



Universidade Federal de Goiás  
Regional Jataí  
Coordenação de Matemática  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



## **Aplicação do Processo Estocástico no Controle de Estoque em Pequenas Empresas**

**Wilder Francisco Soares Costa**

Jataí-Go

2014

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou download, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. identificação do material bibliográfico:**

**Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação da Tese ou Dissertação**

Autor (a):		Wilder Francisco Soares Costa	
E-mail:		Wilder_soares@hotmail.com	
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não			
Vínculo empregatício do autor		Secretaria da Educação do Estado de Goiás	
Agência de fomento:		Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla: CAPES
País:	Brasil	UF:	Go    CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:    Aplicação do Processo Estocástico no Controle de Estoque em Pequenas Empresas			
Palavras-chave:    Controle de Estoque, Processo Estocástico, Cadeias de Markov, Modelagem Matemática, Matemática Básica.			
Título em outra língua:    Application of Stochastic Process in Inventory Control for Small Business			
Palavras-chave em outra língua:    Inventory Control, Stochastic Process, Markov Chains, Mathematical Modeling, Basic Mathematics.			
Área de concentração:		Matemática do Ensino Básico	
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		30/10/2014	
Programa de Pós-Graduação:		Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT	
Orientador (a):		Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva	
E-mail:		gecirlei@yahoo.com	
Co-orientador (a):*			
E-mail:			

\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM     NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 04/ 11 / 2014

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

**Wilder Francisco Soares Costa**

**Aplicação do Processo Estocástico no Controle de Estoque em  
Pequenas Empresas**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/UFG, Polo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico e Modelagem Matemática

Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva

Jataí-Go  
2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)  
GPT/BC/UFG**

Costa, Wilder Francisco Soares.

C837a Aplicação do processo estocástico no controle de estoque em pequenas empresas [manuscrito] / Wilder Francisco Soares Costa. - 2014.  
48 f.

Orientador: Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva  
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás,  
Regional Jataí, 2014.

Bibliografia.

Inclui lista de figuras e tabelas.

1. Processo estocástico 2. Controle de estoque 3.  
Administração de empresa 4. Pequenas empresas I. Título.

CDU: 658.78

**Wilder Francisco Soares Costa**

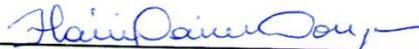
**Aplicação do Processo Estocástico no Controle  
de Estoque em Pequenas Empresas**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 30 de outubro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Gecirlei Francisco da Silva**  
Presidente da Banca  
Coordenação Matemática-UFG/Jataí



---

**Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza**  
Membro-IFG/Goiânia



---

**Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa**  
Membro - Coordenação de Matemática-UFG/Jataí

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**Wilder Francisco Soares Costa** graduou-se em Ciências - Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Goiás - Campus Iporá-Go, especializou-se em “Docência Universitária” pela FMB – Faculdades Montes Belos, São Luiz dos Montes Belos – Goiás. É professor há dezessete anos, sendo que neste período atuou como professor do Ensino Fundamental, Médio e Superior. É concursado desde 1999 pela Secretaria de Educação do Estado de Goiás.

Dedico este trabalho a minha esposa Simone Soares, meus filhos Camila e Kayky, aos meus pais, a minha irmã Kenea Soares e a todos familiares e amigos que entenderam a minha ausência nesse período de estudos.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por sempre me amparar nas várias horas em que recorri a Ele, me dando paciência, persistência e livramentos para poder cursar este Mestrado.

Agradeço muito a minha esposa Simone Soares por estar sempre do meu lado, me apoiando e acompanhando nesse sonho, que passou ser dela também. Obrigado, obrigado e obrigado, te amo.

Agradeço aos meus pais e irmã pelo apoio e paciência.

Agradeço aos professores que com muita dedicação aceitaram trabalhar neste mestrado.

Agradeço ao meu Orientador Professor Gecirlei, por me estender a mão para ajudar, com a maior paciência e dedicação.

Agradeço aos amigos que fizeram este curso comigo.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro durante o período de estudo.

## Resumo

O controle de estoque exerce um papel importante nas empresas, pois auxiliam na estrutura financeira e compreensão da mesma. Devido esse fato é de grande valor que estudantes do ensino médio apreendam suas definições e aplicações pois estão ou serão inseridos no mercado de trabalho. O propósito deste trabalho foi unir o controle de estoque com o processo estocástico, que nesse caso foi o processo Markoviano, através da modelagem matemática. Para tanto, uma breve explanação de controle de estoque e estoque foi abordada, bem como processos estocásticos e exemplificações, chegando nas Cadeias de Markov que foi abordada de uma forma bem simples voltada mais para multiplicação de matrizes e como chegar nessas matrizes. Depois pegou essas teorias e foi aplicada, através da modelagem, em um supermercado de pequeno porte no controle de estoque de molho de tomate usando as cadeias de Markov, possibilitando a previsão de pedidos futuros junto ao fornecedor. O trabalho é fruto do Mestrado Profissional e foi escrito com intenção de que docentes e estudantes do ensino médio possam compreender as resoluções dos exemplos apresentados.

**Palavras-chave** *Controle de Estoque, Processo Estocástico, Cadeias de Markov, Modelagem Matemática, Matemática Básica.*

## **Abstract**

Inventory control plays an important role in business because they help the financial structure and understanding of it. Due to this fact is of great value that high school students seize their definitions and applications as they are or will be included in the labor market. The purpose of this work was to unite the inventory control with stochastic process, which in this case was the Markov process, through mathematical modeling. To this end, a brief explanation of inventory control and stock was addressed, as stochastic processes and examples, arriving on the Markov Chain that was addressed in a very simple way geared more for matrix multiplication and how to get these matrices. Then took these theories and applied, through modeling, at a small supermarket in inventory control of tomato sauce using Markov chains, allowing a prediction of future orders with the supplier. The work is the result of the Professional Masters and was written with the intention that teachers and high school students can understand the resolutions of the examples presented.

**Keywords** *Inventory Control, Stochastic Process, Markov Chains, Mathematical Modeling, Basic Mathematics.*

## Lista de Figuras

1	Balanço Patrimonial Empresa MKT Corporation. . . . .	.21
2	Balanço Patrimonial Fazenda São José. . . . .	.22
3	Diagrama 1. . . . .	.28
4	Andrei Andreyevich Markov. . . . .	.29
5	Molho de Tomate Refogado Tradicional. . . . .	.40
6	Molho de Tomate Manjeriçãõ. . . . .	.41
7	Molho de Tomate Ervas Finas. . . . .	.41
8	Diagrama 2. . . . .	.44

## Lista de Tabelas

1	Modelo de Balanço Patrimonial. . . . .	.20
2	Demonstrativo das Empresas de Dedetização. . . . .	.31
3	Taxas de Retenção e Perda. . . . .	32
4	Fatia de Mercado da Empresa A. . . . .	.34
5	Fatia de Mercado da Empresa B. . . . .	.34
6	Fatia de Mercado da Empresa C. . . . .	.34
7	Fatia de Mercado das Empresas A,B e C. . . . .	.35
8	Previsão de Manutenção e Perda dos Clientes dos Supermercados. . . . .	.36
9	Previsão de Manutenção e Perda dos Clientes dos Supermercados em Percentual. . . . .	.37
10	Comportamento dos Consumidores em Relação aos Molhos de Tomate. . .	43
11	Transformação dos Dados em Porcentagem. . . . .	.43
12	Comportamento dos Consumidores em Relação aos Molhos de Tomate Descritos em Porcentagem. . . . .	.43
13	Multiplicação de Matriz de Estado pela Matriz de Transição. . . . .	.45
14	Quantidade de Molhos nas quatro semanas. . . . .	46

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Controle de Estoque</b>	<b>18</b>
2.1	Estrutura das Demonstrações Financeiras. ....	18
2.2	Balanço Patrimonial. ....	20
2.3	Ativo Circulante. ....	22
2.4	Estoque. ....	23
<b>3</b>	<b>Processo Estocástico</b>	<b>25</b>
3.1	Quem é Markov? ....	28
3.2	As Cadeias de Markov. ....	29
<b>4</b>	<b>A Prática de Controle de Estoque por Processo Estocástico (Processo Markoviano)</b>	<b>39</b>
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>47</b>
	<b>Referências</b>	<b>48</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O desenvolvimento deste trabalho se deu, por fazer parte das exigências para conseguir o grau de mestre em matemática, pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional ofertado pela SBM – Sociedade Brasileira de Matemática juntamente com a Universidade Federal de Goiás. Tendo o programa como objetivo de atender os professores de matemática com a finalidade de aperfeiçoar o ensino da matemática no ensino básico.

Sendo assim a ideia foi apresentar uma situação real que basicamente atinja toda sociedade estudantil, que é aplicar conhecimentos matemáticos com o cotidiano de seu trabalho ou futuro emprego. Que nesse caso através da modelagem matemática pode unir o controle de estoque em uma pequena empresa com o processo estocástico.

Sabendo que a educação desenvolve um papel fundamental no crescimento das pessoas e das sociedades, sendo necessário construir uma escola voltada para a formação de cidadãos. Conforme estabelece os PCN's, temos:

*Visam à construção de um referencial que oriente a prática escolar de forma a contribuir para que toda criança e jovem brasileiros tenham acesso a um conhecimento matemático que lhes possibilite de fato sua inserção, como cidadãos, no mundo do trabalho, das relações sociais e da cultura [5].*

A abordagem do tema escolhido se deu porque grande parte da comunidade estudantil da cidade Anicuns-Go, já estão ou serão inseridos no mercado de trabalho na própria cidade, e como essa é carente de indústrias, esses alunos acabam introduzidos nas pequenas empresas, onde muitos passam o resto de sua vida profissional. Também é bom ressaltar que alguns que trilham o caminho do curso superior optam por fazer Administração de Empresa ou Ciências Contábeis que são oferecidos pela faculdade local.

Tendo essa situação real em quase todas as cidades interioranas do Brasil, é de grande pertinência que os professores de matemática do ensino médio, busquem adequações dos conteúdos ministrados, com sua realidade local. Que nesse caso foi dar o embasamento de controle de estoque feito através do Processo Estocástico com ênfase nas Cadeias de Markov, que pode ser inserido quando se está ministrando o conteúdo de multiplicação de matrizes, ou até mesmo em minicursos que geralmente as escolas oferecem em horários alternativos e optativos.

Como mencionado nessa seção, que os alunos ingressão no mercado de trabalho em pequenas empresas, que na maioria absoluta são a malha comercial local, tem como obrigação a compreensão do funcionamento desta, que consiste em tentar aplicar a aprendizagem adquirida na escola em sua função empregatícia na empresa.

Com todo esse histórico é interessante passar a ideia de controle de estoque, pois todos estarão lidando com esse, de forma direta ou indireta. Então pegando o princípio da origem da palavra estoque que é porção armazenada de mercadorias, o controle deste constitui vínculo entre as etapas do processo de compra e venda, no processo de comercialização em empresas comerciais. Os estoques desempenham papel importante na flexibilidade operacional da empresa. São as entradas e saídas dos produtos nos processos de comercialização. É necessário que nas organizações, a direção preocupe-se em todos os aspectos que envolvem o negócio, desde a análise de sua viabilidade até a utilização de instrumentos gerenciais adequados que possam fornecer à administração informações que possibilitem o monitoramento ordenado dos resultados.

Devido à grande competitividade entre empresas é necessário a implantação de controles e planejamentos internos. As constantes notícias sobre dificuldades na economia afetam a confiança do consumidor e podem alterar sua maneira de consumir, o que significa que ele vai procurar novas alternativas, comprando apenas o necessário, produtos que atendem toda a família optando por marcas mais baratas de olho sempre nas promoções.

*A globalização da economia vem produzindo significativas mudanças na forma de condução dos negócios. No cenário atual, clientes exigem um alto nível de serviço, pedidos mais frequentes, e trabalham no sentido de manter*

*os níveis de estoque exatamente na medida de suas necessidades. Os consumidores, por sua vez, querem maior variedade e conformidade nos produtos [7].*

Então é interessante unir a ideia de controle de estoque com o Processo Estocástico que nesse caso vai ser o Processo Markoviano, que na realidade pode ser mostrado quando se explica multiplicação de matrizes que é um conteúdo ministrado no ensino médio. Sabendo que o Processo Estocástico é uma extensão do que a probabilidade define por variável aleatória, isso permite adaptar a uma linguagem acessível aos alunos mencionados.

Para fins de cálculos será usado as Cadeias de Markov <sup>1</sup>onde a perda de memória é a base da caracterização das cadeias e ela estabelece que em um conjunto de estados discretos o futuro só depende do estado presente, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido.

Diante do exposto foram traçados os seguintes objetivos:

- Apresentar as principais ideias de formação de estoque e controle do mesmo;
- Explicar conceitos relacionados a Processo Estocástico e suas aplicações;
- Expor aspectos importantes sobre Cadeias de Markov com multiplicação de matrizes;
- Obter matrizes que possam representar de maneira simplificada a situação descrita;
- Utilizar a modelagem matemática e as Cadeias de Markov para simular em um cenário real o controle de estoque feito através das cadeias.

A Seção 2 a abordagem principal é o controle de estoque dando definições, meios de controle e objetivos em fazer o mesmo, mencionamos também um pouco sobre balanço patrimonial e ativo circulante.

A Seção 3 inicia com definições de Processo Estocástico com ênfase no Processo Markoviano, faz um pequeno relato de quem foi Markov e aborda de forma

---

<sup>1</sup> As cadeias de Markov são assim denominadas em homenagem ao matemático russo Andrei A. Markov, um amante da poesia, que as utilizou para analisar as alterações de vogais e consoantes no poema Eugene Onegin de Pushkin. Markov acreditava que a única aplicação de suas cadeias seria a análise de obras literárias, de modo que ele ficaria surpreso se soubesse que hoje em dia sua descoberta é usada pelas Ciências Sociais, Teoria Quântica e Genética [1].

discreta Cadeias de Markov apresentando sua definição, propriedades e aplicações através de alguns exemplos.

A Seção 4 destina-se à modelagem do problema proposto que é o controle de estoque de molho de tomate em um pequeno supermercado da cidade de Anicuns-Go.

Por fim são apresentadas as considerações finais com algumas conclusões do autor deste trabalho.

## **2 CONTROLE DE ESTOQUE**

O Controle de estoque é uma área importantíssima de uma empresa, seja ela, micro, pequena, média ou grande, pois é através dele que a empresa é capaz de prever o quanto é necessário comprar no próximo pedido ao fornecedor. Nas médias e grandes empresas, tem que haver a utilização de software que são conhecidos como “Programa para Controle de Estoque”, “Sistemas Integrado de Gestão” ou “Programas para Automação Comercial”. Mas nas pequenas e micro empresas esse controle ainda é feita de maneira manual, onde os proprietários ou funcionários fazem o controle.

O controle de estoque está presente em todas as empresas por se tratar de um dos itens que compõem o Balanço Patrimonial, o qual será tratado mais adiante nessa seção e também traz alguns benefícios tais como:

- Controlar a entrada e saída de mercadorias;
- Saber a quantidade de cada produto em estoque;
- Verificar os produtos encalhados;
- Evitar e detectar furtos ou fraudes dentro da empresa;
- Fazer relatórios para evitar pedidos junto aos fornecedores de produtos defasados.

Com todos esses benefícios a empresa garante minimizar gastos e maximizar os lucros. E cumprir algumas exigências por lei que serão descritas nessa seção.

### **2.1 Estrutura das Demonstrações Financeiras**

Uma forma bem direta para relatar a respeito de demonstrações financeiras é expor o seu objetivo que consiste, simplesmente em dar informações sobre a posição financeira, os resultados e as mudanças de uma entidade que sejam úteis a

um grande número de usuários (investidores, empregados, fornecedores, clientes, instituições financeiras ou governamentais, agências de notação e públicas) em suas tomadas de decisões.

De acordo com art. 176 da Lei nº 6.404, de 15-12-1976, e alterada e revogada alguns dispositivos pela Lei nº 11.638, de 28-12-2007, conhecida, também, como Lei das Sociedades por Ações (Lei S.A.), é obrigatória a publicação pelas companhias, ao final de cada exercício social com duração de um ano, das seguintes demonstrações financeiras:

- Balanço patrimonial;
- Demonstração do resultado do exercício;
- Demonstração de lucros ou prejuízos acumulados ou demonstração das mutações do patrimônio líquido;
- Demonstração das origens e aplicações de recursos.

As demonstrações financeiras de cada exercício social devem ser publicadas acompanhadas dos valores correspondentes das demonstrações do exercício anterior. Juntamente com essas quatro demonstrações financeiras, as companhias publicam o Relatório da Administração, Notas Explicativas, Parecer do Conselho Fiscal e Parecer dos Auditores Independentes.

As sociedades formadas sob outras formas jurídicas também adotam mesma estrutura do balanço patrimonial e demonstração do resultado do exercício aplicável à sociedade por ações, embora não as publiquem.

Empresas de pequeno e médio porte costumam realizar essas demonstrações financeiras, embora não obrigada, para ter total controle de sua situação financeira, bem como para verificação se essa está ou não dando lucros.

## 2.2 Balanço Patrimonial

Quantas vezes ao final das festividades de fim de ano você chega em algum centro comercial e se depara com o seguinte aviso, “FECHADO PARA BALANÇO”, e pergunta o que vem a ser isso?

O Balanço dito nesse aviso e chamado na realidade de Balanço Patrimonial<sup>2</sup> que demonstra a situação estática de empresa em determinado momento. Cada empresa pode determinar a data de encerramento do balanço conforme as suas conveniências, mas a maioria das empresas brasileiras encerra o balanço em 31 de dezembro de cada ano, coincidindo com o encerramento do ano civil.

No Balanço Patrimonial, os resultados apurados são divididos em Ativos e Passivos, dos quais ainda existe a subdivisão de Circulante e Não Circulante. Essas contas representativas do ativo e passivo devem ser agrupadas de modo para facilitar o conhecimento e análise da situação da empresa.

*A expressão balanço decorre do equilíbrio: Ativo = Passivo + PL, ou da igualdade: Aplicações = Origem. Parte-se da ideia de uma balança de dois pratos em que sempre se encontra a igualdade. Só que, em vez de denominar-se balança (assim como Balança Comercial), denomina-se, no masculino, balanço [14].*

Esse recurso chamado de Balanço Patrimonial é a ferramenta mais eficaz para diagnosticar posição financeira da empresa, bem como através deste tomar decisões cabíveis para melhora do empreendimento. Seu modelo pode ser representado de acordo com a Tabela 1:

Tabela 1: Modelo de Balanço Patrimonial

<b>BALANÇO PATRIMONIAL</b>	
<b>ATIVO</b>	<b>PASSIVO</b>
<b>Ativo Circulante</b>	<b>Passivo Circulante</b>
Caixa	Duplicatas a pagar
Bancos	Impostos, taxas e contribuições a pagar
Aplicações financeiras	Empréstimos
Duplicatas a receber	Salários a pagar
(-) Duplicatas descontadas	Encargos sociais
Estoques	Dividendos a pagar
Despesas antecipadas	Outras obrigações de curto prazo

<sup>2</sup> O Trabalho não tem como objetivo aprofundar em Balanço Patrimonial para uma leitura detalhada [10] e [13].

Adiantamento a fornecedores	Financiamentos
	Debêntures a pagar
<b>Ativo Não Circulante</b>	<b>Passivo Não Circulante</b>
Realizável a Longo Prazo	Empréstimos
Investimentos	Financiamentos
Participação acionária	Debêntures a Pagar
<i>Imobilizado</i>	Fornecedores
Terrenos	
Prédios	<b>Patrimônio Líquido</b>
Máquinas e equipamentos	Capital Social
(-) Depreciação acumulada	Reservas de capital
<i>Intangível</i>	Ajuste de avaliação patrimonial
Fundo de comércio adquirido	Reservas de lucros
Carteira de clientes adquirida	Prejuízos acumulados
<i>Diferido (conta provisória)</i>	(-) Ações em tesouraria
Gastos com instalações	
Gastos com implantação	
Gastos pré-operacionais	
(-) Amortização	

Para melhor fixa, Balanço Patrimonial, será apresentado alguns balanços realizados por certas empresas exemplificados nas figuras 1 e 2, lembrando que não existe um molde único. Então a empresa pode adotar o que melhor convir, desde que expresse todos os dados necessários para composição do balanço.

Figura 1: Balanço Patrimonial Empresa MKT Corporation

Balanço Patrimonial Empresa MKT Corporation							
Ativo				Passivo			
	31/12/2008	31/12/2009	31/12/2010		31/12/2008	31/12/2009	31/12/2010
Caixa	0,00	5.687,97	8.090,64	Fornecedores A	43.542,48	3.071,00	39.457,53
Cheques	0,00	12.166,84	3.843,50	Fornecedores B	23.999,04	25.069,76	-450,30
Cheques devolvido	0,00	1.050,50	1.810,50	Fornecedores C	0,00	0,00	-63,20
Estoque de produto	94.301,99	81.834,31	68.975,08	Fornecedores D	0,00	0,00	11.669,50
Vendas a receber	39.450,00	65.899,76	66.404,19	Financiamentos de curto praz	16.890,00	25.465,12	0,00
Duplicatas a recebe	0,00	14.740,00	19.540,00	Provisões	0,00	6.740,00	7.507,00
				Financiamentos de longo pra:	0,00	64.389,00	53.615,49
<b>Terrenos</b>	<b>0,00</b>	<b>0,00</b>	<b>26.338,06</b>	<b>Passivo Circulante</b>	<b>84.431,52</b>	<b>124.734,88</b>	<b>111.736,02</b>
<b>Ativo Circulante</b>	<b>133.751,99</b>	<b>181.379,38</b>	<b>195.001,97</b>	<b>Patrimonio Líquido</b>			
<b>Equipamentos</b>	<b>0,00</b>	<b>80.000,00</b>	<b>80.000,00</b>	Capital Social 31/12/2008	49.320,47	49.320,47	49.320,47
<b>Ativo Imobilizado</b>	<b>0,00</b>	<b>80.000,00</b>	<b>80.000,00</b>	Lucros / Prejuízos acumulado	0,00	101.574,83	129.037,32
				Lucros distribuidos	0,00	(14.250,80)	(15.091,84)
					<b>49.320,47</b>	<b>136.644,50</b>	<b>163.265,95</b>
<b>Total</b>	<b>133.751,99</b>	<b>261.379,38</b>	<b>275.001,97</b>	<b>Total</b>	<b>133.751,99</b>	<b>261.379,38</b>	<b>275.001,97</b>

Fonte: Sérgio de Iudícibus - 2010

Figura 2: Balanço Patrimonial Fazenda São José

 <b>FAZENDA SÃO JOSÉ</b>					
<b>BALANÇO PATRIMONIAL</b>					
<b>ATIVO</b>	<b>INICIAL</b>	<b>FINAL</b>	<b>PASSIVO</b>	<b>INICIAL</b>	<b>FINAL</b>
<i>CIRCULANTE</i>			<i>CIRCULANTE</i>		
1.4) ANIMAIS			EXIGÍVEL A CURTO PRAZO		
A) Bovinos	694.752,00	0,00	2.1.A) Contas a pagar	150.000,00	0,00
B) Ovinos	0,00	0,00			
C) Equinos e Muaras	0,00	0,00	TOTAL PASSIVO CIRCULANTE	150.000,00	0,00
1.6) ESTOQUES			EXIGÍVEL A LONGO PRAZO		
A) Produtos e Subprodutos	0,00	0,00	2.1.A) Empréstimos para Investimento	0,00	0,00
B) Insumos para custeio	0,00	0,00			
2.1) OPERAÇÕES DE CRÉDITO E DISPONIBILIDADE DE RECURSOS			TOTAL EXIGÍVEL	150.000,00	0,00
B) Contas a receber	0,00	0,00			
C) Recursos disponíveis	0,00	0,00			
TOTAL ATIVO CIRCULANTE	694.752,00		CIRCULANTE LÍQUIDO	544.752,00	0,00
<i>FIXO</i>					
1.1) Terras	0,00	0,00			
1.2) Benfeitorias	640.942,80	0,00			
1.3) Máquinas, motores, equip. e veículos	515.105,00	0,00			
1.4.A) Bovinos	1.512.650,00	0,00			
1.4.B) Ovinos	0,00	0,00			
1.4.C) Equinos	0,00	0,00			
1.5) Pastagens	0,00	0,00			
1.6.C) Insumos para investimentos	0,00	0,00			
TOTAL ATIVO FIXO	2.668.697,80		TOTAL PATRIMÔNIO LÍQUIDO	3.213.449,80	0,00
<b>TOTAL ATIVO</b>	<b>3.363.449,80</b>		<b>TOTAL PASSIVO</b>	<b>3.363.449,80</b>	<b>0,00</b>

Fonte: Sérgio de Iudícibus - 2010

### 2.3 Ativo Circulante

É um grupo de contas que fazem parte do Balanço Patrimonial. É uma referência aos bens e direitos que podem ser convertidos em dinheiro a curto prazo, normalmente até o final do exercício social seguinte ao da elaboração do Balanço Patrimonial. Por exemplo, se o balanço patrimonial refere-se ao ano 2011, há a expectativa por parte da empresa que tudo que está no ativo circulante<sup>3</sup> seja convertido em dinheiro até 31/12/2012.

Os ativos que podem ser considerados como circulantes incluem: dinheiro em caixa, conta movimento em banco, aplicações financeiras, contas a receber,

<sup>3</sup> Ativo Circulante foi mencionado neste trabalho por fazer parte do Balanço Patrimonial e o Estoque estar inserindo nele, caso o leitor deseje aprofundar no assunto recorrer a [10] e [13].

estoques, despesas antecipadas, numerário em caixa, depósito bancário, mercadorias, matérias-primas e títulos.

## 2.4 Estoque

Quando se define estoque chega a uma única conclusão que consiste em uma armazenagem de mercadorias com previsão de uso futuro. Lembrando que essa armazenagem deve ser feita com objetivo de atender demanda e assegurar a disponibilidade de produtos.

*Estoques são todos os bens e materiais mantidos por uma organização para suprir demandas futuras [21].*

O controle de estoque tem que ser feita de maneira sincronizada entre a demanda e a oferta de mercadorias, para que não haja um descontrole financeiro, pois a sua formação é dispendiosa, uma vez que representa de 25% a 40% dos custos totais, então deve-se formar estoque essencialmente para atender a demanda, minimizando seus custos de formação.

*Os estoques representam capital investido, lançado no ativo da empresa para serem bem administrados e vendidos, sendo comuns as perdas por expiração da data de validade e até mesmo roubo e fraudes cometidas na empresa [16].*

O marketing da empresa pode ser feito com o auxílio do estoque, uma vez que a empresa pode oferecer produtos com maior desconto, quantidades adequadas para atender a demanda dos clientes que precisam de fornecimento imediato ou de períodos de curtos reabastecimentos. Tendo esse propósito vai representar maiores vantagens competitivas, diminuição nos custos e maiores lucros nas vendas.

Quanto a formação de estoque tem que atentar para geração de pequenos lotes de compras que implica maiores custos de frete, uma vez que não há volume suficiente para obter descontos oferecidos em maiores quantidades. Outro fator importante em adquirir grandes lotes é que possibilita descontos no frete devido pegar capacidade total dos veículos de transporte.

O sistema logístico da empresa deve formar um estoque adicional (estoque de segurança) para garantir a disponibilidade do produto, devido ser impossível de se conhecerem as demandas pelos produtos ou seus tempos de ressurgimento de

maneira exata. Este é adicionado ao estoque regulador para atender às necessidades da produção e do mercado.

*É a logística da resposta rápida, é uma demanda para atender o cliente, fornecendo-se a quantidade, a variedade e a qualidade certas no momento certo, no local certo e pelo preço certo [11].*

É bom ressaltar que existem algumas situações inesperadas, que podem atingir as empresas, tais como, greves, incêndios, inundações e outros. A manutenção do estoque de reserva é uma maneira viável de garantir o fornecimento normal nessas ocasiões.

Os estoques podem ser controlados, adotando-se diversos tipos de critérios. Se considerarmos a natureza da sua demanda, teremos a seguintes classificações:

- Estoque de demanda permanente: são estoques daqueles produtos que requerem ressurgimento contínuo, pois seus produtos são consumidos durante todas as fases do ano. Ex: Sabonete e creme dental;
- Estoques de demanda sazonal: são estoques de produtos comercializados em determinados momentos do ano. Ex: Árvores de Natal.
- Estoque de demanda irregular: são estoques cuja venda de seus produtos não pode ser prevista na íntegra. Ex: Automóveis a gasolina x automóveis a álcool;
- Estoques de demanda em declínio: ocorre no caso de produtos que estão sendo retirados do mercado em razão do declínio da demanda. Ex: Fitas VHS x DVDs;
- Estoques de demanda derivada: ocorrem no caso de itens que são usados na linha de produção de alguns produtos acabados. Ex: Pneus de automóveis em razão das vendas do produto acabado, que é o automóvel.

Um fator relevante são os custos de estoque, como foi citado anteriormente, sabendo que este representa um alto custo para empresa, então essa deve ficar atenta aos critérios de custos de estoque que pode ser dividido em fases, tais como:

- Custo de colocação do pedido: custo da operação da compra;
- Descontos de preços para quantidades: pequenas compras podem ser mais caras;
- Custo pela falta de estoque: suprimento de emergência sempre é muito caro;
- Custo de capital de giro: contrair empréstimos para fazer estoques;

- Custo de armazenagem: custo da operação de armazenagem;
- Custo de obsolescência: estocagem por longos períodos corre este perigo.

É de fundamental importância para que não onere os custos do estoque ter uma perfeita sincronia no controle deste, então existem algumas técnicas de controle de estoque, e os métodos mais tradicionais utilizados são os seguintes:

- Empurrar estoques (push): utilizado quando há mais de um depósito no sistema de distribuição. Ocorre quando o que é vendido é maior que a necessidade dos estoques.
- Puxar Estoques (pull): Apenas o estoque necessário para se atender a demanda daquele produto precisa ser mantido. As quantidades mantidas tendem a ser menores do que no método push.
- Ponto de Reposição (estoque mínimo): objetiva reduzir os custos de manutenção de estoques, mas sem correr o risco de não se atender a demanda. O objetivo é encontrar o nível ótimo de estoques para um determinado produto. Para isso, é necessário que o estoque esteja devidamente controlado e que determine o ponto de reposição (PR).

Conhecedores de todos estes assuntos abordados referente ao estoque, pode-se concluir que uma empresa para cumprir todos os seus compromissos legais, financeiro e que tenha um bom crescimento de mercado é necessário que haja um perfeito controle de estoque.

*O termo controle de estoque é uma função da necessidade de estipular os diversos níveis de materiais e produtos que a organização deve manter, dentro de parâmetros econômicos [21].*

### **3 PROCESSO ESTOCÁSTICO**

Para dar ideia do que escrevemos nesta seção, é bom deixar uma sugestão um pouco abstrata para posteriormente se aprofundar.

*Muitos dos processos que ocorrem na natureza e na sociedade podem ser estudados (pelo menos em primeira aproximação) como se o fenômeno estudado passasse, a partir de um estado inicial, por uma sequência de estados, onde a transição de um determinado estado para o seguinte ocorreria segundo uma certa probabilidade [4].*

Os processos estocásticos do qual abordamos aqui são de grande relevância para o desenvolvimento deste trabalho pois boa parte do seu desenvolvimento ocorre em cima desse tema. Um processo estocástico é definido como uma coleção de variáveis aleatórias  $\{ X_t \}$  indexadas por um parâmetro  $t$  pertencente a um conjunto  $T$ .  $X_t$  representa uma característica mensurável de interesse no tempo  $t$ , por exemplo, o nível de estoque de um produto particular no final da semana  $t$ .

Processos estocásticos são de interesse por descreverem o comportamento de um sistema operando sobre algum período de tempo. A variável aleatória  $X_t$  representa o estado do sistema no tempo  $t$ . Portanto, pode-se afirmar que  $X_t$  é definida em um espaço denominado Espaço de Estados. Os processos estocásticos de interesse do nosso estudo são os chamados processos Markovianos. Um processo estocástico é dito ser um Processo Markoviano se o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados. Este tipo de processo estocástico é também denominado de processo sem memória, uma vez que o passado é “esquecido” (desprezado). Outra definição bem simples para esse processo pode ser:

*Processo de Markov é um processo cuja probabilidade de o sistema estar em determinado estado em um dado período de observação depende apenas do estado no período de observação imediatamente anterior [15].*

Um estudo detalhado de processos estocásticos requer uma definição precisa do termo *probabilidade*, o que está além dos propósitos deste trabalho. Contudo, para o estudo e compreensão de processos estocásticos, é suficiente a seguinte interpretação desse termo.

*Em termos informais, a probabilidade de um experimento ou de uma observação produzir um certo resultado é aproximadamente a fração de tempo durante a qual esse resultado ocorreria se o experimento fosse repetido muitas vezes sob condições constantes; quanto maior o número de repetições, mais precisamente a probabilidade descreve a fração de ocorrências [1].*

As probabilidades condicionais  $P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\} = p_{ij}$  são denominadas probabilidades de transição e representam, portanto, a probabilidade do estado  $X_{t+1}$  ser  $j$  no instante  $t+1$  dado que o estado  $X_t$  é igual a  $i$  no instante  $t$ .

Um Processo Markoviano é dito ser uma Cadeia de Markov quando as variáveis aleatórias  $X_t$  estão definidas em um Espaço de Estado discreto. Quando o tempo é discreto, a cadeia é dita ser uma cadeia de Markov em tempo discreto.

Suponha a observação da característica ( $X$ ) de um sistema ao longo do tempo. Considere ' $X_t$ ' o valor dessa característica em um determinado instante de tempo ' $t$ ', ressaltado que, a variável ' $t$ ' assume apenas valores discretos (0,1,2,3,...). O valor da característica é também denominado 'estado da variável'. Em muitas situações, o estado de ' $X_t$ ' não é conhecido com certeza antes do tempo ' $t$ ' e, por isso, é considerado uma variável aleatória. O *processo estocástico com o tempo discreto* é, simplesmente, a descrição da relação entre as variáveis aleatórias

$$X_0, X_1, X_2, \dots$$

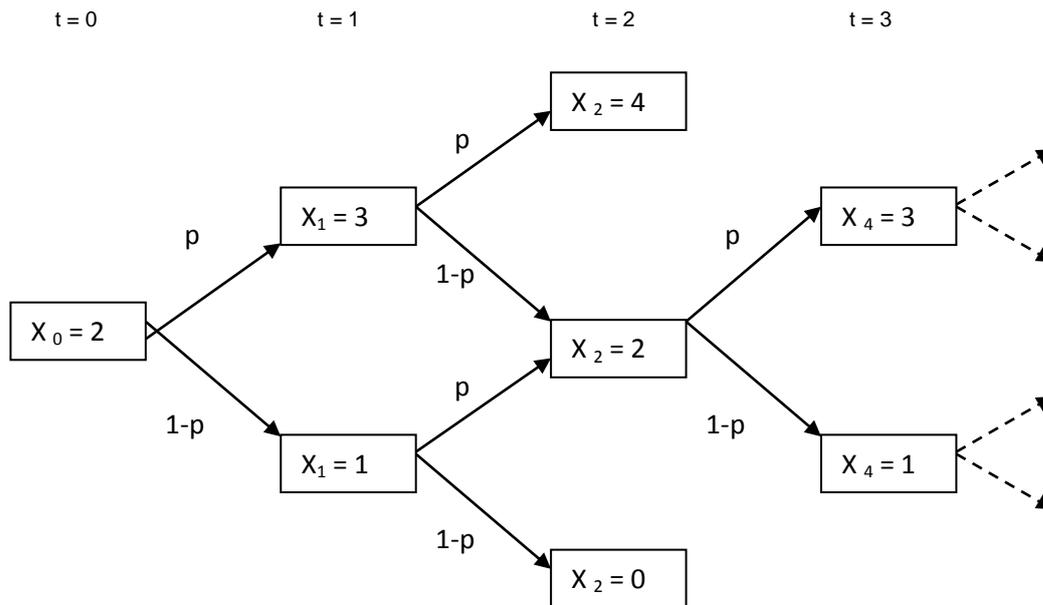
Um meio para esclarecer a ideia de processo estocástico será exemplificado em um exercício clássico conhecido como A ruína do jogador.

**Exemplo 1:** A ruína do jogador (The gambler's ruin):

No início do jogo, tempo ( $t_0$ ), o jogador tem somente R\$ 2,00. De acordo com as regras do jogo, o jogador deve apostar apenas R\$ 1,00 por vez. Com probabilidade ' $p$ ' o jogador ganha mais R\$ 1,00 e com probabilidade ' $1-p$ ' o jogador perde R\$ 1,00. O jogo acaba, sem direito a empréstimos ou prorrogações quando o jogador tem R\$ 4,00 ou perde tudo.

Considerando-se ' $X_t$ ' como a quantidade de capital que o jogador tem em um determinado instante ' $t$ ', existem 5 estados possíveis: ' $X_t = \{0,1,2,3,4\}$ '

Figura 3: Diagrama 1



Fonte: B. D. Ripley - 2006

### 3.1 Quem é Markov?

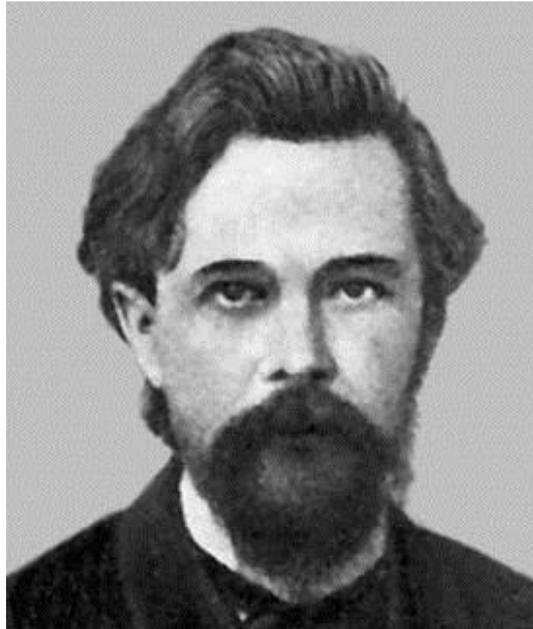
Andrei Andreyevich Markov, matemático russo que nasceu em Ryazan, 14 de junho de 1856 e faleceu em São Petersburgo, 20 de julho de 1922, foi um dos matemáticos que desenvolveu a teoria moderna do processo estocástico. Trabalhou em várias áreas da matemática, destacando no campo da teoria da probabilidade, estudando as implicações do teorema central e da lei dos grandes números.

Sua graduação ocorreu em 1878 pela Universidade de São Petersburgo, onde se tornou professor da mesma e desenvolveu seus primeiros trabalhos, sendo limite integrais e teoria da aproximação.

Tornou-se mestre em 1880, pesquisando sobre “as formas quadráticas binárias com determinante positivo”. Concluiu seu doutorado em 1884 onde tornou-se um rigoroso palestrante. Em 1900 dedicou seus estudos aos processos estocásticos. No desenvolvimento destes nasceram as cadeias de Markov.

Os processos estocásticos e a cadeia de Markov são aplicadas em diversas áreas como física atômica, teoria quântica, biologia genética, economia, finanças e comportamento social. Foi através dessas conquistas no estudo que tornou Andrei A. Markov cientista famoso.

Figura 4: Andrei Andreyevich Markov



Fonte: Carlos Eduardo Vitória da Silva – 2013

### 3.2 As Cadeias de Markov

O Processo Estocástico em questão, vem a ser o Processo Markoviano que é dito ser uma Cadeia de Markov que é um modelo matemático que fornece ideias e informações sobre uma vasta variedade de aplicações, mas é suficientemente simples para ser descrita apenas usando equações lineares e produto de matrizes.

Cadeias de Markov são quando as variáveis randômicas  $X_t$  estão definidas em um espaço de estado discreto. Para esse tipo especial de processo estocástico com o tempo discreto, se para  $t = 0, 1, 2, \dots$  e todos os outros estados é válida a seguinte distribuição:

$$P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t).$$

O que essa equação nos diz, basicamente é que a distribuição de probabilidade em um estado  $t+1$  depende apenas do estado anterior, (ver diagrama 1, figura 3).

Assumindo-se essa premissa, pode-se escrever:

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = p_{ij}.$$

Onde  $p_{ij}$  é a probabilidade de transição de  $i$  para  $j$ , ou seja, é a probabilidade de ocorrer a mudança do estado de  $i$  para o estado  $j$ . Como essa probabilidade permanece constante ao longo do tempo essa equação é frequentemente chamada de *hipótese estacionária*.

*Uma cadeia de Markov é um sistema dinâmico cujos vetores de estado numa sucessão de intervalos de tempo são vetores de probabilidade e para qual os vetores de estado em intervalos de tempo sucessivos estão relacionados por uma equação de forma  $\mathbf{x}(k + 1) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k)$  na qual  $\mathbf{P}=[p_{ij}]$  é uma matriz estocástica e  $p_{ij}$  é a probabilidade com que o sistema estará no estado  $i$  no instante  $t=k+1$  se estiver no estado  $j$  no instante  $t=k$ . A matriz  $\mathbf{P}$  é denominada a **matriz de transição** do sistema [1].*

A metodologia de análise de Markov, é um processo analítico que utiliza a situação atual e a movimentação das variáveis para prever estados futuros e o movimento futuro destas mesmas variáveis.

A teoria sobre as Cadeias de Markov, se deu o seu desenvolvimento a partir dos estudos de Andrei Markov sobre a propriedade da perda de memória, sendo essas cadeias aplicadas nos mais diversos ramos da ciência.

*Cadeias de Markov são os mais simples modelos matemáticos para os fenômenos aleatórios que se evoluem no tempo. Sua estrutura simples torna possível dizer muito sobre o seu comportamento. Ao mesmo tempo, a classe das Cadeias de Markov é rico suficiente para servir em diversas aplicações[20].*

O maior uso das cadeias está no campo de Marketing. Nesta área, são usadas para analisar e prever comportamento do consumidor em termos de fatia de mercado, fidelidade à marca e mudança de marca. Podem também ser usadas em outras áreas da administração: finanças, gestão de pessoas, produção, substituição de equipamentos, filas, análise de estoques, atribuição otimizada de trabalho, etc.

Na área mercadológica, por exemplo, quando do uso das cadeias de Markov para estudos de participação de mercado, são necessários os seguintes dados:

- a) fatia atual do mercado, ou participação atual no mercado de cada uma das empresas concorrentes;
- b) taxa de retenção, ou a percentagem dos atuais consumidores de determinada marca ou companhia que tendem a permanecer com a mesma marca ou companhia;
- c) taxa de perda, ou a percentagem de clientes de determinada marca ou companhia que passam para cada uma das marcas ou companhias concorrentes;

d) taxa de ganho, ou percentual de clientes de outra marca ou companhia que mudaram para esta marca ou companhia.

Os exemplos seguintes foram usados para testificar o assunto descrito anterior e serve para complementar a explicação.

### Exemplo 2

No mercado de empresas de dedetização concorrem atualmente três empresas. Do total de mercado previsto em 10.000 moradias que semestralmente fazem a sua dedetização, a empresa MATA-MOSCA detém atualmente 5.000; a empresa PULVERIZA detém 3.000 e a empresa EXTERMINADORA detém 2.000. Baseando-se em observações de semestres anteriores, a previsão de manutenção e perda dos clientes está colocada na tabela a seguir, considerando-se que todos os clientes fazem dedetizações a cada seis meses.

Tabela 2: Demonstrativo das empresas de dedetização

Empresa	1º semestre 2009	2º semestre 2009		
		A	B	C
A – MATA-MOSCA	5.000	3.500	500	1.000
B – PULVERIZA	3.000	300	2.400	300
C – EXTERMINADORA	2.000	100	100	1.800
Situação no 2º semestre		3.900	3000	3.100

Analisando os dados fornecidos podemos tirar as seguintes informações:

- dos clientes da empresa MATA-MOSCA (A), 5.000 no 1º semestre de 2009, 3.500 continuaram a usar dos serviços desta mesma empresa no 2º semestre, 500 passaram a usar dos serviços da PULVERIZA (B) e 1.000 mudaram para a empresa EXTERMINADORA (C);
- dos clientes da empresa PULVERIZA, 3.000 no 1º semestre de 2009, 2.400 continuaram com a mesma empresa, 300 mudaram para a MATA-MOSCA e 300 para a EXTERMINADORA;

- dos 2.000 clientes da empresa EXTERMINADORA , dados do 1º semestre de 2009, 1.800 continuaram com ela, 100 mudaram para a MATA-MOSCA e outras 100 passaram para PULVERIZA.

A situação de mercado no 2º semestre de 2009 é dada pela última linha da tabela. Por ela vemos que a empresa A passará a ter 3.900 clientes, a empresa B continuou com 3.000 e a empresa C, 3.100.

Deste modo:

- a empresa MATA-MOSCA perdeu 22% de sua fatia de mercado (1.100/5.000) ou 11% do mercado total (1.100/10.000);
- a empresa PULVERIZA não teve alterada a sua participação de mercado, já que os clientes que perdeu para a concorrência são em número igual aos clientes que ganhou da concorrência;
- a empresa EXTERMINADORA aumentou a sua participação de mercado em 11% do mercado global (1.100/10.000) ou em 55% a sua participação (1.100/2.000).

As taxas de retenção e perda podem ser expressas na forma percentual e têm os seguintes valores:

Tabela 3: Taxas de retenção e perda

MATA-MOSCA	Taxa de retenção	=	3.500/5.000	=	0,70
	Taxa de perda para B	=	500/5.000	=	0,10
	Taxa de perda para C	=	1.000/5.000	=	0,20
	Taxa total de perda	=	1.500/5.000	=	0,30
PULVERIZA	Taxa de retenção	=	2.400/3.000	=	0,80
	Taxa de perda para A	=	300/3.000	=	0,10
	Taxa de perda para C	=	300/3.000	=	0,10
	Taxa total de perda	=	600/3.000	=	0,20

EXTERMINADORA	Taxa de retenção	=	1.800/2.000	=	0,90
	Taxa de perda para A	=	100/2.000	=	0,05
	Taxa de perda para B	=	100/2.000	=	0,05
	Taxa total de perda	=	200/2.000	=	0,10

As taxas de retenção e de perda formam o que chamamos de matriz de transição e determinam a mudança de estado entre um período e outro. Assim,

$$\begin{bmatrix} 0,70 & 0,10 & 0,20 \\ 0,10 & 0,80 & 0,10 \\ 0,05 & 0,05 & 0,90 \end{bmatrix}$$

Uma matriz de estado é fornecida pela fatia de mercado, em termos percentuais do mercado total, de cada uma das empresas. Para cada período de tempo considerado existe uma matriz de estado e é necessário, portanto, identificar a qual período aquela matriz se refere. Nessa situação a matriz de estado atual (n=0) é obtida pegando os valores da Tabela 2, onde se refere ao 1º semestre de 2009 e transforma-los em porcentagens descritos na forma de números decimais.

As matrizes dos períodos (1º e 2º semestres de 2009) podem ser obtidas da Tabela 3. Assim

Matriz de estado atual (n=0)

$$[0,50 \quad 0,30 \quad 0,20]$$

Matriz de estado no período seguinte (n=1)

$$[0,39 \quad 0,30 \quad 0,31]$$

A matriz de estado no período seguinte (n=1) - 2º semestre de 2009 - foi obtida pela multiplicação da matriz de estado atual pela matriz de transição:

$$[0,50 \quad 0,30 \quad 0,20] \times \begin{bmatrix} 0,70 & 0,10 & 0,20 \\ 0,10 & 0,80 & 0,10 \\ 0,05 & 0,05 & 0,90 \end{bmatrix} = [0,39 \quad 0,30 \quad 0,31]$$

A explicação é a seguinte:

A fatia de mercado em  $n=1$  da **empresa A** é fornecida pela Tabela 4 onde foi aplicado o sistema de multiplicação de matrizes:

Tabela 4: Fatia de mercado da empresa A

Mercado retido pela	empresa A	$(0,50 \times 0,70)$	Mais
Mercado ganho da	empresa B	$(0,30 \times 0,10)$	Mais
Mercado ganho da	empresa C	$(0,20 \times 0,05)$	= 0,39

A fatia de mercado em  $n=1$  da **empresa B** é calculado pelo mesmo sistema anterior:

Tabela 5: Fatia de mercado da empresa B

Mercado ganho da	empresa A	$(0,50 \times 0,10)$	Mais
Mercado retido pela	empresa B	$(0,30 \times 0,80)$	Mais
Mercado ganho da	empresa C	$(0,20 \times 0,05)$	= 0,30

A fatia de mercado em  $n=1$  da **empresa C** é calculado da mesmo forma descrita nas Tabelas 4 e 5:

Tabela 6: Fatia de mercado da empresa C

Mercado ganho da	empresa A	$(0,50 \times 0,20)$	Mais
Mercado ganho da	empresa B	$(0,30 \times 0,10)$	Mais
Mercado retido pela	empresa C	$(0,20 \times 0,90)$	= 0,31

A matriz de estado no período  $n=2$  indica qual a posição de mercado das 3 empresas após mais um período, ou seja, o 1º semestre de 2010. Como a premissa inicial é de que não houve mudança nas características de mercado e que, portanto, a matriz de transição não se alterou, podemos obter a matriz no período  $n=2$  pela multiplicação da matriz de estado  $n=1$  pela matriz de transição. Veja:

$$[0,39 \quad 0,30 \quad 0,31] \times \begin{bmatrix} 0,70 & 0,10 & 0,20 \\ 0,10 & 0,80 & 0,10 \\ 0,05 & 0,05 & 0,90 \end{bmatrix} = [0,319 \quad 0,294 \quad 0,387]$$

A fatia de cada empresa é:

$$A = (0,39 \times 0,70 + 0,30 \times 0,10 + 0,31 \times 0,05) = 0,319$$

$$B = (0,39 \times 0,10 + 0,30 \times 0,80 + 0,31 \times 0,05) = 0,294$$

$$C = (0,39 \times 0,20 + 0,30 \times 0,10 + 0,31 \times 0,90) = 0,387.$$

Agora a empresa B diminuiu a sua participação de mercado porque a sua habilidade de atrair 10% dos clientes da A e 5% dos clientes da C diminuiu dada a redução do número total de clientes da empresa A (eram 5.000 e ficaram só 3.500).

O resultado nos indicou que, não ocorrendo mudanças de mercado, no período  $n=2$ , ou 1º semestre de 2010, a fatia de mercado da MATA-MOSCA é de 31,9% ou 3.190 clientes, a da PULVERIZA é de 29,4% ou 2.940 clientes e a da empresa EXTERMINADORA é de 38,7% ou 3.870 clientes.

Aplicando-se sucessivamente a multiplicação da matriz de estado pela matriz de transição, obtemos as seguintes fatias de mercado nos períodos seguintes:

Tabela 7: Fatia de mercado das empresas A, B e C

Período	Fatia de mercado		
	A	B	C
n=0	50,0%	30,0%	20,0%
n=1	39,0%	30,0%	31,0%
n=2	31,9%	29,5%	38,7%
n=3	27,2%	28,7%	44,1%
n=4	24,1%	27,9%	48,0%
n=5	22,1%	27,1%	50,8%
n=6	20,7%	26,4%	52,9%
n=7	19,8%	25,9%	54,4%

n=8	19,1%	25,4%	55,5%
n=9	18,7%	25,0%	56,3%

No ponto de equilíbrio, que consiste quando chega em um determinado período n e os valores dos percentuais não mais se alteram (que nesse caso ocorre no período n=31) a posição de mercado de cada empresa é:

$$x = 0,1765 \quad y = 0,2353 \quad e \quad z = 0,5882.$$

MATA-MOSCA = 17,65%    PULVERIZA = 23,53%    EXTERMINADORA = 58,82%

### Exemplo 3

Uma grande rede de supermercados está interessada em analisar a sua participação de mercado e a fidelidade de seus clientes em comparação a duas outras grandes redes da cidade. O número de clientes atendidos por mês pelas três redes perfaz um total de 800.000. A fatia atual de mercado para cada empresa, assim como a previsão de manutenção e perda dos clientes está descrita a seguir.

Tabela 8: Previsão de manutenção e perda dos clientes dos supermercados

Supermercado	1º mês	2º mês		
		1	2	3
1 – TRIUNFO	400.000	200.000	100.000	100.000
2 – GLORIOSO	160.000	20.000	120.000	20.000
3 – MAJESTADE	240.000	42.000	78.000	120.000
Situação no 2º mês		262.000	298.000	240.000

Com base nestes dados:

- Reescreva a tabela acima, inserindo os dados em forma percentual.
- Qual rede de supermercados aparece como tendo uma maior fidelidade de seus clientes? Explique.

- c) Qual a taxa total de perda de cada uma das redes de supermercado? Faça um comparativo entre elas.
- d) Qual a taxa de retenção de cada uma das redes de supermercado? Faça um comparativo entre elas.
- e) Considerando o mercado total, como ficará a fatia de participação para as três redes para o 2º mês? Faça um comparativo entre elas.
- f) Qual a matriz de transição neste problema?
- g) Qual a matriz de estado do período atual? E a do período seguinte (n=1)?
- h) Qual a matriz de estado após o período seguinte (n=2)? Comente.

**Respostas do exemplo 3:**

a)

Tabela 9: Previsão de manutenção e perda dos clientes dos supermercados em percentual.

Supermercado	1º mês	2º mês		
		1	2	3
1 – TRIUNFO	50,0%	50,00%	25,00%	25,00%
2 – GLORIOSO	20,00%	12,50%	75,00%	12,50%
3 – MAJESTADE	30,00%	17,50%	32,50%	50,00%
Situação no 2º mês		32,75%	37,25%	30,00%

b) A rede de supermercados que parece ter uma maior fidelidade dos clientes é a GLORIOSO, dado que o número percentual de clientes que se manterão no segundo mês é maior do que o número percentual de clientes que as outras redes conseguem reter. Ou seja, enquanto as redes de supermercados TRIUNFO e MAJESTADE têm uma previsão de manter apenas 50% de seus clientes, a rede GLORIOSO possui uma previsão de 75%.

c) A taxa de perda de clientes do supermercado TRIUNFO é de 25% tanto para o supermercado GLORIOSO quanto para o MAJESTADE. Totalizando uma perda de 50% para os outros supermercados.

A taxa de perda de clientes do supermercado GLORIOSO é de 12,5% tanto para o supermercado TRIUNFO quanto para o MAJESTADE. Totalizando uma perda de 25% para os outros supermercados.

A taxa de perda de clientes do supermercado MAJESTADE é de 17,5% para o supermercado TRIUNFO e 32,5% para o GLORIOSO. Totalizando uma perda de 50% para os outros supermercados.

Deste modo percebe-se que a taxa de perda total de TRIUNFO e MAJESTADE se equivale. No entanto, cabe notar que o número de clientes a ser perdido é maior na rede TRIUNFO, seguida pela MAJESTADE, sendo portanto, a rede GLORIOSO aquela a perder o menor número de clientes. O que pode ser observado na resposta ao item (b).

d) A taxa de retenção das redes de supermercado é 50% para as redes TRIUNFO, assim como da rede de supermercados MAJESTADE, enquanto a rede GLORIOSO possui uma retenção de 75% dos seus clientes, ou 120.000, que apesar de serem, em quantidade, igual ao número de clientes mantidos pela rede MAJESTADE, representam mais para GLORIOSO devido à abrangência total do seu mercado.

e) A previsão é de que a rede de supermercados TRIUNFO tenha uma abrangência de 32,75% do mercado, abaixo da fatia de mercado prevista para a rede GLORIOSO, que estará em torno de 37,25%. Enquanto que a parte do mercado que cabe à rede de supermercados MAJESTADE é de 30%.

$$f) \begin{bmatrix} 0,50 & 0,25 & 0,25 \\ 0,125 & 0,75 & 0,125 \\ 0,175 & 0,325 & 0,50 \end{bmatrix}.$$

g) Período atual: [0,50 0,20 0,30] e Período seguinte (n=1): [0,3275 0,3725 0,30]

$$h) \text{Período } n=2: [0,3275 \quad 0,3725 \quad 0,30] \times \begin{bmatrix} 0,50 & 0,25 & 0,25 \\ 0,125 & 0,75 & 0,125 \\ 0,175 & 0,325 & 0,50 \end{bmatrix} = [0,2628 \quad 0,4588 \quad 0,2784].$$

Temos então para o período  $n=2$ , ou 3º mês, a previsão de que a rede TRIUNFO detenha 26,28%; a GLORIOSO 45,88% e a MAJESTADE 27,84%, o que significaria um aumento significativo na fatia de mercado ocupada pela rede de supermercados GLORIOSO.

Assim, concluindo todas as séries de exemplos e exercícios apresentado nessa seção deixamos exposto o conceito de Processo Estocástico aplicado em algo concreto, podemos levar para o cotidiano, a qual é abordado na próxima seção.

## 4 A PRÁTICA DE CONTROLE DE ESTOQUE POR PROCESSOS ESTOCÁSTICOS (PROCESSO MARKOVIANO)

Como já explicado nas seções anteriores a respeito de estoque e processo estocástico, abordamos um modelo real da aplicação desse, de forma prática e direta.

Essa junção dos dois temas abordados aplicado na prática é conhecida como Modelagem Matemática<sup>4</sup>, que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, sendo empregada em diversos campos, tais como física, química, biologia, economia e engenharias. Ou seja, modelagem matemática consiste em descrever matematicamente um fenômeno.

*A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real [2].*

A situação problema ocorre em um supermercado de pequeno porte na cidade de Anicuns-Go, não constando identificação do estabelecimento no corpo do trabalho, onde foi realizada uma pesquisa de controle de estoque de alguns produtos e os que tiveram maior relevância foram os Molhos de Tomate. É bom

---

<sup>4</sup> A teoria de modelagem matemática não é objetivo desse trabalho, mas sim mostrar que a referida se trata da situação proposta. Para uma leitura mais detalhada veja [2].

ressaltar que o controle de estoque na seção em que se encontram os referidos molhos é feita por um profissional conhecido como repositor de seção, que nesse caso essa função está sendo realizada por um funcionário que está cursando o terceiro ano do ensino médio em um colégio da rede estadual de ensino na cidade onde se encontra o supermercado.

Existindo várias marcas de molhos, foi escolhida uma marca, não divulgaremos seu nome, que está tentando conquistar o mercado da região onde se encontra o supermercado. Sendo esta marca bem aceita pelos consumidores, com alguns destes já assegurando ser fiel a marca, segundo o repositor, isso se dá devido seu preço ser menor que outras marcas e ter uma boa qualidade.

Os molhos selecionados foram de três sabores:

- **MOLHO DE TOMATE REFOGADO TRADICIONAL**, que é denotado por Molho A, na embalagem de 340g, onde seus ingredientes são: Tomate, polpa de tomate, sal, amido modificado, açúcar, óleo vegetal, cebola, salsa em flocos e alho em pó. Não contém glúten.

Figura 5: Molho de Tomate Refogado Tradicional



Fonte: Figura elaborada pelo autor

- **MOLHO DE TOMATE MANJERICÃO**, que é denotado por Molho B, na embalagem de 340g, onde seus ingredientes são: Tomate, polpa de tomate, sal, amido, açúcar, óleo de soja, cebola desidratada, salsa, manjericão em flocos, azeite de oliva e alho em pó. Não contém glúten.

Figura 6: Molho de Tomate Manjericão



Fonte: Figura elaborada pelo autor

- MOLHO DE TOMATE ERVAS FINAS, que é denotado por Molho C, na embalagem de 340g, com os seguintes ingredientes: Tomate, polpa de tomate, sal, amido, açúcar, óleo de soja, cebola desidratada, salsa, alecrim, orégano em flocos, alho em pó, azeite de oliva, manjericão em flocos e louro em pó. Não contém glúten.

Figura 7: Molho de Tomate Ervas Finas



Fonte: Figura elaborada pelo autor

Apresentado os três sabores de molhos, é simulado pelo Processo Markoviano o controle de estoque dos referidos, ressaltando que para essa

simulação o valor do produto não altera o resultado, pois os três sabores possuem o mesmo preço de venda, o fator de relevância é preferência do consumidor pelos sabores em questão, sabendo que alguns tem mais aceitação que outros.

Essa pesquisa foi realizada de duas maneiras: por observação e abordagem direta ao consumidor. Sendo uma cidade interiorana a localização do supermercado é bem comum que as pessoas sempre conheçam uma as outras, com isso facilitou bem no processo de pesquisa.

O cronograma da pesquisa foi de duas semanas de observação, considerando que a semana comece na segunda-feira e termine no domingo. Durante esse período de observação e abordagem foram registrados 48 (quarenta e oito) consumidores fieis a marca, que toda semana consome um dos molhos referidos.

Inicialmente o supermercado comprou quatro caixas de Molho A, duas caixas de Molho B e 2 caixas de Molho C, é bom ressaltar que cada caixa possui 24 unidades e são de um mesmo sabor, não existindo a possibilidade de caixas mista em sabores.

Esse supermercado tem que obedecer as regras de administração no que se diz ao controle de estoque, tais como comprar em lotes maiores e estoque mínimo que já foram explicados na Seção 2 páginas 23, 24 e 25 deste trabalho. Devido a essas cautelas de mercado a compra é feita uma vez por mês junto ao fornecedor.

Após a coleta de dados dessa pesquisa conseguimos apurar as seguintes situações:

Na primeira semana dos 48 consumidores, 30 compraram Molho A, 12 Molho B e 6 Molho C. Já na segunda semana os mesmos consumidores tiveram atitudes diferentes gerando uma nova situação. Dos 30 que levaram o Molho A, 24 continuaram consumindo o Molho A, mais 5 optaram pelo Molho B e 1 pelo Molho C. Dos 12 da semana anterior que levaram o Molho B, 8 continuaram com o Molho B, sendo que 3 migraram para o Molho A e 1 para o Molho C. Outra mudança ocorreu com 6 consumidores de Molho C, 3 continuaram com mesmo molho (Molho C), mais 2 passaram a consumir o Molho A e 1 o Molho B.

Com a coleta e apuração desses dados fica a questão: Será que o estoque adquirido no inicio vai ser compatível com consumo até na quarta semana, e como

deverá ser o próximo pedido? Lembrando que o pedido deve ser feito na terceira semana para que chegue no início da quinta semana.

Para fazer essa previsão usamos o Processo Estocástico (Processo Markoviano), que para início vai transportar esses dados para uma tabela. É bom ressaltar que como se trata de um aluno de ensino médio o repositor de seção, a resolução das Cadeias de Markov fica mais focada na resolução através de multiplicação de matrizes e porcentagens, conteúdo pertinente para o ensino médio.

Tabela 10: Comportamento dos consumidores em relação aos Molhos de Tomate

1ª SEMANA		2ª SEMANA		
		MOLHO A	MOLHO B	MOLHO C
MOLHO A	30	24	5	1
MOLHO B	12	3	8	1
MOLHO C	6	2	1	3
TOTAL: 48		29	14	5

Para começar a efetuar cálculos usado as Cadeias de Markov, transformamos os dados da tabela 10 em porcentagem<sup>5</sup>. Usamos o seguinte critério de transformação.

Tabela 11: Transformação dos dados em porcentagem

1ª SEMANA		2ª SEMANA		
		MOLHO A	MOLHO B	MOLHO C
MOLHO A	$(30/48).100$	$(24/30).100$	$(5/30).100$	$(1/30).100$
MOLHO B	$(12/48).100$	$(3/12).100$	$(8/12).100$	$(1/12).100$
MOLHO C	$(6/48).100$	$(2/6).100$	$(1/6).100$	$(3/6).100$
TOTAL: $(48/48).100$		$(29/48).100$	$(14/48).100$	$(5/48).100$

Efetuada os cálculos descritos na Tabela 11, encontram-se os resultados inseridos na Tabela 12.

Tabela 12: Comportamento dos consumidores em relação aos Molhos de Tomate descritos em porcentagem.

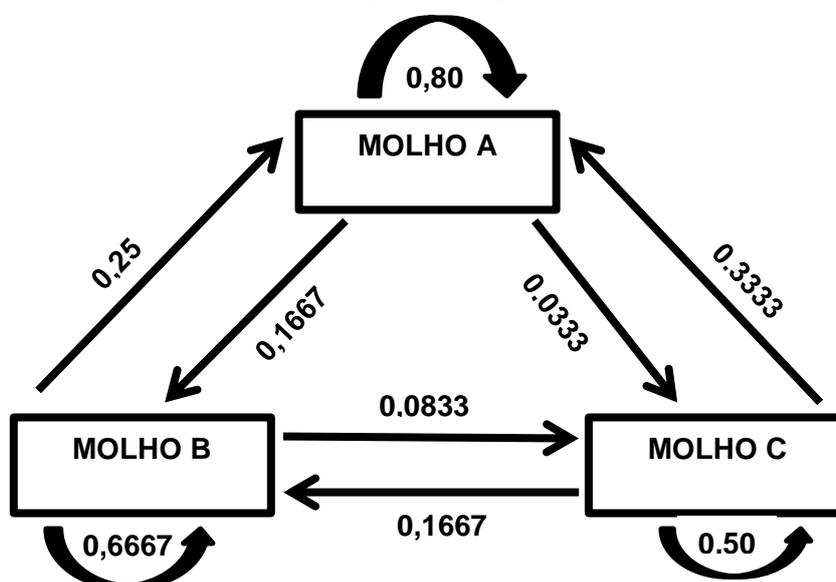
1ª SEMANA	2ª SEMANA
-----------	-----------

<sup>5</sup> A explicação de porcentagem e como transforma algum dado em porcentagem para o leitor que interessar em aprofundar pode realizar a leitura nos livros: [6] e [9].

		MOLHO A	MOLHO B	MOLHO C
MOLHO A	62,5%	80%	16,67%	3,33%
MOLHO B	25%	25%	66,67%	8,33%
MOLHO C	12,5%	33,33%	16,67%	50%
TOTAL:	100%	60,42%	29,17%	10,41%

Como escrito na seção 3 os meios de se achar a matriz de estado, nessa situação problema são os dados da 1ª semana que estão lançados na Tabela 12, só que esses dados serão escritos em números decimais (dividir o valor que está em porcentagem por 100) na forma de uma matriz linha (matriz que possui uma única linha e n colunas) essa Matriz de Estado corresponde ao período  $n=0$ .

Figura 8: Diagrama 2



Fonte: Figura elaborada pelo autor

Agora encontra-se a Matriz de Transição que já foi demonstrada como se calcula na seção 3 deste trabalho. Nesse caso a Matriz de Transição são os dados da 2ª Semana (Tabela 12), expressos em números decimais.

Após encontrar essas matrizes, será feita a multiplicação de matrizes<sup>6</sup>, Matriz de Estado X Matriz de Transição, o produto encontrado corresponde ao

<sup>6</sup> Ao leitor que desejar fazer uma leitura mais detalhada de multiplicação de matrizes, pode recorrer a referência bibliográfica [6] e [9].

estado do comportamento dos consumidores na 2ª semana, que é a Matriz de Estado no período n=1.

Matriz de Estado período n=0: [0,625 0,25 0,125]

$$\text{Matriz de Transição} = \begin{bmatrix} 0,80 & 0,1667 & 0,0333 \\ 0,25 & 0,6667 & 0,0833 \\ 0,3333 & 0,1667 & 0,50 \end{bmatrix}$$

$$[0,625 \quad 0,25 \quad 0,125] \times \begin{bmatrix} 0,80 & 0,1667 & 0,0333 \\ 0,25 & 0,6667 & 0,0833 \\ 0,3333 & 0,1667 & 0,50 \end{bmatrix} = [0,6042 \quad 0,2917 \quad 0,1041]$$

Para melhor compreender a multiplicação de matrizes realizada na situação acima, os cálculos são demonstrados na Tabela 13.

Tabela 13: Multiplicação de Matriz de Estado pela Matriz de Transição

$0,625 \times 0,80 + 0,25 \times 0,25 + 0,125 \times 0,3333$	=	0,6042
$0,625 \times 0,1667 + 0,25 \times 0,6667 + 0,125 \times 0,1667$	=	0,2917
$0,625 \times 0,0333 + 0,25 \times 0,0833 + 0,125 \times 0,50$	=	0,1041

Conhecendo agora a Matriz de Estado no período n=1, pode-se encontrar a Matriz de Estado no período n=2 que corresponde a 3ª semana de venda. A forma de calcular segue o mesmo padrão descrito na Tabela 13, mais agora a Matriz de Estado no período n=2 corresponde ao produto da Matriz de Estado no período n=1 pela Matriz de Transição, temos

$$[0,6042 \quad 0,2917 \quad 0,1041] \times \begin{bmatrix} 0,80 & 0,1667 & 0,0333 \\ 0,25 & 0,6667 & 0,0833 \\ 0,3333 & 0,1667 & 0,50 \end{bmatrix} = [0,5910 \quad 0,3125 \quad 0,0965]$$

Para encontrar a possível situação de venda da 4ª semana vamos encontrar a Matriz de Estado no período n=3, que é na realidade o produto da Matriz de Estado no período n=2 pela Matriz de Transição, obtemos

$$[0,5910 \quad 0,3125 \quad 0,0965] \times \begin{bmatrix} 0,80 & 0,1667 & 0,0333 \\ 0,25 & 0,6667 & 0,0833 \\ 0,3333 & 0,1667 & 0,50 \end{bmatrix} = [0,5830 \quad 0,3230 \quad 0,0940]$$

Agora que se tem a Matriz de Estado no período  $n = \{0, 1, 2 \text{ e } 3\}$ , deve transforma-las em número de molhos vendidos ou que estima vender, o cálculo é bem simples. Para o período  $n=0$  e  $n=1$  já esta pronto, deve fazer para  $n=2$  e  $n=3$ , conhecendo que se vende 48 molhos por semana para saber a quantidade individual de cada sabor de molho, multiplica cada valor da Matriz de Estado desejada por 48. Chegando aos seguintes resultados:

Tabela 14: Quantidade de molhos nas quatro semanas

	MOLHO A	MOLHO B	MOLHO C
1ª SEMANA	30	12	6
2ª SEMANA	29	14	5
3ª SEMANA	28	15	5
4ª SEMANA	28	16	4
<b>TOTAL</b>	<b>115</b>	<b>57</b>	<b>20</b>

Com os valores apurados façamos algumas análises e tomar decisões referente aos produtos. Conclusões e sugestões são que na quarta semana faltará Molho A e Molho B e sobrando em estoque o Molho C, pois se existiam 4 caixas de Molho A que corresponde a 96 unidade ( $4 \times 24$ ) e a previsão total de vendas é de 115, isso implica uma falta de 19 unidades. O mesmo ocorre para Molho B, são duas caixas dando um total de 48 unidades ( $2 \times 24$ ) e a previsão de vendas é de 57 unidades, falta de 9 unidades. Já para Molho C que também são duas caixas, ou seja 48 unidades, a situação é que serão vendidas 20 unidades e sobrarão em estoque 28 unidades.

Sendo que o pedido de novas mercadorias devem ser feito na terceira semana para chegar na quinta semana, o proprietário do supermercado que é responsável pelos pedidos deve tomar cuidado para não repetir o pedido anterior e sim verificar que faltará Molho A e B e sobrarão Molho C, o seu pedido terá que ser de 5 caixas de Molho A, 3 Caixas de Molho B e nenhuma de Molho C, mantendo a meta de oito caixas por pedido, com isso para as quatro próximas semanas não faltará e nem sobrarão produto fazendo um perfeito controle de estoque, usando a ideia de equilíbrio entre demanda e procura.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A prioridade deste trabalho foi mostrar novas perspectivas para o ensino de matemática mediado por uma modelagem, como uma alternativa para o seu ensino. Ao desenvolver esta proposta, pode-se obter uma aprendizagem com significado voltado ao cotidiano do aluno. Atividades estas que contribuem para melhor compreensão de possíveis problemas do mundo real, e também para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático de cada um dos aprendizes.

Com essa modelagem abordada, é possível mostrar ao funcionário-aluno para que fique focado nos níveis de estoque para a satisfação do cliente e da empresa. Bem como conseguir similar princípios matemáticos com suas atividades remuneradas, do qual, tais conhecimentos são adquiridos na escola e aplicados no seu cotidiano.

Sendo que de modo muito simples pode comentar sobre as Cadeias de Markov, que é um processo cuja probabilidade de o sistema estar em determinado estado em um dado período de observação depende apenas do estado no período de observação imediatamente anterior [15].

Então, de posse dos conhecimentos sobre as cadeias de Markov e aplicando tal conhecimento em controle de estoque usando uma modelagem, e resulta em uma situação corriqueira em pequenas empresas que é conseguir formular pedido de mercadorias junto ao fornecedor para vendas futuras.

O mais agradável em abordar esse tema é que quando se apresenta o mesmo, causa espanto aos espectadores, mas no momento em que começa a ser manuseado com uma linguagem não formal e associando com conteúdos que já conhecem, isso torna prazeroso e automaticamente a aprendizagem vem à tona.

Contudo o trabalho conseguiu mostrar que se pode trabalhar um conteúdo matemático, muitas das vezes abstrato para o aluno, em conformidade com sua realidade.

## REFERÊNCIAS

- [1] ANTON, Howard, **Álgebra Linear Aplicada**, traduzido por Claus Ivo Doering. 8ed. - Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [2] BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo: Contexto, 2011.
- [3] BERTSEKAS, Dimitri P. and John N. Tsitsiklis, **Introduction to Probability**, USA, 2000.
- [4] BOLDRINI, José Luiz, et al, **Álgebra Linear**, 3ed., São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.
- [5] BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria da Educação: Orientações Curriculares Nacionais. **Ensino de quinta a oitava séries. Introdução aos parâmetros curriculares nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/introducao.pdf>>. Acesso em: 30 jun. 2014
- [6] DANTE, Luiz Roberto, **Matemática: contextos e aplicações**, 1ed., São Paulo: Ática, 2010.
- [7] DIAS, Marco Aurélio P. **Administração de Materiais**, 5ed. ,São Paulo: Atlas, 2006.
- [8] FERNADES JR, D.P., et al, **Conceitos e Simulação de Cadeias de Markov**, Goiânia, Go.
- [9] GIOVANNI, José Ruy e BONJORNA, José Roberto, **Matemática Completa**, 2ed. São Paulo: FTD, 2005.
- [10] GITMAN, Lawrence Jeffrey, **Princípios de Administração Financeira**, 10ed., São Paulo: Pearson Addison Wesley, 2004.

- [11] HARRISON, Allan e HOEK, REMKO VAN, **Estratégia e Gerenciamento de Logística**, São Paulo: Futura 2003.
- [12] HOEL, P. G., Port, S. C. e Stone, C. J. **Introduction to stochastic processes**, Waveland Press, 1986.
- [13] HOJI, Masakazu, **Administração Financeira: Uma Abordagem prática: matemática financeira aplicada, estratégias financeiras, análise, planejamento e controle financeiro**, 5ed., 3. Reimpressão, São Paulo: Atlas, 2006.
- [14] IUDÍCIBUS, Sérgio de, **Contabilidade Comercial: atualizado conforme Lei nº 11.638/07 e Lei nº 11.941/09**, 9ed., São Paulo: Atlas, 2010.
- [15] KOLMAN, Bernard e David R. Hill, **Introdução à Álgebra Linear com Aplicações**, traduzido por Alessandra Bosquilha, 8ed, Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [16] LOPES SÁ, Antônio, **Contabilidade para Pequenos Empresários**. Rio de Janeiro: Tecnoprint, 1989.
- [17] NICHOLSON, W. Keith, **Álgebra Linear**, traduzido por Célia Mendes carvalho Lopes, Leila Maria Vasconcellos Figueiredo, Martha Salerno Monteiro, 2ed., São Paulo: McGraw-Hill, 2006.
- [18] NOBLE, Ben e Daniel, James W., **Álgebra Linear Aplicada**, traduzido por Pitombeira, J., PHB Editora, 2ed., 1986.
- [20] NORRIS, J. R., **Markov Chains**, University of Cambridge, First published 1997, Reprinted 1998, New York, USA.

- [21] POZO, Hamilton **Administração de Recursos Materiais e Patrimoniais**, 4ed., São Paulo: Atlas,2007.
- [22] RIPLEY, B.D., **Stochastic Simulation**, Wiley-Interscience,1ed., 2006.
- [23] SILVA, Carlos Eduardo Vitória da. **Aplicações da Álgebra Linear nas Cadeias de Markov**, 2013, 20p.