



Universidade Federal de Goiás  
Regional Jataí  
Programa de Mestrado Profissional em  
Matemática em Rede Nacional



Cálculo de área e volume aplicado à análise de  
projetos técnicos de incêndio em tanques  
contendo líquidos combustíveis e inflamáveis

Wiliam Alves Diniz Júnior

Jataí

2014

**TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG**

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

**1. Identificação do material bibliográfico:** **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

**2. Identificação do Trabalho**

Autor (a):		Wiliam Alves Diniz Júnior			
E-mail:		wiliamadj@gmail.com			
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? <input checked="" type="checkbox"/> Sim <input type="checkbox"/> Não					
Vínculo empregatício do autor		Corpo de Bombeiros Militar			
Agência de fomento:					Sigla:
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	33.638.099/0001-00
Título: Cálculo de área e volume aplicado à análise de projetos técnicos de incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis					
Palavras-chave: Área, volume, incêndio, líquido inflamável.					
Título em outra língua: Calculus of area and volume applied to analysis of fire technical projects in tanks containing flammable and combustible liquids.					
Palavras-chave em outra língua: Area, volume, fire, flammable liquids.					
Área de concentração:		Matemática do Ensino Básico			
Data defesa: (dd/mm/aaaa)		24/07/2014			
Programa de Pós-Graduação:		PROFMAT			
Orientador (a):		Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa			
E-mail:		3sdras@gmail.com			
Co-orientador(a):*					
E-mail:					

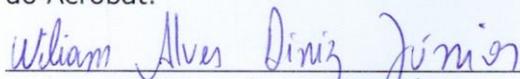
\*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

**3. Informações de acesso ao documento:**

Concorda com a liberação total do documento  SIM  NÃO<sup>1</sup>

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

  
 Wiliam Alves Diniz Júnior

Data: 26 / 08 /2014.

<sup>1</sup> Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

William Alves Diniz Júnior

**Cálculo de área e volume aplicado à análise de projetos técnicos de incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado a Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico

Orientador: Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa

Jataí

2014

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**  
**BSCAJ/UFG**

D583c   Diniz Júnior, Wiliam Alves  
        Cálculo de área e volume aplicado à análise de projetos técnicos de  
        incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis  
        [manuscrito] / Wiliam Alves Diniz Júnior. - 2014.  
        220 f. : il., figs., tabs.

        Orientador: Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa.  
        Dissertação - (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Regional  
        Jataí – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
        Nacional, 2014.  
        Bibliografia.  
        Inclui lista de tabelas e figuras.

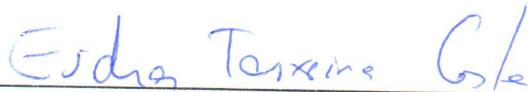
        1. Proteção contra incêndio. 2. Geometria - Área e volume. 3.  
        Arquitetura - Edificações.

CDU: 614.841.31(817.3)

## Wiliam Alves Diniz Júnior

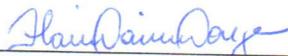
### **Cálculo de área e volume aplicado à análise de projetos técnicos de incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, Pólo Jataí da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 24 de julho de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:



---

**Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa**  
Presidente da Banca  
Coordenação PROFMAT-CAJ/UFG



---

**Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza**  
Membro-IFG/Goiânia



---

**Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Luciana Aparecida Elias**  
Membro - Coordenação do PROFMAT-CAJ/UFG

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial deste trabalho sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

**William Alves Diniz Júnior** graduou-se em Segurança Pública no ano de 2006 pela Universidade Estadual de Goiás, é oficial do Corpo de Bombeiros Militar do Estado de Goiás e especialista em inspeção e análise de projetos de áreas de risco.

*"Se o machado está cego e sua lâmina não foi afiada,  
é preciso golpear com mais força; agir com sabedoria  
assegura o sucesso."*

*Eclesiastes 10:10*

Dedico este trabalho a minha esposa Viviane Galdino  
Spíndola Diniz e a minha filha Sara Spíndola Diniz.

# Agradecimentos

Ao meu Deus pela esperança viva e eterna, pela graça de uma herança que jamais poderá perecer ou perder seu valor.

A minha esposa pela compreensão e apoio em todos os momentos.

A minha filha Sara por existir e, simplesmente por isso, me conceder o privilégio de amar incondicionalmente.

Aos meus pais pelo exemplo, pela dedicação e pelas orações.

Aos amigos e colegas de curso, em especial a Maria Isabel, a Elaine e o Onízio, parceiros de viagens e estudos.

Aos professores e tutores que nos orientaram durante esta jornada.

Ao Prof. Dr. Esdras Teixeira Costa pela orientação prestada para realização deste trabalho.

Ao Corpo de Bombeiros Militar do Estado de Goiás pelo apoio e pela confiança em mim creditada.

## **Resumo**

Calcular e estimar áreas e volumes faz parte dos serviços operacionais e preventivos realizados pelo Corpo de Bombeiros Militar do Estado de Goiás. Nos serviços de inspeção e análise de projetos, as áreas das edificações e os volumes dos líquidos inflamáveis são fatores que influenciam diretamente na determinação dos sistemas de proteção contra incêndio e pânico que deverão ser instalados nas áreas de risco. Devido à extensa normatização de proteção contra incêndio, verifica-se uma carência de materiais didáticos para instruções específicas do assunto. Assim, este trabalho apresenta uma organização didática dos conceitos matemáticos básicos necessários para as análises de projetos técnicos de incêndio referentes a parques de tanques aéreos contendo líquidos inflamáveis.

### **Palavras-chave**

Área, volume, incêndio, líquido inflamável.

## **Abstract**

Calculate and estimate areas and volumes is part of operational and preventive services performed by the Fire Brigade of the State of Goiás. In inspection and design analysis services, areas of the buildings and the volumes of flammable liquids are factors that directly influence the determination of protection systems against fire and panic that must be installed in hazardous areas. Due to extensive standardization of fire protection, there is a lack of pedagogical materials for specific instructions on the subject. Thus, this paper presents a flammable didactic organization of basic mathematical concepts needed for the analysis of fire technical projects related to overhead tanks of flammable liquids.

## **Keywords**

Area, volume, fire, flammable liquids.

## Lista de Figuras

1	Divisão de um segmento de reta em um número inteiro de vezes. . . . .	25
2	Divisão de um segmento de reta em um número racional. . . . .	26
3	Diagonal de um quadrado de lado unitário. . . . .	26
4	Área de um quadrado com comprimento de lado igual a um número natural. . . . .	28
5	Área de um quadrado com comprimento de lado igual a um número racional. . . . .	29
6	Área de um quadrado com comprimento de lado igual a um número irracional. . . . .	30
7	Área de um retângulo de comprimento de lado igual a um número real. . . . .	31
8	Área do paralelogramo. . . . .	32
9	Área do triângulo. . . . .	33
10	Área do círculo. . . . .	34
11	Comprimento da circunferência. . . . .	34
12	Volume de um cubo com comprimento de aresta igual a um número natural. . . . .	35
13	Volume de um bloco retangular com comprimento de aresta iguais a 1, 1 e $a$ com $a$ pertencente aos inteiros. . . . .	37
14	Volume de um bloco retangular com comprimento de aresta iguais a 1, $a$ e $b$ com $a$ e $b$ pertencente aos inteiros. . . . .	37
15	Volume de um bloco retangular com comprimento de aresta iguais a $a$ , $b$ e $c$ pertencentes aos inteiros. . . . .	38
16	Experiência com uma resma de papel sobre uma mesa para explicar o <i>Princípio de Cavalieri</i> . . . . .	39
17	Aplicação do <i>princípio de Cavalieri</i> . Fonte: [27]. . . . .	40
18	Relação entre as áreas da elipse e da circunferência. Fonte: [27]. . . . .	41
19	Tipos de primas. Fonte: [27]. . . . .	41
20	Volume do prisma. Fonte: [27]. . . . .	42
21	Exemplos de cilindros. Fonte: [27]. . . . .	43
22	Aplicação do <i>princípio de Cavalieri</i> para cálculo do volume do cilindro. Fonte: [27]. . . . .	43
23	Pirâmide. Fonte: [27]. . . . .	44
24	Semelhança de triângulos na pirâmide. Fonte: [27]. . . . .	44

25	Razão de semelhança. Fonte: [27]. . . . .	45
26	Volume de pirâmides com mesma base e mesma altura. Fonte: [27]. . .	46
27	Prisma triangular. . . . .	46
28	Divisão do prisma em pirâmides. Fonte: [27]. . . . .	46
29	Volume de uma pirâmide qualquer. Fonte: [27]. . . . .	47
30	Cone circular. Fonte: [27]. . . . .	48
31	Elementos do cone circular. . . . .	48
32	Volume do cone circular. Fonte: [27]. . . . .	48
33	Razão de semelhança entre as áreas do círculo em um cone. Fonte: [27].	49
34	Tronco de cone. Fonte: [27]. . . . .	50
35	Esfera. Fonte: [27]. . . . .	51
36	Volume da esfera. Fonte: [27]. . . . .	51
37	Área do cilindro circular. . . . .	53
38	Área do cone circular. . . . .	54
39	Exemplo de um tanque vertical em uma bacia de contenção. . . . .	65
40	Triângulo equilátero. . . . .	66
41	Polígono regular de $n$ lados . . . . .	67
42	Exemplo de tanque vertical com base acima do nível do terreno. . . . .	71
43	Planta baixa e corte de um tanque vertical. . . . .	72
44	Exemplo de distanciamento entre costados de tanques. . . . .	72
45	Exemplo de tanques horizontais. . . . .	75
46	Exemplo de isolamento em parque de tanques horizontais. . . . .	76
47	Exemplo de tanques verticais. . . . .	79
48	Exemplo de isolamento de tanques verticais através de parede corta-fogo.	80
49	Exemplo de isolamento de tanques verticais por distância de segurança.	81
50	Planta baixa de parque de tanques verticais. . . . .	82
51	Corte AA da figura 50. . . . .	82
52	Alternativa para bacia de contenção da figura 50. . . . .	83
53	Exemplo de esguichos para linhas manuais. Fonte: [7]. . . . .	86
54	Exemplos de canhões monitores. Fonte: [19]. . . . .	86
55	Exemplos de aspersores (chuveiros para resfriamento). Fonte: [29]. . . .	86
56	Planta baixa, corte e área do costado de um tanque vertical. . . . .	90
57	Planta baixa e corte referente a um parque de tanques verticais não isolados em bacias de contenção separadas. . . . .	91

58	Planta baixa e corte referente a um parque de tanques verticais não isolados na mesma bacia de contenção. . . . .	93
59	Planta baixa e corte referente a um parque de tanques verticais não isolados resfriados por linhas manuais e/ou canhões monitores. . . . .	95
60	Planta baixa e corte referente a um parque de tanques horizontais. . . . .	97
61	Câmara de espuma tipo I com tubo condutor. Fonte: [3]. . . . .	100
62	Câmara de espuma tipo II com defletor. Fonte: [3]. . . . .	100
63	Canhão monitor móvel com proporcionador de espuma. Fonte: [8]. . . . .	101
64	Entrelinhas, à esquerda e esguicho lançador de espuma de baixa expansão. Fonte: [8]. . . . .	101
65	Planta baixa, corte e área do costado de um tanque vertical. Dimensionamento do sistema de espuma. . . . .	105
66	Parque de tanques verticais não isolados em uma mesma bacia de contenção. . . . .	109
67	Dimensionamento de espuma para parque de tanques horizontais. . . . .	111

## Lista de Tabelas

1	Classificação dos líquidos inflamáveis. . . . .	57
2	Classificação dos líquidos combustíveis. . . . .	58
3	Espaçamento mínimo entre tanques verticais e horizontais (Fonte: Tabela A-7, Anexo A, NT-25). . . . .	64
4	Exemplo de perímetros de polígonos regulares com mesma área. . . . .	69
5	Área de um tanque cilíndrico de 20 m <sup>3</sup> . . . . .	77
6	Proteção por resfriamento para tanques verticais e horizontais. Fonte: Tabela 10 da NT-25. . . . .	87
7	Área dos tanques vizinhos a ser resfriada por aspersores: Fonte: Tabela 11 da NT-25. . . . .	88
8	Taxa mínima de resfriamento para tanques vizinhos por Linhas Manuais ou Canhões monitores: Fonte: Tabela 12 da NT-25. . . . .	88
9	Área a ser considerada para resfriamento dos tanques vizinhos por Linhas Manuais e Canhões monitores: Fonte: Tabela 12 da NT-25. . . . .	88
10	Tempo mínimo exigido para cálculo da reserva de resfriamento: Fonte: Tabela 13 da NT-25. . . . .	89
11	Proteção por espuma para tanques verticais e horizontais. Fonte: Tabela 3 da NT-25. . . . .	102
12	Taxa e tempo mínimos de aplicação de espuma em tanques verticais contendo hidrocarbonetos. Fonte: Tabela 4 da NT-25. . . . .	102
13	Taxa e tempo mínimos de aplicação de espuma em tanques verticais contendo solventes polares. Fonte: Tabela 5 da NT-25. . . . .	103
14	Quantidade mínima de câmaras de espuma por tanque. Fonte: Tabela 6 da NT-25. . . . .	103
15	Quantidade mínima de linhas suplementares ou canhões monitores. Fonte: Tabela 8 da NT-25. . . . .	104
16	Tempo mínimo de aplicação de solução de espuma. Fonte: Tabela 9 da NT-25. . . . .	104

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Objetivos</b>	<b>20</b>
2.1	Objetivo geral . . . . .	20
2.2	Objetivos específicos . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Fundamentos da geometria</b>	<b>21</b>
<b>4</b>	<b>Comprimento</b>	<b>25</b>
<b>5</b>	<b>Áreas</b>	<b>27</b>
5.1	Áreas de polígonos . . . . .	27
5.1.1	Área do quadrado . . . . .	28
5.1.2	Área de um retângulo . . . . .	31
5.1.3	Área do paralelogramo e do triângulo . . . . .	32
5.2	Semelhança de áreas . . . . .	33
5.3	Área do círculo e comprimento da circunferência . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Volume</b>	<b>35</b>
6.1	Volume do cubo . . . . .	35
6.2	Volume de um bloco retangular . . . . .	37
6.3	Princípios de Cavalieri . . . . .	38
6.4	Volume de um prisma . . . . .	41
6.5	Volume de um cilindro . . . . .	42
6.6	Volume de uma pirâmide . . . . .	43
6.7	Volume de um cone . . . . .	47
6.8	Volume da esfera . . . . .	50
<b>7</b>	<b>Áreas do cilindro, do cone circular e da esfera</b>	<b>52</b>
7.1	Área do cilindro circular . . . . .	52
7.2	Área do cone circular . . . . .	53
7.3	Área da esfera . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Dimensionamento do sistema de proteção contra incêndio</b>	<b>56</b>
8.1	Dimensionamento da bacia de contenção . . . . .	58

8.2	Exemplos de dimensionamento de bacias de contenção . . . . .	65
8.2.1	Exemplo 01 - Dimensionamento de uma bacia de contenção . . .	65
8.2.2	Exemplo 02 - Dimensionamento de bacia de contenção em tanques com bases acima do nível do terreno . . . . .	70
8.2.3	Exemplo 03 - Distanciamento entre costados de tanques . . . .	71
8.2.4	Exemplo 04 - Isolamento de tanques horizontais . . . . .	74
8.2.5	Exemplo 05 - Isolamento de tanques verticais . . . . .	76
8.2.6	Exemplo 06 - Dimensionamento da bacia de contenção com múltiplos tanques . . . . .	80
8.3	Dimensionamento do sistema de resfriamento para tanques verticais aéreos em áreas abertas. . . . .	85
8.3.1	Exemplo 07 - Resfriamento de tanque vertical isolado. . . . .	89
8.3.2	Exemplo 08 - Resfriamento de tanques verticais não isolados em bacia de contenção separadas . . . . .	91
8.3.3	Exemplo 09 - Resfriamento de tanques verticais não isolados em uma mesma bacia de contenção . . . . .	92
8.3.4	Exemplo 10 - Resfriamento de tanques verticais por linhas manuais e/ou canhões monitores . . . . .	94
8.4	Dimensionamento do sistema de resfriamento para tanques aéreos horizontais em áreas abertas . . . . .	97
8.4.1	Exemplo 11 - Resfriamento de tanque horizontal . . . . .	97
8.5	Dimensionamento do sistema de espuma para tanques verticais aéreos em áreas abertas . . . . .	98
8.5.1	Exemplo 12 - Sistema de espuma para tanque vertical isolado contendo hidrocarboneto . . . . .	103
8.5.2	Exemplo 13 - Sistema de espuma para tanque vertical isolado contendo solvente polar . . . . .	106
8.5.3	Exemplo 14 - Sistema de espuma para parque de tanques verticais contendo hidrocarbonetos . . . . .	108
8.6	Dimensionamento do sistema de espuma para tanques horizontais aéreos em áreas abertas . . . . .	110
8.6.1	Exemplo 15 - Dimensionamento do sistema de espuma para tanque horizontal . . . . .	111
8.7	Dimensionamento da reserva de incêndio . . . . .	112

<b>9 Considerações finais</b>	<b>114</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>115</b>
<b>Anexo I - Considerações pessoais sobre o <math>\pi</math></b>	<b>118</b>
<b>Anexo II - Aplicativo para celular</b>	<b>120</b>

# 1 Introdução

O cálculo de áreas e volumes faz parte da rotina operacional do Corpo de Bombeiros Militar. Frequentemente devemos calcular e estimar áreas queimadas e volumes de água utilizada no combate a incêndio.

Nas atividades de vistoria e análise de projeto estes cálculos são fatores preponderantes. Em Goiás, inicialmente as Leis 9.292/82 e 12.111/93 se baseavam unicamente nas áreas e alturas das edificações para determinação das medidas preventivas de combate a incêndio. Atualmente, pelo Código Estadual de Proteção Contra Incêndio e Pânico, Lei 15.802/06, além das áreas e alturas, também deve-se observar a classificação da edificação quanto à sua ocupação e fatores de risco relacionados à carga incêndio.

Contudo, mesmo sendo observadas a ocupação e a carga incêndio, as áreas das edificações e volumes dos líquidos inflamáveis são fatores determinantes para o dimensionamento do sistema preventivo fixo de combate a incêndio. Estes sistemas são necessários, pois o dimensionamento adequado para combate a incêndio em grandes edificações pode ultrapassar a capacidade de resposta operacional disponível em alguns quartéis do Corpo de Bombeiros.

A experiência adquirida em instruções ministradas, principalmente nos cursos de inspeção e análise de projetos do CBMGO<sup>1</sup>, demonstra que as dificuldades dos alunos estão relacionadas tanto no entendimento das definições e exigências das normas, quanto na interpretação e organização matemática das ideias. Como o raciocínio matemático é algo que pode ser trabalhado e aperfeiçoado, apresentamos uma introdução sistemática ao estudo de áreas e volumes aplicado nas atividades de inspeções e análise de projetos referentes a tanques aéreos de líquidos combustíveis e inflamáveis instalados em áreas abertas.

A primeiras seções do trabalho tratam dos conceitos fundamentais da geometria *euclidiana*, os quais são o alicerce para os cálculos práticos de áreas e volumes. Esta primeira parte tem como objetivo subsidiar principalmente os instrutores do CBMGO quanto aos conceitos matemáticos formais aplicados nas atividades específicas. Salientamos que o público alvo não possui necessariamente formação matemática, pois hoje é exigido qualquer formação superior para ingresso na corporação. Portanto, alguns conceitos não foram tratados com rigor matemático merecido, visando estabelecer uma interligação entre o formal e o empírico, utilizando uma linguagem acessível ao público

---

<sup>1</sup>Corpo de Bombeiros Militar do Estado de Goiás

alvo.

A seção 8 apresenta um roteiro para o início dos estudos de dimensionamento dos sistemas preventivos fixos de combate a incêndio em tanques aéreos instalados em áreas externas contendo líquidos combustíveis e inflamáveis. Esta parte tem como foco tanto os instrutores como os alunos dos cursos de inspeção e análise de projetos do CBMGO. A linguagem utilizada é menos formal, com intuito de apresentar o conteúdo de forma mais didática e acessível ao público alvo.

A bibliografia de referência utilizada nas primeiras seções do trabalho foi o livro Medida e Forma em Geometria, do professor Elon Lages Lima, e na seção 8 a NBR 17.505-7/2006 e a Norma Técnica nº 25/2014 do CBMGO.

Este trabalho também pode ser utilizado como material auxiliar para as aulas de geometria dos ensinos fundamental e médio, visando o tema transversal de proteção contra incêndio e pânico.

## **2 Objetivos**

### **2.1 Objetivo geral**

Apresentar um material didático de referência sobre cálculo de áreas e volumes para instruções nos cursos de inspeção e análise de projetos do CBMGO, com foco nos projetos técnicos de incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis.

### **2.2 Objetivos específicos**

- Proporcionar uma forma eficiente e didática para capacitação dos alunos dos cursos de inspeção e análise de projetos do CBMGO para realização dos cálculos de áreas e volumes aplicados a tanques de líquidos combustíveis e inflamáveis;
- Subsidiar os instrutores do CBMGO quanto aos conceitos formais da geometria euclidiana aplicados nos cálculos de áreas e volumes;
- Apresentar um texto de referências para ser disponibilizado aos profissionais de segurança contra incêndio;

- Disponibilizar um material didático que possa ser utilizado em aulas de geometria dos ensinos fundamental e médio para abordagem do tema transversal de proteção contra incêndio;
- Apresentar exemplos de dimensionamentos dos sistemas preventivos de proteção contra incêndio exigidos para tanques aéreos.

### 3 Fundamentos da geometria

A geometria pode ser definida como a parte da matemática que tem por objeto o estudo rigoroso do espaço e das formas de figuras e de corpos que nele se podem conceber. Quanto à origem etimológica, a palavra geometria significa medida da terra. O Historiador Heródoto (século V a. C.) justificou esta denominação grega aos egípcios, os quais pagavam impostos diretamente proporcionais a área de cada propriedade. Como as cheias do Nilo modificavam as propriedades, os cobradores de impostos deveriam recalcular cada área para ajustar a cobrança. Semelhantemente, era preciso saber calcular o volume de cada depósito de grãos para recolhimento do imposto devido (Lima, 2006).

Atualmente sabemos que os babilônios tinham um conhecimento extenso e avançado em geometria. Eles sabiam determinar a área de figuras geométricas simples e dispunham de métodos para resolver problemas envolvendo a relação de Pitágoras mil anos antes dos pitagóricos propriamente ditos. Entretanto, independente da origem dessa ciência ser no Egito ou na Babilônia, sabemos que as áreas e volumes são as primeiras noções geométricas a despertarem o interesse do homem (Lima, 2006).

Segundo Silva e Filho (2005), é difícil determinar a origem da geometria, pois essa é anterior à escrita. Contudo, conforme nos ensina Eves (2011) a matemática primitiva necessitava de um embasamento prático para se desenvolver, e esse embasamento surgiu juntamente com a evolução para formas mais avançadas de sociedade, período compreendido entre 3.000 a 525 a.C.. A revolução agrícola deve ser destacada, pois proporcionou o desenvolvimento de Cidades-estados, onde pela primeira vez na história, alguns povos tinham tempo de lazer. Enquanto a maioria da população trabalhava todo o dia na agricultura, os reis, sacerdotes, mercadores e escribas tinham tempo para ponderar sobre os mistérios da natureza.

Assim, os ingredientes para o desenvolvimento científico estavam reunidos: escrita,

necessidade de novas tecnologias, ambiente urbano e tempo para lazer. Infelizmente os benefícios do desenvolvimento das Cidades-estados não estavam disponíveis para todos. Cerca de 90% da população eram agricultores de baixa renda, os quais não sabiam ler e escrever. Apenas os escravos estavam abaixo dos agricultores na escala social neste período.

Segundo Ávila (2001), Euclides teria vivido por volta do ano 300 a.C. e sua obra conhecida como os Elementos foi a primeira apresentação matemática com pretensões de ser rigorosamente fundamentada. Esta obra reuniu quase todo conhecimento matemático grego daquele tempo. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente estudado e nenhum exerceu maior influência no pensamento científico (Eves, 2011).

É provável que os Elementos de Euclides sejam, em sua maior parte, uma compilação de conhecimentos e trabalhos anteriores. Certamente, Euclides teve que fazer muitas demonstrações e aperfeiçoar outras tantas. Entretanto, o sucesso de seu trabalho está na seleção e no arranjo lógico de poucas suposições iniciais (Eves, 2011).

A geometria apresentada por Euclides foi o primeiro sistema dedutivo de ideias desenvolvido pelo homem, no qual um conjunto de poucas e simples afirmações é admitido como verdadeiro e utilizado para provar afirmações mais complexas (Barbosa, 2012).

Como qualquer sistema dedutivo, a geometria assemelha-se a um jogo com elementos determinados, onde é necessário aceitar algumas regras básicas a respeito das relações que satisfazem estes elementos. O objetivo final é determinar as propriedades dos elementos. Tais propriedades são conhecidas como Proposições ou Teoremas e estas devem ser deduzidas somente através do raciocínio lógico, a partir das regras básicas determinadas, isto é, dos axiomas ou postulados fixados (Barbosa, 2012).

Assim, o método utilizado por Euclides baseou-se em cadeias dedutivas, nas quais se obtém novos elementos a partir de outros anteriores. Contudo, uma vez que não se pode retroceder indefinidamente em busca de elementos anteriores, devem-se estabelecer os princípios fundamentais da teoria. Para Euclides, esses princípios são os postulados e noções comuns ou *axiomas*.

Um equívoco cometido com frequência por muitos é pensar que os Elementos de Euclides são uma obra apenas sobre geometria, neles também se encontra muito sobre Álgebra e Aritmética (Eves, 2011). A origem do equívoco se explica, pelo menos em parte, pelo fato da matemática grega na época ser totalmente geometrizada, sendo esta influência de modo tão incisivo a ponto dos matemáticos serem conhecidos como geômetras até cerca de um século atrás (Ávila, 2001).

Segundo Boyer (1974), os Elementos de Euclides estão divididos em treze livros ou capítulos, dos quais seis são de geometria plana, três sobre teoria dos números, um sobre incomensuráveis e três sobre geometria espacial.

Euclides baseou sua geometria em 10 axiomas os quais foram separados em dois grupos distintos: noções comuns e postulados. As hipóteses aparentemente aceitas em todas as ciências foram incluídas nas noções comuns, já os postulados eram considerados como hipóteses específicas da geometria (Barbosa, 2012).

- As cinco noções comuns eram:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si.
2. Se iguais são adicionados a iguais, os resultados são iguais.
3. Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
4. Coisas que coincidem com outras coisas são iguais uma a outra.
5. O todo é maior que qualquer de suas partes.

- Os postulados eram:

1. Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos.
2. Pode-se continuar uma reta infinitamente.
3. Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor do que dois retos, então, as duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que dois retos.

Embora não evidente, pelo contexto, sabe-se que o primeiro postulado se refere a uma única reta ligando dois pontos, bem como a reta descrita no segundo postulado se refere a um segmento (Barbosa, 2012).

Aaboe (2013) nos ensina que um conjunto de postulados deve seguir a três propriedades: completude, consistência e independência. Pela completude entendemos que tudo o que será usado na teoria está contido nos axiomas. A consistência significa que não podemos deduzir dois teoremas contraditórios a partir dos axiomas. Já pela independência concluímos que nenhum axioma é consequência dos outros.

O quinto postulado é chamado de postulado das paralelas, pois implica diretamente que, dado um ponto  $P$  fora de uma reta  $l$ , existe apenas uma reta paralela a  $l$  que passa por  $P$  (Aaboe, 2013).

O quinto postulado tornou-se de imediato alvo de críticas pelos matemáticos da época. Sentia-se que este postulado não era tão natural ou tão evidente por si próprio como os demais para ser aceito sem demonstração (Eves, 1992).

Com tamanho desproporcional aos demais, o quinto postulado parece mais uma proposição que um axioma. Ele também não possui a característica de auto-evidência típica dos outros quatro axiomas, sendo que sua tardia utilização, após a demonstração de tantas proposições sem seu auxílio levantou suspeita que ele seria apenas uma proposição demonstrável a partir dos demais (Barbosa, 2012).

Assim, diante desta insegurança por parte dos matemáticos, foram feitas inúmeras tentativas de demonstrá-lo. Contudo, segundo Aaboe (2013), um exame cuidadoso das tentativas de demonstração do postulado das paralelas revela que os autores apenas o substituíam por hipóteses aparentemente mais agradáveis.

Apenas na primeira metade do século dezenove que os matemáticos chegaram à conclusão que o quinto postulado não era demonstrável a partir dos outros quatro, consequências das chamadas geometrias não-Euclidianas (Barbosa, 2012). Foi neste período que dois matemáticos, o húngaro *János Bolyai* (1802–1860) e o russo *Nicokolai Ivanovich Lobachevsky* (1792 – 1852), publicaram de forma independente a descoberta de geometrias não-euclidianas (Ávila, 2001).

As geometrias não-euclidianas surgiram impulsionadas pela tentativa de encontrar uma contradição através da negação do quinto postulado e demonstrar uma inconsistência em relação aos demais axiomas. Entretanto, ficou demonstrado que os quatro primeiros postulados são compatíveis tanto com o postulado da paralela quanto com sua negação. Assim, Euclides foi justificado pela geometria não-euclidiana (Aaboe, 2013).

Os cálculos utilizados hoje para determinar áreas e volumes em condições práticas são baseados na geometria euclidiana. Assim, os conceitos utilizados neste estudo bem como algumas demonstrações já eram conhecidos a mais de 2.300 anos.

## 4 Comprimento

As seções 4, 5, 6 e 7 são destinadas ao estudo dos conceitos fundamentais para o cálculo de área e volume. A bibliografia de referência adotada será o livro Medida e Forma em Geometria do professor Elon Lages Lima, 4ª edição, SBM, 2006. Assim, serão citadas apenas as literaturas distintas da adotada como referência.

O comprimento ou medida de um segmento, intuitivamente, é um número que deve exprimir quantas vezes o comprimento de um segmento previamente fixado como unidade de comprimento (ou segmento unitário) está contido no segmento que queremos medir. Apesar de vaga, a definição acima permite chegar a uma definição precisa do comprimento de um segmento. Começamos fixando um segmento de reta  $u$ , o qual será definido como segmento unitário.

Dado um número inteiro positivo  $n$ , se for possível dividir um segmento de reta  $AB$ , em  $n$  segmentos congruentes ao segmento unitário, então o comprimento do segmento  $AB$  será  $n$ . Conforme podemos observar na figura 1.

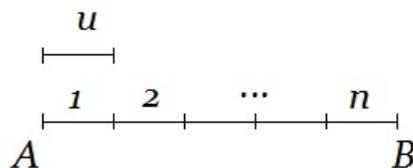


Figura 1: Divisão de um segmento de reta em um número inteiro de vezes.

Entretanto, é fácil conseguir um segmento  $AB$  que não contém o segmento unitário  $u$  um número inteiro de vezes. Assim, para definirmos o comprimento deste segmento dividiremos em duas hipóteses.

Para a primeira vamos considerar que  $AB$  não contenha um número inteiro de segmentos unitários, contudo, exista um segmento menor,  $w$ , tal que  $w$  esteja  $n$  vezes contido em  $u$  e  $m$  vezes contido no segmento  $AB$ , sendo  $n$  e  $m$  números inteiros, conforme a figura 2.

O segmento  $w$  é um submúltiplo comum de  $AB$  e  $u$ . Neste caso dizemos que os segmentos  $AB$  e  $u$  são comensuráveis. Como  $w$  está contido  $n$  vezes em  $u$ , a medida de  $w$  é  $1/n$  e, como o segmento  $AB$  contém  $m$  vezes  $w$ , então o comprimento de  $AB$  é  $m/n$ .

Assim, fixando o segmento unitário  $u$ , o comprimento de um segmento  $AB$  é um número racional  $m/n$ , quando existir um segmento  $w$  que esteja contido  $n$  vezes em

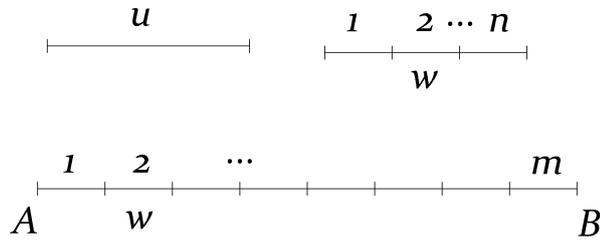


Figura 2: Divisão de um segmento de reta em um número racional.

$u$  e  $m$  vezes em  $AB$ , com  $m$  e  $n$  pertencente aos inteiros. Logo, tais segmentos são comensuráveis.

Durante algum tempo acreditava-se que não existia segmentos incomensuráveis. De fato, na prática não conseguimos distinguir visualmente dois pontos distintos que se achem situados a uma distância inferior a este limite de racionalidade.

Sabemos que Pitágoras e seus discípulos descobriram a existência de segmentos incomensuráveis, fato que causou enorme impacto no desenvolvimento da matemática, pois a escola de Pitágoras acreditava que os "números (naturais) governavam o mundo".

Um exemplo simples e bastante utilizado de incomensurabilidade é verificado quando tomamos como segmento unitário o lado de um quadrado e comparamos com sua diagonal, este último segmento não tem um comprimento racional, conforme podemos observar na figura 3.

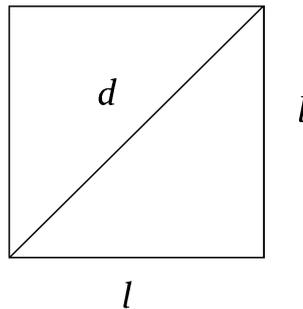


Figura 3: Diagonal de um quadrado de lado unitário.

A demonstração amplamente difundida e utilizada, a qual também possui uma beleza ímpar, é feita por contradição. Vejamos. Queremos demonstrar que se o lado do quadrado for tomado com segmento unitário sua diagonal não terá um comprimento racional. Assim, se o lado e a diagonal de um quadrado forem segmentos comensuráveis

e se tomarmos o lado como unidade, o comprimento da diagonal será um número racional  $p/q$ . Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q}\right)^2 &= 1^2 + 1^2 \\ \frac{p^2}{q^2} &= 2 \\ p^2 &= 2q^2.\end{aligned}$$

A última igualdade é um absurdo, pois  $p^2$  e  $q^2$  contêm cada um de seus fatores primos um número par de vezes. Contudo,  $2q^2$  contém um número ímpar de fatores primos iguais a 2. Logo,  $2q^2$  não pode ser igual a  $p^2$ , com  $q$  e  $p$  pertencente aos inteiros.

Portanto, a medida da diagonal é um número irracional. Este número fica determinado apenas quando conhecemos seus valores aproximados por números racionais. Por exemplo,  $\sqrt{2}$  é um número irracional que pode ser aproximado por falta a 1,414 e por excesso a 1,415, com erro inferior a um milésimo.

Assim, para determinarmos o comprimento de um segmento  $AB$ , incomensurável com o segmento unitário, devemos encontrar um valor aproximado (por falta e por excesso) deste número irracional  $AB$ . Para isso, basta dividir o segmento unitário em  $n$  segmentos (partes) iguais, cada uma com comprimento  $1/n$ , o qual chamaremos de  $w$ . Sabemos que existe um número inteiro positivo  $m$  tal que  $AB$  contém  $m$  segmentos congruentes a  $w$  mas não contém  $m + 1$  segmentos iguais a  $w$ . Logo, temos que:

$$\frac{m}{n} < AB < \frac{m+1}{n}$$

O número racional  $m/n$  é uma aproximação por falta e  $(m+1)/n$  é uma aproximação por excesso de  $AB$ , com erro inferior a  $1/n$ .

Concluimos então que a medida do comprimento de um segmento pode ser um número inteiro, fracionário ou irracional.

## 5 Áreas

### 5.1 Áreas de polígonos

Podemos definir área intuitivamente como a quantidade de espaço ocupado em um plano por uma determinada região comparada com uma região definida como unidade

de área. O resultado desta comparação será um número que irá indicar quantas vezes a região contém a unidade de área.

Afim de que o conceito de área tenha sentido, convém postular que:

1. Polígonos congruentes têm áreas iguais.
2. Se um polígono convexo é particionado em um número finito de outros polígonos convexos, os quais não têm pontos interiores em comum, a área do polígono maior é igual a soma das áreas dos polígonos menores.
3. Se um polígono contém outro em seu interior, então a área do primeiro é maior do que a do segundo.
4. A área de um quadrado de lado igual a uma unidade de comprimento é igual a uma unidade de área.

### 5.1.1 Área do quadrado

Para o cálculo da área de um quadrado com comprimento de lado igual a um número natural, valendo das propriedades 1 a 4, podemos dividir um quadrado com comprimento de lado igual a um número natural  $n$  em  $n^2$  quadrados unitários. Assim, a área do quadrado maior será  $n^2$  vezes a área do quadrado unitário, conforme podemos observar na figura 4.

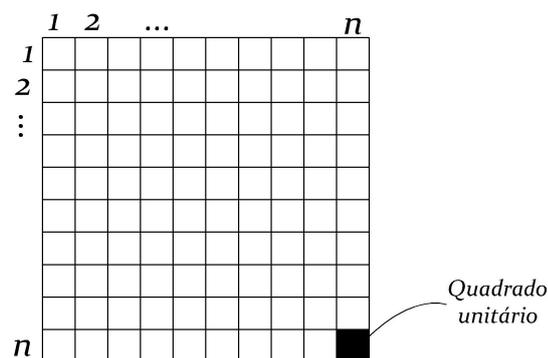


Figura 4: Área de um quadrado com comprimento de lado igual a um número natural.

Portanto,

$$A = n^2.$$

Considere agora um quadrado de lado  $m/n$ , com  $m$  e  $n$  pertencente aos naturais. Para determinar a área  $A_{m/n}$  deste quadrado, tomaremos inicialmente o quadrado unitário e o dividiremos em  $n^2$  quadrados de lado  $1/n$ , conforme figura 5.

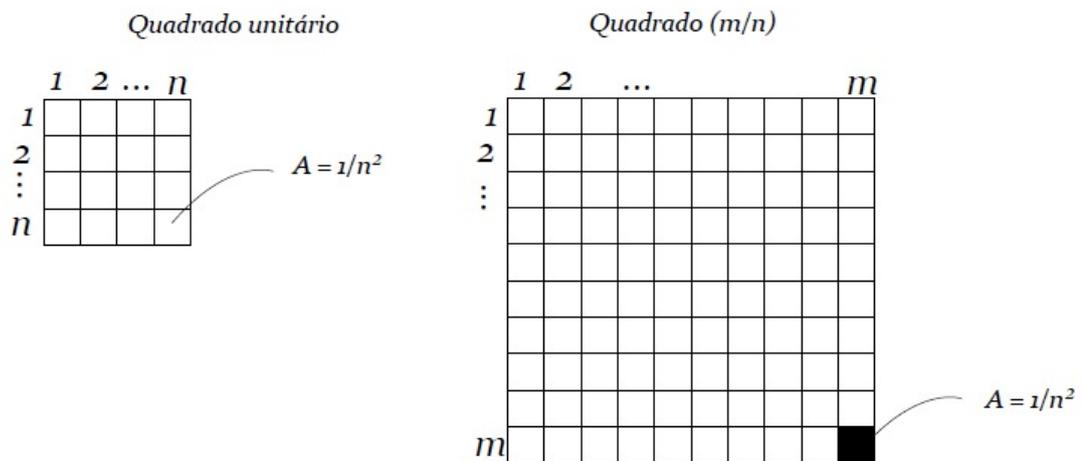


Figura 5: Área de um quadrado com comprimento de lado igual a um número racional.

Assim temos que a área  $A_{1/n}$  é igual a  $1/n^2$ , pois:

$$n^2 A_{\frac{1}{n}} = 1$$

$$A_{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2}$$

$$A_{\frac{1}{n}} = \left(\frac{1}{n}\right)^2.$$

Agora tomemos  $m^2$  quadrados de lado  $1/n$  e os organizemos de maneira que obtemos um quadrado de lado  $m/n$ , conforme a figura 5. A área do quadrado de lado  $m/n$  será  $m^2$  vezes  $A_{1/n}$ . Logo:

$$A_{\frac{m}{n}} = m^2 A_{\frac{1}{n}}$$

$$A_{\frac{m}{n}} = m^2 \frac{1}{n^2}$$

$$A_{\frac{m}{n}} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$A_{\frac{m}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right)^2.$$

Como o cálculo de área para quadrados com comprimento de lado racional está bem definido, para calcularmos a área de um quadrado de lado  $l$ , com  $l$  pertencente aos irracionais, vamos considerar o fato de tantos os racionais quanto os irracionais serem densos nos reais, logo, entre dois números racionais sempre podemos encontrar um número irracional.

Assim, tomemos  $x_k$  e  $y_k$  pertencentes aos racionais, tais que:

$$x_k < l < y_k \text{ e } y_k - x_k < 1/k, \text{ com } k \text{ pertencente aos naturais.}$$

Agora tomemos os quadrados de lado  $x_k$ ,  $y_k$  e  $l$ , conforme a figura 6 . Pelas desigualdades acima, temos que:

$$x_k^2 < A_l < y_k^2$$

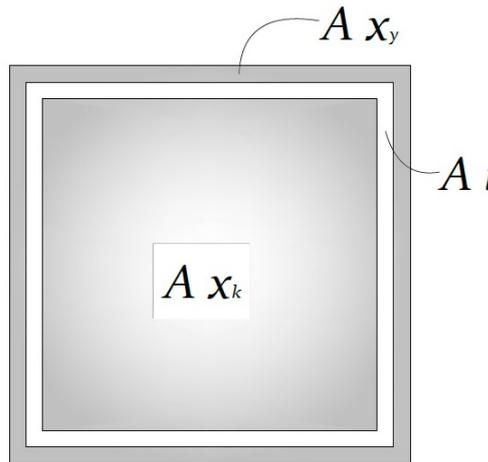


Figura 6: Área de um quadrado com comprimento de lado igual a um número irracional.

Como,  $x_k^2 < l^2 < y_k^2$ , podemos concluir que tanto  $l^2$  como  $A_l$  estão no intervalo  $(x_k^2, y_k^2)$ , de maneira que:

$$|A_l - l^2| < y_k^2 - x_k^2 = (y_k - x_k)(y_k + x_k).$$

Como,  $y_k - x_k < \frac{1}{k}$ , então:

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k}(y_k + x_k)$$

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k}(y_k - x_k + 2x_k)$$

$$|A_l - l^2| < \frac{1}{k} \left( \frac{1}{k} + 2x_k \right).$$

Como podemos tomar  $k$  tão grande quanto desejarmos,  $A_l - l^2$  estará entre um número que tende a zero pela esquerda e que tende a zero pela direita, logo:

$$A_l = l^2.$$

### 5.1.2 Área de um retângulo

Para demonstrarmos a área de um retângulo podemos dividir os casos de maneira análoga as demonstrações utilizadas para o quadrado. Entretanto, existe uma demonstração elegante, pela qual chegamos a área do retângulo e não precisamos tomar casos separados de naturais, racionais e irracionais.

O método consiste em fazer um quadrado a partir do retângulo que queremos calcular a área. Assim, tomemos um retângulo  $Q$  de lados  $a$  e  $b$  pertencentes aos reais. Queremos demonstrar que área  $A_Q = ab$ .

Tomemos pois dois quadrados de lados  $a$  e  $b$ , os quais colocaremos de modo que o quadrado de lado  $a$  fique justaposto ao lado  $a$  do retângulo e o quadrado de lado  $b$  fique justaposto ao lado  $b$  do retângulo, conforme figura 7.

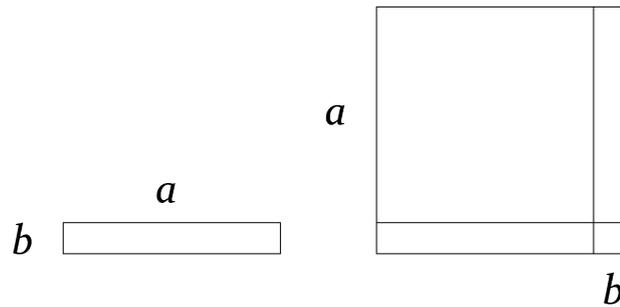


Figura 7: Área de um retângulo de comprimento de lado igual a um número real.

A área do quadrado de lado  $a + b$  é igual  $(a + b)^2$  e também é igual a soma da área do quadrado de lado  $a$  com a área do quadrado de lado  $b$  e com a área  $A_Q$  dos dois retângulos  $ab$ . Assim, temos:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2A_Q$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2 + 2A_Q$$

$$2ab = 2A_Q$$

$$A_Q = ab.$$

### 5.1.3 Área do paralelogramo e do triângulo

Um paralelogramo é um quadrilátero com lados opostos paralelos. A altura do paralelogramo é o segmento de reta perpendicular à base que a liga ao lado oposto ao seu prolongamento.

A área de um paralelogramo é igual ao produto do comprimento de qualquer uma de suas bases pelo comprimento da altura correspondente. Para demonstrar este fato basta tomar um paralelogramo qualquer  $ABCD$  de área  $S$ , conforme figura 8.

Traçando um segmento  $AD'$  perpendicular a  $DC$  e um segmento  $BC'$  perpendicular ao prolongamento de  $DC$  obtemos os triângulos  $ADD'$  e  $BCC'$ , os quais são congruentes pelo caso cateto e hipotenusa no triângulo retângulo. Assim, a área do paralelogramo  $ABCD$  é igual a área do retângulo  $ABC'D'$  e neste caso  $bh$ .

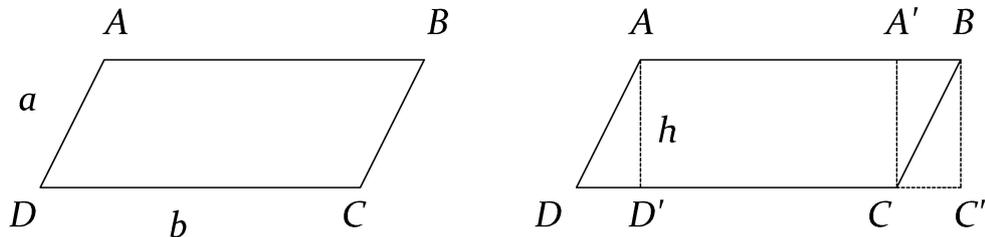


Figura 8: Área do paralelogramo.

Para determinarmos a área de um triângulo  $ABC$  qualquer, basta traçarmos um segmento  $AA'$  congruente e paralelo a  $CB$  e um segmento  $A'B$  congruente e paralelo a  $AC$ , conforme figura 9. Teremos então o paralelogramo  $AA'BC$  e os triângulos  $ABC$  e  $ABA'$  que são congruentes pelo caso  $(LLL)$ . Assim, a área do paralelogramo será igual a duas vezes a área do triângulo  $ABC$  e, portanto, a área do triângulo será igual a metade do produto do comprimento da base pela altura.

$$A_{ABC} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

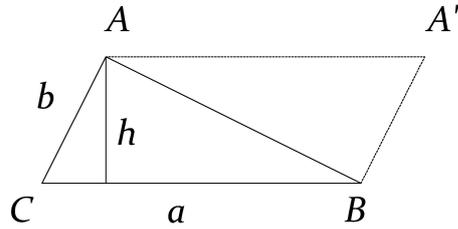


Figura 9: Área do triângulo.

Com estes conceitos a área de qualquer polígono pode ser calculada, bastando apenas dividi-lo em triângulos e/ou paralelogramos ou quaisquer outras figuras cujas áreas sabemos calcular.

## 5.2 Semelhança de áreas

Diz-se que duas figuras  $F$  e  $F'$  são semelhantes, com uma razão de semelhança  $r$  (um número real positivo) quando existe uma correspondência biunívoca  $\sigma : F \rightarrow F'$ , entre os pontos de  $F$  e os pontos de  $F'$ , com a seguinte propriedade:

- se  $X$  e  $Y$  são pontos quaisquer de  $F$  e  $X' = \sigma(X)$  e  $Y' = \sigma(Y)$  são seus correspondentes em  $F'$ , então  $\overline{X'Y'} = r\overline{XY}$ .

Resulta da definição de semelhança que as áreas de retângulos semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança. De fato, se um retângulo  $ABCD$  é semelhante ao retângulo  $A'B'C'D'$  com uma razão de semelhança  $r$ , tendo o primeiro lados  $a$  e  $b$ , o segundo terá lados  $ra$  e  $rb$  e áreas serão  $ab$  e  $r^2ab$ , respectivamente.

Com raciocínio análogo podemos deduzir que as áreas de quaisquer figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança, pois basta dividir as figuras em polígonos retangulares.

## 5.3 Área do círculo e comprimento da circunferência

Um círculo de raio  $r$  é semelhante ao círculo de raio 1 com razão de semelhança igual a  $r$ . Com base na relação de áreas entre figuras semelhantes, sabemos que um círculo de raio  $r$  terá área igual a  $r^2$  vezes a área do círculo de raio 1, relação que pode está representada na figura 10 .

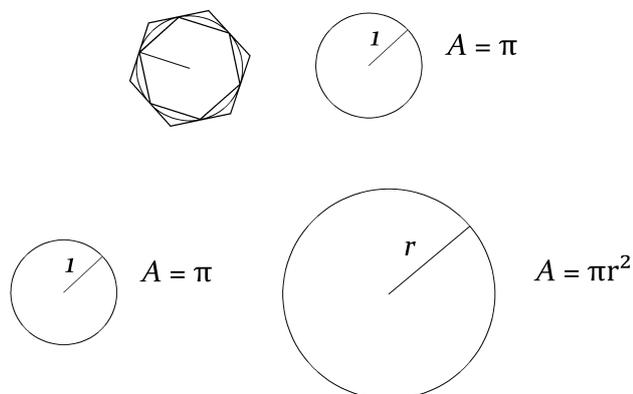


Figura 10: Área do círculo.

A área do círculo de raio 1 pode ser calculada através de aproximações por falta e por excesso das áreas dos polígonos regulares inscritos e circunscritos na circunferência. Sabe-se que a área do círculo de raio 1 é um número irracional representado pela letra grega  $\pi$ , cujo valor aproximado é  $\pi = 3,141592$ .

Logo, a área do círculo de raio  $r$  é dada pela fórmula:

$$A = \pi r^2, \text{ onde o } \pi \text{ é a área do círculo de raio 1.}$$

O cálculo do comprimento da circunferência envolve conceitos de limite, entretanto, uma demonstração intuitiva deste cálculo pode ser feita dividindo a circunferência em um polígono regular com número  $n$  par de lados e reorganizar os setores formados conforme figura 11. Quanto maior for  $n$  mais a figura se aproximará de um paralelogramo de base  $C/2$  e altura  $r$ .

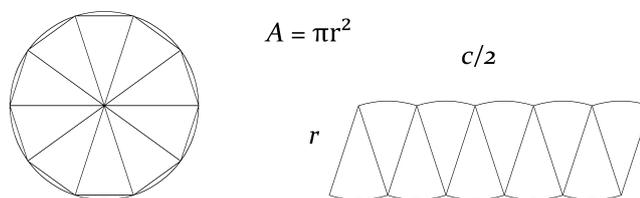


Figura 11: Comprimento da circunferência.

Assim:

$$\begin{aligned} r \frac{C}{2} &= \pi r^2 \\ C &= 2\pi r. \end{aligned}$$

## 6 Volume

Uma ideia intuitiva sobre volume é que esse é a quantidade de espaço ocupado por um sólido no espaço. Essa quantidade é representada por um número resultante da comparação entre o sólido que se deseja conhecer o volume e uma unidade padrão de volume.

Podemos tomar qualquer unidade como padrão, contudo, costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual é chamado de cubo unitário e por definição possui volume igual a 1.

Portanto, o volume de um sólido  $S$  deverá exprimir o número de vezes que esse contém o cubo unitário. Sabemos que essa é uma ideia intuitiva, entretanto podemos utilizá-la como guia para definirmos um significado mais preciso para volume.

### 6.1 Volume do cubo

Um bloco retangular é determinado por suas três arestas. Um cubo é um caso particular de bloco retangular que todas as arestas têm o mesmo comprimento. As seis faces de um cubo são quadrados congruentes.

Um cubo  $C$  cuja aresta mede  $n$  unidades de comprimento, sendo  $n$  um número inteiro, esse pode ser dividido em  $n^3$  cubos unitários justapostos, logo o volume de  $C$  será  $n^3$  unidade de volume.

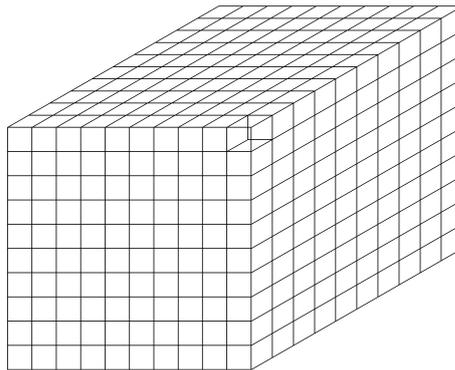


Figura 12: Volume de um cubo com comprimento de aresta igual a um número natural.

De maneira análoga podemos dividir cada aresta do cubo unitário em um número inteiro  $q$  de partes iguais e obter  $q^3$  cubos de aresta  $1/q$ . Assim, o volume do cubo de

aresta  $1/q$  pode ser calculado facilmente, pois:

$$\begin{aligned} q^3 V_{\frac{1}{q}} &= V_1 \\ V_{\frac{1}{q}} &= \frac{1}{q^3} \\ V_{\frac{1}{q}} &= \left(\frac{1}{q}\right)^3. \end{aligned}$$

Podemos então determinar o volume de um cubo de aresta  $p/q$  com  $p$  e  $q$  pertencente aos inteiros. Basta tomarmos  $p^3$  cubos de aresta  $1/q$  e arranjados de forma a obtermos um cubo com aresta  $p/q$ , assim:

$$\begin{aligned} V_{\frac{p}{q}} &= p^3 V_{\frac{1}{q}} \\ V_{\frac{p}{q}} &= p^3 \frac{1}{q^3} \\ V_{\frac{p}{q}} &= \frac{p^3}{q^3} \\ V_{\frac{p}{q}} &= \left(\frac{p}{q}\right)^3. \end{aligned}$$

Com a determinação do volume de um cubo com comprimento de aresta racional, temos a solução para o cálculo de volume do cubo do ponto de vista prático. Pois, não podemos obter um número irracional através de medidas diretas com instrumentos, por mais precisos que sejam.

Contudo, sabemos pela matemática pura sobre a existência teórica dos números irracionais. Assim, precisamos determinar também o volume de um cubo  $C$  de comprimento de aresta  $b$  com  $b$  pertencente aos irracionais.

Utilizaremos novamente o método da exaustão. Primeiramente se  $x$  é um número qualquer menor que  $b^3$ , podemos aproximar o número irracional  $b$  por um valor racional  $r < b$ , tão próximo de  $b$ , tal que  $x < r^3 < b^3$ . Então, o cubo  $C$  de aresta  $b$  contém um cubo  $D$  de aresta  $r$ . Segue que  $vol(D) < vol(C)$ . Já sabemos calcular o volume de um cubo com aresta de comprimento racional, assim,  $vol(D) = r^3$ , e  $x < vol(C)$ .

De maneira análoga podemos mostrar que se  $y$  for um número qualquer maior que  $b^3$ , então,  $y > vol(C)$ . Portanto,  $vol(C) = b^3$ .

## 6.2 Volume de um bloco retangular

Um bloco retangular com duas arestas de comprimentos iguais a 1 e uma com comprimento igual a  $a$ , com  $a$  pertencente aos inteiros pode ser dividido em  $a$  cubos de aresta igual a 1, conforme figura 14. Logo, seu volume  $V$  será igual a  $V = a$ .

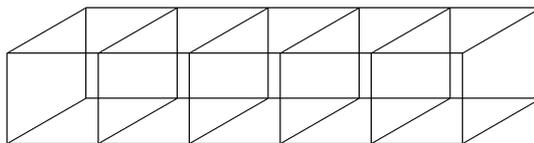


Figura 13: Volume de um bloco retangular com comprimento de aresta iguais a 1, 1 e  $a$  com  $a$  pertencente aos inteiros.

Se um bloco retangular possuir uma aresta com comprimento igual a 1 e as outras arestas com comprimentos  $a$  e  $b$  pertencentes aos inteiros, podemos dividir o bloco em  $ab$  cubos unitários e o volume será  $V = ab$ , conforme podemos observar na figura 14.

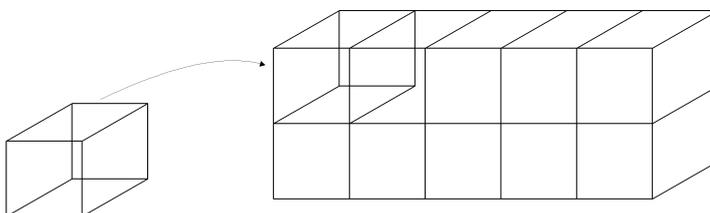


Figura 14: Volume de um bloco retangular com comprimento de aresta iguais a 1,  $a$  e  $b$  com  $a$  e  $b$  pertencente aos inteiros.

E, caso um bloco retangular possuir arestas com comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$  pertencentes aos inteiros, podemos dividi-lo em  $abc$  cubos unitários e seu volume será igual a  $V = abc$ . Como podemos observar na figura 15.

Tomemos agora um bloco  $B$  cujas arestas têm medidas números racionais. Sabemos que podemos sempre reduzir esses três números ao mesmo denominador, assim vamos supor  $a/q$ ,  $b/q$  e  $c/q$ , onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $q$  são números inteiros e são as aresta do bloco retangular. Decompondo as arestas em segmentos iguais de comprimento  $1/q$ , o bloco ficará composto em  $abc$  cubos justapostos e cada um desses cubos possui aresta  $1/q$  e volume  $1/q^3$ . Assim, temos que o volume de um bloco retangular o qual possui arestas

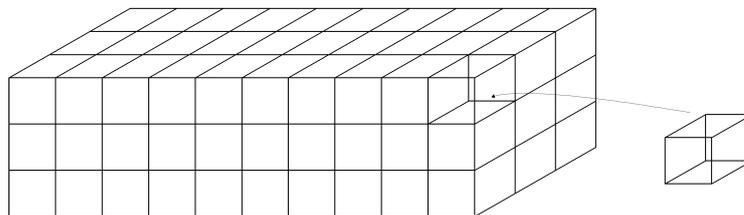


Figura 15: Volume de um bloco retangular com comprimento de aresta iguais a  $a$ ,  $b$  e  $c$  pertencentes aos inteiros.

com medidas racionais será o produto dessas medidas, isto é:

$$vol(B) = abc \frac{1}{q^3} = \frac{a}{q} \frac{b}{q} \frac{c}{q}.$$

O volume de um bloco que possuir arestas com medidas irracionais pode ser demonstrado pelo método da exaustão e terá como consequência que o volume será o produto do comprimento de suas arestas,

$$vol(B) = abc$$

com  $a$ ,  $b$  e  $c$  pertencentes aos números reais.

Assim, para calcular o volume de um poliedro regular (sólido formado pela reunião finita de blocos retangulares justapostos) basta somar os volumes dos blocos retangulares que o constituem.

### 6.3 Princípios de Cavalieri

Para um estudo mais aprofundado sobre volume é necessária uma pequena introdução sobre os *princípios de Cavalieri*, os quais são fundamentais para o cálculo de volume de diversos sólidos.

Segundo Eves (2011), Bonaventura Cavalieri nasceu em Milão em 1598, foi aluno de Galileu e atuou como professor de matemática da Universidade de Bolonha de 1629 até 1647, ano de sua morte. Seu reconhecimento e sua grande contribuição à matemática se devem ao tratado *Geometria indivisibilibus*, publicado em 1635. Nesse trabalho ele apresentou seu método dos indivisíveis, cuja motivação direta era o cálculo de áreas e volumes.

Ainda segundo Eves (2011), um indivisível de uma porção plana seria uma corda dessa porção e um indivisível de um sólido seria uma secção desse sólido, sendo uma porção plana formada por uma infinidade de cordas paralelas e um sólido formado por uma infinidade de secções planas paralelas.

O argumento de Cavalieri era que se uma figura fosse dividida em infinitas cordas e se estas cordas se movimentassem ao longo de seu eixo, mantendo contínuo seu contorno, a figura gerada teria área igual a original. Seria como cortar um papel em filamentos muito finos e depois movimentá-los formando uma nova figura. Como a área da figura original é a soma dos filamentos a segunda figura terá a mesma área, pois possui filamentos congruentes.

Um procedimento análogo as cordas, com secções planas paralelas de um sólido dado, fornecerá um outro sólido com o mesmo volume do original. Uma maneira simples e amplamente difundida para entendimento desse princípio é a experiência com uma resma de papel sobre uma mesa. Quando a resma encontra-se perfeitamente bem arrumada ela é um paralelepípedo retângulo e podemos calcular seu volume facilmente através do produto da área da base pela altura. Contudo, podemos moldar o paralelepípedo retângulo em um sólido diferente e intuitivamente sabemos que será preservado seu volume, conforme verificamos na figura 16.

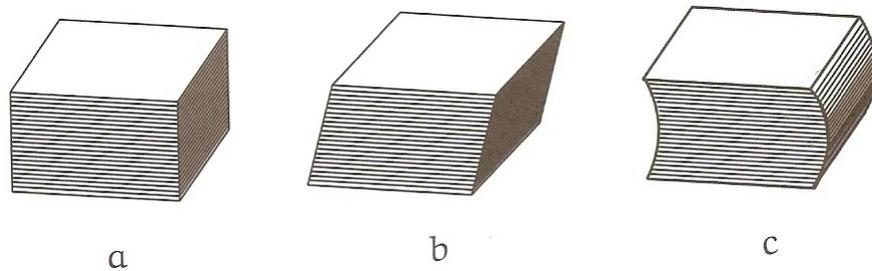


Figura 16: Experiência com uma resma de papel sobre uma mesa para explicar o *Princípio de Cavalieri*.

De uma forma geral temos os seguintes *princípios de Cavalieri*:

- Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.
- Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano

dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

O último princípio afirma que se dois sólidos quaisquer  $A$  e  $B$  estiverem apoiados sobre um plano horizontal  $\alpha$  e qualquer outro plano horizontal  $\alpha_0$  paralelo a  $\alpha$  corte os sólidos em seções com áreas iguais, então o  $vol(A)$  será igual ao  $vol(B)$ .

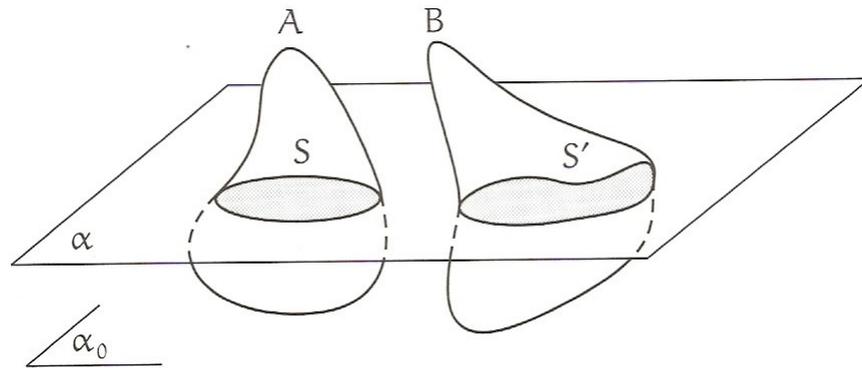


Figura 17: Aplicação do *princípio de Cavalieri*. Fonte: [27].

Sabemos que os *princípios de Cavalieri* são teoremas, contudo, suas demonstrações envolve conceitos avançados da Teoria da Medida e os tomaremos neste estudo como *axiomas*.

Para ilustrar uso do *princípio de Cavalieri* no plano, vamos determinar a área compreendida por uma elipse de semieixos  $a$  e  $b$ .

Considere a elipse e a circunferência referidas ao mesmo sistema de coordenadas retangulares, como mostra a figura 18.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b \text{ e } x^2 + y^2 = a^2$$

Considerando apenas o hemisfério norte da elipse e da circunferência e colocando as equações em função de  $y$ , temos:

$$y = \frac{b}{a}(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y = (a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo a razão entre duas ordenadas correspondentes quaisquer da elipse e da circunferência é  $b/a$ . Assim, a razão entre duas cordas verticais correspondentes da elipse e

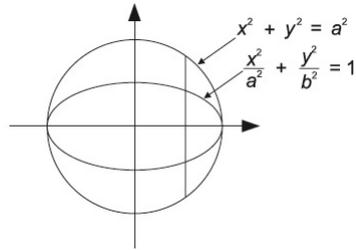


Figura 18: Relação entre as áreas da elipse e da circunferência. Fonte: [27].

da circunferência é  $b/a$ . Pelo princípio de Cavalieri conclui-se que área da elipse é  $b/a$  vezes a área do círculo:

$$A_e = \frac{b}{a} A_c$$

$$A_e = \frac{b}{a} \pi a^2 = \pi ab.$$

## 6.4 Volume de um prisma

Um prisma é um poliedro formado por uma face superior e uma inferior paralelas e congruentes (também chamadas de bases), ligadas por arestas paralelas, sendo suas faces laterais paralelogramos. Os prismas recebem nomenclatura correspondente a suas bases e podem ser classificados em retos se as arestas laterais forma ângulo de  $90^\circ$  com as bases e oblíquos se não. Alguns exemplos de prismas estão representados na figura 19.

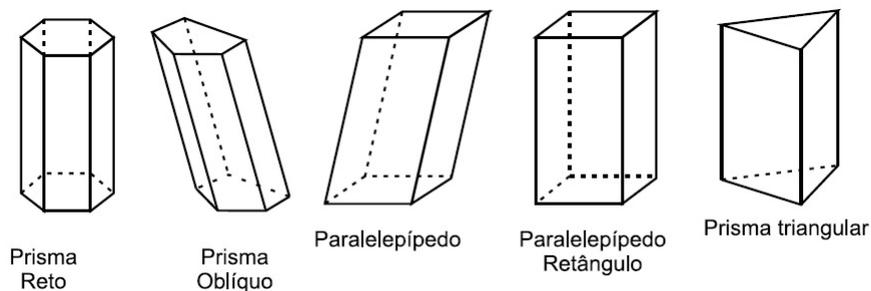


Figura 19: Tipos de prismas. Fonte: [27].

O volume de um prisma pode ser determinado utilizando o *princípio de Cavalieri*.

Para isto, basta tomar o prisma sobre um plano horizontal e construir lateralmente um prisma retangular reto com área da base igual a do original, conforme figura 20.

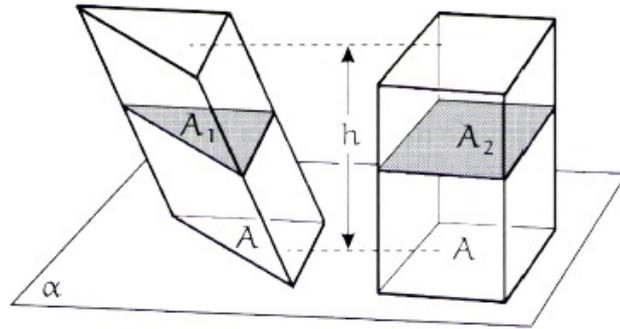


Figura 20: Volume do prisma. Fonte: [27].

Ao traçarmos outro plano horizontal qualquer seccionando os sólidos teremos que as áreas das seções serão iguais. Portanto, como o volume do bloco retangular é calculado pelo produto da área da base pela altura o volume do prisma também será o produto da área da base pela altura.

$$vol(\text{prisma}) = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

## 6.5 Volume de um cilindro

Considere uma figura plana fechada sobre um plano e um segmento de reta  $PQ$  secante a este plano. Um cilindro é o sólido formado pela reunião de todos segmentos paralelos e congruentes a  $PQ$  com uma extremidade nos pontos da figura. O segmento  $PQ$  é chamado de geratriz do cilindro e representado pela letra  $g$ .

Os cilindros cujas base são círculos são denominados *cilindros circulares*. Se a geratriz do cilindro forma um ângulo reto com o plano que contém a base esse é chamado de *cilindro reto*, caso contrário de *cilindro oblíquo*, ver figura 21. E, os cilindros retos cuja geratriz tem comprimento igual ao diâmetro da figura da base é chamado de *cilindro equilátero*.

Para determinar o volume de um cilindro basta construir um bloco retangular em um plano horizontal com área da base igual a área da base do cilindro e mesma altura, conforme figura 22, e posteriormente aplicar o *princípio de Cavalieri*. Logo o volume do cilindro será o produto da área da base pela altura. Ou seja,

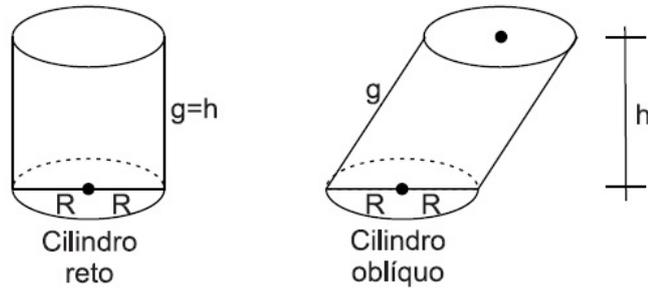


Figura 21: Exemplos de cilindros. Fonte: [27].

$$vol(\text{cilindro}) = (\text{área da base}) \times (\text{altura}).$$

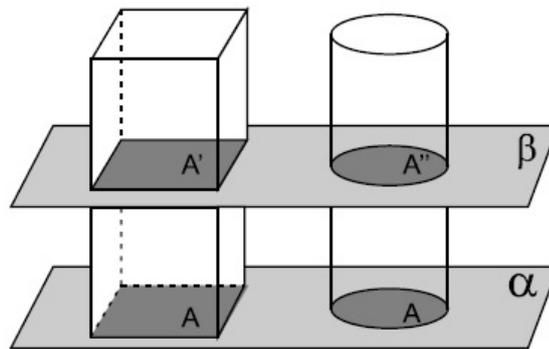


Figura 22: Aplicação do *princípio de Cavalieri* para cálculo do volume do cilindro. Fonte: [27].

## 6.6 Volume de uma pirâmide

Tomemos um polígono convexo  $A_1A_2 \dots A_n$  situado em um plano  $\alpha$  e um ponto  $V$  fora de  $\alpha$ . Uma pirâmide é definida como a reunião dos segmentos com uma extremidade em  $V$  e outra extremidade em pontos do polígono, ver figura 23.

O ponto  $V$  é chamado de vértice da pirâmide e o polígono  $A_1A_2 \dots A_n$   a base da pirâmide. A pirâmide recebe denominação conforme o polígono de sua base, se for um triângulo será uma pirâmide triangular, ser for um quadrado será uma pirâmide quadrangular e assim por diante.

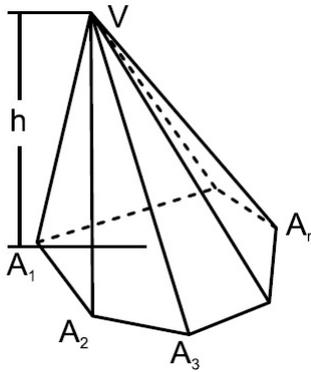


Figura 23: Pirâmide. Fonte: [27].

Para simplificar o entendimento será estudada primeiramente a pirâmide triangular, sendo o raciocínio estendido para as demais pirâmides, pois qualquer polígono de  $n$  vértices pode ser decomposto em  $n-2$  triângulos e conseqüentemente qualquer pirâmide que possua um polígono de  $n$  lados como base pode ser decomposta em  $n-2$  pirâmides triangulares.

Para demonstrar o cálculo do volume de uma pirâmide primeiro devemos entender que pirâmides com mesma base e mesma altura tem volumes iguais. Fato que será demonstrado pelo *princípio de Cavalieri*.

Tome uma pirâmide triangular qualquer de vértice  $V$ , altura  $H$  e base  $ABC$ . Agora trace um plano  $\alpha$  paralelo à base  $ABC$  em uma altura  $h$  do vértice  $V$ , a interseção entre o plano  $\alpha$  e a pirâmide será o triângulo  $DEF$ , ver figura 24 .

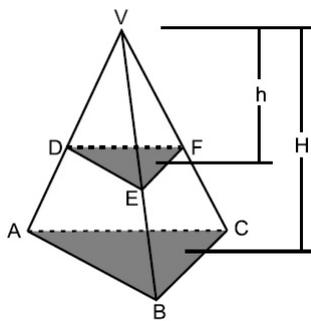


Figura 24: Semelhança de triângulos na pirâmide. Fonte: [27].

Como  $DE$ ,  $EF$  e  $FD$  são paralelos respectivamente a  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$ , segue que os triângulos  $VDE$ ,  $VEF$  e  $VDF$  são semelhantes aos triângulos  $VAB$ ,  $VBC$  e  $VAC$

pelo caso Ângulo-Ângulo-Ângulo (AAA) e possuem razão de semelhança  $k$ , pois:

$$\frac{VD}{VA} = \frac{DE}{AB} = \frac{VE}{VB} = \frac{EF}{BC} = \frac{VF}{VC} = \frac{FD}{CA} = k.$$

Logo, temos que os triângulos  $ABC$  e  $DEF$  são semelhantes, pois:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{FD}{CA} = k.$$

Para calcularmos o valor de  $k$  basta tomarmos os pontos  $X$  e  $Y$ , tais que  $VY=h$  e  $VX=H$ , conforme figura 25. Como  $YE$  e  $XB$  são paralelos, segue que os triângulos  $VYE$  e  $VXB$  são semelhantes, logo:

$$k = \frac{VE}{VB} = \frac{EY}{BX} = \frac{VY}{VX} = \frac{h}{H}.$$

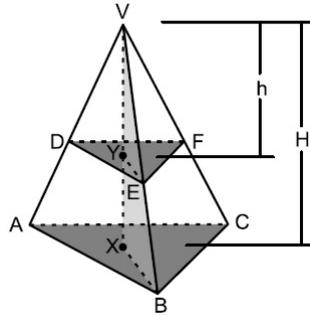


Figura 25: Razão de semelhança. Fonte: [27].

Como os triângulos  $DEF$  e  $ABC$  são semelhantes, todos os segmentos opostos de um vértice de mesmo ângulo são proporcionais a razão de semelhança  $k$ . Assim, sejam  $h_1$  e  $h_2$  as alturas relativas dos triângulos  $DEF$  e  $ABC$  as bases  $EF$  e  $BC$ , a razão de semelhança entre as áreas dos triângulos será:

$$\frac{A_{DEF}}{A_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}h_1 \cdot EF}{\frac{1}{2}h_2 \cdot BC} = \frac{h_1 \cdot EF}{h_2 \cdot BC}.$$

Sabemos que:  $\frac{EF}{BC} = \frac{h}{H}$  e  $\frac{h_1}{h_2} = \frac{h}{H}$ , logo:

$$\frac{A_{DEF}}{A_{ABC}} = \frac{h}{H} \cdot \frac{h}{H} = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

Assim, demonstramos que se uma pirâmide triangular for seccionada por planos paralelos a base as interseções entre os planos e a pirâmide formará triângulos semelhantes, com a razão de semelhança proporcional à altura das figuras em relação ao

vértice, independente da posição do vértice. Portanto, pelo *Princípio de Cavalieri*, pirâmides com mesma base e a mesma altura possuem o mesmo volume, pois a razão de semelhança entre as áreas depende apenas da altura do plano de seção, conforme pode ser observado na figura 26 .

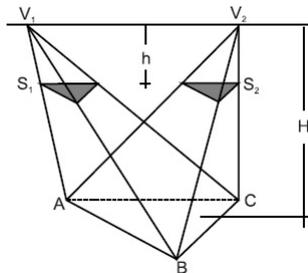


Figura 26: Volume de pirâmides com mesma base e mesma altura. Fonte: [27].

Para determinar o volume de uma pirâmide triangular tomemos como base um triângulo  $ABC$  de altura  $h$  (figura 27).

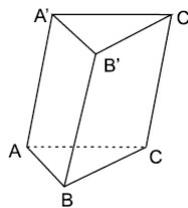


Figura 27: Prisma triangular.

Este prisma pode ser dividido em três pirâmides triangulares, conforme a figura 28.

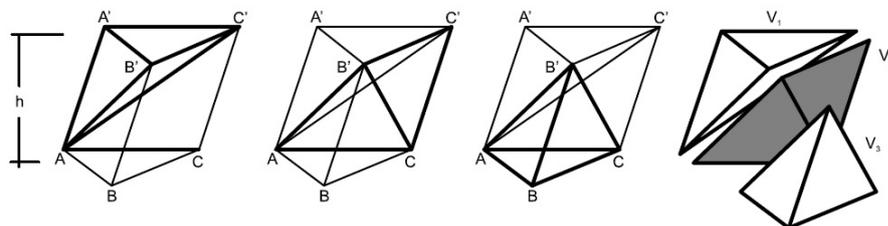


Figura 28: Divisão do prisma em pirâmides. Fonte: [27].

Podemos verificar que a pirâmide de vértice  $A$  e base  $A'B'C'$  possui volume igual a pirâmide de vértice  $B'$  e base  $ABC$ , pois possuem bases e alturas congruentes. Também

podemos observar que a pirâmide de vértice  $C$  e base  $AB'C'$  possui volume igual a pirâmide de vértice  $A'$  e base  $AB'C'$ , sendo esta última congruente a pirâmide de vértice  $A$  e base  $A'B'C'$ . Portanto, os volumes das três pirâmides são iguais. Como sabemos calcular o volume de um prisma triangular, podemos então determinar o volume de uma pirâmide triangular, pois como  $vol(\text{prisma}) = (\text{área da base}) \times (\text{altura}) = 3 \cdot vol(\text{pirâmide})$ , temos que:

$$vol(\text{pirâmide}) = \frac{1}{3} \cdot (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}).$$

Para as demais pirâmides podemos aplicar o mesmo raciocínio, pois todo polígono pode ser dividido em triângulos e o volume total será a soma dos volumes das pirâmides triangulares, conforme podemos observar na figura 29.

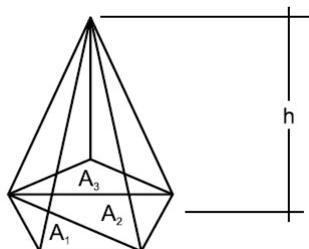


Figura 29: Volume de uma pirâmide qualquer. Fonte: [27].

## 6.7 Volume de um cone

Considere uma figura fechada sobre um plano e um ponto  $V$  fora deste plano. Um cone é definido pela reunião de todos segmentos com uma extremidade sobre o ponto  $V$  e a outra extremidade em um ponto da figura. Um cone cuja figura da base é um círculo é chamado de cone circular (ver figura 30), caso seu eixo<sup>2</sup> for perpendicular ao plano da base será classificado como reto e caso contrário como oblíquo.

Para o estudo do cone circular é importante conhecer seus elementos principais, a saber: a geratriz  $g$ , segmento de reta do vértice  $V$  a circunferência da base; o raio  $r$  da circunferência e a altura  $h$ , distância do vértice ao plano da base (ver figura 31). Um cone especial, chamado de *cone equilátero* é assim classificado quando for reto e sua geratriz possuir comprimento igual ao diâmetro da circunferência, seria como se um triângulo equilátero girasse em torno de seu eixo.

<sup>2</sup>Segmento de reta do vértice  $V$  ao centro do círculo da base do cilindro.

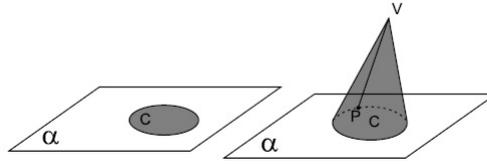


Figura 30: Cone circular. Fonte: [27].

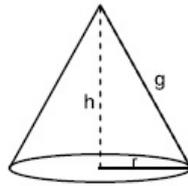


Figura 31: Elementos do cone circular.

Para determinar o volume do cone utilizamos novamente o *Princípio de Cavalieri*. Assim, tomemos um cone circular de altura  $H$  e raio da base  $R$  sobre um plano  $\alpha$  e uma pirâmide de base com área igual a base do cone e altura  $H$ , conforme figura 32 .

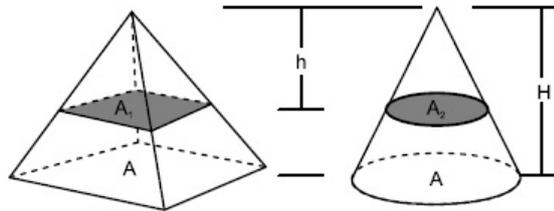


Figura 32: Volume do cone circular. Fonte: [27].

Analisando primeiramente o cone circular podemos verificar que se traçarmos um plano paralelo a  $\alpha$  e secante ao cone em uma altura  $h$  do vértice  $V$ , temos um círculo menor de área  $A_2$  e raio  $r$  formado pela interseção do plano com o cone. Como vimos na seção 5.3, duas circunferências são figuras semelhantes e a razão de semelhança é igual razão dos raios. Portanto, a razão de semelhança das áreas é:

$$\frac{A_2}{A} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 .$$

Outra forma para entendermos esse resultado é observando os triângulos retângulos  $VBC$  e  $VDE$  na figura 33. Como estes triângulos são semelhantes, temos que:

$$\frac{VD}{VB} = \frac{DE}{BC} = \frac{h}{H} = \frac{r}{R}.$$

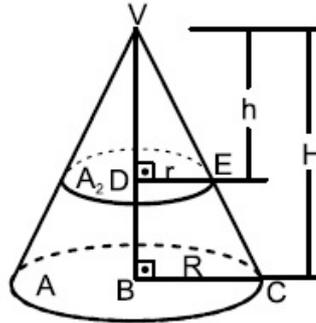


Figura 33: Razão de semelhança entre as áreas do círculo em um cone. Fonte: [27].

Assim, a razão de semelhança entre as área  $A_1$  e  $A$  será:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

Portanto, a razão de semelhança entre as áreas círculos é igual a razão de semelhança entre as áreas dos polígonos da pirâmide. Logo, pelo *Princípio de Cavalieri*, temos que o volume do cone será igual ao volume da pirâmide.

$$vol(\text{cone}) = \frac{1}{3} \times (\text{área da base}) \times (\text{altura}) = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Um tronco de cone é definido por um plano horizontal de corte do cone original, podemos observar um na a figura 34, está compreendido entre a círculo de raio  $R$  e o círculo de raio  $r$  e possui altura  $h$ . Para determinar seu volume é necessário apenas calcular a diferença entre o volume do cone de vértice  $A$  e base o círculo de  $R$  e o volume do cone de vértice  $A$  e base o círculo de raio  $r$ . Vale lembrar que um raciocínio semelhante pode ser utilizado para o cálculo do volume de um tronco de uma pirâmide.

Por semelhança dos triângulos visto acima temos que:

$$\begin{aligned} \frac{H}{H-h} &= \frac{R}{r} \Rightarrow H = \frac{(H-h).R}{r} \\ \Rightarrow H &= \frac{HR}{r} - \frac{hR}{r} \end{aligned}$$

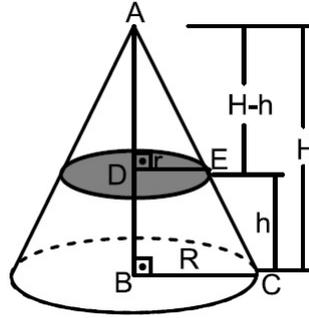


Figura 34: Tronco de cone. Fonte: [27].

$$\Rightarrow HR - Hr = hR \Rightarrow H = \frac{hR}{R - r}.$$

E, o volume do tronco de cone é:

$$vol(\text{tronco}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 (H - h)$$

$$vol(\text{tronco}) = \frac{1}{3}\pi R^2 H - \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$vol(\text{tronco}) = \frac{\pi}{3}(R^2 - r^2)H + \frac{\pi}{3}r^2 h$$

$$vol(\text{tronco}) = \frac{\pi}{3}(R - r)(R + r)\frac{hR}{R - r} + \frac{\pi}{3}r^2 h$$

$$vol(\text{tronco}) = \frac{\pi}{3}(R + r)hR + \frac{\pi}{3}r^2 h$$

$$vol(\text{tronco}) = \frac{\pi}{3}R^2 h + \frac{\pi}{3}Rr h + \frac{\pi}{3}r^2 h$$

$$vol(\text{tronco}) = \frac{\pi}{3}h(R^2 + Rr + r^2).$$

## 6.8 Volume da esfera

Uma esfera é definida como um lugar geométrico formado pelo conjunto de pontos  $P$  cuja a distância a um ponto  $O$  (centro da esfera) é constante e igual ao raio  $R$  da mesma (ver figura 35).

Para o cálculo do volume da esfera podemos utilizar novamente o *Princípio de Cavalieri*. Para isso, tomemos um cilindro circular equilátero de raio da base  $R$  e altura  $2R$ , sobre um plano  $\alpha$ , e uma esfera de raio  $R$  também sobre  $\alpha$ . Dentro do

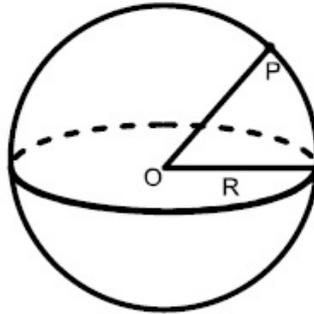


Figura 35: Esfera. Fonte: [27].

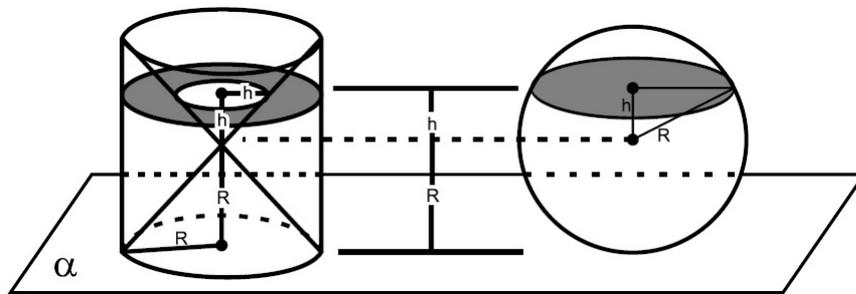


Figura 36: Volume da esfera. Fonte: [27].

cilindro traçamos dois cones de altura  $R$  e circunferência da base  $R$ , conforme figura 36.

Calculamos agora o volume do sólido formado pelo cilindro equilátero retirados os cones interiores, sólido chamado de *clépsdra* e posteriormente iremos comparar com o volume da esfera. Por construção sabemos que a altura dos dois sólidos são iguais, logo, se as áreas das figuras formadas pela interseção de planos paralelos a  $\alpha$  forem iguais, sabemos pelo *Princípio de Cavalieri*, que os sólidos possuem o mesmo volume.

Podemos observar intuitivamente que em  $\alpha$  e no plano paralelo a esse e tangente a circunferência da base superior do cilindro, as áreas das figuras formadas pela interseção dos planos com a *clépsdra* e a esfera serão iguais a zero.

De forma intuitiva também podemos observar que se traçarmos um plano paralelo a  $\alpha$  a uma altura  $R$ , passando este no centro da esfera e no centro do cilindro, as áreas das figuras serão iguais a  $\pi R^2$ .

Tomemos agora as figuras formadas pela interseção de um plano  $\beta$ , paralelo a  $\alpha$ , distante a uma altura  $h$  qualquer do centro da esfera, sendo  $h < R$ . Em relação a

esfera, a figura formada pela interseção com plano  $\beta$  com a esfera é uma circunferência  $c_1$  de raio  $r$ . Do triângulo retângulo formado por  $R$ ,  $r$  e  $h$ , temos que:

$$R^2 = h^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - h^2.$$

Assim, a área  $A_1$  da circunferência  $c_1$  é:

$$A_1 = \pi r^2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Agora, calculemos a área  $A_2$  da figura formada pela interseção de  $\beta$  com a *clépsdra*, determinada pela diferença entre áreas do círculo de raio  $R$  e o círculo de raio  $h$ . Sabemos que o raio da circunferência menor é igual a  $h$  utilizando relação de semelhança entre os triângulos retângulos de base  $R$  e altura  $R$  e o triângulo de altura  $h$ , o qual conseqüentemente terá base  $h$  que coincide com o raio da circunferência menor. Logo:

$$A_2 = \pi R^2 - \pi h^2$$

$$A_2 = \pi(R^2 - h^2).$$

Assim, pelo *Princípio de Cavalieri*, o volume da esfera será igual ao volume do cilindro menos os volumes dos cones internos. Assim,

$$vol(\text{esfera}) = vol(\text{cilindro}) - 2vol(\text{cone})$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R$$

$$V = \pi \left( 2R^3 - \frac{2}{3} R^3 \right)$$

$$V = \pi \left( \frac{6R^3 - 2R^3}{3} \right)$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

## 7 Áreas do cilindro, do cone circular e da esfera

### 7.1 Área do cilindro circular

A área do cilindro circular é calculada como a soma das áreas das circunferências das bases mais a área da superfície lateral. Como as áreas das circunferências das bases

são facilmente determinadas quando conhecemos o raio, resta apenas saber a área da superfície lateral.

Assim, tomemos um cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ , se cortarmos sua superfície lateral em uma direção perpendicular ao raio e a desenrolarmos sobre um plano obtemos um retângulo de base  $2\pi r$  e altura  $h$ , conforme figura 37. Logo, a área do cilindro pode ser calculada como:

$$A = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

$$A = 2\pi r(r + h).$$

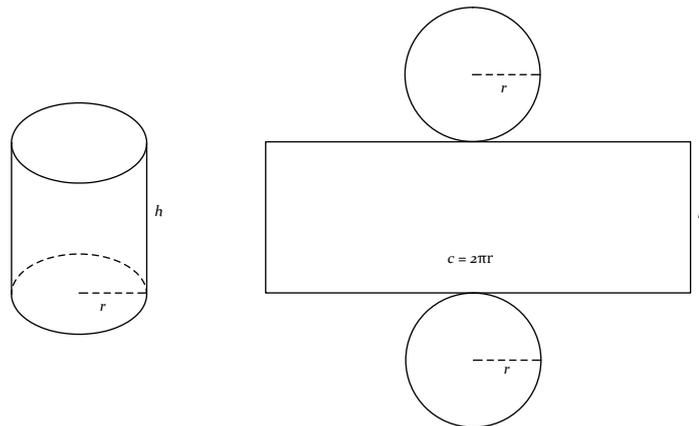


Figura 37: Área do cilindro circular.

## 7.2 Área do cone circular

A área do cone circular é obtida através da soma da área da circunferência da base e a área da superfície lateral, formada pelos segmentos de reta que ligam o vértice à circunferência da base, e neste caso são congruentes.

Consideremos um cone circular de altura  $h$  e circunferência da base de raio  $r$ . O segmento  $g$  que liga o vértice à circunferência da base, também conhecido como geratriz do cone pode ser calculado através do *Teorema de Pitágoras* no triângulo retângulo formado pelo raio  $r$  da base, a altura  $h$  do cone. Assim, temos que:

$$g^2 = r^2 + h^2$$

$$g = \sqrt{r^2 + h^2}.$$

Se cortarmos o cone na direção da geratriz  $g$  e o desenrolarmos em um plano obteremos um arco de circunferência  $AB$  de centro  $O$ , conforme figura 38. Logo, a área da superfície lateral do cone circular é igual a área do setor circular de comprimento igual ao comprimento da circunferência da base e raio igual a geratriz.

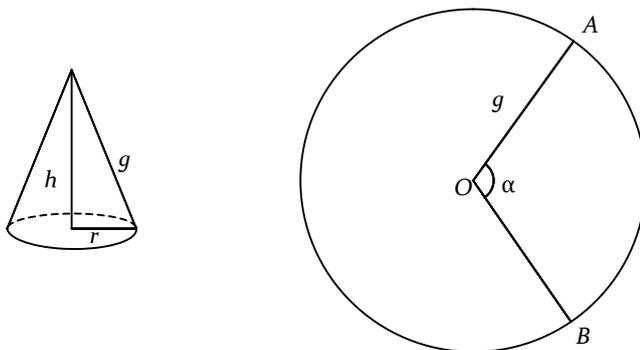


Figura 38: Área do cone circular.

Sabemos que a área de um setor circular depende do ângulo  $\alpha$  e do raio  $R$  da circunferência, pois:

$$\begin{cases} 2\pi \rightarrow \pi R^2 \\ \alpha \rightarrow A \end{cases}$$

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi R^2}{A} \Rightarrow A = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

Também sabemos calcular o ângulo  $\alpha$  congruente a  $\widehat{AOB}$  se conhecermos o comprimento de  $AB$ . Vejamos:

$$\begin{cases} 2\pi \rightarrow 2\pi R \\ \alpha \rightarrow AB \end{cases}$$

$$\frac{2\pi}{\alpha} = \frac{2\pi R}{AB} \Rightarrow \alpha = \frac{AB}{R}.$$

Assim, a área  $A_c$  do setor circular  $OAB$  da figura 38 torna:

$$A_c = \frac{\alpha g^2}{2} = \frac{AB \cdot g^2}{2g} = \frac{AB \cdot g}{2}.$$

Para o cone circular sabemos que o comprimento  $AB$  é igual a  $2\pi r$ , logo:

$$A_c = \frac{2\pi r g}{2} = \pi r g$$

$$A_c = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}.$$

### 7.3 Área da esfera

Segundo Lima (2006), a superfície da esfera não é "desenvolvível", no sentido de ser desenrolada sobre um plano e, portanto, não pode ser calculada de modo semelhante aos cálculos feitos para os cilindros e para os cones circulares, sendo necessário utilizar noções de *limites* para justificar os cálculos.

Contudo, existem argumentos que, apesar de não constituírem uma demonstração, auxiliam no entendimento e aceitação do resultado. Por exemplo, se imaginarmos a superfície da esfera com área  $A$ , dividida em  $n$  figuras fechadas com áreas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , sendo  $n$  um número tão grande, tal que as áreas sejam tão pequenas a ponto das figuras aproximarem de figuras planas, teremos que o volume da esfera será igual ao somatório dos volumes dos cones  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , com vértices no centro da esfera e bases nas figuras com áreas  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , tendo o raio  $R$  da esfera como altura. Assim, temos que:

$$vol(\text{esfera}) = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}A_1 \cdot R + \frac{1}{3}A_2 \cdot R + \dots + \frac{1}{3}A_n \cdot R$$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}R(A_1 + A_2 + \dots + A_n)$$

$$A = 4\pi R^2.$$

Outro argumento interessante é, se temos uma esfera de raio  $R$  e volume  $V_1$  a qual queremos conhecer a área  $A$  da superfície lateral, podemos imaginar uma esfera de raio  $R+h$ , com  $h$  um valor tendendo a zero e volume  $V_2$ . Assim, é aceitável que se  $h$  for um valor muito próximo de zero, a malha formada pela diferença de volume entre as esferas possa ser dividida em  $n$  blocos retangulares  $B_1, B_2, \dots, B_n$ , com alturas próximas a  $h$ . Assim:

$$\begin{aligned}
 V_2 - V_1 &= B_1 \cdot h + B_2 \cdot h + \dots + B_n \cdot h \\
 \frac{4}{3}\pi (R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 &= h \cdot (B_1 + B_2 + \dots + B_n) \\
 \frac{4}{3}\pi (R^3 + 3R^2 \cdot h + 3R \cdot h^2 + h^3) - \frac{4}{3}\pi R^3 &= h \cdot A \\
 \frac{4}{3}\pi h(3R^2 + 3Rh + h^2) &= h \cdot A \\
 A &= 4\pi R^2 + 4\pi Rh + \frac{4}{3}\pi h^2.
 \end{aligned}$$

Como  $h$  esta tendendo a zero, a área  $A$  tende a  $4\pi R^2$ .

## 8 Dimensionamento do sistema de proteção contra incêndio

No estado de Goiás, a referência normativa para dimensionamento do sistema de proteção contra incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis é a Norma Técnica nº 25/2014 : Segurança contra incêndio para líquidos combustíveis e inflamáveis (NT-25), a qual tem como objetivo estabelecer os requisitos mínimos necessários para a elaboração de projeto e dimensionamento das medidas de segurança contra incêndio, exigidas para instalações de produção, armazenamento, manipulação e distribuição de líquidos combustíveis e inflamáveis.

A NT-25 se aplica a todas as edificações e/ou áreas de risco em que haja produção, manipulação, armazenamento e distribuição de líquidos combustíveis ou inflamáveis localizadas no interior de edificações ou a céu aberto conforme o Código Estadual de Proteção Contra Incêndio e Pânico do Estado de Goiás (Lei 15.802, de 11 de setembro de 2006). Ela está dividida em quatro partes, a saber:

- Parte 1 - Generalidades e requisitos básicos;

- Parte 2 - Armazenamento em tanques estacionários;
- Parte 3 - Armazenamento fracionado;
- Parte 4 - Manipulação.

As exigências para o dimensionamento dos sistemas em tanques aéreos encontram-se principalmente nas duas primeiras partes da NT-25.

Os líquidos combustíveis e inflamáveis são classificados na Norma Técnica 03/2014 - Terminologia de segurança contra incêndio (NT-03), conforme seu Ponto de Fulgor <sup>3</sup> (PF) e Ponto de Ebulição <sup>4</sup> (PE) . Os líquidos combustíveis possuem ponto de fulgor superior a 37,8°C e os líquidos inflamáveis possuem ponto de fulgor inferior a 37,8°C, sendo divididos em classe conforme as tabelas 1 e 2.

Tabela 1: Classificação dos líquidos inflamáveis.

<b>Líquidos</b>	<b>Ponto de Fulgor (PF)</b>	<b>Ponto de ebulição (PE)</b>
Classe I	PF < 37,8°C	—
Classe I-A	PF < 22,8 °C	PE < 37,8 °C
Classe I-B	PF < 22,8 °C	PE ≥ 37,8 °C
Classe I-C	22,8°C ≤ PF < 37,8°C	—

Conforme a NBR 17.505-7/2006, bem como a NT-25 do CBMGO, o dimensionamento dos sistemas de combate a incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis deve considerar dois conceitos fundamentais ou "premissas":

- Dimensionamento pelo maior risco;

<sup>3</sup>Ponto de fulgor ou *flash point* é a menor temperatura na qual um combustível emite vapores em quantidade suficiente para formar uma mistura com o ar na região imediatamente acima da sua superfície, capaz de entrar em ignição quando em contato com uma chama e não mantê-la após sua retirada.

<sup>4</sup>Ponto de ebulição é a temperatura na qual um contínuo fluxo de bolhas de vapor ocorre em determinado líquido, que seja aquecido num recipiente aberto; temperatura na qual a pressão de vapores é igual à pressão atmosférica.

Tabela 2: Classificação dos líquidos combustíveis.

<b>Líquidos</b>	<b>Ponto de Fulgor (PF)</b>
Classe II	$37,8^{\circ}\text{C} \leq \text{PF} < 60^{\circ}\text{C}$
Classe III-A	$60^{\circ}\text{C} \leq \text{PF} < 93^{\circ}\text{C}$
Classe III-B	$\text{PF} \geq 93^{\circ}\text{C}$

- Não simultaneidade de eventos, isto é, o dimensionamento deve ser feito com base na ocorrência de apenas um evento adverso.

Para fins didáticos, os cálculos serão divididos neste trabalho em 06 (seis) partes:

1. Dimensionamento da bacia de contenção;
2. Dimensionamento do sistema de resfriamento para tanques verticais em áreas abertas;
3. Dimensionamento do sistema de resfriamento para tanques horizontais em áreas abertas;
4. Dimensionamento do sistema de espuma para tanques verticais em áreas abertas;
5. Dimensionamento do sistema de espuma para tanques horizontais em áreas abertas;
6. Dimensionamento da reserva de incêndio.

## 8.1 Dimensionamento da bacia de contenção

O objetivo da bacia de contenção<sup>5</sup> é de armazenar o líquido contido no interior de um tanque em caso de vazamento. Assim, é intuitivo imaginar que a bacia de contenção deve suportar o volume do maior tanque nela contida, pois, pelas premissas do

---

<sup>5</sup>A bacia de contenção, conforme Norma Técnica 03/2014 do CBMGO, é o espaço construído por uma depressão, ou pela topografia do terreno ou ainda limitado por dique, destinado a conter eventuais vazamentos de produto, sendo que sua parte interna deve possuir um coeficiente de permeabilidade de  $10^{-6}$  cm/s, referenciado à água a 20°C.

dimensionamento do sistema, devemos considerar o maior risco e a não simultaneidade de eventos.

O controle de vazamento pode ser feito ao redor do próprio tanque ou por contenção a distância, sendo que nesse último deve ser previsto um sistema de drenagem por canaletas que conduzam o líquido extravasado à bacia. A contenção também pode ser mista, sendo prevista uma parte ao redor do tanque e outra a distância.

Segue abaixo algumas definições importantes para o dimensionamento da bacia de contenção, as quais estão contidas na NT-03<sup>6</sup> do CBMGO:

- Líquido estável: qualquer líquido não definido como instável.
- Líquidos instáveis ou reativos: líquidos que no estado puro ou nas especificações comerciais, por efeito de variação de temperatura, pressão ou de choque mecânico, na estocagem ou no transporte, tornam-se autorreativos e, em consequência, se decomponham, polimerizem ou venham a explodir.
- Resfriamento por anéis: dispositivo utilizado nos sistemas de resfriamento que tem por finalidade a aplicação do agente extintor para controle ou extinção de incêndios ou resfriamento.
- Tanque de teto cônico: reservatório com teto cônico soldado na parte superior do costado.
- Tanque tipo domos: tanque que apresenta teto com a forma aproximada de uma calota esférica.
- Tanque de teto flutuante: tanque vertical projetado para operar à pressão atmosférica, cujo teto flutua sobre a superfície do líquido.
- Tanque com selo flutuante: tanque vertical com teto fixo metálico que dispõe em seu interior de um selo flutuante metálico suportado por dispositivos herméticos de flutuação metálicos.

O sistema de controle de vazamento mais comumente utilizado em tanques aéreos no Estado de Goiás é a contenção por diques em torno dos tanques. Segue abaixo as principais exigências para esses casos previstas no item 6.1.7.2 da NT-25 :

---

<sup>6</sup>Norma Técnica n. 03/2014 - Terminologia de Segurança Contra Incêndio

### **6.1.7.2 Contenção por diques em torno de tanques**

**6.1.7.2.1** Quando a proteção das propriedades adjacentes ou cursos d'água for feita por meio de bacia de contenção em torno de tanques, dotadas de diques, este sistema deve ser conforme os seguintes requisitos:

...

**b.** a capacidade volumétrica da bacia de contenção deve ser no mínimo igual ao volume do maior tanque, mais o volume do deslocamento da base deste tanque, mais os volumes equivalentes aos deslocamentos dos demais tanques contidos na bacia, suas bases e os volumes dos diques intermediários;

...

**g.** a altura do dique deve ser o somatório da altura que atenda à capacidade volumétrica da bacia de contenção, como estabelecido em 6.1.7.2.1, alínea b), mais 0,20 m para conter as movimentações do líquido e, no caso do dique de terra, mais 0,20 m para compensar a redução originada pela acomodação do terreno.

**h.** a altura máxima do dique, medida pela parte internada bacia, deve ser de 3 m;

...

**m.** a distância mínima entre os tanques e a base interna do dique deve ser de 1,5 m, exceto para instalações onde exista apenas um tanque no interior da bacia, com volume até 15 m<sup>3</sup>, quando esta distância pode ser reduzida, não podendo ser inferior a 0,60 m;

**n.** cada bacia de contenção com dois ou mais tanques deve ser subdividida preferencialmente por canais de drenagem ou, no mínimo, por diques intermediários, de forma a evitar que derramamentos de tanques adjacentes coloquem em risco o interior da bacia de contenção, conforme segue:

**1)** no armazenamento de líquidos estáveis em tanques verticais de tetos cônicos ou tipo domos construídos com solda fragilizada entre o costado e o teto ou de teto flutuante ou com selo flutuante, ou em qualquer tipo de tanque armazenando petróleo cru nas áreas de produção, deve ser previsto um dique intermediário para cada tanque, com capacidade superior a 1.600 m<sup>3</sup> ou para cada grupo de tanques com capacidade total não superior a 2.400 m<sup>3</sup> e individual máxima de 1.600 m<sup>3</sup>;

2) no armazenamento de líquidos estáveis em tanques não cobertos pelo subitem anterior deve ser previsto um dique intermediário para cada tanque com capacidade superior a 380 m<sup>3</sup>. Além disto, deve-se prever uma subdivisão para cada grupo de tanques possuindo uma capacidade inferior a 570 m<sup>3</sup>, não podendo cada tanque individual exceder a capacidade de 380 m<sup>3</sup>;

3) no armazenamento de líquidos instáveis, em qualquer tipo de tanque, deve ser previsto um dique intermediário isolando cada tanque, exceto se os tanques forem instalados em bacias que possuam um sistema de drenagem contemplando o resfriamento por anéis;

4) quando 2 ou mais tanques armazenando líquidos de classe I, um deles possuindo diâmetro superior a 45 m, estiverem localizados em uma mesma bacia de contenção, devem ser previstos diques intermediários, entre os tanques adjacentes, de forma a conter, pelo menos 10% da capacidade do tanque enclausurado;

5) os canais de drenagem ou os diques intermediários devem ser localizados entre os tanques, de forma a tirar a maior vantagem do espaço disponível, com a devida atenção à capacidade individual de cada tanque. Onde forem utilizados diques intermediários, os mesmos não devem ter altura inferior a 45 cm;

Para o dimensionamento da bacia de contenção precisamos ainda definir tanques isolados e tanques vizinhos, conforme NT-25 temos as definições nos seguintes itens:

**6.1.8.1** Os tanques aéreos verticais com capacidade individual igual ou inferior a  $20 \text{ m}^3$  serão considerados isolados, para fins de proteção contra incêndio, quando distanciarem entre si, no mínimo duas vezes o diâmetro do maior tanque e estiverem em bacias de contenção isoladas.

**6.1.8.2** Os tanques aéreos horizontais com capacidade individual igual ou inferior a  $20 \text{ m}^3$  serão considerados isolados, para fins de proteção contra incêndio, quando distanciarem entre si, no mínimo duas vezes a maior dimensão do maior tanque e estiverem em bacias de contenção isoladas.

...

**6.4.4.6** Para efeito de cálculo, são considerados vizinhos os tanques que atendam a um dos seguintes requisitos:

a) quando o tanque considerado em chamas for vertical e a distância entre seu costado e o costado do tanque vizinho for menor que 1,5 vez o diâmetro do tanque em chamas ou 15 m, o que for maior;

b) quando o tanque considerado em chamas for horizontal e a distância entre a base do dique da sua bacia de contenção e o costado do tanque vizinho for menor que 15 m.

Para o dimensionamento por sistema de extintores devemos verificar se os tanques são isolados, já para cálculos de resfriamento devemos verificar se os tanques são vizinhos ou não. Cabe ressaltar que, conforme o item 6.1.4 da NT-25, independentemente das facilidades de combate ao fogo, os tanques de armazenamento de líquidos inflamáveis e/ou combustíveis, com distâncias horizontais inferiores às distâncias mínimas de isolamento, contidas na tabela 3, devem ser considerados como único risco para efeito de proteção contra incêndio.

Tabela 3: Espaçamento mínimo entre tanques verticais e horizontais (Fonte: Tabela A-7, Anexo A, NT-25).

	<b>Tanques com teto flutuante ou seio flutuante</b>	<b>Teto fixo ou horizontal Líquidos classe I ou II</b>	<b>Teto fixo ou horizontal Líquidos classe III-A</b>
<b>Todos os tanques com Diâmetro <math>\leq</math> 45 m</b>	1/6 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes, mas não inferior a 1 m	1/6 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes, mas não inferior a 1 m	1/6 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes, mas não inferior a 1 m
<b>Tanques com diâmetro <math>&gt;</math> 45 m. Se for prevista bacia de contenção a distancia, de acordo com 6.1.7.1</b>	1/6 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes	1/4 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes	1/6 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes
<b>Tanques com diâmetro <math>&gt;</math> 45 m. Se for previsto dique, de acordo com 6.1.7.2</b>	1/4 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes.	1/3 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes.	1/4 da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes

## 8.2 Exemplos de dimensionamento de bacias de contenção

### 8.2.1 Exemplo 01 - Dimensionamento de uma bacia de contenção

Considere um tanque cilíndrico de líquido inflamável ou combustível com diâmetro de 10m e altura de 8m em uma bacia de contenção, conforme figura 39.

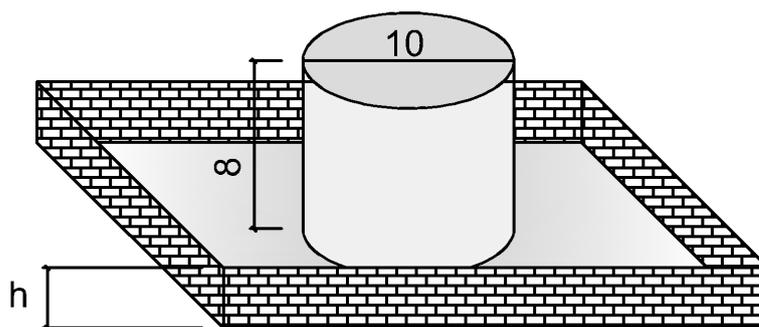


Figura 39: Exemplo de um tanque vertical em uma bacia de contenção.

O volume deste tanque é<sup>7</sup>:

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 8$$

$$V = 628 \text{ m}^3 = 628.000 \text{ litros}$$

A área da bacia de contenção mínima será igual a um quadrado de lado 13 m, pois conforme alínea "m" do item 6.1.7.2.1 da NT-25, a distância mínima entre o tanque e a base interna do dique deve ser de 1,5 m. Contudo, cabe ao projetista juntamente com proprietário definir as dimensões adequadas, respeitando as exigências da norma.

A altura  $h$  mínima do dique será igual a altura  $h'$  a qual o dimensionamento suporta o volume do maior tanque e de sua base, mais 20 cm para movimentação do líquido e caso do dique seja de terra mais 20 cm para acomodação do terreno.

$$h = h' + 20 \text{ cm, ou caso o dique for de terra } h = h' + 40 \text{ cm.}$$

Caso a base da bacia de contenção seja um quadrado de lado 13 m, sua área é:

---

<sup>7</sup>Utilizamos para os cálculos o valor do número  $\pi$  com duas casas decimais de precisão, fazendo  $\pi = 3,14$ .

$$A(\text{bacia}) = 13^2$$

$$A(\text{bacia}) = 169 \text{ m}^2.$$

Assim, a altura  $h$  mínima para a bacia de contenção, considerando que a base do tanque esteja enterrada, será:

$$\text{vol}(\text{bacia}) = \text{vol}(\text{tanque})$$

$$169.h' = 628$$

$$h' = 3,72 \text{ m} \Rightarrow h = 3,92\text{m ou } 4,12 \text{ m caso o dique fosse de terra.}$$

Contudo, a altura máxima do dique não pode ultrapassar 3m, conforme alínea "h" do item 6.1.7.2.1 da NT-25. Assim, o responsável pelo projeto deverá alterar as dimensões da bacia de contenção.

Com intuito de economizar na construção do dique, o qual normalmente tem formato de um prisma, podemos questionar qual figura possui a maior área e menor perímetro, pois quanto maior a área menor será altura do dique.

$$h = \frac{V}{A}.$$

Assim, podemos pensar primeiramente em polígonos regulares com mesma área e relacionar os perímetros.

Para um triângulo regular de lado  $l$  e área  $A$ , conforme figura 40, temos que:

$$A = \frac{1}{2}l.h.$$

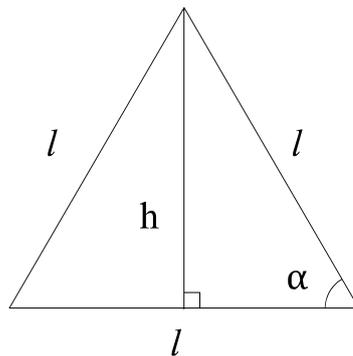


Figura 40: Triângulo equilátero.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo de altura  $h$  e base  $l/2$ , temos:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = l^2 - \frac{l^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{3}{4}l^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}l.$$

Assim,

$$A = \frac{1}{2}l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}l \Rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2.$$

Logo, para um triângulo de área 100, temos que o lado  $l$  será igual a 15,197 e o perímetro 45,591.

Tomemos agora um polígono regular  $P$  de área  $A$  com  $n$  lados. Podemos dividi-lo em  $n$  triângulos isósceles de base  $l$ , como na figura 41.

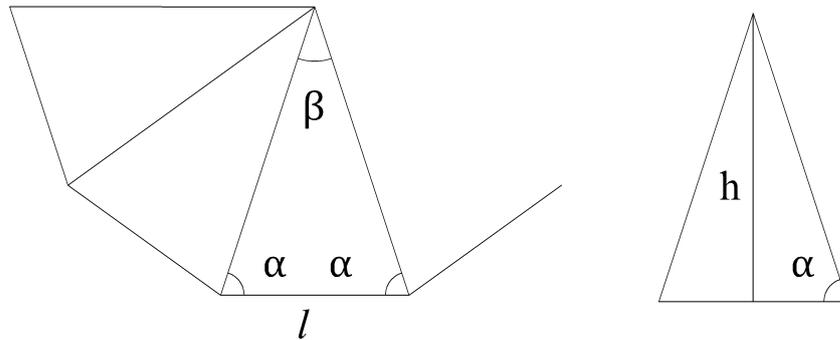


Figura 41: Polígono regular de  $n$  lados

A área do polígono é igual a  $n$  vezes a área do triângulo de base  $l$  e altura  $h$ , logo:

$$\frac{1}{2}l \cdot h = \frac{A}{n}.$$

Analisando a figura 41 percebemos que o ângulo  $\beta$  é igual a  $2\pi/n$  e o ângulo  $\alpha$  é igual a  $(\pi - \beta)/2$ . E, em relação a  $\alpha$  e a  $h$ , temos ainda:

$$\alpha = \frac{\pi - \beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi - \frac{2\pi}{n}}{2}$$

$$\alpha = \frac{\pi(n - 2)}{2n}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{h}{l/2} \Rightarrow h = \frac{l}{2} \tan(\alpha).$$

Vimos que pela relação de área que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}l.h &= \frac{A}{n} \\ \frac{1}{2}l.\frac{1}{2}l.\tan(\alpha) &= \frac{A}{n} \\ \frac{l^2}{4}\tan(\alpha) &= \frac{A}{n} \\ l^2 &= \frac{4A}{n\tan(\alpha)} \\ l &= 2\sqrt{\frac{A}{n.\tan(\alpha)}} \\ l &= 2\sqrt{\frac{A}{n.\tan\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)}}. \end{aligned}$$

Com base nestas informações podemos montar a tabela 4, na qual estão relacionados polígonos regulares de área fixa igual a 100 com seus respectivos perímetros. Podemos observar que quanto maior o número de lados menor será o perímetro da figura. Conforme visto na item 5.3, a área do círculo é um número cujas aproximações por falta é igual a área de um polígono de  $n$  lados inscritos na circunferência. Assim, é intuitivo que a circunferência é a figura com menor perímetro. No exemplo utilizado, com área igual 100 o perímetro da circunferência é igual a 35,45.

Portanto, o dimensionamento da base da bacia de contenção com maior área e menor perímetro é obtido quando esta é uma circunferência. Entretanto, pelas dificuldades de construção esta não é uma base usual, sendo utilizado comumente bases retangulares, neste caso o quadrado é a base que proporciona a maior área em relação ao perímetro.

Podemos verificar que o quadrado, em relação aos retângulos, é a figura com maior área se for considerado o perímetro constante. Tomemos um retângulo com lados  $a$  e  $b$  e perímetro  $2p$ . Temos que a área  $A$  será  $a.b$ .

Assim, podemos montar a seguinte relação:

$$\begin{cases} A = a.b \\ 2p = 2(a + b) \end{cases} \Rightarrow A = a.(p - a) \Rightarrow A = ap - a^2.$$

Tabela 4: Exemplo de perímetros de polígonos regulares com mesma área.

nº. de lados	Área	$\alpha$	lado	perímetro
4	100	45°	10	40
5	100	54°	7,623870554	38,11935277
6	100	60°	6,204032393	37,22419436
7	100	64,285°	5,245812581	36,72068807
8	100	67,5°	4,550898605	36,40718884
9	100	70°	4,021996376	36,19796738
10	100	72°	3,605105802	36,05105802
11	100	73,636°	3,267617941	35,94379735
12	100	75°	2,988584906	35,86301887
13	100	76,153°	2,753894377	35,80062691
14	100	77,142°	2,553672281	35,75141194
15	100	78°	2,380792929	35,71189394
16	100	78,75°	2,229979637	35,67967419
17	100	79,411°	2,097238503	35,65305455
18	100	80°	1,979489163	35,63080493
19	100	80,526°	1,874316639	35,61201614
20	100	81°	1,779800214	35,59600429

Para esta função temos que o maior valor<sup>8</sup> de  $A$  será atingido quando  $a = p/2$ . Logo, o maior valor de  $A$  será  $p^2/4$  e o valor de  $b$  será igual a  $p/2$ , demonstrando assim que neste caso a maior área será obtida para o quadrado.

Voltando ao exemplo da figura 39, vimos que se as dimensões da bacia deve ser

---

<sup>8</sup>Este fato pode ser verificado calculando as coordenadas do vértice da função do segundo grau. Se  $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow x_v = \frac{-b}{2a}$  e  $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$ .

superior a 13 m para obedecer os distanciamentos entre o costado e a base do dique. Contudo, para a base quadrangular de lado 13 m a altura mínima da bacia deveria ser 3,92 m ou 4,12 m caso o dique fosse de terra, o que ultrapassaria o limite de 3 m exigido para altura da bacia.

Assim, podemos definir previamente a altura da bacia de contenção inferior ao limite de 3 m e posteriormente definir as dimensões da base. No exemplo em pauta, caso desejarmos que a bacia de contenção possua altura de 1,5m, devemos primeiramente subtrair os 20 cm para movimentação do líquido e caso o dique for de terra mais 20 cm para acomodação do terreno, e depois dividir o volume do tanque pela altura e teremos a área da base. Abaixo segue os cálculos para um dique de alvenaria. Neste caso, quando retiramos as margens para movimentação e acomodação do terreno o volume fica igual ao volume do tanque.

$$A_b \cdot h = V_t$$

$$A_b \cdot 1,3 = 628$$

$$A_b = 483,1 \text{ m}^2.$$

Caso a base seja quadrangular o lado será igual a 21,98 m.

É importante salientar que normalmente, durante as análises de projetos e inspeções os militares do Corpo de Bombeiros apenas conferem se as dimensões da bacia de contenção atendem ao exigido na norma, cabendo ao responsável técnico planejar as estruturas conforme as condições do terreno, viabilidade técnica e interesses dos proprietários.

### **8.2.2 Exemplo 02 - Dimensionamento de bacia de contenção em tanques com bases acima do nível do terreno**

Caso o tanque analisado no exemplo 01 possua uma base de concreto com meio metro acima do nível da base da bacia de contenção, sendo esta base quadrangular de lado igual 22m, a altura  $h$  mínima da bacia, a qual deverá incluir também o volume deslocado pela base do tanque (ver figura 42 ), é:

$$vol(\text{bacia}) = vol(\text{tanque}) + vol(\text{base})$$

$$22^2 \cdot h' = 628 + \pi \cdot 5^2 \cdot 0,5$$

$$484 \cdot h' = 667,3$$

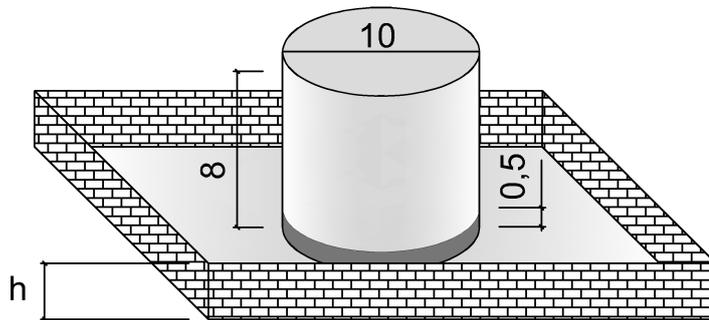


Figura 42: Exemplo de tanque vertical com base acima do nível do terreno.

$h' = 1,38\text{m} \Rightarrow h = 1,38 + 0,2 = 1,58\text{m}$  e, se o dique fosse de terra,  $h_t = 1,78\text{m}$ .

Outro ponto importante é a representação dos tanques através dos projetos contendo a planta baixa<sup>9</sup> e corte<sup>10</sup>, pois esta é a forma como são apresentados os projetos para análise junto ao CBMGO. O analista deve estar habituado com estas representações a fim de ter facilidade na leitura e entendimento do projeto. O tanque da figura 42 fica representado em um projeto de arquitetura conforme figura 43.

### 8.2.3 Exemplo 03 - Distanciamento entre costados de tanques

Considere dois tanques verticais cilíndricos com teto fixo para armazenamento de líquido inflamável ou combustível, com altura de 10m e diâmetro de 18m, localizados em uma mesma bacia de contenção, cujas bases estão enterradas, conforme figura 44.

Temos que o volume  $V$  do tanque é igual a:

$$V = A_b \cdot h$$

$$V = \pi \cdot 9^2 \cdot 10$$

---

<sup>9</sup>Peça desenhada integrante do projeto de construção de um edifício que compreende a vista superior do plano secante horizontal. A altura considerada do plano é variável de forma a poder ser possível a representação de todos os elementos considerados relevantes.

<sup>10</sup>Peça desenhada que representa a secção de um plano vertical na representação de um edifício, mostrando pormenores do seu interior, nomeadamente as cotas. As plantas também são cortes efetuados por um plano horizontal.

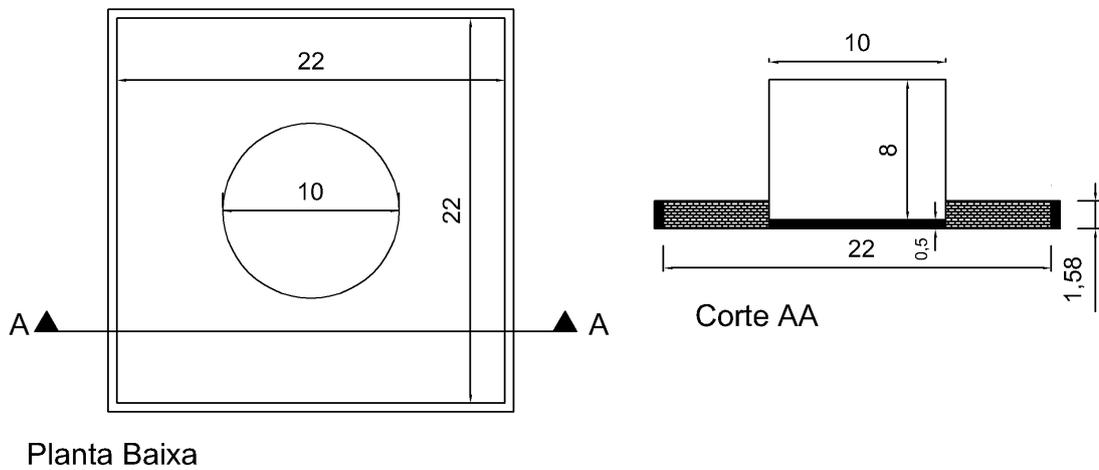


Figura 43: Planta baixa e corte de um tanque vertical.

$$V = 2.543,4 \text{ m}^3.$$

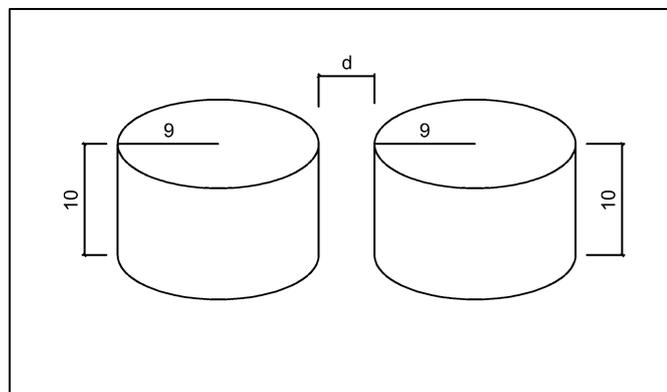


Figura 44: Exemplo de distanciamento entre costados de tanques.

Para o dimensionamento da bacia de contenção devemos primeiramente verificar se os tanques estão distantes conforme especificado na tabela 3, e nesse caso, independente da classificação do líquido a distância  $d$  mínima entre os costados dos tanques será  $1/6$  do diâmetro do tanque adjacente, logo:

$$d = \frac{1}{6} \cdot 18$$

$$d = 3 \text{ m.}$$

Portanto, a distância  $d$  mínima entre os tanques deve ser de 3m para que eles sejam considerados independentes para fins de cálculos da bacia de contenção, resfriamento e espuma. Se  $d$  for menor que 3m os dois tanques serão considerados com risco único. Como consequência, o dimensionamento da bacia de contenção deverá suportar o volume dos dois tanques e os sistemas de resfriamentos e espumas deverão ser calculados considerando os dois tanques em chamas.

Como a distancia  $d$  mínima é de 3m para que os tanques sejam considerados de forma independente, e conforme a alínea "m" do item 6.1.7.2.1 da NT-25 a distância mínima entre o costado e a base interna do dique deve ser de 1,5 m. Pode-se prevê uma bacia de contenção com base quadrangular de lado igual 42 m. Assim, a altura  $h$  mínima do dique é dada por:

$$vol(\text{bacia}) = vol(\text{maior tanque}) + vol(\text{deslocamento do tanque}) + vol(\text{bases})^{11}$$

$$A_b.h' = 2543,4 + \pi.9^2.h' + 0$$

$$42^2.h' - 9^2.\pi.h' = 2543,4$$

$$1509,53.h' = 2543,4$$

$$h' = 1,68\text{m} \Rightarrow h = 1,88\text{m ou } h_t 2,08 \text{ m.}$$

É importante salientar que a altura  $h$  do dique deve conter mais 20 cm para movimentação do líquido e caso o dique for de terra mais 20 cm para acomodação do terreno. Então a altura  $h$  mínima do dique será 1,88 m para um dique de alvenaria ou aço e de 2,08 m para um dique de terra.

Caso a distância  $d$  fosse menor que 3m a bacia de contenção deveria ser dimensionada para suportar o volume dos dois tanques, assim altura  $h$  seria:

$$vol(\text{bacia}) = vol(\text{tanques}) + vol(\text{bases})^{12}$$

$$42^2.h' = 2 \times 2.543,4$$

$$h' = \frac{5.086,8}{1.764}$$

$$h' = 2,9 \text{ m} \Rightarrow h = 3,1 \text{ m ou } 3,3 \text{ m (caso o dique fosse de terra).}$$

---

<sup>11</sup>Neste caso estamos considerando que as bases dos tanques estão enterradas e, portanto, não deslocam volume no interior da bacia.

<sup>12</sup>Volume desconsiderado, tendo em vista que no exemplo as bases estão enterradas.

Nota-se que, caso os dois tanques sejam considerados como rico único, a bacia de contenção deverá ter as dimensões de sua base alterada para que a altura do dique seja igual ou inferior a 3 m. Se for conveniente que a bacia fique com a altura final de 3m as dimensões para uma base quadrada de lado  $l$ , considerando que o dique é de terra, temos:

$$\begin{aligned}
 h' &= h - 0,4 \Rightarrow h' = 2,6\text{m} \\
 vol(\text{bacia}) &= vol(\text{Tanque 1}) + vol(\text{tanque 2}) \\
 l^2 \cdot h' &= 5.086,8 \\
 l^2 &= \frac{5.086,8}{2,6} \\
 l &= \sqrt{1.956,46} \\
 l &= 44,23 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

#### 8.2.4 Exemplo 04 - Isolamento de tanques horizontais

Neste exemplo será analisado um conjunto formado por quatro tanques horizontais de  $20 \text{ m}^3$ , dispostos conforme figura 45. A distância  $d$  mínima entre os costados dos tanques, para que esses sejam analisados de forma independente, conforme a tabela 3, será igual a  $1/6$  da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes, não podendo ser menor que 1m. Logo:

$$\begin{aligned}
 d &= \frac{1}{6}(2,4 + 2,4 + 2,4) \\
 d &= 1,2 \text{ m.}
 \end{aligned}$$

Portanto, a distância entre os costados dos tanques está adequada, pois está superior ao limite mínimo exigido de 1,2m. A bacia de contenção também está dimensionada em conformidade com a norma. Entretanto, o que torna este exemplo peculiar é o fato dos tanques possuírem capacidade de armazenamento igual a  $20\text{m}^3$ , sendo este o volume limite para isenção do sistema de resfriamento e espuma. Conforme item 6.1.8.2 da NT-25, os tanques horizontais são considerados isolados quando distarem entre si duas vezes a dimensão do maior tanque e estiverem em bacia de contenção separadas. Já para os tanques verticais a distância de isolamento é duas vezes o diâmetro do maior tanque. Para esses casos, conforme item 6.1.8.4 da NT-25, podem ser instalados até 05

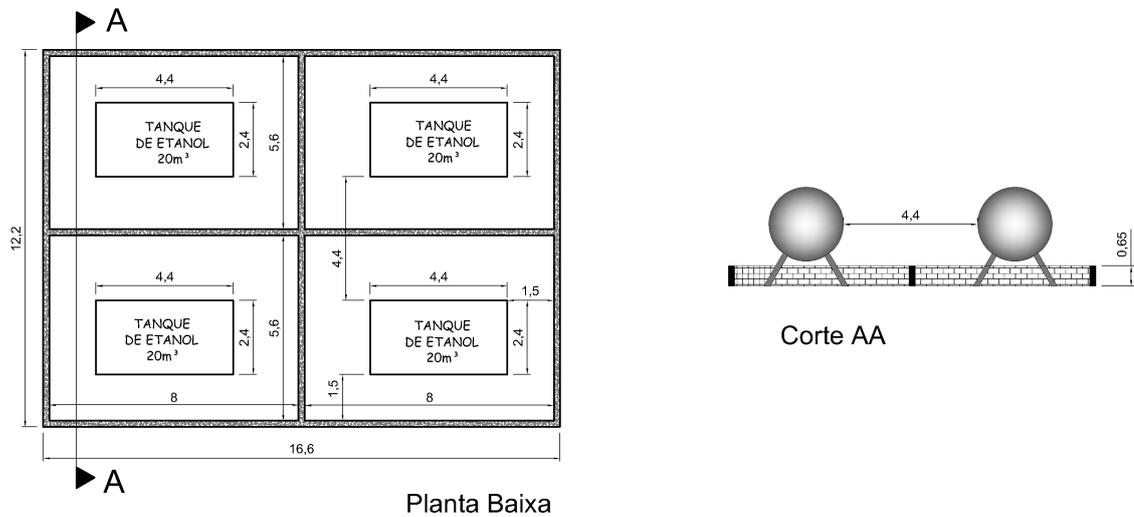


Figura 45: Exemplo de tanques horizontais.

(cinco) tanques com proteção apenas por extintores, o que reduz significativamente os custos com projetos e execução dos sistemas preventivos de proteção contra incêndio.

Projetos de tanques como esse merece uma atenção especial por parte tanto dos projetistas como por parte dos analistas, pois simples modificações alteram todo o sistema preventivo. Para isenção dos sistemas de resfriamento e espuma a primeira alternativa seria aumentar a distância entre os tanques para 8,8m. Contudo, esta alternativa poderia ser inviável por aumentar significativamente as dimensões da bacia de contenção. Outro problema nas edificações, principalmente as urbanas, é a falta de espaço para execução das instalações. Assim, uma alternativa viável seria a construção de uma parede corta-fogo<sup>13</sup> com resistência ao fogo<sup>14</sup> mínima de 120 minutos, ultrapassando 1m a altura do maior tanque (ver figura 46 ).

<sup>13</sup>Parede construída com o objetivo de proteger o público em geral e as edificações próximas de um incêndio na área de armazenamento ou o(s) recipiente(s) da radiação térmica de fogo próximo;

<sup>14</sup>Resistência ao fogo: propriedade de um elemento de construção de resistir à ação do fogo por um determinado período de tempo, mantendo sua integridade, isolamento térmica e estanqueidade ou características de vedação aos gases e chamas.

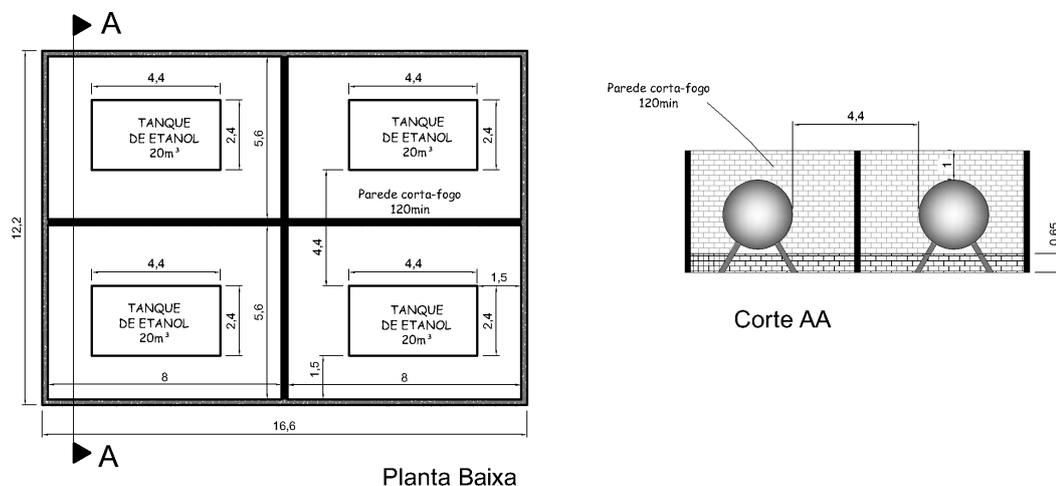


Figura 46: Exemplo de isolamento em parque de tanques horizontais.

### 8.2.5 Exemplo 05 - Isolamento de tanques verticais

Conforme item 6.1.8.1 da NT-25, os tanques aéreos verticais com capacidade individual igual ou inferior a  $20 \text{ m}^3$  são considerados isolados, para fins de proteção contra incêndio, quando distarem entre si, no mínimo duas vezes o diâmetro do maior tanque e estiverem em bacias de contenção separadas. Essa distância pode ser reduzida à metade, com a interposição de uma parede corta-fogo com resistência mínima ao fogo de 120 min, exigindo ainda que essa ultrapasse 1 m acima da altura do maior tanque, conforme previsto no item 6.1.8.3 da NT-25.

Este item da norma, juntamente com item 6.1.8.4<sup>15</sup>, permite que o responsável técnico dimensione um parque de tanques com até  $100 \text{ m}^3$  de líquidos combustíveis ou inflamáveis sem a necessidade da instalação de sistemas de resfriamento e espuma, proporcionando uma economia significativa referente aos custos de proteção contra incêndio.

Com foco em economia, pode-se questionar também qual seria o dimensionamento mais eficiente para um tanque cilíndrico, isto é, aquele que comporta um determinado volume com a menor área lateral.

Considere um tanque cilíndrico de volume  $V$  igual a  $20 \text{ m}^3$ , raio  $R$ , altura  $h$  e área lateral  $A$ . Com auxílio de um programa editor de planilhas podemos montar a tabela

<sup>15</sup>É permitida a proteção somente por extintores para parques com no máximo 5 tanques isolados.

5, onde são dados os valores do raio  $R$  e do volume  $V$ , o qual está constante, e como resultado obtemos os valores da altura e da área lateral.

Tabela 5: Área de um tanque cilíndrico de 20 m<sup>3</sup>.

Raio (m)	Altura (m)	Volume (m <sup>3</sup> )	Área (m <sup>2</sup> )
	$h = V/(\pi R^2)$	$V = \pi R^2 h$	$A = 2\pi R^2 + 2\pi R.h$
0,8	9,952229299	20	54,0192
0,9	7,863489817	20	49,53124444
1	6,369426752	20	46,28
1,1	5,263989051	20	43,96243636
1,2	4,423213022	20	42,37653333
1,3	3,768891569	20	41,38243077
1,4	3,249707526	20	40,88022857
<b>1,5</b>	<b>2,830856334</b>	<b>20</b>	<b>40,79666667</b>
1,6	2,488057325	20	41,0768
1,7	2,203953893	20	41,67861176
1,8	1,965872454	20	42,56942222
1,9	1,764384142	20	43,72343158
2	1,592356688	20	45,12
2,1	1,444314456	20	46,74241905
2,2	1,315997263	20	48,57701818
2,3	1,204050426	20	50,61250435
2,4	1,105803255	20	52,83946667

Analisando os valores da tabela podemos verificar que, para um tanque cilíndrico de volume igual a 20 m<sup>3</sup>, temos a menor área quando as dimensões do raio e da altura forem aproximadamente 1,5 m e 2,83 m, pois para estes valores foi encontrada a

menor área lateral. Contudo, não podemos afirmar que estas seriam as medidas mais eficientes, pois não temos certeza se para o raio de 1,5 m temos a menor área lateral. Sabemos apenas que os valores procurados para o raio da figura com menor área para um volume de 20 m<sup>3</sup> estaria entre 1,4 m e 1,6 m, pois percebemos que o valor da área estava diminuindo e passa a aumentar.

Utilizando um pouco mais de conhecimento de cálculo podemos calcular o ponto de mínimo para a função  $f$  de  $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ , tal que:

$$f(R) = 2\pi R^2 + 2\pi R.h$$

$$f(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}.$$

Como no ponto de mínimo sabemos que a primeira derivada da função é igual a zero, temos que:

$$f'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2} = 0$$

$$4\pi R = \frac{2V}{R^2}$$

$$R^3 = \frac{V}{2\pi}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

Logo, para  $V$  igual a 20 m<sup>3</sup>, temos que o raio 1,471 m e a altura 2,942 m são os valores para o dimensionamento mais eficiente do tanque cilíndrico com três casas decimais de precisão.

Tomemos agora quatro tanques cilíndricos de raio  $R = 1,5$  m e altura  $h$  de 2,83 m, dispostos conforme figura 47, estando os mesmos assentados sobre bases cilíndrica de raio 1,5 m e altura de 0,3 m e locados em bacias de contenção separadas de base quadradas de lado igual a 6 m.

Conforme a tabela 3, a distância mínima entre os tanques deve ser de 1/6 da somatória dos diâmetros dos tanques adjacentes. Como os tanque possuem as mesmas dimensões podemos tomar qualquer um como referência. Assim a distância  $d$  mínima é:

$$d = \frac{1}{6}(3 + 3 + 3) = 1,5.$$

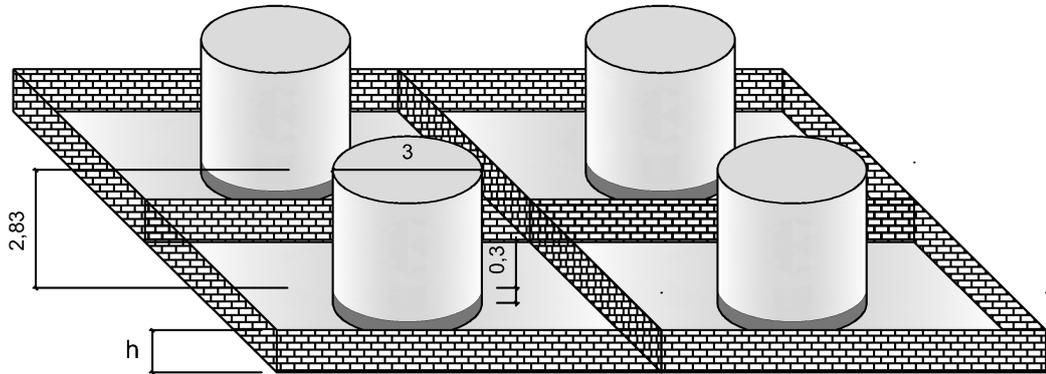


Figura 47: Exemplo de tanques verticais.

Estando os tanques localizados no centro da bacia de contenção os mesmos estão separados a uma distância superior a mínima exigida, pois o costado do tanque deve estar a pelo menos 1,5 m da parede da bacia de contenção.

Para o cálculo da altura  $h$  mínima da bacia de contenção devemos considerar o volume do tanque, mais o volume de sua base e acrescentar 20 cm para movimentação do líquido e mais 20 cm para acomodação do terreno em diques de terra. Assim, vamos calcular inicialmente a altura  $h'$  necessária para a bacia conter o volume do tanque mais o volume deslocado por sua base, e posteriormente somaremos 20 cm para movimentação do líquido considerando uma bacia de alvenaria.

$$vol(\text{bacia}) = vol(\text{tanques}) + vol(\text{base})$$

$$6.6.h' = \pi 1,5^2 . 2,83 + \pi 1,5^2 . 0,3$$

$$36h' = 20 + 2,12$$

$$h' = \frac{22,12}{36} = 0,62$$

$$h' = 62\text{cm} \Rightarrow h = 62 + 20 = 82 \text{ cm.}$$

Entretanto, com as dimensões entre costados de tanques previstas na figura 47 devemos somar os volumes dos mesmos, pois eles não estão isolados, o que implicaria na necessidade de instalação dos sistemas para resfriamento e combate com espuma dependendo do tipo de líquido armazenado.

Assim, uma alternativa para isolamento dos tanques seria construir uma parede corta-fogo ultrapassando 01(um) metro acima do maior tanque, o que diminuiria a distância entre os costados para o valor do diâmetro do maior tanque, neste caso de 3 m. A figura 48 apresenta um exemplo de adequação do projeto para isolamento dos tanques. Neste caso a altura da bacia é 85 cm, ultrapassando o mínimo exigido, sendo que foi acrescentada uma parede de 4,13 m isolando os tanques.

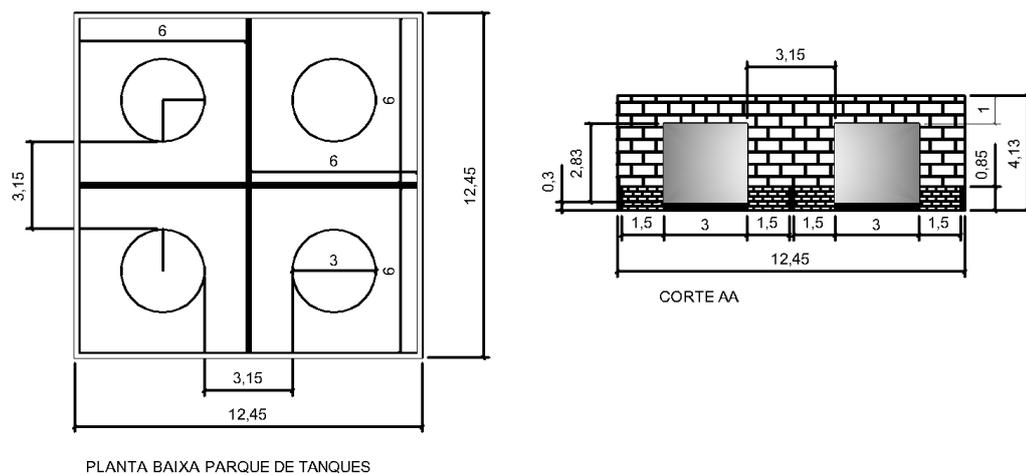


Figura 48: Exemplo de isolamento de tanques verticais através de parede corta-fogo.

Outra alternativa para isolamento destes tanques esta na figura 49, onde foi previsto o isolamento por distanciamento, sem a necessidade da parede corta-fogo. Entretanto, a forma de isolamento mais adequada deve ser definida pelo responsável técnico após a avaliação dos custos e disponibilidade de espaço físico.

### 8.2.6 Exemplo 06 - Dimensionamento da bacia de contenção com múltiplos tanques

Seja um parque de tanques verticais de líquidos inflamáveis estáveis, apresentando tanques com as dimensões conforme figuras 50 e 51, possuindo ainda selo flutuante.

Primeiramente vamos analisar a distância  $d$  entre os costados dos tanques. Conforme a tabela 3, para tanques com diâmetro inferior a 45 m, para qualquer tipo de tanque e líquido inflamável ou combustível a distância mínima entre os costados deve ser igual  $1/6$  da soma dos diâmetros dos tanques adjacentes.

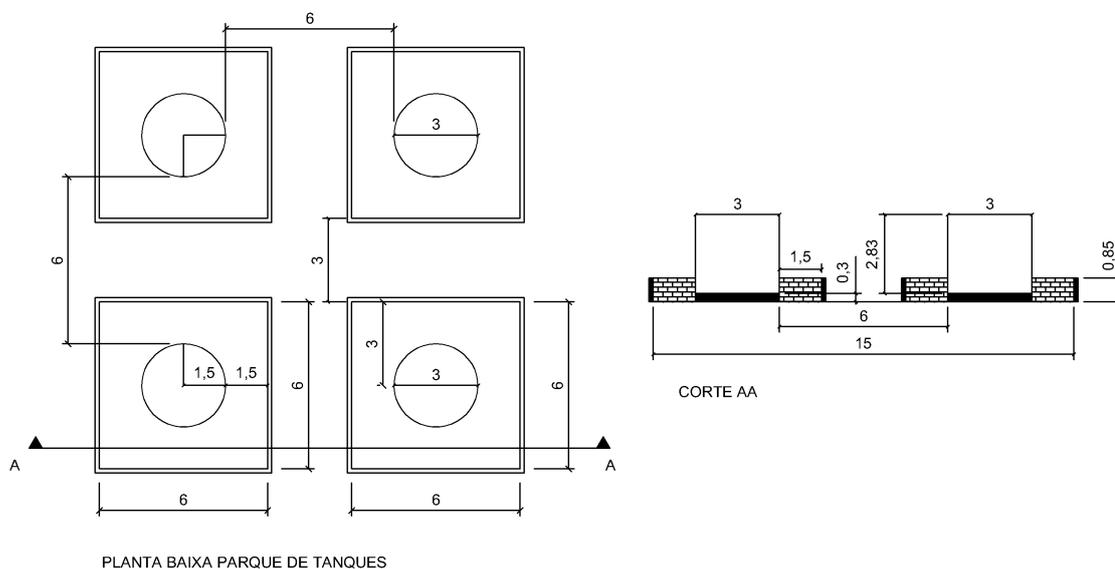


Figura 49: Exemplo de isolamento de tanques verticais por distância de segurança.

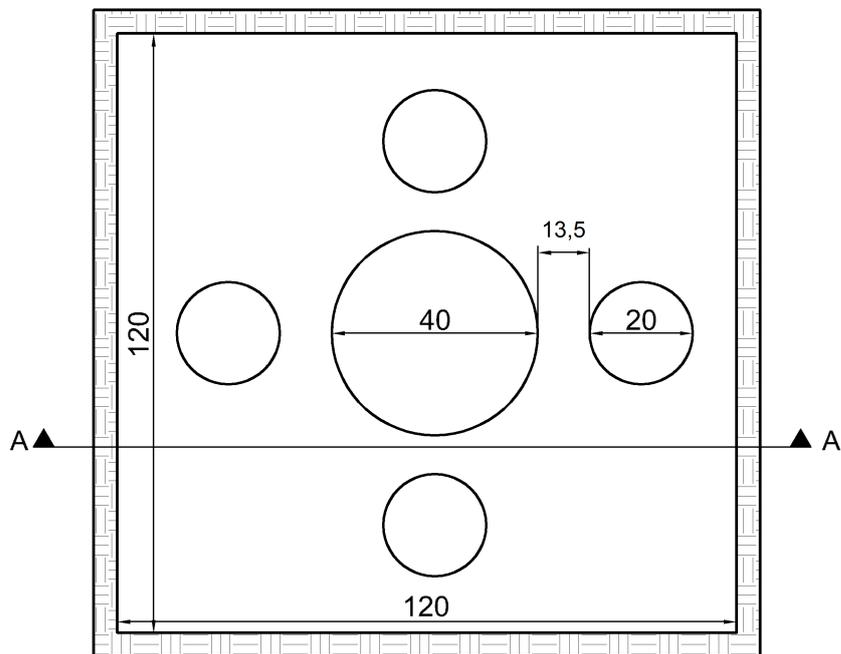
Podemos observar que, neste exemplo, qualquer tanque com diâmetro de 20 m está adjacente ao tanque maior e a outros dois tanques menores. Assim, a distância de um tanque menor aos demais tanques deve ser de 13,33 m. E, o tanque maior, com diâmetro igual a 40, encontra-se adjacente aos 4(quatro) tanques menores, com diâmetros de 20 m. Assim, o tanque maior deve estar afastado também a 13,33 m dos demais. Neste exemplo as distâncias foram as mesmas, entretanto isto não é uma regra, devemos analisar todos os casos e adotar a maior distância de segurança.

Em relação a bacia de contenção, temos que a mesma deve suportar o volume do maior tanque, mais o deslocamento de sua base, mais o volume deslocados dos demais tanques e suas bases, e o volume deslocado pelos diques intermediários.

$$\begin{aligned}
 \text{vol}(\text{bacia}) = & \text{vol}(\text{maior tanque}) + \text{vol}(\text{deslocamento da base do maior} \\
 & \text{tanque}) + \sum \text{vol}(\text{deslocamento dos demais tanques}) + \sum \text{vol}(\text{deslocamento} \\
 & \text{das bases dos demais tanques}) + \text{vol}(\text{deslocamento dos diques} \\
 & \text{intermediários}).
 \end{aligned}$$

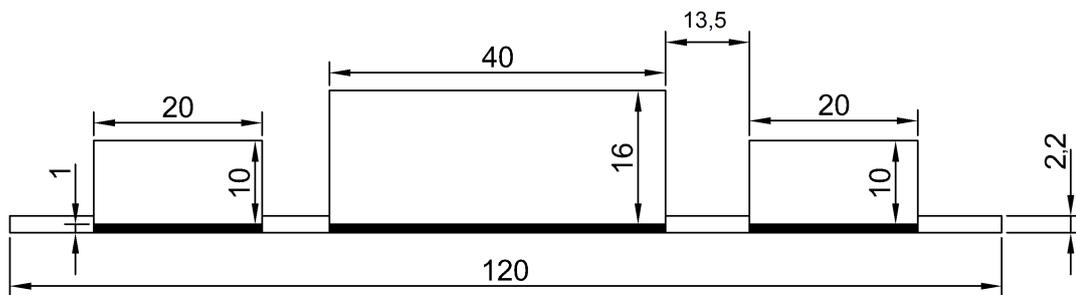
Assim, podemos calcular:

$$\text{vol}(\text{maior tanque}) = \pi \cdot 20^2 \cdot 16 = 20.096 \text{ m}^3$$



Planta Baixa

Figura 50: Planta baixa de parque de tanques verticais.



Corte AA

Figura 51: Corte AA da figura 50.

$$\begin{aligned}
 vol(\text{base do maior tanque}) &= \pi \cdot 20^2 \cdot 1 = 1.256 \text{ m}^3 \\
 \sum vol(\text{base dos demais tanques}) &= 4 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 1 = 1.256 \text{ m}^3 \\
 vol(\text{deslocamento dos demais tanques}) &= 4 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot h' = 1.256 \cdot h' \\
 vol(\text{bacia}) &= 20.096 \text{ m}^3 + 1.256 \text{ m}^3 + 1.256 \text{ m}^3 + 1.256 \cdot h'
 \end{aligned}$$

$$120^2 \cdot h' = 1.256h' + 22.608 \Rightarrow h'(120^2 - 1256) = 22.608$$

$$h' = 1,72 \text{ m} \Rightarrow h = 1,92 \text{ m ou } h = 2,12 \text{ m, caso o dique for de terra.}$$

Aparentemente a bacia de contenção está dimensionada corretamente. Entretanto, este parque de tanque apresenta (cinco) tanques no interior da mesma bacia. Para este exemplo deve ser observada a alínea "n" do item 6.1.7.2.1 da NT-25, onde está previsto que a contenção deve ser subdividida por canais de drenagem ou por diques intermediários, de acordo com volume e tipo de líquido estocado, devendo o dique ter altura mínima de 45 cm.

Uma alternativa para este problema está apresentada na figura 52, onde a bacia de contenção foi dividida por dique intermediários de 20 cm de largura por 50 cm de altura, formando 09 (nove) bases retangulares, sendo que a ideia para aproveitar e otimizar o volume disponível é que o dique do tanque maior seja interligado com os diques dos cantos, os quais não possuem tanques.

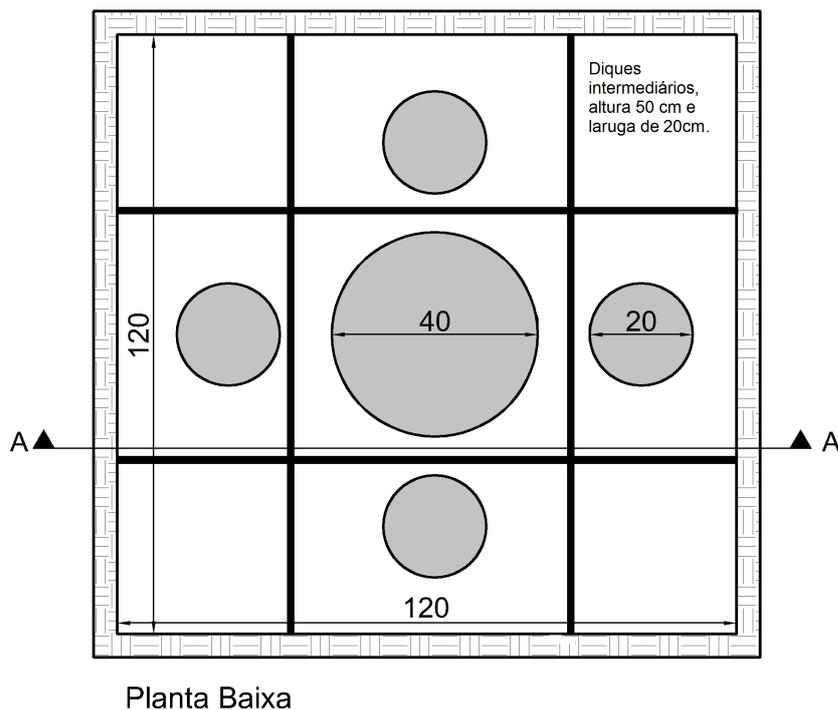


Figura 52: Alternativa para bacia de contenção da figura 50.

Com a inclusão dos diques intermediários, o volume por eles deslocados deve ser considerado para dimensionamento da altura da bacia de contenção. Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(\text{bacia}) = & \text{vol}(\text{maior tanque}) + \text{vol}(\text{deslocamento da base do maior} \\
& \text{tanque}) + \sum \text{vol}(\text{deslocamento dos demais tanques}) + \sum \text{vol}(\text{deslocamento} \\
& \text{das bases dos demais tanques}) + \text{vol}(\text{deslocamento dos diques} \\
& \text{intermediários}).
\end{aligned}$$

Assim, podemos calcular:

$$\begin{aligned}
\text{vol}(\text{maior tanque}) &= \pi \cdot 20^2 \cdot 16 = 20.096 \text{m}^3 \\
\text{vol}(\text{base do maior tanque}) &= \pi \cdot 20^2 \cdot 1 = 1.256 \text{ m}^3 \\
\sum \text{vol}(\text{base dos demais tanques}) &= 4 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 1 = 1.256 \text{m}^3 \\
\text{vol}(\text{deslocamento dos demais tanques}) &= 4 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot h' = 1.256 \cdot h' \\
\text{vol}(\text{deslocamento dos diques intermediários}^{16}) &= 4 \cdot 120 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 48 \text{m}^3 \\
\text{vol}(\text{bacia}) &= 20.096 \text{m}^3 + 1.256 \text{ m}^3 + 1.256 \text{ m}^3 + 1.256 \cdot h' + 48 \text{m}^3 \\
120^2 \cdot h' &= 1.256 h' + 22.656 \Rightarrow h'(120^2 - 1256) = 22.656 \\
h' &= 1,73 \text{m} \Rightarrow h = 1,93 \text{m} \text{ ou } h = 2,13 \text{m, caso o dique for de terra.}
\end{aligned}$$

Neste exemplo o volume deslocado pelos diques intermediários é quase desprezível em relação aos demais volumes deslocados. Contudo, a instalação destes diques dividindo a bacia de contenção impede que os pequenos vazamentos se espalhem por toda a extensão da bacia, o que aumenta a segurança em caso de eventos adversos.

---

<sup>16</sup>Foram considerados quatro diques com 120 m de comprimento, largura de 20 cm e altura de 50 cm. Devido as dimensões das estruturas estudadas, foram desconsiderados os volumes da interseções das paredes dos diques intermediários, o que reduziria o valor encontrado.

### 8.3 Dimensionamento do sistema de resfriamento para tanques verticais aéreos em áreas abertas.

O sistema de resfriamento para tanques aéreos de líquidos combustíveis e inflamáveis tem como objetivos reduzir os riscos de um *Boil Over*<sup>17</sup> e um *Slop Over*<sup>18</sup>, bem como evitar que o incêndio se propague para os tanques vizinhos por irradiação<sup>19</sup>.

Conforme a NBR 17.505-7/2006 e NT-25 o sistema de resfriamento pode ser feito por três meios, os quais devem obedecer a tabela 6 :

1. Linha manual com esguicho (LM);
2. Canhão monitor manual ou automático (CM);
3. Aspersores fixos.

Os critérios adotados para o cálculo da vazão do sistema de resfriamento dos tanques verticais deve obedecer ao estabelecido no item 6.4.4 da NT-25:

- Tanque em chamas: 2,0 L/min/m<sup>2</sup> da área do costado;
- Tanques vizinhos:

---

<sup>17</sup>*Boil Over*: acidente que pode ocorrer com certos óleos em um tanque, originalmente sem teto ou que tenha perdido o teto em função de explosão, quando, após um longo período de queima serena, ocorre um súbito aumento na intensidade do fogo, associado à expulsão do óleo no tanque em chamas. O *Boil Over* também pode ocorrer quando se joga água e/ou espuma em líquidos de baixa densidade, a água se acumula no fundo do tanque e com aumento da temperatura a mesma entra em ebulição, como 1 litro de água forma aproximadamente 1.700 litros de vapor d'água (isto considerando apenas a temperatura a 100 °C, sendo que a relação aumenta conforme aumenta a temperatura), esse vapor impulsiona o líquido combustível para fora do tanque, espalhando-o e lançando a grandes distância, sendo característico pela "bola de fogo" formada.

<sup>18</sup>É o extravasamento do combustível do tanque caracterizado por uma ebulição e espumação ao nível da superfície do líquido inflamável. Pode ocorrer após um período de queima relativamente curto de produtos como petróleo, óleo cru, asfalto, e outros líquidos que tenham ponto de ebulição acima do da água.

<sup>19</sup>Irradiação: é a transmissão de calor por ondas de energia calorífica que se deslocam através do espaço.



Figura 53: Exemplo de esguichos para linhas manuais. Fonte: [7].



Figura 54: Exemplos de canhões monitores. Fonte: [19].



Figura 55: Exemplos de aspersores (chuveiros para resfriamento). Fonte: [29].

- a. utilizando aspersores: 2,0 L/min/m<sup>2</sup> da área determinada na Tabela 7, e/ou;
- b. utilizando canhões monitores (fixos ou móveis) ou mangueiras a partir de hidrantes (linhas manuais): conforme a Tabela 8.

Conforme item 6.1 da NBR 17.505-7/2006 os tanques são considerados vizinhos quando:

Tabela 6: Proteção por resfriamento para tanques verticais e horizontais. Fonte: Tabela 10 da NT-25.

Tipo de tanque	Tipo de líquido (classe)	Altura (H)	Volume (V) em m <sup>3</sup>		
			20 < V ≤ 60	60 < V ≤ 120	V > 120
Vertical ou Horizontal	Classe I	H ≥ 10m	LM/CM	Aspersor	Aspersor
		H < 10m	LM/CM	LM/CM	LM/CM
Vertical ou Horizontal	Classe II	H ≥ 10m	LM/CM	LM/CM	Aspersor
		H < 10m	LM/CM	LM/CM	LM/CM
Vertical ou Horizontal	Classe III-A	H ≥ 10m	-	-	Aspersor
		H < 10m	-	-	LM/CM
Vertical ou Horizontal	Classe III-B	H ≥ 10m	-	-	-
		H < 10m	-	-	-

Legenda: LM/LC = Linhas manuais ou canhões monitores.

- O tanque considerado em chamas for vertical e a distância entre seu costado e o costado<sup>20</sup> do tanque adjacente for menor que 1,5 vez o diâmetro do tanque em chamas ou 15 m, o que for maior;
- o tanque considerado em chamas for horizontal e a distância entre seu costado e o costado do tanque adjacente for menor que 15 m.

<sup>20</sup>Parede externa do tanque.

Tabela 7: Área dos tanques vizinhos a ser resfriada por aspersores: Fonte: Tabela 11 da NT-25.

<b>N</b>	<b>Área a ser resfriada</b>
1	Área do costado
> 1	Soma das Áreas dos costados

N = Número de tanques verticais vizinhos.

Tabela 8: Taxa mínima de resfriamento para tanques vizinhos por Linhas Manuais ou Canhões monitores: Fonte: Tabela 12 da NT-25.

<b>Distância entre costados (m)</b>	<b>Taxa<sup>1</sup> (L/min/m<sup>2</sup>)</b>
$D \leq 8$	5
$8 < D \leq 12$	3
$D > 12$	2

1) Considerar a área da tabela 9.

Tabela 9: Área a ser considerada para resfriamento dos tanques vizinhos por Linhas Manuais e Canhões monitores: Fonte: Tabela 12 da NT-25.

<b>Qtd. de tanques vizinhos</b>	<b>Área</b>
$\leq 2$	1/2 do somatório das áreas dos tetos e costados
> 2	1/3 do somatório das áreas dos tetos e costados

Para tanques de teto flutuante não considerar as áreas dos tetos.

A reserva de água para resfriamento deve ser baseada em uma fonte inesgotável, tal como rio, mar ou lago, a qual deve ser capaz de atender a demanda de vazão em qualquer época do ano. Entretanto, quando não for possível atender tal exigência, deve ser prevista uma reserva que atenda a vazão necessária pelo tempo mínimo especificado na tabela 10.

Ainda é importante salientar que o sistema de resfriamento para tanques verticais

Tabela 10: Tempo mínimo exigido para cálculo da reserva de resfriamento: Fonte: Tabela 13 da NT-25.

Capacidade de armazenagem <sup>1</sup> (CA) em m <sup>3</sup>	Tempo (minutos)
$CA \geq 40.000$	360
$10.000 \leq CA < 40.000$	240
$1.000 \leq CA < 10.000$	120
$120 \leq CA < 1.000$	60
$50 \leq CA < 120$	45
$20 \leq CA < 50$	30

1) Somatório dos volumes dos tanques envolvidos no cenário de maior risco.

deve dispor de um sistema secundário feito por canhões monitores ou linhas manuais, sendo que deve ser previsto no mínimo duas linhas ou canhões para o tanque em chamas e uma linha manual ou canhão monitor para cada tanque vizinho.

O responsável técnico pelo projeto de incêndio deve optar pelos equipamentos que julgar adequados conforme dimensionamento mínimo e especificações dos materiais.

### 8.3.1 Exemplo 07 - Resfriamento de tanque vertical isolado.

Seja um tanque vertical contendo um líquido inflamável classe II, com diâmetro de 42 m e altura de 15 m, localizado em uma bacia de contenção feita no próprio terreno de base quadrada, com lado medindo 92 m e altura 3 m, conforme figura 56.

Com intuito de padronizar um roteiro para análise de projetos, vamos inicialmente verificar se a bacia de contenção foi dimensionada adequadamente. Para isso devemos conferir a altura  $h$  da bacia. A norma estabelece que a bacia deve conter todo o volume tanque, tendo a altura  $h'$  acrescida em 20 cm para movimentação do líquido e mais 20 cm para acomodação do terreno em diques de terra. Logo,

$$vol(\text{bacia}) = vol(\text{tanque})$$

$$92^2 \cdot h' = \pi 21^2 \cdot 15$$

$$h' = \frac{20.771,1}{8464}$$

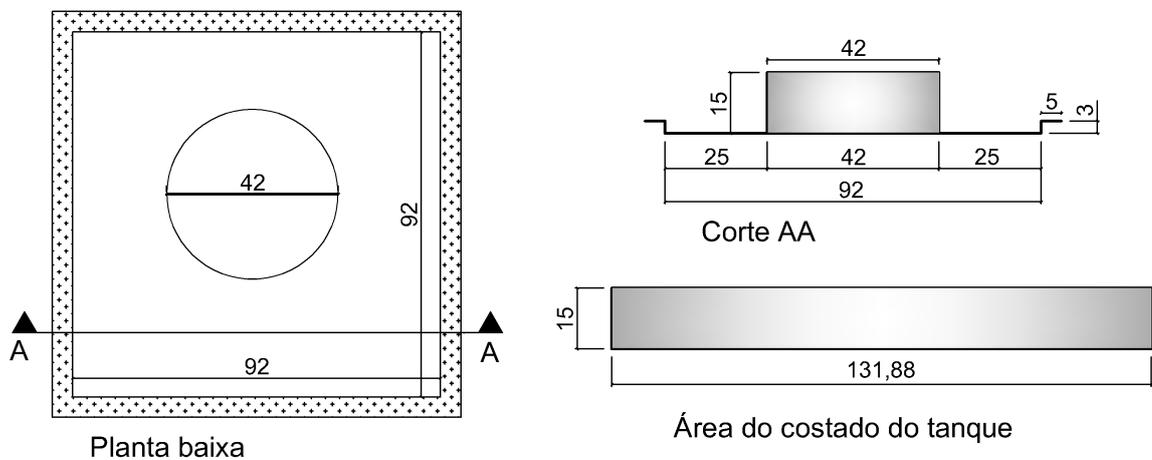


Figura 56: Planta baixa, corte e área do costado de um tanque vertical.

$$h' = 2,46 \text{ m} \Rightarrow h = 2,46 + 0,2 + 0,02 = 2,96 \text{ m}.$$

Portanto, a bacia de contenção está dimensionada adequadamente, pois a altura supera o mínimo estabelecido na norma para diques de terra e também não ultrapassa o limite máximo de 3 m.

Para o cálculo da vazão  $\phi$  de resfriamento, considerando que este tanque esteja em chamas, devemos considerar  $2\text{L}/\text{min}/\text{m}^2$  da área  $A_c$  do costado do tanque. Assim,

$$A_c = 2\pi \cdot 21 \cdot 15 = 15 \cdot 131,88 = 1.978,2 \text{ m}^2$$

$$\phi = 2 \cdot 1.978,2 = 3.956,4 \text{ L}/\text{min}.$$

Para este sistema o responsável técnico deverá distribuir equipamentos dividindo a vazão  $\phi$  entre os aspersores, pois este é o sistema exigido conforme tabela 6. Também devem ser previstas pelo menos duas linhas manuais ou canhões para atender o sistema secundário atendendo o item 6.4.6.1 da NT-25.

Após o cálculo da vazão de resfriamento deve-se calcular o volume  $V_r$  de água necessário para o sistema durante o período mínimo  $t$  previsto na tabela 10. Como o tanque possui volume de  $20.771,1 \text{ m}^3$  o tempo mínimo de operação é de 240 min. Logo,

$$V_r = \phi \cdot t$$

$$V_r = 3.956,4 \cdot 240 = 949.536 \text{ litros} = 949,536 \text{ m}^3.$$

### 8.3.2 Exemplo 08 - Resfriamento de tanques verticais não isolados em bacia de contenção separadas

Sejam dois tanques verticais de líquidos inflamáveis classe II com teto fixo, iguais aos do exemplo 07, em bacias de contenção separadas, conforme figura 57.

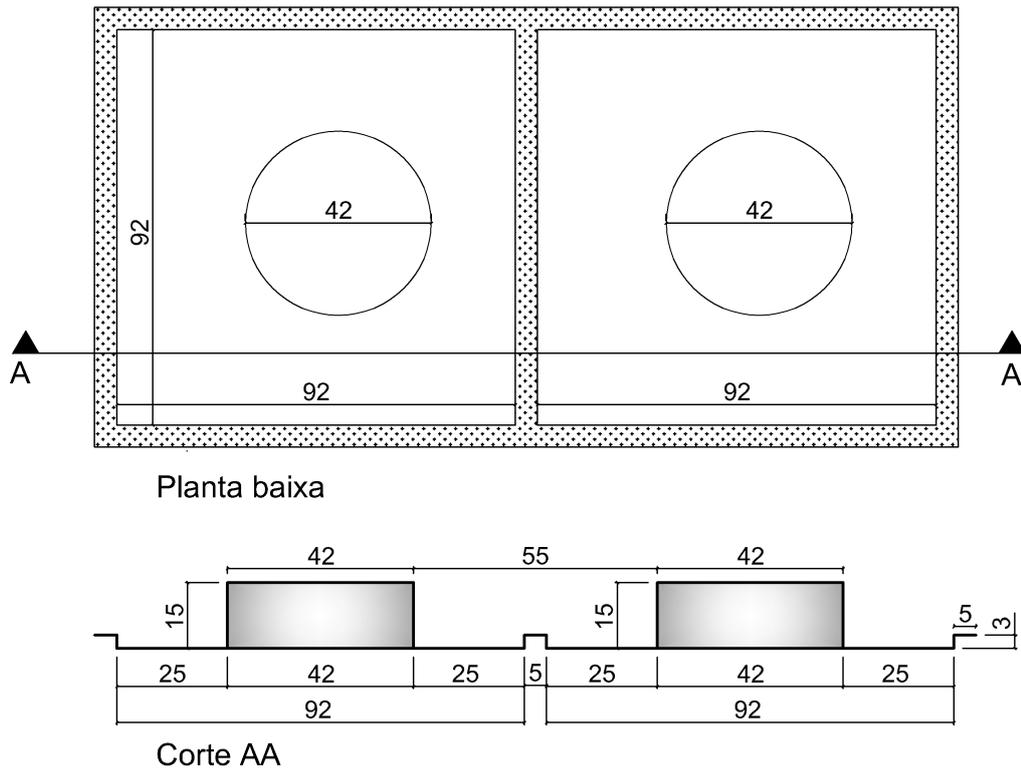


Figura 57: Planta baixa e corte referente a um parque de tanques verticais não isolados em bacias de contenção separadas.

Para este exemplo já sabemos que a bacia de contenção está dimensionada adequadamente. Assim, passamos a analisar o sistema de resfriamento. Como os tanques possuem as mesmas dimensões podemos considerar qualquer um dos dois como tanque em chamas. Um dos princípios para dimensionamento do sistema é a não simultaneidade de eventos adversos. Assim, consideramos que um tanque está em chamas e devemos resfriá-lo e também o tanque vizinho para que este não entre em ignição por efeito do calor irradiado.

Tanto a NBR 17.505-7/2006 como a NT-25 definem que o tanque vizinho a um

tanque vertical em chamas é aquele que esteja a uma distância inferior a 1,5 vezes o diâmetro do maior tanque, não necessitando estar em bacia de contenção separadas.

Neste exemplo, os tanques estão a uma distância de 55 m e mesmo estando em bacias de contenção separadas são considerados tanques vizinhos. A distância mínima para considerarmos que um incêndio neste tanque não se propagaria para o outro seria de 63 m.

Assim, a vazão  $\phi$  de resfriamento exigida para este parque de tanques será igual a soma da vazão  $\phi_T$  de resfriamento para o tanque em chamas e a vazão  $\phi_v$  de resfriamento para o tanque vizinho. Logo,

$$\phi = \phi_T + \phi_v.$$

A vazão do tanque em chamas  $\phi_T$  já foi calculada no exemplo 07. E, a vazão do tanque vizinho  $\phi_v$  será calculada com base no previsto na tabela 7, sendo 2 L/min/m<sup>2</sup> da área do costado, pois para este tanque é exigido que o resfriamento seja feito por anéis aspersores. Portanto,

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_T + \phi_v \\ \phi &= 3.956,4 + 3.956,4 = 7.912,8 \text{ L/min.}\end{aligned}$$

E, o volume de água da reserva de resfriamento  $V_r$  é:

$$V_r = \phi x t.$$

Sendo  $t=360$ min, pois agora devemos resfriar os dois tanques simultaneamente e a somatória dos volumes de ambos ultrapassa a 40.000m<sup>3</sup>. Assim,

$$V_r = 7.912,8 \times 360 = 2.848.608 \text{ litros} = 2.848,6 \text{ m}^3.$$

### **8.3.3 Exemplo 09 - Resfriamento de tanques verticais não isolados em uma mesma bacia de contenção**

Sejam três tanques  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  contendo líquido combustível classe III-A com diâmetros de 50 m, 40 m e 30 m, e alturas de 15 m, 12 m e 10 m, respectivamente, com bases enterradas e estando todos em uma mesma bacia de contenção de base retangular com lados de 115 m e 143 m, feita em dique de terra com altura de 2,5 m (ver figura 58).

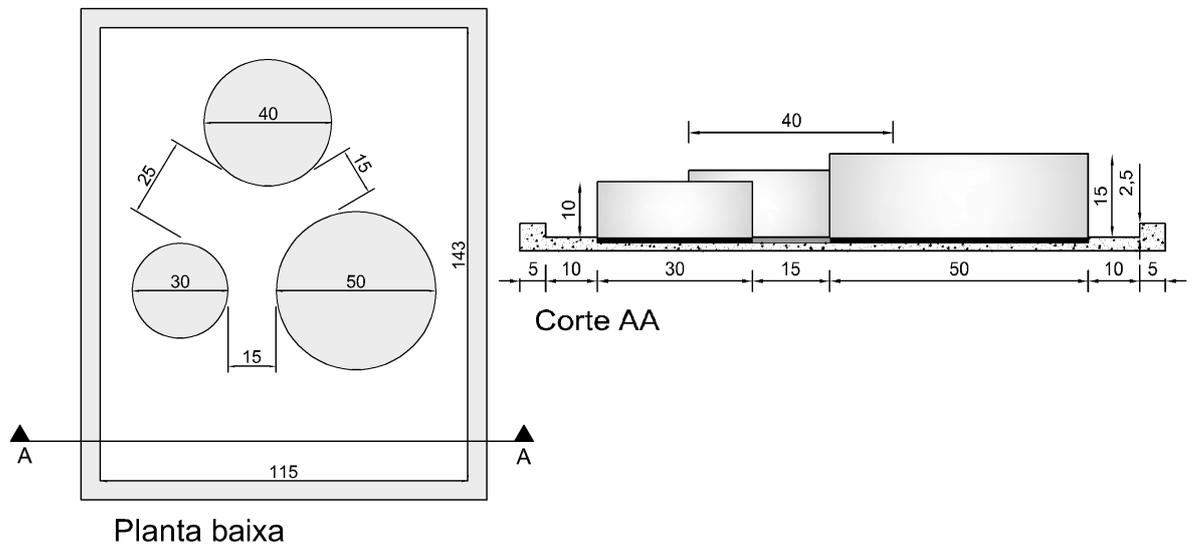


Figura 58: Planta baixa e corte referente a um parque de tanques verticais não isolados na mesma bacia de contenção.

Antes de realizar os cálculos para o sistema de resfriamento vamos conferir se a bacia de contenção teve seu volume  $V_B$  dimensionado corretamente. Para isso, vamos calcular inicialmente a altura  $h'$  do dique que deve comportar o volume do maior tanque  $V_{T1}$  mais os volumes  $V_{D2}$  e  $V_{D3}$  deslocados pelos demais tanques, acrescentando 20 cm para movimentação do líquido e outros 20 cm para acomodação do terreno, obtendo assim a altura  $h$  do dique. Logo,

$$V_B = V_{T1} + V_{D2} + V_{D3}$$

$$143 \times 115 h' = \pi 25^2 \times 15 + \pi 20^2 h' + \pi 15^2 h'$$

$$16.445 h' - 1.962,5 h' = 29.437,5$$

$$h' = \frac{29.437,5}{14.482,5}$$

$$h' = 2,04\text{m} \Rightarrow h = 2,04 + 0,2 + 0,2 = 2,44 \text{ m.}$$

Portanto, a bacia de contenção está dimensionada adequadamente, com altura superior a mínima prevista na norma. A distância entre os costados dos tanques também

obedece ao previsto na tabela 3, portanto os tanques devem analisados de forma individual.

Para dimensionamento do sistema de resfriamento devemos considerar o maior risco, assim o tanque em chamas será  $T_1$ . A vazão  $\phi_1$  de resfriamento para  $T_1$  será de 2L/min/m<sup>2</sup> da área  $A_{c1}$  do costado do tanque  $T_1$ . Assim,

$$A_{c1} = 2\pi 25 \times 15 = 2.355 \text{ m}^2$$

$$\phi_1 = 2 \times 2.355 = 4.710 \text{ L/min.}$$

Para o resfriamento dos tanques  $T_2$  e  $T_3$ , com base na tabela 7, deverão ser utilizados aspersores com vazão  $\phi_2$  de 2L/min/m<sup>2</sup> do somatório das áreas  $A_{c2}$  e  $A_{c3}$  dos costados dos tanques vizinhos. Logo,

$$A_{c1} + A_{c2} = 2\pi 20 \times 12 + 2\pi 15 \times 10 = 2.449,2 \text{ m}^2$$

$$\phi_2 = 2 \times 2.449,2 = 4.898,4 \text{ L/min.}$$

Como a vazão  $\phi$  de resfriamento do sistema é igual a soma de  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , temos que:

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi = 4.710 + 4.898,4 = 9.608,4 \text{ L/min.}$$

Finalmente, vamos determinar o volume de água  $V_r$  da reserva de resfriamento.

$$V_r = \phi x t, \text{ com } t = 360 \text{ min}^{21}$$

$$V_r = 9.608,4 \times 360 = 3.459.024 \text{ L} = 3.459 \text{ m}^3.$$

### 8.3.4 Exemplo 10 - Resfriamento de tanques verticais por linhas manuais e/ou canhões monitores

Os tanques que podem ser resfriados por linhas manuais ou canhões monitores são aqueles que possuem altura menor que 10m, pois a partir deste limite é exigido que o tanque seja resfriado por aspersores. Como exemplo, tomemos um parque de tanques contendo líquido inflamável classe I-A conforme figura 59.

Os tanques possuem diâmetros de 10m e alturas de 8m. Eles estão assentados sobre bases de concreto com dimensões de 12x12x0,3 metros, todos dentro de uma única bacia de contenção de base quadrada com lado igual a 35m e altura de 1,15m.

<sup>21</sup>Tempo mínimo exigido conforme tabela 10.

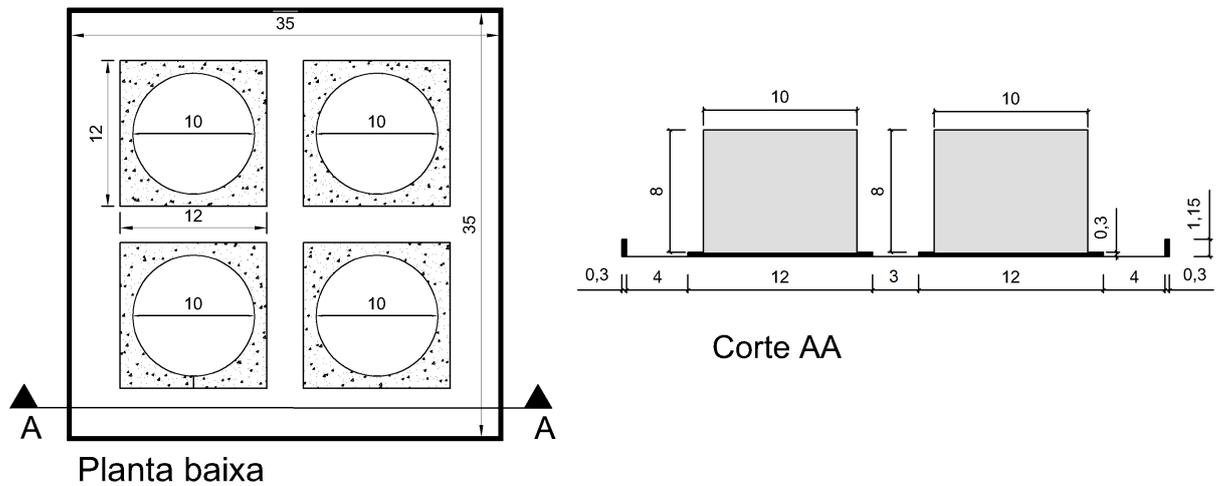


Figura 59: Planta baixa e corte referente a um parque de tanques verticais não isolados resfriados por linhas manuais e/ou canhões monitores.

Seguindo a sequência padronizada de ações, vamos inicialmente conferir a altura  $h$  mínima exigida para a bacia de contenção. Assim, vamos calcular a altura  $h'$  da bacia de contenção que comporte o volume do maior tanque, mais o volume deslocado por sua base, mais os volumes deslocados pelos demais tanques e suas bases. Assim,

$$vol(\text{bacia}) = vol(\text{maior tanque}) + vol(\text{base do maior tanque}) + vol(\text{deslocado pela base dos demais tanques}) + vol(\text{deslocado pelos demais tanques})$$

$$35^2 h' = \pi 5^2 \cdot 8 + 12^2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 12^2 \cdot 0,3 + 3 \cdot \pi 5^2 h'$$

$$1.225 h' - 235,5 h' = 628 + 43,2 + 129,6$$

$$h' = \frac{800,8}{989,5}$$

$$h' = 0,81 \text{ m} \Rightarrow h = 0,81 + 0,2 = 1,01 \text{ m.}$$

Portanto, a bacia de contenção está adequada, pois as dimensões ultrapassam o mínimo exigido pela norma.

Para o cálculo do sistema resfriamento podemos tomar qualquer tanque como estando em chamas, pois neste exemplo todos possuem as mesmas dimensões. Assim,

para o tanque em chamas temos que a vazão  $\phi_1$  de resfriamento será  $2\text{L}/\text{min}/\text{m}^2$  da área  $A_{c1}$  de seu costado. Logo,

$$\begin{aligned} A_{c1} &= 2\pi RH \\ A_{c1} &= 2\pi 5 \times 8 = 251,2 \text{ m}^2 \\ \phi_1 &= 2 \times 251,2 = 502,4 \text{ L}/\text{min}. \end{aligned}$$

Com base na tabelas 8 e 9, tendo em vista que a distância entre os costados dos tanques vizinhos mais próximos é de 5m, a vazão  $\phi_2$  de resfriamento para os tanques vizinhos é igual a  $5\text{L}/\text{min}/\text{m}^2$  de  $1/3$  do somatório das áreas  $A_t$  dos tetos e  $A_{c2}$  dos costados dos tanques vizinhos. Assim, temos que:

$$\begin{aligned} A_t &= 3\pi 5^2 = 235,5 \text{ m}^2 \\ A_{c2} &= 3 \times 2\pi 5 \times 8 = 753,6 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\phi_2 = 5 \frac{1}{3} (A_t + A_{c2})$$

$$\phi_2 = 5 \frac{1}{3} 989,1$$

$$\phi_2 = 1.648,5 \text{ L}/\text{min}.$$

Agora podemos calcular a vazão  $\phi$  total do sistema de resfriamento, sendo esta a somatória das vazões  $\phi_1$  de resfriamento para o tanque em chamas e  $\phi_2$  para os tanques vizinhos, devendo essa vazão ser dividida entre linhas manuais e/ou canhões monitores. Logo,

$$\phi = \phi_1 + \phi_2$$

$$\phi = 502,4 + 1.648,5 = 2.150,9 \text{ L}/\text{min}.$$

Como os somatório dos volumes dos tanques envolvidos, os quais todos necessitam ser resfriados caso qualquer tanque esteja em chamas, é de  $2.512 \text{ m}^3$ , o tempo  $t$  mínimo considerado para os cálculos do volume de água para resfriamento  $V_r$  é de 120min, conforme o especificado na tabela 10. Logo,

$$\begin{aligned} V_r &= \phi \times t \\ V_r &= 2.150,9 \times 120 = 258.108 \text{ L} = 258,108 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

## 8.4 Dimensionamento do sistema de resfriamento para tanques aéreos horizontais em áreas abertas

Os tanques aéreos horizontais possuem uma característica especial, pois para fins de cálculo tanto de resfriamento como de espuma, considera-se que caso ocorra um evento adverso o líquido do tanque irá vazar para a bacia de contenção. Portanto, caso o tanque em chamas seja horizontal ele não será resfriado.

Tanto a NBR 17.505-7/2006 como a NT-25 especificam que os tanques horizontais são resfriados apenas quando o tanque em chamas for vertical ou caso haja um parque de tanques horizontais e os tanques vizinhos estejam em bacias de contenção separadas, pois, com o vazamento do líquido inflamável ou combustível para a bacia de contenção não é recomendado que se jogue água no seu interior.

### 8.4.1 Exemplo 11 - Resfriamento de tanque horizontal

Seja um parque de tanques horizontais contendo dois tanques cilíndricos com diâmetro de 6m, comprimento de 10m e locados em bacias de contenção separadas, conforme a figura 60.

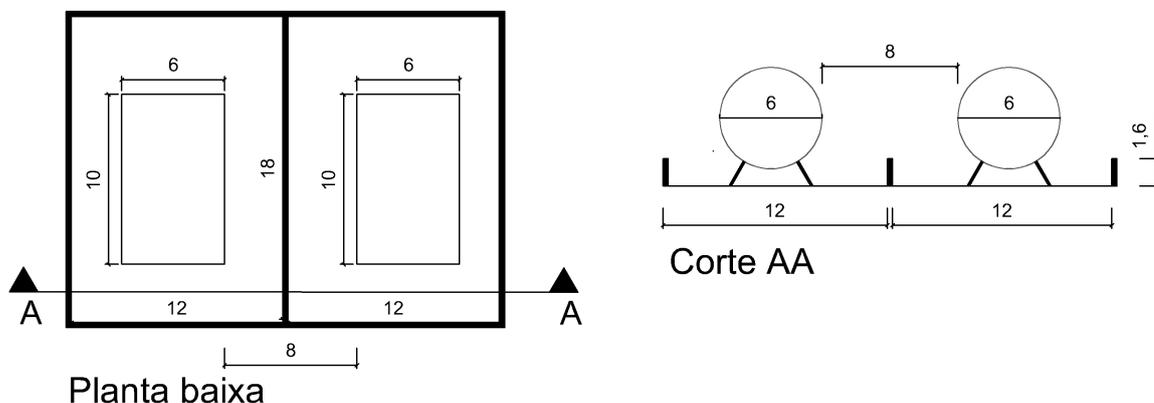


Figura 60: Planta baixa e corte referente a um parque de tanques horizontais.

Podemos verificar que as bacias de contenção foram dimensionadas corretamente, entretanto os tanques são considerados vizinhos, pois seus costados estão distantes a menos de 15m. Assim, caso algum destes tanques esteja em chamas, o tanque ao lado deve ser resfriado.

O item 6.5.2.1 da NT-25 especifica que a vazão  $\phi$  de resfriamento para tanques horizontais deve ser de 2L/min/m<sup>2</sup> da área  $A_p$  de sua projeção horizontal, a qual pode ser visualizada facilmente na planta baixa do parque de tanques. Assim,

$$A_p = 10 \times 6 = 60 \text{ m}^2$$
$$\phi = 2 \times 60 = 120 \text{ L/min.}$$

Como o volume do tanque a ser resfriado é de 282,6 m<sup>3</sup>, o tempo  $t$  mínimo que deve ser utilizado para o cálculo do volume de resfriamento  $V_r$  será de 60 minutos. Logo,

$$V_r = \phi \times t$$
$$V_r = 120 \times 60 = 7.200 \text{ litros.}$$

## 8.5 Dimensionamento do sistema de espuma para tanques verticais aéreos em áreas abertas

A espuma mecânica é um agente extintor constituído por um aglomerado de bolhas produzidas por agitação da água com líquido gerador de espuma (LGE<sup>22</sup>) e ar.

A espuma mecânica é o agente extintor recomendado para combate a incêndios em líquidos inflamáveis, os quais são classificados como incêndio ou fogo classe B<sup>23</sup>. Ela satisfaz a todas as exigências referentes a um fluido de densidade muito baixa e alta capacidade de absorção do calor. Sua densidade, sendo menor que a dos líquidos inflamáveis, permite que seja usada principalmente para formar uma cobertura flutuante, extinguindo o fogo, cobrindo e resfriando o combustível.

A espuma mecânica não é um agente adequado para extinguir incêndios em gases. E, como ela é condutora de eletricidade também não deve ser usada em equipamentos elétricos energizados.

A vazão e o volume de água para o sistema de proteção contra incêndio por espuma devem ser determinados em relação ao cenário de maior risco a ser protegido.

---

<sup>22</sup>LGE: Líquido Gerador de Espuma, ou Extrato Formador de Espuma (EFE), ou também Líquido Concentrado Formador de Espuma: trata-se de um detergente líquido e concentrado, especialmente formulado para em mistura com a água pura, do mar ou salobra, formar uma espuma com características físico-químicas especiais de resistência química a temperatura elevadas.

<sup>23</sup>Fogo classe B: fogo em líquidos e gases inflamáveis ou combustíveis sólidos que se liquefazem por ação do calor e queima somente em superfície.

Os projetos dos sistemas de extinção por meio de espuma mecânica devem prever a disponibilidade de LGE na quantidade mínima de duas vezes o volume necessário para a cobertura do cenário de maior risco, sendo uma carga inicial e outra como carga de reposição.

Entretanto, para empresas participantes de um Plano de Auxílio Mútuo (PAM) ou similar, regularmente constituído, em que esteja prevista a reposição do estoque de LGE dentro de um prazo máximo de 24 horas, pode ser dispensado o volume extra de LGE para reposição.

Os tipos de aplicação de espuma previstos na NT-25 são:

- Aplicação tipo I: a aplicação da espuma é feita de maneira suave, podendo ser de 3 formas:
  - a) tubo de amianto poroso ou câmara com tubo *Moeller*;
  - b) calha de espuma;
  - c) tubo condutor (figura 61).
- Aplicação Tipo II: consiste em uma câmara de espuma externa ao tanque e um defletor fixado internamente o qual desvia o jato de espuma contra a parede do tanque (figura 62). Esta aplicação não é feita de forma suave, contudo, a baixa densidade da espuma e sua aeração permitem seu emprego em tanques contendo solventes polares ou hidrocarbonetos.
- Aplicação Tipo III: por meio de canhões monitores - CM (figura 63) ou linhas manuais LM, através de esguichos proporcionadores de espuma, ou através de aparelhos entrelinhas e esguicho lançador de espuma (figura 64).

Conforme item 6.3.2.1 da NT-25 os tanques de teto fixo devem dispor de proteção mínima por espuma de acordo com o previsto na tabela 11, observando ainda as seguintes exceções:

- Para parque de tanques com líquidos combustíveis Classe III-A que estejam armazenados em tanques de diâmetro até 9 m, cuja a soma dos volumes seja igual ou inferior a 120 m<sup>3</sup> não é necessário o sistema de espuma;
- Para os líquidos combustíveis classe III-B que estejam armazenados em tanques aéreos não é necessário sistema de espuma, exceto se contiver líquidos pré-aquecidos com diâmetro superior a 9 m. Nestas condições, deve atender às exigências de Classe III-A.

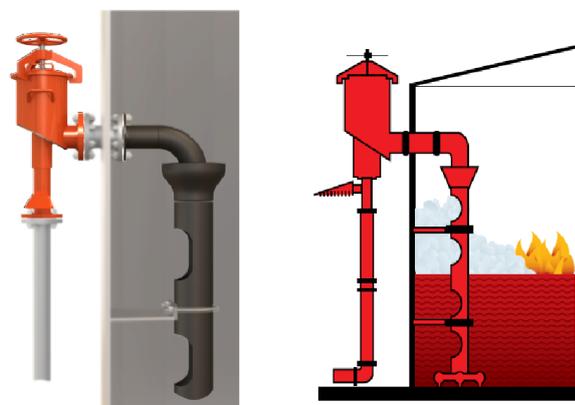


Figura 61: Câmara de espuma tipo I com tubo condutor. Fonte: [3].



Figura 62: Câmara de espuma tipo II com defletor. Fonte: [3].

As taxas e os tempos de aplicação mínimos de espuma para combate a incêndios em hidrocarbonetos, armazenados em tanques estacionários em áreas abertas, de acordo com a classe do líquido e com o tipo de aplicação, devem atender ao previsto na tabela 12.

As taxas e os tempos de aplicação mínimos de espuma para combate a incêndios em solventes polares, armazenados em tanques estacionários em áreas abertas, devem atender ao previsto na tabela 13.

Deve-se considerar que na aplicação de espuma tipo III ocorre retirada de material pelo vento e para compensar essa perda a taxa de aplicação deve ser aumentada em



Figura 63: Canhão monitor móvel com proporcionador de espuma. Fonte: [8].



Figura 64: Entrelinhas, à esquerda e esguicho lançador de espuma de baixa expansão. Fonte: [8].

20%.

A quantidade mínima de câmaras de espumas por tanque está prevista na tabela 14.

O item 6.3.9 da NT-25 prevê que independente da proteção primária por espuma indicada para cada tanque, ainda devemos considerar a proteção suplementar de espuma para cada bacia de contenção.

Também deve ser prevista proteção para todos os locais sujeitos ao derramamento ou vazamento de produtos ou onde o produto possa ficar exposto à atmosfera em condições de operação, como no separador de água e óleo.

A aplicação de espuma por meio de linhas manuais ou canhões monitores deve ser

Tabela 11: Proteção por espuma para tanques verticais e horizontais. Fonte: Tabela 3 da NT-25.

<b>Sistema de espuma</b>					
Tipos de tanques	Altura (m)	Diâmetro (m)	CE	CM	LM
Vertical	$\leq 6$	$d \leq 9$	-	-	x
		$9 < d \leq 18$	-	x	-
		$d > 18$	x	-	-
	$> 6$	$d \leq 9$	-	x	-
		$9 < d \leq 18$	-	x	-
		$d > 18$	x	-	-
Horizontal	Proteção para bacia de contenção.				

CE = Câmara de espuma; CM = Canhão monitor; LM = Linhas manuais

Tabela 12: Taxa e tempo mínimos de aplicação de espuma em tanques verticais contendo hidrocarbonetos. Fonte: Tabela 4 da NT-25.

Tipo de Aplicação	Taxa mínima de aplicação (L/min/m <sup>2</sup> )	Tempo mínimo (min)		
		Produtos		
		Classe I	Classe II	Classe III
Tipo I	4,1	30	20	15
Tipo II	4,1	55	30	25
Tipo III	6,5	65	50	45

calculada considerando a vazão mínima de 200 L/min para cada equipamento obedecendo as tabelas 15 e 16 .

Tabela 13: Taxa e tempo mínimos de aplicação de espuma em tanques verticais contendo solventes polares. Fonte: Tabela 5 da NT-25.

Tipo de Aplicação	Taxa mínima de aplicação (L/min/m <sup>2</sup> )	tempo (minutos)
Tipo I	6,9	30
Tipo II	6,9	55
Tipo III	9,8	65

Tabela 14: Quantidade mínima de câmaras de espuma por tanque. Fonte: Tabela 6 da NT-25.

Diâmetro $d$ do tanque (m)	Número de câmaras de espuma
$d \leq 24$	01
$24 < d \leq 36$	02
$36 < d \leq 42$	03
$42 < d \leq 48$	04
$48 < d \leq 54$	05
$54 < d \leq 60$	06

Para  $d > 60$  deve ser instalada 01 câmara de espuma a cada 465 m<sup>2</sup> ou fração de superfície adicional de líquido.

### 8.5.1 Exemplo 12 - Sistema de espuma para tanque vertical isolado contendo hidrocarboneto

Tomemos o tanque vertical descrito no exemplo 07, o qual está contendo um líquido inflamável qualquer da classe II (hidrocarboneto), com diâmetro de 42 m e altura de 15 m, localizado em uma bacia de contenção feita no próprio terreno de base quadrada com lado medindo 92 m e altura de 3 m, conforme figura 65.

Sabemos que o tanque possui volume igual a 20.771,1 m<sup>3</sup> e pelas dimensões do

Tabela 15: Quantidade mínima de linhas suplementares ou canhões monitores. Fonte: Tabela 8 da NT-25.

Diâmetro $d$ do tanque (m)	Número mínimo de LM ou CM
$d \leq 20$	01
$20 < d \leq 36$	02
$d > 36$	03

LM = Linhas manuais; CM = Canhões monitores

Tabela 16: Tempo mínimo de aplicação de solução de espuma. Fonte: Tabela 9 da NT-25.

Diâmetro $d$ do maior tanque (m)	Tempo (min)
$d \leq 10,5$	10
$10,5 < d \leq 28,5$	20
$d > 28,5$	30

diâmetro e altura o sistema de aplicação de espumas deve ser feito por câmaras de espuma, sendo necessárias no mínimo 03 (três). A taxa  $TA$  de aplicação da solução<sup>24</sup>, se forem utilizadas câmaras de espuma com defletor tipo II, será de 4,1 L/min/m<sup>2</sup> da área da superfície líquida, que neste caso é igual a área  $A_t$  do teto do tanque, por um período mínimo de 30 minutos.

Assim, a vazão  $\theta_T$  de solução de espuma que deve ser aplicada no tanque em chamas é:

$$\begin{aligned}\theta_T &= TA.A_t \\ A_t &= \pi 21^2 = 1.384,74 \text{ m}^2 \\ \theta_T &= 4,1 \times 1384,74 = 5.677,43 \text{ L/min.}\end{aligned}$$

Esta vazão  $\theta_T$  deve ser dividida entre as 03 (três) câmaras de espumas, as quais devem ser instaladas de forma que atendam a 03 (três) setores circulares congruentes.

<sup>24</sup>Mistura de água e Líquido Gerador de Espuma - LGE.

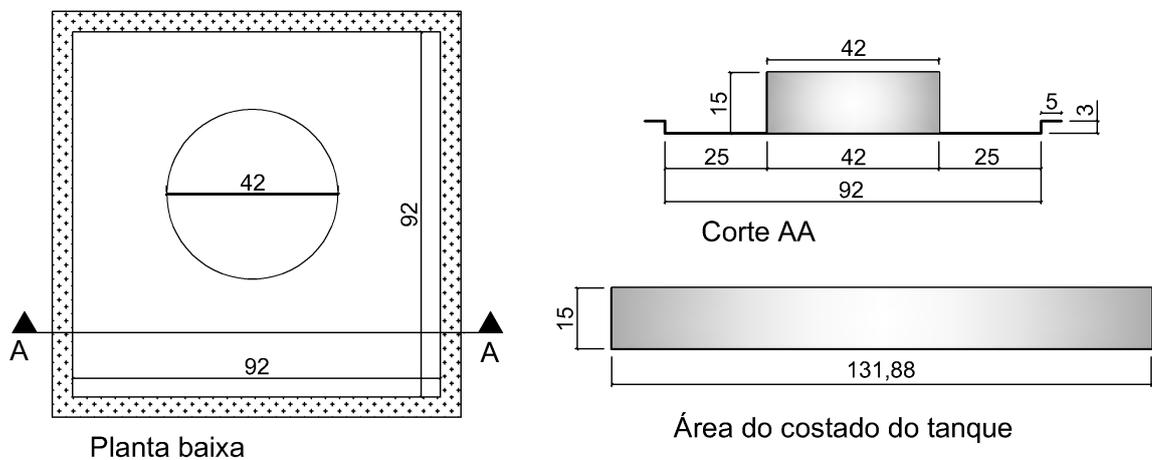


Figura 65: Planta baixa, corte e área do costado de um tanque vertical. Dimensionamento do sistema de espuma.

O volume  $V_{et}$  de solução de espuma necessário para o combate as chamas no tanque será igual ao produto da vazão de solução  $\theta_T$  pelo tempo mínimo  $t$  previsto na tabela 12. Assim, temos que

$$V_{et} = \theta_T \cdot t$$

$$V_{et} = 5.677,43 \times 30 = 170.322,9 \text{ litros de solução.}$$

Esta solução é composta por água e por LGE, sendo que a concentração do LGE depende da especificação do fabricante para cada tipo de líquido inflamável ou combustível. Normalmente a concentração recomendada para hidrocarbonetos é de 3% e para solventes polares de 6%. Neste caso vamos considerar a concentração de 3%, assim o volume  $V_{at}$  de água e o volume  $V_{LGEt}$  de LGE presentes na solução calculada é de:

$$V_{at} = 0,97 \times 170.322,9 = 165.213,213 \text{ L} \approx 165,2 \text{ m}^3 \text{ de água}$$

$$V_{LGEt} = 0,03 \times 170.322,9 = 5.109,7 \text{ L} \approx 5,1 \text{ m}^3 \text{ de LGE.}$$

O próximo passo é o dimensionamento da proteção suplementar para a bacia de contenção. Conforme as tabelas 15 e 16 são necessárias no mínimo 03(três) linhas manuais com vazão de 200 L/min de solução durante 30 minutos. Portanto, o volume  $V_{eb}$  de solução para atender a bacia de contenção, bem como os volumes  $V_{ab}$  de água e  $V_{LGEb}$  LGE são:

$$V_{eb} = 3 \times 200 \times 30 = 18.000 \text{ L} = 18 \text{ m}^3 \text{ de solução}$$

$$V_{ab} = 0,97 \times 18.000 = 17.460 \text{ L} \approx 17,5 \text{ m}^3 \text{ de água}$$

$$V_{LGEb} = 0,03 \times 18.000 = 540 \text{ litros de LGE.}$$

A norma ainda prevê que deve ser calculada a quantidade de solução necessária para enchimento da tubulação, pois em grandes parques de tanques a distância entre o reservatório de LGE e os tanques resulta em um volume considerável de solução para enchimento da tubulação.

Vamos considerar que neste caso o reservatório de LGE esteja a 150 m do taque e a tubulação seja formada por 50 m de tubos com diâmetros de 6" (152 mm)<sup>25</sup>, 50 m de 4" (100 mm) e 50 m de 2½" (63 mm). Logo, o volume  $V_{etb}$ <sup>26</sup> de solução, bem como os volumes de água  $V_{atb}$  e de LGE  $V_{LGEtb}$ , são:

$$V_{etb} = \pi \frac{0,152^2}{4} 50 + \pi \frac{0,1^2}{4} 50 + \pi \frac{0,063^2}{4} 50 = 0,91 + 0,4 + 0,16 = 1,47 \text{ m}^3 = 1.470 \text{ L}$$

$$V_{atb} = 0,97 \times 1.470 = 1.425,9 \text{ L} \approx 1,43 \text{ m}^3 \text{ de água}$$

$$V_{LGEtb} = 0,03 \times 1.470 = 44,1 \text{ litros de LGE.}$$

Finalmente, os volumes  $V_{ae}$  de água e  $V_{LGE}$  de LGE necessários para o sistema de espuma podem ser calculados.

$$V_{ae} = V_{at} + V_{ab} + V_{atb} = 165,2 + 17,5 + 1,43 = 184,13 \text{ m}^3 \text{ de água}$$

$$V_{LGE} = V_{LGEt} + V_{LGEb} + V_{LGEtb} = 5.109,7 + 540 + 44,1 = 5.693,8 \text{ litros de LGE.}$$

É importante salientar que o volume de LGE deve ser dobrado caso a empresa não participe de um plano de auxílio mútuo PAM com a possibilidade de repor o estoque em menos de 24 horas. Para este exemplo seriam necessários 11.387,6 litros de LGE.

### 8.5.2 Exemplo 13 - Sistema de espuma para tanque vertical isolado contendo solvente polar

Considere ainda o tanque do exemplo anterior, o qual agora está contendo um solvente polar. De acordo com o volume e as dimensões do diâmetro e da altura tanque o sistema de aplicação de espuma deve ser feito por no mínimo 03 (três) câmaras de

<sup>25</sup>Uma polegada (1") é igual a 25,4 mm

<sup>26</sup>Para o cálculo foi utilizado  $V_{etb} = \sum_{i=1}^n \pi \frac{d_i^2}{4} c_i$ , sendo  $d_i$  o diâmetro da tubulação em metros e  $c_i$  o comprimento da tubulação em cada trecho específico.

espuma. A taxa  $TA$  de aplicação da solução, se forem utilizadas câmaras de espuma Tipo I, será de  $6,9 \text{ L/min/m}^2$  da área da superfície líquida em chamas, que neste caso é igual a área  $A_t$  do teto do tanque. O período mínimo de aplicação de espuma será de 30 minutos.

Assim, a vazão  $\theta_T$  de solução de espuma que deve ser aplicada no tanque em chamas é:

$$\begin{aligned}\theta_T &= TA.A_t \\ A_t &= \pi 21^2 = 1.384,74 \text{ m}^2 \\ \theta_T &= 6,9 \times 1.384,74 = 9.554,7 \text{ L/min.}\end{aligned}$$

O volume  $V_{et}$  de solução de espuma necessário para o combate a incêndio no tanque em chamas será igual ao produto da vazão  $\theta_T$  de solução pelo tempo  $t$  mínimo previsto na tabela 12. Assim, temos que

$$\begin{aligned}V_{et} &= \theta_T.t \\ V_{et} &= 9.554,7 \times 30 = 286.641 \text{ litros de solução} \approx 286,64 \text{ m}^3.\end{aligned}$$

Esta solução é composta por água e por LGE, sendo que a concentração do LGE depende da especificação do fabricante para cada tipo de líquido inflamável ou combustível. Normalmente a concentração recomendada para hidrocarbonetos é de 3% e para solventes polares de 6%. Neste caso vamos considerar a concentração de 6%, assim o volume  $V_{at}$  de água e o volume  $V_{LGEt}$  de LGE presentes na solução calculada é de:

$$\begin{aligned}V_{at} &= 0,94 \times 286.641 = 269.442,54 \text{ L} \approx 269,44 \text{ m}^3 \text{ de água} \\ V_{LGEt} &= 0,06 \times 286.641 = 17.198,46 \text{ litros de LGE.}\end{aligned}$$

Agora, devemos dimensionar a proteção suplementar para a bacia de contenção. Conforme as tabelas 15 e 16 são necessárias no mínimo 03(três) linhas manuais com vazão de  $200 \text{ L/min}$  de solução durante 30 minutos. Portanto, o volume  $V_{eb}$  de solução para atender a bacia de contenção, bem como os volumes  $V_{ab}$  de água e  $V_{LGEb}$  de LGE são:

$$\begin{aligned}V_{eb} &= 3 \times 200 \times 30 = 18.000 \text{ L} = 18 \text{ m}^3 \text{ de solução} \\ V_{ab} &= 0,94 \times 18.000 = 16.920 \text{ L} \approx 16,9 \text{ m}^3 \text{ de água} \\ V_{LGEb} &= 0,06 \times 18.000 = 1.080 \text{ litros de LGE.}\end{aligned}$$

Vamos considerar também que neste caso o reservatório de LGE esteja a 150 m do taque e a tubulação seja formada por 50 m de tubos com diâmetros de 6" (152 mm), 50 m de 4" (100 mm) e 50 m de 2½" (63 mm). Logo, o volume  $V_{etb}$  de solução, bem como os volumes  $V_{atb}$  de água e  $V_{LGEtb}$  LGE serão:

$$V_{etb} = \pi \frac{0,152^2}{4} 50 + \pi \frac{0,1^2}{4} 50 + \pi \frac{0,063^2}{4} 50 = 0,91 + 0,4 + 0,16 = 1,47 \text{ m}^3 = 1.470 \text{ L}$$

$$V_{atb} = 0,94 \times 1.470 = 1.381,8 \text{ L} \approx 1,38 \text{ m}^3 \text{ de água}$$

$$V_{LGEtb} = 0,06 \times 1.470 = 88,2 \text{ litros de LGE.}$$

Assim, os volumes  $V_{ae}$  de água e  $V_{LGE}$  de LGE necessários para o sistema de espuma podem ser calculados.

$$V_{ae} = V_{at} + V_{ab} + V_{atb} = 269,44 + 16,9 + 1,38 = 287,72 \approx 288 \text{ m}^3 \text{ de água}$$

$$V_{LGE} = V_{LGEt} + V_{LGEb} + V_{LGEtb} = 17.198,46 + 1.080 + 88,2 = 18.366,66 \text{ L.}$$

$$V_{LGE} \approx 18,4 \text{ m}^3 \text{ de LGE (esta quantidade deve ser dobrada caso a empresa não participe de um PAM com possibilidade de repor o estoque em menos de 24 horas).}$$

### 8.5.3 Exemplo 14 - Sistema de espuma para parque de tanques verticais contendo hidrocarbonetos

Considere o parque de tanque descrito no exemplo 9. São três tanques  $T_1$ ,  $T_2$  e  $T_3$  contendo líquido combustível classe III-A com diâmetros de 50 m, 40 m e 30 m, e alturas de 15 m, 12 m e 10 m, respectivamente, conforme figura 66.

Sabemos que o tanque  $T_1$  possui volume igual a 29.437,5 m<sup>3</sup> e pelas dimensões do diâmetro e altura o sistema de aplicação de espumas deve ser feito por câmaras de espuma, sendo necessárias no mínimo 05 (cinco). A taxa  $TA$  de aplicação da solução, se forem utilizadas câmaras de espuma com defletor Tipo II, será de 4,1 L/min/m<sup>2</sup> da área da superfície líquida, que neste caso é igual a área  $A_t$  do teto do tanque, por um período mínimo de 25 minutos.

Assim, a vazão  $\theta_T$  de solução de espuma que deve ser aplicada no tanque em chamadas é:

$$\theta_T = TA.A_t$$

$$A_t = \pi 25^2 = 1.962,5 \text{ m}^2$$

$$\theta_T = 4,1 \times 1.962,5 = 8.046,25 \text{ L/min.}$$

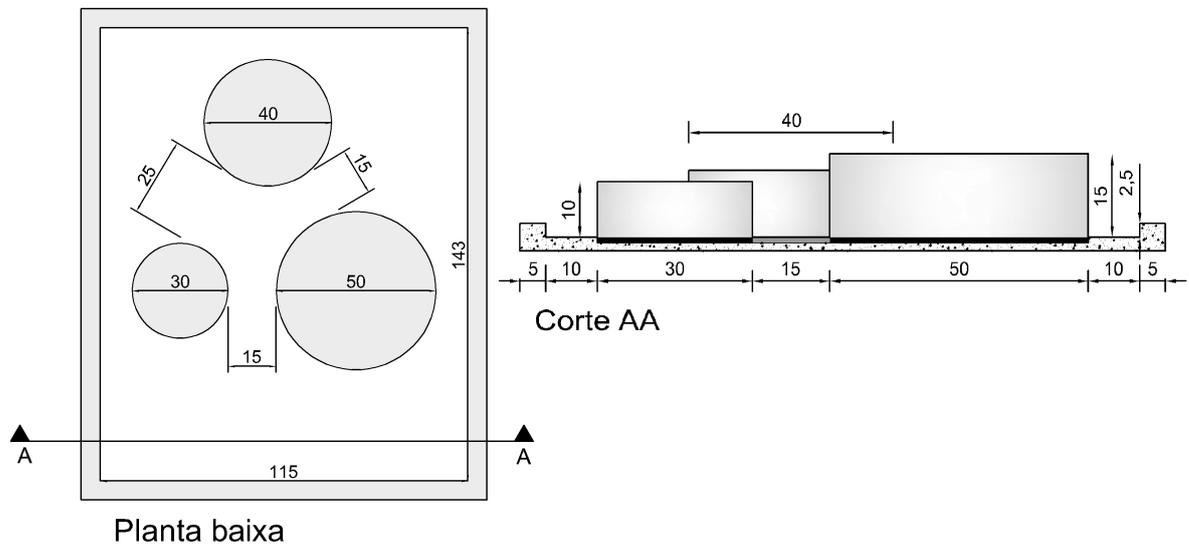


Figura 66: Parque de tanques verticais não isolados em uma mesma bacia de contenção.

Esta vazão  $\theta_T$  deve ser dividida entre 05 (cinco) câmaras de espumas, as quais devem ser distribuídas ao redor do tanque.

O volume  $V_{et}$  de solução de espuma necessário para o combate as chamas no tanque é igual ao produto da vazão  $\theta_T$  de solução pelo tempo  $t$  mínimo previsto na tabela 12. Assim, temos que:

$$V_{et} = \theta_T \cdot t$$

$$V_{et} = 8.046,25 \times 25 = 201.156,25 \text{ litros de solução } (\approx 201,16 \text{ m}^3).$$

Sabemos que a concentração de LGE depende da especificação do fabricante, contudo, neste caso vamos considerar a concentração usual de 3% para hidrocarbonetos. Assim, o volume  $V_{at}$  de água e o volume  $V_{LGEt}$  de LGE presentes na solução calculada é de

$$V_{at} = 0,97 \times 201.156,25 = 195.121,56 \text{ L } \approx 195,1 \text{ m}^3 \text{ de água}$$

$$V_{LGEt} = 0,03 \times 201.156,25 = 6.034,7 \text{ litros de LGE.}$$

Para a proteção suplementar da bacia de contenção, conforme as tabelas 15 e 16, serão necessárias no mínimo 03 (três) linhas manuais com vazão de 200 L/min de solução durante 30 minutos. Portanto, a vazão  $\theta_b$  de solução de espuma, o volume  $V_{eb}$  de solução para atender a bacia de contenção, bem como os volumes  $V_{ab}$  de água e  $V_{LGEb}$  de LGE são:

$$\begin{aligned}\theta_b &= 3 \times 200 = 600 \text{ L/min} \\ V_{eb} &= 3 \times 200 \times 30 = 18.000 \text{ L} = 18 \text{ m}^3 \text{ de solução} \\ V_{ab} &= 0,97 \times 18.000 = 17.460 \text{ L} \approx 17,5 \text{ m}^3 \text{ de água} \\ V_{LGEb} &= 0,03 \times 18.000 = 540 \text{ litros de LGE.}\end{aligned}$$

Considerando que o volume  $V_{etb}$  de solução para enchimento das tubulações seja de 2.500L, assim os volumes  $V_{atb}$  de água e  $V_{LGEtb}$  de LGE são:

$$\begin{aligned}V_{etb} &= 2.500 \text{ L} \\ V_{atb} &= 0,97 \times 2.500 = 2.425 \text{ L} \approx 2,43 \text{ m}^3 \text{ de água} \\ V_{LGEtb} &= 0,03 \times 2.500 = 75 \text{ litros de LGE.}\end{aligned}$$

Portanto, os volumes  $V_{ae}$  de água e  $V_{LGE}$  de LGE necessários para o sistema de espuma serão:

$$\begin{aligned}V_{ae} &= V_{at} + V_{ab} + V_{atb} = 195,1 + 17,5 + 2,43 = 215,03 \text{ m}^3 \text{ de água} \\ V_{LGE} &= V_{LGEt} + V_{LGEb} + V_{LGEtb} = 6.034,7 + 540 + 75 = 6.649,7 \text{ litros de LGE.}\end{aligned}$$

Lembrando que quantidade de LGE deve ser dobrada caso a empresa não participe de um PAM com possibilidade de repor o estoque em menos de 24 horas.

## 8.6 Dimensionamento do sistema de espuma para tanques horizontais aéreos em áreas abertas

Tanto NBR 17.505-7/2006 como a NT-25 não especificam a instalação de sistemas de combate a incêndio por espuma para tanques horizontais. Entretanto, deve ser prevista proteção para toda a bacia de contenção através de linhas manuais de espuma e/ou canhões monitores, podendo ser utilizados os seguintes sistemas de aplicação de espuma:

- Câmaras de espuma;
- Aspersores de espuma;
- Canhões monitores;
- Linhas manuais.

É exigida a instalação de pelo menos dois canhões monitores e/ou duas linhas manuais para cada bacia de contenção a ser protegida, posicionados de tal forma que a espuma seja lançada de duas direções distintas, devendo ainda a alimentação de LGE ser independente, sem simultaneidade de aplicação.

A NBR 17.505-7/2006 especifica que o a taxa de aplicação para hidrocarbonetos deve ser de 6,5 L/min/m<sup>2</sup> da área da bacia de contenção por um período mínimo de 30 minutos para hidrocarbonetos de classe I e 20 minutos para hidrocarbonetos de classe II. Para os demais líquidos combustíveis e inflamáveis o dimensionamento deve ser baseado na especificação técnica do fabricante de LGE.

### 8.6.1 Exemplo 15 - Dimensionamento do sistema de espuma para tanque horizontal

Tome como exemplo um parque de tanques horizontais contendo dois tanques cilíndricos para estocagem de líquidos inflamáveis do tipo hidrocarbonetos (Classe I), com diâmetro de 6 m e comprimento de 10 m, locados em bacias de contenção separadas, conforme previsto no Exemplo 11 e na figura 67.

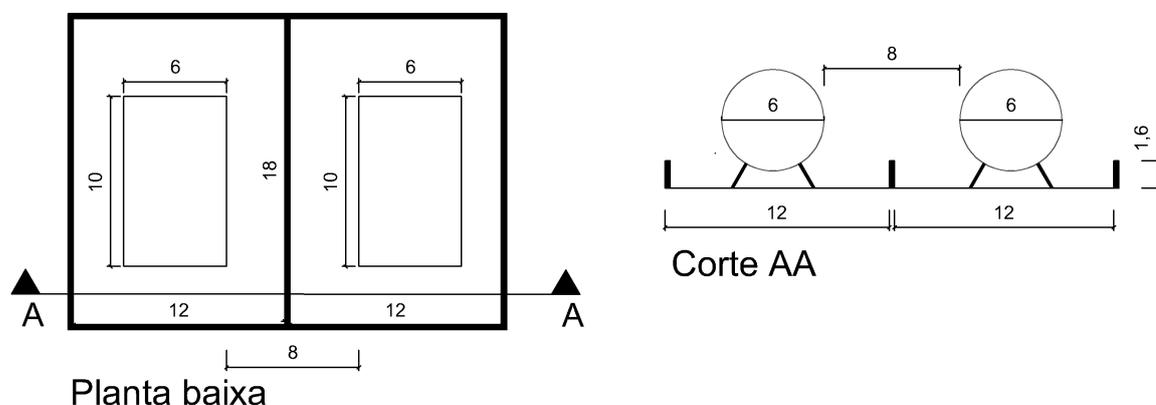


Figura 67: Dimensionamento de espuma para parque de tanques horizontais.

A vazão  $\theta_{eb}$  de solução de espuma a qual deve ser aplicada na bacia de contenção do tanque em chamas é:

$$\begin{aligned}\theta_{eb} &= T A . A_b \\ A_b &= 12 \times 18 = 216 \text{ m}^2 \\ \theta_{eb} &= 6,5 \times 216 = 1.404 \text{ L/min.}\end{aligned}$$

O volume  $V_{eb}$  de solução de espuma necessário para o combate as chamas na bacia é igual ao produto da vazão  $\theta_b$  de solução pelo tempo mínimo de 30 min. Assim, temos que

$$V_{eb} = \theta_b \cdot t$$
$$V_{eb} = 1.404 \times 30 = 42.120 \text{ litros de solução.}$$

Considerando a concentração usual de 3% para hidrocarbonetos, temos que o volume  $V_{ab}$  de água e o volume  $V_{LGEb}$  de LGE presentes na solução calculada é de:

$$V_{ab} = 0,97 \times 42.120 = 40.856,4 \text{L} \approx 40,9 \text{ m}^3 \text{ de água}$$
$$V_{LGEb} = 0,03 \times 42.120 = 1.263,6 \text{ litros de LGE.}$$

A esses volumes ainda devem ser acrescentados os volumes de água e LGE necessários para enchimento da tubulação.

## 8.7 Dimensionamento da reserva de incêndio

Conforme item 6.2.1 da NT-25 o dimensionamento da reserva de incêndio deve ser baseado no cenário que apresente a maior demanda de água para a soma das seguintes exigências:

- Volume de água requerido para resfriamento do tanque em chamas;
- Volume de água requerido para resfriamento dos tanques vizinhos;
- Volume de água requerido para combate a incêndio com espuma no tanque em chamas;
- Volume de água requerido para as linhas suplementares de espuma.

Assim, o dimensionamento da reserva de incêndio é um processo bem simples, pois se resume em somar o volume  $V_r$  de água necessário para o sistema de resfriamento e volume  $V_{ae}$  de água necessário para o sistema de espuma.

Retornado ao tanque estudado nos exemplos 07 e 12, temos que o volume  $V_{ri}$  mínimo exigido para a reserva de incêndio é:

$$V_{ri} = V_r + V_{ae}$$
$$V_{ri} = 949,54 + 184,13 = 1.133,67 \text{m}^3 \text{ de água.}$$

O volume da reserva de incêndio para o cenário estudado nos exemplos 09 e 15 é:

$$V_{ri} = V_r + V_{ae}$$
$$V_{ri} = 3.459 + 215,03 = 3.674,03\text{m}^3 \text{ de água.}$$

Já volume da reserva de incêndio calculada para o cenário estudado nos exemplos 11 e 14 será:

$$V_{ri} = V_r + V_{ae}$$
$$V_{ri} = 7,2 + 40,9 = 48,1\text{m}^3 \text{ de água.}$$

É importante salientar que para o dimensionamento das bombas de incêndio deve-se adotar o cenário que apresente a maior demanda de vazão e pressão para atender simultaneamente o seguinte:

- Vazão de água requerida para resfriamento do tanque em chamas;
- Vazão de água requerida para resfriamento dos tanques vizinhos;
- Vazão de água requerida para combate a incêndio com espuma no tanque em chamas adotado;
- Vazão de água requerida para as linhas suplementares de espuma.

Portanto, a vazão  $\Phi$  para dimensionamento do sistema de bombas é igual a soma das vazões  $\phi$  do sistema de resfriamento e  $\theta$  do sistema de espuma:

$$\Phi = \phi + \theta.$$

Para o cenário estudado nos exemplos 09 e 14, temos que a vazão  $\Phi$  do sistema é:

$$\Phi = \phi + \theta$$
$$\Phi = \phi_1 + \phi_2 + \theta_T + \theta_b, \text{ onde } \theta_b \text{ é a vazão de espuma para proteção suplementar.}$$
$$\Phi = 4.710 + 4.898,4 + 8.046,25 + 600 = 18.254,65 \text{ L/min.}$$

Cabe ainda ressaltar que o responsável técnico pode dividir o sistema em baterias de bombas distintas para evitar a utilização de bombas hidráulicas com potências exageradas.

## 9 Considerações finais

A considerável quantidade de exigências e detalhes técnicos relacionados aos sistemas preventivos fixos de proteção contra incêndio em tanques contendo líquidos combustíveis e inflamáveis requer um estudo detalhado dos cálculos de área e volume, bem como o planejamento para capacitação matemática dos bombeiros militares envolvidos nas atividades de inspeção e análise de projetos.

Neste trabalho foram apresentados os conceitos fundamentais da geometria euclidiana necessários para estudo de áreas e volumes, sendo utilizada uma linguagem voltada para o público alvo. Também foram apresentados alguns exemplos de dimensionamento dos sistemas preventivos exigidos para tanques aéreos, os tipos mais comuns no Estado de Goiás. Contudo, não foram explorados todos os casos descrito na legislação em vigor, muito pelo contrário, foram estudados apenas os mais simples e corriqueiros em nossa área de atuação. Recomendamos a bibliografia utilizada para melhor entendimento do tema.

Esperamos que este trabalho seja utilizado como referência nos cursos de inspeção e análise de projetos do Corpo de Bombeiros Militar do Estado de Goiás, bem como sirva de base para trabalhos envolvendo o tema transversal de segurança contra incêndio e pânico em aulas de geometria dos ensinos fundamental e médio.

## Referências

- [1] AABOE, A. *Episódios da história antiga da matemática*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 191p.
- [2] ÁVILA, G. Euclides, geometria e fundamentos, *Revista do professor de matemática* n. 45. Rio de Janeiro: SBM, 2001.
- [3] ARGUS PRODUTOS E SISTEMAS CONTRA INCÊNDIO. Catálogo de produtos. Disponível em: <<http://www.argus-engenharia.com.br/site/produtos/camaras-e-geradores-de-espuma/>>. Acesso em: 10 jun. 2014.
- [4] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS – ABNT. *NBR 17.505 – 7: Armazenamento de líquidos inflamáveis e combustíveis. Parte 7: Proteção contra incêndio para parques de armazenamento com tanques estacionários*. Rio de Janeiro: ABNT, 2006. 15p
- [5] BARBOSA, J. L. M. *Geometria euclidiana plana*. 11ª ed, Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273p.
- [6] BOYER, C. B. *História da matemática*. São Paulo: Ed. da USP, 1974. 502p.
- [7] BUCKA SPIERO. Catálogo de produtos. Disponível em: <<http://www.bucka.com.br/esguichos/esguichos-manuais/>>. Acesso em: 10 jun. 2014.
- [8] CORPO DE BOMBEIROS DA POLÍCIA MILITAR DO ESTADO DE SÃO PAULO – CBPMSP *Coletânea de Manuais Técnicos de Bombeiros – 43: Emprego de Espuma Mecânica*, 1ª ed. São Paulo: CBPMSP, 2006. 48p.
- [9] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO ESTADO DE GOIÁS - CBMGO. *NT-02: Conceitos básicos de segurança contra incêndio*. Goiânia: CBMGO, 2014. 32p.
- [10] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO ESTADO DE GOIÁS - CBMGO. *NT-03: Terminologia de segurança contra incêndio*. Goiânia: CBMGO, 2014. 34p.
- [11] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO ESTADO DE GOIÁS - CBMGO. *NT 25: Segurança Contra Incêndio para Líquidos Combustíveis e Inflamáveis. Parte 1 - Generalidades e Requisitos Básicos*. Goiânia: CBMGO, 2014. 8p.

- [12] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO ESTADO DE GOIÁS - CBMGO. *NT 25: Segurança Contra Incêndio para Líquidos Combustíveis e Inflamáveis. Parte 2 - Armazenamento em tanques estacionários*. Goiânia: CBMGO, 2014. 22p.
- [13] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO DISTRITO FEDERAL - CBMDF *Manual básico de combate a incêndio - Módulo 1: Comportamento do fogo*. Brasília: CBMDF. 2006, 164p.
- [14] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO DISTRITO FEDERAL - CBMDF *Manual básico de combate a incêndio - Módulo 2: Efeitos nocivos do incêndio*. Brasília: CBMDF. 2006, 43p.
- [15] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO DISTRITO FEDERAL - CBMDF *Manual básico de combate a incêndio - Módulo 3: Técnicas de combate a incêndio*. Brasília: CBMDF. 2006, 261p.
- [16] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO DISTRITO FEDERAL - CBMDF *Manual básico de combate a incêndio - Módulo 4: Tática de combate a incêndio*. Brasília: CBMDF. 2006, 81p.
- [17] CORPO DE BOMBEIROS MILITAR DO DISTRITO FEDERAL - CBMDF *Manual básico de combate a incêndio - Módulo 5: Segurança contra incêndio*. Brasília: CBMDF. 2006, 141p.
- [18] DOURADO, M. S. *Geometria Espacial e Projeções em Perspectiva: Um Relato de Prática Interdisciplinar no Nono Ano do Ensino Fundamental*. 2013. 47f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, Niterói. 2013.
- [19] ENGENHARIA DO FUTURO. Descrição de produtos e equipamentos. Disponível em: <<http://engdofuturo.com.br/o-que-faz-um-canhao-monitor/>>. Acesso em: 10 jun. 2014.
- [20] EVES, H. *História da geometria*. São Paulo: Atual, 1992. 75p.
- [21] EVES, H. *Introdução a história da matemática*, 5ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. 848p.
- [22] FANELLI, R. P. L. *Alternativas para o ensino da geometria espacial*. 2013. 37f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto

- de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul, Dourados. 2013.
- [23] LIMA, E. L. *Medida e forma em geometria*. 4<sup>a</sup> ed, Rio de Janeiro: SBM, 2006. 136p.
- [24] LIMA, E. L. *Meu professor de matemática e outras histórias*. 5<sup>a</sup> ed, Rio de Janeiro: SBM, 2011. 206p.
- [25] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio – volume 2*. 6<sup>a</sup> ed, Rio de Janeiro: SBM, 2006. 308p.
- [26] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. *A matemática do ensino médio – volume 3*. 6<sup>a</sup> ed, Rio de Janeiro: SBM, 2006. 293p.
- [27] LULA, K. P. *Aplicações do princípio de Cavalieri ao cálculo volumes e áreas*. 2013. 61f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia. 2013.
- [28] PRIMO, M. E. *O princípio de Cavalieri para cálculo de volumes no ensino médio: algumas possibilidades*. 2013. 79f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora. 2013.
- [29] REVISTA CIENTÍFICA APRENDER. Sistemas de chuveiros automáticos. Disponível em: <<http://revista.fundacaoaprender.org.br/index.php?id=141>>. Acesso em: 10 jun. 2014.
- [30] ROZENDO, K. C. C. *Aprofundando o estudo de Áreas*. 2013. 52f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora. 2013.
- [31] SEITO, A. I., et al. *A segurança contra incêndio no Brasil*. São Paulo: Projeto Editora, 2008. 496p.

## Anexo I

### Considerações pessoais sobre o $\pi$

Este número me intriga por anos. Desde a primeira vez que meu professor do ensino fundamental falou que o  $\pi$  era um número obtido através da razão entre o comprimento e diâmetro de qualquer circunferência, aproximadamente 3,1416 fiquei intrigado. Lembro muito bem que ele me falou que este número tinha infinitos dígitos após a vírgula e que quanto mais precisa fosse a medida do comprimento e do diâmetro de uma circunferência melhor seria a aproximação do número.

A explicação do professor estava correta para o nível de entendimento da turma. Contudo, como a imaginação de um aluno é algo indescritível, comecei a definir e compreender o novo conceito como julgava correto. Concentrei-me no número. O símbolo me atraía e ainda atrai fortemente. Repetia mentalmente, quanto melhor a medida mais precisa será a conta. Vale ressaltar que apesar de já conhecer os números irracionais não me lembro de estudar nada sobre comensurabilidade até aquele momento. Também confesso que demorei muito para conhecer e realmente entender tal definição.

Assim, ficava imaginando que quanto mais preciso fosse o instrumento de medida melhor seria o resultado desta conta. Passei muito tempo pensando que a melhor alternativa para conhecer o  $\pi$  seria uma régua incrivelmente perfeita. Entretanto, como não entendia nada de comensurabilidade, ficava com uma pergunta em minha mente: como definir um número irracional a partir de uma razão? Ora, por mais precisa que fosse a régua eu não conseguiria enxergar tantos dígitos após os milímetros.

Depois de um tempo fiquei sabendo de um microscópio bem potente, achei que seria a solução. Contudo, lembrei-me da definição dita pelo professor: O número  $\pi$  é a razão entre o comprimento e o diâmetro da circunferência, 3,1416..., tem infinitos dígitos após a vírgula e não são periódicos. Foi então que comecei a pensar nos infinitos dígitos. Como eles tem certeza que são infinitos e nunca se encontra um período. Realmente, era muito para mim. Um número irracional definido como um razão me parecia muito estranho.

Diante de tamanha dificuldade incompreensão fiz algo que poucos fariam, deixei de pensar nisto e prossegui minha vida. Algumas vezes os pensamentos insanos voltavam, mas logo me concentrava em outra coisa e o  $\pi$  parava de me atormentar. Estava quase totalmente recuperado quando entrei no mestrado em matemática. Sim, foi durante

o mestrado que o  $\pi$  voltou a me perseguir. Fiz a graduação em uma área distinta da matemática, estudei um pouco de cálculo, mas passei bem por este período.

Quando iniciei o mestrado já havia cinco anos que terminara a graduação e passado por um período de hibernação intelectual. O retorno foi dramático. Estava sentenciado pela 1ª Lei de Newton, e foi necessária uma força imensa para romper com o repouso. Aos poucos verifiquei que conseguiria iniciar um movimento discreto. E, digo discreto não só pelo modesto início, mas também pela dificuldade em ser contínuo.

Após pouco tempo de estudos o  $\pi$  voltou. Veio com nova definição, a área de uma circunferência de raio 1. Também poderia ser encontrado com a razão entre o comprimento e o diâmetro de qualquer circunferência na geometria euclidiana, mas que tais medidas são incomensuráveis. Comecei então a compreender o  $\pi$  com um número irracional realmente.

Achei que seria mais fácil enfrentar o  $\pi$  e coloca-lo no seu devido lugar. Contudo, o mesmo se levantou vorazmente, impôs sua transcendência e me fez entender sua grandeza.

## Anexo II

### Aplicativo para celular

Realizar os cálculos para dimensionamento do sistema de combate a incêndio em tanques aéreos contendo líquidos combustíveis e inflamáveis pode ser complicado e demorado. Entretanto, a eficiência do combate exige a precisão desses resultados.

Considerando que durante a ocorrência de um incêndio o bombeiro está sujeito a inúmeros fatores adversos que dificultam a realização dos cálculos de dimensionamento dos sistemas com precisão, é interessante a existência de uma alternativa que viabilize este procedimento e garanta a eficiência durante o combate.

Com este foco foi desenvolvido um aplicativo para celulares com sistema operacional *android*, o qual realiza os cálculos dos sistemas de resfriamento e espuma. Disponível para *download* no site *Play Store*.

O aplicativo foi pensado para o dimensionamento no momento do combate ao incêndio. Portanto, consideramos que os sistemas de resfriamento e espuma não foram instalados ou foram danificados pelo incêndio. Logo, o resfriamento e o combate são feitos apenas por linhas manuais e canhões monitores.

Os dados de entrada são as dimensões do tanque em chamas e o tipo de líquido combustível ou inflamável. O programa executa os cálculos e dimensiona a quantidade de água, de LGE e os equipamentos necessários para o combate, o que facilita o serviço operacional e proporciona um planejamento adequado das ações.