UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA

ANA ELIZA GONÇALVES FERREIRA

A IMPORTÂNCIA DOS SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO E A CONTRIBUIÇÃO PARA A MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES

PONTA GROSSA
2013

ANA ELIZA GONÇALVES FERREIRA

A IMPORTÂNCIA DOS SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO E A CONTRIBUIÇÃO PARA A MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira

PONTA GROSSA
2013

ANA ELIZA GONÇALVES FERREIRA

A IMPORTÂNCIA DOS SISTEMAS LINEARES NO ENSINO MÉDIO E A CONTRIBUIÇÃO PARA A MATEMÁTICA E SUAS APLICAÇÕES

Dissertação aprovada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Curso de Mestrado Profissional em Matemática em rede nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora:

Ponta Grossa, 28 de fevereiro 2013.

Prof.ª Dr.ª Fabiane de Oliveira
Doutora em Engenharia Mecânica
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi
Doutora em Ciências Matemáticas e Computação
Universidade Estadual de Ponta Grossa

Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto
Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia
Universidade Federal do Paraná

DEDICATÓRIA

Aos meus amados pais Antonio e Ana, minha amada irmã Cassiana, ao meu amor Cleber e a todas as pessoas que me querem bem.

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer à Santíssima Trindade, Deus Pai, Filho e Espírito Santo que conduzem minha vida e me concederam chegar à conclusão deste trabalho;

À São José e Maria Santíssima por todas as bênçãos derramadas sobre mim;

Aos meus pais Antonio e Ana, pelo dom da vida, amor, incentivo, apoio e encorajamento em toda a minha caminhada pessoal, educacional e profissional;

À minha irmã Cassiana, a quem admiro e amo, está sempre em sintonia comigo, ouve-me, motiva, conforta, provoca e torce por mim;

Ao meu amor, marido, companheiro, Cleber que comigo sabe a importância dessa realização;

Aos professores do DEMAT-UEPG que aceitaram o desafio de acolher o PROFMAT nessa instituição e não medem esforços para o sucesso do programa e dos alunos;

À minha orientadora Fabiane, que com muita atenção, zelo e amizade me acompanhou nessa etapa;

Aos membros da banca examinadora, Luciane Grossi e Marcio A. V. Pinto, pelo tempo dispendido na leitura deste trabalho e pelas importantes sugestões apontadas;

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) e ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) pela concepção do programa que oportuniza o sonho de pós-graduação a muitos professores de Matemática;

À coordenação nacional do PROFMAT pela dedicação e comprometimento;

Aos meus queridos colegas do polo, pelos momentos de alegria e tensão que passamos juntos durante o curso, especialmente Marta e Paulo Ricardo, e aos colegas de todos os outros polos do país, que mesmo sem nos conhecermos, a união através da plataforma foi decisiva para minha integralização desse curso;

Enfim, agradeço a todos os meus amigos, mesmo aqueles com quem mantenho contato apenas nas redes sociais, aos colegas da Sanepar, aos meus familiares e conhecidos que me querem bem, me ajudam e torcem para que meus sonhos se tornem realidade.

"É necessário esforçar-se, é necessário consagrar-se, é necessário também sofrer para obter resultados". (Antônio Labriola)

"Você nunca sabe que resultados virão da sua ação. Mas se não fizer nada, não existirão resultados". (Mahatma Gandhi)

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo mostrar a importância do estudo dos sistemas lineares no Ensino Médio. Para tanto foram pesquisados trabalhos anteriores que já manifestavam preocupação com esse intuito. Estudou-se o surgimento histórico dos sistemas lineares no desenvolvimento da matemática, a definição e conceitos em livros didáticos para o Ensino Médio e também na literatura de Álgebra Linear e Cálculo Numérico. Fez-se uma pesquisa dos métodos de resolução de sistemas lineares, destacou-se a eliminação de Gauss nos métodos diretos e os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel entre os iterativos. Refletiu-se o condicionamento de sistemas lineares e a aproximação de solução para sistemas incompatíveis que usualmente não são abordados em sala de aula e têm grande utilidade prática nas aplicações. Observou-se as orientações curriculares sobre o tema confrontando com a abordagem dos livros didáticos. Verificou-se que a literatura limita o conteúdo às condições de manipulação algébrica e não oferece atividades diversificadas com utilização de recursos computacionais e exemplos aprofundados e esclarecedores condizentes com a importância do conteúdo. Mostra-se uma abordagem de sistemas lineares que inter-relaciona os conteúdos de sistemas lineares com a Geometria Analítica de forma que ofereça aos alunos condições de visualizar geometricamente o comportamento das soluções dos sistemas e, assim, aprimorar a compreensão por diferentes representações semióticas do conteúdo. Da mesma forma, as aplicações do conteúdo expostas no trabalho, contribuem para exemplificar a utilização dos sistemas lineares em diversas áreas da engenharia, economia, biologia, entre outras. Sugere-se a utilização de recursos computacionais nas aulas de matemática para que reduzindo o tempo empregado na manipulação algébrica o professor possa aprofundar os conceitos envolvidos e buscar sistemas de maior porte que ampliem a perspectiva de trabalho com os sistemas lineares, além de motivar o aluno a encontrar mais sentido e atualização em seu estudo. O trabalho contempla os *softwares GeoGebra*, *Winplot* e *Maxima*, todos de divulgação livre e aplicáveis ao conteúdo de sistemas lineares. Sendo assim, a partir das reflexões sobre o tema, apresentam-se sugestões de assuntos relacionados e enriquecedores que ajudem superar as superficialidades das abordagens atuais e oferece alternativas para isso.

Palavras Chave: Sistemas lineares, Recursos computacionais, Ensino Médio.

ABSTRACT

This work aims to show the importance of the study of linear systems in High School. Therefore, we surveyed previous works that were already expressing concern with this order. We studied the historical emergence of linear systems in the development of mathematics, the definition and concepts in textbooks for High School and also in the literature of Numerical Calculus and Linear Algebra. There was a survey of methods for solving linear systems, stood out Gaussian elimination in direct methods and the methods of Jacobi and Gauss-Seidel between the iterative. Reflect the conditioning of linear systems and approximation of solution for incompatible systems that are usually not covered in the classroom and have great practical utility in applications. Observe curriculum guidelines on the topic confronting the approach of textbooks. It was found that the literature limits the content of safe handling Algebraic and does not offer diverse activities with use of computer resources and examples depth and clarifying consistent with the importance of the content. Shows an approach of linear systems that interrelates the content of linear systems with Analytic Geometry so offer to pupils able to visualize the behavior of solutions geometrically systems and thereby improve the understanding by different content representations semiotic. Similarly, applications of the content exposed at work, contributing to exemplify the use of linear systems in many areas of engineering, economics, biology, among others. We suggest the use of computational resources in mathematics lessons for reducing the time spent in algebraic manipulation teachers can deepen the concepts involved and seek larger systems that increase the prospect of working with linear systems, and motivate students find more meaning in their study and update. The work includes software *GeoGebra, Winplot* and *Maxima*, all free and disclosure applicable to the content of linear systems. Thus, from the reflections on the theme, are suggestions of issues and enriching to help overcome the shallowness of current approaches and offers alternatives to this.

Keywords: Linear systems, computational resources, High School.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

DCE	Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Plano Nacional do Livro Didático
PROINFO	Programa Nacional de Informática na Educação
SI	Sistema linear impossível
SMED	Simplificação do método do escalonamento usando determinante de ordem dois
SPD	Sistema linear possível e determinado
SPI	Sistema linear possível e indeterminado

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo introdutório são apresentadas as principais motivações que culminaram na preocupação com a abordagem dos sistemas lineares no Ensino Médio. Inicia-se com uma revisão bibliográfica, em seguida reflete-se a relevância do problema, definem-se os objetivos e apresenta-se o delineamento do texto.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Diversos autores têm destacado vários interesses com o estudo dos sistemas lineares.

Para Lima (1993), os sistemas lineares constituem um tópico de grande interesse prático, que pode servir como ponto de partida para diversas teorias matemáticas relevantes e atuais. Contudo, sua abordagem nos compêndios adotados em nossas escolas é, muitas vezes, obsoleta, árida e desmotivada. O autor apresenta sugestões para os professores ilustrarem suas aulas e para contextualizarem a matéria e os conhecimentos.

Uma situação problema pode introduzir o conteúdo. Lima (1993) sugere que os próprios alunos sejam instigados a fornecer exemplos de problemas que envolvam sistemas lineares. A abordagem deve fornecer diferentes interpretações como, geométrica, matricial e vetorial. Da mesma forma para a resolução podem ser apresentados diversos métodos como o escalonamento, a resolução matricial e regra de Cramer, observando qual deles seria o mais adequado em cada situação. O autor ainda destaca que a utilização dos computadores abre caminho para novas técnicas de resolução de sistemas lineares como os métodos iterativos que são utilizados até mesmo para os sistemas não lineares.

Devido à relevância do conteúdo, o ensino dos sistemas lineares aparece em diversos trabalhos que serão citados. São professores e pesquisadores buscando enfatizar a importância conceitual, a bagagem científica relacionada, as expressivas contribuições tecnológicas de suas aplicações, bem como discutir as dificuldades e/ou limitações envolvendo os sistemas lineares no ensino fundamental e médio. Por vezes, até mesmo nos cursos superiores da área de exatas, deparamo-nos com um ensino insuficiente dos sistemas lineares.

Rocha (2010) preocupou-se com a aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental enfatizando o método da substituição. Tendo em vista que o tema envolve manipulação algébrica na resolução de equações e é essencial para o Ensino Médio, o autor propôs situações problema de acordo com as quatro fases da metodologia de pesquisa "Engenharia Didática", como tentativa de evitar um aprendizado mecânico e superficial dos sistemas lineares.

Carneiro (2007) propôs a geometria vetorial na escola, fazendo uma leitura para sistemas de equações. Buscou agregar valor formativo ao ensino de sistemas lineares através da geometria vetorial. Muitas vezes, não tem significado para o aluno classificar um sistema em possível e determinado ou possível e indeterminado ou ainda sistema impossível. Para o autor, a eliminação é um método de manipulações algébricas mais compreensíveis para os alunos, porém se desprovidas da leitura geométrica pode sugerir uma interpretação incompleta, especialmente para sistemas com três variáveis. Argumentou que a regra de Cramer só é conclusiva se o sistema admite solução única. E que nessa regra, os alunos fazem os cálculos envolvendo determinantes, mas não entendem porque esses cálculos levam à solução do sistema. Tratando-se assim de uma regra para ser memorizada, mas não aprendida.

Reis (2010) fez um estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras. Concluiu que mesmo livros de épocas diferentes (desde a primeira república até o período contemporâneo) têm linguagem algébrica muito semelhante e as maiores diferenças ficam em torno dos recursos oferecidos pelo desenvolvimento tecnológico, como desenhos, figuras, gráficos e cores.

Jordão (2011) a partir de um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º ano do Ensino Médio, elaborou, aplicou e analisou uma sequência didática para abordar a resolução algébrica e gráfica dos sistemas lineares quadrados utilizando o *software Winplot*. A autora apontou um caminho para introduzir o conteúdo através do registro gráfico.

Lobeiro e Gramani (2010) propuseram o método SMED (Simplificação do método do escalonamento usando determinante de ordem dois). Independentemente do número de equações e incógnitas que um sistema venha a possuir, este método utiliza apenas determinante de ordem dois, tornando acessível sua utilização para qualquer estudante com conhecimentos básicos no tema.

Luccas (2004) apresentou uma abordagem histórico-filosófica no ensino e na aprendizagem dos sistemas de equações lineares e determinantes. Para a autora, um ambiente assim seria favorável à análise e à reflexão de objetos de estudo, com vistas a perceber o processo dinâmico que permeia o conhecimento. Desenvolveu uma investigação com a reconstrução histórica dos assuntos "Sistemas de Equações Lineares" e "Determinantes". Produziu uma proposta pedagógica utilizando o recurso da transposição didática dos sistemas de equações lineares por meio da reflexão e da análise epistemológica ou filosófica, fundamentada nos perfis estrutural e articulador, de conceitos, leis, teorias e temas afins.

Melo *et al*. (2012) estudaram ideias associadas à geometria de sistemas de equações lineares. Os autores sugeriram uma proposta baseada no fato de que um sistema $Ax=b$ qualquer, pode ser reformulado como uma soma de vetores bastando, para isso, tomar combinações lineares das colunas da matriz A de coeficientes b, de modo que a solução será o vetor resultante da referida soma.

Pantoja (2008) discutiu a conexão entre os métodos da substituição e escalonamento no estudo de sistemas lineares. Evidenciou semelhanças e acreditou que a exploração das relações entre os métodos pode favorecer a construção dos significados.

Rangel (2011) pesquisou as contribuições da elaboração de projetos de modelagem matemática para a formação de professores de matemática. Questionou se a discussão de sistemas lineares pode estar atrelada à Modelagem Matemática, trazendo os alunos para alguma situação da realidade. Afirmou que essa discussão proporciona a aproximação da Matemática ao contexto social do aluno, simplificando as abstrações existentes e criando uma fundamentação mais consistente dos significados relativos a um conjunto solução de sistema linear.

Chiari (2011) estudou a utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do Ensino Médio. Investigou a elaboração das operações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes e analisou dificuldades e superações encontradas pelos alunos no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares.

Pimenta *et al.* (2012) investigou os modelos mentais de sistemas lineares. Observou pontos mais susceptíveis às falhas na aprendizagem como, por exemplo, o significado gráfico da resolução de um sistema. Buscou fornecer suporte necessário para atender aos diferentes níveis cognitivos apresentados pelos estudantes, tornando mais significativa a aprendizagem.

Observando o conteúdo de sistemas lineares nos livros didáticos em contraponto às Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (DCE), pode-se constatar que o enfoque nos livros didáticos é restrito. As dificuldades algébricas dos alunos somadas à falta de ferramentas de apoio para um ensino mais eficiente podem explicar parte da superficialidade. A exploração do conteúdo fica limitada à dimensão dos sistemas lineares e quando avançam para sistemas da ordem 4x4 são desconsiderados, por ficarem trabalhosos ou por parecerem pouco importantes, visto que não são abordadas aplicações relevantes. A inclusão de recursos computacionais de resolução que minimizem o esforço algébrico pode reservar mais tempo para um aprofundamento dos conceitos e das aplicações. Isso contribuiria para um ensino mais compatível com a importância do tema.

1.2 RELEVÂNCIA DO PROBLEMA

Sistemas lineares é um conteúdo que desdobra no Ensino Médio do Conteúdo Estruturante “Números e Álgebra”, conforme as DCE (2008).

O ensino dos sistemas lineares tem início no 8º ano (antiga 7ª série) do ensino fundamental. O conteúdo é trabalhado através de situações problema e resolução por adição e substituição em sistemas de duas equações e duas incógnitas. Poucas vezes utilizam-se sistemas com três equações e três incógnitas. Geralmente, não se explora a interpretação geométrica das soluções.

Segundo as DCE, no Ensino Médio, o estudo dos números deve ser aprofundado para ampliar o conhecimento e domínio deste conteúdo para que o aluno tenha condições, por exemplo, de conceituar e interpretar matrizes e suas operações, conhecer e dominar o conceito e as soluções de problemas que se realizam por meio de determinante e identificar e resolver sistemas de equações.

A abordagem dos sistemas lineares proposta no Ensino Médio e apresentada em livros didáticos como Longem (2004) e Santos *et al.* (2000) é caracterizada pela definição e resolução com algumas situações problema. Já Ishihara e Pessoa (2010) introduzem o tema partindo de um problema modelado por um sistema 2x2. Para a resolução dos sistemas lineares os livros didáticos geralmente apresentam ao aluno o método do escalonamento e a regra de Cramer. A partir de 5 equações e 5 incógnitas esses métodos são bastante trabalhosos e o conteúdo é deixado de ser explorado.

A utilização de recursos computacionais é uma alternativa para o avanço a sistemas de maior porte, pode-se transferir a manipulação algébrica para os *softwares* específicos. Reduzindo os cálculos manuais, os conceitos e aplicações podem ser mais aproveitados.

> Cabe à Matemática do Ensino Médio apresentar ao aluno o conhecimento de novas informações e instrumentos necessários para que seja possível a ele continuar aprendendo. (PCN, 1999)

A forma como o conteúdo de sistemas lineares é abordado acaba sendo bastante limitada. Pode não trazer grande dificuldade de ensino-aprendizagem, a menos do fato de muitos alunos de Ensino Médio não terem facilidade com as operações elementares no escalonamento. Para eles não são claras as operações elementares que devem ser utilizadas para realizar uma eliminação.

A regra de Cramer, apesar de trabalhosa, muitas vezes é preferida por professores e alunos. Consideram um método que envolveria menos “adivinhações” parecendo mais simples de utilizar. No método da adição essa dificuldade é também percebida. O método da substituição exige mais manipulação algébrica e não é atrativo para muitos alunos.

Este trabalho trata das condições do Ensino Médio e das reflexões de como o conteúdo dos sistemas lineares é apresentado. Aparentemente a apresentação é sucinta e superficial, podendo levar os alunos a acreditarem que tudo que existe de sistemas lineares se finda ali, sem identificar quaisquer aplicações. As situações problema são sugeridas para até três incógnitas. Não se trabalham aplicações dos sistemas para a percepção de sua importância científica e também industrial. Dessa maneira não se favorece a concepção de continuidade do conteúdo, não se abordam aplicações mais sofisticadas para que se aprimorem os problemas propostos, impedindo uma visão mais generalista do tema.

> Se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e aprofundada, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação para as ideias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades dos alunos frente à Matemática mostram claramente que isso não é verdade. (PCN, 1999)

A importância do estudo dos sistemas lineares se deve por sua utilização na modelagem de diversos problemas. Esses problemas vão desde os mais simples envolvendo duas equações e duas incógnitas e resolvidos até mesmo por inspeção ou por métodos bastante simples até problemas de áreas científicas e tecnológicas abrangendo um grande número de variáveis e necessitando de métodos elaborados e mais robustos de resolução.

Avançando também no contexto da Álgebra Linear, encontramos muita utilidade no estudo dos sistemas lineares, pois a resolução deles está intimamente relacionada com as transformações lineares, bem como com a teoria matricial.

A realização deste trabalho configura no aprofundamento do tema garantindo um estudo mais aprimorado voltado principalmente ao Ensino Médio. Deseja-se investigar os sistemas lineares procurando algumas ferramentas que dão suporte a esse estudo.

Pretende-se com este trabalho ampliar as sugestões de atividades, recursos, e enfoques dos sistemas lineares no Ensino Médio. Dar sentido ao seu estudo, oferecendo condições para a construção dos conceitos, indo ao encontro das aplicações científicas e tecnológicas. Os recursos computacionais podem minimizar a manipulação algébrica e permitir ao aluno maior tempo para a compreensão dos conceitos e das aplicações, para que perceba que o assunto não se encerra na abordagem de Ensino Médio. Um aprofundamento no tema pode ser benéfico no sentido que apresenta noções de pesquisa com os sistemas lineares.

> O conceito de álgebra é muito abrangente e possui uma linguagem permeada por convenções diversas de modo que o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente. Defende-se uma abordagem pedagógica que os articule, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados. (DCE,2008)

Todos esses aspectos conduzem a um relevante conhecimento de matemática e suas aplicações partindo das ideias aparentemente simples do Ensino Médio e atingindo alguns métodos de grande emprego na engenharia. Por outro lado, analisar um avanço na teoria que envolve os sistemas lineares desde a resolução em duas incógnitas até a necessidade de métodos sofisticados, contribui para maior compreensão da relevância desse estudo.

1.3 OBJETIVOS DA DISSERTAÇÃO

O objetivo principal deste trabalho é mostrar a importância do estudo dos sistemas lineares no Ensino Médio. Para isso pretende-se:

- Estudar brevemente o surgimento dos sistemas lineares na história da matemática;
- Abordar o enfoque dado aos sistemas lineares no Ensino Médio;
- Analisar o tema em livros didáticos do Ensino Médio;
- Apresentar os métodos de resolução propostos no ensino médio;
- Conhecer métodos mais avançados de resolução;
- Discutir o condicionamento de sistemas lineares;
- Exemplificar aplicações do conteúdo dos sistemas lineares;
- Destacar a interpolação polinomial como aplicação de sistemas lineares;
- Explorar recursos computacionais na resolução de sistemas lineares.

1.4 DELINEAMENTO DO TEXTO

Este trabalho apresenta seis capítulos e suas referências bibliográficas. No segundo capítulo encontra-se uma fundamentação teórica. Apresenta-se o surgimento histórico dos sistemas lineares, sua definição e conceitos, alguns métodos de resolução como eliminação, adição, substituição, comparação, regra de Cramer e a interpretação geométrica da solução, método iterativo de Jacobi e de Gauss-Seidel e finaliza-se apresentando um método de aproximação para sistemas incompatíveis.

No terceiro capítulo se faz uma análise de alguns livros didáticos e de algumas questões de vestibular envolvendo os sistemas lineares. No quarto capítulo são tratados os recursos computacionais aplicáveis ao estudo de sistemas lineares e exemplifica-se uma utilização dos *softwares Maxima* e *Geogebra*. O quinto capítulo traz um estudo de sistemas lineares onde se exemplificam diversos métodos de resolução de sistemas lineares, alguns com utilização de *software* como o *Winplot* com a proposta da exploração do comportamento geométrico e finaliza com aplicações em diversas áreas. O sexto capítulo traz as conclusões obtidas na realização do trabalho, as contribuições dele para o ensino dos sistemas lineares e sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica inicia brevemente com o surgimento histórico dos sistemas lineares. A seguir apresenta-se a definição e conceitos relacionados aos sistemas lineares e é exposta a interpretação geométrica. Em seguida são mostrados os métodos diretos de resolução de sistemas lineares, eliminação de Gauss, adição, substituição, comparação, regra de Cramer e os métodos iterativos de Jacobi e Gauss-Seidel. Apresenta-se então uma aproximação de solução para sistemas incompatíveis, uma breve conceituação de condicionamento de sistemas e conclui-se com a aplicação de sistemas lineares na interpolação polinomial.

2.1 SURGIMENTO HISTÓRICO DOS SISTEMAS LINEARES

A aparição histórica de sistemas de equações lineares tem indícios no Egito com os problemas algébricos e na Mesopotâmia quando "num texto da Babilônia antiga achamos duas equações lineares simultâneas em duas incógnitas" (BOYER, 2010, p. 11). As equações lineares eram também um dos tópicos favoritos dos hindus (BOYER, 2010, p. 152).

Segundo Fernandes e Miyasaki (2011), no livro "Chiu-Chang Suan-Chu (Nove Capítulos sobre Aritmética)", há registro de um problema modelado por sistemas lineares em 250 a.C. que retrata um episódio de produção e comércio agrícola, como segue:

> Três fardos de uma boa colheita, dois fardos de uma colheita medíocre, e um fardo de uma colheita ruim foram vendidos por 39 dou. Dois fardos de boa, três da medíocre, e um da ruim foram vendidos a 34 dou; e uma boa, dois da medíocre, e três da ruim foram vendidos a 26. Qual o preço recebido pela venda de cada fardo associado a boa colheita, a colheita medíocre e a colheita ruim? (FERNANDES e MIYASAKI, 2011 apud PEREIRA e HAFFNER, 2011, p. 1).

Em 1750, Gabriel Cramer (1704-1752) publicou a conhecida regra de Cramer que permite a resolução de um sistema linear a partir dos coeficientes das incógnitas e dos termos independentes das incógnitas. Tal regra provavelmente já era conhecida por Maclaurin desde 1729 (BOYER, 2010. p. 297).

As compilações de Etienne Bézout (1730-1783) tornaram amplamente conhecidos os progressos matemáticos de Euler e d´Alembert. Bézout também teve importante participação no uso de determinantes de eliminação algébrica. Apresentou regras semelhantes às de Cramer, para resolver *n* equações lineares simultâneas em *n* incógnitas. Expandiu dessas a um sistema de equações em uma ou mais incógnitas, onde se almeja condições necessárias sobre os coeficientes para que as equações tenham solução comum. Euler, menos extensamente que Bezóut, também contribuiu para a teoria da eliminação (BOYER, 2010. p. 321).

> O método de eliminação de Gauss era conhecido pelos chineses no terceiro século a.C., mas carrega o nome de Gauss por causa de sua redescoberta em um artigo no qual ele resolveu um sistema de equações lineares para descrever a órbita de um asteróide. (FERNANDES e MIYASAKI, 2011 – apud POOLE, 2004, p. 70).

Os métodos iterativos de resolução são técnicas frequentemente utilizadas para sistemas de médio e grande porte. Métodos clássicos como Jacobi e Gauss-Seidel datam do final do século XVIII.

2.2 DEFINIÇÃO E CONCEITO DE SISTEMAS LINEARES

De Souza (2010), denomina-se sistema linear m x n o conjunto S formado por m equações e n incógnitas, que pode ser indicado pela Eq. (2.1):

$$S = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.1}$$

No sistema linear S, por exemplo, tem-se que:

- a_{11} é o coeficiente da incógnita x_1 na 1ª equação;
- a_{23} é o coeficiente da incógnita x_3 na 2ª equação;
- a_{m2} é o coeficiente da incógnita x_2 na m -ésima equação.

A solução de um sistema linear m x n é toda n -upla $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ que é solução de cada uma das m equações desse sistema.

Denomina-se sistema linear homogêneo aquele em que todas as equações lineares são homogêneas, ou seja, o termo independente é igual à zero. Em um sistema linear homogêneo, há sempre uma solução trivial que é a n -upla $(0,0,0,\cdots,0)$. Além da solução trivial, esse tipo de sistema pode ter outras soluções não triviais.

Em geral, dado um sistema linear definido pela Eq. (2.1), podemos associar a ele a equação matricial dada pela Eq. (2.2):

$$A_{mxn}.x_{nx1} = B_{mx1} \tag{2.2}$$

A maneira de representar um sistema linear como na Eq. (2.3) é denominada forma matricial do sistema.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

De acordo com o número de soluções que um sistema linear possui, ele pode ser classificado em: possível e determinado, quando possui uma única solução; possível e indeterminado, quando possui infinitas soluções; impossível ou incompatível, quando não possui solução. Quando dois sistemas lineares admitem as mesmas soluções, eles são chamados de equivalentes.

A representação esquemática da classificação dos sistemas lineares é apresentada na Fig. 2.1.

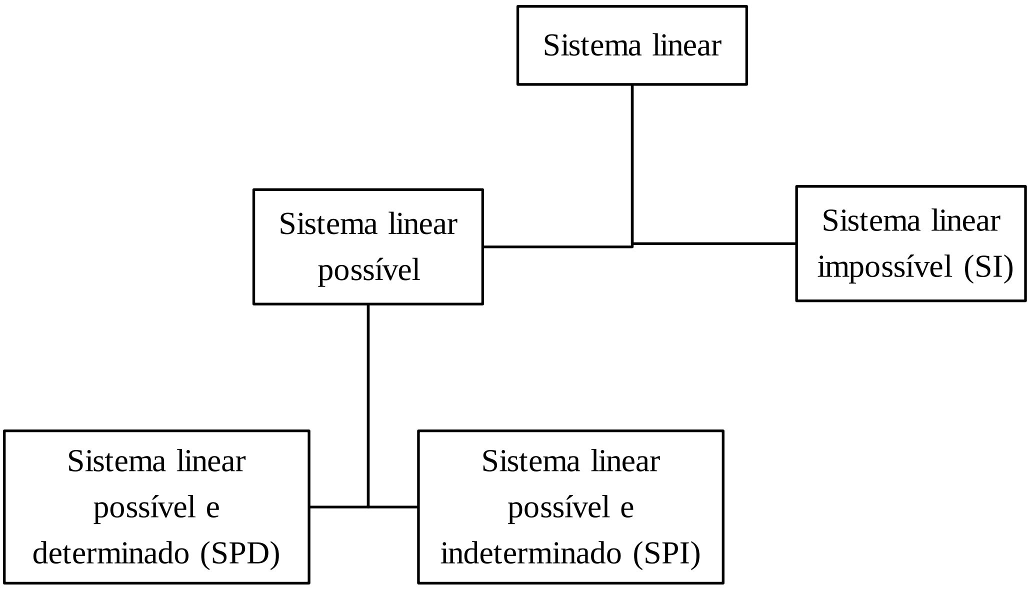

Figura 2.1- Representação esquemática da classificação dos sistemas lineares

De acordo com Souza (2010), um método muito utilizado para resolver e classificar um sistema linear é o chamado método do escalonamento.

Diz-se que um sistema linear está na forma escalonada se possui as seguintes características:

- Todas as equações possuem as incógnitas dispostas numa mesma ordem;

- Cada equação possui pelo menos um coeficiente não nulo;
- Em cada equação, os coeficientes nulos estão dispostos à esquerda dos não nulos;
- O número de coeficientes nulos aumenta de uma equação para a outra.

Um sistema escalonado pode ter o mesmo número de equações e incógnitas ou mais incógnitas do que equações. Se um sistema linear escalonado tem o número de equações igual ao de incógnitas, então ele é possível e determinado (SPD). Nos sistemas com essa característica, as incógnitas que não aparecem no início de nenhuma equação são denominadas, por convenção, incógnitas livres. Se um sistema linear escalonado o número de incógnitas é maior do que o de equações, então esse sistema é possível e indeterminado (SPI).

O grau de indeterminação ou grau de liberdade de um sistema depende da quantidade de incógnitas livres, por exemplo, se o sistema tem uma incógnita livre, dizemos que ele tem grau de indeterminação 1. O número de incógnitas livres de um sistema escalonado com m equações e n incógnitas é dado por $n-m$.

Dessa forma, definem-se os sistemas lineares de acordo com o enfoque dado no Ensino Médio. Contudo, cabe ao professor conhecer e utilizar, quando conveniente, argumentos formais que fundamentam a teoria envolvida. O professor deve conhecer os teoremas e demonstrações a fim de ajudar o aluno a construir os conceitos.

> (...) a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (PCN, 1999)

O texto de Souza (2010) apresentado acima é em nível de Ensino Médio. No âmbito da Álgebra Linear, podemos formalizar os conceitos conforme Hoffman e Kunze (1971, p. 3), de onde enunciamos:

Suponhamos que F seja um subconjunto, por exemplo, dos números reais ou dos números complexos. Consideremos o problema da determinação de n escalares (elementos de F) $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ que satisfaçam as condições dadas pela Eq. (2.4):

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \tag{2.4}$$

onde $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$ e a_{ij}, $1 \leq j \leq n$, são elementos dados de F.

A Eq. (2.4) representa um sistema de *m* equações lineares com *n* incógnitas. Toda n-upla ($x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$) de elementos de F que satisfaz a cada uma das linhas da Eq. (2.4) é dita uma solução do sistema. Se $y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$, dizemos que o sistema é homogêneo, ou que cada uma das equações é homogênea.

De acordo com Leon (1998, p. 2), quando não existem números reais que satisfaçam todas as equações, o sistema não tem solução e dizemos que ele é incompatível ou impossível, porém quando o sistema possui solução denominamos possível ou compatível. O conjunto de todas as soluções de um sistema linear é chamado de conjunto solução do sistema, se um sistema é impossível, seu conjunto solução é vazio e se é compatível tem um conjunto solução não vazio.

2.3 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS SISTEMAS LINEARES

A compreensão das soluções dos sistemas lineares pode ser melhorada se for interpretada sob o ponto de vista geométrico. De acordo com Ferreira e Gomes (1996), a abordagem geométrica torna o assunto mais interessante e, inclusive, pode dar maior segurança a quem ensina.

No ensino fundamental, algumas vezes se faz a interpretação geométrica dos sistemas de duas equações e duas incógnitas.

Nos sistemas 2x2, cada equação do sistema representa uma reta do plano e as possíveis posições relativas de duas retas no plano são três: retas concorrentes como na Fig. 2.2, paralelas como na Fig. 2.3 ou coincidentes como na Fig. 2.4:

- Concorrentes: o sistema terá solução única (sistema possível e determinado);

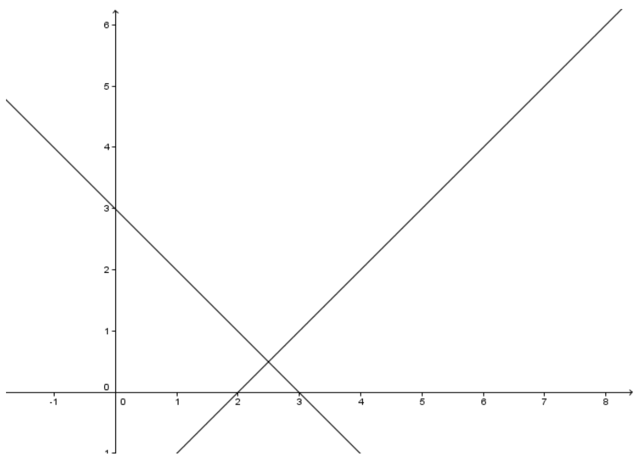

Figura 2.2 - Representação de duas retas concorrentes

- Paralelas: não terá solução (sistema impossível);

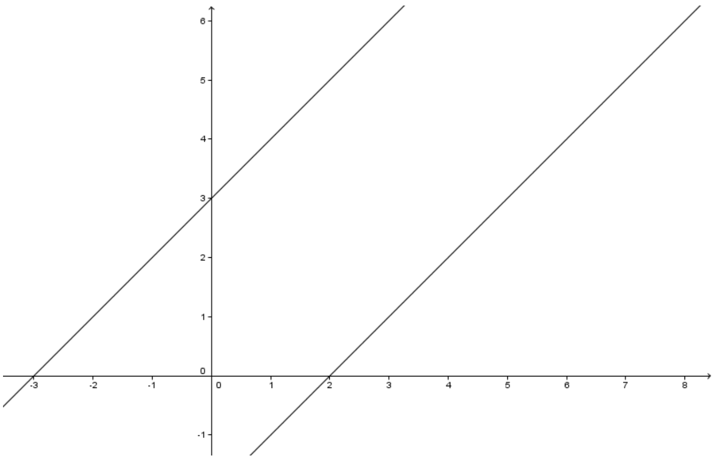

Figura 2.3 - Representação de duas retas paralelas

- Coincidentes: infinitas soluções (sistema possível e indeterminado).

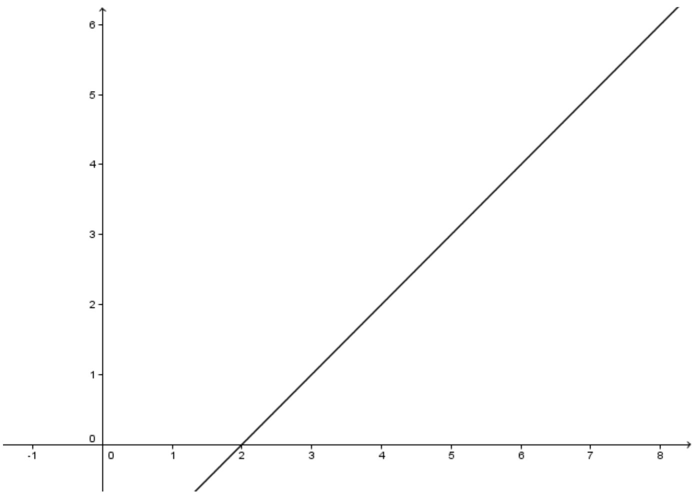

Figura 2.4 - Representação de duas retas coincidentes

Para Ferreira e Gomes (1996), embora a interpretação geométrica dos sistemas lineares 3x3 seja importante não é usual fazê-la. Cada equação na forma do sistema de Eq. (2.5) representa um plano no espaço tridimensional:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \tag{2.5}$$

No espaço existem oito possíveis posições relativas dos três planos. A abordagem geométrica permite distinguir tipos diferentes de sistemas indeterminados e impossíveis. Os sistemas 3x3 também podem ser sistemas possíveis e determinados (SPD), sistemas possíveis e indeterminados (SPI) ou sistemas impossíveis (SI).

No sistema ortogonal OXYZ no espaço, uma equação linear com três incógnitas como *x*, *y* e *z* representa um plano. Se um sistema linear 3x3 é possível e determinado, apresenta solução única que pode ser representada pela Fig 2.5 pela interseção de 3 planos.

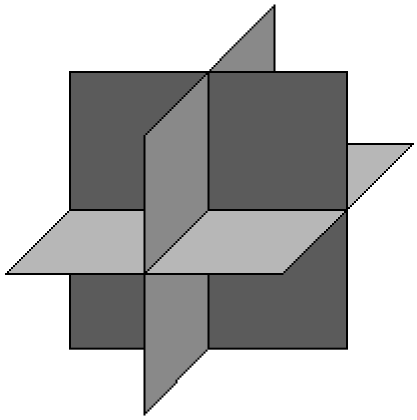

Figura 2.5 – Representação de solução de sistema linear 3x3 possível e determinado

Analogamente um sistema linear 3x3 possível e indeterminado pode ter seu conjunto solução representado pela interseção dos planos, dada pelas Figs. 2.6, 2.7 e 2.8 a seguir:

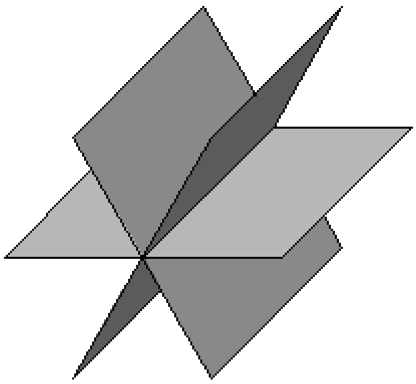

Figura 2.6 – Representação de solução de um SPI 3x3 (3 planos distintos)

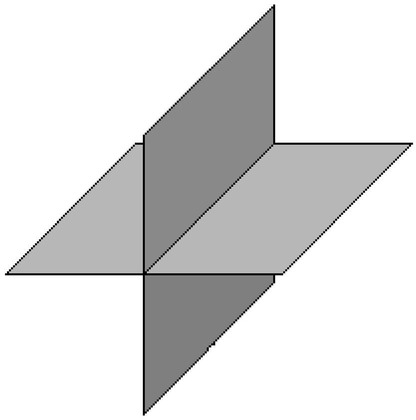

Figura 2.7 – Representação de solução de um SPI 3x3 (2 planos coincidentes)

Figura 2.8 – Representação de solução de um SPI 3x3 (3 planos coincidentes)

Sistemas lineares 3x3 impossíveis ou incompatíveis, não tem pontos que satisfaçam as três equações simultaneamente. A interpretação geométrica destes tipos de sistema podem ser dadas pelas Figs. 2.9, 2.10, 2.11 e 2.12 a seguir:

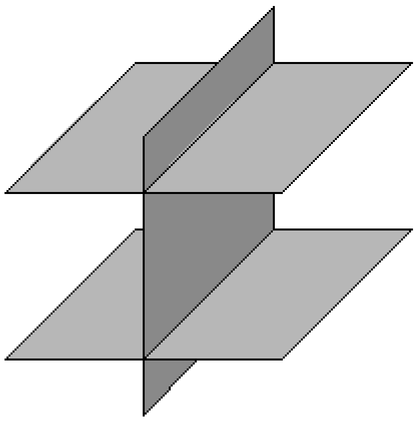

Figura 2.9 – Representação (1) geométrica de um sistema linear impossível 3x3

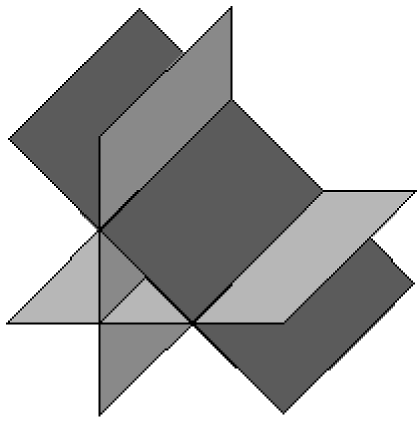

Figura 2.10 – Representação (2) geométrica de um sistema linear impossível 3x3

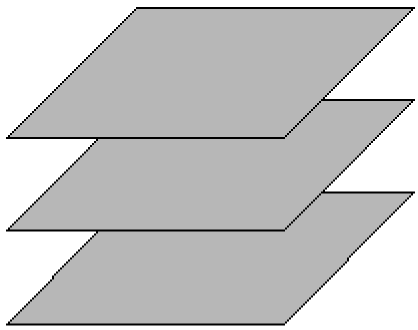

Figura 2.11 - Representação (3) geométrica de um sistema linear impossível 3x3

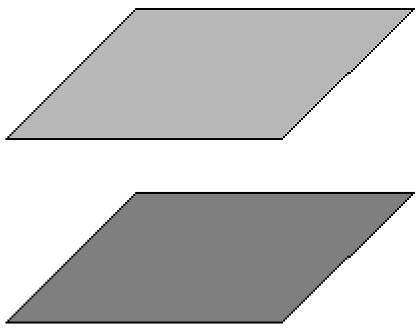

Figura 2.12 – Representação (4) geométrica de um sistema linear impossível 3x3

Mesmo com o conteúdo de Geometria Analítica, que abrange os estudos de retas e planas no espaço, sendo ensinado após os sistemas lineares no Ensino Médio, é possível apresentar a interpretação geométrica do sistema. Pode-se enriquecer o trabalho e evitar uma visão compartimentada do assunto e da própria Matemática. A associação de um tópico, abordado tradicionalmente de modo algébrico, com a Geometria mostra que esse enfoque é um instrumento poderoso que merece ser usado sempre que possível (FERREIRA e GOMES, 1996).

2.4 MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

De acordo com Ruggiero e Lopes (1996), os métodos numéricos para resolução de sistemas lineares podem ser divididos em métodos diretos e métodos iterativos. Os métodos diretos são aqueles que, a menos de erros de arredondamento, fornecem a solução exata do sistema linear, caso ela exista, após um número finito de operações. Os métodos iterativos geram uma sequência de vetores $\{x^{(k)}\}$, a partir de uma aproximação inicial $x^{(0)}$ e sob condições dadas essa sequência converge para a solução x^*.

Entre os métodos diretos se incluem todos os métodos estudados no Ensino Médio e destaca-se o método da eliminação de Gauss. A ideia central dos métodos iterativos é por meio de aproximações sucessivas encontrar a solução do sistema. Como exemplo desses métodos tem-se o método de Jacobi e o de Gauss-Seidel (BURDEN e FAIRES, 2003).

2.4.1 Método da eliminação de Gauss

Conforme Hoffman e Kunze (1971, p. 4), o método mais importante para determinar as soluções de um sistema de equações lineares é o método da eliminação. Elimina-se incógnitas, isto é, multiplica-se equações por escalares e as somam a fim de obter equações em que alguns dos x_i não estejam presentes.

Segundo Lima (2009, p. 110-111), o método da eliminação, embora seja simples, é a maneira mais eficaz de resolver um sistema de *m* equações lineares, com *n* incógnitas, apresentado sob a forma matricial $Ax = b$, onde $A \in M(m,n)$, $x \in M(n,1)$ e $b \in M(m,1)$.

O sistema $Ax = b$ possui solução se, e somente se, o vetor $b \in \mathbb{R}^m$, correspondente à matriz *b*, pertence à imagem da transformação linear T: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, cuja matriz (nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$) é *A*. Dito de outra maneira, o sistema $Ax = b$ possui solução se, e somente se, o vetor $b \in \mathbb{R}^m$ pertence ao subespaço gerado pelas colunas de *A*. Isto equivale a dizer que a matriz aumentada $[A;b] \in M(m,(n+1))$ tem o mesmo número de linhas não nulas, após ser escalonada, que a matriz *A* do sistema.

O sistema $Ax = b$ não possui solução quando b não pertence à imagem da transformação linear T, isto é, Im(T); possui uma única solução quando b pertence à Im(T) e T é injetiva; e possui infinitas soluções quando b pertence à Im(T) e T não é injetiva.

Teorema1 (Lima, 2009, p. 63). Seja T: E$\rightarrow F$ uma transformação linear. Para todo $b \in$ Im(T), o conjunto V ={ $x \in$ E; $Ax = b$ }, formado pelas soluções do sistema linear $Ax = b$, é paralela ao núcleo da transformação linear, N(T).

Geometricamente o Teorema1 significa que o espaço vetorial E se exprime como uma reunião de lâminas paralelas $V = x_0 + N(T)$, cada uma das quais se transforma por A num único ponto $b \in$ Im(T). Isso pode ser observado na Fig. 2.13. Este ponto, naturalmente, varia quando se passa de uma lâmina para outra (Lima, 2009, p 64).

Algebricamente o Teorema1 significa que para cada $b \in$ Im(T), obtêm-se todas as soluções $x \in$ E do sistema linear $Ax = b$ assim: acha-se uma "solução particular" x_0 desse sistema e a solução geral $x = x_0 + v$ é a soma dessa solução particular com a "solução geral v do sistema homogêneo associado" $Ax = 0$. Naturalmente, esta última é um elemento qualquer do núcleo de T. Se b não pertence à Im(T), então o sistema $Ax = b$, evidentemente, não possui solução.

Em termos matriciais o sistema $Ax = b$, com $A \in M(mxn)$, $x \in M(nx1)$ e $b \in M(mx1)$, admite as seguintes alternativas:

(1) Não possui solução quando o número de linhas não nulas da matriz aumentada [*A;b*] escalonada é maior do que de *A*;

(2) Possui uma única solução quando a matriz *A* e a matriz aumentada [*A;b*] escalonada têm o mesmo número de linhas não nulas e igual ao número *n* de incógnitas;

(3) Possui infinitas soluções quando o número de linhas não nulas de [*A;b*] escalonada é igual ao de *A*, porém é menor que o número *n* de incógnitas.

Contudo, na prática para reconhecer em qual dos casos se enquadra um sistema dado e obter suas soluções, caso existam, se faz com o método de eliminação, escalonando a matriz aumentada do sistema (Lima, 2009, p. 110).

O processo de eliminação se baseia na observação de que ao efetuar uma operação elementar sobre as linhas da matriz aumentada [*A;b*] obtém-se uma matriz [*A';b'*] que é a matriz aumentada de um sistema $A'x = b'$, equivalente ao sistema original $Ax = b$. No final do processo, obtém-se um sistema $A'x = b'$, equivalente ao sistema proposto $Ax = b$, no qual a matriz [*A';b'*] é escalonada. Quando há solução, o sistema $A'x = b'$ é facilmente resolvido por substituição regressiva: encontra-se primeiro o valor da última incógnita, substituindo-a por esse valor na equação anterior e assim por diante (LIMA, 2009, p. 111).

Mediante operações elementares (como troca de posição de duas linhas e soma de uma linha a um múltiplo de outra linha) sobre linhas que se resolve o sistema, ou seja, mediante aplicações sucessivas das duas operações elementares às linhas da matriz, produz-se uma matriz escalonada. O processo pode ser verificado no exemplo a seguir.

Ex: Seja S o sistema linear:

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + 2y + z = 3 \\ 3x - y - 2z = 1 \end{cases}.$$

Pode-se escrever a matriz aumentada correspondente: $\begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ onde L_1 é a 1ª linha, L_2 é a 2ª e L_3 é a terceira, faz-se,

$$\begin{array}{r} L_1 \to L_2 \\ L_2 \to L_1 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ L_2 \to L_1 - 2L_2 \\ L_3 \to L_1 - 3L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -5 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} \\ \\ L_3 \to L_2 - L_3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}$$

Assim, reescreve-se o sistema como: $\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ -7y - 3z = -2 \\ -2z = -6 \end{cases}$ e por substituição regressiva conclui-se que a solução é a terna $(x, y, z) = (2, -1, 3)$.

Dependendo dos valores de *m* e *n*, outros métodos de resolução podem ser aplicados, como a adição (uma variação da eliminação), o método da substituição, a regra de Cramer ou ainda métodos geométricos que auxiliam principalmente na interpretação do sistema linear.

A eliminação é um processo bastante facilitador para a resolução dos sistemas lineares, mas a utilização no ensino médio acaba sendo entendida como simplesmente um procedimento a partir de exemplos e não se aprofunda no conceito propriamente dito. À medida que os valores de m e n vão crescendo esses métodos mais simples, exigindo a aplicação de métodos mais sofisticados de resolução.

2.4.2 Método da adição

Restringindo o método da eliminação a um sistema 2x2, teremos o que se chama método da adição. O método consiste em somar as variáveis semelhantes de duas equações no intuito de obter resultado igual à zero, conforme exemplo a seguir.

Ex: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 6y = 2 \\ -x + 5y = -9 \end{cases}$$

Somando-se a 1ª equação do sistema com duas vezes a 2ª equação obtém-se:

$$0 + 16y = -16$$

$$y = -1$$

Substituindo o valor de y na 1ª equação, tem-se:

$$2x + 6(-1) = 2$$

$$2x - 6 = 2$$

$$x = 4$$

Portanto a solução do sistema é $(x, y) = (4, -1)$.

2.4.3 Método da substituição

O método da substituição, usualmente empregado para sistemas lineares 2x2, consiste em isolar uma das incógnitas em uma das equações do sistema e substituir o valor isolado na outra equação e retornar o valor encontrado para a anterior, conforme exemplo:

Ex: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$$

Isolando a incógnita x na 1ª equação obtém-se:

$$x = \frac{5 + y}{3}$$

Substituindo este valor na 2ª equação, vem:

$$\frac{5+y}{3}+5y=7$$

$$5+y+15y=21$$

$$16y=16$$

$$y=1$$

Retornando na anterior, encontramos,

$$x=\frac{5+1}{3}$$

$$x=2$$

Portanto a solução do sistema é $(x,y)=(2,1)$.

2.4.4 Método da comparação

O método da comparação consiste em isolar a mesma incógnita nas duas equações e realizar a comparação entre elas, conforme o exemplo a seguir.

Ex: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x+8y=31 \\ -x+5y=8 \end{cases}$$

Isolando a incógnita *x* na 1ª equação obtemos:

$$x=31-8y$$

Isolando a incógnita *x* na 2ª equação obtemos:

$$x=-8+5y$$

Comparando as equações obtidas, vem:

$$31-8y=-8+5y$$

$$-5y-8y=-8-31$$

$$13y=39$$

$$y=3$$

Retornando em alguma das equações com a incógnita *x* isolada, segue:

$$x=31-8.3 \;\Rightarrow\; x=7$$

Portanto a solução do sistema é $(x,y)=(7,3)$.

2.4.5 Regra de Cramer

Um sistema linear n x n, como da Eq. (2.6)

$$S=\begin{cases} a_{11}x_1+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad\quad\vdots \\ a_{n1}x_1+...+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{2.6}$$

onde a Eq. (2.7) é denominada matriz dos coeficientes do sistema S,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

é possível e determinado se, e somente se, det$A\neq 0$ e sua única solução é dada por $x_1=\dfrac{\det A_{x1}}{\det A}$, $x_2=\dfrac{\det A_{x2}}{\det A}$, ... $x_n=\dfrac{\det A_{xn}}{\det A}$ onde A_{x1}, A_{x2}, ... , A_{xn} são as matrizes obtidas substituindo-se, respectivamente, a coluna dos coeficientes de $x_1, x_2, \cdots x_n$ pela coluna dos termos independentes.

A regra de Cramer decorre do fato de que o sistema S pode ser representado na forma matricial $Ax=b$, onde A é a matriz dos coeficientes, x a matriz das incógnitas e b a matriz dos termos independentes.

Se $\det A\neq 0$ então a matriz A admite uma inversa A^{-1} e assim:
$Ax=b \Rightarrow A^{-1}.(A.x)= A^{-1}.b \Rightarrow (A^{-1}.A).x=A^{-1}.b \Rightarrow I_n.x = A^{-1}.b \Rightarrow x = A^{-1}.b$. Portanto, existe uma única matriz x que é solução de $Ax = b$ e assim o sistema S é possível e determinado.

Com base na regra de Cramer podemos classificar um sistema n x n, da seguinte maneira:

i) Quando $\det A\neq 0$, o sistema é possível e determinado.

ii) Quando $\det A=0$ e $\det A_{x1}=\det A_{x2}=\cdots=\det A_{xn}=0$, o sistema é possível e indeterminado ou impossível.

iii) Quando $\det A=0$ e pelo menos um dos determinantes $\det A_{x1}, \det A_{x2}, \cdots, \det A_{xn}$, for diferente de zero, o sistema é impossível.

A regra de Cramer é um método conveniente para escrever a solução de um sistema de equações lineares n x n em função de determinantes. Para calcular a solução, no entanto, calcula-se n+1 determinantes de ordem n. O cálculo de apenas dois desses determinantes envolve, em geral, mais operações do que resolver o sistema pelo método da eliminação de Gauss (LEON, 1998, p.76).

2.4.6 Métodos Iterativos

Sistemas lineares podem ser resolvidos por métodos iterativos. De modo geral, as equações são colocadas em uma forma explícita na qual cada incógnita é escrita em termos das demais incógnitas (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008, p.146). Em um sistema com *n* equações, as equações explícitas para as incógnitas $[x_i]$ são dadas pela Eq. (2.8):

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{j=n} a_{ij}x_j\right)\right] \qquad i = 1,2,\cdots,n \tag{2.8}$$

Segundo os autores, o processo de solução começa com a escolha de valores iniciais para as incógnitas (primeira solução estimada). Na primeira iteração, a primeira solução assumida é substituída no lado direito das equações, e os novos valores calculados para as incógnitas formam a segunda solução estimada. Na segunda iteração, a segunda solução é substituída novamente nas equações para que novos valores sejam obtidos para as incógnitas, e isso constitui a terceira solução estimada. As iterações continuam da mesma forma e, quando o método converge, as soluções obtidas durante as iterações sucessivas convergem para a solução real.

Condição para a convergência

Para um sistema de n equações $Ax=b$, uma condição suficiente para a convergência ocorre se, em cada uma das linhas da matriz de coeficientes A, o valor absoluto do elemento diagonal for maior que a soma dos valores absolutos dos elementos fora da diagonal como apresentado na Eq. (2.9).

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1,\, j\neq i}^{j=n} |a_{ij}| \tag{2.9}$$

A condição dada pela Eq. (2.9) é suficiente, mas não é necessária para a convergência do método iterativo.

Quando a condição for satisfeita, a matriz A é classificada como diagonalmente dominante, e o processo iterativo converge para a solução. A solução, no entanto, pode convergir mesmo quando a condição não é satisfeita. Algumas dessas condições serão vistas ao longo deste texto.

Método iterativo de Jacobi

Segundo Gilat e Subramaniam (2008), no método iterativo de Jacobi, um valor inicial é escolhido para cada uma das incógnitas, $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}$. Se não houver nenhuma informação a respeito dos valores aproximados das incógnitas, pode-se assumir que o valor inicial de todas elas seja igual a zero. A segunda estimativa da solução, $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \cdots, x_n^{(2)}$, é calculada com a substituição da primeira estimativa no lado direito da Eq. (2.4) obtemos a Eq. (2.10).

$$x_i^{(2)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} a_{ij} x_j^{(1)} \right) \right] \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.10}$$

Em geral, a ($k+1$)-ésima estimativa da solução é calculada a partir da k-ésima estimativa usando a Eq. (2.11):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{j=n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) \right] \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2.11}$$

As iterações continuam até que as diferenças entre os valores obtidos nas iterações sucessivas sejam menores que o erro admissível (ε). As iterações podem ser interrompidas quando o valor absoluto do erro relativo estimado de todas as incógnitas for menor que algum valor predeterminado, ou seja, $\left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| < \varepsilon$, onde $i = 1, 2, \cdots, n$.

Um exemplo desse método é resolvido na seção 4.3.1.

Critério de convergência do método de Jacobi

Para estudo da convergência do método de Jacobi, Ruggiero e Lopes (1996, p. 160) apresentam o critério das linhas, enuncia-se:

Seja o sistema linear $Ax=b$ e seja $\alpha_k = \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}| \right) / |a_{kk}|$. Se $\alpha = \underset{1 \le k \le n}{máx} \alpha_k < 1$, então o método de Jacobi gera uma sequência $\{x^{(k)}\}$ convergente para a solução do sistema dado, independente da escolha da aproximação inicial, $x^{(1)}$. Conforme exemplo a seguir.

Ex: Em uma matriz *A*, de um sistema linear, $A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{pmatrix}$, tem-se $a_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3$; $a_2 = \frac{1+1}{5} = 0{,}4$; $a_3 = \frac{2+3}{10} = 0{,}2$ e então $\underset{1 \le k \le 3}{máx} \alpha_k = 0{,}4 < 1$, donde, pelo critério das linhas, tem-se a garantia de convergência para o método de Jacobi.

Em contrapartida, para o sistema linear dado pela Eq. (2.12), o método de Jacobi gera uma sequência convergente para a solução exata $x = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{pmatrix}$.

$$A = \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases} \tag{2.12}$$

No entanto, o critério das linhas não é satisfeito, visto que $\alpha_1 = \frac{1}{1} = 1$. Isto mostra que o critério das linhas é apenas suficiente.

Observa-se que a matriz A do sistema linear $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ não satisfaz o critério das linhas, pois $\alpha_1 = \frac{3+1}{1} = 4 > 1$. Contudo, ao permutar a primeira equação com a segunda, tem-se o sistema linear $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = -2 \\ 6x_2 + 8x_3 = -6 \end{cases}$ que é equivalente ao sistema original e a matriz $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ deste novo sistema satisfaz o critério das linhas. Assim, é conveniente aplicar o método de Jacobi a esta nova disposição do sistema, pois desta forma a convergência está assegurada.

Ruggiero e Lopes (1996, p. 161) dizem que sempre que o critério das linhas não for satisfeito, deve-se tentar uma permutação de linhas e/ou colunas de forma a obter-se uma disposição para a qual a matriz dos coeficientes satisfaça o critério das linhas. No entanto, nem sempre é possível obter tal disposição, como se verifica no sistema linear da Eq. (2.12).

Método iterativo de Gauss-Seidel

No método de Gauss-Seidel, valores iniciais são assumidos para as incógnitas $x_2, x_{3,} \cdots, x_n$ (todas as incógnitas, exceto x_1). Se não houver nenhuma informação a respeito dos valores aproximados das incógnitas, pode-se assumir que o valor inicial de todas elas seja *k*=0. Os primeiros valores assumidos para as incógnitas são substituídas na Eq. (2.11) com $i = 1$ para calcular o valor de x_1. Em seguida, a Eq. (2.11) com $i = 2$ é usada no cálculo de um novo valor para x_2. Então se usa a Eq. (2.11) com $i = 3$ para calcular o novo valor para x_3, o que continua até que $i = n$, o que representa o final da iteração (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008, p.147).

A segunda iteração começa com $k = 1$, onde um novo valor é calculado para x_1, e assim por diante. No método de Gauss-Seidel, os valores atuais das incógnitas são utilizados no cálculo do novo valor da próxima incógnita. Ou seja, à medida que um novo valor é calculado, ele é imediatamente utilizado na próxima aplicação da Eq.(2.11).

A aplicação da Eq. (2.11) no método de Gauss-Seidel resulta na Eq, (2.13), (2.14) e (2.15) onde se obtém a equação explícita de x_1:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}\left[b_1 - \left(\sum_{j=2}^{j=n} a_{1j} x_j^{(k)}\right)\right] \tag{2.13}$$

Em seguida vem a Eq. (2.14), que leva à fórmula iterativa dada pela Eq. (2.15):

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \left(\sum_{j=1}^{j=i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^{j=n} a_{ij} x_j^{(k)}\right)\right] \qquad i = 2,3,\cdots,n-1 \tag{2.14}$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}\left[b_n - \left(\sum_{j=1}^{j=n-1} a_{nj} x_j^{(k+1)}\right)\right] \tag{2.15}$$

Note que os valores das incógnitas na iteração $k+1$, $x_i^{(k+1)}$, são calculados usando os valores $x_j^{(k+1)}$ obtidos na iteração $k+1$ para $j < i$ e usando os valores $x_j^{(k)}$ para $j > i$. O critério de parada das iterações é o mesmo utilizado no método de Jacobi. O método de Gauss Seidel converge mais rápido do que o método de Jacobi e requer menos memória computacional quando programado.

Um exemplo desse método é resolvido na seção 5.3.

Convergência do método de Gauss-Seidel

Ruggiero e Lopes (1996, p. 170) analisam o critério de Sassenfeld e o critério das linhas que estabelecem condições suficientes de convergência para o método de Gauss Seidel.

Seja $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a solução exata do sistema $Ax=b$ e seja $x^{(k)} = \begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{pmatrix}$ a k-ésima aproximação de x.

Precisa-se de uma condição que garanta que $x^{(k)} \to x$ quando $k \to \infty$, ou seja, que $\lim_{k\to\infty} e_i^{(k)} = 0$ para $i = 1, \cdots, n$ onde $e_i^{(k)} = x_i^{(k)} - x_i$. Agora, no sistema de equações dado pela Eq. (2.16) sejam $E^{(k)} = \underset{1\le i\le n}{máx}\left\{\left|e_i^{(k)}\right|\right\}$, $\beta_1 = \dfrac{\sum_{j=2}^{n}\left|a_{1j}\right|}{\left|a_{11}\right|}$ e $\beta_i = \dfrac{\left[\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j\left|a_{ij}\right| + \sum_{j=i+1}^{n}\left|a_{ij}\right|\right]}{\left|a_{ii}\right|}$ para $i = 2, 3, \cdots, n$.

$$\begin{cases} e_1^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{11}}\left(a_{12}e_2^{(k)} + a_{13}e_3^{(k)} + \cdots + a_{1n}e_n^{(k)}\right) \\ e_2^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{22}}\left(a_{21}e_1^{(k+1)} + a_{23}e_3^{(k)} + \cdots + a_{2n}e_n^{(k)}\right) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ e_n^{(k+1)} = -\dfrac{1}{a_{nn}}\left(a_{n1}e_1^{(k)} + a_{n2}e_2^{(k)} + \cdots + a_{n,n-1}e_{n-1}^{(k+1)}\right) \end{cases} \tag{2.16}$$

A condição $x^{(k)} \to x$ equivale a $E^{(k)} \to 0$ quando $k \to \infty$. E, $E^{(k+1)} \le \beta E^{(k)}$ onde $\beta = \underset{1\le i\le n}{máx}\,\beta_i$. Assim, basta que $\beta < 1$ para que tenhamos $E^{(k+1)} < E^{(k)}$. Além disso, temos $E^{(k)} \le \beta E^{(k-1)} \le \beta\left(\beta E^{(k-2)}\right) \le \cdots \le \beta^k E^{(0)}$. Desde que β seja menor que 1, tem-se que $E^{(k)} \to 0$ quando $k \to \infty$ e, o que é importante, independentemente da aproximação inicial escolhida.

Com isso se estabelece o critério de Sassenfeld:

Sejam β_1 dado pela Eq. (2.17) e β_j dado pela Eq. (2.18)

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + \cdots + |a_{1n}|}{|a_{11}|} \tag{2.17}$$

e

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + \cdots + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + |a_{jj+1}| + \cdots + |a_{jn}|}{|a_{jj}|} \tag{2.18}$$

Assim, $\beta = \underset{1 \le j \le n}{máx}\{\beta_j\}$. Se $\beta < 1$, então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente qualquer que seja $x^{(0)}$. Além disto, quanto menor for β, mais rápida será a convergência.

Exemplificando esse critério, Ruggiero e Lopes (1996, p. 174) faz:

Ex: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}5x_2 - 0{,}1x_3 + 0{,}1x_4 = 0{,}2 \\ 0{,}2x_1 + x_2 - 0{,}2x_3 - 0{,}1x_4 = -2{,}6 \\ -0{,}1x_1 - 0{,}2x_2 + x_3 + 0{,}2x_4 = 1{,}0 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + x_4 = -2{,}5 \end{cases}$$

Para este sistema linear com esta disposição de linhas e colunas, tem-se,

$$\beta_1 = \frac{[0{,}5 + 0{,}1 + 0{,}1]}{1} = 0{,}7$$
$$\beta_2 = \frac{[(0{,}2)(0{,}7) + 0{,}2 + 0{,}1]}{1} = 0{,}44$$
$$\beta_3 = \frac{[(0{,}1)(0{,}7) + (0{,}2)(0{,}44) + 0{,}2]}{1} = 0{,}44$$
$$\beta_4 = \frac{[(0{,}1)(0{,}7) + (0{,}3)(0{,}44) + (0{,}2)(0{,}358)]}{1} = 0{,}2736$$

Portanto, $\beta = \underset{1 \le i \le n}{máx}\{\beta_i\} = 0{,}7 < 1$ e então tem-se a garantia de que o método de Gauss-Seidel vai gerar uma sequência convergente.

Ex: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Com esta disposição de linhas e colunas, tem-se $\beta_1 = \frac{(1+3)}{2} = 2 > 1$.

Trocando a 1ª equação pela 3ª, tem-se $\begin{cases} x_1 + 3x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 9 \end{cases}$ donde $\beta_1 = \frac{(0+3)}{1} = 3 >> 1$.

A partir desta disposição, trocando a 1ª coluna pela 3ª, tem-se $\begin{cases} 3x_3 + x_1 = 3 \\ x_3 - x_2 = 1 \\ 3x_3 + x_2 + 2x_1 = 9 \end{cases}$.

Desta forma, $\beta_1 = \frac{1}{3}$; $\beta_2 = \frac{[(1)(1/3)+0]}{1} = \frac{1}{3}$; $\beta_3 = \frac{[(3)(1/3)+(1)(1/3)]}{2} = \frac{2}{3}$.

Portanto, $\beta = \underset{1 \le i \le 3}{máx}\{\beta_i\} = \frac{2}{3} < 1$; então vale o critério de Sassenfeld e tem-se garantia de convergência.

Ex: Considerando o sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 - 3x_2 = -3 \end{cases}$ cuja solução exata é $(x_1; x_2) = (1{,}5; 1{,}5)$.

Nota-se que $\beta_1 = \frac{1}{1} = 1$ e $\beta_1 = \frac{[1 \times 1]}{3} = \frac{1}{3}$ e, portanto, o critério de Sassenfeld não é satisfeito.

O critério das linhas apresentado para o método de Jacobi pode ser aplicado no estudo da convergência do método de Gauss-Seidel. Ruggiero e Lopes (1996, p. 176) afirmam que o critério das linhas diz que se $\alpha = \underset{1 \le k \le n}{máx}\{\alpha_k\} < 1$, onde $\alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \ne k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$ então o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente.

Se o critério das linhas for satisfeito, então o critério de Sassenfeld é satisfeito. No entanto, o critério de Sassenfeld pode ser satisfeito mesmo que o critério das linhas não o seja, como no exemplo do sistema linear abaixo:

Ex: Seja o sistema linear

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

Temos $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{3} < 1$ e $\alpha_2 = \frac{1}{1} = 1$; então o critério das linhas não é satisfeito. No entanto, $\beta_2 = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{1} = \frac{1}{3} < 1$ e $\beta_3 = \frac{3 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{2}{3} < 1$.

Portanto, o critério de Sassenfeld é satisfeito.

Comparação entre os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel

No método de Jacobi, os valores das incógnitas obtidos em uma iteração não são utilizados como um conjunto completo no cálculo dos novos valores das incógnitas na próxima iteração. Os valores das incógnitas não são atualizados no meio da iteração (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008).

Os autores explicam que a diferença entre os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel está na maneira pela qual os novos valores calculados para as incógnitas são utilizados. No método de Jacobi, os valores das incógnitas no lado direito da Eq. (2.4) são atualizados todos de uma vez no final de cada iteração. No método de Gauss-Seidel, o valor de cada incógnita é atualizado (e usado no cálculo da nova estimativa das demais incógnitas dentro da mesma iteração) assim que se calcula uma nova estimativa para essa incógnita.

2.4.7 Comparação entre os métodos diretos e iterativos

Conforme Ruggiero e Lopes (1996, p. 177), os métodos diretos são processos finitos e, portanto, teoricamente, obtêm a solução de qualquer sistema não singular de equações. Já os métodos iterativos têm convergência assegurada apenas sob determinadas condições.

Os autores acrescentam que inúmeros sistemas lineares, oriundos de problemas práticos como discretização de equações diferenciais por método dos elementos finitos ou método de diferenças finitas e descrição de redes de potência, são de grande porte com matriz dos coeficientes esparsa. Para estes casos, são adotados esquemas especiais para armazenamento da matriz *A*, que tiram proveito de sua esparsidade.

Acompanhando as comparações de Ruggiero e Lopes (1996, p. 178) destaca-se que quando os métodos diretos são aplicados a sistemas esparsos provocam preenchimentos na matriz *A*, isto é, durante o processo de eliminação de Gauss poderão surgir elementos não nulos em posições a_{ij} que originalmente eram nulas. Para exemplificar, considere a matriz A representada simbolicamente sendo $*$ a representação de um elemento não nulo:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ * & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 & 0 & * & * & * \\ * & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * & 0 \end{pmatrix}$$

Após a 1ª etapa do processo de eliminação de Gauss teremos:

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & * & * & 0 & * & * \\ * & \bullet & * & \bullet & \bullet & * & \bullet & * \\ 0 & * & * & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 & * & 0 \\ * & \bullet & 0 & \bullet & * & * & \bullet & \bullet \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 \\ * & \bullet & * & \bullet & \bullet & * & * & * \\ * & \bullet & 0 & * & \bullet & 0 & * & \bullet \end{pmatrix}$$

onde $\bullet$ representa o elemento não nulo que preencheu uma posição originalmente nula.

Portanto se a matriz A for esparsa e de grande porte, uma desvantagem dos métodos diretos para a resolução do sistema linear $Ax=b$ é o preenchimento na matriz, exigindo técnicas especiais para escolha do pivô para reduzir este preenchimento.

Ainda segundo Ruggiero e Lopes (1996, p. 178), os métodos diretos apresentam sérios problemas com erros de arredondamento, porque coeficientes pequenos geram multiplicadores grandes. Os métodos iterativos têm menos erros de arredondamento, visto que a convergência, uma vez assegurada, independe da aproximação inicial. Desta forma, somente os erros cometidos na última iteração afetam a solução, pois os erros cometidos nas iterações anteriores não levarão à divergência do processo nem à convergência a um outro vetor que não a solução.

2.5 APROXIMAÇÃO DE SOLUÇÃO PARA SISTEMAS INCOMPATÍVEIS

Ao se deparar com um sistema linear impossível ou incompatível, é comum deixar de explorá-lo. Entretanto, especialmente o professor deve ter em mente que, apesar de não podermos encontrar sua solução exata, é possível se obter uma aproximação de solução. Para problemas reais, muitas vezes, essas aproximações contribuem consideravelmente na explicação de situações modeladas por sistemas incompatíveis.

Brevemente apresentamos de Coelho e Lourenço (2005) as principais proposições e definições necessárias para a compreensão desse método de aproximação de solução para sistemas incompatíveis.

Ortogonalidade

Seja V um espaço vetorial sobre K (conjunto dos números reais ou complexos) com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ e sejam u, v $\in$V. Dizemos que u e v são ortogonais se $\langle u,v\rangle$=0. Um subconjunto A de V é chamado de ortogonal se os seus elementos são ortogonais dois a dois.

A notação $u \perp v$ (u perpendicular a v) indica que os vetores u e v são ortogonais.

O vetor nulo $\vec{0}$ é ortogonal a todos os elementos de V pois $\langle \vec{0},u\rangle$=0, para todo $u \in$V. Além disso, o vetor nulo é o único vetor com esta propriedade.

Proposição1: Seja V um K-espaço vetorial com produto interno e seja J um subconjunto ortogonal de V formado por vetores não nulos.

a) Se $v \in [v_1,\cdots,v_n]$, com $v_i \in J$, então $v = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v,v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$.

b) J é linearmente independente.

O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt

Seja V um espaço vetorial sobre K com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Considere $J = \{v_1,\cdots,v_n\} \subset V$ um conjunto linearmente independente. Construamos outro conjunto $J' = \{w_1,\cdots,w_n\} \subset V$ que seja ortogonal e tal que os subespaços gerados por J e por J' sejam os mesmos. Esta construção é feita indutivamente como segue

- $w_1 = v_1$.

- $w_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1.$

  Observe que $w_2 \neq 0$ (pois $\{v_1, v_2\}$ é linearmente independente) e que $w_2 \perp w_1$. De fato,

  $$\langle w_2, w_1\rangle = \langle v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1, w_1\rangle = \langle v_2, w_1\rangle - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} . \langle w_1, w_1\rangle = 0$$

- Definidos $w_1, \cdots, w_k$, com $1 < k < n$, sendo w_{k+1} dado por

  $$w_{k+1} = v_{k+1} - \frac{\langle v_{k+1}, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \cdots - \frac{\langle v_{k+1}, w_k\rangle}{\|w_k\|^2} w_k = v_{k+1} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v_{k+1}, w_j\rangle}{\|w_j\|^2} w_j .$$

O conjunto $\{w_1, \cdots, w_n\}$ definido acima é ortogonal e, em particular, linearmente independente. Observe também que, para cada $i = 1, \cdots, n$, $w_i \in W = [v_1, \cdots, v_n]$.

Subespaço ortogonal

Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno, e seja $S \subseteq V$ um subconjunto de V. Chamamos de ortogonal a S ao conjunto $S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, u\rangle = 0, \forall u \in S\}$.

Proposição 2: Seja V um espaço vetorial sobre K munido de um produto interno. Sejam $W \subseteq V$ um subespaço e $\mathrm{B} = \{w_1, \cdots, w_k\}$ um conjunto gerador para W. Então $v \in W^{\perp}$ se e somente se $\langle v, w_i\rangle = 0$, para cada $i = 1, \cdots, k$.

Proposição 3: Seja V um K-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$ e com produto interno e seja $W \subseteq V$ um subespaço próprio de V. Então $V = W \oplus W^{\perp}$.

A melhor aproximação

O conceito de ortogonalidade pode ser usado para aproximar elementos de um espaço vetorial por outros em um dado subespaço.

Proposição 4: Sejam V um K-espaço vetorial com produto interno e W um subespaço de V com dimensão finita. Então, dado $v \in V$, existe um único $w \in W$ tal que $v - w \in W^{\perp}$.

Definição: Sejam V um K-espaço vetorial com produto interno e $W \subseteq V$, um subespaço de V. Se dado $v \in V$, existir $w \in W$ tal que $v - w \in W^{\perp}$, chamamos o vetor w de projeção ortogonal de v sobre W.

A projeção ortogonal de v sobre W será denotada como $w = proj_w v$.

A proposição 4 nos diz que, para um subespaço de dimensão finita W, cada $v \in V$ admite uma única projeção ortogonal de v sobre W. Além disso, se $\{w_1, \cdots, w_n\}$ for uma base ortogonal de W, então tal projeção será o vetor $proj_w v = \frac{\langle v, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2}.w_1 + \cdots + \frac{\langle v, w_n \rangle}{\|w_n\|^2}.w_n$.

Proposição 5. Sejam V um K-espaço vetorial com produto interno, W um subespaço de V e $v \in V$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(a) $v - w_0 \in W^{\perp}$.

(b) $\|v - w_0\| < \|v - w\|, \forall w \in W$ e $w \neq w_0$.

A proposição 5 garante em particular que a projeção $proj_w v$, quando existe, é a melhor aproximação de v por um vetor de W e vice-versa. Quando a dimensão de W for finita, o problema de determinar a projeção ortogonal de um vetor v sobre W é equivalente a determinar um vetor de W que melhor se aproxima de v.

Sistemas incompatíveis

A projeção ortogonal também serve para se determinar a melhor solução possível de um sistema linear incompatível.

Seja o sistema de equações lineares dado pela Eq. (2.19) um sistema incompatível com p equações e n incógnitas com coeficientes em K (conjunto dos números reais ou complexos).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases} \tag{2.19}$$

Como tal sistema é incompatível, não existe nenhuma n-upla $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathrm{K}^n$ que seja uma solução dele. A intenção, no entanto, encontrar uma n-upla que se aproxime de uma solução. Denota-se a matriz dos coeficientes do sistema da Eq. (2.19) por A, obtendo a Eq. (2.20):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

Almeja-se encontrar um vetor $Y \in \mathrm{K}^n$ tal que o produto AY esteja o mais próximo possível do vetor $b = (b_1, \cdots, b_n)$, isto é, tal que $\|AY - b\| < \|Ax - b\|, \forall x \in \mathrm{K}^n, X \neq Y$.

Considere os vetores $A_1 = (a_{11}, \cdots, a_{p1}),\ A_2 = (a_{12}, \cdots, a_{p2}),\ \cdots,\ A_n = (a_{1n}, \cdots, a_{pn}) \in \mathrm{K}^p$. Como o nosso problema consiste em determinar Y tal que AY esteja o mais próximo possível de $b \in \mathrm{K}^n$ e AY seja a projeção de b sobre W. Pelas proposições 2 e 5, isto é equivalente a dizer que $\langle b - AY, A_j \rangle = 0$, $\forall \ \ j = 1,2, \cdots, n$. Obtemos assim o sistema dado pela Eq. (2.21):

$$\begin{cases} \langle A_1, A_1 \rangle y_1 + \langle A_2, A_1 \rangle y_2 + \cdots + \langle A_n, A_1 \rangle y_n = \langle b, A_1 \rangle \\ \langle A_1, A_2 \rangle y_1 + \langle A_2, A_2 \rangle y_2 + \cdots + \langle A_n, A_2 \rangle y_n = \langle b, A_2 \rangle \\ \qquad\qquad \vdots \\ \langle A_1, A_n \rangle y_1 + \langle A_2, A_n \rangle y_2 + \cdots + \langle A_n, A_n \rangle y_n = \langle b, A_n \rangle \end{cases} \tag{2.21}$$

o qual terá sempre solução, uma vez que a projeção ortogonal existe.

Agora, usando o produto interno usual de K^p e a multiplicação de matrizes, pode ser escrito o sistema de equações Eq. (2.21) como $A^t AY = A^t b$. Assim, o sistema acima admite solução e será a melhor solução aproximada do sistema dado pela Eq. (2.19).

Observe que se $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ for um conjunto linearmente dependente, a melhor solução poderá ser escrita de várias maneiras como combinação linear de $A_1, A_2, \cdots, A_n$.

Um exemplo de utilização deste método pode ser visto na seção 5.3.3.

2.6 CONDICIONAMENTO DE SISTEMAS LINEARES

Burden e Faires (2003, p.397) definem que uma matriz A é mal condicionada se mudanças relativamente pequenas em seus elementos podem causar mudanças relativamente grandes nas soluções de $Ax = b$. A é bem condicionada se mudanças relativamente pequenas em seus elementos resultam em mudanças relativamente pequenas nas soluções de $Ax = b$.

Pode-se verificar que um sistema linear é mal condicionado através do número de condição ou do determinante normalizado da matriz dos coeficientes.

O número de condição, conforme Burden e Faires (2003, p.397), de uma matriz não singular A relativo à norma $\|.\|$ é $K(A) = \|A\|.\|A^{-1}\|$. Uma matriz A é bem condicionada se $K(A)$ está próximo de 1 e é mal condicionada se $K(A)$ é significativamente maior que 1.

Para Leon (1998, p. 299) assim como normas de vetores são usadas para se medir o tamanho de vetores, normas de matrizes podem ser usadas para se medir o tamanho das matrizes. A norma de uma matriz A pode ser calculada pela raiz quadrada da soma dos quadrados de todos os seus elementos, isto é $\|A\| = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$ a norma de Frobenius.

As normas matriciais podem ser usadas para se estimar a sensibilidade de sistemas lineares a pequenas perturbações na matriz de coeficientes.

Considerando o exemplo de Leon (1998, p. 303) ao resolver o sistema linear: $\begin{cases} 2{,}0000x_1 + 2{,}0000x_2 = 6{,}0000 \\ 2{,}0000x_1 + 2{,}0005x_2 = 6{,}0010 \end{cases}$. Usando 5 casas decimais para a resolução encontraremos $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$. Porém usando apenas 4 casas decimais, o sistema fica da seguinte forma: $\begin{cases} 2{,}000x_1 + 2{,}000x_2 = 6{,}000 \\ 2{,}000x_1 + 2{,}001x_2 = 6{,}001 \end{cases}$ cuja solução será $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

O mau condicionamento é um tópico bastante interessante dos sistemas lineares que pode ser facilmente exemplificado. Não é costume fazer coleta de dados no Ensino Médio a partir de experimentos, mas com um problema bem formulado, o professor de matemática pode suprir essa carência e expor as consequências de um experimento mal realizado ou mal medido.

Quando um sistema linear $Ax = b$ satisfaz $\det A \neq 0$, existe uma e só uma solução x. Entretanto, a solução de alguns sistemas pode depender sensivelmente de seus coeficientes e quando esses são retirados de medidas físicas ou modelos aproximados, podem carregar pequenas incertezas e alterarem a solução.

Por exemplo, considere-se o sistema 2x2: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 99x + 100y = 99{,}5 \end{cases}$ cuja única solução e exata é $(x, y) = (0{,}5; 0{,}5)$. Agora, consideremos o sistema: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 99{,}4x + 99{,}9y = 99{,}2 \end{cases}$ com alteração de não mais do que 0,5% nos coeficientes originais, que experimentalmente é bastante razoável. Esse sistema tem solução única e exata $(x, y) = (1{,}4; -0{,}4)$, diferente da solução anterior.

Para a compreensão geométrica do problema de condicionamento de sistemas, nota-se que o coeficiente angular das retas correspondentes em cada equação são “quase” paralelas. Isso faz com que o ponto de intersecção delas mude consideravelmente a partir de pequenas mudanças nos coeficientes.

2.7 APLICAÇÃO DE SISTEMAS LINEARES NA INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

Cientistas e engenheiros podem usar dados experimentais de diferentes maneiras. Algumas vezes se busca determinar parâmetros de equações de forma que as curvas traçadas por ela representem da melhor forma possível o conjunto de dados. Às vezes se faz necessário estimar valores entre pontos medidos utilizando a interpolação. Nesse procedimento determina-se primeiramente um polinômio que forneça o valor exato nos pontos conhecidos, e então, com o uso desse polinômio, podem-se calcular valores entre esses pontos (GILAT e SUBRAMANIAM, 2008, p. 199).

Para a compreensão da aplicação dos sistemas lineares na interpolação polinomial, podem ser utilizados exemplos como do censo da população do Paraná que atualmente é feito a cada 10 anos. A tabela 2.1 mostra a população do Paraná de 1872 a 2010.

Revendo esses dados, pode-se perguntar se eles poderiam ser utilizados para uma estimativa razoável da população em 1995. Previsões deste tipo podem ser obtidas por meio de uma função que ajuste os dados obtidos. Esse processo é chamado de interpolação.

Interpolar uma função *f(x)* consiste em aproximar essa função por outra função *g(x)*, escolhida entre uma classe de funções definida anteriormente e que satisfaça algumas propriedades. A função *g(x)* é então usada em substituição à função *f(x)*. Assim, utiliza-se esse procedimento quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado.

Tabela 2.1 - População do Paraná: 1872-2010

Período	**População**
1872	126.722
1890	249.491
1900	327.136
1920	685.711
1940	1.236.276
1950	2.115.547
1960	4.268.239
1970	6.929.868
1980	7.622.932
1991	8.448.713
2000	9.563.713
2010	10.266.737

FONTE: IBGE

Ruggiero e Lopes (1996, p. 213) definem interpolação polinomial:

Dados os pontos $(x_0, f(x_0))$, $(x_1, f(x_1)), \cdots, (x_n, f(x_n))$, portanto ($n$+1) pontos, quer-se aproximar *f(x)* por um polinômio $p_n(x)$, de grau menor ou igual a n, tal que:

$$f(x_k) = p_n(x_k) \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

Representa-se $p_n(x)$ por: $p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Portanto, obter $p_n(x)$ significa obter os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$. Da condição $p_n(x_k) = f(x_k)\ \forall k = 0,1,2,\cdots n$, montamos o seguinte sistema linear dado pela Eq. (2.22):

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0{}^2 + \cdots + a_nx_0^n = f(x_0) \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1{}^2 + \cdots + a_nx_1^n = f(x_1) \\ \vdots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n{}^2 + \cdots + a_nx_n^n = f(x_n) \end{cases} \tag{2.22}$$

com n+1 equações e n+1 variáveis $a_0, a_1, \cdots, a_n$.

A matriz A dos coeficientes é dada pela Eq. (2.23)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

que é uma matriz de Vandermonde e, portanto, desde que $x_0, x_1, \cdots, x_n$ sejam pontos distintos, temos $\det A \neq 0$ e, então, o sistema linear admite solução única. Ruggiero e Lopes (1996) enunciam o seguinte teorema:

Existe um único polinômio $p_n(x)$, de grau $\leq n$, tal que: $p_n(x_k) = f(x_k)$, $k = 0,1,2,\cdots n$ desde que $x_k \neq x_j$, $j \neq k$.

O polinômio $p_n(x)$ que interpola $f(x)$ em $x_0, x_1, \cdots, x_n$ é único (RUGGIERO e LOPES, 1996, p. 214).

Nesta seção apresentou-se uma das possíveis aplicações de sistemas lineares que é a interpolação polinomial. No capítulo 5 será trabalhado um problema envolvendo interpolação polinomial e abordadas outras aplicações dos sistemas lineares.

3 ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS E AVALIAÇÕES

Observando alguns livros didáticos, conforme abaixo, percebe-se que as tendências na exposição do conteúdo de sistemas lineares nem sempre são parecidas. Cada autor enfatiza pontos distintos do conteúdo, em menor ou maior “espaço” destinado ao tema. Cada perfil de livro define o que se acredita dever ser explorado sobre o tema.

> Em seu papel formativo, a Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito da própria Matemática, podendo formar no aluno a capacidade de resolver problemas genuínos, gerando hábitos de investigação, proporcionando confiança e desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propiciando a formação de uma visão ampla e científica da realidade, a percepção da beleza e da harmonia, o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (PCN, 1999).

O livro de Adilson Longen (2004), adotado no Estado do Paraná em 2005, introduz os sistemas lineares lembrando que no ensino fundamental foram estudadas situações que envolvem o tema. Em seguida apresentaram exemplos de situações problema modeladas por sistemas lineares. Rapidamente definiu equação do 1º grau e avançou para a ideia dos sistemas lineares até que apresentou sua definição. O método de resolução proposto é o do escalonamento e sugeriu exemplos e atividades para sua fixação. Na sequência fez a discussão dos sistemas lineares e concluiu mostrando a relação entre sistemas lineares e determinantes com a regra de Cramer.

O livro adotado no período de 2009 a 2011, pelo PNLD – Plano Nacional do Livro Didático, dos autores Giovanni e Bonjorno (2005) traz em 21 páginas o conteúdo de sistemas lineares. No início do capítulo apresenta uma situação problema envolvendo sistemas 2x2. Divide o conteúdo em seis tópicos: equação linear, sistemas lineares, classificação de um sistema linear, matrizes associadas a um sistema linear, resolução de um sistema linear por escalonamento e discussão de um sistema linear.

Os autores acima citados iniciam o conteúdo propriamente dito de sistemas lineares pela definição de equação linear denominando seus elementos e esclarecendo quando a equação é homogênea e indica equações equivalentes. A partir daí retomam o problema d início do capítulo e o resolvem pelo método da adição. Na sequência definem sistema linear e solução de sistema linear, mostram um sistema homogêneo e apresentam sistemas lineares equivalentes. Fazem então a classificação dos sistemas lineares apresentando um organograma e exemplos de sistemas 2x2 e 3x3. Ao definir as matrizes associadas a um sistema linear expõem o trabalho com matriz inversa, mas nos exemplos resolvem os sistemas pelo método da substituição. Nesse tópico um dos exercícios envolve um sistema 4x4, porém se pede apenas para que se escreva na forma matricial não entrando no mérito da resolução.

A resolução de sistemas lineares nesse livro de Giovanni e Bonjorno (2005) é feita por meio do método do escalonamento. Finaliza o conteúdo com a discussão de um sistema linear e não propõe resolução com a regra de Cramer. Em contrapartida, ao abordar os determinantes, em um capítulo anterior aos sistemas, aborda inclusive o teorema de Laplace, uma generalização para determinantes, que tendencialmente é deixado de lado em outras literaturas. Não apresenta nenhuma nota histórica sobre o conteúdo para situar o aluno numa construção temporal dos sistemas lineares.

O livro de Joamir Souza (2010), também do PNLD, adotado para 2012 a 2014 expõe os sistemas lineares ao longo de 25 páginas. Introduz o conteúdo com uma situação problema e relembra que sistema linear já foi estudado em anos anteriores. Traz a definição de equação linear e exemplifica com a construção geométrica. Após exemplos e exercícios define sistema linear, mostra uma solução por inspeção em um sistema 2x2 e em um 3x3 e exemplifica o sistema linear homogêneo. Na sequência traz um sistema 2x2 resolvido por substituição e relembra que isso já foi estudado em anos anteriores e mostra ainda a interpretação geométrica do sistema. Propõe exercícios diversos, e de maneira interessante e conveniente contextualiza com aplicações. Em seguida apresenta as matrizes associadas a um sistema linear e a classificação de um sistema linear e faz a interpretação desse conceito para sistemas 2x2. As atividades resolvidas também trazem o importante apelo geométrico. Conclui com o escalonamento e a discussão dos sistemas lineares. O autor não aborda a regra de Cramer e na sessão que trata dos determinantes faz a Regra de Chió para uma matriz 4x4, mas não mostra a aplicação dos determinantes para a resolução de um sistema linear. De maneira praticamente informativa, como se fosse um apêndice do capítulo, porém muito interessante e esclarecedora, faz uma exploração do tema explicando o comportamento gráfico das oito possíveis soluções de um sistema linear 3x3. Propõe perguntas reflexivas sobre o conteúdo e oferece atividades complementares com diversas aplicações do conteúdo.

O livro de Ishihara e Pessoa (2010) foi escrito para uma rede de escolas privadas do Brasil. A proposta é bastante interdisciplinar e o conteúdo de sistemas lineares, trabalhado ao longo de 21 páginas, é iniciado com uma situação problema 2x2. É feita uma revisão de equação linear e de resolução de sistemas pelo método da adição e a resolução gráfica. Classificam-se os sistemas e na sequência fazem-se diversos exercícios de resolução, utilizando a forma gráfica e algébrica. Posteriormente, para trabalhar com sistemas 3x3 retoma-se o problema inicial e acrescentam-se mais informações. Nos exercícios são exploradas diversas situações problemas para os sistemas 3x3. Como método de resolução trabalham com escalonamento e representação geométrica, não tratando da Regra de Cramer.

A característica mais interessante que se encontra em Ishihara e Pessoa (2010) é fazer a interpretação geométrica dos sistemas 2x2 e 3x3. No caso dos sistemas 3x3 utiliza inclusive o *software Winplot*, conforme exemplo na seção 4.1.

Observando os livros citados, percebe-se uma possível tendência em não se trabalhar com a Regra de Cramer. O teorema de Laplace nem sempre é abordado, limita-se o conteúdo de determinantes na regra de Sarrus que vai até 3x3 assim como se limitam os sistemas lineares. Não há uma exploração razoável de sistemas, por exemplo, com 4 incógnitas e 3 equações.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), a reforma curricular do Ensino Médio estabelece a divisão do conhecimento escolar em várias áreas e a Matemática se inclui na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Existe a intenção de que a prática escolar se desenvolva numa perspectiva de interdisciplinaridade.

> A aprendizagem na área de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias indica a compreensão e a utilização dos conhecimentos científicos, para explicar o funcionamento do mundo, bem como planejar, executar e avaliar as ações de intervenção na realidade.(PCN, 1999)

A concepção de interdisciplinaridade, envolvendo a Matemática, é difícil de ser imaginada sem a utilização de situações problemas envolvendo as demais áreas. Num contexto de cunho científico ou industrial poderíamos pensar na ideia das aplicações dos conceitos matemáticos. Numa abordagem dos sistemas lineares vemos que isso nem sempre é explorado, como por exemplo, observando questões de vestibulares para ingresso na Universidade Estadual de Ponta Grossa, conforme a seguir:

- (UEPG 2º/2012) Sendo os sistemas abaixo equivalentes, assinale o que for correto.

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 6 \\ 2x + y - z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} ax + by = 5 \\ by + cz = 6 \\ ax + by - cz = 1 \end{cases}$$

01) $a+b+c=5$

02) $b>0$

04) $x.y.z<0$

08) $a<0$

16) $x+y+z=1$

- (UEPG 2º/2011) Sabendo-se que o sistema $\begin{cases} 2x+y-z=a \\ 3x+2y-2z=0 \\ x-y+bz=2 \end{cases}$ tem infinitas soluções, assinale o que for correto.

01) $a.b<0$

02) $a+b=\dfrac{7}{5}$

04) $b-a<1$

08) b é um número par

16) a é um número natural

Ambas são questões centradas no conceito propriamente dito, na resolução, e não na aplicação. Todos esses aspectos são imprescindíveis, deve-se levar em consideração o conceito, o desenvolvimento internalista da matemática, porém a busca pela aplicação é enriquecedora. Nesse sentido quanto mais pudermos explorar diferentes representações de um mesmo conteúdo, mais estaremos oportunizando ao aluno apropriar-se desse conhecimento.

Em contrapartida, a questão abaixo, traz uma característica bastante interessante. Devido ao contexto da situação proposta, aplicando sistemas lineares, a observação para a resolução deveria não estagnar na teoria dos sistemas lineares. Seria necessário abrir margem para identificar que a situação real apresentada se tratava, por exemplo, de uma grandeza discreta e que mesmo o sistema podendo ser classificado como possível e indeterminado ele não teria infinitas soluções e sim apenas duas.

- (UEPG 1º/2012) Dispõe-se de x notas de 50 reais, y notas de 20 reais e z notas de 10 reais, totalizando 15 notas e a quantia de 500 reais. Nesse contexto assinale o que for correto.

01) A resolução da equação matricial $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 15 \end{bmatrix}$ permite determinar a quantidade de cada tipo de notas.

02) Se x = 6 então y - z = 9

04) Há infinitos ternos de números inteiros (x,y,z) que satisfazem as condições dadas

08) Se z = 4 então $x - y$ = 5

Nem sempre se trabalha com sistemas quadrados, podem-se ter sistemas com outra característica. O exemplo extraído do 1º concurso vestibular da UEPG de 2012, ilustra uma análise diferenciada a ser realizada na resolução de um sistema linear. Nesse caso, não é suficiente buscar a teoria dos sistemas possíveis e indeterminados, mas observar o contexto da situação proposta para chegar às conclusões necessárias.

Para a solução da questão, escrevendo o sistema obtém-se:

$$\begin{cases} 50x+20y+10z=500 \\ x+y+z=15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+2y+z=50 \\ x+y+z=15 \end{cases}$$

Na forma matricial escreve-se:

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $\begin{cases} 5x+2y+z=50 \\ x+y+z=15 \end{cases}$ encontra-se, $y=\dfrac{25-4z}{3}$ e $x=\dfrac{z+20}{3}$.

O aluno poderia se precipitar e concluir que o sistema é possível e indeterminado com z variável livre podendo assumir qualquer valor real. Contudo, trata-se de uma situação envolvendo notas de dinheiro e só assume valores inteiros e positivos.

Organizando os possíveis valores na tabela 3.1 encontra-se:

Tabela 3.1 – Soluções possíveis para o problema

x	**y**	**z**
7	7	1
8	3	4

Dessa forma, obtém-se 2 ternos de números que satisfazem as condições dadas. E, para z = 4 tem-se $x - y$ = 5. Portanto, são corretas apenas as afirmações 01 e 08 dessa questão do vestibular.

Questões como essa quebram alguns paradigmas que os alunos criam ao estudar os sistemas lineares ou os próprios professores criam na intenção de favorecer a memorização.

As diferentes representações dão ao ensino um cenário de muitas possibilidades, pois aplicamos uma atividade de conversão de representação semiótica, onde mudamos os registros conservando os objetos. Para Duval (2009) precisamos de mais de uma representação para que possamos aprender Matemática. A atribuição de diferentes significados a uma mesma representação contribui para a operação cognitiva.

Muitas situações problema, de aplicação prática, podem ser modeladas na forma de sistemas lineares. A exploração delas conduz o aluno a refletir sobre o que pode ser pesquisado nesse âmbito.

4 RECURSOS COMPUTACIONAIS NO ENSINO DE SISTEMAS LINEARES

Para a resolução dos sistemas lineares, os livros didáticos, geralmente, apresentam ao aluno o método do escalonamento e a Regra de Cramer. Esses métodos exigem expressiva manipulação algébrica. Dessa forma, a utilização de recursos computacionais é uma alternativa para o avanço a sistemas de maior porte. Minimizando os cálculos manuais, os conceitos e aplicações podem ser mais bem aproveitados.

> Qualidade educacional pressupõe introdução de melhorias no processo de construção do conhecimento, busca de estratégias mais adequadas à produção de conhecimento atualizado e desenvolvimento no educando da habilidade de gerar conhecimento novo ao longo da vida. Implica diversificar espaços do conhecimento, processos e metodologias (PROINFO, 1997).

De acordo com Dullius *et al.* (2006), apesar de no meio acadêmico muito se falar na utilização de recursos computacionais, na prática escolar ainda existe pouca utilização. Muitos estudos vêm sendo desenvolvidos sobre tecnologias e Matemática, mas existe resistência ao uso em sala de aula. A geração atual de alunos cresceu em ambientes ricos de multimídia. Rever as práticas pedagógicas é necessário para oferecer-lhes uma educação apropriada. O computador é mais uma possibilidade de representação do conhecimento com diferentes alternativas e estratégias de compreensão. É, portanto, necessário criar diferentes formas de ensino-aprendizagem com auxílio da tecnologia.

Através da representação gráfica, com auxílio de um *software* como o GeoGebra se pode observar o comportamento da solução dos sistemas lineares. É possível aproveitar bastante a visualização para sistemas 3x3. Na medida em que se aumenta a ordem do sistema linear, já a partir de 4 incógnitas, não se tem mais a visualização geométrica da resolução. E então, mesmo algebricamente começa a ficar dispendioso e surge a necessidade de métodos não utilizados no Ensino Médio para continuidade do estudo.

A exemplo, nota-se que facilmente se pode trabalhar com o sistema dado pela Eq. (4.1)

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \tag{4.1}$$

Em contrapartida, se a proposta abranger um sistema como o apresentado na Eq. (4.2), já se supõe que o trabalho será muito maior e a possibilidade de cometer erros nas operações ao longo da dispendiosa resolução é grande.

$$\begin{cases} 8{,}7x + 3y + 9{,}3z + 11{,}0w = 16{,}4 \\ 24{,}5x - 8{,}8y + 11{,}5z - 45{,}1w = -49{,}7 \\ 52{,}3x - 84{,}0y - 23{,}5z + 11{,}4w = -80{,}8 \\ 21{,}0x - 81{,}0y - 13{,}2z + 21{,}5w = -106{,}3 \end{cases} \tag{4.2}$$

Nesses casos, a utilização do software *Maxima* resolveria e seria mais acessível ao entendimento do aluno. Podem-se aperfeiçoar as atividades e gerar resultados mais satisfatórios.

Por outro lado, a utilização de um *software* para minimizar cálculos manuais e representar geometricamente conceitos matemáticos tidos pelos alunos como unicamente algébricos pode facilitar o processo de ensino-aprendizagem. Incentiva o aluno a buscar por si mesmo outras possibilidades com o conteúdo aprendido.

> A informática pode trazer ao processo de aprendizagem uma dimensão bastante interessante enquanto possibilidade de ir muito além da linearidade tão comum no ensino tradicional, onde o professor programa as atividades de ensino com começo, meio e fim, e avalia o aluno quantitativamente pelo seu desempenho nesse processo (DULLIUS et al, 2006, p.8).

A busca pela interpretação e resolução algébrica e paralelamente a oferta de uma perspectiva geométrica vai ao encontro da teoria das diferentes representações semióticas de Duval (2009).

> O desenvolvimento das estruturas mentais é influenciado pela cultura, pela linguagem usada pela coletividade e pelas técnicas de produção, armazenamento e transmissão das representações da informação e do saber. Por isto, as novas tecnologias da informação devem ser aproveitadas pela educação para preparar o novo cidadão, aquele que deverá colaborar na criação de um novo modelo de sociedade, em que os recursos tecnológicos sejam utilizados como auxiliares no processo de evolução humana (PROINFO, 1997).

Podemos propor a solução de sistemas através do *software GeoGebra*. Num sistema linear 2x2, por exemplo, podemos traçar a intersecção das duas retas envolvidas e esta será a solução do sistema. Outros *softwares* como *Maxima* ou *Scilab*, podem ser explorados nessa busca de interpretação e resolução dos sistemas lineares. Os exemplos de Ishihara e Pessoa (2010) e de Gilat e Subramaniam (2008) dão boas diretrizes da utilização computacional através do *Winplot* e do *MatLab* respectivamente.

> A Matemática sempre teve uma relação muito especial com as tecnologias, desde as calculadoras, os computadores, aos sistemas multimídia e à i*nternet*. No entanto, os professores têm demorado a perceber como tirar partido destas tecnologias como ferramenta de trabalho (DULLIUS *et al*., 2006, p.8).

4.1 *SOFTWARES* EDUCACIONAIS PARA O ESTUDO DOS SISTEMAS LINEARES

Existem diversos *softwares* para estudos em Matemática. Sugere-se para a utilização em sistemas lineares o GeoGebra, o Winplot e o Maxima.

O Maxima é um programa que realiza de cálculos matemáticos, numéricos e simbólicos, manipula expressões algébricas, deriva e integra funções e monta diversos tipos de gráfico. Além de outros procedimentos disponíveis, possui uma ferramenta para resolução de sistemas lineares e outra de representação de objetos no espaço tridimensional. O Maxima pode ser obtido gratuitamente na internet em http://maxima.sourceforge.net/download.html.

O Winplot é um *software* para plotar gráficos de uma ou duas variáveis utilizando o Windows. Pode ser obtido gratuitamente na internet em http://winplot.softonic.com.br/. Veremos um exemplo de resolução de sistemas lineares utilizando o Winplot na seção 5.1.

O GeoGebra é um *software* de geometria dinâmica com duas janelas simultâneas, uma para a parte algébrica e outra para as construções geométricas, podendo representar graficamente equações de duas variáveis. Realiza também construções com característica de construção com régua e compasso. Pode ser obtido gratuitamente em http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download.

4.2 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES UTILIZANDO O *SOFTWARE* MAXIMA

Geralmente os sistemas lineares no Ensino Médio são explorados até 3 equações e 3 incógnitas. A manipulação algébrica acaba sendo o maior empecilho para uma continuidade de aplicações e resolução. Para contribuir nesse contexto, podem ser utilizados *softwares* que realizem os cálculos e permitam o trabalho com sistemas de maior porte.

Com uma interface simples o *software Maxima* é uma importante ferramenta para utilização em diversos conteúdos matemáticos. A seguir apresenta-se uma sequência de passos executados para a resolução de um sistema linear utilizando o *Maxima*:

Seja o sistema linear $\begin{cases} 2x - y + z + 2w - t = 0 \\ x + y + z + w + t = 1 \\ 3x - y - 3z + w - t = -4 \\ -2x + 3y - z + w + 11t = -15 \\ -x + y - z + w - t = -19 \end{cases}$, para resolvê-lo no *Maxima*, na janela inicial escolhe-se o menu "Equações", como representado na Fig. 4.1, na barra de ferramentas e a opção "Resolver sistema linear".

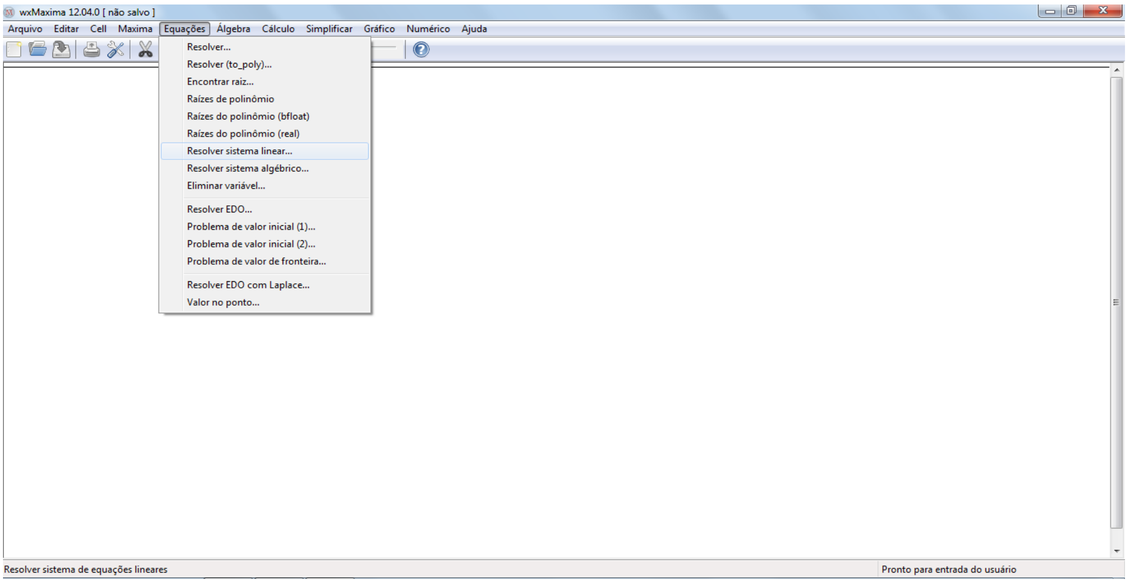

Figura 4.1 – Representação da janela do Maxima

Abre-se uma caixa como representado na Fig. 4.2, onde deve ser indicado número de equações do sistema. No exemplo, este número é 5.

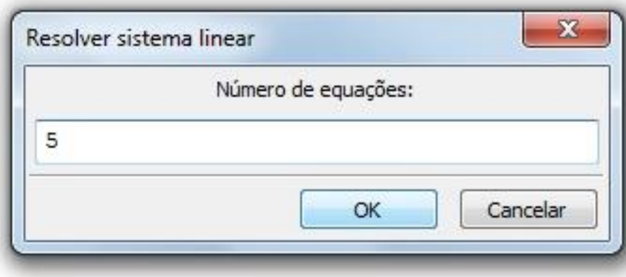

Figura 4.2 - Representação de caixa indicativa do número de equações no Maxima

Na sequência abre-se uma caixa para inserção das equações, onde se digita cada uma das equações do sistema linear, como representado na Fig. 4.3:

Figura 4.3 - Representação de caixa de inserção de equações no Maxima

Ao clicar no botão "OK" tem-se a solução do sistema requerido, conforme representado na Fig. 4.4:

```
(%i1) linsolve([2*x-y+z+2*w-t=0, x+y+z+w+t=1, 3*x-y-2*z+w-t=-4, -2*x+3*y-z+w+11*t=-15, -x+y-z+w-t=-19], [x,y,z,w,t]);
(%o1) [x=4,y=-2,z=5,w=-7,t=1]
```

Figura 4.4 – Representação de solução de sistema de equações no Maxima

Portanto a solução do sistema é dada por $(x, y, x, w, t) = (4,-2,5,-7,1)$.

Assim, em apenas quatro etapas no *software* Maxima resolveu-se um sistema 5x5 cujo tamanho é evitado no Ensino Médio por apresentar bastante manipulação algébrica. Reafirma-se então a importante contribuição dos recursos computacionais no estudo dos sistemas lineares.

4.3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES 2x2 UTILIZANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Ex: Elisa tem notas de 10 e de 50, num total de 38 notas e R$ 980,00. Quantas notas de 10 e 50 Elisa tem?

Pensando algebricamente - Supondo x as notas de 10 e y as notas de 50, pode-se escrever o sistema de equações lineares com duas equações e duas incógnitas:

$$\begin{cases} x + y = 38 \\ 10x + 50y = 980 \end{cases}$$

Que, com o método da substituição, obtemos isolando x na primeira equação:

$$x = 38 - y$$

E substituindo na segunda equação vem:

$$10(38 - y) + 50y = 980$$

$$380 - 10y + 50y = 980$$

$$40y = 600$$

$$y = 15$$

Retornando em $x = 38 - y$, obtemos:

$$x = 38 - 15$$

$$x = 23$$

Conclui-se que Elisa possui 23 notas de 10 e 15 notas de 50.

Traçando as equações lineares com auxílio do GeoGebra, obtém-se a solução gráfica do sistema apresentada na Figura 4.5:

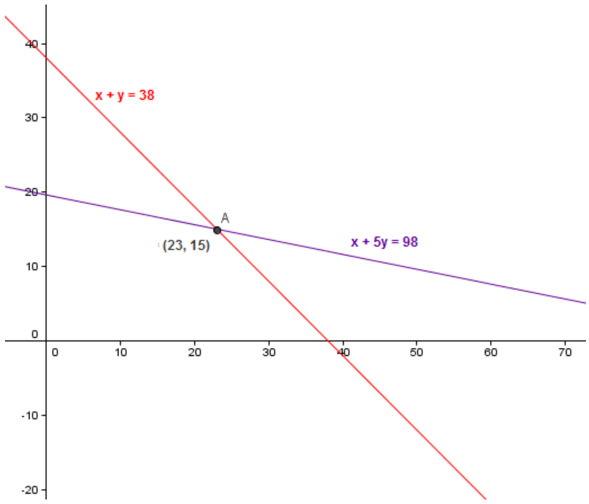

Figura 4.5 - Solução gráfica do sistema 2x2 apresentado

O ponto de interseção das duas retas é aquele que satisfaz as duas equações ao mesmo tempo, e suas coordenadas dão a resposta do sistema, ou seja, $(x,y) = (23,15)$.

Para a representação da resolução geométrica de sistemas lineares 3x3 encontra-se um exemplo na seção 5.1. Sistemas lineares maiores que 3x3 não são possíveis de serem representados geometricamente.

Para a resolução de sistemas lineares de grande porte, é indicada a utilização de métodos iterativos como Jacobi e Gauss-Seidel devido às vantagens elencadas na seção 2.4.7. Porém, é necessário programar o método através de um algoritmo e utilizar uma linguagem de programação.

A programação dos métodos iterativos ficou como sugestão de trabalhos futuros.

5 O ESTUDO DOS SISTEMAS LINEARES

Neste capítulo se pretende propor exemplos para as abordagens e aplicações dos sistemas lineares e dar possibilidades de trabalho em sala de aula, especialmente no Ensino Médio, com maior aprofundamento do tema.

5.1 COMPORTAMENTO GEOMÉTRICO DA SOLUÇÃO DE UM SISTEMA LINEAR 3x3

Utilizando recursos computacionais pode-se fazer as construções com maior facilidade que na representação manual e que permitem observar o comportamento geométrico dos sistemas lineares 3x3.

Ishihara e Pessoa (2010, p. 81) enfatizam que equações do 1º grau com três variáveis representam planos no espaço e, como é feito com retas no plano, é possível desenhar os planos no espaço, usando um sistema de três eixos cartesianos como na Fig. 5.1 a seguir.

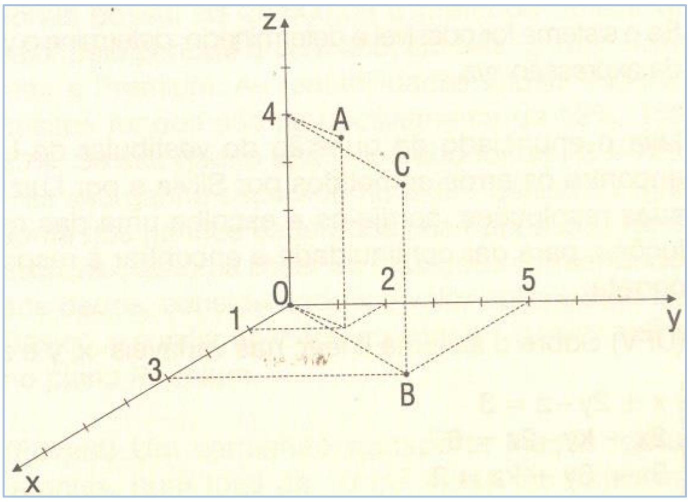

Figura 5.1 - Representação das ternas ordenadas O(0,0,0), A(1,2,4), B(3,5,0) e C(3,5,4)
Fonte: Ishihara e Pessoa (2010, p. 82)

Exemplo 1. Utilizando o *software Winplot*, representar graficamente as equações dos sistemas lineares a seguir, (ISHIHARA e PESSOA, 2010, p. 82).

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 1 & \text{(I)} \\ x + y + 2z = -1 & \text{(II)} \\ 3x + 2y - z = 2 & \text{(III)} \end{cases}$$

No programa, no menu “Janela”, seleciona-se a opção 3-*dim*. Novamente no menu, escolhe-se “Equação explícita”. Deve ser observado que na caixa de diálogo é necessário digitar a função z nas variáveis x e y. Assim, para representar a equação I, deve-se isolar a variável z: $z = \dfrac{-2x - y + 1}{3}$. Na janela, escreve-se conforme é representado na Fig. 5.2:

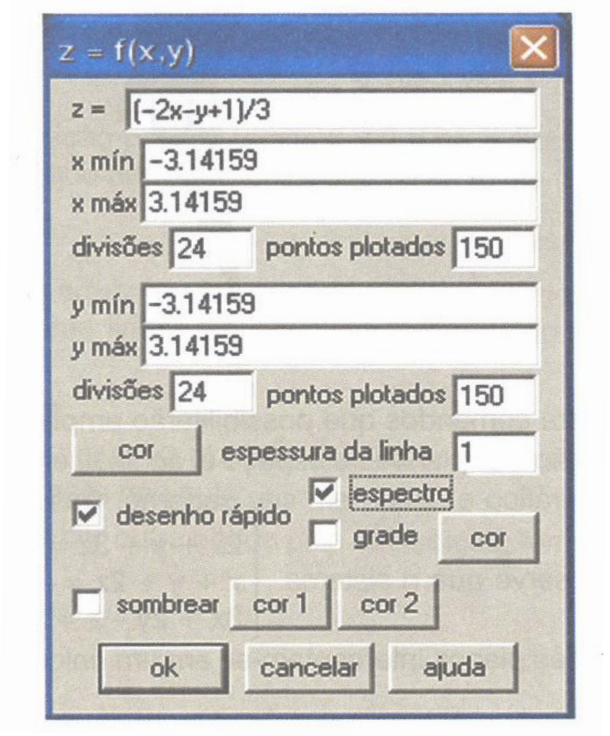

Figura 5.2 - Representação de "Janela" *Winplot*
Fonte: Ishihara e Pessoa (2010, p. 83)

Após clicar OK na "Janela" representada na Fig. 5.2 obtem-se o gráfico representado na Fig. 5.3 a seguir:

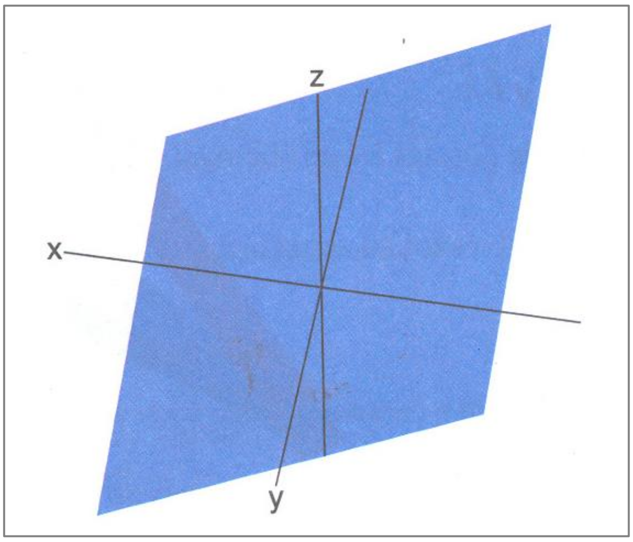

Figura 5.3 - Representação do plano $z = (-2x - y + 1)/3$
Fonte: Ishihara e Pessoa (2010, p. 83)

Na sequência podem ser traçados da segunda equação $z = \frac{-x-y-1}{2}$ e da terceira equação $z = 3x + 2y - 2$ no mesmo sistema de eixos representado na Fig. 5.3 obtendo a Fig. 5.4:

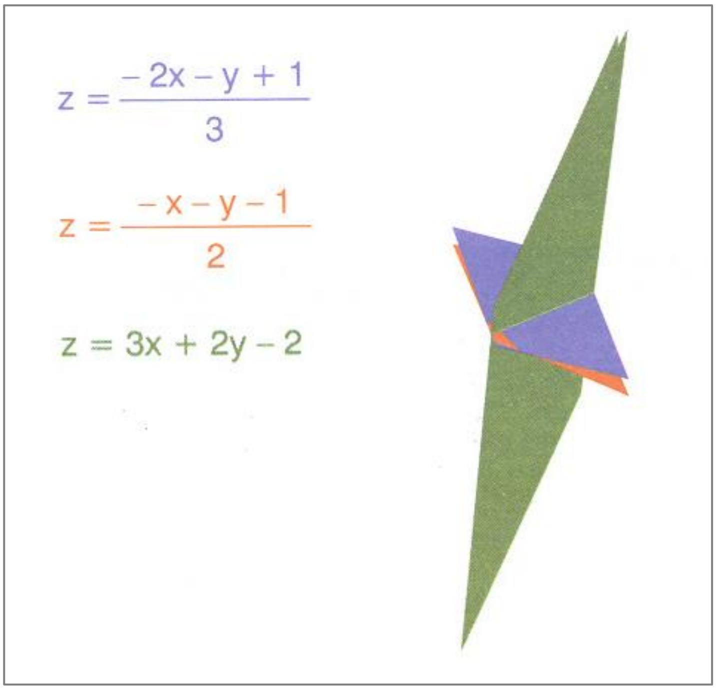

Figura 5.4 - Representação gráfica do sistema a).
Fonte: Ishihara e Pessoa (2010, p. 84)

O *software* Winplot oferece comandos que possibilitam ampliar e girar a figura, sendo possível compreender a posição dos planos no espaço e encontrar uma posição de destaque para a solução do sistema. Os eixos podem ser ocultados como na Fig 5.4. Pode-se observar que o sistema do exemplo 1 é possível e determinado, possui uma única solução, ou seja, os três planos se interceptam em um único ponto $(x, y, z) = \left(\frac{7}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Exemplo 2. Seja o sistema linear

$$\begin{cases} -x + y - z = -1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

As equações do sistema geram o gráfico da Fig. 5.5:

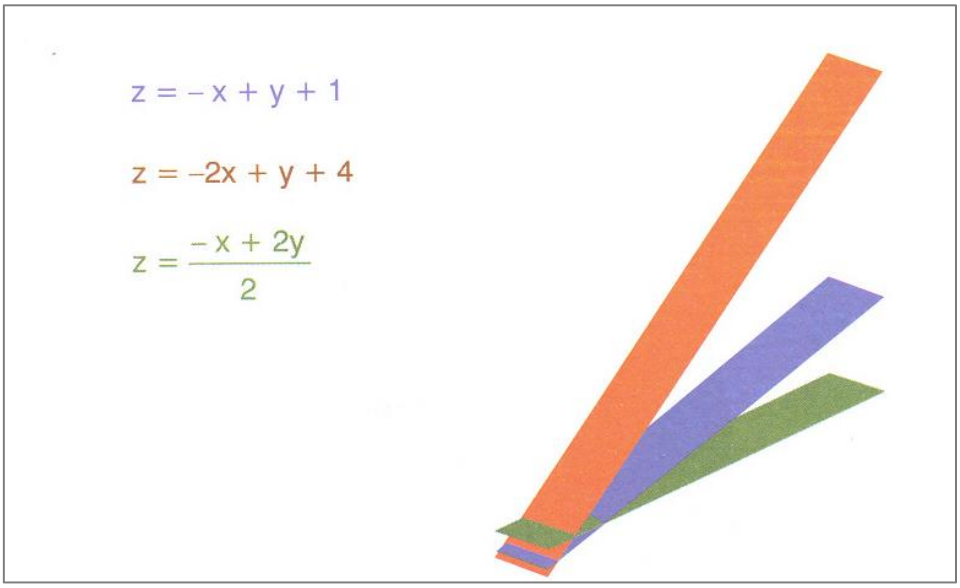

Figura 5.5 - Representação gráfica do sistema b).
Fonte: Ishihara e Pessoa (2010, p. 84)

Observe que o sistema é impossível, ou seja, não existe intercessão entre os três planos simultaneamente.

A partir de sistemas 4x4 já não se pode visualizar a construção geométrica da solução.

5.2 RESOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES UTILIZANDO MÉTODOS ESTUDADOS NO ENSINO MÉDIO

Nesta seção são apresentados exemplos de resoluções de sistemas lineares através dos métodos normalmente utilizados no Ensino Médio, eliminação de Gauss e regra de Cramer.

5.2.1 Eliminação de Gauss

Exemplo 1: Sabe-se que uma alimentação diária equilibrada em vitaminas deve constar em 170 unidades de vitamina A, 230 unidades de vitamina B, 250 unidades de vitamina C, 200 unidades de vitamina D e 350 unidades de vitamina E (Boldrini *et al*., 1980, p. 54).

Com o objetivo de descobrir como deverá ser uma refeição dispondo-se de 5 alimentos, os mesmos foram estudados fixando-se a mesma quantidade de cada alimento (um grama) e determinou-se:

a) O alimento 1 tem 1, 2, 2, 2, 2 unidades de vitamina A, B, C, D, E respectivamente;
b) O alimento 2 tem 9, 1, 1, 1, 1 unidades de vitamina A, B, C, D, E respectivamente;

c) O alimento 3 tem 2, 2, 7, 1, 2 unidades de vitamina A, B, C, D, E respectivamente;

d) O alimento 4 tem 1, 2, 2, 1, 2 unidades de vitamina A, B, C, D, E respectivamente;

e) O alimento 5 tem 1, 1, 2, 1, 9 unidades de vitamina A, B, C, D, E respectivamente;

Quantos gramas de cada um dos alimentos 1, 2, 3, 4 e 5 devemos ingerir diariamente a fim de que a alimentação permaneça equilibrada?

Primeiro vamos organizar os dados em uma tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Organização dos dados do problema

	Vitaminas				
Alimentos	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
1	1	2	2	2	2
2	9	1	1	1	1
3	2	2	7	1	2
4	1	2	2	1	2
5	1	1	2	1	9
Total:	**170**	**230**	**250**	**200**	**350**

Variável de decisão: x_i e que é a quantidade de cada alimento *i* (em gramas) a ser ingerido.

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 170 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 230 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 250 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 200 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 9x_5 = 350 \end{cases}$$

$$\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 9 & 2 & 1 & 1 & 170 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 230 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 2 & 250 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 200 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 9 & 350 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ L_2 = -2L_1 + L_2 \\ L_3 = -2L_1 + L_3 \\ L_4 = -2L_1 + L_4 \\ L_5 = -2L_1 + L_5 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 1 & 9 & 2 & 1 & 1 & 170 \\ 0 & -17 & -2 & 0 & -1 & -110 \\ 0 & -17 & 3 & 0 & 0 & -90 \\ 0 & -17 & -3 & -1 & -1 & -140 \\ 0 & -17 & -2 & 0 & 7 & 10 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ L_3 = -1L_2 + L_3 \\ L_4 = -1L_2 + L_4 \\ L_5 = -1L_2 + L_5 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 & 1 & 1 & 170 \\ 0 & -17 & -2 & 0 & -1 & -110 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 20 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 120 \end{bmatrix} L_4 = \frac{1}{5}L_3 + L_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 2x_3 + \ \ x_4 + \ \ x_5 = 170 \\ \quad -17x_2 - 2x_3 \qquad - \ \ x_5 = -110 \\ \qquad\qquad 5x_3 \qquad + x_5 = -110 \\ \qquad\qquad\qquad - x_4 + \frac{1}{5}x_5 = -26 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 8x_5 = 120 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema por substituição retroativa temos que:

$$x = \begin{bmatrix} 74,77 \\ 5,47 \\ 1 \\ 29 \\ 15 \end{bmatrix}$$

Com a utilização de um *software* como o *Maxima* se evitaria toda a manipulação realizada.

5.2.2 Regra de Cramer

Considere o sistema linear 2x2 $S: \begin{cases} 3x + y = 7 \\ -2x + 4y = -14 \end{cases}$ que é um sistema possível e determinado cuja solução é $x = 3$ e $y = -2$.

O sistema S pode ser representado na forma matricial $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}$, onde a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz principal do sistema. Note que $\det A = 14 \neq 0$.

- Substituindo a 1ª coluna de A pelo vetor b vem a matriz $A_x = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}$ e $\det A_x = 42$

- Substituindo a 2ª coluna de A pelo vetor b teremos a matriz $A_y = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -14 \end{bmatrix}$ e assim $\det A_y = -28$.

A regra de Cramer, estabelece que $x = \dfrac{\det A_x}{\det A}$ e $y = \dfrac{\det A_y}{\det A}$. Portanto $x = \dfrac{42}{14} = 3$ e $y = \dfrac{-28}{14} = -2$, que é a solução do sistema *S*.

5.3 RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES UTILIZANDO MÉTODOS NÃO ESTUDADOS NO ENSINO MÉDIO

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de resoluções de sistemas lineares através de métodos não utilizados no Ensino Médio como o método iterativo de Jacobi e de Gauss-Seidel e o caso da aproximação para sistemas incompatíveis.

5.3.1 Método iterativo de Jacobi

Exemplo 1. Resolva o sistema linear a seguir utilizando o método de Jacobi com $\varepsilon \leq 10^{-3}$, que é o critério de parada ou $k > 10$ (RUGGIERO e LOPES, 1996, p.186).

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

Primeiro verificamos a convergência através do critério das linhas, apresentado na seção 2.4.6, temos:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} < 1 \text{ e } \alpha_2 = \frac{1}{2} < 1$$

Logo o sistema linear converge pelo critério das linhas.

Escrevendo o sistema temos:

$$x_1 = \frac{1 + x_2}{2} \text{ e } x_2 = \frac{3 - x_1}{2}$$

As iterações são apresentadas na tabela 5.2 a seguir.

Tabela 5.2 – Iterações obtidas na resolução do exemplo 1 pelo método de Jacobi

Iterações (*k*)	x_1	x_2
0	0	0
1	0,5	1,5
2	1,25	1,25
3	1,125	0,875
4	0,938	0,938
5	0,969	1,031
6	1,016	1,016
7	1,008	0,992
8	0,996	0,996

Logo a solução do sistema linear é dada por: $x = \begin{bmatrix} 0{,}996 \\ 0{,}996 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2. Resolva o sistema linear a seguir através do método iterativo de Jacobi, utilizando $x^{(0)} = (\;0{,}7 \quad -1{,}6 \quad 0{,}6)^T$ e $\varepsilon = 0{,}005$, que é o critério de parada, ou $k > 10$ (RUGGIERO e LOPES, 1996, p.157).

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{cases}$$

Primeiro vamos verificar a convergência do sistema linear utilizando o critério das linhas:

$$\alpha_1 = \frac{2+1}{10} = \frac{3}{10} = 0{,}3 < 1 \;,\; \alpha_2 = \frac{1+1}{5} = 0{,}4 < 1 \;\text{ e }\; \alpha_3 = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}2 < 1$$

E então $\max_{1<k<n} \alpha_k = 0{,}4 < 1$, donde pelo critério das linhas temos garantia de convergência para o método de Jacobi.

$$x_1 = \frac{7 - 2x_2 - x_3}{10}, \qquad x_2 = \frac{-8 - x_3 - x_1}{5}, \qquad x_3 = \frac{6 - 3x_2 - 2x_1}{10}$$

As iterações são apresentadas na tabela 5.3 a seguir.

Tabela 5.3 – Iterações obtidas na resolução do exemplo 2 pelo método de Jacobi

k	x_1	x_2	x_3
0	0,7	-1,6	0,6
1	0,96	-1,86	0,94
2	0,978	-1,98	0,966
3	0,9994	-1,9888	0,9984
4	0,99792	-1,9996	0,99676
5	1,00024	-1,9989	1,00028

Portanto a solução do sistema linear através do método de Jacobi é $x = \begin{bmatrix} 1{,}00024 \\ -1{,}9989 \\ 1{,}00028 \end{bmatrix}$.

5.3.2 Método iterativo de Gauss-Seidel

Exemplo 1. Seja o sistema linear $\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$.

A Eq. 5.1 fornece a técnica iterativa de Gauss-Seidel, donde se obtém as Eqs. 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 com cada $k = 1,2,\cdots$. (BURDEN e FAIRES, 2003 p.384),

$$x_i^{(k)} = \frac{-\sum_{j=1}^{i-1}(a_{ij}x_j^{(k)}) - \sum_{j=i+1}^{n}(a_{ij}x_j^{(k-1)}) + b_i}{a_{ii}} \tag{5.1}$$

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{10}x_2^{(k-1)} - \frac{1}{5}x_3^{(k-1)} + \frac{3}{5} \tag{5.2}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{11}x_1^{(k)} + \frac{1}{11}x_3^{(k-1)} - \frac{3}{11}x_4^{(k-1)} - \frac{25}{11} \tag{5.3}$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{5}x_1^{(k)} + \frac{1}{10}x_2^{(k)} + \frac{1}{10}x_4^{(k-1)} - \frac{11}{10} \tag{5.4}$$

$$x_4^{(k)} = -\frac{3}{8}x_2^{(k)} + \frac{1}{8}x_3^{(k)} + \frac{15}{8} \tag{5.5}$$

Sendo $x^{(0)} = (0{,}0{,}0{,}0)$ gera-se as iterações expostas na tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Iterações obtidas pelo método de Gauss Seidel

K	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
$x_1^{(k)}$	0,0000	0,6000	1,030	1,0065	1,0009	1,0001
$x_2^{(k)}$	0,0000	2,3272	2,037	2,0036	2,0003	2,0000
$x_3^{(k)}$	0,0000	-0,9873	-1,014	-1,0025	-1,0003	-1,0000
$x_4^{(k)}$	0,0000	0,8789	0,9844	0,9983	0,9999	1,0000

Fonte: Burden e Faires (2003, p.384)

O autor conclui que se aceita $x^{(5)}$ como uma aproximação razoável de solução. E afirma que para o mesmo sistema linear o método de Jacobi utilizaria o dobro de iterações para alcançar o mesmo grau de precisão.

5.3.3 Aproximação para sistemas incompatíveis

De Coelho e Lourenço (2005), considere o sistema $\begin{cases} 3x - y = 3 \\ x - y = 0 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$ com coeficientes em R.

Podemos observar que tal sistema é incompatível, pois $2x = 3$ e $5x = 5$. Vamos determinar a melhor solução. Neste caso, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Daí,

$A^t.b = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $A^t.A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

O sistema será, portanto,

$A^t.A.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^t.b \Rightarrow \begin{pmatrix} 14 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 14x - 2y = 13 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$, logo $y = \dfrac{6}{19}$ e $x = \dfrac{37}{38}$.

Em Coelho e Lourenço. (2005) encontra-se o exercício da determinação do polinômio de grau 2 que melhor se ajusta aos pontos (-1 ,0), (0 ,-1), (1 , 1), (2 , 4). Para resolvê-lo constrói-se o sistema linear da interpolação polinomial dos pontos dados:

$\begin{cases} a_0 + a_1(-1) + a_2(-1)^2 = 0 \\ a_0 + a_1.0 + a_2.0^2 = -1 \\ a_0 + a_1.1 + a_2.1 = 1 \\ a_0 + a_1.2 + a_2.2^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 = 0 \\ a_0 = -1 \\ a_0 + a_1 + a_2 = 1 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 = -1 \\ a_1 + a_2 = 2 \\ 2a_1 + 4a_2 = 5 \end{cases}$, assim $a_1 = a_2 - 1$ e $a_1 = 2 - a_2$, isto é, $a_1 = \dfrac{1}{2}$ e $a_2 = \dfrac{3}{2}$, mas $2.\dfrac{1}{2} + 4.\dfrac{3}{2} \neq 5$ e o sistema é incompatível.

Buscando a melhor solução, faz-se: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $A^t=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ e $b=\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 4\end{pmatrix}$.

Então, $A^t.b=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 17\end{pmatrix}$ e $A^t.A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 2 & 6 & 8\\ 6 & 8 & 18\end{pmatrix}$. O sistema será, então, $A^tA.\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=A^t.b\Rightarrow\begin{pmatrix}4 & 2 & 6\\ 2 & 6 & 8\\ 6 & 8 & 18\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 9\\ 17\end{pmatrix}$.

Portanto $a_0=-\frac{7}{10}$, $a_1=\frac{2}{5}$, $a_2=1$.

E com isso, o polinômio que melhor ajusta os pontos dados é $p_2(x)=-\frac{7}{10}+\frac{2}{5}x+x^2$.

Traçando $p_2(x)$ com auxílio do *software GeoGebra* obtém-se a Fig. 5.6:

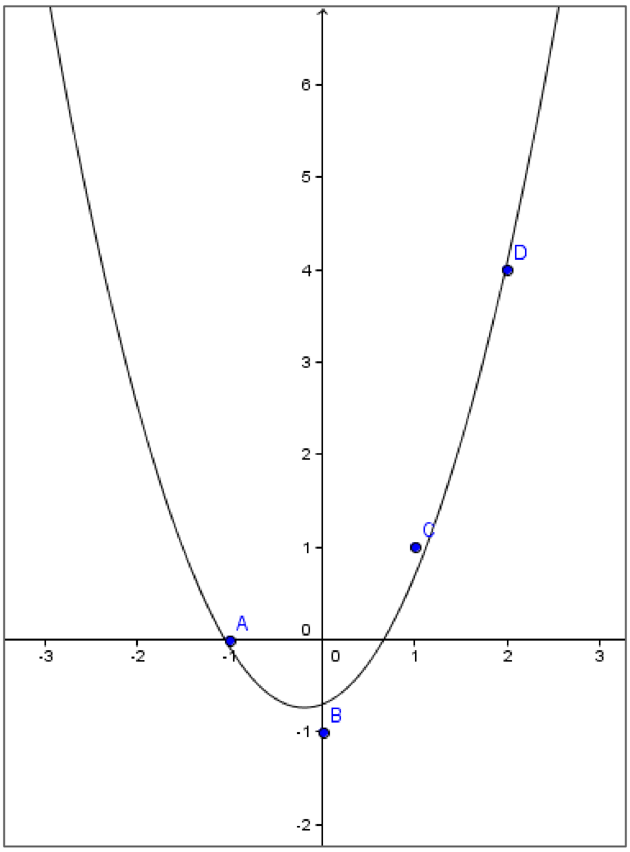

Fig. 5.6 - Gráfico do polinômio de grau 2 que melhor se ajusta aos pontos dados

5.4 APLICAÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Numa sentença algébrica, a distinção entre incógnita e variável pode não ser imediata para muitos alunos. Talvez por costume do ensino fundamental os alunos identifiquem que as letras utilizadas na sentença signifiquem somente um "valor desconhecido" e assim não assimilem seu comportamento quando se trata de um parâmetro.

Há casos, em que os alunos ao utilizar uma relação algébrica que descreve um fenômeno, ou seja, a tradicional "fórmula", não compreendam o que fazer. Se devem substituir valores, atribuir valores ou encontrar valores faltantes. A álgebra tem também seu papel simbólico, mas a insistência em exemplos, exercícios e aplicações dos conteúdos relacionados pode contribuir no entendimento dos verdadeiros significados das letras em cada sentença algébrica escrita.

Quanto mais oportunidades de aplicação o conteúdo oferecer, mais sentido pode ser dado ao seu estudo. Da mesma forma, quanto mais se pode relacionar o conteúdo de matemática com as demais áreas, mais se incentiva os alunos a perceberem a importância do conteúdo e sua aplicabilidade. Porém, como nem sempre os livros didáticos trazem variadas aplicações para os conteúdos, cabe ao professor buscar exemplos que fundamentem suas aulas e motivem os alunos na sua aprendizagem. As aplicações podem estar relacionadas a outras áreas do conhecimento ou algumas vezes internamente na própria matemática.

Nessa perspectiva, de acordo com as Orientações Curriculares para o Ensino Médio – PCNEM (2006, p. 77), "as posições relativas entre reta e círculo devem ser interpretadas sob o ponto de vista algébrico, o que significa discutir a resolução de sistemas de equações".

Em alguma etapa, diversos problemas em matemática exigem a solução de um sistema de equações. Entretanto, existe dificuldade para os alunos utilizarem um aprendizado iniciado no ensino fundamental como sistemas de equações lineares e um conteúdo do ensino médio como a geometria analítica. Muitas vezes acontece uma aprendizagem formal onde o aluno memoriza um procedimento ao invés de compreender a ideia matemática

Os exemplos de aplicações nas diversas áreas, expõem uma finalidade prática para o aprendizado de sistemas lineares ao aluno. Pode-se destacar a contribuição do conteúdo em pesquisas científicas e também no desenvolvimento tecnológico e controle industrial.

Em Boldrini *et al.* (1980, p. 55) encontramos o seguinte exemplo:

Necessita-se adubar um terreno acrescentando-se 21 gramas de nitrato, 15 gramas de fosfato e 24,5 gramas de potássio. Dispõe-se para isso de quatro qualidades de adubo com as seguintes características:

a) Cada quilo do adubo 1 custa cinco reais e contém 2 gramas de nitrato, 3 gramas de fosfato e 4 gramas de potássio;
b) O adubo 2 custa dois reais e contém 6 gramas de nitrato, 1 grama de fosfato e 2 gramas de potássio;
c) O adubo 3 um custa três reais e contém 1 grama de nitrato, 8 gramas de fosfato e 3 gramas de potássio;
d) O adubo 4 um custa quatro reais e contém 2 gramas de nitrato, 3 gramas de fosfato e 8 gramas de potássio;

Se o custo por metro quadrado é de vinte e um reais, quanto de adubo devemos misturar para conseguir o efeito desejado?

Primeiro pode-se organizar os dados como na tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Organização dos dados do problema sobre adubação

Componentes	**Tipos de adubo**				
	x_1 (Adubo 1)	**x_2 (Adubo 2)**	**x_3 (Adubo 3)**	**x_4 (Adubo 4)**	**Total**
Custo	5	2	3	4	**21**
Nitrato	2	6	1	2	**21**
Fosfato	3	1	8	6	**15**
Potássio	4	2	3	3	**24,5**

Vamos representar por x_i a quantidade de adubo (i = 1, 2, 3 e 4) a ser misturado para conseguir o efeito desejado.

Assim, o problema é modelado pelo sistema de equações lineares dado pela Eq. (5.6).

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 21 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 + 2x_4 = 21 \\ 3x_1 + x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 15 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 6x_4 = 24,5 \end{cases} \tag{5.6}$$

Pescador *et al.* (2011) apresentaram em seu trabalho, três exemplos de aplicação de sistemas lineares para resolução de problemas em Engenharia. O primeiro relacionado a circuitos elétricos, o segundo o balanceamento de uma reação química e o terceiro a construção de uma estrutura metálica. Os três exemplos são bastante ilustrativos e tem interdisciplinaridade com conteúdos também do ensino médio como Física 3, Química 2 e Física 1. Outrossim, atualmente existem diversos cursos técnicos integrados ao Ensino Médio que utilizam diretamente esses temas.

Exemplo 1. Circuitos Elétricos (PESCADOR *et al*., 2011)

Para compreendermos a aplicação de sistemas lineares a um circuito elétrico, é necessário definir: Lei de Ohm, em que a força elétrica é o produto da resistência pela corrente elétrica, descrita pela Eq. (5.7).

$$E = R \cdot i \tag{5.7}$$

e as Leis de Kirchhoff em que tem-se a Lei dos Nós, onde a soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele, e a Lei das Malhas, onde a soma das quedas de tensão ao longo de qualquer circuito é igual à tensão total em torno do circuito (fornecida pelas baterias). Numericamente, pode-se analisar o caso representado pela Fig. 5.7 onde se deseja determinar as correntes do circuito elétrico.

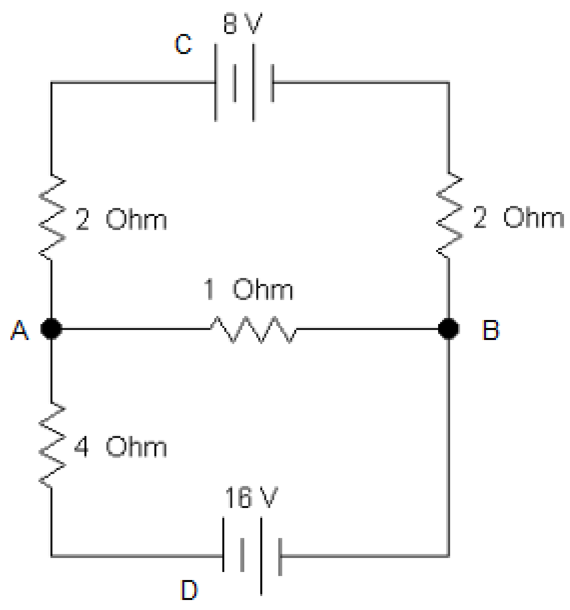

Figura 5.7 – Circuito elétrico

No circuito com duas baterias e quatro resistores, têm-se as Eqs. 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11 para o nós:

$$i_1 - i_2 + i_3 = 0 \tag{5.8}$$

$$-i_1 + i_2 - i_3 = 0 \tag{5.9}$$

Pelo circuito CABC tem-se:

$$4i_1 + i_2 = 8 \tag{5.10}$$

Pelo circuito DABD:

$$i_2 + 4i_3 = 16 \tag{5.11}$$

Sendo assim, o sistema linear em questão segue dado pela Eq. (5.12):

$$\begin{cases} i_1 - i_2 + i_3 = 0 \\ 4i_1 + i_2 = 8 \\ i_2 + 4i_3 = 16 \end{cases} \tag{5.12}$$

O sistema linear formado (5.12) pode ser escrito na forma matricial Ai=b, onde a matriz A é a matriz dos coeficientes, ou seja, A= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, o vetor i é o vetor das incógnitas, i= $\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$ e o lado direito é dado por b= $\begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2. Balanceamento de equações químicas (PESCADOR *et al.*, 2011).

Num balanceamento de equações químicas, o número relativo de reagentes e produtos na reação tem o mesmo número de átomos de cada tipo do lado esquerdo e direito. Mantêm reagentes à esquerda e produtos à direita. Tem-se que $2H_2 + O_2 \rightarrow 2H_2O$ é uma equação balanceada. Duas moléculas de hidrogênio se combinam com uma molécula de oxigênio para formar duas moléculas de água. Ainda, $6H_2 + 3O_2 \rightarrow 6H_2O$ também é uma equação balanceada. No caso abaixo, a combustão de amônia (NH_3) em oxigênio produz nitrogênio (N_2) e água. Uma nova aplicação de sistemas lineares se dá quando se quer encontrar uma equação química balanceada para a reação seguinte:

$$wNH_3 + tO_2 \rightarrow yN_2 + zH_2O \tag{5.13}$$

Pode-se fazer a seguinte correspondência:

Nitrogênio:

$$w = 2y \tag{5.14}$$

Hidrogênio:

$$3w = 2z \tag{5.15}$$

Oxigênio:

$$2t = z \tag{5.16}$$

E assim, o sistema linear (homogêneo) está formado:

$$\begin{cases} w - 2y = 0 \\ 3w - 2z = 0 \\ 2t - z = 0 \end{cases} \tag{5.17}$$

Neste caso, o sistema linear dado pela Eq. (5.17) pode ser escrito na forma matricial $Ax=b$, onde a matriz A é a matriz dos coeficientes, ou seja, $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, o vetor x é o vetor das incógnitas, $x=\begin{bmatrix} w \\ t \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e o lado direito é dado por $b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 3. Construção de estruturas metálicas (PESCADOR *et al*., 2011)

Seja um guindaste que deve erguer cargas, assim, pode-se dizer que se tem um problema de uma estrutura metálica na qual se quer determinar o esforço mecânico em cada viga da estrutura, de forma que se possa escolher as vigas com a resistência adequada.

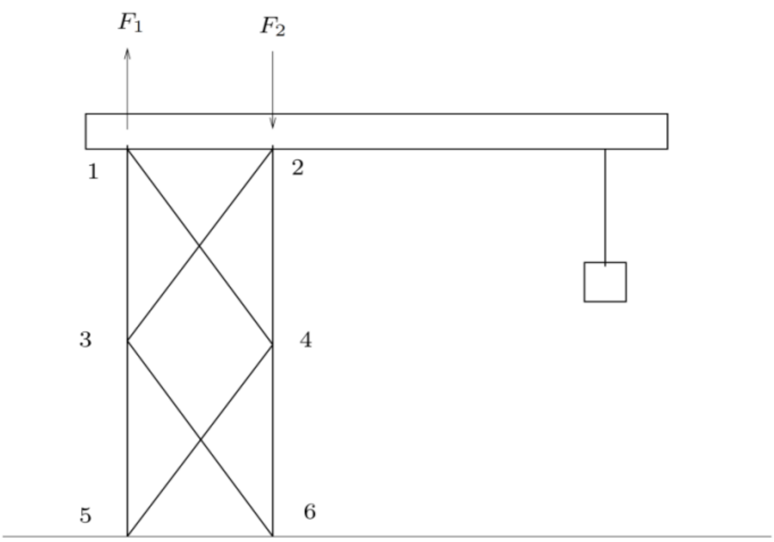

Figura 5.8 – Diagrama da estrutura metálica composta por vigas

A partir do momento que se conhece a massa a ser suspensa e também o comprimento do braço deste guindaste, o cálculo das forças que incidem na estrutura torna-se imediato. Para que a estrutura permaneça em equilíbrio o somatório das forças em cada nó, de 1 a 6, deve ser nula tanto na direção horizontal como na direção vertical. Para tanto se calcula a força exercida por cada viga nos nós, ou seja, calcula-se a força f_{ij}, que significa a força exercida sobre o nó i pela viga que liga o nó i ao nó j.

Para exemplificar, toma-se o nó 2, que é afetado pelas vigas que o ligam aos nós 1,3 e 4. Suponha que θ_{ij} representa o ângulo entre a viga (ij) e a vertical. Ou seja, no equilíbrio de forças, para o nó 2 tem-se as Eqs. 5.18 e 5.19:

$$f_{21}\cos\theta_{21} + f_{23}\cos\theta_{23} + f_{24}\cos\theta_{24} = F_2 \tag{5.18}$$

$$f_{21}sen\theta_{21} + f_{23}sen\theta_{23} + f_{24}sen\theta_{24} = 0 \tag{5.19}$$

Constroem-se as demais equações do somatório das forças para cada um dos nós, ou seja, tem-se as Eqs. 5.20 a 5.25:

$$f_{12}\cos\theta_{12} + f_{13}\cos\theta_{13} + f_{14}\cos\theta_{14} = F_1 \tag{5.20}$$

$$f_{12}sen\theta_{12} + f_{13}sen\theta_{13} + f_{24}sen\theta_{24} = 0 \tag{5.21}$$

$$f_{31}\cos\theta_{31} + f_{35}\cos\theta_{35} + f_{32}\cos\theta_{32} + f_{36}\cos\theta_{36} = 0 \tag{5.22}$$

$$f_{31}sen\theta_{31} + f_{35}sen\theta_{35} + f_{32}sen\theta_{32} + f_{36}sen\theta_{36} = 0 \tag{5.23}$$

$$f_{41}\cos\theta_{41} + f_{45}\cos\theta_{45} + f_{42}\cos\theta_{42} + f_{46}\cos\theta_{46} = 0 \tag{5.24}$$

$$f_{41}sen\theta_{41} + f_{45}sen\theta_{45} + f_{42}sen\theta_{42} + f_{46}sen\theta_{46} = 0 \tag{5.25}$$

Por fim constrói-se a Eq. 5.26 que representa a situação em que a estrutura, como um todo, não tem nenhuma aceleração horizontal, promovendo o equilíbrio:

$$f_{35}sen\theta_{35} + f_{46}sen\theta_{46} + f_{54}sen\theta_{54} + f_{63}sen\theta_{63} = 0 \tag{5.26}$$

Faz-se $f_{ij} = -f_{ji}$ e assim é possível escrever as Eqs. 5.27 a 5.30 na forma matricial, isto é,

$$Af = F \tag{5.27}$$

Onde:

$$f = \begin{bmatrix} f_{12} \\ f_{13} \\ f_{14} \\ f_{23} \\ f_{24} \\ f_{35} \\ f_{36} \\ f_{45} \\ f_{46} \end{bmatrix} \tag{5.28}$$

Assim,

$$F = \begin{bmatrix} F_1 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta_{12} & \cos\theta_{13} & \cos\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen\theta_{12} & sen\theta_{13} & sen\theta_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\cos\theta_{12} & 0 & 0 & \cos\theta_{23} & \cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -sen\theta_{12} & 0 & 0 & sen\theta_{23} & sen\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\theta_{13} & 0 & -\cos\theta_{23} & 0 & \cos\theta_{35} & \cos\theta_{36} & 0 & 0 \\ 0 & -sen\theta_{13} & 0 & -sen\theta_{23} & 0 & sen\theta_{35} & sen\theta_{36} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\cos\theta_{24} & 0 & -\cos\theta_{24} & 0 & 0 & 0 & \cos\theta_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & sen\theta_{35} & sen\theta_{36} & sen\theta_{45} & sen\theta_{46} \end{bmatrix} \tag{5.30}$$

Neste problema, não ter solução significa que a estrutura correspondente não seria capaz de se manter em pé, e teria de ser trocada.

Se o problema agora se referisse à estrutura metálica da Fig. 5.9, resolver-se-ia analogamente. A nova configuração teria apenas ângulos diferentes. Para uma mesma estrutura sujeita a forças externas variáveis, pode-se encontrar a matriz-coluna das forças que atuam sobre as vigas multiplicando-se a inversa da matriz que modela a estrutura metálica pela matriz-coluna das forças externas.

Quanto mais complexa for esta estrutura, maior será o número de equações e de variáveis. A matriz do sistema precisa ser invertível para que a estrutura funcione.

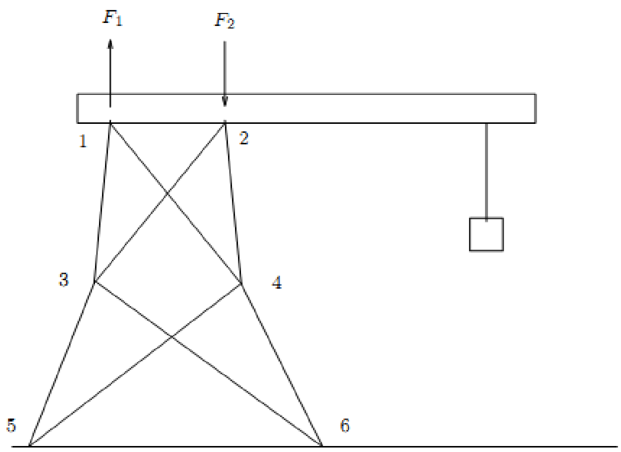

Figura 5.9 - Diagrama de uma segunda estrutura metálica composta por vigas

Outros exemplos de aplicação de sistemas lineares podem ser encontrados disponíveis na internet, algumas vezes sem um autor conhecido.

Exemplo 4. Provetas (ASANO e COLLI, 2009).

Quatro tipos de materiais particulados estão distribuídos por quatro provetas, e em cada proveta os materiais são dispostos em camadas, não misturadas, de modo que seja possível medir facilmente o volume de cada material em cada uma delas. Dado que possamos medir a massa total de cada proveta, e que saibamos a massa da proveta vazia, queremos calcular a densidade de cada um dos materiais.

Para colocar o problema em termos matemáticos, chamemos os materiais de A, B, C e D, e suas densidades respectivas de μ_A, μ_B, μ_C e μ_D. Essas são as incógnitas do problema. Entre os dados disponíveis para resolvê-lo estão a massa conjunta dos quatro materiais em cada uma das provetas (numeradas de 1 a 4), que chamaremos de m1, m2, m3 e m4, já descontada a tara das provetas.

Além disso, temos o volume de cada um dos materiais em cada uma das provetas. Chamaremos de v_{1A}, v_{1B}, v_{1C} e v_{1D} o volume dos materiais A, B, C e D na proveta 1; v_{2A}, v_{2B},

v_{2C} e v_{2D} o volume dos materiais A, B, C e D na proveta 2, e assim por diante, representado na Fig. 5.10.

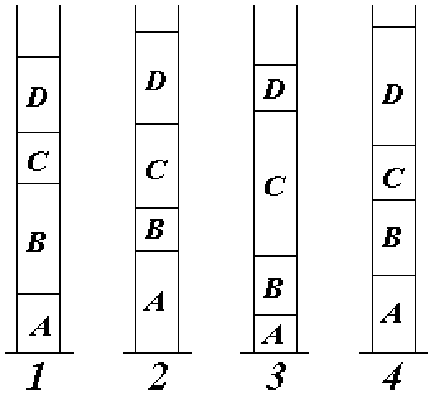

Figura 5.10 – Representação das provetas

Como a densidade é a razão entre massa e volume, a massa do material A na proveta 1 é $v_{1A} \cdot \mu_A$. Estendendo esse raciocínio para os demais materiais, obtemos que a massa total m_1 contida na proveta 1 é $v_{1A} \cdot \mu_A + v_{1B} \cdot \mu_B + v_{1C} \cdot \mu_C + v_{1D} \cdot \mu_D$.

Considerando as quatro provetas, obteremos quatro equações:

$$v_{1A} \cdot \mu_A + v_{1B} \cdot \mu_B + v_{1C} \cdot \mu_C + v_{1D} \cdot \mu_D = m_1$$
$$v_{2A} \cdot \mu_A + v_{2B} \cdot \mu_B + v_{2C} \cdot \mu_C + v_{2D} \cdot \mu_D = m_2$$
$$v_{3A} \cdot \mu_A + v_{3B} \cdot \mu_B + v_{3C} \cdot \mu_C + v_{3D} \cdot \mu_D = m_3$$
$$v_{4A} \cdot \mu_A + v_{4B} \cdot \mu_B + v_{4C} \cdot \mu_C + v_{4D} \cdot \mu_D = m_4$$

Trata-se de um sistema linear com quatro equações e quatro incógnitas.

Exemplo 5. Petróleo (ASANO e COLLI, 2009)

Em três poços de petróleo, situados em regiões distintas, o material coletado tem diferentes concentrações de duas substâncias A e B. Uma central recebe o petróleo dos três poços, mas antes do refino precisa obter uma mistura com uma concentração escolhida das substâncias A e B. A pergunta é: em cada litro de petróleo que será gerado para o refino, quanto petróleo de cada poço se deve colocar?

Para equacionar o problema, chamemos de c_{1A} a concentração de A no petróleo do poço 1, c_{1B} a concentração de B no petróleo do poço 1, e assim por diante. Essa informação é conhecida previamente. As concentrações que queremos obter são chamadas de c_A e c_B. As incógnitas são as quantidades relativas de petróleo de cada poço que colocaremos na mistura final, que chamaremos de q_1, q_2 e q_3. Elas são medidas em litros, e devem ser tais que $q_1 + q_2 + q_3 = 1$. Além disso, a concentração do material A após a mistura dos três será dada por

$c_{1A}.q_1 + c_{2A}.q_2 + c_{3A}.q_3$. Pensando o mesmo sobre o material B, ficamos com três equações lineares e três incógnitas:

$$c_{1A}.q_1 + c_{2A}.q_2 + c_{3A}.q_3 = c_A$$
$$c_{1B}.q_1 + c_{2B}.q_2 + c_{3B}.q_3 = c_B$$
$$q_1 + q_2 + q_3 = 1$$

É importante salientar que o problema não teria solução aplicável dependendo da escolha das concentrações c_A e c_B. Caso a concentração c_A desejada seja superior às concentrações de A em cada um dos poços, não há como obter satisfatoriamente a mistura. Poderia existir uma solução matemática para a equação, mas provavelmente uma das incógnitas q_1, q_2 ou q_3 seria negativa. Dessa forma, no problema real impomos a condição que os valores q_1, q_2 e q_3 não sejam negativos.

O conjunto de valores de c_A e c_B possíveis para que existam q_1, q_2 e q_3 que satisfaçam as equações do problema, é denominado "envoltória convexa" dos pontos (c_{1A} , c_{1B}), (c_{2A} , c_{2B}) e (c_{3A} , c_{3B}) e está representado na Fig. 5.11. É o menor conjunto convexo que contém os pontos citados e podemos representar pela figura abaixo:

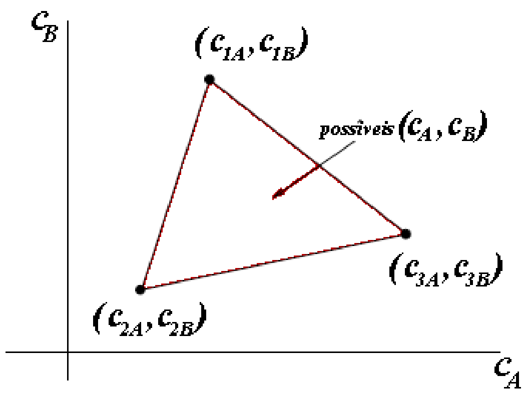

Figura 5.11 –Envoltória convexa dos pontos (c_{1A} , c_{1B}), (c_{2A} , c_{2B}) e (c_{3A} , c_{3B})

5.4.1 Aplicação de sistemas lineares na interpolação polinomial

Em Ruggiero e Lopes (1996, p. 215) encontra-se o seguinte exemplo:

Vamos encontrar o polinômio de grau ≤ 2 que interpola os pontos da tabela 5.6:

Tabela 5.6 – Pontos para interpolar com um polinômio de grau ≤ 2

X	-1	0	2
f(x)	4	1	-1

Fonte: (RUGGIERO e LOPES (1996, p. 215)

Temos que $p_2(x) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2$;

$p_2(x_0) = f(x_0) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 4$

$p_2(x_1) = f(x_1) \Leftrightarrow a_0 = 1$

$p_2(x_2) = f(x_2) \Leftrightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = -1$

Resolvendo o sistema linear, obtemos: $a_0 = 1$; $a_1 = -7/3$ e $a_2 = 2/3$.

Assim, $p_2(x) = 1 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}x^2$ é o polinômio que interpola $f(x)$ em $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

Graficamente, a representação da solução do problema é feita na Fig 5.12 a seguir:

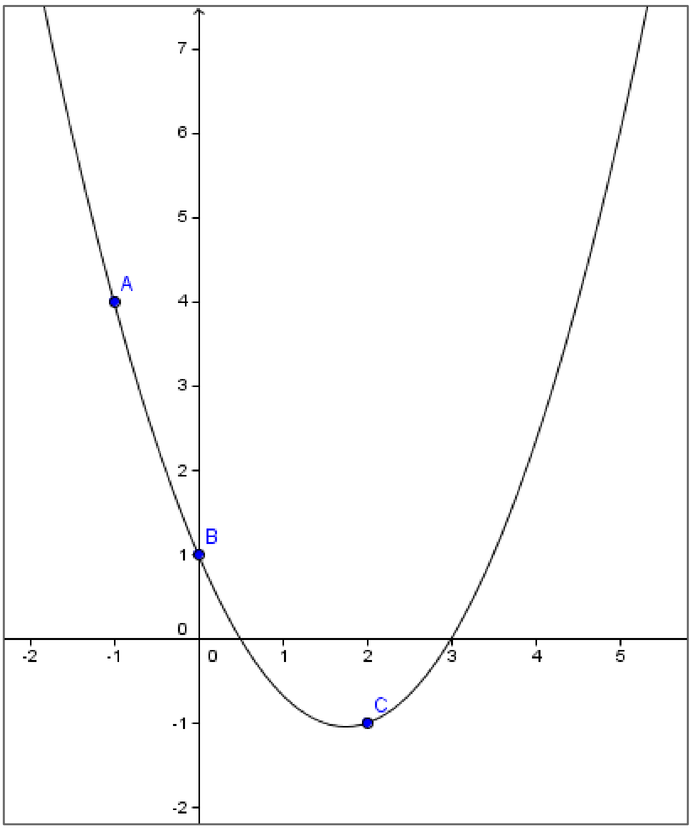

Figura 5.12 – Representação gráfica do polinômio que interpola os pontos da Tabela 5.6

6 CONCLUSÃO

6.1 CONCLUSÃO GERAL

Aparentemente o conteúdo dos sistemas lineares é abordado no Ensino Médio, de maneira sucinta e superficial. Pode levar os alunos a acreditarem que tudo que existe de sistemas lineares se finda ali, sem identificar quaisquer aplicações. As situações problema são sugeridas, em livros didáticos, para até três incógnitas e não se trabalham aplicações dos sistemas para a percepção de sua importância científica e também industrial. Até mesmo a linguagem formal e a escrita genérica de um sistema linear, onde aparecem índices na representação, pode parecer confuso e inacessível. A preocupação é sempre com a manipulação algébrica e dessa maneira não se favorece a concepção de continuidade do conteúdo. Não se abordam aplicações mais sofisticadas nem se aprimora os problemas propostos, impedindo uma visão mais generalista do tema.

O aprofundamento fica limitado pelas dificuldades de manipulação algébrica. As ferramentas computacionais podem ajudar a suprir essas carências, permitindo um estudo mais interessante aos alunos. Podem desmistificar um possível conceito de que a partir de sistemas 4x4 a resolução é tecnicamente inviável. A utilização de recursos computacionais é uma alternativa para o avanço a sistemas de maior porte. Transferindo a manipulação algébrica para os *softwares* específicos e reduzindo o tempo dedicado aos cálculos manuais, os conceitos e aplicações poderiam ser mais explorados.

Em geral, a falta de atualização das informações e abordagens ao estudo dos sistemas lineares nos materiais didáticos disponíveis, indica que o tema não é tratado expressivamente sob diferentes representações. Pouco se propõe em utilizar recursos tecnológicos que contribuam na elucidação dos aspectos e da teoria envolvida. Dessa forma, não é ofertada ao aluno a oportunidade de identificar plenamente os conceitos relacionados aos sistemas lineares.

O caráter articulador do conhecimento algébrico e geométrico dos sistemas lineares deve ser discutido pelo professor em classe. Da mesma forma, o professor deve apontar a continuidade que o conteúdo oferece a partir de aplicações interessantes e conexões com as demais áreas favorecendo a interdisciplinaridade. A observância das características “curiosas” dos sistemas lineares, como condicionamento, resolução diversificada, aproximação, aplicação, pode motivar o aluno a um aprendizado centrado no valor formativo do conteúdo.

6.2 CONTRIBUIÇÕES

Este trabalho traz o conteúdo de sistemas lineares no Ensino Médio de forma a possibilitar o interesse de professores e alunos pela utilização dos recursos computacionais para fins didáticos. Exibe diversas aplicações que podem ser utilizadas e que inspiram alunos e professores para a busca de outras aplicações possíveis. Explora o conteúdo de sistemas lineares, os conceitos envolvidos, suas representações e soluções de maneira mais aprofundada que de costume no Ensino Médio. Apresenta várias contribuições do tema, a fim de popularizar sua verdadeira importância. Na totalidade, propõe que o processo de ensino-aprendizagem reflita e discuta a contribuição da Matemática para a solução de problemas reais para despertar o anseio de alunos e professores pelo desenvolvimento da ciência. Delineia a contribuição dos sistemas lineares numa inter-relação de conteúdos de Matemática generalizados na Álgebra Linear, Geometria Analítica e Cálculo Numérico e também oferece possibilidades de interdisciplinaridade com demais áreas do conhecimento.

6.3 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O professor de Matemática do Ensino Médio deve sempre aprimorar e aprofundar seu conhecimento em sistemas lineares. Essa atitude além de lapidar constantemente sua formação, pode contribuir com o enriquecimento do tema em suas aulas, oferecendo também aos seus alunos maior conhecimento do assunto, mesmo que em possíveis conversas extraclasse. Sugerimos ideias não contempladas neste trabalho, mas que compõem uma importante contribuição no estudo do conteúdo dos sistemas lineares:

- Uso da estratégia do pivoteamento na Eliminação de Gauss;
- Exploração de *softwares* que precisem de algoritmos programados para a resolução de sistemas;
- Aprofundamento do estudo matricial e o estudo vetorial dos sistemas lineares;
- Pesquisa de critérios para a escolha de um livro didático que aborde sistemas lineares;
- Proposta de oficinas de estudo de sistemas lineares para o Ensino Médio enfatizando os pontos principais para a teorização, interpretação e aplicação nesse nível;
- Discussão de questões de vestibulares e ENEM que contemplem sistemas lineares;
- Investigação de outros métodos de resolução como, Eliminação de Gauss-Jordan, Fatoração LU e Fatoração de Choleski;

- Programar os métodos de Jacobi e Gauss-Seidel no *software Scilab*;
- Estudo das funções residentes do *MATLAB*, para resolução de sistemas lineares;
- Realização de simulações de resultados numéricos da resolução de sistemas lineares;
- Avanço nas pesquisas existentes que contemplam ou utilizam sistemas lineares.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASANO, C. H.; COLLI, E. **Cálculo Numérico:** Fundamentos e Aplicações. São Paulo: IME-USP, 2009. cap 1. p. 11-13. Disponível em: <http:// www.ime.usp.br/~asano /LivroNumerico /LivroNumerico.pdf>. Acesso em: 26 jan. 2013.

BOLDRINI, J. L.; COSTA, S. I. R.; FIGUEIREDO, V. L.; WETZLER, H. G. **Álgebra Linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980. cap 2. p. 51-55.

BOYER, C.B. **História da Matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2010

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros curriculares nacionais: Ensino Médio: Matemática. Brasília: SEMT, 1999.

BRASIL. Ministério do Planejamento, Orçamento e Gestão. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Contagem Populacional. Disponivel em: <http://www.censo2010.ibge.gov.br/ sinopse/index.php?dados=4&uf=00>. Acesso em: jan. 2013.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise Numérica**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003. cap 7. p. 381-385.

CARNEIRO, P. S. **Geometria Vetorial na escola:** uma leitura geométrica para sistemas de equações. 2007. 213f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

CHIARI, A.S. **A utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio**. 2011. 143f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135f. (Orientações curriculares para o ensino médio ; volume 2)

COELHO, F.U.; LOURENÇO, M. L. **Um curso de Álgebra Linear**. 2.ed. São Paulo: Edusp, 2005. cap. 1. p. 17-26.

DULLIUS, M. M.; EIDELWEIN, G. M.; FICK, G. M.; HAETINGER, C.; QUARTIERI, M. T. A. **Recursos Computacionais nas aulas de Matemática**. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Águas de Lindóia, 2006.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

FERNANDES, W. M. A.; MIYASAKI, R. **Sistemas Lineares e Aplicações**. Anais do IX Seminário de Iniciação Científica, VI Jornada de Pesquisa e Pós-Graduação e Semana Nacional de Ciência e Tecnologia, Anápolis, 2011.

FERREIRA, M. C. C.; GOMES, M. L. M. **Sobre o ensino de sistemas lineares.** Revista do Professor de Matemática, n.32, 3º quadrimestre 1996.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas**. Porto Alegre: Bookman, 2008. cap 4. p. 145-149.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R. **Matemática Completa**. Volume Único. 2. Ed. São Paulo: FTD, 2005. cap. 5. p. 71-93.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. **Álgebra Linear**. São Paulo: Polígono, 1971. cap 1. p. 3-18.

ISHIHARA, C.; PESSOA, N. **Matemática**: 2º ano Ensino Médio. 2.ed. Brasília: Cisbrasil-CIB, 2010.cap.3. p.69-89.

JORDÃO, A. L. I. **Um estudo sobre a resolução algébrica e gráfica de sistemas lineares 3x3 no 2º do Ensino Médio**. 2011. 192f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

LEON, S.J. **Álgebra Linear com Aplicações**. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998. cap. 1. p. 1-77.

LIMA, E. L. **Sobre o ensino de sistemas lineares.** Revista do Professor de Matemática, n.23, 1º semestre 1993.

LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 8.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. cap. 6;9, p. 63-65, 110-117.

LOBEIRO, A.M; GRAMANI, L.M. **Um método para escalonar sistemas de equações lineares usando somente determinantes de ordem 2**. Revista Ciências Exatas e Naturais, v.12. n.2, jul/dez 2010.

LONGEN, A. **Matemática**: Ensino Médio 2ª série. 1. ed. Curitiba: Positivo, 2004. Cap.7. p. 130-144.

LUCCAS, S. **Uma abordagem histórico-filosófica no ensino e na aprendizagem dos sistemas de equações lineares e determinantes**. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), Recife, Brasil, 2004.

MELO, A. R de.; SEHABER, V. F.; MARQUES, J. M. **Outras ideias associadas à geometria de sistemas de equações lineares**. III Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia (SINECT), Ponta Grossa, Brasil, 2012.

PANTOJA, L. F. L. **Conexão entre os métodos da substituição e escalonamento no estudo de sistemas lineares**. 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEMAT), Recife, Brasil, 2008.

Paraná. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento da Educação Básica. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. Curitiba: JAM3 Comunicação, 2008.

PEREIRA, L.F. A.; HAFFNER, J.F. **Sistemas de Equações Lineares**. 1ed. Rio Grande do Sul. 11p. Disponível em: <http://www.feng.pucrs.br/~gacs/new/disciplin as/asl/apostilas/Aula01.pdf> Acesso em: 02 jun. 2011.

PESCADOR, A.; POSSAMAI, J. P.; POSSAMAI, C. R. **Aplicação de Álgebra Linear na Engenharia**. XXXIX Congresso Nacional de Educação em Engenharia (COBENGE), Blumenau, Brasil, 2011.

PIMENTA, G.V; SILVA, G.B.D.da; EUFRÁSIO, A dos R.; PORTO, A.A.; VIEIRA Jr, N. **Os modelos mentais relacionados ao aprendizado de Sistemas Lineares no Ensino Superior.** Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.5, n.1, p. 205-226, maio 2012.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. 1.ed. São Paulo – SP: Pioneira Thomsom Learning, 2004. 690 p.

RANGEL, W.S.A. **Projetos de Modelagem Matemática e Sistemas Lineares**: Contribuições para a formação de Professores de Matemática. 2011. 139f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

REIS, E. S. **O estudo de sistemas de equações do primeiro grau em livros didáticos utilizados em escolas brasileiras**. 2010. 135f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

ROCHA, F. O. **Aprendizagem da resolução de sistemas de equações do 1º grau por alunos do 8º ano do ensino fundamental:** Método da substituição. 2010. 172f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. **Cálculo Numérico**: Aspectos teóricos e computacionais. São Paulo: Makron Books, 1996. cap 3. p. 105-179.

SANTOS, C. A. M dos.; GENTIL, N.; GRECO, S. E. **Matemática**: série novo ensino médio. Volume Único. 6. Ed. São Paulo: Ática, 2000. cap. 97-101. p. 218-229.

SOUZA, J. **Matemática**. Volume Único. 1. Ed. São Paulo: FTD, 2010. cap. 3. p. 67-88.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA – 2º CONCURSO VESTIBULAR 2012. Disponível em: < http://www.cps.uepg.br/vestibular/provas/2_2012/Prova%20Vocacionada%20-%20POR%20MAT%20HIS%20-%202112-2.pdf>. Acesso em 03/01/2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA – 2º CONCURSO VESTIBULAR 2011. Disponível em: < http://www.cps.uepg.br/vestibular/provas/2º_2011/Matemática.pdf>. Acesso em 03/01/2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA – 1º CONCURSO VESTIBULAR 2012. Disponível em: http://www.cps.uepg.br/vestibular/provas/1º_2012/PROVA-C.GERAIS-2012-1.pdf>. Acesso em 03/01/2013

________ . Ministério da Educação. **Programa Nacional de informática na Educação (PROINFO):** Diretrizes. MEC/Seed. Brasília, 1997.

SOFTWARES UTILIZADOS

GEOGEBRA. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download>. Acesso em 25/01/2013.

MAXIMA. Disponível em: <http://maxima.sourceforge.net/download.html>. Acesso em 25/01/2013.

WINPLOT. Disponível em: <http://winplot.softonic.com.br/>. Acesso em 25/01/2013.