



Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional



Sobre Somas Infinitas e uma Forma Recursiva para a Soma da Série Zeta($2p$) de Riemann

Uender Barbosa de Souza

Jataí

2015

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Uender Barbosa de Souza		
E-mail:	uenderbs@gmail.com		
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás – Câmpus Goiânia		
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO
		CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Sobre Somas Infinitas e uma Forma Recursiva para a Soma da Série Zeta(2p) de Riemann		
Palavras-chave:	Sommas Infinitas, Função Zeta, Riemann		
Título em outra língua:	About Infinite Sums and a Recursive Form to Riemann's Zeta(2p) Function		
Palavras-chave em outra língua:	Infinite Sums, Zeta Function, Riemann		
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico		
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	29/04/2015		
Programa de Pós-Graduação:	PROFMAT		
Orientador (a):	Ole Peter Smith		
E-mail:	ole.ufg@gmail.com		
Co-orientador(a):*			
E-mail:			

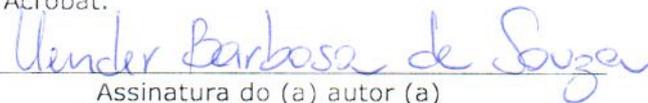
*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento SIM NÃO¹

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.


Assinatura do (a) autor (a)

Data: 27/04/2015

¹ Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Uender Barbosa de Souza

Sobre Somas Infinitas e uma Forma Recursiva para a Soma da Série Zeta(2p) de Riemann

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith

Goiânia

2015

Ficha catalográfica elaborada automaticamente
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a), sob orientação do Sibi/UFG.

Souza, Uender Barbosa de
Sobre Somas Infinitas e uma Forma Recursiva para a Soma da
Série Zeta(2p) de Riemann [manuscrito] / Uender Barbosa de Souza.
- 2015.
90 f.: il.

Orientador: Prof. Dr. Ole Peter Smith.
Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de Goiás, Regional
Jataí, Jataí, Programa de Pós-Graduação em Matemática (PROFMAT -
Profissional), Jataí, 2015.

Bibliografia.

Inclui gráfico, tabelas, lista de figuras.

1. Somas Infinitas. 2. Função Zeta. 3. Riemann. I. Smith, Ole Peter,
orient. II. Título.

Uender Barbosa de Souza

Sobre Somas Infinitas e uma Forma Recursiva para a Soma da Série Zeta (2p) de Riemann.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 29 de abril de 2015, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



Prof. Dr. Ole Peter Smith
Presidente da Banca – UFG/Goiânia



Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Membro – UFG/Goiânia



Prof. Dr. Reinier Díaz Millán
Membro – IF/Goiânia

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

Uender Barbosa de Souza graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás em 2008, onde foi aluno monitor voluntário. Entre os anos de 2010 e 2012 se Especializou em Educação Inclusiva pela Faculdade de Tecnologia Equipe Darwin, onde também cursou uma Especialização em Matemática e Estatística. Foi coordenador de Informática e Professor na Universidade Estadual de Goiás Câmpus de Iporá de 2009 à 2014, onde colaborou com projetos de pesquisa e extensão. Em 2014 se juntou ao corpo docente do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Goiás - Câmpus Goiânia.

Dedico este trabalho a minha esposa Jéssica Luana e à
meus pais Sebastião e Maria.

Agradecimentos

À minha amada esposa Jéssica Luana pelo constante apoio, incentivo e paciência nos momentos dedicados a produção deste trabalho.

Aos meus pais Sebastião e Maria e irmã Lindiheyne pelo amor, carinho, educação e apoio que sempre me deram, os quais me conduziram.

Aos colegas, pela amizade adquirida ao longo do curso. Em especial aos meus amigos Saulo, Cláudão (Cláudio) e Jânio que compartilharam vários momentos durante nossas viagens nesses dois anos.

À meu orientador e amigo Ole Peter Smith por me acolher sempre de braços abertos, pelo conhecimento, aprendizagem e experiência proporcionados ao longo dos anos.

E finalmente à CAPES pelo suporte financeiro que me foi fornecido no último ano do mestrado.

Resumo

Neste trabalho apresentamos métodos para o cálculo de algumas somas infinitas e usamos a série de Fourier da função $f(x) = x^{2p}$ com $p \in \mathbb{N}$ para obter resultados sobre o comportamento da função Zeta(2p) de Riemann, tais como sua soma e sua multiplicidade racional por π^{2p} .

Palavras-chave

Somas infinitas, Função zeta, Riemann.

Abstract

This paper presents methods to calculate some infinite sums and use the Fourier series of function $f(x) = x^{2p}$ with $p \in \mathbb{N}$ to get results on the behavior of Zeta(2p) function Riemann, including their sum and rational multiplicity of π^{2p} .

Keywords

Infinite sums, zeta function, Riemann.

Lista de Figuras

1	Representação gráfica de uma sequência convergente	16
2	Floco de Neve de Koch	26
3	Construção geométrica da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$	35
4	Representação da sequência $s_n = k^n$ com $0 \leq k < 1$	43
5	Aproximações de $f(x) = x^2$ pela série de Fourier	61
6	Aproximações pela série de Fourier para $f(x)$ do Exemplo 25	64

Sumário

1	Sequências e Séries	15
1.1	Série geométrica	24
1.2	Série Harmônica	31
1.3	Séries Telescópicas	33
1.4	Testes de convergência	39
2	Séries de Funções	43
2.1	Séries de Potências	44
2.2	Substituição, diferenciação e integração dos termos de uma série	46
2.3	Série de Taylor	52
2.4	Série de Fourier	55
2.4.1	Aproximações de f em $[0, 2\pi]$	55
2.4.2	Mudança de Intervalo	59
3	A Função Zeta de Riemann	67
3.1	Somas de $H_n^{(-p)}$ para $p \in \mathbb{Z}_+$	69
3.2	Somas de $\zeta(2p)$, $p \in \mathbb{N}$	72
3.3	Somas envolvendo $\zeta(p)$:	79
4	Considerações finais	87

Introdução

Segundo [5], problemas envolvendo sequências e séries se fazem presentes desde os primórdios da matemática. Arquimedes (287 A.C.-212 A.C.) por exemplo, usou sequências de polígonos regulares inscritos em um círculo de raio R para aproximar sua área observando que quanto maior o número de lados do polígono inscrito, mais o polígono parece se aproximar do círculo. O matemático italiano Leonardo de Pisa (1170-1250) conhecido como Fibonacci propôs a sequência

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad n \geq 3 \quad (1)$$

ao estudar problemas envolvendo alguns fenômenos naturais, como a reprodução de coelhos com condições pré-determinadas e o crescimento de galhos de certos tipos de plantas.

Neste trabalho são apresentados conceitos envolvendo sequências, séries, séries de funções e aproximações de funções por séries. Esses conceitos estão divididos em 3 capítulos, sendo introduzidas no primeiro capítulo as principais definições e propriedades de sequências e séries envolvendo sua convergência e somas.

No segundo capítulo as séries são generalizadas para séries de funções (somas de sequências definidas por funções convergindo à funções).

São também apresentados métodos para se obter somas de outras séries partindo de uma série convergente a qual conhecemos sua soma e formas de representar funções por séries infinitas (Séries de Taylor e Fourier).

Finalmente no terceiro e último capítulo trabalhamos com a função ζ zeta e algumas de suas somas parciais. Essa função foi usada pelo alemão Bernhard Riemann (1826-1866) para estudos envolvendo números primos, daí sua grande importância. Ela é definida por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Hoje chamada de função zeta de Riemann, esta já havia sido estudada por outros matemáticos como o suíço Leonard Paul Euler (1707-1783), que definiu uma fórmula fechada da soma para valores positivos pares de s .

A inspiração para este trabalho se deu ao observar que as séries de Fourier das funções $f(x) = x^2$ e $f(x) = x^4$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ nos fornecem as somas para $\zeta(2)$ e $\zeta(4)$ respectivamente. Isso nos leva a refletir sobre a possibilidade de encontrar todas as somas $\zeta(2p)$ para $p \in \mathbb{N}$ apenas fazendo a série de Fourier da função $f(x) = x^{2p}$.

Nesse sentido propomos uma soma em forma recursiva para $\zeta(2p)$ e que esta é múltiplo racional de π^{2p} para $p \in \mathbb{N}$.

Mostramos também que $H_n^{(-p)}, p \in \mathbb{Z}_+$ é um polinômio de grau $p + 1$ em n e que podemos obter seus coeficientes resolvendo um sistema linear de ordem $p + 2$.

1 Sequências e Séries

Nesta seção serão definidos apenas os principais conceitos relativos a sequências e séries de números reais necessários para o desenvolvimento das seções seguintes, sendo que outros resultados como propriedades, teoremas e definições podem ser encontrados em [9].

Uma sequência pode ser pensada como uma coleção de números da reta real com uma certa ordem.

$$s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots \quad (2)$$

Nosso interesse é estudar seu comportamento quanto a sua lei de formação, como definimos a seguir.

Definição 1. *Uma sequência de números reais é uma função $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ em que $s(n) = s_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, é chamado de n -ésimo termo da sequência. Escrevemos s_n para indicar a sequência s .*

Dizemos que uma sequência é *limitada* quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$a \leq s_n \leq b,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a sequência não é limitada, então é *ilimitada*.

Uma sequência é *crescente* se $s_{n+1} > s_n$, *decrecente* se $s_{n+1} < s_n$, *não-crescente* se $s_{n+1} \leq s_n$ e *não-decrecente* se $s_{n+1} \geq s_n$ para todos seus termos. Dizemos que é *monótona* quando é crescente, decrescente, não-crescente ou não-decrecente.

Restrições sobre o domínio definem subsequências de s . Por exemplo, tomando $n = 2k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ temos a subsequência da sequência (2).

$$s_2, s_4, s_6, \dots, s_{2k}, \dots$$

A noção de limite de uma sequência está relacionada com a ideia de que quanto maior n , mais próximo de um número real S estará s_n e assim permanecerá. Essa ideia pode ser visualizada na Figura 1.

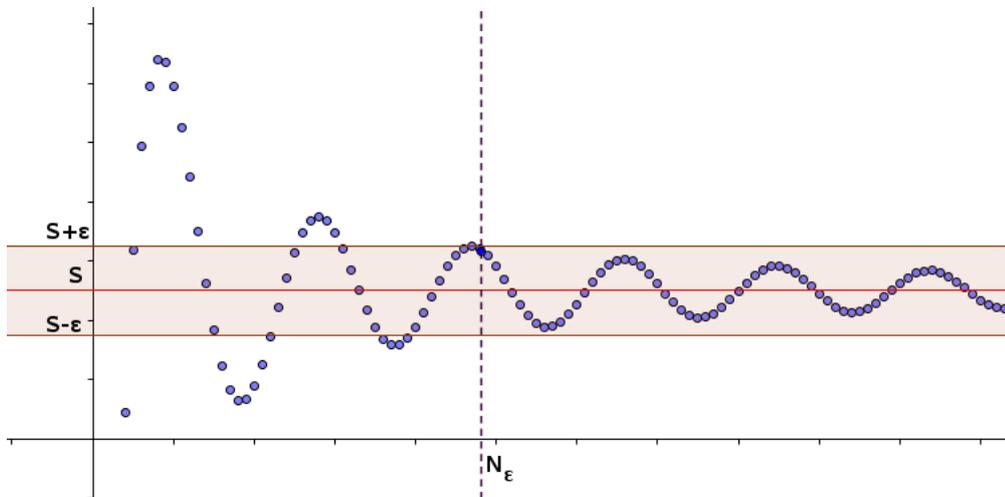


Figura 1: Representação gráfica de uma sequência convergente

Definição 2. Uma sequência s_n tem limite S se para cada $\epsilon > 0$ existir um inteiro N_ϵ tal que

$$n > N_\epsilon \Rightarrow |s_n - S| < \epsilon,$$

dizemos que a sequência é convergente quando tem limite e escrevemos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S \quad \text{ou} \quad s_n \rightarrow S.$$

Se uma sequência não é convergente, então é dita divergente.

Exemplo 1. A sequência $s_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Para todo $\epsilon > 0$, temos

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\epsilon} < n$$

assim, basta tomar $N_\epsilon = \left[\frac{1}{\epsilon} \right]$.

■

É evidente que as propriedades de limites de funções reais também se aplicam à limites de seqüências, já que através de restrições em seu domínio podemos obter seqüências. Demonstrações e propriedades gerais podem ser encontradas em [9] e [13].

Teorema 1. *Se $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S$ então toda subsequência de s_n converge para S .*

Ver demonstração em [9].

■

Teorema 2. *Toda seqüência convergente é limitada.*

Se a seqüência s_n é convergente, então se considerarmos $\epsilon = k \in \mathbb{R}_+^*$, existe sempre um $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > N_\epsilon$ teremos $|s_n - S| < k$, ou seja, $s_n \in (S - k, S + k)$. Consideremos ainda o conjunto $C = \{s_1, s_2, \dots, s_{N_\epsilon-1}\}$ que é não vazio e limitado por $l = \min(C)$ e $L = \max(C)$. Assim temos $\min\{l, S - k\} < s_n < \max\{L, S + k\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

■

Teorema 3. *Toda seqüência limitada e monótona é convergente.*

Ver demonstração em [9].

■

Definição 3. *As seqüências que cumprem a condição*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}; m, n > N_\epsilon \Rightarrow |s_m - s_n| < \epsilon$$

são chamadas de seqüências de Cauchy.

Para uma seqüência s_n ser de Cauchy, deve-se ter para valores suficientemente grandes dos índices $m, n \in \mathbb{N}$ a aproximação de seus termos s_m e s_n . Essa condição de convergência envolve apenas os termos da seqüência e não exige que se conheça inicialmente o limite da mesma.

Exemplo 2. Para fixar ideias sobre esse critério de convergência, consideremos a sequência geométrica $s_n = \frac{1}{3^n}$.

Considerando $m > n$ e tomando $\epsilon = \frac{1}{10}$, basta fazer $N_\epsilon = 2$ já que

$$|s_n - s_m| = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{3^m} = \frac{1}{3^n} \left(1 - \frac{1}{3^{m-n}}\right) < \frac{1}{3^n} < \frac{1}{10}, \quad n > 2.$$

Se fosse $\epsilon = \frac{1}{100}$, bastaria tomarmos $N_\epsilon = 4$.

■

Teorema 4. Toda sequência convergente é de Cauchy.

Se $s_n \rightarrow S$, então tomando um $\frac{\epsilon}{2}$ qualquer, existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - S| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|s_m - S| < \frac{\epsilon}{2}$. Pela desigualdade triângular concluímos

$$|s_m - s_n| \leq |s_m - S| + |s_n - S| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

provando que a sequência s_n é de Cauchy.

■

Teorema 5. Toda sequência de Cauchy é convergente.

Ver demonstração em [9].

■

Definição 4. Dada uma sequência infinita de termos a_k , definimos uma série pela sequência s_n formada pela n -ésima soma parcial

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad (3)$$

a_k é chamado de termo geral da série e se existe o limite infinito de s_n ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = S, \quad (4)$$

dizemos que a série infinita

$$S = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad (5)$$

é convergente e possui soma S . Senão, dizemos que a série é divergente.

As séries infinitas possuem comportamentos interessantes e intuitivos, porém exigem cautela em sua análise. Exemplo disso é o seguinte teorema.

Teorema 6. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

Se a série é convergente, então temos para as somas parciais

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_{n-1} = S,$$

logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n - s_{n-1} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}) = 0$$

assim,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0 .$$

■

Resultado disso é o chamado de teste da divergência; se $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0$ ou se o limite não existir, então a série é divergente.

Exemplo 3. As séries $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \cos(n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n}$ são divergentes.

Quanto ao cuidado que deve-se ter é relativo à recíproca do teorema, este nos diz que toda série convergente possui limite do termo geral igual à zero, porém nem toda série que possui limite do termo geral igual à zero é convergente. Um exemplo deste fato é a série harmônica, que é divergente e possui termo geral $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

Teorema 7. *Séries de termos positivos convergem se, e somente se, a sequência das somas parciais é limitada.*

Como os termos são positivos, então

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \dots \leq s_n \leq \dots,$$

observe que as somas parciais formam uma sequência monótona; pelo teorema 1 esta converge se, e somente se for limitada. ■

Desse teorema podemos concluir um teste de comparação entre séries com o seguinte corolário.

Corolário 1. *Sejam as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ de termos positivos tais que $a_n \leq b_n$ para todo n . Se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também converge. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ também diverge.*

No primeiro caso, se $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então existe uma soma S da série tal que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq S$, e pelo Teorema 7 concluímos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge. Já no segundo caso, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \rightarrow +\infty$ e por consequência $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \rightarrow +\infty$ também diverge. ■

Uma série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é chamada de *absolutamente convergente* quando $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ é convergente. No caso de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ser convergente e $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ divergente, dizemos que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é *condicionalmente convergente*.

Teorema 8. *Toda série absolutamente convergente é convergente.*

Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e observe que

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Assim, se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $2 \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ converge e pelo Corolário 1 a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ converge, levando a convergência de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

Uma demonstração alternativa pode ser encontrada em [9] usando o critério de Cauchy para séries. ■

Para definir algumas somas infinitas, em alguns casos é essencial a reordenação dos termos, e um fato importante a se destacar é que algumas séries convergentes com soma S_1 podem ter os termos reordenados de modo que sua soma seja S_2 , que é um absurdo. Segundo [9], Riemann demonstrou que séries condicionalmente convergentes podem ser manipuladas a fim de se obter uma soma qualquer desejada. Sendo o seguinte teorema atribuído a ele.

Teorema 9. Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ uma série condicionalmente convergente. Dado qualquer número real S , existe uma reordenação (b_n) dos termos de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, tal que $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = S$.

Ver demonstração em [9].

■

Em geral, toda literatura que aborda o assunto *comutatividade de séries* apresenta o seguinte exemplo.

Exemplo 4. A série harmônica alternada converge para S e pode ser rearranjada para uma soma diferente.

Temos

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right]. \quad (6)$$

Multiplicando (6) por $\frac{1}{2}$ obtemos

$$\frac{S}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$$

e por conveniência, vamos inserir zeros entre os termos, assim

$$\frac{S}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[0 + \frac{(-1)^{n+1}}{2n} \right]. \quad (7)$$

Somando as séries (6) e (7), segue

$$\begin{aligned} \frac{3S}{2} &= \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2k-1} + \frac{(-1)^{k+1} - 1}{2k} \right] = \sum_{p=1}^{+\infty} \left\{ \left[\frac{1}{2(2p-1)-1} + 0 \right] + \left[\frac{1}{2(2p)-1} - \frac{2}{2(2p)} \right] \right\} \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{2(2p-1)-1} + \frac{1}{2(2p-1)+1} - \frac{1}{2p} \right], \end{aligned}$$

logo,

$$\frac{3S}{2} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \right) + \dots \quad (8)$$

Observe que (8) possui os mesmos termos que (6), porém reordenados de tal modo que após dois termos positivos de denominador ímpar tenhamos um termo negativo de denominador par. Concluimos o absurdo

$$\frac{3S}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S.$$

Nas seções seguintes definimos testes para verificar a convergência de (6) e sua soma.

■

Caso $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ seja uma reordenação de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$, dizemos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ é comutativamente convergente.

Teorema 10. *Toda série absolutamente convergente é comutativamente convergente.*

Ver demonstração em [9].

■

1.1 Série geométrica

As progressões geométricas são em geral bastante conhecidas, pois são abordadas no ensino médio, onde são apresentadas propriedades envolvendo relações entre termos, somas finitas e infinitas. Nas seções seguintes pode ser notada a importância desta série para o cálculo de outras somas infinitas.

Uma sequência a_n é dita uma progressão geométrica se o quociente $x = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ chamado de razão, for constante para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos agora uma progressão geométrica com $a_1 = a$ e razão x , então a sequência formada pela soma parcial de seus m primeiros termos é

$$s_m = a \cdot \frac{1 - x^m}{1 - x} \quad (9)$$

e a verificação é simples, basta observar que

$$s_m = a + ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^{m-1} \quad (10)$$

e

$$x \cdot s_m = ax + ax^2 + ax^3 + \cdots + ax^{m-1} + ax^m, \quad (11)$$

subtraindo (11) de (10) obtemos

$$s_m - x \cdot s_m = a - ax^m,$$

de onde concluímos (9). ■

As séries geométricas são da seguinte forma,

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot x^n, \quad (12)$$

sua convergência e soma são verificadas aplicando limite com $m \rightarrow +\infty$ em (9).

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} s_m = \lim_{m \rightarrow +\infty} a \cdot \frac{1 - x^m}{1 - x} = \frac{a}{1 - x} - \frac{a}{1 - x} \cdot \lim_{m \rightarrow +\infty} x^m. \quad (13)$$

Se $|x| < 1$, (12) converge para

$$S = \frac{a}{1 - x}, \quad (14)$$

se $|x| > 1$, é evidente que (12) diverge. Caso $x = \pm 1$ temos as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot (-1)^n$ que são ambas divergentes. Concluímos que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a \cdot x^n = \frac{a}{1 - x}, \quad |x| < 1. \quad (15) \quad \blacksquare$$

Exemplo 5. *Um exemplo prático de aplicação da série geométrica envolve a curva de Koch ou floco de neve de Koch, um dos primeiros fractais descobertos.*

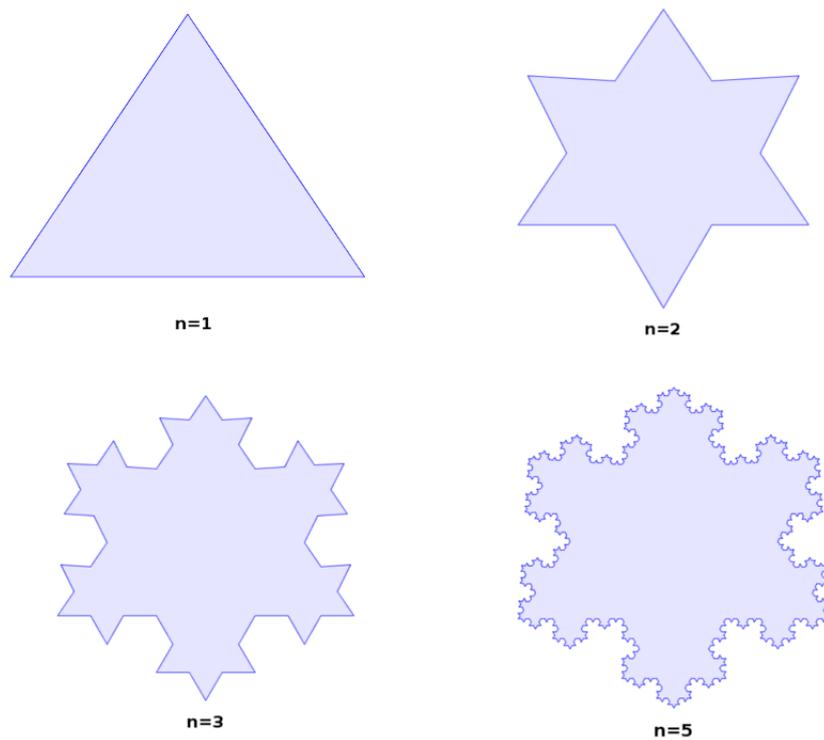


Figura 2: Floco de Neve de Koch

Segue a definição da curva dada por [5].

Começando com um triângulo equilátero com lados unitários, dividimos em três cada um dos segmentos unitários, construímos um triângulo equilátero no terço do meio e apagamos a base de cada um dos novos triângulos equiláteros como na Figura 2. O resultado é uma poligonal fechada de doze lados e com comprimento total de quatro unidades. Dividindo em três cada um dos doze lados, erigindo doze triângulos equiláteros sobre os terços do meio, e apagando as bases, temos uma figura fechada com quarenta e oito lados e um comprimento de $\frac{16}{3}$. Continuando esse processo indefinidamente temos a curva de Koch.

Na Tabela 1 temos para cada iteração a quantidade de segmentos a partir de um lado do triângulo inicial e o comprimento total gerado a partir desse segmento (um terço do comprimento da curva!).

Tabela 1: Quantidade e comprimento de segmentos após n iterações

Iteração	Quantidade de segmentos	Comprimento de cada	Comprimento total
0	1	1	1
1	4	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
2	4^2	$\frac{1}{3^2}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2$
3	4^3	$\frac{1}{3^3}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3$
4	4^4	$\frac{1}{3^4}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^4$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	4^n	$\frac{1}{3^n}$	$\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Daí obtemos o comprimento total da curva na n -ésima iteração na forma de uma progressão geométrica,

$$C_n = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^n, \quad (16)$$

e concluimos por (16) que após infinitas iterações, o perímetro da curva é infinito. Quanto a área do floco de neve temos a Tabela 2, montada de forma análoga a anterior.

Sendo a área do triângulo inicial $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$, temos que a área total do floco de neve é dada por

$$A_k = A + 3 \left[\frac{A}{9} + 4A \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 4^2 A \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots + 4^{k-1} A \left(\frac{1}{9}\right)^k \right],$$

$$A_k = A + \frac{3A}{4} \left[\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^k \right],$$

Tabela 2: Número de triângulos e área após n iterações

Iteração	N. de triângulos	Comprimento do lado	Área
0	1	1	$\frac{\sqrt{3}}{4}$
1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{9}$
2	4	$\frac{1}{3^2}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2$
3	4^2	$\frac{1}{3^3}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^3$
4	4^3	$\frac{1}{3^4}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
n	4^{n-1}	$\frac{1}{3^n}$	$\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^n$

fazendo $k \rightarrow +\infty$, temos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k = A + \frac{3A}{4} \cdot \frac{4}{9} \left[\frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right] = A + \frac{A}{3} \cdot \frac{9}{5} = \frac{8A}{5}.$$

Usando a série geométrica verificamos a notável propriedade da curva de Koch, que possui perímetro infinito e área finita igual à $\frac{2\sqrt{3}}{5}$.

■

Exemplo 6. O significado da representação decimal de um número $0, d_1 d_2 d_3 \dots$, com $d_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ é que

$$0, d_1 d_2 d_3 \dots = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots, \quad (17)$$

essa série é sempre convergente, já que

$$\begin{aligned}
 0, d_1 d_2 d_3 \dots &= \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \dots \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \dots \\
 &\leq \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) = 1.
 \end{aligned}$$

A sequência das somas parciais é monótona e limitada, logo converge segundo o Teorema 3.

■

Podemos ampliar o domínio da série geométrica aos complexos, esse fato nos fornece ferramentas para calcular somas de séries cujo termo geral dependem diretamente de termos trigonométricos, como nos exemplos a seguir. Ver [4] para mais detalhes sobre o assunto.

Quanto às séries na forma complexa, tomando $z_n = a_n + b_n i$, temos que a série $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$ converge se, e somente se, as séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ forem convergentes. Segundo [11], a convergência de séries de números complexos pode ser testada aplicando os critérios usuais do Cálculo às suas partes real e imaginária.

Exemplo 7. Vamos calcular a soma das séries

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos ny, \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin ny, \quad (18)$$

para $|x| < 1$.

Inicialmente, vamos testar a convergência da série simplesmente observando que $|x^n \cos ny| \leq |x^n|$, isso nos leva a concluir pelo Corolário 1 que (18a) é absolutamente

convergente caso $|x| < 1$ e por consequência é convergente neste mesmo intervalo pelo Teorema 8. O mesmo argumento se aplica em (18b).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos ny &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{Re}(e^{nyi}) = \operatorname{Re} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{yi})^n \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{1 - xe^{yi}} \right] \\ &= \frac{1 - x \cos y}{x^2 - 2x \cos y + 1}, \quad |x| < 1, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

De forma semelhante obtemos a soma (18b).

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin ny &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \operatorname{Im}(e^{nyi}) = \operatorname{Im} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} (xe^{yi})^n \right] = \operatorname{Im} \left[\frac{1}{1 - xe^{yi}} \right] \\ &= \frac{x \sin y}{x^2 - 2x \cos y + 1}, \quad |x| < 1, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

■

De acordo com [4], as séries (18a) e (18b) ocorrem na teoria do interferômetro de Fabry-Perot.

Exemplo 8. *Através das somas expostas no Exemplo 7, podemos determinar de forma simples outras somas, como*

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^2 ny, \quad b) \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin^2 ny, \quad (19)$$

para $|x| < 1$.

Para (19a), basta observarmos que a mesma converge absolutamente e

$$\cos^2 ny = \frac{1 + \cos 2ny}{2},$$

assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos^2 ny &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \left(\frac{1 + \cos 2ny}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \cos 2ny \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1 - x \cos 2y}{x^2 - 2x \cos 2y + 1} \right), \quad |x| < 1, \quad y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

□

Em (19b), procedemos de forma semelhante substituindo a identidade $\sin^2 ny = 1 - \cos^2 ny$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \sin^2 ny = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1 - x \cos 2y}{x^2 - 2x \cos 2y + 1} \right), \quad |x| < 1, \quad y \in \mathbb{R}.$$

■

1.2 Série Harmônica

Os termos da seguinte sequência são chamados de números harmônicos.

$$H_m = \sum_{n=1}^m \frac{1}{n}. \quad (20)$$

Com $m \rightarrow +\infty$ a série é chamada de harmônica. Esta é divergente, fato esse que pode ser concluído pelo agrupamento dos termos de índice 2^k sem nenhuma alteração de ordem. Observe que

$$\begin{aligned}
H_1 &= 1 \\
H_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
H_4 &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
H_8 &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2} \\
&\vdots \\
H_{2^k} &\geq 1 + \frac{k}{2},
\end{aligned}$$

isso mostra que $H_{2^k} \rightarrow +\infty$.

■

Segundo [5], a demonstração acima é atribuída a Osmere¹ e foi a primeira na história da matemática.

A divergência da série harmônica é bastante lenta; para se ter noção, a soma S de seus 10^{100} primeiros termos é tal que $230 < S < 231$.

A sequência H_m de números harmônicos está presente na definição da constante γ de Euler-Mashcheroni, definida por

$$\gamma = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n=1}^m H_n - \ln n \right). \quad (21)$$

As dez primeiras casa decimais de γ são 0,5772156649. Nas próximas seções são apresentadas algumas séries envolvendo o número harmônico H_m .

As variações da série harmônica como na família

$$H^{(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (22)$$

são chamadas de séries hiper-harmônicas ou p-séries. Algumas somas envolvendo (22) são apresentadas na Seção 3.

¹Nicole Osmere, Paris (1323 - 1382)

1.3 Séries Telescópicas

As séries telescópicas possuem termos no formato

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \quad (23)$$

e suas somas podem ser obtidas através do cancelamento sucessivo de termos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^m (b_n - b_{n+1}) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_m - b_{m+1}) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (b_1 - b_{m+1}). \end{aligned} \quad (24)$$

■

Exemplo 9. A série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} [\arctan(n) - \arctan(n+1)] \quad (25)$$

é uma série telescópica como (24),

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} [\arctan(n) - \arctan(n+1)] &= \lim_{m \rightarrow +\infty} (\arctan 1 - \arctan(m+1)) \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

A série (25) converge à $-\frac{\pi}{4}$ sendo a função tangente com domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

■

Exemplo 10. *Seja a sequência de Fibonacci definida em (1), consideremos a série (26) envolvendo esses termos*

$$F = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}}. \quad (26)$$

O termo geral da série pode ser escrito como frações parciais,

$$\frac{1}{f_{n-1}f_{n+1}} \cdot \frac{f_n}{f_n} = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{f_{n-1}f_{n+1}f_n} = \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}}, \quad (27)$$

mostrando assim que (26) é uma série telescópica. Daí

$$\begin{aligned} F &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{f_{n-1}f_n} - \frac{1}{f_n f_{n+1}} \\ &= \left(\frac{1}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_2 f_3} \right) + \left(\frac{1}{f_2 f_3} - \frac{1}{f_3 f_4} \right) + \dots = \frac{1}{f_1 f_2} = 1. \end{aligned}$$

■

Considere

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad (28)$$

essa série é um exemplo clássico de séries telescópicas e foi usada pelo alemão Leibniz² em 1676 para provar que a soma dos recíprocos dos números triangulares³ é 2, escrevendo astuciosamente cada termo como soma de duas frações; ver [5] para mais detalhes.

²Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

³Os números triangulares são da forma $\frac{n(n+1)}{2}$

A série (28) pode ser representada geometricamente como a soma infinita dos diâmetros de círculos como mostramos a seguir.

Exemplo 11. (Adaptado de [13]) Considere dois círculos A e B , ambos de raio 1 tangentes em P e r uma reta tangente em comum como na Figura 3. C_1 é o círculo tangente à A , B e r ; C_2 é tangente à A , B e C_1 ; C_3 é tangente à A , B e C_2 . Repetindo o procedimento sucessivamente produzimos uma sequência infinita de círculos C_n com diâmetros

$$d_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad (29)$$

deduzidos através do teorema de pitágoras. Assim, temos a soma infinita dos diâmetros igual ao raio dos círculos A e B .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = 1. \quad (30)$$

■

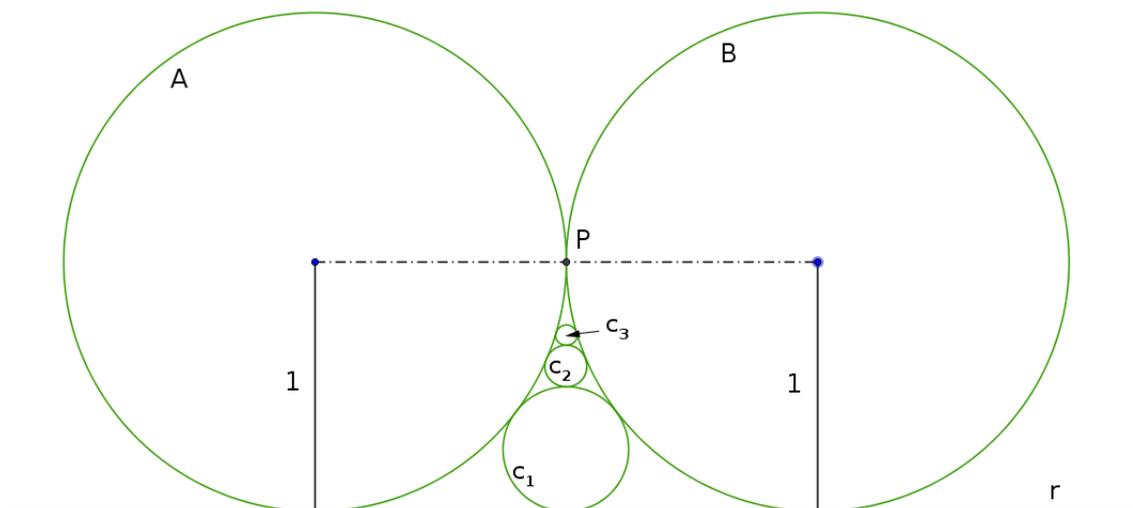


Figura 3: Construção geométrica da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Podemos generalizar séries no formato de (28) criando famílias de séries, como a seguir

$$T_1(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} = \frac{1}{1+a}. \quad (31)$$

Esse resultado pode ser obtido da mesma forma que (24) através da análise das frações parciais dos termos

$$\frac{1}{(k+a)(k+a+1)} = \frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+a+1}. \quad (32)$$

A seguir a demonstração de (31) por indução:

i) Para $a = 0$, temos por (32) e (24) respectivamente que

$$T_1(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{m+1} \right) = 1. \quad (33)$$

ii) Tomando como hipótese a equação (31) e fazendo o passo da indução,

$$\begin{aligned} T_1(a+1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a+1)(n+a+2)} \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} + \left(\overbrace{\frac{1}{(a+1)(a+2)}}^{n=1} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)(n+a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} \\ &= \underbrace{\frac{1}{a+1}}_{\text{Hipótese}} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{1}{a+2} = \frac{1}{(a+1)+1}. \end{aligned}$$

Concluimos por indução que (31) é verdadeira.

■

Outras famílias de séries cujas somas podem ser obtidas através da análise das frações parciais dos termos são

$$T_2(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+a)} = \frac{1}{a \cdot a!}, \quad (34)$$

$$T_3(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+a)} = \frac{H_a}{a}. \quad (35)$$

H_a é o número harmônico (20).

□

Exemplo 12. *A convergência da série hiper-harmônica com $p = 2$ pode ser verificada por comparação com (28).*

$$H^{(2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (36)$$

Observe que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2},$$

comparando termo a termo,

$$1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2,$$

temos $H^{(2)} \leq 2$. Como suas somas parciais formam uma sequência monótona e limitada, concluímos pelo Corolário 1 que (36) é convergente.

■

Boyer [5] afirma que em 1748, Euler publicou o texto *Introductio in analysin infinitorum*, em dois volumes e em um deles versava sobre processos infinitos, onde apresentou uma demonstração para o cálculo de $H^{(2)}$ concluindo que $H^{(2)} = \frac{\pi^2}{6}$. Adiante entraremos em detalhes sobre este resultado.

Exemplo 13. Em geral $H^{(p)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ converge somente se $p > 1$.

Consideremos por conveniência as somas parciais $H_{2^k-1}^{(p)}$, então

$$H_{2^k-1}^{(p)} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) + \cdots + \frac{1}{(2^k - 1)^p},$$

logo

$$H_{2^k-1}^{(p)} < 1 + \frac{2}{2^p} + \frac{4}{4^p} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^{(k-1)p}} = \sum_{n=0}^{k-1} \left(\frac{2}{2^p}\right)^n. \quad (37)$$

Se $p > 1$, temos em (37) $x = \frac{2}{2^p} < 1$ e a série $H^{(p)}$ é convergente por comparação com a série geométrica quando $k \rightarrow +\infty$.

Se $p = 1$, temos a série harmônica que mostramos ser divergente.

Se $p = 0$ temos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} 1$ divergente.

Se $p < 0$, temos a série $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{|p|}$ divergente.

Se $0 < p < 1$, temos para $n > 1$,

$$\frac{1}{n^p} > \frac{1}{n},$$

segue que a série $H^{(p)}$ diverge por comparação com a série harmônica. ■

1.4 Testes de convergência

Nem todas as séries possuem soma expressa de forma simples, e em alguns casos é quase impossível determinar tais somas, porém existem alguns critérios para no mínimo determinar se a série converge ou não além dos já apresentados.

Teorema 11. (*Leibniz*) *Se a série alternada*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

for tal que $a_{n+1} \leq a_n$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \rightarrow 0$, então a série é convergente.

Ver demonstração em [13].

■

Teorema 12. (*Teste da razão de D'Alembert*) *Seja a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e o limite*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow L.$$

- i) Se $L < 1$, então a série é absolutamente convergente;*
- ii) Se $L > 1$, então a série é divergente;*
- iii) Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.*

A demonstração é baseada na comparação com a série geométrica a qual conhecemos o comportamento. Nesse sentido, iremos construir de forma conveniente a seguinte situação.

i) Consideremos R tal que $L \leq R < 1$; existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ tenhamos $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq R$ e conseqüentemente

$$|a_{n+1}| \leq |a_n| \cdot R,$$

colocando n igual a $n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots, n_0 + k$,

$$|a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0}| \cdot R$$

$$|a_{n_0+2}| \leq |a_{n_0+1}| \cdot R \leq |a_{n_0}| \cdot R^2$$

$$|a_{n_0+3}| \leq |a_{n_0+2}| \cdot R \leq |a_{n_0}| \cdot R^3,$$

segue que

$$|a_{n_0+k}| \leq |a_{n_0+k-1}| \cdot R \leq \dots \leq |a_{n_0}| \cdot R^k,$$

daí,

$$\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |a_k| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{n_0+k}| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |a_{n_0}| \cdot R^k = \frac{|a_{n_0}|}{1-R}.$$

Concluimos pelo Corolário 1 que a série $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |a_k|$ é convergente, portanto $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} a_k$ é absolutamente convergente implicando a convergência absoluta de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ já que retirar um número finito de termos de uma série não altera sua convergência.

ii) Se $L \geq R > 1$, pelo mesmo argumento do item anterior concluimos que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ diverge.

Concluimos o item (iii) ao testar as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ que sabemos ser divergente e convergente respectivamente. Em ambos os casos temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \rightarrow 1,$$

e assim o teste é inconclusivo. ■

Teorema 13. (*Teste da raiz de Cauchy*) Seja a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e o limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow L.$$

- i) Se $L < 1$, então a série é absolutamente convergente;
- ii) Se $L > 1$, então a série é divergente;
- iii) Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Consideremos $L \leq R < 1$. Como $\sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow L$, existe n_0 tal que para $n \geq n_0$ tenhamos $\sqrt[n]{|a_n|} \leq R$, daí

$$|a_n| \leq R^n,$$

concluimos que a convergência da série geométrica implica a convergência absoluta da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ e a divergência ($R \geq L > 1$) da série geométrica implica a divergência da série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Da mesma forma que na demonstração do Teorema 12, concluimos o item (iii) ao testar as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ que sabemos ser divergente e convergente respectivamente. Em ambos os casos temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1,$$

e assim o teste é inconclusivo. ■

Vários outros testes podem ser aplicados para a determinação do comportamento das séries infinitas, por exemplo os testes da integral, de Kummer, de Raabe e de Gauss. Estes, não menos importantes não serão trabalhados simplesmente por nosso objetivo ser o cálculo de somas e não apenas a análise da convergência, porém podem ser encontrados em [4] e [9].

2 Séries de Funções

Nesta seção, nosso interesse é generalizar casos como os da seção anterior para séries do tipo

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x), \quad (38)$$

que se comportam de forma semelhante para alguns $x \in I$. Temos agora somas de seqüências definidas por funções convergindo à funções, sendo I chamado de intervalo de convergência.

Exemplo 14. A seqüência de funções $f_n(x) = x^n$ converge à $f(x) = 0$ se $|x| < 1$ e $f(1) = 1$, já que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0, \quad |x| < 1,$$

e

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1^n = 1.$$

Uma seqüência $s_n = f_n(k)$ com $x \in [0, 1)$ converge à zero e pode ser representada pelo gráfico da Figura 4.

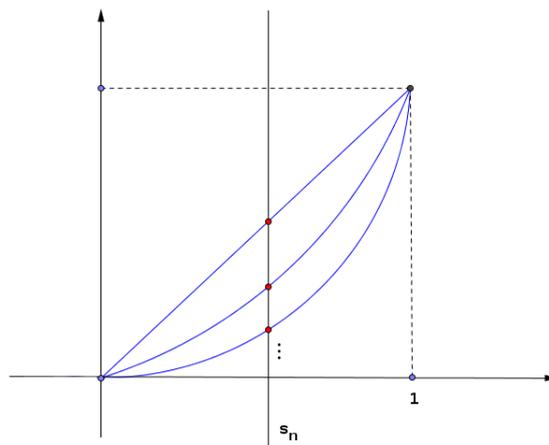


Figura 4: Representação da seqüência $s_n = k^n$ com $0 \leq k < 1$

E como mostrado na seção anterior, a série (geométrica) formada pela soma dos termos da sequência $f_n(x) = x^n$ converge à $F(x) = \frac{1}{1-x}$ caso $|x| < 1$.

■

Definição 5. Uma sequência de funções $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente à uma função $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ se

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}; n > N_\epsilon \Rightarrow |f_n(x) - F(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in I$. Se uma sequência não é uniformemente convergente, então é dita simplesmente convergente ou pontualmente convergente.

Exemplo 15. A sequência $f_n(x) = x^n \rightarrow 0$, $|x| < 1$ e $f_n(1) = 1$ não é uniformemente convergente.

Basta tomar $\epsilon = \frac{1}{10}$ por exemplo, e observar que existe $x \in (-1, 1)$ tal que para todo $n > N_\epsilon$ temos

$$|f_n(x) - 0| \geq \frac{1}{10} \Rightarrow x^n \geq \frac{1}{10},$$

assim, se $x \rightarrow 1^-$ então $x^n \rightarrow 1 \geq \frac{1}{10}$.

■

2.1 Séries de Potências

Definição 6. Uma série de potência centrada em a é da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots, \quad (39)$$

e possui coeficientes a_i 's constantes. Sua soma é uma função de domínio chamado intervalo de convergência formado pelo conjunto de todos x tais que a série convirja.

Um exemplo básico de série de potência é a série geométrica

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

que mostramos convergir se, e somente se, $|x| < 1$.

Teorema 14. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge em $c \neq 0$, então converge absolutamente para todo x tal que $|x-a| < |c|$.

Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ converge, então pelo Teorema 6 temos $a_n(x-a)^n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow +\infty$. Então existe um n_0 tal que para todo $n > n_0$ tenhamos

$$|a_n(x-a)^n| < 1$$

assim,

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n c^n| \cdot \left| \frac{x-a}{c} \right|^n < \left| \frac{x-a}{c} \right|^n.$$

De onde concluímos que a convergência de $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n(x-a)^n|$ pode ser verificada por comparação com a série geométrica; esta por sua vez converge se $\left| \frac{x-a}{c} \right| < 1$ e consequentemente $|x-a| < |c|$. ■

Segue desse teorema que existe um número positivo R tal que a série converge para $|x-a| < R$ e diverge caso $|x-a| > R$. Chamamos R de *raio de convergência*.

Em geral, o raio de convergência pode ser encontrado usando o teste da razão ou algumas vezes o da raiz.

Exemplo 16. Vamos determinar o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$.

Pelo teste da razão temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{(n+1)x^n}{nx^{n-1}} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)}{n} = |x|,$$

logo, $|x| < 1$ para que a série seja absolutamente convergente. ■

Teorema 15. (Abel.) Seja $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ com raio de convergência R finito e positivo. Se $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$ converge, então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ converge uniformemente no intervalo $[0, R]$. Em particular temos

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n.$$

Ver demonstração em [9]. ■

De acordo com [9], as mesmas conclusões do Teorema de Abel valem com $-R$ em lugar de R . Bastando tomar a série $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n x^n$.

2.2 Substituição, diferenciação e integração dos termos de uma série

O foco do trabalho é determinar somas de séries infinitas, assim apresentamos a seguir como representar certos tipos de funções como séries infinitas através da

manipulação de séries geométricas (séries de potências em geral) através da diferenciação, integração ou substituição de seus termos.

Exemplo 17. *Vamos determinar a soma da série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$.*

Nesse caso, basta observarmos que a série é semelhante a série geométrica. Temos

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-x}{2} \right)^n,$$

assim, fazendo a substituição de x por $\left(\frac{-x}{2} \right)$ segue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2+x}.$$

O raio de convergência pode ser avaliado pelos testes da razão ou raiz, porém podemos de forma mais simples fazer a mesma substituição em $|x| < 1$ de onde concluímos que

$$\left| -\frac{x}{2} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad |x| < 2.$$

■

Teorema 16. *Se a série de potências $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ possuir raio de convergência $R > 0$, então a função f é diferenciável e portanto contínua no intervalo $(a-R, a+R)$ e*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1}, \quad (40)$$

$$\int f(x)dx = c + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}, \quad (41)$$

ambas com raio de convergência R .

Ver demonstração e exemplos em [4] e [9].

■

Exemplo 18. Derivando a série geométrica obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad (42)$$

que mostramos no Exemplo 16 ser convergente para $|x| < 1$.

Analisando o padrão das derivadas sucessivas conclui-se (43).

$$\frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{(-1)^{m+1} m!}{(x-1)^{m+1}}, \quad |x| < 1. \quad (43)$$

A verificação se faz por indução.

i) Para $m = 1$, temos

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{(-1)^{1+1} 1!}{(x-1)^{1+1}} = \frac{1}{(x-1)^2},$$

que é verdadeira, como vimos anteriormente.

ii) Tomando (43) como hipótese, segue pelo passo da indução

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{d}{dx} \overbrace{\left(\frac{d^m}{dx^m} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)}^{\text{hipótese}} = \frac{d}{dx} \left[\frac{(-1)^{m+1} m!}{(x-1)^{m+1}} \right],$$

pela derivada do quociente, segue

$$\frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{-(-1)^{m+1} m! (m+1) (x-1)^m}{(m-1)^{2m+2}} = \frac{(-1)^{m+2} (m+1)!}{(x-1)^{m+2}},$$

assim, concluimos por indução que (43) é verdadeira. ■

Exemplo 19. *O Teorema 16 não vale para todas as séries de funções, por exemplo a série trigonométrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n!x)}{n^2}$ converge para todo x , mas sua derivada $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cos(n!x)}{n^2}$ diverge para todo $x \neq \frac{(2k-1)\pi}{2}$.*

Exemplo 20. *Integrando a série geométrica de centro em $x = 0$ concluimos que*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x), \quad |x| < 1. \quad (44)$$

Note que (44) é absolutamente convergente no intervalo $|x| < 1$. Em especial, para $x = -1$ temos a soma da série harmônica alternada que sabemos ser convergente pelo Teorema 11. Pelo Teorema 15 segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2. \quad (45)$$

Já para $x = 1$, temos a série harmônica que sabemos ser divergente.

Podemos ainda fazer a substituição de x por $-x$ em (44) obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \ln(1+x), \quad |x| < 1, \quad (46)$$

somando as séries (44) e (46) encontramos a série de potências para $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ em $|x| < 1$.

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[(-1)^{n+1} + 1] x^n}{n} = 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}. \quad (47)$$

■

Exemplo 21. Observando que $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$ usamos a substituição de x por $-x^2$ na série geométrica para determinar

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad |x| < 1,$$

integrando obtemos

$$\arctan(x) + c = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

fazendo $x = 0$, segue que $c = 0$, assim,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1, \quad (48)$$

observe que para $x = \pm 1$ a série é convergente.

Stewart [13] afirma que a série (48) é chamada de *série de Gregory*, em homenagem ao matemático escocês James Gregory (1638-1675), que antecipou algumas das descobertas de Newton⁴.

⁴Isaac Newton, Reino Unido (1643-1727)

Se $x = 1$ temos

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots,$$

que é conhecido como a fórmula de Leibniz para π .

Outra relação interessante pode ser obtida ao substituir x por $-ix$ em (47), conclui-se que

$$\arctan(x) = \frac{i}{2} \ln \left(\frac{1 - ix}{1 + ix} \right).$$

■

Exemplo 22. Sendo H_n o número harmônico definido na Seção 1.2, vamos mostrar que $\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ converge, determinar o intervalo de convergência e sua soma nesse intervalo.

Pelo teste da razão, temos

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{H_{n+1} x^{n+1}}{H_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{nH_n} + 1 \right) = |x|,$$

logo, $|x| < 1$ para que a série seja absolutamente convergente e pelo Teorema 9, podemos reordenar os termos de maneira que a soma não será alterada. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n \\
&= x + \left(1 + \frac{1}{2}\right) x^2 + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}\right) x^m + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} x^n + \frac{1}{3} \sum_{n=3}^{+\infty} x^n + \cdots + \frac{1}{m} \sum_{n=m}^{+\infty} x^n + \cdots \\
&= x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{x^2}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \frac{x^3}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \cdots + \frac{x^m}{m} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{1-x}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.
\end{aligned}$$

Pelo Exemplo 20, concluímos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, \quad |x| < 1. \quad (49)$$

■

2.3 Série de Taylor

Um resultado importante do Teorema 16 nos fornece uma ferramenta para representar funções como séries de potências apenas conhecendo suas derivadas. A função $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, definida por uma série de potências, possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do seu intervalo de convergência e suas derivadas sucessivas podem ser calculadas por derivação termo a termo. Assim, para $|x-a| < R$ e $k \in \mathbb{N}$ arbitrários, tem-se

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n (x-a)^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$, de modo que a série de potências que converge para $f(x)$ com $|x - a| < R$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n,$$

que é a série de Taylor de f em torno de a . A série de Taylor em torno de $a = 0$ é chamada de série de Maclaurin.

Exemplo 23. *Vamos determinar uma série de potências que representa $f(x) = e^x$ em torno de $a = 0$.*

Temos as derivadas $f^{(k)}(x) = e^x$, logo $f^{(k)}(0) = 1$, assim

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}. \quad (50)$$

Através do teste da razão, podemos determinar o raio de convergência da série (50),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right) = 0 < 1,$$

que converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

■

Várias outras séries podem ser determinadas dessa maneira, de forma análoga ao Exemplo 23, podemos determinar séries que representam as funções $\sin x$, $\cos x$ e outras.

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (51)$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (52)$$

$$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (53)$$

$$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (54)$$

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{m}{n} x^n, \quad m, x \in \mathbb{R}. \quad (55)$$

Usando as séries de potências (50), (51) e (52) podemos verificar que

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x),$$

que nos fornece a interessante relação

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

ao fazer $x = \pi$.

Ainda, através de (53) e (54) podemos chegar às relações

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Várias outras identidades podem ser deduzidas ao manipular séries de potências.

2.4 Série de Fourier

Nesta seção usamos alguns conceitos de Álgebra Linear para mostrar que projeções ortogonais podem ser usadas para aproximar certos tipos de funções por séries trigonométricas da forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (56)$$

2.4.1 Aproximações de f em $[0, 2\pi]$

Considere uma função f contínua em um intervalo $[a, b]$, queremos a melhor aproximação de f entre todas as funções de um subespaço V de $C[a, b]$. Consideremos a soma parcial $s_m(x)$ de (56), o problema é determinar coeficientes a_n e b_n tais que $s_m(x)$ seja combinação linear de $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ com $n = 0, 1, \dots, m$; que são linearmente independentes e formam uma base de um subespaço de dimensão $2m + 1$ de $C[a, b]$.

Precisamos quantificar de alguma maneira o erro resultante da aproximação. Por conveniência usa-se o erro quadrático médio por tornar possível usar a teoria dos espaços com produto interno.

Teorema 17. *Se f for uma função contínua em $[a, b]$ e V um subespaço de dimensão finita de $C[a, b]$, então a função g em V que minimiza o erro quadrático médio*

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx,$$

é $g = \text{proj}_V f$, sendo a projeção ortogonal em relação ao produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Dizemos que a função $g = \text{proj}_V f$ é a aproximação de mínimos quadrados de f em V .

Ver demonstração em [1].

■

Vamos encontrar a aproximação de mínimos quadrados de uma função $f(x)$ contínua em $[0, 2\pi]$ por $s_m(x)$. Pelo Teorema 17, a aproximação de f em $C[0, 2\pi]$ é a projeção ortogonal de f em $C[0, 2\pi]$.

Teorema 18. *Seja V um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno W . Se $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ for uma base ortonormal de V e u um vetor qualquer de W , então*

$$\text{proj}_V u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_n \rangle v_n.$$

Ver demonstração em [1].

■

Pelo Teorema 18, para determinar a projeção ortogonal de f em $C[0, 2\pi]$ devemos encontrar uma base ortonormal g_0, g_1, \dots, g_{2m} de $C[0, 2\pi]$ fazendo

$$\text{proj}_{C[0, 2\pi]} f = \langle f, g_0 \rangle g_0 + \langle f, g_1 \rangle g_1 + \dots + \langle f, g_{2m} \rangle g_{2m}, \quad (57)$$

que pode ser obtida pelo processo de Gram-Schmidt considerando os vetores de base $\cos(nx)$ e $\sin(nx)$ com $n = 0, 1, \dots, m$; e produto interno

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx.$$

Os cálculos nos levam a base ortonormal

$$\begin{aligned}
g_0 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi}, & g_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \cos(x), \dots, & g_m &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \cos(mx), \\
g_{m+1} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \sin(x), \dots, & g_{2m} &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \sin(mx),
\end{aligned}
\tag{58}$$

fazendo

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \langle f, g_0 \rangle, & a_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_1 \rangle, \dots, & a_m &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_m \rangle, \\
b_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_{m+1} \rangle, \dots, & b_m &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_{2m} \rangle,
\end{aligned}
\tag{59}$$

temos

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \langle f, g_0 \rangle = \frac{\sqrt{2\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sqrt{2\pi}}{2\pi} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx, \\
a_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_1 \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \cos(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(x) dx, \\
&\vdots \\
a_m &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_m \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \cos(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(mx) dx, \\
b_1 &= \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_{m+1} \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \sin(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(x) dx,
\end{aligned}$$

⋮

$$b_m = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \langle f, g_{2m} \rangle = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \sin(mx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(mx) dx,$$

generalizando, temos

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx, \quad (60)$$

a_n e b_n são chamados de coeficientes de Fourier de f e no intervalo $[0, 2\pi]$.

Substituindo (58) em (57), segue

$$f(x) \approx \text{proj}_{C[0,2\pi]} f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^m a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx). \quad (61)$$

Pode-se ainda demonstrar que para $m \rightarrow +\infty$ o erro quadrático médio tende a zero, levando a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx), \quad (62)$$

que é a série de Fourier de f no intervalo $[0, 2\pi]$ com coeficientes (60).

2.4.2 Mudança de Intervalo

Definimos a série de Fourier restrita a um intervalo de comprimento 2π , porém essa restrição pode ser estendida de forma simples ao substituir x em (60) e (62) por $\frac{\pi x}{L}$, fazendo assim por conveniência o intervalo ser deslocado para $-\pi \leq x \leq \pi$. [4] afirma que a escolha do intervalo simétrico não é essencial, para $f(x)$ periódica com um período $2L$, qualquer intervalo $(x_0, x_0 + 2L)$ servirá, sendo a escolha uma questão de pura conveniência.

Temos então a série de Fourier no intervalo $[-L, L]$ dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (63)$$

com coeficientes

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \quad (64)$$

A vantagem de se usar o intervalo simétrico está relacionada com as integrais de funções pares e ímpares, que possuem as seguintes propriedades em um dado intervalo $[-L, L]$,

$$\int_{-L}^L f_p(x) dx = 2 \int_0^L f_p(x) dx,$$

$$\int_{-L}^L f_i(x) dx = 0,$$

sendo f_p uma função par e f_i uma função ímpar.

Exemplo 24. *Vamos determinar a Série de Fourier para $f(x) = x^2$ em $[-\pi, \pi]$.*

Inicialmente calculamos os coeficientes a_n e b_n , assim

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}, \quad (65)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx,$$

observe que $g(x) = x^2 \cos(nx)$ é uma função par, logo

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx, \quad (66)$$

resolvendo (66) por partes reduzimos a integral para

$$a_n = -\frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{x \sin(nx)}{n} dx$$

daí,

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{4}{n\pi} \left[-\frac{x \cos(nx)}{n} + \int \frac{\cos(nx)}{n} dx \right]_0^{\pi} \\ &= -\frac{4}{n^2\pi} \left[-x \cos(nx) + \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi}, \end{aligned}$$

finalmente,

$$a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}. \quad (67)$$

Note que a função $h(x) = x^2 \sin(nx)$ é ímpar, então $b_n = 0$. Substituindo (65) e (67) na série trigonométrica de fourier, temos a série de fourier para $f(x) = x^2$ no

intervalo $[-\pi, \pi]$.

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}. \quad (68)$$

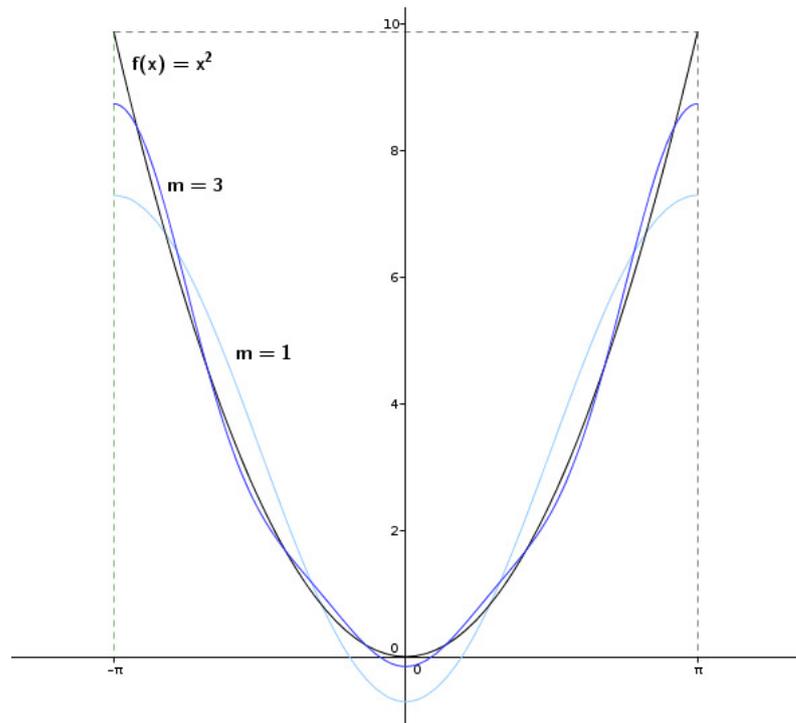


Figura 5: Aproximações de $f(x) = x^2$ pela série de Fourier

Na (figura 5) temos as aproximações de $f(x) = x^2$ pela soma parcial da série de fourier com $m = 1$ e $m = 3$.

■

Um fato curioso é que por “sorte” pode-se obter a soma de $H^{(2)}$ ao fazer $x = \pi$ como vemos a seguir

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(n\pi)}{n^2},$$

segue

$$4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi^2}{3},$$

levando a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (69)$$

Segundo [5], por volta de 1736 Euler usou a série de Taylor de $\sin(x)$ centrada em $a = 0$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

para encontrar a soma (69) usando elementos da teoria das equações algébricas. Dividindo a série por x , Euler usou $\sin(x) = 0$ como uma equação polinomial infinita

$$0 = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

substituindo $w = x^2$,

$$0 = 1 - \frac{w}{3!} + \frac{w^2}{5!} - \frac{w^3}{7!} + \dots$$

Da teoria das equações algébricas sabe-se que, se o termo constante é 1, a soma dos recíprocos das raízes é o oposto do coeficiente do termo linear, nesse caso $\frac{1}{3!}$. Além disso, as raízes da equação em x são $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$; logo as raízes da equação em w são $\pi^2, (2\pi)^2, (3\pi)^2, \dots$; daí

$$\frac{1}{3!} = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots,$$

finalmente

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .$$

□

Através da soma (69) podemos de forma simples obter a soma de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ ao observar que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{24} \quad (70)$$

e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}. \quad (71)$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{8}. \quad (72)$$

■

Existem vantagens nas representações de Fourier sobre as outras representações como a série de Taylor, um exemplo é a representação de funções descontínuas.

Exemplo 25. A expansão em série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi < x < 0 \\ x, & 0 < x < \pi \end{cases}$

é

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\pi n^2} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{\pi n} \sin(nx)$$

A série se iguala exatamente aos valores de $f(x)$ para $x \neq 0$; já em $x = 0$ o valor da série é $\frac{1}{2}$ como pode ser visto na (figura 6).

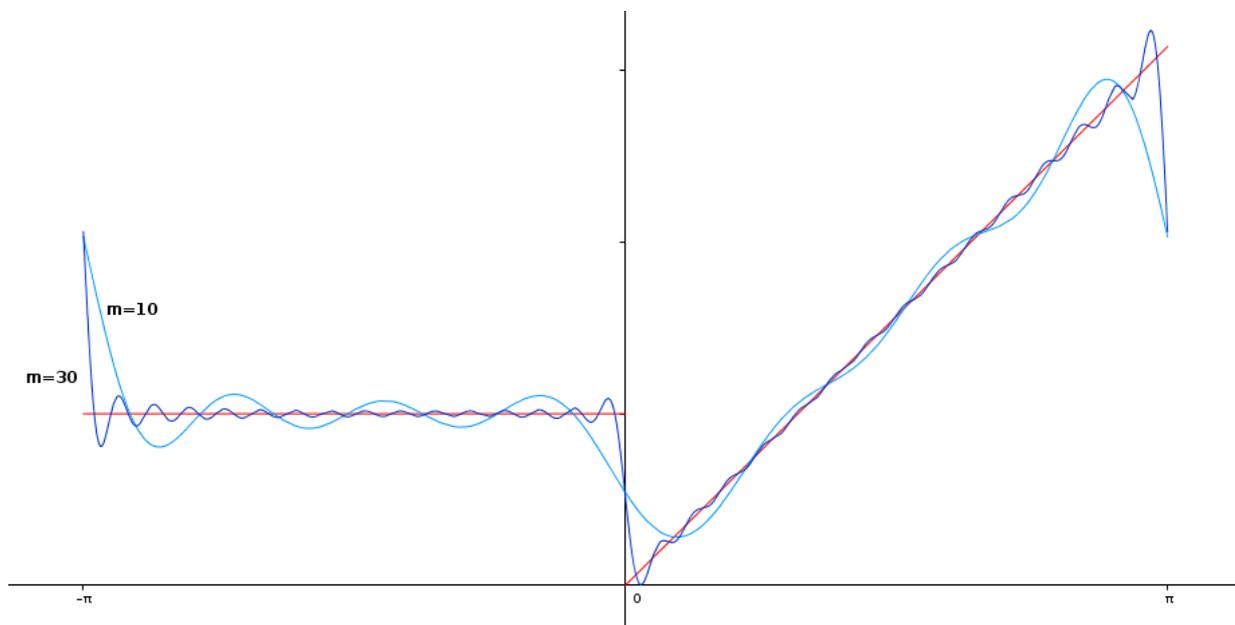


Figura 6: Aproximações pela série de Fourier para $f(x)$ do Exemplo 25

Teorema 19. *Se uma função f e sua derivada f' são contínuas por partes no intervalo $(-L, L)$, então f é igual à sua série de Fourier em todos os pontos de continuidade. Em um ponto c onde um salto de descontinuidade ocorre em f , a série de Fourier converge para a média*

$$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2},$$

onde $f(c^+)$ e $f(c^-)$ denotam os limites à direita e à esquerda respectivamente de f em c .

Ver demonstração em [6] ou em [15].

■

Exemplo 26. *Inumeras outras séries podem ter somas encontradas através da expansão de Fourier de outras funções, segue algumas*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \begin{cases} -\frac{\pi+x}{2}, & -\pi \leq x < 0 \\ \frac{\pi-x}{2}, & 0 \leq x < \pi \end{cases}, \quad (73)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin(nx)}{n} = \frac{x}{2}, \quad -\pi < x < \pi, \quad (74)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \end{cases}, \quad (75)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\ln \left[2 \sin \left(\frac{|x|}{2} \right) \right], \quad -\pi < x < \pi, \quad (76)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n} = -\ln \left[2 \cos \left(\frac{x}{2} \right) \right], \quad -\pi < x < \pi, \quad (77)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos[(2n+1)x]}{2n+1} = \frac{1}{2} \ln \left[\cot \left(\frac{|x|}{2} \right) \right], \quad -\pi < x < \pi, \quad (78)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \sin(2nx)}{4n^2 - 1} = \frac{\pi \cos(x)}{8}, \quad 0 < x < \pi. \quad (79)$$

Assim como nas séries de potências, pode-se derivar e integrar as séries de Fourier com certa cautela, essas questões são tratadas por [7] com detalhes.

Pode-se também reescrever a série de Fourier na forma complexa expressando $\cos nx$ e $\sin nx$ em forma exponencial, assim

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, \quad (80)$$

sendo

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, \quad (81)$$

e

$$c_0 = \frac{a_0}{2}. \quad (82)$$

3 A Função Zeta de Riemann

Ao tentar descobrir uma fórmula para calcular os números primos menores que n , Riemann se deparou com a série

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad (83)$$

hoje chamada de função zeta de Riemann.

Definição 7. (Segundo [4]) Os números de Bernoulli B_n são tais que

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!}, \quad |x| < 2\pi \quad (84)$$

Diferenciando essa série repetidas vezes e estabelecendo $x = 0$, obtemos

$$B_n = \left[\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \right]_{x=0} \quad (85)$$

Euler já havia estudado a função zeta para valores inteiros, e determinou as somas

$$\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1} B_{2p} (2\pi)^{2p}}{2(2p)!},$$

com $p \in \mathbb{N}$, relacionadas com os números de Bernoulli B_n , além de várias outras contribuições.

De acordo com [5], o tratamento imaginativo que Euler deu às séries levou-o a algumas notáveis relações entre a análise e a teoria dos números; uma de suas importantes descobertas foi (86).

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ primo}}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}. \quad (86)$$

Esse resultado pode ser obtido observando

$$\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \dots\right),$$

ao eliminar todos os termos $\frac{1}{n^{2k}}$ com $k \in \mathbb{N}$ e evidenciando $\left(1 - \frac{1}{3^s}\right)$, obtemos

$$\zeta(s) \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \left(1 - \frac{1}{3^s}\right) = \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} \dots\right) - \left(\frac{1}{3^s} + \frac{1}{9^s} + \frac{1}{15^s} + \dots\right),$$

fazendo o mesmo sucessivamente para $\left(1 - \frac{1}{5^s}\right), \dots, \left(1 - \frac{1}{p^s}\right), \dots$ sendo p primo, segue que

$$\zeta(s) \cdot \prod_{p \text{ primo}}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \rightarrow 1.$$

Daí o famoso produto que Euler usou para demonstrar através da divergência da série harmônica o teorema de Euclides sobre a existência de infinitos primos. Uma demonstração detalhada pode ser encontrada em [10].

Outra relação da função ζ com a teoria dos números é

$$\zeta(p)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{d(n)}{n^p}, \quad s > 1, \quad (87)$$

sendo $d(n)$ o número de divisores de n . Também temos

$$\zeta(p)\zeta(p-1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sigma(n)}{n^p}, \quad s > 2, \quad (88)$$

onde $\sigma(n)$ é a soma dos divisores de n .

Estas somas são obtidas através da convolução de Dirichlet,

$$(f \cdot g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{ab=n} f(a)g(b),$$

uma operação definida para funções aritméticas. Mais informações tais como definições e teoremas sobre o assunto podem ser encontradas em [3].

3.1 Somas de $H_n^{(-p)}$ para $p \in \mathbb{Z}_+$

Vimos no Exemplo 13 que $H^{(p)}$ diverge para $p \leq 1$, porém podemos definir um padrão de comportamento para as somas parciais quando $p \in \mathbb{Z}_-$. Denotemos as seqüências das somas parciais de $H^{(p)}$ por $H_n^{(p)}$. Assim,

$$H_n^{(-p)} = \sum_{k=1}^n k^p, \quad p \in \mathbb{Z}_+. \quad (89)$$

Inicialmente, observemos os seguintes exemplos:

Exemplo 27.

a) Em (89), se $p = 0$ temos

$$H_n^{(0)} = \overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n \text{ vezes}} = n.$$

b) Se $p = 1$, $H_n^{(-1)}$ é uma progressão aritmética de razão $r = 1$,

$$H_n^{(-1)} = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-2) + (n-1) + n,$$

de onde concluímos que $H_n^{(-1)} = \frac{n(n+1)}{2}$.

■

Note que $H_n^{(0)}$ e $H_n^{(-1)}$ são polinômios de graus 1 e 2 respectivamente. Seriam todas as somas parciais $H_n^{(-p)}$ com $p \in \mathbb{Z}_+$ polinômios de graus $p+1$? A resposta é sim!

Teorema 20. *Se $p \in \mathbb{Z}_+$, então as somas parciais $H_n^{(-p)}$ são polinômios de graus $p+1$ em n .*

Inicialmente observemos a expansão binômial,

$$(k+1)^{p+2} = k^{p+2} + (p+2)k^{p+1} + f(k). \quad (90)$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^n (k+1)^{p+2} = \sum_{k=1}^n k^{p+2} + (p+2) \sum_{k=1}^n k^{p+1} + g(n),$$

retirando termos das somas, temos

$$(n+1)^{p+2} + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{p+2} = 1 + \sum_{k=2}^n k^{p+2} + (p+2) \sum_{k=1}^n k^{p+1} + g(n),$$

$$(n+1)^{p+2} + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{p+2} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k+1)^{p+2} + (p+2) \sum_{k=1}^n k^{p+1} + g(n),$$

daí,

$$(n+1)^{p+2} = 1 + (p+2) \sum_{k=1}^n k^{p+1} + g(n),$$

enfim,

$$\sum_{k=1}^n k^{p+1} = \frac{(n+1)^{p+2} - 1 - g(n)}{p+2}, \quad (91)$$

deixando evidente que $H_n^{(-p-1)}$ é de grau $p+2$, concluindo a demonstração. ■

Exemplo 28. Encontrando as somas parciais de $\sum_{k=1}^n k^2$.

Pelo Teorema 20, sabemos que $H_n^{(-2)}$ possui grau 3 em n , então:

$$H_n^{(-2)} = an^3 + bn^2 + cn + d.$$

fazendo n igual à 1, 2, 3 e 4, obtemos o sistema linear

$$\begin{cases} a + b + c + d = 1 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{cases}$$

com solução

$$(a, b, c, d) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0 \right),$$

assim,

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

■

Em geral, podemos obter a soma de $H_n^{(-p)}$ para $p \in \mathbb{Z}_+$, resolvendo o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 2^{p+1} & 2^p & 2^{p-1} & \dots & 2^0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ (p+2)^{p+1} & (p+2)^p & (p+2)^{p-1} & \dots & (p+2)^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{p+1} \\ c_p \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(-p)} \\ H_2^{(-p)} \\ \vdots \\ H_{p+2}^{(-p)} \end{bmatrix}$$

de ordem $p+2$ onde c_i , com $i = 0, 1, \dots, p+1$ são os coeficientes do polinômio de grau $p+1$ em n .

Alhazen (965-1039) usou argumentos geométricos para calcular essas somas através de áreas de retângulos.

3.2 Somas de $\zeta(2p)$, $p \in \mathbb{N}$

Vimos no Exemplo 24 da Seção 2.4 que pela série de Fourier da função $f(x) = x^2$ no intervalo $[-\pi, \pi]$ podemos definir a soma de $\zeta(2)$. O fato é que ao fazer o mesmo para $f(x) = x^4$ obtemos $\zeta(4)$. Os coeficientes são

$$a_0 = \frac{2\pi^4}{5}, \quad a_n = \frac{8\pi^2(-1)^n}{n^2} - \frac{48(-1)^n}{n^4} \quad \text{e} \quad b_n = 0,$$

e a série de Fourier para $f(x) = x^4$ em $[-\pi, \pi]$ é

$$f(x) = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{8\pi^2(-1)^n}{n^2} - \frac{48(-1)^n}{n^4} \right) \cos(nx), \quad (92)$$

ao fazer $x = \pi$ concluímos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}. \quad (93)$$

Isso nos leva refletir sobre a possibilidade de encontrar todas as somas $\zeta(2p)$ para $p \in \mathbb{N}$ apenas fazendo a série de Fourier da função $f(x) = x^{2p}$, nesse sentido propomos o seguinte teorema.

Teorema 21. *O quociente $\frac{p\pi^{2p}}{(2p+1)!}$ é combinação linear de $\zeta(2k)$, $k = 1, 2, \dots, p$; para os coeficientes $c_i = \frac{(-1)^{p+i+1} \cdot \pi^{2i}}{(2i+1)!}$, $i = 0, 1, \dots, p-1$.*

A demonstração se faz obtendo a série de Fourier para $f(x) = x^{2p}$ com $p \in \mathbb{N}$. Assim, calculando os coeficientes de fourier

$$a_0(p) = \int_{-\pi}^{\pi} x^{2p} dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^{2p}}{2p+1}.$$

Calculando os coeficientes $a_n(i)$ para $i = 1, 2, 3, 4, \dots$, concluímos por inspeção que

$$a_n(p) = \frac{2(2p)!(-1)^n}{n^{2p}} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1}(\pi n)^{2k}}{(2k+1)!} \right]. \quad (94)$$

Verificando por indução, se $p = 1$ temos

$$a_n(1) = \frac{2 \cdot 2!(-1)^n}{n^2} \left[\frac{(-1)^2(\pi n)^0}{1!} \right] = \frac{4(-1)^n}{n^2},$$

que é verdadeira como mostrado em (67). Tomando (94) como hipótese, segue pelo passo da indução que

$$a_n(p+1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^{2(p+1)} \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^{2p+2} \cos(nx) dx.$$

Resolvendo a integral por partes fazendo $u = x^{2p+2}$ e $dv = \cos(nx)dx$, temos $du = (2p+2)x^{2p+1}$ e $v = \frac{\sin(nx)}{n}$,

$$a_n(p+1) = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^{2p+2} \sin(nx)}{n} - \frac{2p+2}{n} \int x^{2p+1} \sin(nx) dx \right]_0^{\pi},$$

novamente, resolvendo a integral por partes fazendo $u = x^{2p+1}$ e $dv = \sin(nx)$, temos

$$du = (2p + 1)x^{2p} \text{ e } v = -\frac{\cos(nx)}{n},$$

$$\begin{aligned} a_n(p + 1) &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^{2p+2} \sin(nx)}{n} - \frac{2p + 2}{n} \left(-\frac{x^{2p+1} \cos(nx)}{n} + \frac{2p + 1}{n} \int x^{2p} \cos(nx) dx \right) \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^{2p+2} \sin(nx)}{n} + \frac{(2p + 2)x^{2p+1} \cos(nx)}{n^2} \right]_0^\pi - \frac{2(2p + 2)(2p + 1)}{\pi n^2} \cdot a_n(p) \\ &= \frac{2(2p + 2)\pi^{2p+1}(-1)^n}{\pi n^2} - \frac{2(2p + 2)(2p + 1)}{\pi n^2} \cdot a_n(p), \end{aligned}$$

substituindo a hipótese (94),

$$a_n(p + 1) = \frac{2(2p + 2)\pi^{2p}(-1)^n}{n^2} - \frac{2(2p + 2)!(-1)^n}{n^{2p+2}} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1}(\pi n)^{2k}}{(2k + 1)!} \right],$$

organizando de forma conveniente os termos,

$$\begin{aligned} a_n(p + 1) &= \frac{(-1)^{2p+2} \cdot 2(2p + 2)!(\pi n)^{2p}(-1)^n}{n^{2p+2}(2p + 1)!} + \frac{2(2p + 2)!(-1)^n}{n^{2p+2}} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+2}(\pi n)^{2k}}{(2k + 1)!} \right] \\ &= \frac{2(2p + 2)!(-1)^n}{n^{2p+2}} \left[\sum_{k=0}^p \frac{(-1)^{p+k+2}(\pi n)^{2k}}{(2k + 1)!} \right], \end{aligned}$$

concluimos por indução que (94) é verdadeira. Como $g(x) = x^{2p} \sin(nx)$ é uma função ímpar, segue que $b_n(p) = 0$. Finalmente, substituindo os coeficientes na série de fourier,

$$f(x) = \frac{\pi^{2p}}{2p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2(2p)!(-1)^n}{n^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1} \cdot (\pi n)^{2k}}{(2k+1)!} \cos(nx) \right]. \quad (95)$$

Fazendo $x = \pi$, segue

$$\pi^{2p} = \frac{\pi^{2p}}{2p+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{2(2p)!(-1)^n}{n^{2p}} \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1} \cdot (\pi n)^{2k}}{(2k+1)!} (-1)^n \right],$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1} \cdot \pi^{2k} n^{2k-2p}}{(2k+1)!} \right] = \frac{p\pi^{2p}}{(2p+1)!},$$

pela convergência absoluta,

$$\begin{aligned} \frac{p\pi^{2p}}{(2p+1)!} &= \sum_{k=0}^{p-1} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+k+1} \cdot \pi^{2k} n^{2k-2p}}{(2k+1)!} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} n^{2k-2p} \right], \end{aligned}$$

finalmente

$$\sum_{k=0}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(2p-2k) = \frac{p\pi^{2p}}{(2p+1)!}. \quad (96)$$

Mostrando assim que

$$\frac{p\pi^{2p}}{(2p+1)!} = c_0 \cdot \zeta(2p) + c_1 \cdot \zeta(2p-2) + \cdots + c_{p-2} \zeta(4) + c_{p-1} \zeta(2)$$

com $c_i = \frac{(-1)^{p+i+1} \cdot \pi^{2i}}{(2i+1)!}$, $i = 0, 1, \dots, p-1$.

■

Corolário 2. Sendo $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, temos a relação recursiva para $\zeta(2p)$

$$\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1} p \pi^{2p}}{(2p+1)!} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(2p-2k), \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \quad (97)$$

De (96) temos

$$(-1)^{p+1} \zeta(2p) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{p+k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(2p-2k) = \frac{p \pi^{2p}}{(2p+1)!},$$

assim,

$$\zeta(2p) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^k \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(2p-2k) = \frac{(-1)^{p+1} p \pi^{2p}}{(2p+1)!}.$$

Concluimos que

$$\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1} p \pi^{2p}}{(2p+1)!} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(2p-2k), \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

■

Exemplo 29. Para $p = 3$, obtemos $\zeta(6)$ em (97).

$$\begin{aligned}
\zeta(6) &= \frac{3\pi^6}{7!} + \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(6-2k) \\
&= \frac{3\pi^6}{7!} + \frac{\pi^2}{3!} \zeta(4) - \frac{\pi^4}{5!} \zeta(2),
\end{aligned}$$

as somas $\zeta(2)$ e $\zeta(4)$ foram definidas em (69) e (93) respectivamente, logo

$$\zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}. \quad (98)$$

■

Exemplo 30. Para $p = 4$, obtemos $\zeta(8)$ em (97).

$$\begin{aligned}
\zeta(8) &= -\frac{4\pi^8}{9!} + \sum_{k=1}^3 \frac{(-1)^{k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(8-2k) \\
&= -\frac{4\pi^8}{9!} + \frac{\pi^2}{3!} \zeta(6) - \frac{\pi^4}{5!} \zeta(4) + \frac{\pi^6}{7!} \zeta(2) \\
&= \frac{\pi^8}{9450}.
\end{aligned}$$

■

Corolário 3. $\zeta(2p)$ é múltiplo racional de π^{2p} para $p \in \mathbb{N}$.

Para $p = 1$ temos $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ que é múltiplo racional de π^2 . Seguindo, por indução sobre p em (97), para $p = 2$ temos

$$\zeta(4) = -\frac{2\pi^4}{5!} + \frac{\pi^2}{3!} \zeta(2) = \frac{\pi^4}{90},$$

que é verdadeira por (93) e múltiplo racional de π^4 .

Tomando por hipótese que $\zeta(2k)$, $2 \leq k \leq p$ é múltiplo racional de π^{2k} , segue o passo da indução pelo resultado do corolário anterior,

$$\zeta(2p+2) = \frac{(-1)^{p+2}(p+1)\pi^{2p+2}}{(2p+3)!} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(2p+2-2k).$$

Por hipótese, $\zeta(2p+2-2k)$ é múltiplo racional de $\pi^{2p+2-2k}$, daí

$$\zeta(2p+2) = \frac{(-1)^{p+2}(p+1)\pi^{2p+2}}{(2p+3)!} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \pi^{2p+2-2k} \cdot q, \quad q \in \mathbb{Q},$$

logo

$$\zeta(2p+2) = \pi^{2p+2} \left[\frac{(-1)^{p+2}(p+1)}{(2p+3)!} + \sum_{k=1}^p \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} \cdot q \right], \quad q \in \mathbb{Q},$$

finalmente

$$\zeta(2p+2) = \pi^{2p+2} \cdot r, \quad r \in \mathbb{Q}.$$

Concluimos por indução que $\zeta(2p)$ é múltiplo racional de π^{2p} para $p \in \mathbb{N}$. ■

Outros três métodos são apresentados por [16] fazendo uso de funções analíticas e funções geradoras, operadores integrais compactos e mudança de variáveis de E. Calabi para obter o mesmo resultado.

Seria $\zeta(2p+1)$ proporcional a π^{2p+1} ? Esse ainda é um problema em aberto.

Sabe-se que $\zeta(3)$ é um número irracional, fato demonstrado por Roger Apéry [2] em 1979.

Apesar de não existir ainda uma fórmula fechada para $\zeta(2p + 1)$, existem várias relações com outras séries, por exemplo para $\zeta(3)$ temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{n^2} = 2 \cdot \zeta(3),$$

ver [8].

3.3 Somas envolvendo $\zeta(p)$:

A seguir alguns exemplos de séries envolvendo $\zeta(p)$, seja nos termos gerais das séries ou nas somas das mesmas.

Exemplo 31.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p}.$$

Note que, para $p > 1$ a série é absolutamente convergente, assim sendo, podemos reordenar seus termos como desejado sem problemas em alterar sua soma. Segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^p} &= 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \dots \\ &= 1 + \left(-\frac{2}{2^p} + \frac{1}{2^p}\right) + \frac{1}{3^p} + \left(-\frac{2}{4^p} + \frac{1}{4^p}\right) + \frac{1}{5^p} + \dots \\ &= \zeta(p) - 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^p} = \zeta(p) - \frac{2}{2^p} \zeta(p) \\ &= (1 - 2^{1-p}) \zeta(p). \end{aligned}$$

■

Exemplo 32.
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^p}.$$

Observe que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^p} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^p},$$

daí,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^p} = \zeta(p) - \frac{1}{2^p} \cdot \zeta(p) = (1 - 2^{-p}) \zeta(p).$$

■

Exemplo 33.
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1).$$

Observemos as somas verticalmente, dessa forma que reordenaremos a série.

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1) &= \left[\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \right) - 1 \right] + \\ &+ \left[\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \dots \right) - 1 \right] + \\ &+ \left[\left(1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots \right) - 1 \right] + \\ &\quad \vdots \\ &+ \left[\left(1 + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} + \frac{1}{4^k} + \dots \right) - 1 \right] + \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

podemos concluir que a série é uma soma de séries geométricas,

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^n + \dots \\ &= \frac{1}{2^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \dots + \frac{1}{m^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{m}\right)^n + \dots, \end{aligned}$$

substituindo suas somas,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{3^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}} \right) + \cdots + \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{m}} \right) + \cdots \\
 &= \frac{1}{2^2} \cdot 2 + \frac{1}{3^2} \cdot \frac{3}{2} + \cdots + \frac{1}{m^2} \cdot \frac{m}{m-1} + \cdots,
 \end{aligned}$$

resulta na série telescópica de soma igual a 1.

$$= \frac{1}{2} \cdot + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{m-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

■

Exemplo 34.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\zeta(2n) - 1) = \frac{3}{4}.$$

A verificação se faz de forma análoga ao Exemplo 33.

■

Exemplo 35.
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\zeta(2n+1) - 1) = \frac{1}{4}.$$

A verificação se faz de forma análoga ao Exemplo 33.

■

Exemplo 36.
$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n (\zeta(n) - 1) = \frac{1}{2}.$$

A verificação se faz de forma análoga ao Exemplo 33.

■

Exemplo 37. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{n}$.

No exemplo (22) da Seção 2.1 mostramos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}, \quad |x| < 1,$$

Note a semelhança entre as séries. O que faremos é intergrar (49). Daí,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n x^{n+1}}{n+1} = -\int \frac{\ln(1-x)}{1-x} dx = \frac{\ln^2(1-x)}{2},$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{H_{n-1} x^n}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{H_n x^n}{n} - \frac{x^n}{n^2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{H_n x^n}{n} - \frac{x^n}{n^2} \right) = \frac{\ln^2(1-x)}{2},$$

logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n x^n}{n} = \frac{\ln^2(1-x)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}, \quad |x| < 1. \quad (99)$$

Fazendo $x = -1$, temos a série alternada que converge pelo Teorema 11, assim, pelo Teorema 15 temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{n} = -\frac{\ln^2(2)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},$$

e pelo resultado do Exemplo 31 segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{n} = -\frac{\ln^2(2)}{2} + (1 - 2^{1-2})\zeta(2).$$

Finalmente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} H_n}{n} = \frac{\zeta(2) - \ln^2(2)}{2}. \quad (100)$$

■

Exemplo 38. A série de Fourier para $f(x) = \cos(ax)$ é

$$\cos(ax) = \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi} \left[\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos(nx)}{n^2 - a^2} \right], \quad -\pi \leq x \leq \pi,$$

com $a \notin \mathbb{Z}$.

Fazendo $x = \pi$ temos

$$\cos(a\pi) = \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi} \left[\frac{1}{2a^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} \right],$$

daí,

$$a\pi \cot(a\pi) = 1 - 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2 - a^2}$$

e

$$\frac{1 - a\pi \cot(a\pi)}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2 - a^2}. \quad (101)$$

Vejamos o que podemos fazer em relação à $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2 - a^2}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2 - a^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2 \left[1 - \left(\frac{a}{n}\right)^2 \right]},$$

note que o quociente $\frac{1}{1 - \left(\frac{a}{n}\right)^2}$ pode ser soma de uma série geométrica, basta que tenhamos $\left|\frac{a}{n}\right| < 1$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$; assim, se $|a| < 1$ segue que

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2 - a^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2} \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^{2p} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{a^{2p}}{n^{2p}} \right) \\ &= \sum_{p=1}^{+\infty} a^{2p} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}} \right), \end{aligned}$$

logo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a^2}{n^2 - a^2} = \sum_{p=1}^{+\infty} a^{2p} \zeta(2p). \quad (102)$$

Substituindo (102) em (101) e trocando a por x , finalmente temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} \zeta(2n) = \frac{1 - x\pi \cot(x\pi)}{2}, \quad |x| < 1. \quad (103)$$

□

Em (103), fazendo $x = \frac{1}{2}$ obtemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n} = \frac{1}{2}.$$

■

Exemplo 39. Usando a série (103) e a Definição 7 podemos estabelecer a soma $\zeta(2p)$ em termos dos números de Bernoulli assim como Euler o fez.

De (85) obtemos $B_1 = -\frac{1}{2}$ e $B_{2k+1} = 0$ para $k = 1, 2, \dots$; como

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1} \right) = \frac{x}{2} \coth \frac{x}{2},$$

segue que

$$\frac{x}{2} \coth \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_{2k} x^{2k}}{(2k)!}, \quad |x| < 2\pi.$$

Substituindo x por $2ix$,

$$x \cot x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k} x^{2k}}{(2k)!}, \quad |x| < \pi. \quad (104)$$

Como a soma da série (103) também envolve a função cotangente, façamos nela a substituição x por $\frac{x}{\pi}$ afim de obter algo relacionado com a série (104), assim

$$x \cot x = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\zeta(2n)}{\pi^{2n}} x^{2n}, \quad |x| < \pi, \quad (105)$$

e de (104) temos

$$x \cot x = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k B_{2k} 2^{2k}}{(2k)!} x^{2k}, \quad |x| < \pi. \quad (106)$$

Comparando os coeficientes que acompanham x^{2k} em (105) e (106) concluímos que

$$\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1} B_{2p} (2\pi)^{2p}}{2(2p)!}, \quad p \in \mathbb{N}. \quad (107)$$

■

Podemos notar que várias somas são descobertas por pura “sorte” ao estudar por exemplo séries de Fourier de outras funções, como vimos no Exemplo 38 e no Exemplo 39. Várias outras somas envolvendo a função ζ podem ser encontradas em [12].

4 Considerações finais

Neste trabalho mostramos como calcular algumas somas infinitas e apresentamos alguns métodos para determinar somas de maneira geral; em especial a soma da função zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

para $s = 2p$, $p \in \mathbb{N}$ através da série de Fourier para $f(x) = x^{2p}$. Além de exibir séries envolvendo a função zeta tanto nos termos gerais quanto nas somas, propomos e demonstramos o seguinte teorema,

Teorema: O quociente $\frac{p\pi^{2p}}{(2p+1)!}$ é combinação linear de $\zeta(2k)$, $k = 1, 2, \dots, p$; para os coeficientes $c_i = \frac{(-1)^{p+i+1} \cdot \pi^{2i}}{(2i+1)!}$, $i = 0, 1, \dots, p-1$.

Este nos leva a concluir os seguintes corolários,

Corolário: Sendo $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, temos a relação recursiva para $\zeta(2p)$

$$\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1} p \pi^{2p}}{(2p+1)!} + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{(-1)^{k+1} \cdot \pi^{2k}}{(2k+1)!} \zeta(2p-2k), \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

Corolário: $\zeta(2p)$ é múltiplo racional de π^{2p} para $p \in \mathbb{N}$.

Concluimos também que a soma parcial da série zeta $H_n^{(-p)}$ para $p \in \mathbb{Z}_+$ é um polinômio de grau $p+1$ e seus coeficientes podem ser obtidos pelo sistema linear de ordem $p+2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 2^{p+1} & 2^p & 2^{p-1} & \dots & 2^0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ (p+2)^{p+1} & (p+2)^p & (p+2)^{p-1} & \dots & (p+2)^0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_{p+1} \\ c_p \\ \vdots \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1^{(-p)} \\ H_2^{(-p)} \\ \vdots \\ H_{p+2}^{(-p)} \end{bmatrix}.$$

Referências

- [1] ANTON, HOWARD; RORRES, CHRIS, *Álgebra linear com aplicações*, 10 ed., Tradução: Claus Ivo Doering, Porto Alegre: Bookman (2012).
- [2] APÉRY, R., *Irrationalité de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$* , Astérisque, 61: 11-13 (1979).
- [3] APOSTOL, TOM M., *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, 41. New York: Springer-Verlag (1990).
- [4] ARFKEN, G., WEBER, H. J., *Física Matemática - Métodos matemáticos para engenharia e física*, Tradução da sexta edição, Rio de Janeiro: Elsevier (2007).
- [5] BOYER, CARL BENJAMIN, *História da matemática*, 11 ed., São Paulo: Edgard Blucher (1974).
- [6] JACKSON, DUNHAM, *Fourier Series and Orthogonal Polynomials*, Minnesota: The Mathematical Association of America (1941).
- [7] JEFFREYS, H., E B. S. JEFFREYS, *Methods of Mathematical Physics*, 3 ed., Cambridge, UK: Cambridge University Press (1972).
- [8] KLAMKIN, M. S., *A summation problem*, Advanced Problem, 4431 Amer. Math. Monthly 58 (1951), 195; *ibid.* 59 (1952), 471-472.
- [9] LIMA, ELON LAGES, *Curso de Análise*, Vol. 1, 12 ed., Rio de Janeiro: Projeto Euclides (2008).
- [10] PATTERSON, S. J., *An introduction to the theory of the Riemann Zeta-Function*, Cambridge Studies In Advanced Mathematics 14, Cambridge University Press (1988).
- [11] SOARES, MARCIO G., *Cálculo em uma variável complexa*, Rio de Janeiro: IMPA (2006).
- [12] SRIVASTAVA H. M., CHOI, JUNESANG, *Zeta and q-Zeta Functions and Associated Series and Integrals*, First edition, Elsevier (2011).
- [13] STEWART, JAMES, *Cálculo*, Vol. II, 5 ed., São Paulo: Cengage Learning (2008).

- [14] THOMAS, GEORGE B., *Cálculo*, Volume 2, 10 ed., Tradução: Claudio Hirofume Asano, São Paulo: Pearson Education do Brasil (2003).
- [15] TOLSTOV, GEORGI P., *Fourier Series*, Translated from the Russian by Richard A. Silverman, New York: Dover Publications (1962).
- [16] ZANON, DENISE ELENA FAGAN, *Três métodos para o cálculo da série Zeta(2n) de Riemann*, Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS (2006).