Universidade Federal de Goiás
Regional Jataí
Coordenação de Matemática
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Integral Complexa: Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy e Aplicações.

Saulo Henrique de Oliveira

Jataí

2015

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Saulo Henrique de Oliveira					
E-mail:	saulo.henrique@ueg.br					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [X]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor	Universidade Estadual de Goiás – Câmpus Iporá					
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior				Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	00889834/0001-08	
Título:	Integral Complexa: Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy e Aplicações.					
Palavras-chave:	Integral Complexa, Teorema de Cauchy e Fórmula Integral de Cauchy					
Título em outra língua:	Complex Integral: Cauchy's Theorem, Cauchy Integral Formula and Applications					
Palavras-chave em outra língua:	Complex Integral: Cauchy's Theorem, Cauchy Integral Formula					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	29/04/2015					
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT					
Orientador (a):	Ole Peter Smith					
E-mail:	ole.ufg@gmail.com					
Co-orientador(a):*						
E-mail:						

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [X] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Saulo Henrique de Oliveira

Assinatura do autor

Data: 27/04/2015

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Saulo Henrique de Oliveira

Integral Complexa: Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy e Aplicações.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Superior
Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith

Jataí

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Oliveira, Saulo Henrique de
Integral Complexa: Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy e Aplicações [manuscrito] / Saulo Henrique de Oliveira. - 2015.
LXI, 61 f.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional Jataí , Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT - Profissional), Jataí, 2015.
Bibliografia.
Inclui gráfico, lista de figuras.

1. Integral Complexa. 2. Teorema de Cauchy. 3. Fórmula Integral de Cauchy. I. Smith, Ole Peter , orient. II. Título.

Saulo Henrique de Oliveira

Integral Complexa: Teorema de Cauchy, Fórmula Integral de Cauchy e Aplicações.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 29 de abril de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Ole Peter Smith
Presidente da Banca – UFG/Goiânia

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Membro – UFG/Goiânia

Prof. Dr. Reinier Díaz Millán
Membro – IF/Goiânia

Saulo Henrique de Oliveira graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás em 2003. Cursou, pela Universidade Federal de Lavras-MG o curso de Pós-Graduação "Lato Sensu"em Matemática e Estatística no período de abril de 2005 a agosto de 2006. Atualmente é professor da Secretaria Estadual de Educação em Iporá e Universidade Estadual de Goiás - UEG.

Dedico este trabalho a minha família, que me acompanhou por todos estes anos, em especial, meu filho Gustavo Henrique e minha esposa Mara Rúbia, que são fontes de inspiração e coragem para prosseguir. Vocês foram apoio, amparo e motivação. Pelo amor que transformou meus sonhos em suas vontades, esta conquista também é de vocês.

Agradecimentos

À Deus, obrigado Senhor por ter me dado a graça da vida, por esta etapa vencida, por me proporcionar a oportunidade de aprender e também ensinar, e por fazer parte da minha vida, especialmente, durante toda essa caminhada fortalecida pelas tuas bênçãos. Receba Senhor, meus eternos agradecimentos.

Aos meus familiares, que me incentivaram em todos os momentos, especialmente minha mãe, que me cobria com orações, compreendendo toda dificuldade encontrada. A vocês que estiveram sempre ao meu lado, meus sinceros sentimentos de gratidão e agradecimentos.

À minha esposa Mara Rúbia e ao meu filho Gustavo Henrique, pela tolerância e compreensão para com minhas ausências, os meus eternos agradecimentos.

Aos professores, pelo excepcional auxílio, atenção e incentivos no decorrer do mestrado, sou muito grato a vocês.

Aos meus colegas, em especial Cláudio e Uender, que em todos os momentos me apoiaram e ajudaram a superar os obstáculos encontrados, somos agora todos vencedores de uma mesma batalha, obrigado por estar entre vocês.

Ao professor Dr. Ole Peter Smith, pela orientação segura e cuidadosa, pelos momentos de troca de experiências, pela dedicação e pela paciência.

À CAPES, pelo incentivo financeiro.

Resumo

Este trabalho foi desenvolvido com o objetivo de fazer uma análise sobre integral complexa, mostrando de maneira simplificada o cálculo de uma integral complexa através da Fórmula Integral de Cauchy. Para um melhor entendimento, requer alguns pré-requisitos tais como: um entendimento sobre um curso de cálculo, cobrindo derivadas e integrais. Requer também um domínio sobre variáveis complexas. Aportes teóricos referentes aos métodos propostos são apresentados com a finalidade de aprimorar os conhecimentos sobre os assuntos. Inicialmente realizou-se uma retomada sobre a Exponencial Complexa, seguindo pelas Funções de Variável Complexa, fazendo um estudo, superficial sobre Limite e Continuidade e também sobre Derivação Complexa e as equações de Cauchy-Riemann. Num segundo momento foram levantadas algumas problematizações com intuito de mostrar de forma simples a Fórmula Integral de Cauchy, fazendo, também, um estudo sobre Integral de Contorno, funções holomorfas e o Teorema de Cauchy. As aplicações foram realizadas tomando como base, alguns exemplos e fazendo o cálculo simplificado. Após todo esse processo, concluiu-se que com base no Teorema de Cauchy é possível obter a Fórmula de Cauchy, a qual dá os valores de uma função holomorfa num conjunto de pontos fora de uma curva fechada em termos de integrais que envolvem apenas os valores da função sobre essa curva. A ênfase do trabalho está no desenvolvimento dos métodos, reduzindo a um mínimo o rigor, a fim de facilitar o aprendizado.

Palavras-chave

Integral Complexa, Teorema de Cauchy, Função holomorfa, Fórmula Integral de Cauchy.

Abstract

This work was developed with the goal of making a full complex of analysis, showing a simplified way to calculate a complex integral by the Cauchy Integral Formula. For a better understanding, requires some prerequisites such as: understanding of calculus, covering derivatives and integrals. It also requires dominaling complex numbers. Theoretical contributions regarding the proposed methods, are presented in order to improve knowledge on the subjects. Initially there was a resumption of the Exponential Complex, followed by the complex variable functions, doing a study, surface on Limit and Continuity and also on Complex Derivation and equations of Cauchy - Riemann. Secondly, we raise problematizations aiming to show simply the Integral Formula Cauchy, making also a study on the Boundary Integral, holomorphic functions and the Cauchy Theorem. The applications were applications are made based on examples with shortend calculus and with the simplified calculation. After the entire process, we conclude that based on the Cauchy's Theorem it possible to obtain the Cauchy formula, which gives the values of a holomorphic function of a set of points outside a closed curve in terms of involving only integral function values on the curve. The emphasis of the work is on the development of methods, reducing to a minimum the rigor, in order to facilitate learning.

Keywords
Integral Complex, Cauchy Theorem, function holomorphic and Cauchy Integral Formula.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Esta dissertação é parte dos requisitos para obtenção do título de mestre em Matemática pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).

No trabalho, apresentamos uma proposta de ensino-aprendizagem que utiliza a compreensão de conceitos matemáticos, bem como, o entendimento da constução desses conceitos. Foi realizada uma investigação de modo a contribuir para que os leitores construam uma visão do que se refere à Fórmula Integral de Cauchy, sob a condição de analiticidade de funções complexas e sua relação com a derivada. Usando para isto conceitos da integral de contorno, de forma que consigam vislumbrar generalizações e aplicações para a Fórmula Integral de Cauchy.

Dentre os objetivos do trabalho, destacamos:

- Apresentar e discutir conceitos importantes relacionados à integral complexa;
- Interpretar e calcular uma singularidade dentro de uma região R;
- Oferecer um aporte teórico sobre o Teorema de Cauchy e a Fórmula Integral de Cauchy;
- Perceber a relação entre a Integral de Contorno e a Fórmula Integral de Cauchy;
- Interpretar e utilizar a Fórmula Integral de Cauchy para resolver integrais complexos;
- Mostrar que através da resolução de tais problemas, podemos promover a discussão sobre perspectivas e possíveis ações à serem adotadas;

Para desenvolver nossa proposta organizamos o trabalho em cinco seções. Na Seção 1 fizemos uma retomada sobre a Exponencial Complexa, seguindo pelas Funções de variável complexa, fazendo um estudo, superficial sobre Limite e Continuidade, passando pela Derivação Complexa e as equações de Cauchy-Riemann. Na Seção 2 utilizamos a definição de arcos e contornos, passando superficialmente pelo Teorema de Jordan. Na Seção 3, fizemos uma explanação sobre a Integral Curvelínea ou de Contorno, bem como as suas propriedades e seus métodos mais comuns. Em seguida, na Seção 4, tratamos do Teorema de Cauchy, considerado como sendo o teorema fundamental da teoria das funções analíticas, passando pelo Teorema Fundamental do Cálculo e pelas

Primitivas. Enfim, na Seção 5 utilizamos o Teorema de Cauchy para provar a Fórmula Integral de Cauchy e realizar algumas aplicações da fórmula.

A metodologia utilizada foi pesquisa bibliográfica e na internet. Durante o desenvolvimento dos cálculos e na construção de alguns gráficos nos apoiamos em softwares apropriados, por exemplo o GeoGebra.

Esperamos que esse trabalho contemple um dos nossos desejos como educador, que é levar o leitor, em especial os alunos, a gostarem mais de matemática. Desenvolvendo a percepção do valor da matemática como construção humana, reconhecendo a contribuição da matemática para a compreensão e respostas de problemas do homem, apreciando a beleza da matemática e a presença dela na natureza, nas ciências e no cotidiano. Enfim, buscaremos uma proximidade com a matemática.

1 Funções Analíticas

Inicialmente, faremos uma retomada sobre algumas propriedades e definições que nos ajudarão melhor no entendimento e no desenvolvimento do trabalho. A intenção é comentar sobre essas propriedades, neste momento, não será foco principal a demonstração.

1.1 Exponencial

Define como exponencial complexa, e^z para qualquer número complexo $z = x + iy$, como sendo:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy}.$$

Da constante de Euler[1] e do desenvolvimento das séries de MacLaurin[2] , temos:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y,$$

cuja demonstração podemos encontrar em [2]. Assim, a exponencial complexa é definida como:

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Propriedades da exponencial

Das propriedades das funções reais $\sin x, \cos x$ e e^x e da definição da exponencial, decorrem as propriedades:

1. $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

2. $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;

3. $(e^z)^n = e^{nz}, \quad n \quad inteiro$;

[1]Leonhard Paul Euler (1707-1783)
[2]Colin Maclaurin (1698-1746)

4. $e^z \neq 0$ *para todo* z;

5. $|e^z| = e^{Re\, z}$ [3];

6. $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i, \quad k$ *inteiro.*

A demonstração dessas propriedades pode ser encontrada em [2].

Com isso, a forma trigonométrica de um número complexo pode ser representada por $z = re^{i\theta}$ sendo $r = |z|$ e $\theta = \arg z$.

Exemplo 1. *No número complexo* $z = 1+i$*, temos que* $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$ *e* $\theta = \pi/4$*, sendo assim, este número complexo assume a forma* $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

1.2 Funções de Variável Complexa

As funções complexas de uma variável complexa constituem o objeto principal de estudo desse trabalho.

Uma função complexa f é uma função $f : A \to \mathbb{C}$ cujo domínio A está contido em $\mathbb{C}$. Isso nos diz que sendo A um conjunto de números complexos e f uma lei que faz corresponder cada elemento z do conjunto A, a um único número complexo $f(z)$ de $\mathbb{C}$.

Podemos expressar uma função $f : A \to \mathbb{C}$, para $f = u + iv$, em termos de sua parte real e de sua parte imaginária, dadas por:

$$u = u(x, y) = Re\,[f(z)] \quad e \quad v = v(x, y) = Im\,[f(z)]\,.$$

[3] $Re\ z$ representa a parte real do número complexo z, enquanto que $Im\ z$ representa a parte imaginária do número complexo z.

Exemplo 2. *Na função* $f(z) = z^2 - 2z + 3$, *substituindo* $z = x + iy$, *temos: a parte real,* $u(x, y) = x^2 - y^2 - 2x + 3$ *e a parte imaginária,* $v(x, y) = 2xy - 2y$.

1.2.1 Limite e Continuidade

A definição de limite de uma função complexa segue a mesma metodologia do limite de uma função real.

Definição 1. *Seja* z_0 *um ponto de acumulação*[4] *do domínio* D *de uma função* f. *Diz-se que* f *tem limite* L *com* z *tendendo a* z_0 *se dado qualquer* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$z \in D, 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - L| < \epsilon.$$

Escreve-se:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L.$$

Quando o ponto z_0 pertence ao domínio da função, neste caso, pertence ao conjunto D e $L = f(z_0)$, temos que f é contínua no ponto z_0 e escrevemos:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

As propriedades do limite conhecidas no caso das funções reais, permanecem válidas para as funções de variável complexa.

Exemplo 3. *Usando a Definição* 1, *mostre que* $\lim_{z \to 1}(3z - 1) = 2$.

De fato temos que:

$|(3z - 1) - 2| = |3z - 3| = 3|z - 1|$.

Dado qualquer $\epsilon > 0$, basta tomar $\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$ tal que, se $0 < |z - 1| < \delta$, então: $3|z - 1| < 3\delta = \epsilon$.

[4] z_0 é ponto de acumulação de um conjunto A se qualquer vizinhança de z_0 contém infinitos pontos de A.

As propriedades do limite, relativas aos limites da soma, do produto, do quociente etc., já conhecidas no caso de funções de variáveis reais, permanecem válidas para funções de variável complexa e são estabelecidas como no caso de variável real.

Uma maneira útil de se verificar o limite de uma função complexa, é usar a teoria de funções em duas variáveis, neste caso, calculando os limites de suas partes real e imaginária, conforme teorema a seguir.

Teorema 1. *Sejam f uma função complexa, com $f = u + iv$ e $L = U + iV$ números complexos, e escrevemos $z = x + iy$. Então*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L$$

se, e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = U \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = V$$

Prova Pode ser encontrada em [2].

Exemplo 4. *Usando o teorema acima, mostre que $\lim_{z\to 2i}(z^2 - 3z) = -4 - 6i$.*

Resolução

Sabendo que se $z = x + iy$, temos:

$z^2 - 3z = (x + iy)^2 - 3(x + iy) = x^2 + 2xyi - y^2 - 3x - 3yi$ e portanto neste caso $u(x,y) = x^2 - y^2 - 3x$ e $v(x,y) = 2xy - 3x$. Quando $z \to 2i = 0 + 2i$ temos que $(x,y) \to (0,2)$, consequentemente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} u(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,2)} (x^2 - y^2 - 3x) = -4,$$

e

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} v(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,2)} (2xy - 3y) = -6,$$

portanto $\lim_{z\to 2i}(z^2 - 3z) = -4 - 6i$.

1.2.2 Derivação Complexa

O conceito de derivada de uma função de variável complexa é formalmente a mesma usada no caso de uma função de variável real.

Uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é diferenciável em um ponto z_0 de uma região A (conjunto aberto e conexo) se existir o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Esse limite é chamado derivada de f em z_0 e é denotado por $f'(z_0)$.

Proposição 1. *Se uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é diferenciável em um ponto z_0, então f é contínua em z_0.*

Prova Pode ser encontrada em [4].

Exemplo 5. *Sendo $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ e $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, definidas como (fórmulas de Euler)*[5]*, mostre que se $f(z) = \sin z$, então $(\sin z)' = \cos z$ para todo $z \in \mathbb{C}$.*

Resolução

$$f'(z) = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \left(\frac{ie^{iz} - (-i)e^{-iz}}{2i} \right) = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right) = \cos z$$

Definição 2. *Uma função $f : A \to \mathbb{C}$ é analítica numa região A se ela é derivável em cada ponto de A: f é analítica num ponto z_0 se f é analítica numa região contendo z_0.*

[5] A demonstração dessas fórmulas podem ser encontradas em [2]

Temos, ainda que, quando uma função é analítica em todos os pontos de $\mathbb{C}$, ela é dita *inteira*.

Função holomorfa são funções definidas no plano complexo e que são infinitamente deriváveis sobre o plano complexo. Por exemplo, a integral[6] da função:

$$f(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2}$$

não é definida em todo o plano, pois sendo $z = \pm\sqrt{2}$ e integrando f sobre o círculo com centro na origem e raio $r = 2$, o denominador fica igual a zero. Os pontos onde isso acontece são chamados de *pontos de singularidade*. O termo função analítica é frequentemente usada no lugar de função holomorfa.

1.2.3 As equações de Cauchy-Riemann

As regras de derivação de funções reais que são válidas para funções complexas e um estudo mais detalhado sobre a derivada de uma função de variável complexa, deixaremos a cargo do leitor, que pode encontrá-las em [4]. Trataremos agora, das equações de Cauchy-Riemann, que estabelece uma certa compatibilidade entre as derivadas parciais das partes real e imaginária da função f.

Proposição 2. *Consideremos uma função $f : A \to \mathbb{C}$ e representemos f em termos de suas partes real e imaginária como uma função de duas variáveis reais:*

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Se f é diferenciável em um ponto z_0, então as derivadas parciais

$$\partial u/\partial x, \ \ \partial u/\partial y, \ \ \partial v/\partial x \ \ e \ \ \partial v/\partial y$$

existem neste ponto e satisfazem as equações

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

[6] O cálculo de uma integral de função complexa, será tratada com mais detalhes na seção 3.

As equações acima, são chamadas equações de Cauchy-Riemann. Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

Prova Pode ser encontrada em [4].

Estaremos utilizando o conceito das equações de Cauchy-Riemann, mais adiante na seção 4, utilizadas na demonstração do Teorema de Cauchy.

2 Integral Complexa

A integração de funções de uma variável complexa é realizada ao longo de uma curva C e conduz a muitos resultados úteis e importantes em matemática pura e aplicada. Nessa seção, faremos um breve estudo sobre arcos e contornos e também, integral de contorno.

2.1 Arcos e Contornos

Define-se por arco como um conjunto C de pontos, representado parametricamente por uma função $C = \{z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\}$ com $z(t)$ uma função contínua em t,com t variando no intervalo [a, b]. Uma parametrização $z = z(t)$ determina uma orientação dos pontos de C, com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes de t. O conjunto constituído pelos mesmos pontos de C, mas com orientação oposta é o arco que denota por $-C$,(Figura 1) cuja representação paramétrica é dada por

$$z_1(t) = z(-t). \qquad -b \leq t \leq -a.$$

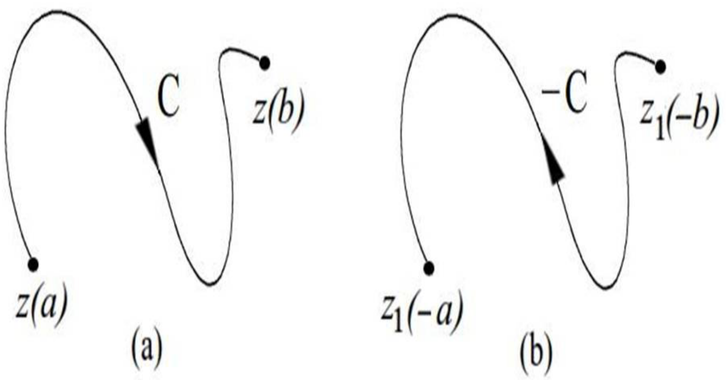

Figura 1: Representação Gráfica do caminho C e $-C$.

Figura retirada de [2]

Dentre os caminhos para integração, destacamos:

Caminho Simples é aquele que não se intercepta em nenhum ponto entre os pontos terminais. Temos, então, que o **caminho simples** é injetivo, isso significa que o ponto $z(t)$ percorre a curva C, com t variando de a para b, passando uma vez por cada um de seus pontos.

Caminho não simples é aquele que contém pelo menos um ponto múltiplo, ou seja, para valores distinto de t temos $z(t_1) = z(t_2)$, para $t_1 \neq t_2$.

Temos ainda que um caminho C pode ser não fechado, neste caso, temos que os pontos terminais distinguem um do outro, $z(a) \neq z(b)$. Ou ainda, temos os caminhos fechados, os quais os pontos terminais são coincidentes, $z(a) = z(b)$.

Um caminho fechado simples chama-se **curva de Jordan**[7]. Quando C é uma curva de Jordan, chamamos de orientação positiva se o sentido de percurso de C é no sentido anti-horário. A outra orientação é a orientação oposta. Sempre que falarmos de uma curva de Jordan sem mensionar a orientação, estaremos falando da orientação positiva.

[7] Camille Marie Ennemond Jordan (1838-1922)

Na figura 2, temos em (a) um **caminho não simples**, pois possui um ponto múltiplo. Em (b), temos uma **curva de Jordan** e em (c) temos um **caminho fechado não simples**, conforme definição acima:

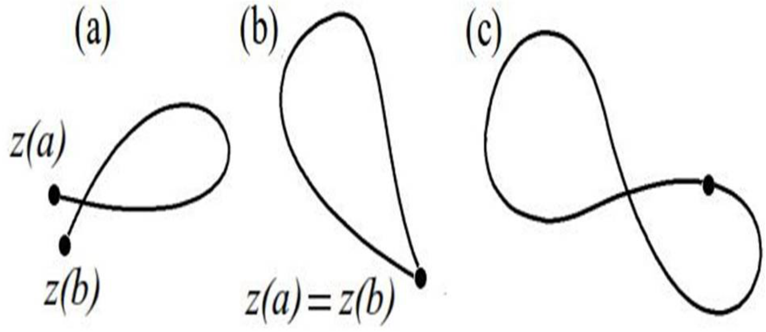

Figura 2: Tipos de Caminhos.

Figura retirada de [2]

A seguir, apresentamos alguns exemplos representando alguns caminhos:

Exemplo 6. *A equação* $z(t) = 3 - it$*, para* $0 \leq t \leq 2$*, representa um caminho aberto simples, que é o segmento* $[3, 3 - 2i]$*, orientado do ponto* $A = (3, 0)$ *para o ponto* $B = (0, 3 - 2i)$ *conforme a figura* (3).

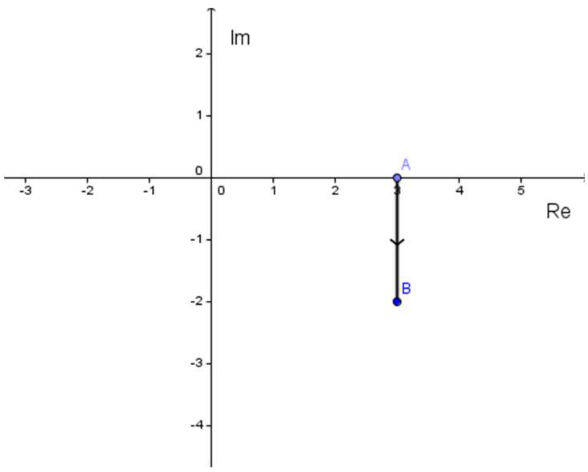

Figura 3: Representação Gráfica do caminho $z(t) = 3 - it$, para $0 \leq t \leq 2$.

Exemplo 7. *Na equação* $z(t) = e^{it}$, *para* $0 \leq t \leq 2\pi$, *verificamos que:*

Sabendo que $z(t) = e^{it}$ pode ser escrito como $z(t) = \cos t + i \sin t$, (exponencial complexa), esta equação representa um caminho fechado simples. Neste caso, temos uma curva de Jordan, visto que a curva descreve uma volta completa sobre a circunferência de centro na origem e raio igual a 1, tendo apenas os pontos terminais coincidentes, $z(0) = z(2\pi)$. Esta curva de Jordan está representada na figura (4).

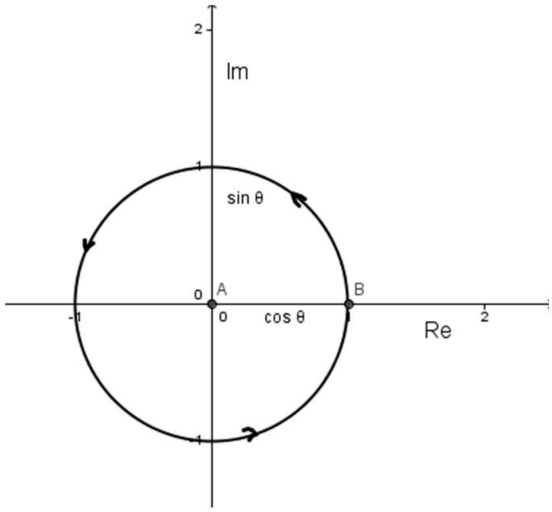

Figura 4: Representação Gráfica da equação $z(t) = e^{it}$ (curva de Jordan).

Exemplo 8. *Parametrizando um caminho.*

Sabendo que um caminho no plano complexo é da forma $C = \{z(t) = x(t) + iy(t) : a \leq t \leq b\}$. Com base nessa definição, mostraremos a seguir a forma parametrizada do caminho C que liga o ponto $A(0,0)$ ao ponto $B(3,2)$ representado na figura (5):

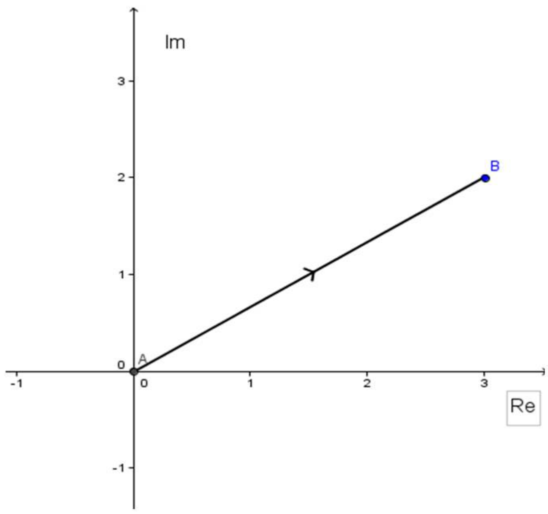

Figura 5: Caminho C ligando o ponto $A(0,0)$ ao ponto $B(3,2)$.

Podemos notar, que o segmento que liga os pontos A ao ponto B, faz parte de uma reta $y = ax + b$. Substituindo os pontos, temos:

$(0,0) \rightarrow b = 0$
$(3,2) \rightarrow a = \frac{2}{3}b$

Daqui temos que a equação geral da reta que passa pelos dois pontos é $y = \frac{2}{3}x$.

Agora, fazendo $x(t) = t$ temos então que $y(t) = \frac{2}{3}t$, encontramos assim a equação paramétrica da reta que passa por estes dois pontos.

Mas como queremos apenas o segmento $\overline{OA}$ devemos limitar o valor de t conveniente.

Note que o valor de x varia de zero ao ponto 2, ou seja, $0 \leq x \leq 2$, como $x = t$, temos que no segmento de reta $\overline{OA}$, o valor de t fica definido como: $0 \leq t \leq 2$.

Então a equação do caminho C é dada por $\{z(t) = t + \frac{2}{3}it : 0 \leq t \leq 2\}$.

2.2 Teorema de Jordan e Conectividade Simples

De acordo com [2] podemos interpretar o Teorema de Jordan[8] como sendo toda curva fechada simples C que divide o plano em duas regiões, tendo C como fronteira comum, onde o interior de C é limitada. O teorema afirma ainda que o interior de C possui uma propriedade chamada conectividade simples.

Uma região R é chamada conexa, quando quaisquer dois pontos de R podem ser ligados por um caminho inteiramente contido em R. Portanto, se além disso, essa região R não possuir "buracos"em seu interior, dizemos que esta é uma região simplesmente conexa. Isto porque não destrói a conectividade simples. Na figura (6) estão representadas estas regiões.

[8]Este teorema deve o seu nome a Camille Jordan, mas a primeira demonstração correta deste resultado deve-se a Oswald Veblen, em 1905.

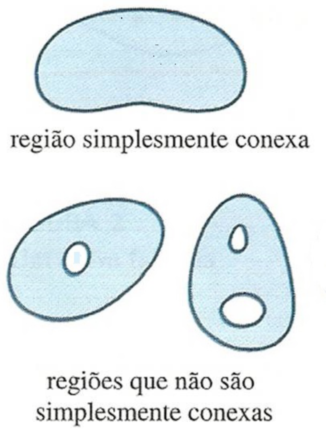

Figura 6: Regiões Conexas e Simplesmente conexas.

Figura retirada de [7]

3 Integral de Contorno

O cálculo de integrais complexos segue a mesma metodologia que os integrais curvilíneos das funções reais. Considerando uma função complexa de variável real t, $F(t) = U(t) + iV(t)$ num intervalo $[a, b]$, sua integral é definida em termos das funções U e V, de acordo com a sentença:

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt. \tag{1}$$

Propriedades:

$$Re\int_a^b F(t)dt = \int_a^b ReF(t)dt, \tag{2}$$

$$Im\int_a^b F(t)dt = \int_a^b ImF(t)dt. \tag{3}$$

Linearidade

$$\int_a^b [F(t) + G(t)]dt = \int_a^b F(t)dt + \int_a^b G(t)dt, \tag{4}$$

e

$$\int_a^b cF(t)dt = c\int_a^b F(t)dt,$$

sendo c qualquer constante complexa.

A prova destas propriedades pode ser encontrada em [2].

Da expressão (1), temos também, a seguinte propriedade:

$$\left|\int_a^b F(t)dt\right| \leq \int_a^b |F(t)|dt. \tag{5}$$

Notemos que essa propriedade é imediata se a integral do primeiro membro for nula. Caso contrário, sendo

$$\int_a^b F(t)dt = re^{i\theta} \quad (r > 0), \tag{6}$$

a sua representação polar. Daqui e de (4), obtemos:

$$r = e^{-i\theta}\int_a^b F(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta}F(t)dt, \tag{7}$$

ou ainda, usando (3) e o fato de $r \in \mathbb{R}$,

$$r = Re\int_a^b e^{-i\theta}F(t)dt = \int_a^b Re\left[e^{-i\theta}F(t)\right]dt, \tag{8}$$

sabendo que

$$\left|e^{-i\theta}\right| = 1.$$

Assim

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b F(t)dt\right| = r = \int_a^b Re\left[e^{-i\theta}F(t)\right]dt \leq \int_a^b \left|Re\left[e^{-i\theta}F(t)\right]\right|dt \\ \leq \int_a^b \left|e^{-i\theta}F(t)\right|dt \leq \int_a^b |F(t)|dt. \end{aligned} \tag{9}$$

3.1 Integral curvelínea ou de contorno

Seja C um contorno qualquer e $f = u + iv$ uma função contínua no conjunto dos números complexos, então, escrevemos

$$\int_C f(z)dz.$$

Para a representação do contorno C, $z = z(t), \quad a \leq t \leq b$, definimos

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \tag{10}$$

Se C for uma curva fechada, o integral representa-se por

$$\oint_C f(z)dz.$$

O segundo membro da equação 10 é do tipo da equação 1, sendo:

$$\int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \int_a^b Re\left(f(z(t))z'(t)\right)dt + i\int_a^b Im\left(f(z(t))z'(t)\right)dt.$$

Quando os integrais das funções reais do lado direito existem.

Com $(x(t), y(t)) = z(t)$ e $(u, v) = f$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt \\ &= \int_a^b [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)]dt \\ &+ \int_a^b [v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)]dt. \end{aligned} \tag{11}$$

Assim, o integral tem partes real e imaginária dadas por integrais de linha em R^2, calculados sobre o caminho $C_1 : [a, b]$ com $C_1(t) = (x(t), y(t))$.

Nota-se, ainda, que a integral definida em (11) pode ser escrita em termos das integrais curvilíneas, tratadas na teoria das funções reais, sendo:

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy).$$

3.1.1 Propriedades da Integral

Dentre as propriedades, destacamos a seguir, as mais elementares, as quais são análogas às existentes nos integrais curvilíneos no caso real, para qualquer curvas simples, C, C_1 e C_2.

1. Linearidade

$$\int_C [f_1(z) + f_2(z)]dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz,$$

$$\int_C cf(z)dz = c\int_C f(z)dz.$$

2. Sentido inverso da integração

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz.$$

3. Aditividade do integral em relação à partição de caminhos

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz.$$

A prova das propriedades da integral complexa podem ser encontradas em [2].

A seguir, apresentamos alguns exemplos, nos quais, utilizamos as propriedades mencionadas anteriormente, e também um método simples de resolução.

Exemplo 9. *Usando a equação* 1, *mostre que*

$$\int_a^b e^{it}dt = i(e^{ia} - e^{ib})$$

Resolução

Da equação (1), verificamos que para calcular uma integral definida de num intervalo $[a, b]$ de uma função complexa $F(t)$, separamos a parte real dessa função, neste caso representada por $U(t)$, da parte imaginária $V(t)$. Neste exemplo, usamos ainda, a função trigonométrica complexa, para representar a função exponencial, assim:

Como,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t,$$

então:

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{it} dt &= \int_a^b [\cos t + i \sin t] dt \\
&= \int_a^b \cos t dt + i \int_a^b \sin t dt \\
&= [\sin t - i \cos t]_a^b \\
&= \sin b - i \cos b - \sin a + i \cos a \\
&= i \cos a - \sin a - i \cos b + \sin b \\
&= i[\cos a + i \sin a] - i[\cos b + i \sin b] \\
&= ie^{ia} - ie^{ib} \\
&= i(e^{ia} - e^{ib}).
\end{aligned}$$

Exemplo 10. *Utilizando a definição de integral de contorno, calcule a integral da função $f(z) = z^2$, ao longo do caminho $z(\theta) = re^{i\theta}$, para $\theta \in [0, \pi]$.*

Resolução

De acordo com a fórmula apresentada na equação (10), uma integral complexa é calculada da seguinte maneira:

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Sendo

$$z(\theta) = re^{i\theta},$$

temos da exponencial complexa a igualdade:

$$z(\theta) = r(\cos\theta + i\sin\theta),$$

cuja derivada é:

$$z'(\theta) = r(-\sin\theta + i\cos\theta) = ri(\cos\theta + i\sin\theta) = rie^{i\theta}.$$

temos ainda que:

$$\begin{aligned} f(z(\theta)) &= \left(re^{i\theta}\right)^2 = r^2e^{2i\theta}, \\ f(z(\theta))z'(\theta)d\theta &= r^2e^{2i\theta}.rie^{i\theta} \\ &= r^3ie^{3i\theta}, \end{aligned}$$

substituindo estes valores na equação (10) temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi z^2dz &= \int_0^\pi r^3ie^{3i\theta}d\theta \\ &= \int_0^\pi r^3i(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)d\theta, \end{aligned}$$

da equação (1), temos:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi z^2dz &= r^3\left[\int_0^\pi -\sin 3\theta d\theta + i\int_0^\pi \cos 3\theta d\theta\right] \\ &= \left[\frac{r^3}{3}cos(3\theta) + i\frac{r^3}{3}sin(3\theta)\right]_0^\pi \\ &= \frac{r^3}{3}cos(3\pi) + i\frac{r^3}{3}sin(3\pi) - \frac{r^3}{3}cos(0) + i\frac{r^3}{3}sin(0) \\ &= -\frac{r^3}{3} - \frac{r^3}{3} = -\frac{2r^3}{3}. \end{aligned}$$

Exemplo 11. *Utilizando a definição de integral de contorno, calcule a integral da função $f(z) = z^2$, ao longo do caminho simples $z(t) = 2t + it$, para $t \in [0, 2]$.*

Resolução

Substituindo $t = 0$ e $t = 2$ na função $z(t) = 2t + it$, encontramos os pontos extremos do caminho indicado, que neste caso é um caminho retilíneo, ligando os pontos $O = (0,0)$ ao ponto $P = (4,2)$, conforme figura (7):

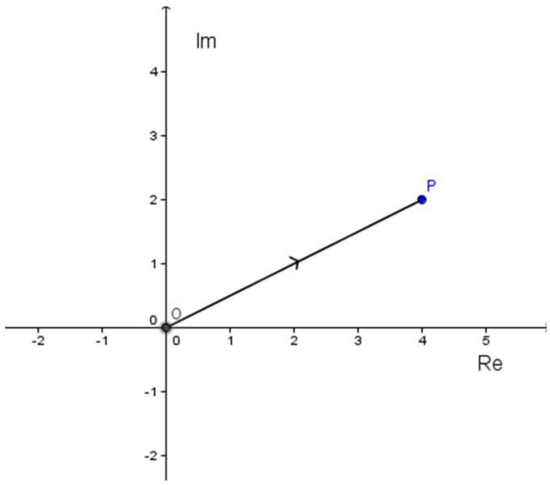

Figura 7: Representação Gráfica do caminho OP.

De acordo com a equação (10), temos:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Sendo $z(t) = 2t + it$, então $z'(t) = 2 + i$, temos ainda que:

$$\begin{aligned} f(z(t)) &= (2t + it)^2 \\ &= 4t^2 + 4it^2 - t^2 = 3t^2 + 4it^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} f(z(t))z'(t) &= (3t^2 + 4it^2)(2 + i) \\ &= 6t^2 + 3it^2 + 8it^2 - 4t^2 = 2t^2 + 11it^2, \end{aligned}$$

substituindo estes valores na equação (10) temos:

$$\begin{aligned}\int_0^2 z^2 dz &= \int_0^2 (2t^2 + 11it^2)dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 + \frac{11}{3}it^3\right]_0^2 \\ &= \frac{16}{3} + \frac{88}{3}i.\end{aligned}$$

Exemplo 12. *Em relação ao exemplo anterior, calcule a integral da função $f(z) = z^2$, usando os caminhos OAP, sendo $A = (4, 0)$ e o caminho OBP sendo $B = (0, 2)$, conforme indicados na figura (8), em seguida compare os resultados.*

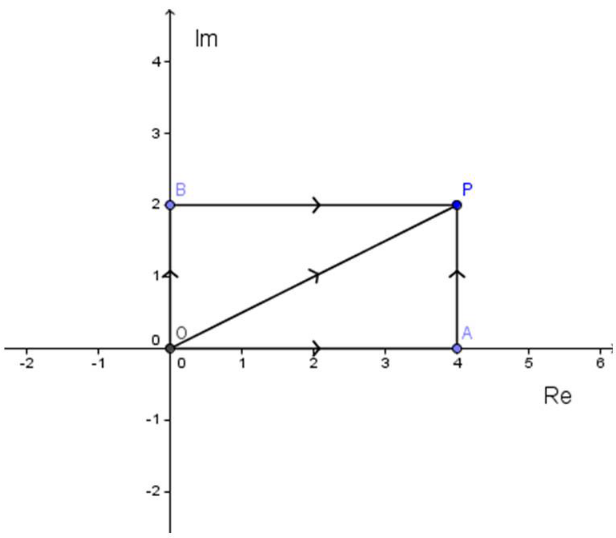

Figura 8: Representação Gráfica dos caminhos OAP, OP e OBP.

Resolução

De acordo com a propriedade de aditividade do integral em relação à partição de caminhos, a integral da função $f(z)$ ao longo do caminho OAP é dada por:

$$\int_{OAP} f(z)dz = \int_{OA} f(z)dz + \int_{AP} f(z)dz.$$

Para calcular as integrais do segundo membro, devemos parametrizar os caminhos OA e AP, calcular as integrais da função sobre os caminhos, em seguida somar os valores destas integrais.

Caminho OA.

Como $A = (4, 0)$, então $A = 4 + 0i$, isso significa que o caminho $z(t)$ pertence ao eixo real. Este caminho parametrizado é dado por:

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad t \in [0, 4].$$

Assim,

$$z(t) = t \quad ento \quad z'(t) = 1.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} f(z(t)) &= t^2, \\ f(z(t)).z'(t) &= t^2.1 = t^2, \end{aligned}$$

substituindo os valores,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt. \quad temos: \\ \int_{OA} f(z)dz &= \int_0^4 t^2 dt \\ &= \frac{t^3}{3}\Big|_0^4 \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

Caminho AP.

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0, 2]$$

Assim,

$$z(t) = 4 + it \quad ento \quad z'(t) = i.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} f(z(t)) &= (4+it)^2 = 16 + 8it - t^2, \\ f(z(t)).z'(t) &= (16 + 8it - t^2).i = 16i - 8t - it^2, \end{aligned}$$

substituindo os valores,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt, \quad temos: \\ \int_{AP} f(z)dz &= \int_0^2 (-8t + 16i - it^2)dt \\ &= \left[-4t^2 + 16it - i\frac{t^3}{3}\right]_0^2 \\ &= -4.4 + 32i - \frac{8}{3}i \\ &= -16 + \frac{88}{3}i. \end{aligned}$$

Agora, substituindo os valores em

$$\begin{aligned} \int_{OAP} f(z)dz &= \int_{OA} f(z)dz + \int_{AP} f(z)dz \quad temos: \\ \int_{OAP} f(z)dz &= \frac{64}{3} - 16 + \frac{88}{3}i \\ &= \frac{16}{3} + \frac{88}{3}i. \end{aligned}$$

Calcularemos, agora, a integral da função $f(z)$ ao longo do caminho OBP, a qual é dada por:

$$\int_{OBP} f(z)dz = \int_{OB} f(z)dz + \int_{BP} f(z)dz.$$

Caminho OB.

Como $B = (0, 2)$, então $B = 0 + 2i$, isso significa que o caminho $z(t)$ pertence ao eixo imaginário. Este caminho parametrizado é dado por:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad t \in [0,2].$$

Assim,

$$z(t) = it \quad ento \quad z'(t) = i.$$

Temos que:

$$\begin{aligned} f(z(t)) &= (it)^2 = -t^2, \\ f(z(t)).z'(t) &= -t^2.i = -it^2, \end{aligned}$$

substituindo os valores em

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

temos:

$$\begin{aligned} \int_{OB} f(z)dz &= \int_0^2 -it^2 dt \\ &= -i\frac{t^3}{3}\Big|_0^2 \\ &= -\frac{8}{3}i. \end{aligned}$$

Caminho BP.

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2i \end{cases} \quad t \in [0,4].$$

Assim,

$$z(t) = t + 2i \quad ento \quad z'(t) = 1$$

Temos que:

$$\begin{aligned} f(z(t)) &= (t+2i)^2 = t^2 + 4it - 4, \\ f(z(t)).z'(t) &= (t^2 + 4it - 4).1 = t^2 + 4it - 4, \end{aligned}$$

substituindo os valores,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt, \quad temos: \\
\int_{BP} f(z)dz &= \int_0^4 (t^2 + 4it - 4)dt \\
&= \frac{t^3}{3} + 2it^2 - 4t\Big|_0^4 \\
&= \frac{64}{3} + 32i - 16 \\
&= \frac{16}{3} + 32i.
\end{aligned}$$

Agora, substituindo os valores em

$$\begin{aligned}
\int_{OBP} f(z)dz &= \int_{OB} f(z)dz + \int_{BP} f(z)dz, \quad temos: \\
\int_{OBP} f(z)dz &= -\frac{8}{3}i + \frac{16}{3} + 32i \\
&= \frac{16}{3} + \frac{88}{3}i.
\end{aligned}$$

Podemos observar neste exemplo, que o valor da integral da função $f(z) = z^2$, calculada por caminhos diferentes, obteve o mesmo resultado. Isto indica que a integral da função considerada, só depende dos pontos extremos, no caso, os pontos O e P e não depende do contorno C que liga esses pontos.

Exemplo 13. *Em contraste com a propriedade do exemplo anterior, mostre que a integral da função $f(z) = \bar{z}$, depende, não somente dos pontos extremos, mas também dos contornos que se considere.*

Resolução

Vamos considerar, neste caso, os contornos OP e OAP, sendo $O = (0,0)$, $A = (1,0)$ e $P = (1,2)$ conforme a figura (9):

Integral em relação ao contorno OP.

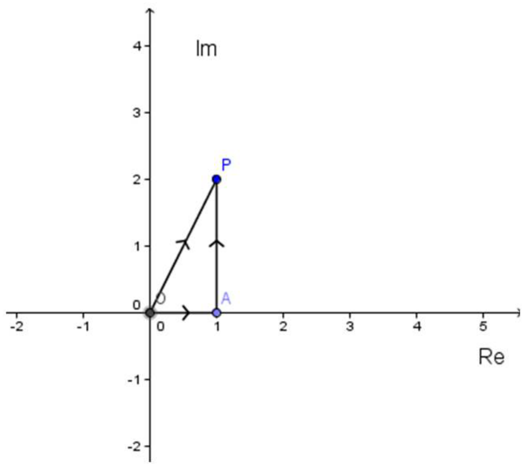

Figura 9: Representação Gráfica dos caminhos OP e OAP.

O contorno OP é dado por $z(t) = t + 2it$, para $t \in [0,1]$ que de acordo com a equação (10) temos:

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Como,

$$\begin{aligned} z(t) &= t + 2it \quad temos \ \ que \quad z'(t) = 1 + 2i, \\ f(z(t)) &= \overline{(t+2it)} = t - 2it, \end{aligned}$$

substituindo os valores,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt, \\ \int_{OP} f(z)dz &= \int_0^1 [(t-2it)(1+2i)]dt \\ &= \int_0^1 5tdt \\ &= 5\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Calculando, agora, a integral sobre o contorno OAP:

Sabemos que a integral da função $f(z)$ ao longo do caminho OAP é dada por:

$$\int_{OAP} f(z)dz = \int_{OA} f(z)dz + \int_{AP} f(z)dz.$$

Parametrizando os caminhos OA e AP, obtemos:

Caminho OA.

Como $A = (1, 0)$, então:

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \end{cases} \quad t \in [0, 1].$$

Assim,

$$\begin{aligned} z(t) &= t \quad ento \quad z'(t) = 1, \\ f(z(t)) &= \bar{t} = t, \\ f(z(t)).z'(t) &= t.1 = t. \end{aligned}$$

substituindo os valores

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt, \\ \int_C f(z)dz &= \int_{OA} f(z)dz = \int_0^1 tdt \\ &= \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Caminho AP.

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= t \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

Assim,

$$\begin{aligned} z(t) &= 1 + it \quad ento \quad z'(t) = i, \\ f(z(t)) &= \overline{(1 + it)} = 1 - it, \\ f(z(t)).z'(t) &= (1 - it).i = i + t. \end{aligned}$$

substituindo os valores,

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt, \\ \int_C f(z)dz &= \int_{AP} f(z)dz = \int_0^2 (t + i)dt \\ &= \left[\tfrac{t^2}{2} + it\right]_0^2 \\ &= 2 + 2i. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{OAP} f(z)dz &= \int_{OA} f(z)dz + \int_{AP} f(z)dz, \\ \int_{OAP} f(z)dz &= \frac{1}{2} + 2 + 2i \\ &= \frac{5}{2} + 2i. \end{aligned}$$

Neste caso, notamos que

$$\int_{OP} f(z)dz \neq \int_{OAP} f(z)dz,$$

apesar da integral ter sido calculada em caminhos que contém os mesmos pontos extremos. Isso acontece porque a função $f(z) = \bar{z}$ não é analítica em todo o plano.

Concluimos ainda que, se C for um contorno fechado, teremos os pontos extremos coincidentes, então, se $f(z)$ for uma função analítica, temos:

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Este resultado é uma consequência do Teorema de Cauchy, o qual estaremos tratando no capítulo seguinte.

4 Teorema de Cauchy

Vimos dos exemplos (12) e (13) do capítulo anterior, que a integral de uma função entre dois pontos extremos, pode ou não depender do contorno usado para integração. Quando estamos integrando uma função analítica, o valor da integral não depende do caminho para integração, somente dos pontos extremos. Esta propriedade é uma consequência do teorema abaixo:

Teorema 4.1. ***(Teorema de Cauchy)*** *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R. Então*

$$\oint_C f(z)dz = 0, \tag{12}$$

para todo contorno fechado C contido em R.

Prova

Seja C_1 e C_2 dois contornos arbitrários em R, ligando z_0 a z_1, conforme figura (10). Então, $C_1 + (-C_2)$ é um contorno fechado em R; logo:

$$\int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz$$

como

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

por f ser analítica e possuir os mesmos pontos extremos, então:

$$\oint_C f(z)dz = \int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = 0.$$

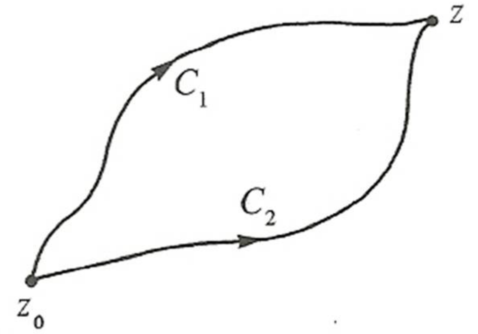

Figura 10: Contornos C_1 e C_2 ligando z_0 a z_1.

Figura retirada de [2]

De acordo com [2] o teorema de Cauchy, na primeira formulação, pode ser demonstrado facilmente com a ajuda do Teorema de Green[9], supondo que a derivada f' seja contínua em R. De fato, com a notação $z = x + iy$, $f = u + iv$, temos:

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C (udx - vdy) + i\oint_C (vdx + udy)\\ &= -\iint_{R'} (v_x - u_y)dxdy + i\iint_{R'} (u_x - v_y)dxdy.\end{aligned}$$

Mas $v_x - u_y = u_x - v_y = 0$, pelas equações de Cauchy-Riemann, então:

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

[9]O Teorema de Green recebeu esse nome em homenagem ao cientista inglês George Green(1793-1841). A demonstração do Teorema de Green pode ser encontrada em [7]

4.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Uma primitiva de uma função complexa define-se de modo análogo ao caso real. Ou seja, dizemos que F é uma primitiva da função complexa f se $F' = f$.

Teorema 4.2. *Seja $R \subset \mathbb{C}$, um caminho regular $\gamma : [a, b] \longrightarrow R$ e uma função contínua $f : R \longrightarrow \mathbb{C}$, tal que $f = F'$ para alguma função analítica $F : R \longrightarrow \mathbb{C}$. Então:*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \tag{13}$$

Em particular, se γ é fechada então,

$$\oint_C f(z)dz = 0.$$

Prova

Usando a definição e as propriedades do cálculo integral obtem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma} f(z)dz &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\
&= \int_a^b \frac{d}{dt}(F \circ \gamma)(t)dt \\
&= (F \circ \gamma)(b) - (F \circ \gamma)(a) \\
&= F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) \\
&= F(z_1) - F(z_0).
\end{aligned}$$

Ainda, de acordo com [2], se tratar de um contorno fechado que seja um círculo de centro z_0 e raio r, a integral sobre C é denotada por:

$$\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz$$

e

$$\oint_{|z-z_0|=r} f(z)dz.$$

Neste caso, o contorno tem orientação positiva.

Nota-se que o cálculo de uma integral curvilínea de uma função analítica é equivalente ao cálculo de uma primitiva da função.

4.2 Primitivas

Teorema 4.3. *Seja f uma função analítica em uma região R simplesmente conexa. Então a forma geral de sua primitiva é*

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw + C \tag{14}$$

onde C é uma constante arbitrária, z_0 é um ponto fixo qualquer de R e a integração é feita ao longo de um contorno inteiramente contido em R. Além disso a função $F(z)$ definida desta forma, também, é analítica.

Prova Pode ser encontrada em [2].

Exemplo 14. *(Adaptado de [2].)*

A função

$$F(z) = \frac{z^{n+1}}{n+1},$$

é uma primitiva da função $f(z) = z^n$, que é analítica em todo o plano, para n inteiro não negativo. A integral pode ser calculada como:

$$\int_{z_1}^{z_2} z^n dz = \left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_{z_1}^{z_2} = \frac{1}{n+1}\left(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}\right).$$

Observação

Há, também, casos em que desejamos calcular a integral onde a função $f(z)$ é analítica em uma região C_0, exceto em regiões C_1,C_2 e C_n contidas em C_0, de modo que f seja analítica na região compreendida entre C_0 e $C_1, ..., C_n$. Então

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + ... + \int_{C_n} f(z), dz \tag{15}$$

com todos os contornos na mesma orientação.

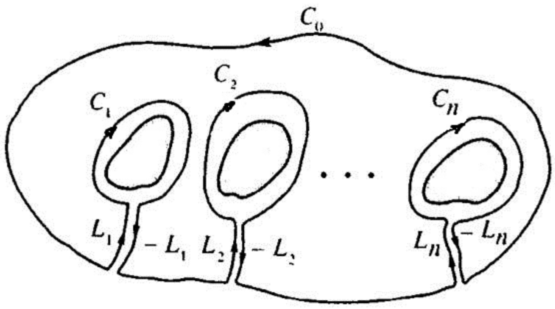

Figura 11: Contornos Fechados Simples.

Figura retirada de [2]

Segundo [2], ao introduzir cortes L_1 e $-L_1$, L_2 e $-L_2$, ... , L_n e $-L_n$, para ligar C_0 a C_1,C_2 e C_n, obtem-se uma nova região simplesmente conexa, de forma que a integral de f ao longo desse caminho é nula.

$$\left(\int_{C_0} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz - ... - \int_{C_n} f(z)dz\right) = \oint_C f(z)dz = 0.$$

Nota-se que as integrais ao longo dos caminhos L_1 e $-L_1$, L_2 e $-L_2$, ... , L_n e $-L_n$ se cancelam.

De onde conclui-se que na equação

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz,$$

quando $n = 1$, temos:

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz. \tag{16}$$

o que caracteriza dizer que estamos deformando o caminho de integração sem mudar o valor da integral, que não depende do caminho.

Exemplo 15. *Utilizando o teorema de Cauchy, calcule a integral da função,*

$$f(z) = \frac{z+1}{z-3},$$

sobre o contorno C, onde C é o círculo definido por $|z| = 2$.

Resolução

Sendo $z = x + yi$, temos:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 2,$$

assim,

$$x^2 + y^2 = 2^2.$$

Neste caso, temos que o contorno C é uma circunferência de centro $O = (0,0)$ e raio $r = 2$.

A função $f(z) = \frac{z+1}{z-3}$ é analítica em todo o plano, exceto no ponto $z = 3$. Assim, como o contorno C não circunda o ponto $z = 3$, e a função $f(z)$ é analítica em C, então pelo teorema de Cauchy, segue que

$$\int_{|z|=2} \frac{z+1}{z-3} dz = 0.$$

Exemplo 16. *Utilizando o teorema de Cauchy, calcule*

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z}.$$

Resolução

Para resolver essa integral, primeiro vamos escrever $\frac{1}{z^2+2z}$ em forma de frações parciais, onde obtemos:

$$\frac{1}{z^2 + 2z} = \frac{1/2}{z} - \frac{1/2}{z+2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{z+2}\right],$$

Assim,

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} - \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}.$$

Considerando uma região R e sendo $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, é tal que $|\gamma| \subset R$ e como $f(z) = \frac{1}{z+2}$ é analítica em R, isso, pelo teorema de Cauchy, segue que

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z+2} = 0.$$

Portanto,

$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 2z} = \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z},$$

Substituindo z por $e^{i\theta}$, temos que $dz = ie^{i\theta}d\theta$,
assim,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_{|z|=1} \frac{dz}{z} &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} d\theta \\ &= \frac{i\theta}{2}\Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi i. \end{aligned}$$

Com base no Teorema de Cauchy é possível obter a Fórmula Integral de Cauchy, a qual dá os valores de uma função holomorfa num conjunto de pontos fora de uma curva fechada em termos de integrais que envolvem apenas os valores da função sobre essa curva. Este assunto, estaremos apresentando na próxima seção.

5 Fórmula Integral de Cauchy

Teorema 5.1. *Seja f uma função analítica numa região simplesmente conexa R. Então,*

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0), \tag{17}$$

onde $z \in R$ e C é qualquer contorno fechado simples de R, que envolve z uma vez no sentido positivo e cujo interior está todo contido em R.

Prova

Sendo $\delta > 0$ e deformando o caminho C para o caminho C_δ, sendo este um círculo de centro z_0 e raio δ,

$$C_\delta : |z - z_0| = \delta,$$

fazendo δ suficientemente pequeno, para que o caminho C_δ esteja no interior de C. Como ilustra a figura (12).

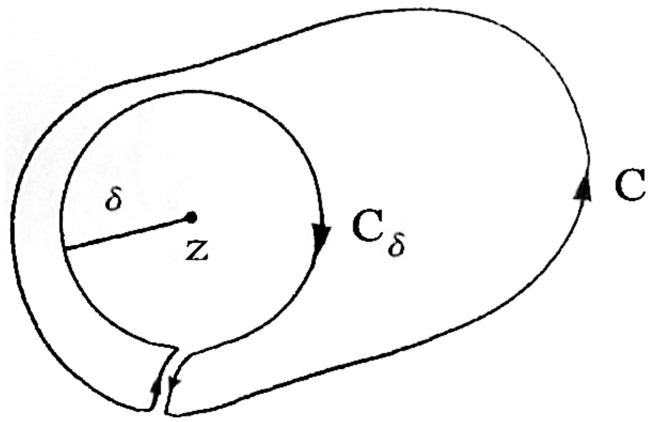

Figura 12: Caminho C_δ no interior de C.

Figura retirada de [2]

Como o integrando é analítico na região $C - C_\delta$, então,

$$\oint_{C\cup -C_\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 0 \Rightarrow \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}dz.$$

Agora, considerando $g(z)$ como função auxiliar, com $g(z)$ analítica em z_0, temos que:

$$\begin{aligned}\oint_{C_\delta} g(z)dz &= 0 = \oint_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}dz - \oint_{C_\delta} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz \\ &= \oint_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = \oint_{C_\delta} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz.\end{aligned}$$

Calculando a integral do segundo membro temos:

$$\oint_{C_\delta} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz = f(z_0)\oint_{C_\delta} \frac{dz}{z-z_0},$$

fazendo

$$z - z_0 = e^{i\theta}, \quad com \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

derivando de ambos os lados temos:

$$dz = ie^{i\theta}d\theta,$$

logo,

$$\begin{aligned}f(z_0)\oint_{C_\delta} \frac{dz}{z-z_0}dz &= f(z_0)\oint_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}}d\theta \\ &= f(z_0)\oint_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i f(z_0).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\oint_{C_\delta} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Na demonstração acima, se fizermos a troca da variável z_0 pela variável a, podemos escrever assim o teorema:

Se f é uma função analítica então ela assume os seguintes valores sobre pontos a contidos na região interior a C,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz.$$

Isto significa que uma função analítica pode ser avaliada no ponto a interior à curva fechada C se conhecermos somente seus valores sobre o contorno. Observe que a é uma singularidade isolada do integrando, embora $f(z)$ seja analítica.

A seguir, apresentaremos alguns exemplos, nos quais estaremos aplicando a Fórmula Integral de Cauchy.

Exemplo 17. *Use a fórmula integral de Cauchy para calcular a integral*

$$\oint_{|z-1|=2} \frac{zdz}{z-2},$$

sendo o contorno percorrido no sentido anti-horário.

Resolução

Do contorno $C : |z-1| = 2$, temos um círculo de centro no ponto $O = (1,0)$ e raio $r = 2$. Temos, também que o único ponto de singularidade da função acima é $z = 2$. Sendo que esta singularidade está na região interior ao contorno C, conforme mostra a figura (13)

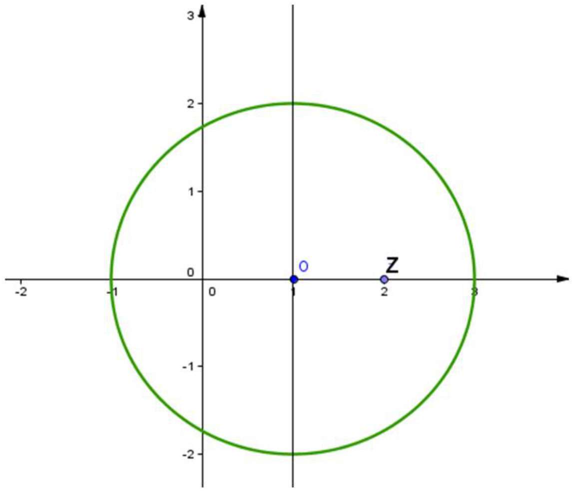

Figura 13: Singularidade $z = 2$ no contorno $|z - 1| = 2$

Tomamos então $z_0 = 2$ e $f(z) = z$ e usando o Teorema 5.1, temos:

$$\begin{aligned} \oint_{|z-1|=2} \frac{zdz}{z-2} &= 2\pi i f(2) \\ &= 4\pi i. \end{aligned}$$

Exemplo 18. *Use a fórmula integral de Cauchy para calcular a integral*

$$\oint_{|z|=2} \frac{z \cos z}{z - i} dz,$$

sendo o contorno percorrido no sentido anti-horário.

Resolução

Neste caso, temos como singularidade o ponto $z = i$, que é interno ao contorno C, que é um círculo de centro no ponto $O = (0, 0)$ e raio $r = 2$ como mostra a figura (14)

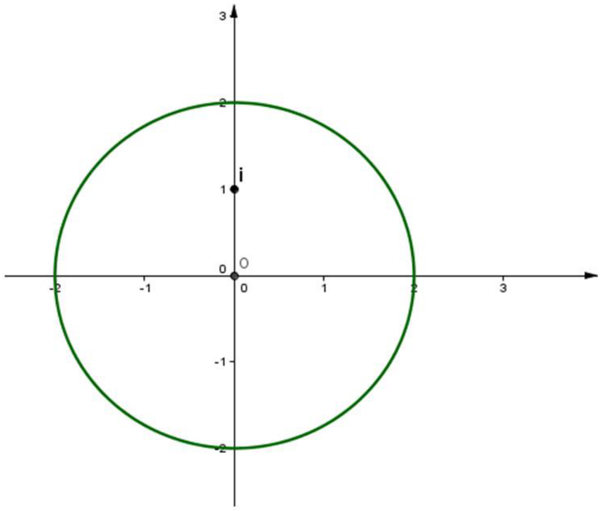

Figura 14: Singularidade $z = i$ no contorno $|z| = 2$

Tomamos então $z_0 = i$ e $f(z) = z\cos z$ e usando o Teorema 5.1, temos:

$$\begin{aligned}\oint_{|z|=2} \frac{z\cos z}{z-i}dz &= 2\pi i f(i)\\ &= 2\pi i.i\cos i\\ &= -2\pi\cos i,\end{aligned}$$

Usando as fórmulas de Euler para exponenciais complexas, podemos escrever $\cos i$, como sendo:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

portanto,

$$\cos i = \frac{e^{-1}+e}{2} = \frac{e^2+1}{2e} = \cosh e,$$

substituindo, então, este valor,

$$\oint_{|z|=2} \frac{z\cos z}{z-i}dz = -2\pi\cosh e.$$

Exemplo 19. *Calcular a integral*

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2 - 2z - 3},$$

onde C é o losango de vértices ± 2 e $\pm i$, sendo o contorno percorrido no sentido anti-horário.

Resolução

Determinaremos, inicialmente, as singularidades do integrando. Elas são determinadas pelos valores de z que fazem com que o denominador seja zero. Resolvendo a equação

$$z^2 - 2z - 3 = 0,$$

obtemos as duas raízes $z = -1$ e $z = 3$. O caminho C consiste no losango de vértices ± 2 e $\pm i$. Note que somente a singularidade $z = -1$ está no interior do contorno, conforme mostra a figura (15)

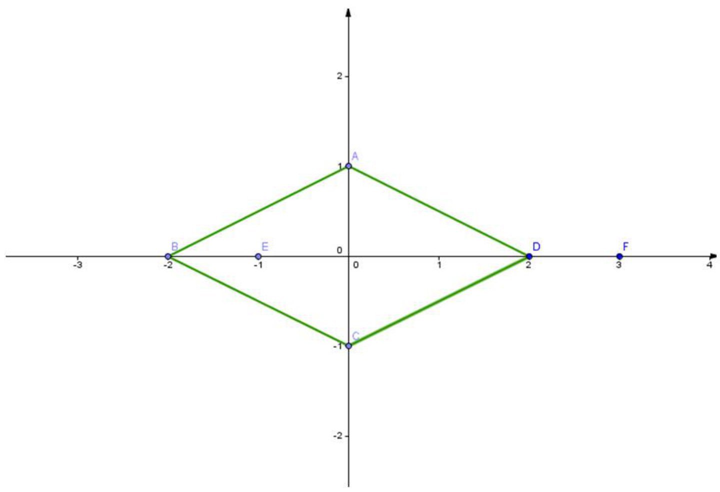

Figura 15: Singularidade ao longo do losango de vértices ± 2 e $\pm i$

A integral pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\oint_C \frac{ze^z}{(z-3)(z+1)}$$

Neste caso temos que $f(z)=\frac{ze^z}{z-3}$, pois apesar de $z=3$ ser uma singularidade, ele não pertence ao contorno C. Assim, usando $z_0=-1$ e o Teorema 5.1 temos:

$$\oint_C \frac{ze^z}{z^2-2z-3} = 2\pi i f(-1),$$

como

$$f(z)=\frac{ze^z}{z-3},$$

então

$$f(-1)=\frac{1}{4e},$$

assim,

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{ze^z}{z^2-2z-3} &= 2\pi i.\frac{1}{4e}\\ &= \frac{\pi i}{2e}.\end{aligned}$$

Exemplo 20. *Mostre que*

$$\oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = 0.$$

Resolução

Como

$$z^2-1=(z-1)(z+1),$$

temos aí, que as singularidades ocorrem em $z=1$ e $z=-1$, que estão ambas dentro da região limitada por C, A integral pode ser reduzida ao cálculo sobre os contornos C_1 e C_2 como mostra a figura (16),

$$\oint_C = \oint_{C_1} + \oint_{C_2},$$

assumindo a seguinte forma:

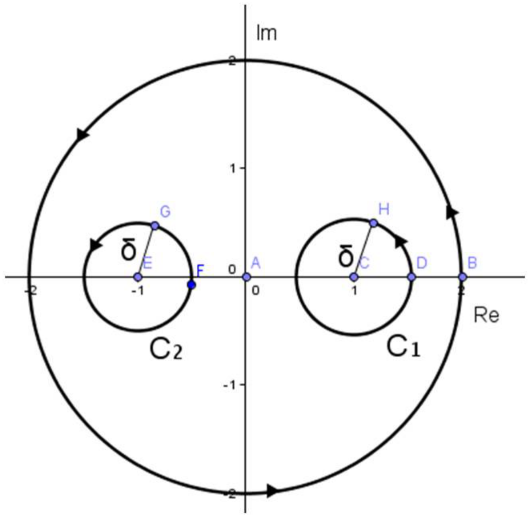

Figura 16: Caminho C com dois pontos de singularidade

$$I = I_1 + I_2 = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-1)(z+1)} + \oint_{C_2} \frac{dz}{(z-1)(z+1)},$$

Na primeira destas integrais, temos que $z_0 = 1$ é um ponto singular. Fazendo $f(z) = \frac{1}{(z+1)}$ e usando a fórmula da integral de Cauchy, temos:

$$I_1 = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = 2\pi i f(1) = 2\pi i.\frac{1}{2} = \pi i.$$

Para calcular a segunda integral tomamos $z_0 = -1$ e $f(z) = \frac{1}{(z-1)}$. Usando novamente a fórmula da integral temos

$$I_1 = \oint_{C_2} \frac{dz}{(z-1)(z+1)} = 2\pi i f(-1) = 2\pi i. - \left(\frac{1}{2}\right) = -\pi i,$$

de modo que a interal procurada é nula,

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{dz}{z^2-1} = I_1 + I_2 = \pi i - \pi i = 0.$$

■

Considerações finais

Neste trabalho foi abordado o assunto sobre Integral Complexa por meio do Teorema de Cauchy e consequentemente, pela Fórmula Integral de Cauchy, mais especificamente uma abordagem dos temas Integral Curvelínea, Teorema de Cauchy e Fórmula Integral de Cauchy, tendo como finalidade, aproximar a matemática dos alunos, visto que o caminho inverso, aproximar os alunos da matemática, nem sempre é o melhor percurso.

O objetivo principal foi mostrar de maneira clara e simplificada o estudo sobre a Integral Complexa, pois acreditamos que o estudo realizado dessa maneira possibilita maior compreensão e amadurecimento do conteúdo. E com isso, conseguir despertar nos estudantes um maior interesse e consequentemente um desejo em aprender.

A pesquisa iniciou-se com uma retomada sobre alguns conceitos, fundamentais para a compreensão do tema principal do nosso estudo, como a Exponencial Complexa, seguindo pelas Funções de Variável Complexa, fazendo um estudo, supercial sobre Limite e Continuidade e também sobre Derivação Complexa e as equações de Cauchy-Riemann e em seguida, fizemos uma revisão da literatura sobre os temas arcos e contornos, integral curvilínea, teorema de Cauchy e, enfim, chegarmos ao ponto principal que é o estudo sobre a fórmula integral de Cauchy. Sobre cada assunto foi feito uma aporte teórico para dar sustentabilidade ao tema. O trabalho ainda fundamentou-se em pesquisas e consultas à internet, e utilizou-se de alguns softwares para a construção de alguns gráficos, fundamentais para a interpretação do conteúdo.

Apresentamos os temas de uma forma detalhada, mostrando através de exemplos explicativos, os cálculos e os erros que são cometidos durante o processo. O trabalho objetivou-se, também, em apresentar e discutir conceitos importantes relacionados à integral complexa, podendo ainda servir como um aporte teórico sobre Teorema de Cauchy e a Fórmula Integral de Cauchy. E ainda, mostrar que através da resolução de tais problemas, podemos promover a discussão sobre perspectivas e possíveis ações à serem adotadas.

Portanto, o trabalho superou uma angústia do autor, que vem detalhar um conteúdo, muitas vezes não estudado no curso de licenciatura, nem ao menos, nas disciplinas de análise e variáveis complexas, pois contemplam, na sua maioria, apenas a parte real. A importância do trabalho não se restringiu apenas nesse sentido, a relevância está inserida na proposta de rompimento de barreiras entre teoria e prática, entre o Ensino Superior e o Ensino Básico, entre a Ciência e sociedade, e essencialmente entre a matemática e o aluno.

Referências

[1] AHLFORS, Lars Valerian. *Complex Analysis.* McGraw-Hill.

[2] ÁVILA Geraldo. *Variáveis complexas e aplicação.* 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[3] EVES, Howard. *Introdução à história da matemática.* tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[4] FERNANDES, Cecília S., JR, Nilson C. Bernardes *Introdução às Funções de uma Variável Complexa.* 2. ed. Rio de Janeiro - SBM - (Textos Universitários).

[5] LINS NETO, Alcides, *Funções de uma variável complexa.* 2. ed. Rio de Janeiro : IMPA, CNPq, 1993. (Projeto Euclides)

[6] SOARES, Márcio G. *Cálculo em uma variável complexa.* Rio de Janeiro : IMPA, 2006. (Coleção matemática universitária).

[7] STEWART, James. *Cálculo, vol. II.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2005.