantes.

## 5.1 Outras Aplicações

Vimos durante o histórico de alguns fractais percursores que tais figuras surgiram muitas vezes relacionadas à alguns estudos aprofundados em outras áreas que não são classificadas como áreas da Matemática. Benoit quando estudou fractais na área computacional trabalhando para a IBM, ajudando a solucionar problemas envolvendo ruídos telefônicos, finanças, é um grande exemplo. Com isso, verificamos um grande avanço nos estudos dos fractais, tanto que hoje muitas teorias e explicações em diversas áreas afins à Matemática utilizam dos conceitos estabelecidos a partir dos fractais. Vejamos alguns exemplos.

Na área computacional, utiliza-se de softwares que geram e simulam paisagens como montanhas, nuvens, mares, rios ou florestas, percebe-se que a aplicação dos fractais na área computacional vem revolucionando muito essa área. Pois, com os fractais começou-se a criar imagens cada vez mais complexas e cada vez mais ricas em detalhes. Sejam essas imagens para serem utilizadas em filmes, jogos ou animações e observamos

que cada vez mais e melhores resultados estão sendo obtidos.

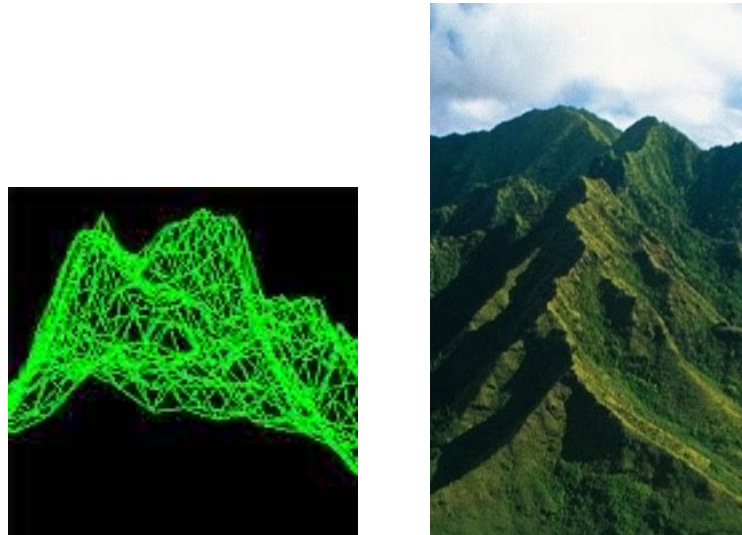


Figura 16: Montanha Sendo Criada por Computação Gráfica

Na área biológica, na natureza, percebe-se que muitas plantas que antes não se tinham conhecimento de como era seu crescimento, agora podem ser estudadas. Pois verificaram que tais plantas, tem seja em sua folha, em seu fruto, ou na própria planta um fractal determinístico, que gera tal formação em cadeia, fazendo com que um pedaço muito pequeno seja semelhante ao maior e assim sucessivamente.

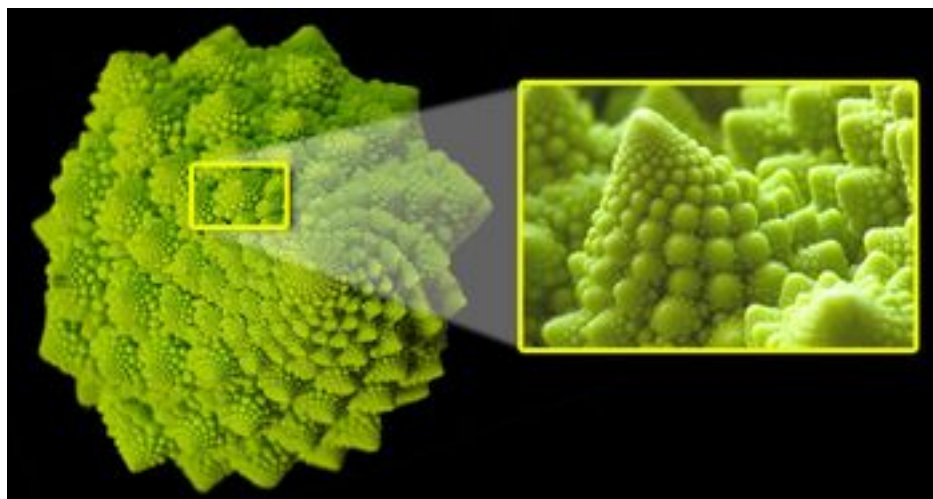


Figura 17: Couve com Zoom, Mostrando sua Igualdade



Figura 18: Samambaia



Figura 19: Raio

Dentro da medicina, alguns órgãos como pulmões, rins e cérebro, tem em sua formação algo semelhante ao fractal, ou seja, são partes do corpo tão perfeitas que suas características são de fractais. Mas não somente órgãos na medicina, estudos comprovam que alguns vírus e bactérias também se comportam como fractais, o que está gerando algum avanço, pois como se conhecem muitos fractais e já se sabe como são gerados, ficam mais fáceis estudar tais organismos.



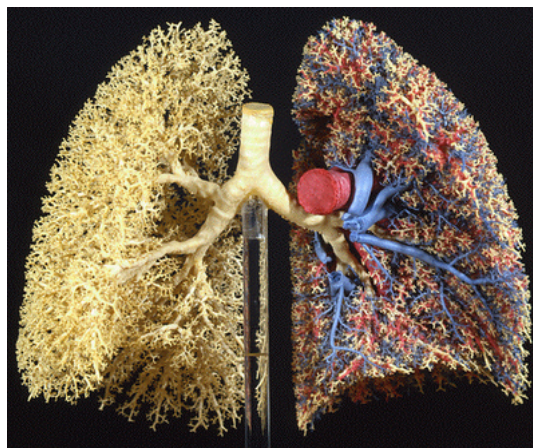


Figura 20: Pulmão

Como citado logo no início, hoje sabe-se que grandes empresas trabalham muito com finanças, obtendo grandes lucros ou prejuízos em poucas horas, para conseguir prever possíveis alterações em partes financeiras, como bolsa de valores, mercado imobiliário, intercâmbio (conversões) de moedas, muitas empresas trabalham com resultados fractais em suas transações, podendo prever possíveis ganhos ou perdas de rentabilidade.

Observando dessa maneira, vemos que os fractais recentemente ganharam muita força em diversas áreas, visto que nas últimas décadas estão sendo muito estudados. Podemos imaginar que em breve teremos grandes inovações em diversas áreas e muitas delas certamente serão baseadas em fractais, pois essa linda área da Matemática vem cada vez mais mostrando sua bela complexidade ao mundo.

## 6 Considerações finais

O nosso trabalho relacionou os fractais, suas construções e um estudo referente aos mesmos. Agora, esperamos que você, colega professor, possa usá-lo como um diferencial em seu cotidiano escolar, buscando sempre que possível mostrar a matemática presente em outras áreas; seja ela no fractal (que geram belas figuras) ou em outra, mas que não deixe de lado a vontade de querer que seus alunos aprendam e que seja de uma maneira diversificada, algo não tradicional, algo inovador.

Acredito que o curso de Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT, me fez crescer muito na área e enxergar isso, fazendo com que seu principal objetivo [8, aprimorar o professor de matemática atuante nos ensinios da educação básica visando estimular e melhorar o ensino da Matemática]) fosse alcançado por mim. Hoje percebo que meu conhecimento em Matemática foi ampliado e também que consigo transmitir tal conhecimento de maneira mais prática, fazendo com que alguns alunos gostem de Matemática e se divirtam pensando.

## Referências

- [1] BARBOSA, J.L.M.. *Geometria Hiperbólica*. IMPA,(2002).
- [2] MANDELBROT, B.B.. *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Company. 1982.
- [3] BARBOSA, R.M.. *Descobrendo a Geometria Fractal para a Sala de Aula*. Coleção Tendências em Educação Matemática. Autêntica Editora, 3ª ed. 2005.
- [4] BARKER, S.F.. *Filosofia da Matemática*. Curso Moderno de Filosofia. Tradução de Leonidas Hegenberg e Octanny Silveira da Mota. Zahar Editores. 2ª ed. 1976. p.27-76.
- [5] BOYER, C.B.. *História da Matemática*, revista por Uta C. Merzbach. Tradução Elza F. Gomide. 2ª ed. 2003. p.69-82.
- [6] RABAY, Y.S.F.. *Estudo e Aplicações da Geometria Fractal*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal da Paraíba, Paraíba. 2013. 103f.
- [7] MOREIRA, R.D.L.. *Fractais*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Universidade Federal do ABC, Santo André - SP. 2013. 81f.
- [8] PROFMAT - SBM. *Apresentação do Curso*. Disponível em: <http://www.profmatsbm.org.br/organizacao/apresentacao>.

em branco

## 7 Apêndice

### 7.1 Cálculo da Porcentagem de Redução do Lado do Fractal Dürer Pentagonal e Dürer Octogonal

No cálculo do Dürer Pentagonal e Octogonal, para determinar a porcentagem de redução dos lados, procedemos da seguinte maneira.

Primeiramente, calculamos o valor do ângulo interno do polígono em questão, por se tratar de polígonos regulares, usamos a fórmula da razão da soma dos ângulos internos pelo número de lados do polígono:

$$a_i = \frac{180^\circ \cdot (n - 2)}{n},$$

onde  $n$  é o número de lados do polígono, assim, para o pentágono obtemos:

$$a_i = \frac{180^\circ \cdot (5 - 2)}{5} = 108^\circ$$

e para o octógono:

$$a_i = \frac{180^\circ \cdot (8 - 2)}{8} = 135^\circ.$$

Agora, usando o triângulo isósceles central formado em cada figura, estabelecemos os ângulos internos desse triângulo isósceles; como sabemos que nesse caso os ângulos são suplementares, concluímos que no pentágono o triângulo formado possui ângulos  $72^\circ$ ,  $72^\circ$  e  $36^\circ$ ; e do octógono o triângulo possui ângulos  $45^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $90^\circ$ .

Observe as figuras 16 e 17 a seguir que mostram esses triângulos no polígono.

Pela figura, chamamos o lado da figura inicial de  $x$ , os lados da figura na primeira iteração de  $b$  e a base do triângulo central de  $c$ . Analisando esse triângulo isósceles

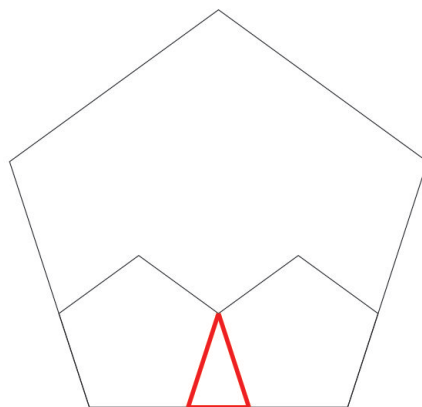


Figura 21: Triângulo Isósceles Central do Dürer Pentagonal

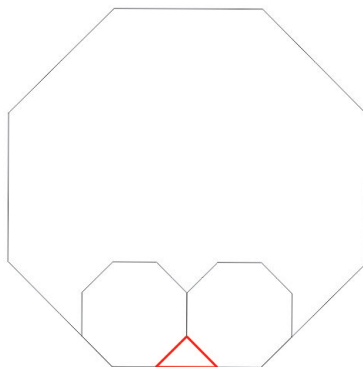


Figura 22: Triângulo Isósceles Central do Dürer Octagonal

conseguimos verificar que o valor  $x$  depende dos valores de  $b$  e  $c$ , daí obtemos a relação

$$I : \quad x = 2b + c.$$

Para calcular a porcentagem de redução para o dürer pentagonal, usando o triângulo isósceles formado nesse polígono e aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{\sin 36^\circ}{c} = \frac{\sin 72^\circ}{b},$$

fazendo os cálculos encontramos

$$c = 0,618033988 \cdot b.$$

Assim, substituindo essa relação encontrada em I, e isolando o  $b$ , obtemos que

$$b = 0,381966011 \cdot x.$$

Portanto, concluímos que o lado, em cada iteração, reduz a uma taxa de

$$\approx 38,2\%.$$

De maneira análoga, para calcular a porcentagem de redução para o Dürer Octogonal, usando o triângulo isósceles formado nesse polígono e aplicando a lei dos senos, obtemos:

$$\frac{\sin 90^\circ}{c} = \frac{\sin 45^\circ}{b},$$

fazendo os cálculos encontramos

$$c = 1,414213562 \cdot b.$$

Assim, substituindo essa relação encontrada em I, e isolando o  $b$ , obtemos que

$$b = 0,292893218 \cdot x.$$

Portanto, concluímos que o lado, em cada iteração, reduz a uma taxa de

$$\approx 29,3\%.$$

Assim, com os cálculos anteriores, a construção de qualquer um dos Dürer estudados aqui é menos dificultosa, bastando apenas construí-los de maneira a manter os lados proporcionais a porcentagem encontrada.

## 7.2 Cálculo da Porcentagem de Redução do Lado do Fractal Árvore Pitagórica Fundamental

Para calcular a porcentagem de redução de cada lado do fractal Árvore Pitagórica Fundamental, utilizamos o triângulo retângulo fundamental (com lados 3cm, 4cm e 5cm). Como cada cateto desse triângulo é hipotenusa dos novos triângulos laterais podemos fazer duas comparações de triângulos; uma do cateto menor e a outra do cateto maior. Vejamos:

Antes de iniciar o cálculo para os lados, temos que os dois triângulos são semelhantes, pois representam os mesmos ângulos, que são  $90^\circ$ ,  $36,9^\circ$  e  $53,1^\circ$ ; cálculo que foi feito utilizando o triângulo retângulo fundamental e a Lei dos Senos.

Para o cateto menor, fizemos a proporção do triângulo pitagórico com o novo triângulo de hipotenusa 3cm, obtemos a razão:

$$\frac{3}{5} = 0,6,$$

e calculando sua porcentagem obtemos que o fator de redução é de

$$0,6 \cdot 100 = 60\%.$$

Dessa maneira, usando a razão e/ou porcentagem encontrada, podemos calcular o valor do lado de cada novo triângulo retângulo construído sobre esse cateto, podendo assim desenhar seus novos quadrados. Observe os cálculos feitos para quatro iterações:



1ª iteração:

$$3 \cdot 0,6 = 1,8$$

$$4 \cdot 0,6 = 2,4$$

$$5 \cdot 0,6 = 3;$$

2ª iteração:

$$1,8 \cdot 0,6 = 1,08$$

$$2,4 \cdot 0,6 = 1,44$$

$$3 \cdot 0,6 = 1,8;$$

3ª iteração:

$$1,08 \cdot 0,6 = 0,648$$

$$1,44 \cdot 0,6 = 0,864$$

$$1,8 \cdot 0,6 = 1,08;$$

4ª iteração:

$$0,648 \cdot 0,6 = 0,389$$

$$0,864 \cdot 0,6 = 0,518$$

$$1,08 \cdot 0,6 = 0,648.$$

Para o cateto maior efetuamos os mesmos cálculos, assim a proporção do triângulo pitagórico com o novo triângulo de hipotenusa 4cm, tem razão:

$$\frac{4}{5} = 0,8,$$

para a qual sua porcentagem de redução é

$$0,8 \cdot 100 = 80\%.$$

Dessa maneira, usando a razão e/ou porcentagem encontrada, podemos calcular o valor do lado de cada novo triângulo retângulo construído sobre esse cateto, podendo assim desenhar seus novos quadrados. Observe os cálculos feitos para quatro iterações:

1ª iteração:

$$3 \cdot 0,8 = 2,4$$

$$4 \cdot 0,8 = 3,2$$

$$5 \cdot 0,8 = 4;$$

2ª iteração:

$$2,4 \cdot 0,8 = 1,92$$

$$3,2 \cdot 0,8 = 2,56$$

$$4 \cdot 0,8 = 3,2;$$

3ª iteração:

$$1,92 \cdot 0,8 = 1,536$$

$$2,56 \cdot 0,8 = 2,048$$

$$3,2 \cdot 0,8 = 2,56;$$

4ª iteração:

$$1,536 \cdot 0,8 = 1,229$$

$$2,048 \cdot 0,8 = 1,638$$

$$2,56 \cdot 0,8 = 2,048.$$

Com esses cálculos, a construção da árvore pitagórica é menos dificultosa, bastando apenas desenhá-los de maneira a manter os lados proporcionais e os ângulos internos congruentes.