Explorando lugares geométricos através da resolução de problemas

Mateus Rodrigues de Oliveira

SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura:________________________

Mateus Rodrigues de Oliveira

Explorando lugares geométricos através da resolução de problemas

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Ciências – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

USP – São Carlos
Outubro de 2016

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

O48e

Oliveira, Mateus Rodrigues de
Explorando lugares geométricos através da resolução de problemas / Mateus Rodrigues de Oliveira; orientador Alexandre Casassola Gonçalves. -- São Carlos, 2016.
80 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação em Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) -- Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Construção Geométrica. 2. Lugares Geométricos. 3. Resolução de Problemas. I. Casassola Gonçalves, Alexandre , orient. II. Título.

Mateus Rodrigues de Oliveira

Geometric loci through problem solving technique

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of Mathematics Professional Master's Program. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves

USP – São Carlos
October 2016

Agradecimento

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade a mim concebida.

A minha esposa e meu filho por sempre estarem ao meu lado, incentivando e ajudando na elaboração deste trabalho.

Aos meus pais por tudo de bom e maravilhoso que fizeste até hoje em vida.

Ao Prof. Dr. Alexandre Casassola Gonçalves, por compartilhar comigo sua magnifica experiência e conhecimento, pela orientação e confiança e, sobretudo pela sua amizade.

A meus amigos de turma do PROFMAT, pela maravilhosa troca de experiências e conhecimentos.

A meus amigos da escola estadual Jardim das Rosas, na qual leciono, pelo grande apoio e incentivo.

Dedicatória

À minha esposa, Fabiana, e ao meu filho, Mateus Junior, pela grande importância que representam em minha vida e por todo apoio que concederam a mim na realização deste trabalho.

Aos meus pais, Celina e Osvaldo, por sempre me apoiarem e lutarem para que eu pudesse alcançar meus objetivos mesmo que tivessem que renunciar os seus.

Resumo

Este trabalho visa resgatar a importância do ensino do desenho geométrico em especial dos Métodos dos Lugares Geométricos, aplicado à resolução de problemas de construção geométrica plana. A abordagem apresentada é tradicional, com o uso da régua e do compasso. Nesse sentido, o trabalho é composto da apresentação (conceito e construção), de vários Lugares Geométricos que podem ser considerados fundamentais para a resolução de problemas elementares de Desenho Geométrico, e a apresentação de construções das cônicas como algo mais elaborado destes lugares geométricos considerados fundamentais. Para a fixação dos conceitos, cada Lugar Geométrico (L.G.) contará com alguns exemplos de aplicação e, ao final dos capítulos, serão apresentados alguns exercícios propostos (para o leitor que se interessar em praticar os conceitos e as construções abordadas). Finalizando será feito um breve comentário das origens do desenho geométrico, bem como seu ensino no Brasil, evidenciando a resolução de problemas como método eficaz para o ensino da geometria.

Palavras-chave: Construção geométrica, lugares geométricos, resolução de problemas.

Abstract

This study reviews the importance of education in special geometric design of the "Methods of Geometric Places", applied to the resolution of flat geometric construction problems. The presented approach is traditional, using ruler and compass. In this sense, the work consists of the presentation (concept and construction), several Geometric places that may be considered fundamental to solving elementary geometric design problems, and the presentation of conical constructions as something more elaborate of these loci considered fundamental. For fixing the concepts, each geometric place will feature some application examples and at the end of chapters, some proposed exercises will be presented (to the reader who is interested in practicing the concepts and addressed buildings). Finalizing will be a brief review of the origins of geometric design and its teaching in Brazil, emphasizing problem solving as an effective method for teaching geometry.

Keywords: Geometric Construction, Geometric Places, problem solving.

Sumário

Lista de figuras

Capítulo 1

Introdução

O ensino de Desenho Geométrico está há muito tempo desvalorizado nos Ensino Fundamental e Médio das escolas brasileiras e isso tem apresentado consequências sérias no aprendizado de Geometria.

Segundo Putnoki (1988), este déficit que o aluno apresenta nesta área não é coincidência e sim consequência desse abandono do ensino de Desenho Geométrico.

A pouca ênfase dada a essa disciplina deve-se muitas vezes à falta de preparo dos professores, o que pode ter ocorrido por diversos motivos, entre eles:

- Quando eram alunos, tiveram pouco acesso à Geometria;
- No curso de formação, continuaram sem acesso adequado à Geometria e às construções geométricas;
- Os cursos de formação continuada não estão conseguindo suprir toda a lacuna existente no conhecimento dos professores.

Além desses motivos, muitas vezes, os professores alegam falta de tempo para o ensino tendo em vista o número de aulas da grade curricular, despreparo dos alunos que em séries anteriores não tiveram contato com a disciplina e a ausência desse tipo de abordagem nos livros didáticos.

O retorno de Desenho Geométrico as escolas permitiria a construção dos conhecimentos geométricos a partir das investigações e da resolução de problema, como é destacado nos PCNs do 3º e 4º Ciclos do Ensino Fundamental na disciplina de Matemática. De acordo com PCNs, Brasil (1998), os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de matemática no ensino fundamental, porque, por meio deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive.

Os conhecimentos teóricos da Geometria podem ser concretizados a partir do Desenho Geométrico de forma gráfica. Assim essa disciplina permitiria a demonstração de alguns teoremas, algumas propriedades sem ter que recorrer à formalidade exigida pela Álgebra Geométrica e a ideia, é que os alunos ao compreenderem melhor o significado dessas características e propriedades, saibam aplicá-las nos mais diversos casos.

E foi essa a motivação desse trabalho: verificar se através do Desenho Geométrico os alunos apresentarão um melhor aprendizado da Geometria, mais especificamente dos Lugares Geométricos.

Esse trabalho apresentará uma breve história do Desenho Geométrico e da Geometria, bem como a resolução de problemas como metodologia de ensino dos lugares geométricos.

Nesse trabalho também serão abordados conceitos e construções (régua e compasso), dos lugares geométricos ditos básicos com aplicação de situações problemas resolvidos e outras deixadas ao leitor para um melhor aprofundamento; e de alguns lugares geométricos poucos conhecidos ou pouco trabalhados com régua e compasso, Cônicas, com demonstrações geométricas e algébricas, exercícios resolvidos e propostos.

Capítulo 2

Lugar Geométrico

De acordo com Muniz Neto, lugar geométrico é o subconjunto de pontos do plano que gozam de certa propriedade. Esta propriedade pode ser descrita de muitas formas, mas comumente é apresentada como *o conjunto solução* de certas equações analíticas ou algébricas nas variáveis cartesianas x e y; ou então como propriedade definida a partir de conceitos axiomáticos ou pós-axiomáticos da geometria plana (não analítica). Consideremos por exemplo a seguinte situação:

Exemplo 2.1. Um ponto se move de maneira que sua distância ao ponto $A(1;-1)$ é sempre igual a duas vezes sua distância a reta (r) $3x-2y+6=0$. Qual é a equação analítica que define seu lugar geometrico ?

$$P(x;y) \Leftrightarrow d(P,A) = 2d(P,r)$$
$$\sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 2\frac{|3x-2y+6|}{\sqrt{(3)^2+(-2)^2}}$$

Quadrando ambos os lados e desenvolvendo, temos:

$$(x-1)^2+(y+1)^2 = 4\frac{(3x-2y+6)^2}{13}$$
$$13(x^2-2x+y^2+2y+2) = 4(9x^2+4y^2-12xy+36x-24y+36)$$

fazendo a distributiva e reduzindo a expressão teremos,

$$23x^2+3y^2-48xy+170x-122y+118=0\ ,$$

que é a equação analítica do lugar geométrico em questão; usando um recurso computacional conseguimos perceber que se trata de uma hipérbole.

Exemplo 2.2. Dados dois pontos distintos no plano, podemos concluir que estes sempre pertencem a uma mesma circunferência?

Considerando que cada dois pontos para pertencer a uma circunferência devem estar à mesma distância de um ponto fixo, após varias construções utilizando mediatrizes iremos concluir que sempre estes dois pontos pertencem a mesma circunferência.

O aspecto interessante sobre o conceito de lugar geométrico é que ele promove de forma simples a conjunção de áreas aparentemente distintas e não relacionadas da Matemática, quais sejam: a Geometria de um lado, e a Álgebra, ou mais genericamente, a Teoria Analítica, de outro. Neste ponto é bastante válido ao professor uma reflexão sobre a importância de se apresentar de forma gradual e efetiva este conceito, não se preocupando em demasia com as aplicações clássicas (que serão apresentadas no texto) mas discutindo com a classe suas nuances, e propondo atividades de fixação do conceito.

Atividade Proposta 2.3. Nesta atividade iremos dividir a sala de aula em pequenos grupos e será dada a cada grupo uma certa "propriedade geometrica dos pontos"na qual o objetivo será desenvolver uma imagem para aquela propriedade entregue.

Propriedade 1: Lugar geométrico dos pontos equidistantes de três pontos distintos do plano.

Propriedade 2: Dado uma circunferência de raio r, qual o lugar geométrico gerado pelos pontos médios das cordas paralelas?

Propriedade 3: Pontos do plano cartesiano que obedecem a equação algébrica $y = x^2 - 5x + 6$.

Propriedade 4: Pontos do plano cartesiano que satisfazem a equação $x^2 + y^2 - 8x + 16y + 64 = 0$.

2.1 Alguns lugares geométricos elementares

Segundo Muniz, Neto e Putnoki, José Carlos, podemos definir os lugares geométricos elementares da seguinte maneira:

2.2 Circunferência

É o lugar geométrico dos pontos do plano que se encontram equidistantes de um ponto O fixo. A esta distância damos o nome de raio da circunferência.

Construção.

1. Marca-se o ponto O do plano que será dito centro da circunferência;

2. Dada uma distancia $r > 0$, abre-se o compasso com esta medida;

3. Com a ponta seca fixada em O, façamos um arco fechado, girando 360^o, obtendo a circunferência.

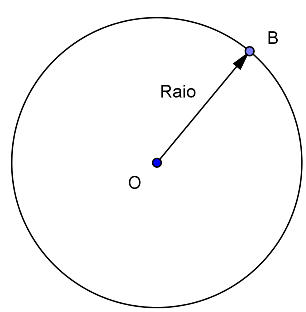

Figura 2.1: Circunferência

2.3 Círculo

Dado um numero real $r > 0$ e um ponto O fixo, o circulo de raio r e centro O é o lugar geométrico dos pontos cujas distancias a O são menores que ou iguais a r.

Construção. A construção é a mesma usada na construção da circunferência de raio r, considerando os pontos interiores a esta.

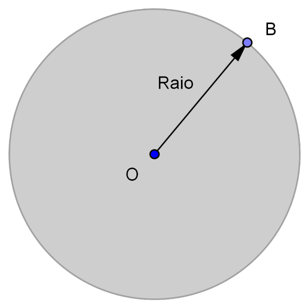

Figura 2.2: Círculo

Atividade Proposta 2.4. Embora seja uma das figuras geométricas mais frequentes do cotidiano poucas pessoas se habituam a perceber a circunferência ou o círculo como lugares geométricos. A atividade consiste em induzir a turma a uma reflexão sobre os círculos do dia a dia, e as propriedades que os distinguem (pneu de carro, fundo da panela, cabeça de um parafuso, etc.). Haveria alguma importância, por exemplo, nos centros destes círculos?

2.4 Bissetriz

Dadas as semirretas AO e OB de mesma origem, sua bissetriz será o lugar geométrico dos pontos que estão equidistantes destas semirretas.

Construção.

1. Traçamos com centro em O um arco de circunferência interceptando os lados do ângulo em X e Y;

2. Em seguida, traçamos dois arcos de mesmo raio com centros em X e Y que se interceptam em C. A semirreta OC é bissetriz do ângulo AOB.

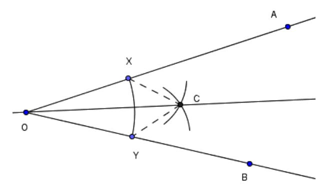

Figura 2.3: Bissetriz 1

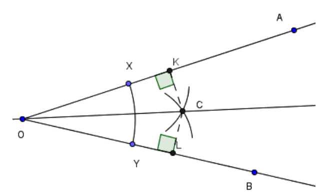

Figura 2.4: Bissetriz 2

Demonstração. Os segmentos OX e OY são congruentes, e isto acontece com os segmentos XC e YC. Se olharmos os triângulos OXC e OYC eles são congruentes pelo critério LLL, pois OC é comum aos dois triângulos, assim os ângulos BOC e AOC são congruentes e medem a metade do ângulo AOB. Sejam K e L os pés das perpendiculares baixadas de C sobre as semirretas OX e OY, respectivamente. Note que os triângulos OKC e OLC são congruentes pelo critério Lado, Ângulo, Ângulo oposto, ($L.A.Ao$). Assim os lados KC e LC são congruentes, logo C é equidistante das semirretas OX e OY.

2.5 Mediatriz

Dado um segmento de reta AB de medida a, define-se como mediatriz o lugar geométrico formado pelos pontos que estão equistantes aos extremos A e B do segmento dado.

Construção.

1. Trace o segmento AB;

2. Com o compasso faça duas circunferências congruentes, uma com centro em A e outra com centro em B, ambas com raio superior a metade de AB;

3. As duas circunferências se interceptam em dois pontos C e D.

4. A reta m que passa por C e D é a mediatriz do segmento AB.

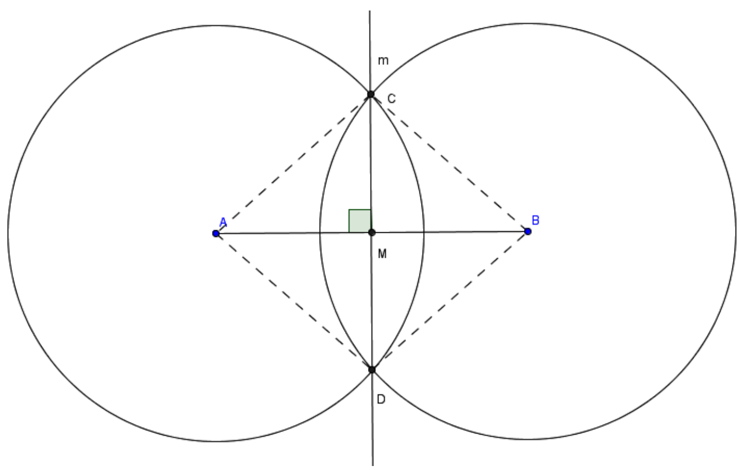

Figura 2.5: Mediatriz

Demonstração.

Como os pontos C e D estão na interseção de duas circunferências de mesmo raio eles são equidistantes dos seus centros (A e B). Portanto C e D pertencem à mediatriz de AB. Como os triângulos ABC e ABD são isósceles e congruentes, são também congruentes os ângulos $C\hat{A}B$, $C\hat{B}A$, $D\hat{A}B$ e $D\hat{B}A$. Então AB é bissetriz, logo altura dos triângulos DAC e DBC. Então AB é ortogonal a m, que será altura e mediana de ABC. O ponto M, interseção de m com AB é ponto médio de AB, e qualquer ponto X sobre m define triângulos congruentes XMA e XMB. Isso mostra que $\overline{XA} = \overline{XB}$. Portanto todos os pontos de m estão na mediatriz de AB. Deixamos para o leitor o argumento de que somente esses pontos estão na mediatriz de AB.

Atividade Proposta 2.5. Uma reta no plano é um lugar geométrico ? Essa questão pode ser proposta à turma visando aprofundar o conceito de lugar geométrico. Os casos anteriores mostram que mediatrizes e bissetrizes são retas, mas tais lugares geométricos necessitam de outros elementos previamente fornecidos para estarem definidos (o segmento que tem a reta como mediatriz, ou o ângulo que tem a reta como bissetriz). Assim, dada uma reta, como encontrar um segmento que a tem como mediatriz ? Ou um ângulo que a tem como bissetriz ? E esses segmentos ou ângulos são únicos para a tal reta ? É interessante comparar essa abordagem com a da circunferência, pois esta distingue um único ponto do plano e um único número real para sua caracterização como lugar geométrico.

2.6 Retas paralelas

Dada uma reta r no plano, o lugar geométrico formado pelos pontos que estão a um distancia fixa h de r é chamado de retas paralelas a r.

Construção.

Seja P um ponto que dista h de r. Construa três circunferências de mesmo raio $m > h$. A primeira tem centro em P e intercepta r em A. Com centro em A, traça-se a segunda circunferência, que interceptara r em B. Com centro em B, traça-se a terceira e ultima circunferência que interceptará a primeira circunferência em Q e A. A reta que passa pelos pontos P e Q é paralela à reta r.

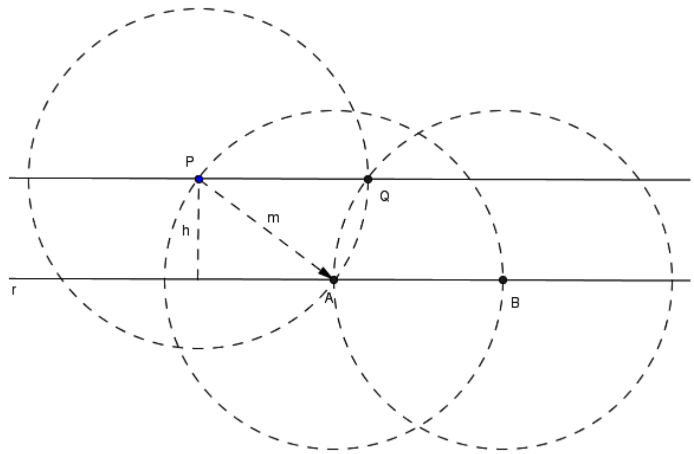

Figura 2.6: Retas Paralelas

Demonstração.

Os segmentos de reta PA, AB, BQ e QP são todos congruentes entre si e com medida m. Logo formam um quadrilátero de lados iguais. Sabemos que todo quadrilátero de lados opostos iguais é um paralelogramo. Portanto o segmento de reta PQ é paralelo ao segmento AB e como AB pertence à reta r, PQ também pertencerá a uma reta que é paralela à reta r.

2.7 Arco capaz

Dado um segmento AB de medida a, o lugar geométrico dos pontos do plano que enxergam o segmento AB segundo um ângulo de medida α constante é o par de arcos capazes do ângulo α construído sobre o segmento AB.

Construção.

1. Desenhe a mediatriz de AB;

2. Trace a semirreta AX tal que $B\hat{A}X = \alpha$;

3. Trace por A a semirreta AY perpendicular a semirreta AX. A inter-

secção desta semirreta AY com a mediatriz é o ponto O, centro do arco capaz, cujo raio é $\overline{OB}$.

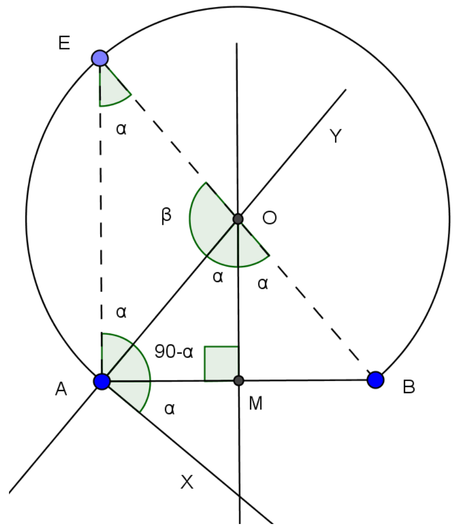

Figura 2.7: Arco Capaz

Demonstração. Observe que $B\hat{A}X = \alpha$ então $B\hat{A}Y = 90^o - \alpha$, já que AX e AY são perpendiculares. Sendo M o ponto médio do segmento AB, logo $A\hat{O}M = \alpha$, e $A\hat{O}B = 2\alpha$. Como $\overline{EO} = \overline{OA}$ temos um triângulo isósceles e β é suplemento do angulo central 2α, assim para qualquer ponto E do arco AB, $A\hat{E}B = \alpha$ (ângulo inscrito).

2.8 Reta de Apolônio

Considere os pontos A e B. A reta de Apolônio relativa a A e B é o lugar geométrico dos pontos cujas diferenças dos quadrados das distâncias a esses dois pontos fixos é igual a uma constante. Denotando por k^2 essa constante mostra-se que esse lugar geométrico é uma reta perpendicular ao segmento AB, e vale $(PA)^2 - (PB)^2 = \pm k^2$ para todo P no lugar geométrico.

Construção.

1. Dados os pontos A e B e um segmento de medida k, Traçamos primeiramente o segmento AB;
2. Construa um triangulo retângulo KMN arbitrário, na qual um dos catetos tem medida k. Sejam m e n as medidas da hipotenusa e do outro cateto, respectivamente;
3. Com centro em A e raio m construa a circunferência λ_1. E com centro em B e raio n construa a circunferência λ_2;
4. Pelos pontos de intersecção P e P' das circunferências λ_1 e λ_2 passa a reta procurada.

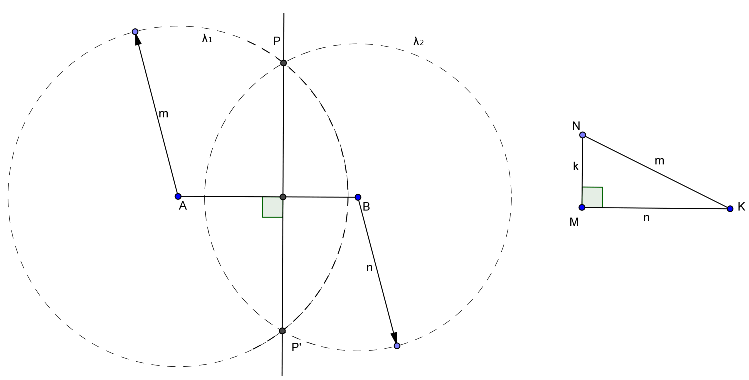

Figura 2.8: Reta de Apolônio 1

Demonstração.

Pelo teorema de Pitágoras no triângulo KMN, temos que $k^2 + n^2 = m^2 \Rightarrow k^2 = m^2 - n^2$. Mas como $\overline{PA} = \overline{P'A} = m$ e $\overline{PB} = \overline{P'B} = n$ temos que $\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = k^2$ e $\overline{P'A}^2 - \overline{P'B}^2 = k^2$, provando assim que P e P' pertencem à reta procurada.

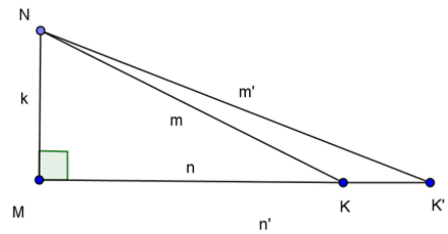

Figura 2.9: Reta de Apolônio 2

Observação 2.6. Na construção acima, caso as circunferências não se intercep-tem, basta tomar valores maiores para n e m.

Observação 2.7. Dependendo do valor de k e da distancia de A a B, a reta pode ser externa ao segmento.

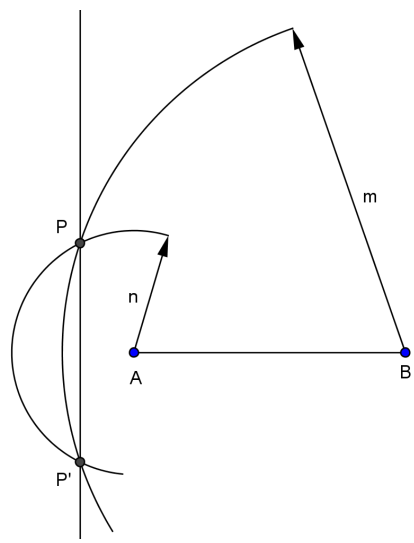

Figura 2.10: Reta de Apolônio 3

Atividade Proposta 2.8. Uma discussão interessante com a turma seria investigar quais os menores valores possíveis de m e n que permitiriam a construção acima. Haveria alguma condição sobre k e AB para que o lugar geométrico fosse vazio ?

2.9 Potência de um ponto em relação a uma circunferência

Teorema 2.9. *Dados uma circunferência e um ponto P não pertencente a ela. Considere duas retas concorrentes em P e que interceptam a circunferência nos pontos A e B, e C e D, respectivamente. Então:* $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$.

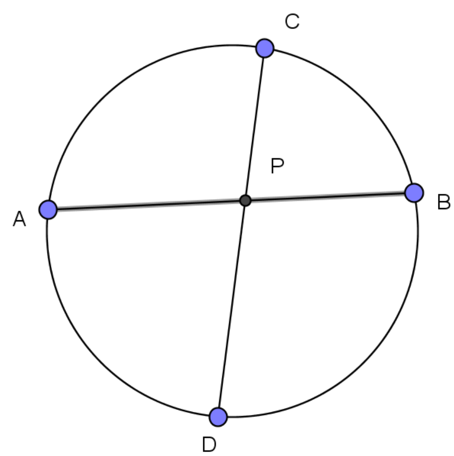

Figura 2.11: Potência Interna 1

Caso o ponto P seja externo a circunferência, e a reta t, passando por P, a tangencie no ponto T, então têm-se também: $\overline{PT}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$

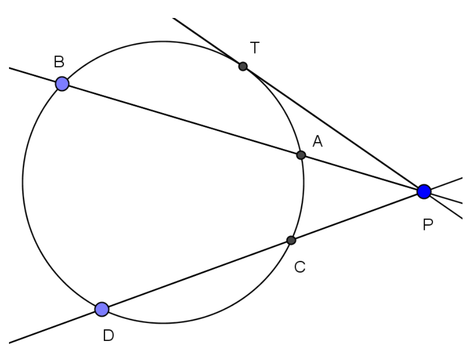

Figura 2.12: Potência Externa 1

Demonstração.

1. P interno a circunferencia:

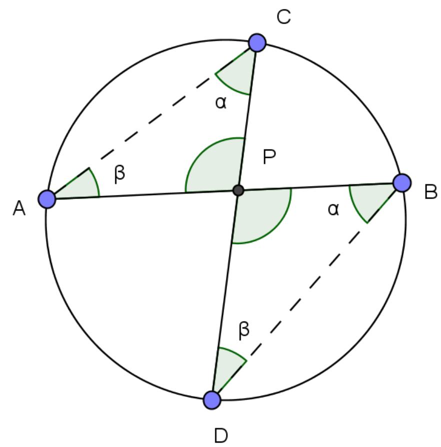

Figura 2.13: Potência Interna 2

Os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pois:

- $P\hat{A}C \equiv P\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2}$; $P\hat{C}A \equiv P\hat{B}D = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ (ângulos inscritos).
- $A\hat{P}C \equiv B\hat{P}D$ (opostos pelo vértice).

Logo, $\frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PD}} \Rightarrow \overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$.

2. P externo a circunferência:

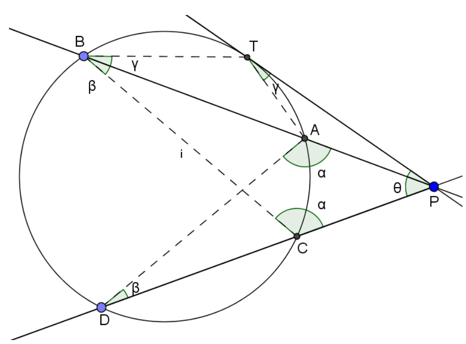

Figura 2.14: Potência Externa 2

Os triângulos PAD e PCB são semelhantes, pois:

- $P\hat{D}A \equiv P\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$ (ângulos inscritos).
- $\hat{P}$ é ângulo comum.

Logo, $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$.

Os triângulos PTA e PBT são semelhantes, uma vez que:

- $P\hat{T}A \equiv P\hat{B}T = \frac{\overset{\frown}{AT}}{2}$ - ângulos inscritos.
- $\hat{P}$ é ângulo comum.

Assim, $\frac{\overline{PT}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Rightarrow \overline{PT}.\overline{PT} = \overline{PA}.\overline{PB}$. Portanto concluimos que $\overline{PT}^2 = \overline{PA}.\overline{PB}$. □

2.9.1 O Conceito de potência de ponto

Dados uma circunferência λ de raio r, e um ponto P qualquer. Seja d a distância de P até o centro de λ. Chama-se potência de P em relação a λ, denotada Pot_{λ}^{P}, à quantidade

$$Pot_{\lambda}^{P} = d^2 - r^2 \ .$$

O fato mais importante sobre a potência de um ponto relativo a uma circunferência está descrito no teorema abaixo.

Teorema 2.10. *Dados uma circunferência λ de raio r e um ponto P. Sejam A e B pontos de λ colineares com P, e d a distancia de P ao centro da circunferência. Então:*
(a) Se P é interno a λ,

$$Pot_{\lambda}^{P} = -\overline{PA}.\overline{PB} \ .$$

(b) Se P é externo a λ

$$Pot_{\lambda}^{P} = \overline{PA}.\overline{PB} \ .$$

(c) Se $P \in \lambda$ vale $Pot_{\lambda}^{P} = 0$.

Demonstração.

Caso (a): o ponto P é interno a λ.

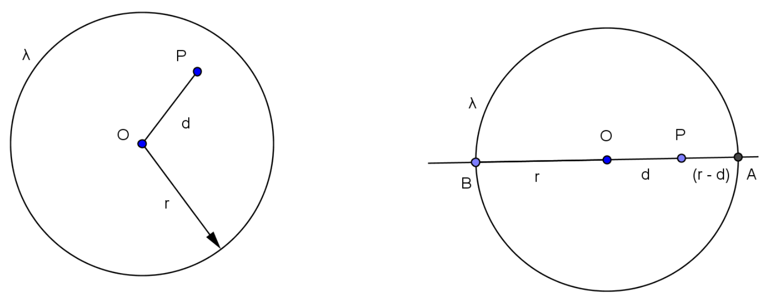

Figura 2.15: Potência de Pontos 1

Sejam A e B os pontos em que a reta conduzida por P e O intercepta λ. Então:

$$PA = r - d$$

$$PB = r + d$$

Logo, pelo teorema

$$\overline{PA}.\overline{PB} = (r-d).(r+d) = r^2 - d^2 \ \Rightarrow \ Pot_{\lambda}^{P} = d^2 - r^2 = -\overline{PA}.\overline{PB} \ .$$

Caso (b): O ponto P é externo a λ.

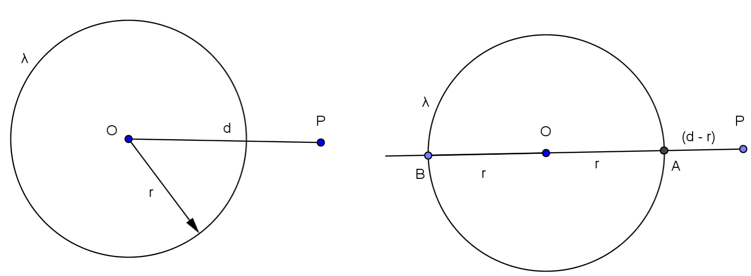

Figura 2.16: Potência de Pontos 2

Sejam A e B os pontos em que a reta conduzida por P e O intercepta λ. Então:

$$PA = d - r$$

$$PB = d + r$$

Pelo teorema

$$\overline{PA}.\overline{PB} = (d-r).(d+r) = d^2 - r^2 \;\Rightarrow\; Pot_\lambda^P = \overline{PA}.\overline{PB}.$$

Caso (c): O ponto P pertencente a λ.

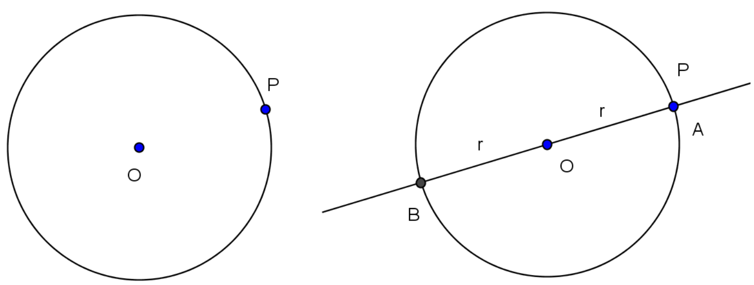

Figura 2.17: Potência de Pontos 3

Neste caso basta ver que $d = r$, logo

$$Pot_\lambda^P = d^2 - r^2 = 0\ .$$

Isso conclui a demonstração. $\square$

2.10 Eixo radical

A definição de eixo radical utiliza o conceito de potencia de ponto relativo a uma circunferência. Diremos que um ponto P é *equipotente* em relação às circunferências λ_1 e λ_2 se $Pot_{\lambda_1}^P = Pot_{\lambda_2}^P$. O lugar geométrico dos pontos equipotentes em relação a λ_1 e λ_2 é o eixo radical dessas circunferências.

Inicialmente vamos mostrar que o lugar geométrico em questão é de fato uma *reta*. Para tanto, considere as circunferencias λ_1 e λ_2, cujos centros e raios são, respectivamente, (a_1, b_1) e r_1, e (a_2, b_2) e r_2. Se $P(x, y)$ pertence ao eixo radical temos:

$$Pot_{\lambda_1}^P = Pot_{\lambda_2}^P, \quad \text{isto é}$$

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 - r_2^2 \ .$$

É um exercício simples mostrar que na equação acima os termos quadráticos em x e y se cancelam, restando uma equação da forma $Ax + By + C = 0$, com coeficientes constante A, B, C, que é a equação de uma reta no plano. Pode-se também ver que os coeficientes A e B são proporcionais a $a_1 - a_2$ e $b_1 - b_2$, respectivamente, ou seja, a reta é perpendicular ao segmento que une os centros das circunferências. Concluímos que o lugar geométrico dos pontos do plano que estão equipotentes em relação às duas circunferências é uma reta perpendicular a reta que passa pelos centros das mesmas.

Sendo o eixo radical uma reta, vários casos de posições relativas entre duas circunferências ficam imediatos.

Se as circunferências forem secantes, cada ponto de secância tem potência zero em relação a ambas, portanto o eixo radical passará por tais pontos.

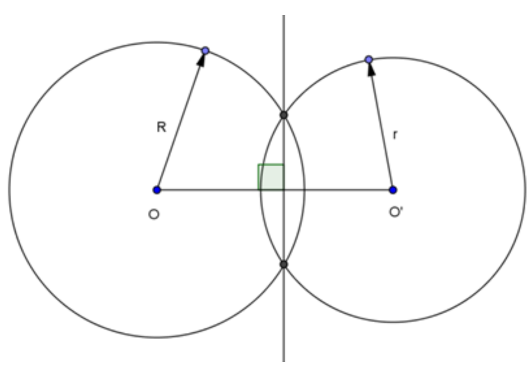

Figura 2.18: Eixo Radical 1

Um argumento similar mostra que se forem tangentes, internamente ou externamente, será a reta tangente por esse ponto.

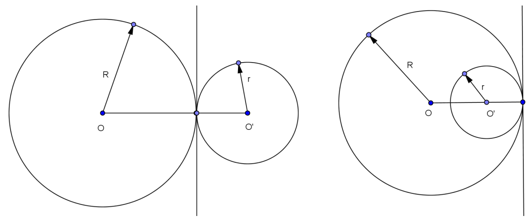

Figura 2.19: Eixo Radical 2

Nos demais casos, ou seja, sendo as circunferências interiores ou exteriores, a construção do eixo radical segue os passos:

1. Com centro arbitrário, traçamos uma circunferência que intercepta as duas circunferências, a de raio R nos pontos A e B, e a de raio r, nos pontos A' e B';

2. Trace uma reta que passa por AB e outra reta que passa por A' e B';

3. Estas retas se interceptam num ponto P. O eixo radical será a reta que passa por P e é perpendicular à reta que contem O e O'.

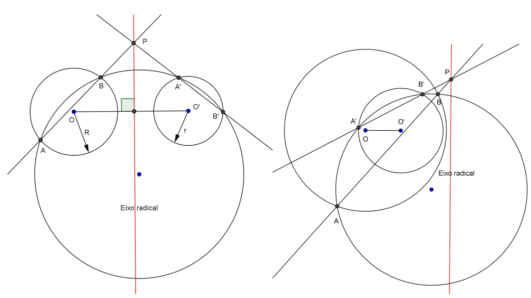

Figura 2.20: Eixo Radical 3

Figura 2.21: Eixo Radical 4

Demonstração. Para justificar os passos da construção acima, basta provar que o ponto P satisfaz a condição de ser equipotente relativo às duas circunferências iniciais. Mas a reta que passa por A e B é a secante comum de duas circunferências, logo é o eixo radical de ambas. Assim também a reta passando por A' e B' é um eixo radical. A interseção destas retas é um ponto equipotente às três circunferências, logo pertence ao eixo radical das duas primeiras. Sendo este eixo perpendicular a reta que liga O e O', o problema fica resolvido.

2.11 Pontos notáveis no triângulo

Apresentamos até aqui alguns lugares geométricos básicos que servem de subsídio para a obtenção de outros lugares geométricos. Nesta seção damos sequência à construção de alguns outros lugares geométricos utilizando aqueles anteriormente mostrados, usando os elementos do triângulo.

2.11.1 Circuncentro

Dado um triângulo ABC, seu Circuncentro é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos vértices de ABC. Com uma explicação parecida ao caso do Incentro podemos ver que o Circuncentro é obtido pela interseção das mediatrizes dos lados de ABC, e portanto, é constituído de um ponto único. O Circuncentro é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo, a única que passa pelos 3 vértices de ABC.

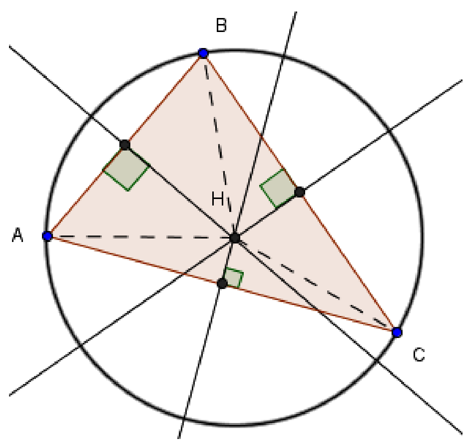

Figura 2.22: Circuncentro

2.11.2 Incentro

Dado um triângulo ABC, seu Incentro é o lugar geométrico dos seus pontos *interiores* e que equidistam dos seus lados. Para que um ponto seja equidistante das retas suporte de AB, BC e CA é necessário que seja equidistante destas retas duas a duas, ou seja, que ele pertença às *bissetrizes internas* de ABC. Este lugar geométrico é constituído de um único ponto.

Uma vez que o Incentro equidista dos três lados do triângulo podemos considerar a circunferência inscrita nesse triângulo, ou seja, a única circunferência interior que tangencia esses lados.

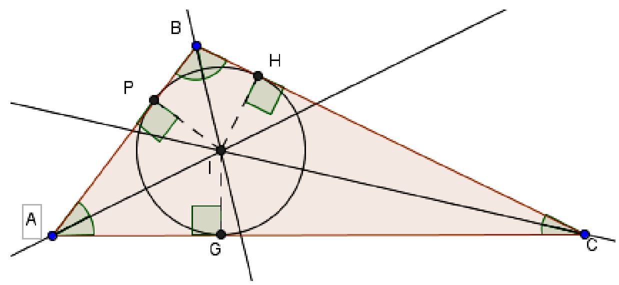

Figura 2.23: Incentro

Atividade Proposta 2.11. O Incentro e Circuncentro estão bem caracterizados como lugares geométricos. O professor pode indagar da turma como essa idéia é usada para provar, com facilidade, que a terceira bissetriz interna do triângulo encontra a interseção das outras duas, o mesmo valendo para a terceira mediatriz dos lados, em relação às outras duas mediatrizes. Discuta com a turma como essa prova ficaria bem mais complicada se se usasse apenas as idéias analíticas do tipo "a bissetriz é a reta que divide o ângulo ao meio", ou "a mediatriz é a reta perpendicular ao segmento, e que o divide ao meio".

2.11.3 Ortocentro

O ortocentro de um triângulo é o ponto obtido como intersecção das alturas relativas a cada vertice do triangulo. Ficam em aberto duas questões: (1) porque as três alturas têm interseção comum ? e (2) o ortocentro é um lugar geométrico ?

Para responder a essas questões necessitamos relembrar o conceito de *triângulo medial*. O triângulo medial de outro triângulo é aquele cujos lados são as bases médias do triângulo dado. Estamos interessados no problema inverso, ou seja, dado o triângulo ABC, como obter um triângulo $A'B'C'$ que tem ABC como triângulo medial ?

É fácil ver que cada lado de $A'B'C'$ (por exemplo $A'B'$) está suportado numa reta paralela a um lado de ABC (AB) e que passa pelo vértice oposto a esse lado (C). Analisando $A'B'C'$ via paralelogramos notamos que este é semelhante a ABC, e mais importante, as mediatrizes dos seus lados são as alturas de ABC. O encontro das alturas de ABC é o circuncentro de $A'B'C'$, portanto é um ponto. Podemos dizer que o ortocentro de um triângulo é o ponto que equidista dos vértices de outro triângulo, que o tem como medial. Assim o ortocentro é uma lugar geométrico no sentido da definição dada inicialmente.

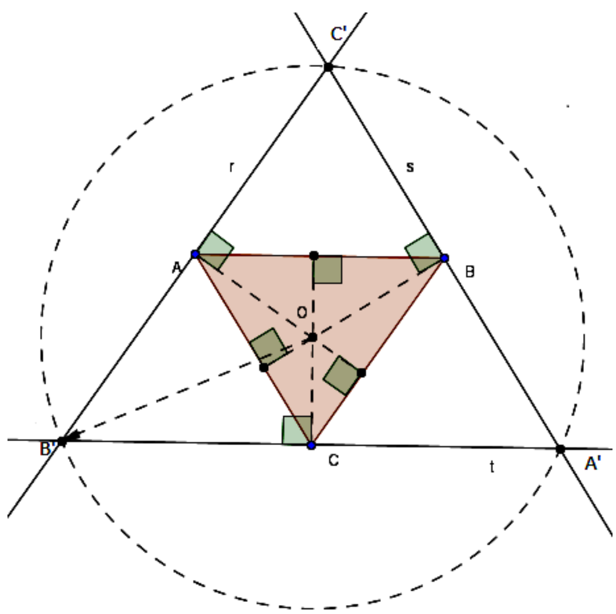

Figura 2.24: Triângulo Medial

2.11.4 Baricentro

O Baricentro de um triângulo é o ponto onde suas três medianas se encontram. Este ponto tem como propriedade dividir a mediana na razão $2 : 1$. Também é conhecido como *o centro de gravidade do triângulo*.

Dos pontos notáveis do triângulo o Baricentro é o que apresenta maior dificuldade em ser caracterizado como *lugar geométrico*. Ao menos se desejarmos uma caracterização em termos dos elementos da Geometria Plana apenas, sem invocar, por exemplo, o cálculo integral. Por outro lado, se ampliássemos os conceitos utilizados na definição de lugar geométrico de forma a abarcar alguns princípios e postulados da Física, poderíamos dizer que o Baricentro de um *corpo* é de fato um *Lugar Físico*: é o conjunto de pontos P com a propriedade que se toda a massa do corpo for concentrada em P, a dinâmica de translação deste ponto material é idêntica à do corpo original. No caso do corpo ser *rígido* e a única força agindo sobre ele for a da *gravidade* (uniforme), pode-se mostrar uma outra definição física para um Baricentro: é a de ser um ponto P que sendo o ponto de aplicação de uma força $\vec{N}$ simétrica ao peso do corpo, este atinge um estado de *equilíbrio indiferente*.

Naturalmente o desafio aqui seria trazer os elementos físicos relevantes para uma abordagem puramente geométrica do Baricentro, e que nos levariam ao fato de que, no triângulo, ele se encontra na interseção das medianas. Deixamos apenas a prova de que as três medianas se encontram num único ponto.

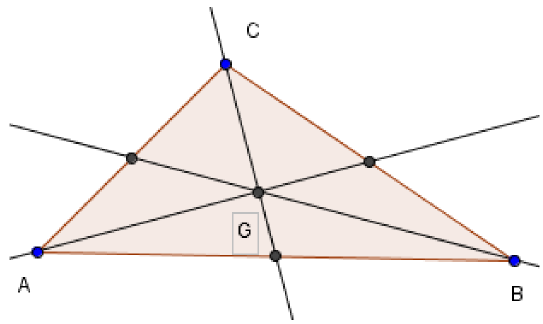

Figura 2.25: Baricentro 1

Demonstração.

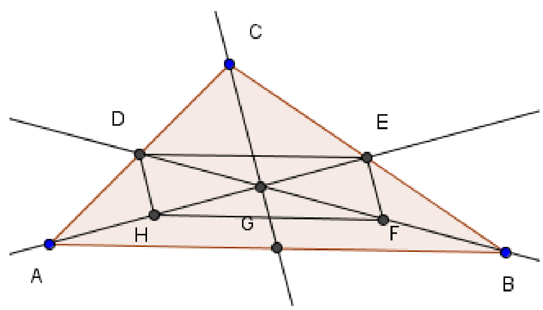

Figura 2.26: Baricentro 2

Baseando na figura acima, o segmento DE é base média do triângulo ABC, assim como HF é base média do triângulo AGB. Logo os segmentos DE e HF são paralelos e congruentes de medidas iguais a $\frac{\overline{AB}}{2}$ e $DEFH$ é um paralelogramo. Os segmentos DF e EH são diagonais do paralelogramo $DEFH$, assim interceptam no ponto G de tal maneira que $\overline{HG} = \overline{GE}$ e $\overline{DG} = \overline{GF}$. Então $\overline{AE} = \overline{AH} + \overline{HG} + \overline{GE}$ e $\overline{DB} = \overline{DG} + \overline{GF} + \overline{FB}$, então $\overline{AG} = 2\overline{GE}$ e $\overline{GB} = 2\overline{GD}$. Isto conclui a demonstração.

Atividade Proposta 2.12. Nesta tarefa propomos desenvolver com os alunos uma busca pela conceituação geométrica mais apropriada para o que deve ser um baricentro de triângulo. Começamos com a idéia de ponto material, ou seja, um ponto do plano pode ser munido de uma *massa*, que é um número real não negativo. Então, se P e Q são pontos materiais com massas respectivamente m_P e m_Q, e supondo ao menos uma delas não nula (por exemplo, $m_P \neq 0$), definimos o baricentro do sistema formado por P e Q como o ponto material G localizado no segmento PQ, e tal que

$$m_P.\overline{PG} = m_Q.\overline{QG} \ . \tag{2.1}$$

A massa de G é a soma das massas $m_P + m_Q$.

a) Analise porque a definição (2.1) deve ser consistente com alguma idéia intuitiva da Física. Por exemplo, para valer esta equação necessariamente o baricentro fica mais próximo da maior massa. Outra idéia intuitivamente simples ocorre quando as massas são iguais, ou seja, o sistema é *simétrico*. Neste caso, o baricentro é o ponto médio do segmento.

b) No caso de haver três pontos materiais P, Q e R, sobre uma mesma reta suporte, como seria determinado o baricentro ? Aqui pode-se estimular a turma a "quebrar" o problema assim: já sabemos calcular o baricentro de dois pontos. Poderíamos então calcular o baricentro de P e Q, obtendo G; e depois o baricentro de G e R, obtendo por fim um ponto material G'. Discuta com a turma se essa abordagem poderia levar a respostas diferentes caso tomássemos primeiramente os pontos P e R, ou então Q e R. Ou seja, se este baricentro de três pontos está bem definido.

c) E como seria a análise para três pontos materiais não-colineares ? Que dificuldades extras surgiriam ?

d) Voltando ao caso de pontos sobre uma única reta suporte, poderíamos definir o baricentro de um número arbitrário de pontos ? E se tivéssemos infinitos pontos, possivelmente numa distribuição contínua ? A idéia aqui é levar a turma a concluir que: (1) o baricentro de um sistema arbitrário de pontos colineares sempre será um ponto da reta suporte; (2) o baricentro de um segmento é o ponto médio deste.

e) Dispomos de uma reta r e uma coleção de n segmentos arbitrários $A_1B_1, A_2B_2, \ldots, A_nB_n$, tais que o ponto médio de cada A_iB_i pertence a r. Podemos deduzir que o baricentro do sistema formado pelos segmentos pertence a r ? E essa conclusão se modifica se o número de segmentos for infinito ?
f) Por fim analisemos o triângulo ABC. Podemos usar os ítens discutidos acima para levar a turma a deduzir que o baricentro de ABC é um ponto sobre sua mediana, qualquer que ela seja ?

2.12 Questões

Exercício 2.1. São dados dois pontos A e B e duas distancia m e n. Obtenha o lugar geométrico que dista m de A e n de B.

Exercício 2.2. Construa um triangulo ABC, dados os lados a, b e c.

Exercício 2.3. Marque num papel dois pontos A e B distantes 7 cm um do outro:
a) Determine um ponto X distante 5 cm de A e 4 cm de B. Quantas soluções tem o problema?
b) Determine um ponto Y distante 3 cm de A e 4 cm de B. Quantas soluções tem o problema?
c) Determine um ponto Z distante 2 cm de A e 3 cm de B. Quantas soluções tem o problema?

Exercício 2.4. Identifique e construa, com régua e compasso, o lugar geométrico do vértice A de um segmento AB, conhecida a posição do vértice B e o comprimento c de AB.

Exercício 2.5. São dados dois pontos B e C e uma circunferência λ. Construa um triângulo ABC, isósceles, de base BC, sabendo que o vértice A pertence a λ.

Exercício 2.6. Dado uma reta r e dois ponto A e B não pertencentes a r, usando régua e compasso, construa um círculo que passa pelos pontos A e B e tem seu centro em r.

Exercício Resolvido 2.7. Temos no plano do papel uma circunferência de centro O, e uma reta r que não a intercepta. Identifique e construa, com régua e compasso, o lugar geométrico dos pontos médios das cordas da circunferência que são paralelas a reta r.

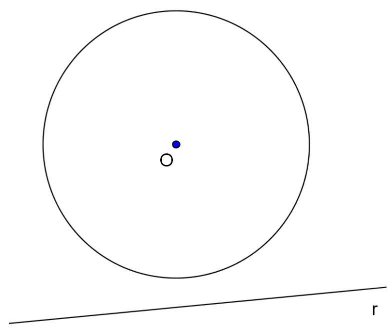

Figura 2.27: Exercício 2.7.1

1. Construa uma reta t paralela a reta r que intercepta a circunferência e determina os pontos A e B;

2. Determine o ponto médio M do segmento AB;

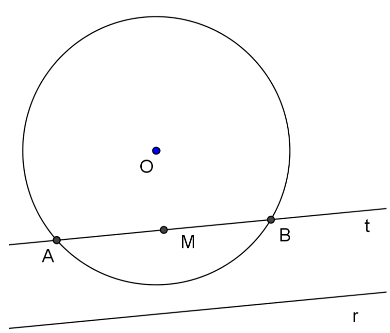

Figura 2.28: Exercício 2.7.2

3. Repita os passos 1 e 2;

4. Os pontos médio dos segmentos formam a mediatriz dos mesmos e o diâmetro da circunferência, comparando com a reta r podemos dizer que se trata de uma reta perpendicular a r.

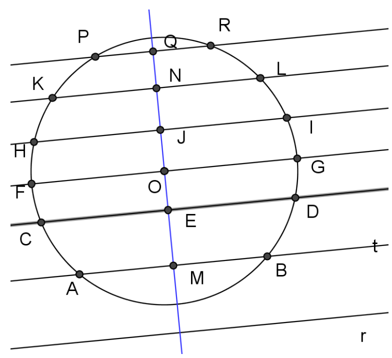

Figura 2.29: Exercício 2.7.3

Exercício 2.8. Dadas duas retas a e b concorrentes. Construa uma circunferência de raio r que seja tangente a ambas as retas.

Exercício Resolvido 2.9. São dados um ponto A, uma reta t e uma distancia r. Construa uma circunferência de raio r, que passa pelo ponto A e seja tangente a reta t.

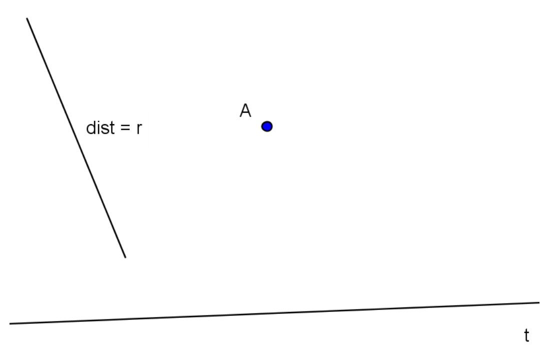

Figura 2.30: Exercício 2.9.1

1. Construa uma reta a paralela a reta t com distancia r entre ambas e que esteja no mesmo semi-plano do ponto A;

2. Com centro em A e raio r construa um arco que intercepta a reta a nos pontos O e O';

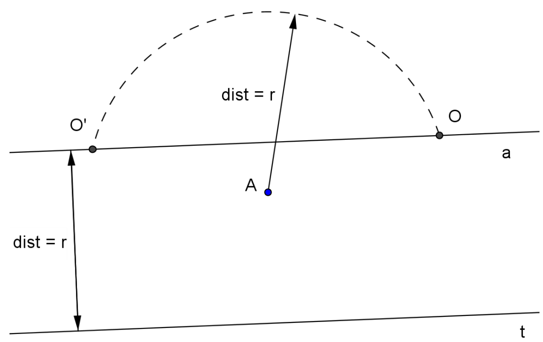

Figura 2.31: Exercício 2.9.2

3. Os pontos O e O' são os centros das circunferencias de raio r que passam por A e são tangentes a reta t

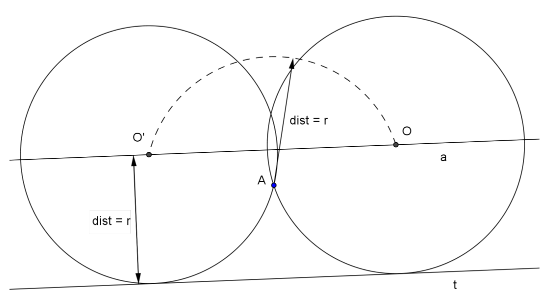

Figura 2.32: Exercício 2.9.3

Exercício 2.10. Uma circunferência de raio igual a 30 mm é tangente aos lados de um ângulo reto. Determine, graficamente, a distancia do centro da circunferência ao vértice do ângulo.

Exercício Resolvido 2.11. São dados no plano uma reta r e um ponto A, com A não pertencente a r. Mostre que o lugar geométrico dos pontos médios dos segmentos AB, quando B varia sobre r, é uma reta t equidistante de A e r.

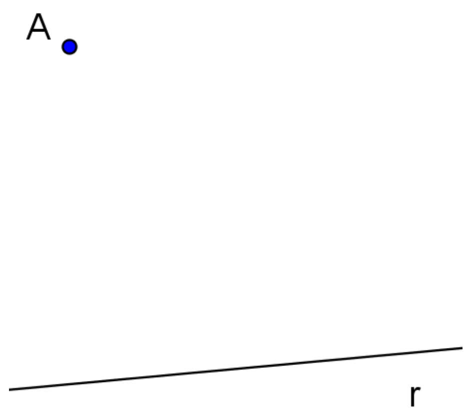

Figura 2.33: Exercício 2.11.1

Considere um segmento AB com B percentente a reta r e seu ponto médio M. Considerando um outro segmento AB' com B' não coincidente com B, e seu ponto médio N,

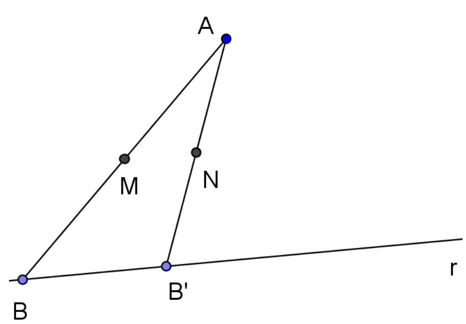

Figura 2.34: Exercício 2.11.2

Notamos que no triângulo ABB', o segmento MN é uma base média paralela ao lado BB'. Então MN está equidistante de r e A. O mesmo acontece com os outros triângulos obtidos se traçarmos outros segmentos com extremidades em A e sobre a reta r.

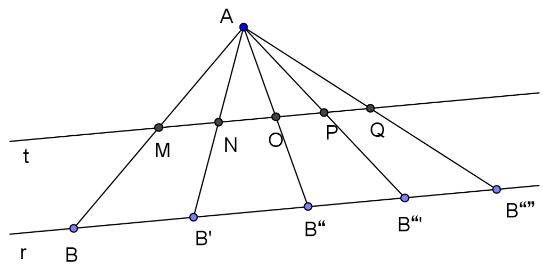

Figura 2.35: Exercício 2.11.3

Logo concluímos que estes pontos formam uma reta t paralela a r e equidistantes de A e r.

Exercício 2.12. São dadas três retas, a, b e c, concorrentes duas a duas. Construa uma circunferência tangente as retas b e c, sabendo que seu centro pertence a reta a.

Exercício 2.13. Construa circunferências de raio r, tangentes a duas retas a e b concorrentes.

Exercício 2.14. Dados dois pontos B e C e uma reta r. Explique como construir um triângulo ABC sabendo que A pertence a reta r e que $\hat{A} = 60°$.

Exercício 2.15. Quanto mede aproximadamente o raio da circunferência circunscrita a um triângulo equilátero de lado 5cm ?

Exercício 2.16. Numa certa fazenda, a área destinada ao pasto do gado tem forma triangular, de lados iguais a 5km, 6km e 7km. O proprietário pretende construir um curral num ponto equidistante dos vértices desse pasto. A que distancia aproximada de cada vértice ficará o curral?

Exercício 2.17. De um triângulo ABC, conhecemos as posições dos vértices B e C e do circuncentro O. Explique porque a posição do vértice A não é determinada.

Exercício 2.18. Construa o baricentro de um triângulo ABC equilátero de lado 6 cm.

Exercício 2.19. O baricentro de um triângulo é o encontro de suas medianas. Desenhe uma circunferência e inscreva nela o triângulo ABC. Encontre o ponto médio M do lado BC e o ponto médio N do lado AC e, em seguida, construa os segmentos AM e BN.
a) O que significam os segmentos AM e BN relativamente ao triângulo ABC?
b) Esses segmentos se interceptaram em um ponto. Chame este ponto de G. Este ponto é o baricentro ?
c) Se você mantiver fixos os vértices B e C e variando o vértice A (sempre sobre a circunferência) qual é o lugar geométrico dos baricentros G obtidos ?

Exercício 2.20. Construa o incentro de uma triângulo ABC, na qual $AB =$ 5cm, $BC =$ 6cm e $AC =$ 7cm.

Exercício 2.21. Calcule a medida do raio de uma circunferência inscrita a um triângulo ABC equilátero de lado 6 cm.

Exercício 2.22. Em um triângulo ABC conhecemos as posições dos vértices B e C e do Incentro I. Construa, com régua e compasso, o vértice A.

Exercício 2.23. Construa o ortocentro de um triângulo ABC, que tem como medidas $AB =$ 3cm, $BC =$ 4cm e $AC =$ 6cm.

Exercício Resolvido 2.24. Sabendo que o ortocentro de um triângulo qualquer é o encontro das suas alturas, construa um triângulo e encontre suas alturas. Esta é uma atividade livre; você poderá usar o que quiser de recursos do geogebra ou realiza-la com os instrumentos régua e compasso manualmente. Ao encontrar as alturas marque o seu ponto de interseção, chame este ponto de ponto O. Movimente este ponto e responda as perguntas abaixo:

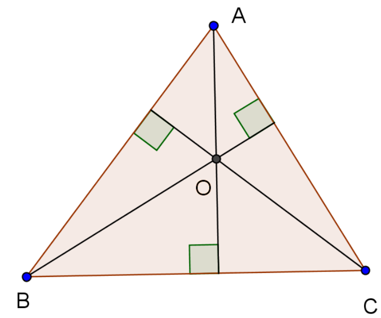

Figura 2.36: Exercício 2.24.1

a)Ao movimentar o ponto O, o que aconteceu com o seu desenho? Por quê?

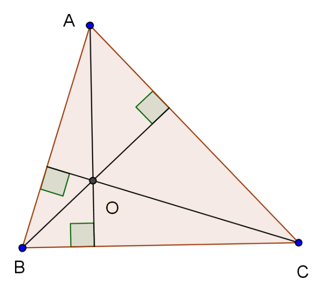

Figura 2.37: Exercício 2.24.2

Ao movimentarmos o ponto O, o triângulo irá modificar seus lados, pois o encontro das alturas está relacionado com a posição dos vértices do triângulo.

b)O seu ponto pode estar fora ou dentro do triângulo? Por quê?
Dependendo do triângulo que possuo, o ponto O será interno (Acutângulo), pertencente ao vértice (Retângulo) ou estar fora do triângulo (Obtusângulo).

c)Quando o ponto O está fora do triângulo que tipo de triângulo eu tenho?

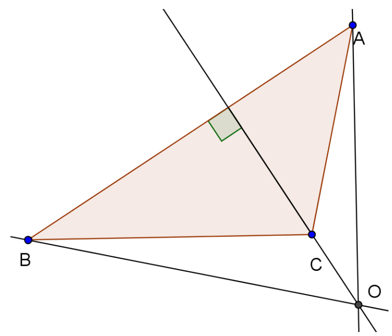

Figura 2.38: Exercício 2.24.3

O triângulo que temos é chamado de Obtusângulo.

Exercício 2.25. De um triângulo ABC conhecemos as posições dos vértices B e C e do ortocentro H. Explique como construir com régua e compasso o vértice A.

Capítulo 3

Cônicas

Os lugares geométricos discutidos no capítulo 2 possuem a característica de serem retas ou segmentos de retas, e círculos ou arcos de círculos. Tais objetos são desenhados com os intrumentos régua e compasso, através de um número finito de passos, em cada qual obtendo-se um número finito de pontos intermediários.

Neste capítulo apresentamos lugares geométricos que não podem ser construídos de uma só vez (ou seja, em um número finito de passos) usando tais instrumentos. É necessário antes introduzir o conceito geométrico de *construtibilidade*.

Se $A \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto de pontos no plano podemos considerar todas as retas que passam por dois pontos de A e todas as circunferências que possuem centro num ponto de A e raio igual à distância entre dois pontos de A. As interseções entre as retas e circunferências assim obtidas constituem o conjunto A'. E temos $A' \subset A$.

Repetindo o processo partindo-se de A', obtemos $A'' = (A')'$, e sucessivamente. Um ponto é *construtível a partir de* A se ele pertencer a algum dos conjuntos na sequência $A, A', A'', \ldots$. Em geral, um conjunto $B \subset \mathbb{R}^2$ é construtível a partir de A se cada ponto de B for costrutível a partir de A.

Veremos que as curvas cônicas são construtíveis, mas cada um de seus pontos é obtido separadamente a partir dos parâmetros definidores das respectivas curvas (tais como distância focal, diretriz, comprimento de semi-eixos, etc.). Assim os pontos não são obtidos simultaneamente. É possível encontrar tantos pontos quanto precisamos, mas a construção é fragmentada, diferente dos outros lugares geométricos anteriormente estudados. É nesse aspecto também que aplicativos computacionais, como Geogebra, podem ser bastante úteis.

Iniciamos com uma introdução histórica ao conceito das curvas cônicas.

3.1 Histórico

De acordo com Eves, Apolônio de Perga usou pela primeira vez os termos que usamos hoje: elipse, hipérbole e parábola, (262 a.C. a 190 a.C.), mas seu reconhecimento neste assunto foi obtido na obra "Secções Cônicas", composta por 400 proposições distribuídas em oito livros, superando todos os trabalhos desenvolvidos anteriormente. Graças a este grandioso feito deram-lhe o cognome de "O grande geômetra".

Muito tempo depois, com a criação da Geometria Analítica pelo francês René Descartes (1596 a 1662), as cônicas passaram a ser reconhecidas a partir de suas equações. A Geometria Analítica tem como ideia central a representação de pontos do espaço por meio de coordenadas. Um grande número de propriedades geométricas faz das curvas cônicas um instrumento adequado para diversas aplicações práticas, dando assim uma relevância ainda maior para este assunto.

As cônicas são obtidas pela intersecção de um plano α sobre um sólido de revolução conhecido como cone; devido a este objeto estas curvas receberam o nome de cônicas.

A abordagem que faremos para as cônicas, contudo, é a de lugar geométrico, e por isso empregaremos as definições que utilizam os conceitos de somas ou diferenças das distâncias a pontos e retas fixos.

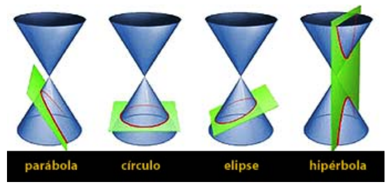

Figura 3.1: Cônicas

3.2 Elipse

Chamamos de elipse ao lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a soma das distancias até dois pontos fixos, chamados focos, é constante. É conveniente denotar essa constante por $2a$. Denotando por S a elipse quetem focos F_1 e F_2 podemos escrever

$$S = \{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

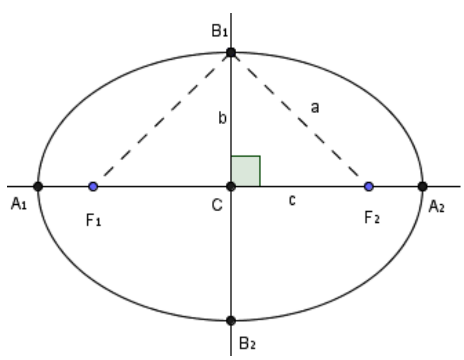

Figura 3.2: Elipse 1

Com base na figura acima definimos os principais elementos da elipse: eixo maior A_1A_2 de comprimento $2a$, eixo menor B_1B_2 de comprimento $2b$, distância focal $d(F_1, F_2) = 2c$ e centro da elipse C. Em uma elipse, a medida do semieixo maior (a), a medida do semieixo menor (b) e a metade da distancia focal (c), satisfazem a relação:

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Construção. 1ª Maneira:

1. Escolha os dois pontos que serão os focos F_1 e F_2. Assuma que o eixo maior seja, por exemplo, $2a = 5cm$, o qual deve superar a distância focal $d(F_1, F_2)$. Tendo F_1 como centro, trace circunferências concêntricas com raios $1, 2, 3, 4$ centímetros. Faça o mesmo com o ponto F_2.

2. Marque o ponto de intersecção da circunferência de centro em F_1 e raio 1 com a circunferência de centro F_2 e raio 4. Repita o procedimento escolhendo raios tais que a soma resulte em 5 cm.

3. Trace a curva unindo os pontos marcados.

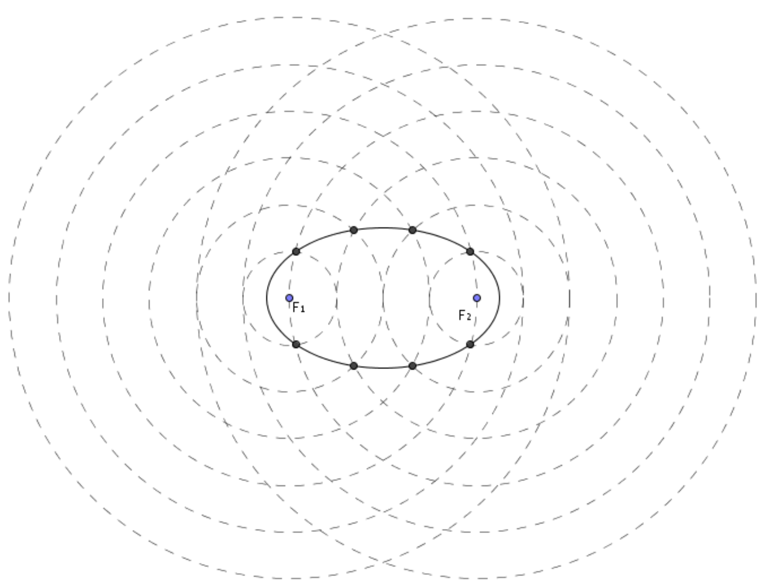

Figura 3.3: Elipse 2

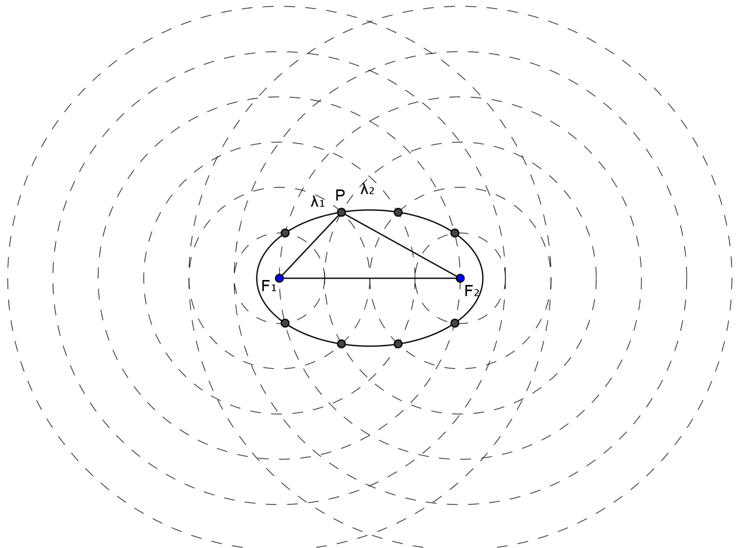

Figura 3.4: Elipse 3

Demonstração. Observando a figura acima, o ponto P pertence as circunferências λ_1 e λ_2, a soma das distancias a F_1 e a F_2 será a medida do raio de λ_1 mais o raio de λ_2, logo este valor sempre será constante se escolhermos circunferências com raios que somados resultem na constante $2a$.

Construção. 2ª Maneira:

1. Trace uma circunferência com centro em F_1 e raio $2a$;

2. Partindo de um ponto B da circunferência, construa os segmentos de retas BF_1 e BF_2;

3. Determine a mediatriz do segmento BF_2, esta interceptará o segmento BF_1 em P; O ponto P estará na elipse;

4. Refaça os passos 4 e 5 mudando o ponto B. Os pontos P encontrados nas intersecções são pontos pertencentes a elipse.

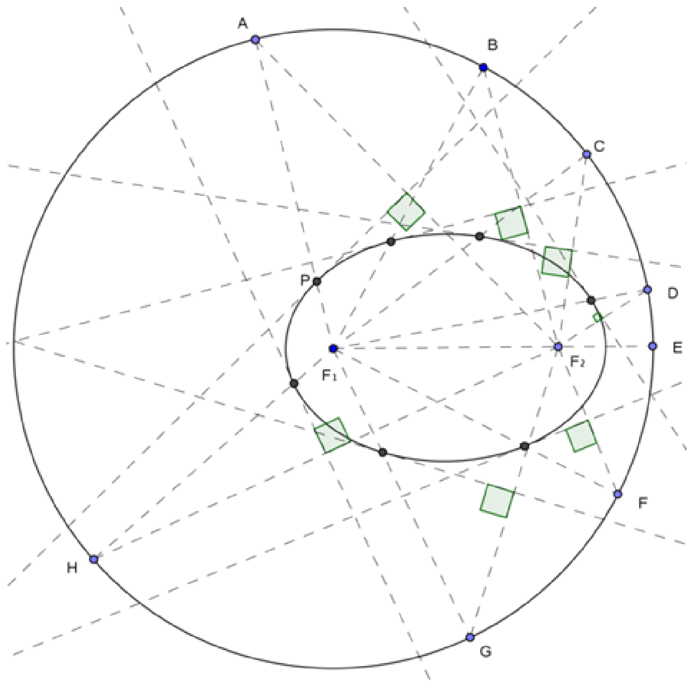

Figura 3.5: Elipse 4

Demonstração. Usando a construção abaixo, o segmento F_1B tem comprimento igual a $2a$, que é o raio da circunferência. Temos que $\overline{F_1B} = \overline{F_1P} + \overline{PB}$. Pela propriedade da mediatriz, o ponto P está equidistante dos extremos B e F_2, logo os segmentos PB e PF_2 são congruentes. Assim, $2a = \overline{F_1B} = \overline{F_1P} + \overline{PB} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$, demonstrando que o ponto P construído está sobre a elipse com focos e eixo maior propostos. Nota-se que com este procedimento, podemos construir a intersecção da elipse com qualquer reta que passe por um de seus focos.

Outra forma simples de desenhar a elipse é fixar as extremidades de um fio (que deve ter um comprimento igual a $2a$, maior que a distância entre os dois focos) nos focos F_1 e F_2 e mantendo-o esticado, traçar com lápis uma linha, formando a elipse.

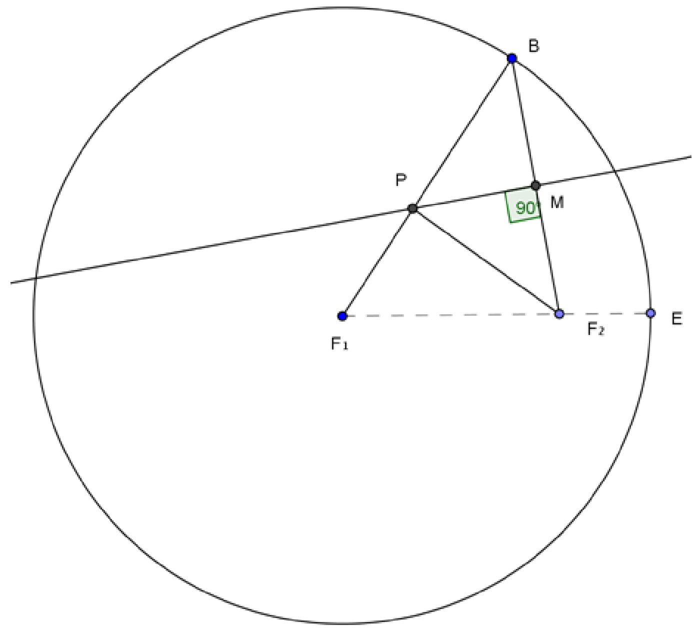

Figura 3.6: Elipse 5

3.2.1 Equações canônicas de uma elipse

Sabendo que elipse é o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais a soma das distâncias até dois pontos fixos é constante, podemos deduzir uma equação algébrica que represente este lugar geométrico. A demonstração terá como base o centro da elipse fixo no centro do sistema cartesiano $(0; 0)$ e os focos $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$.

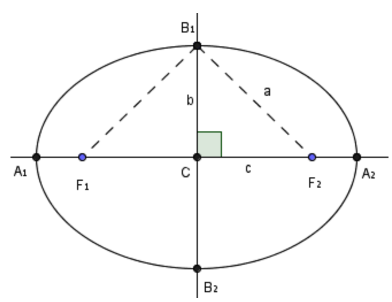

Figura 3.7: Elipse 6

Lembrando que designamos por S a elipse de eixo maior de comprimento $2a$, eixo menor de comprimento $2b$ e distância focal $2c$.

$$\begin{aligned}
P(x;y) \in S \Leftrightarrow d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \\
\Rightarrow \ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Quadrando ambos os lados e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2$$

o que fornece, após cancelar alguns termos,

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ \Rightarrow \ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \ = a^2 - cx$$

Quadrando novamente ambos os lados e desenvolvendo:

$$a^2(x-c)^2 + a^2y^2 = (a^2 - cx)^2$$

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$\Rightarrow \ b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Dividindo por a^2b^2, resulta na equação reduzida da elipse S:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

3.3 Hipérbole

É o lugar geométrico dos pontos no plano tais que é constante o valor absoluto da diferença das distâncias de cada um desses pontos a dois pontos fixos (focos da hipérbole). Esta curva é constituída por dois "braços" ou"ramos".

$$H = \{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

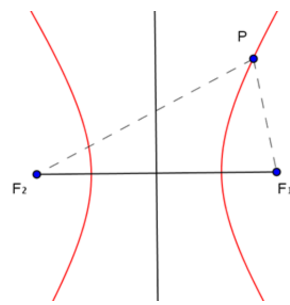

Figura 3.8: Hipérbole 1

Tendo como base a figura abaixo destacamos os principais elementos da hipérbole. Temos o eixo real A_1A_2 de comprimento $2a$, o eixo imaginário B_1B_2 de comprimento $2b$, a distância focal de comprimento $d(F_1, F_2) = 2c$ e o centro da hipérbole C. É fácil verficar a relação $c^2 = b^2 + a^2$, usando o Teorema de Pitágoras.

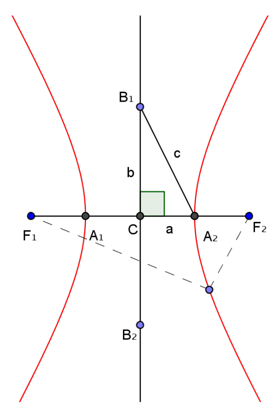

Figura 3.9: Hipérbole 2

Construção. 1ª Maneira:

1. Escolha dois pontos sobre o plano F_1 e F_2. Tendo F_1 como centro, trace circunferências concêntricas com raios variando de uma unidade, por exemplo, $1, 2, 3, \ldots, 6$cm. Faça o mesmo com o ponto F_2.

2. Escolhendo $2a = 2cm$, marque o ponto de intersecção da circunferência de centro em F_1 e raio 1 com a circunferência de centro em F_2 e raio 3, definindo um ponto P da hipérbole. Repare que a diferença dos dois raios deve ser igual ao comprimento do eixo real.

3. Repita os procedimentos acima para construir tantos pontos quantos desejados desta hipérbole.

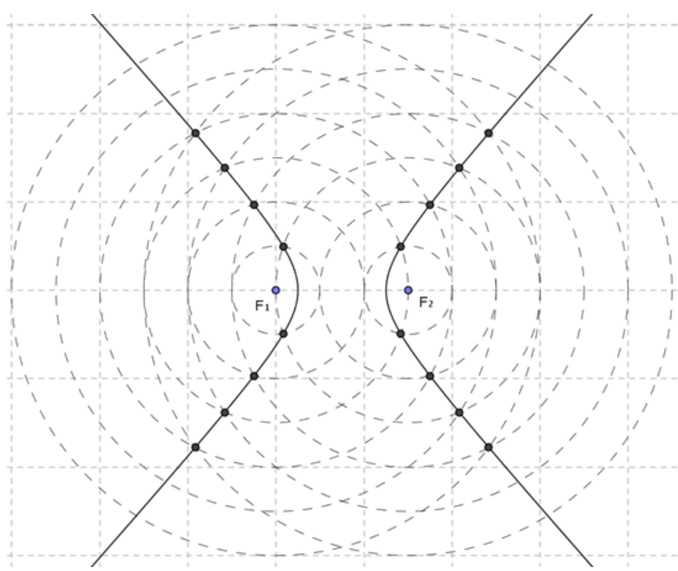

Figura 3.10: Hipérbole 3

Demonstração. De acordo com a figura abaixo, o ponto P pertence às circunferências λ_1 e λ_2. A diferença das distancias de P a F_1 e a F_2 será a medida do raio de λ_1 menos o raio de λ_2, logo este valor será constante se escolhermos circunferências com raios cujas diferenças resultem na constante $2a$.

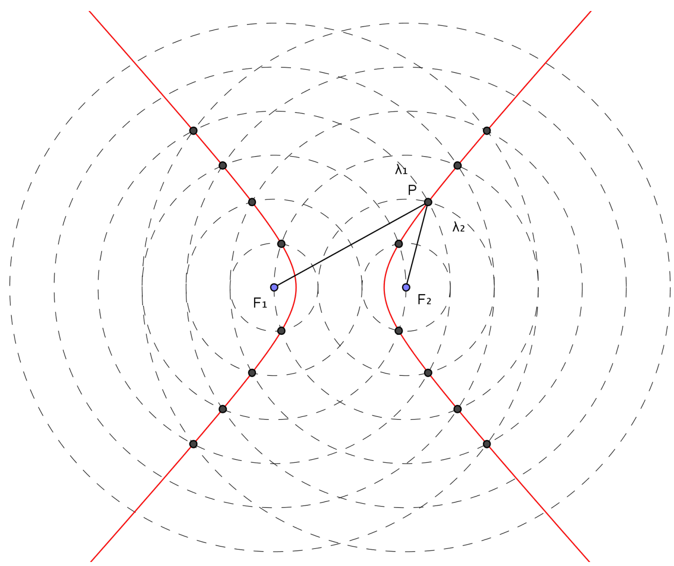

Figura 3.11: Hipérbole 4

Construção. 2ª Maneira:

1. Desenhe os focos F_1 e F_2 separados pela distância focal $2c$;
2. Trace uma circunferência de centro F_1 e raio $2a$;
3. Partindo de um ponto A da circunferência, faça segmentos de retas partindo deste até os pontos F_1 e F_2, tendo assim os segmentos AF_1 e AF_2;
4. Determine a mediatriz do segmento AF_2, e este interceptará o segmento AF_1 em P;
5. Refaça estes passos sempre partindo de um ponto qualquer da circunferência. Os pontos encontrados nas intersecções são pontos pertencentes à hipérbole.

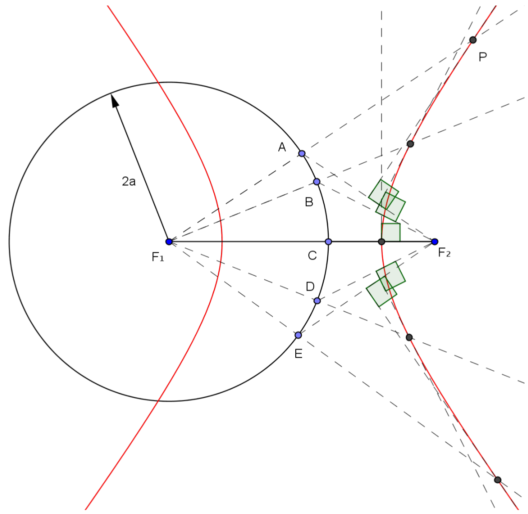

Figura 3.12: Hipérbole 5

Observação 3.1. Para encontrar o outro "braço" da hipérbole, basta repetir todos os passos agora com centro da circunferência em F_2.

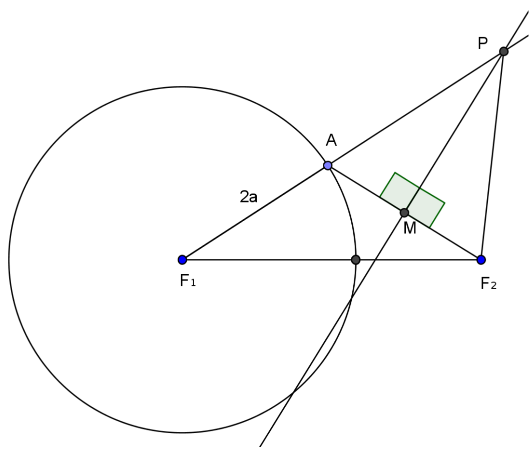

Figura 3.13: Hipérbole 6

Demonstração. Usando a construção acima, o segmento F_1A mede o raio da circunferência que é $2a$. Note que $\overline{F_1P} = \overline{F_1A} + \overline{AP}$, e o ponto P é equidistante dos extremos A e F_2, uma vez que ele é o ponto de intersecção da mediatriz do segmento AF_2. Logo os segmentos AP e PF_2 são congruentes. Então

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = d(P,A) + d(A,F_1) - d(P,F_2) = 2a.$$

Atividade Proposta 3.2. A forma alternativa de construção das cônicas apresentadas nos casos acima sugere um estudo da *transição* entre elas. Para essa atividade é necessário o uso do Geogebra. Trace uma reta r e marque o foco F_1. Com centro em F_1 construa uma circunferência de raio $2a$ fixo. Trace uma reta m que passa por F_1 e intercepta a circunferência no ponto A. Escolha um ponto $F_2 \in r$ e trace a mediatriz do segmento F_2A, determinando o ponto P na interseção com a reta m.

1. Com F_2 fixo estude o que ocorre com P quando se varia o ponto A. Observe os casos em que F_2 é interior e exterior à circunferência.

2. Agora fixe o ponto A. O que ocorre com P quando F_2 se movimenta para o interior ou exterior da circunferência ?

3. O que ocorre quando F_2 está sobre a circunferência ?

4. Existe algum ponto F_2 para o qual o ponto P não ocorre (mediatriz é paralela a m) ? Qual o significado deste ponto ?

3.3.1 Equações canônicas da Hipérbole

Vamos deduzir uma equação reduzida (canônica) para a propriedade definidora da hipérbole H. Tomemos um sistema cartesiano ortogonal tal que F_1F_2 esteja contida no eixo $0x$ e C seja a origem. Logo A_1A_2, eixo real, terá medida 2a e os focos terão coordenadas $F_1(-c; 0)$ e $F_2(c; 0)$.

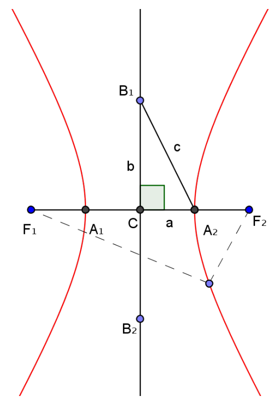

Figura 3.14: Hipérbole 7

Então

$$P(x; y) \in H \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a$$

Quadrando ambos os lados e desenvolvendo, temos:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

Quadrando novamente ambos os lados:

$$(cx - a^2)^2 = a^2(x-c)^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$\Rightarrow (c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \ .$$

Chamando $c^2 - a^2 = b^2$, assim $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Dividindo por a^2b^2, resulta na equação reduzida:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

3.4 Parábola

Dado uma reta d e um ponto F não pertencente a d. A parábola de diretriz d e foco F é o lugar geométrico dos pontos do plano que estão equidistantes de F e de d. Equivalentemente, é o lugar geométrico dos centros P das circunferências que passam por F e são tangentes a d.

$$Q = \{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(P, F) = d(P, d)\}.$$

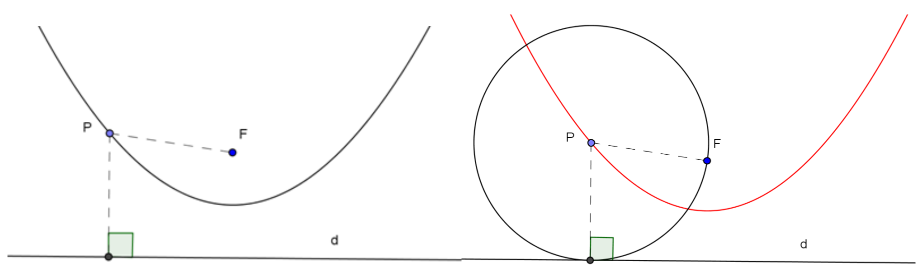

Figura 3.15: Parábola 1

Tendo como base a figura abaixo, destacamos os principais elementos da parábola além de sua diretriz e foco: o eixo de simetria, o vértice e o parâmetro $\overline{FH}$.

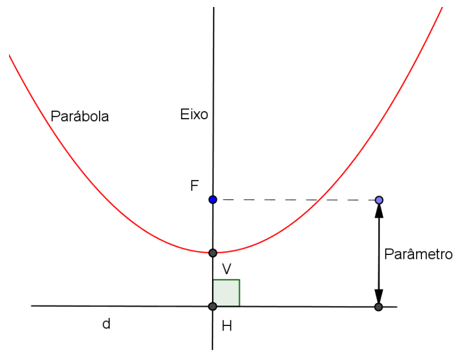

Figura 3.16: Parábola 2

Construção. 1ª Maneira:

1. Dados o foco F e a diretriz d, trace a reta perpendicular a diretriz e que passa pelo foco (eixo de simetria);

2. Trace uma reta d' paralela a d e com distancia h_1 desta, no mesmo semiplano de F. A reta d' intercepta o eixo de simetria em A;

3. Com o compasso, faça um arco que tem como raio h_1 e centro em F. Este arco intercepta d' em dois pontos, os quais pertencem a parábola.

4. Repita os passos 3 a 5, variando a distancia das retas paralelas a diretriz d. Assim construímos uma quantidade arbitrária de pontos pertencentes a parábola.

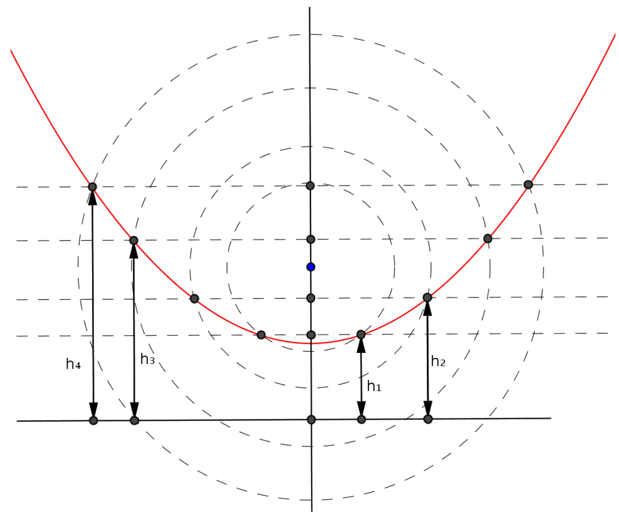

Figura 3.17: Parábola 3

Demonstração. A reta d' dista h_1 da diretriz d. Como a circunferência de centro em F tem raio h_1, os pontos P e P' que são a interseção de d' com esta circunferência estarão equidistantes de d e de F com a distância h_1. Portanto P e P' satisfazem a definição da parábola com foco F e diretriz d.

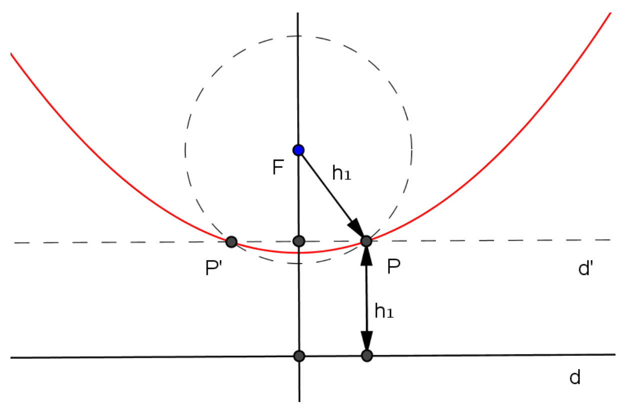

Figura 3.18: Parábola 4

Construção. 2ª Maneira:

1. Dados a reta d e o foco F, traçamos um segmento ligando F a um ponto $X \in d$ arbitrário;

2. Traçamos a mediatriz do segmento XF e uma reta r perpendicular a diretriz em X;

3. A intersecção da reta r com a mediatriz do segmento XF gera um ponto P na parábola.

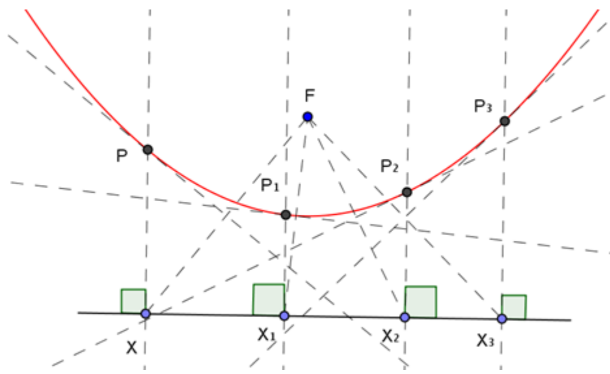

Figura 3.19: Parábola 5

Demonstração. Cada ponto da mediatriz do segmento XF equidista dos pontos X e F. Como P está na mediatriz e está em r, vemos que PX é ortogonal a d, logo $d(P, X) = d(P, r) = d(P, F)$.

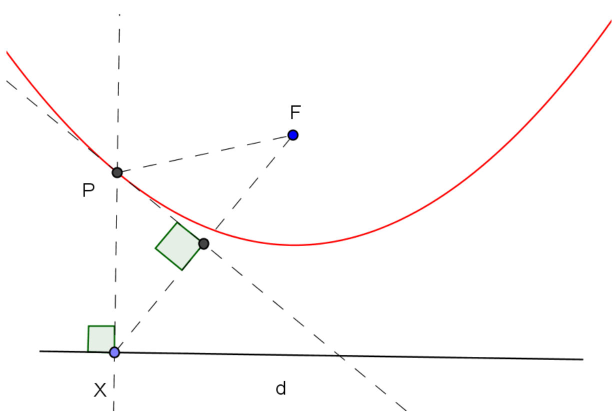

Figura 3.20: Parábola 6

3.4.1 Equações canônicas da Parábola

Utilizando a propriedade definidora da parábola de diretriz d e foco F podemos deduzir uma equação cartesiana canônica que relaciona os pontos que satisfazem esta propriedade.

Dados os pontos $F(0;p)$, $P(x;y)$ e a diretriz d paralela ao eixo x com equação $y = -p$, a distancia $d(F,d) = 2p$. Para que P pertença a parábola, temos:

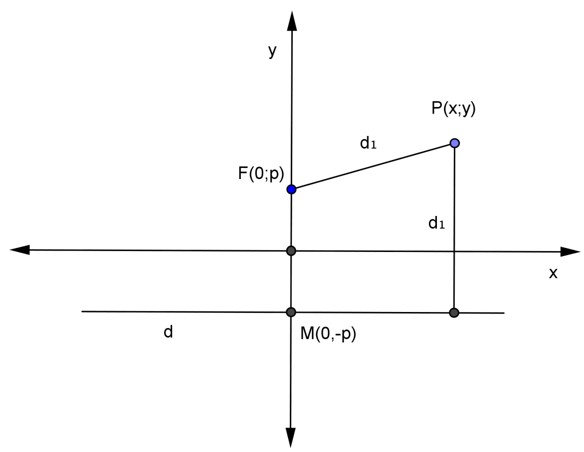

Figura 3.21: Parábola 7

$$d(P,F) = d(P,d)$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(y-(-p))^2}.$$

Quadrando ambos os lados, temos:

$$x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2yp + p^2 = y^2 + 2yp + p^2$$
$$4yp = x^2$$
$$\Rightarrow y = \frac{1}{4p}x^2 \ .$$

3.5 Questões

Exercício 3.1. Determine os vértices de uma elipse, conhecendo os focos e um ponto M pertencente a ela.

Exercício Resolvido 3.2. Os diâmetros maior e menor de uma elipse medem respectivamente $78mm$ $(2a)$ e $72mm$ $(2b)$. Determine a distância focal geometricamente.

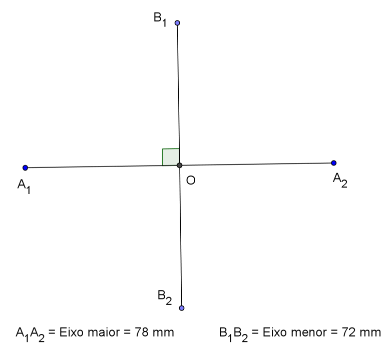

Figura 3.22: Exercício 3.2.1

Sabemos que $\overline{B_1F_1}+\overline{B_1F_2} = 2a$, F_1 e F_2 focos da elípse, então podemos perceber que $\overline{B_1F_1} = \overline{B_1F_2} = a$ pois B_1B_2 é mediatriz do segmento A_1A_2. Logo basta traçar um arco com centro em B_1 e raio $a = 39mm$ que encontraremos as posições dos focos F_1 e F_2.

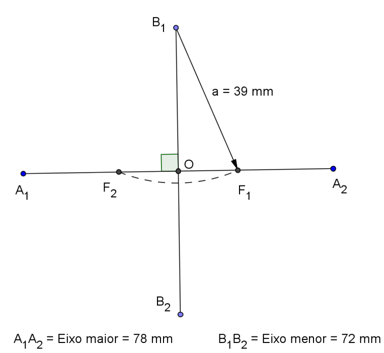

Figura 3.23: Exercício 3.2.2

Exercício 3.3. Construa por pontos uma elipse que possui distância focal de 5 cm e eixo maior igual a 7 cm.

Exercício Resolvido 3.4. Construa os diâmetros principal e imaginário de uma hipérbole, dado a distância focal de 5cm e um ponto M pertencente a ela.

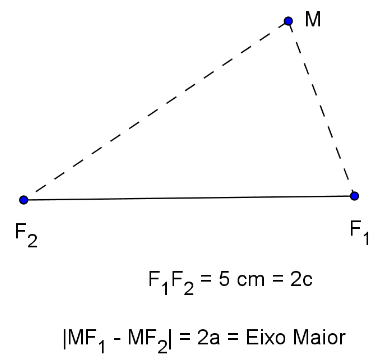

Figura 3.24: Exercício 3.4.1

1. Construa a distância $F_1F_2 = 2a$ transportando as medidas dos segmentos MF_1 e MF_2 em uma reta;

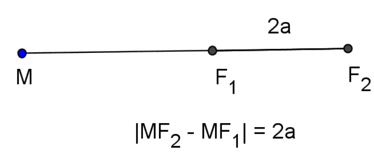

Figura 3.25: Exercício 3.4.2

2. Traçamos por F_1F_2 o eixo e e determinamos a mediatriz de F_1F_2 eixo e';

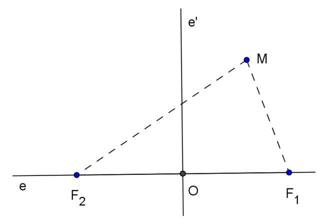

Figura 3.26: Exercício 3.4.3

3. Com centro em O e raio a traçamos um arco que interceptará o eixo e em A_1 e A_2;

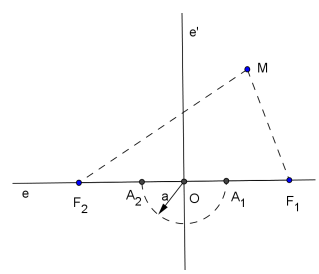

Figura 3.27: Exercício 3.4.4

4. Com centro em A_1 ou A_2 e raio $c = 2,5cm$ trace um arco que intercepta o eixo e' em B_1 e B_2.

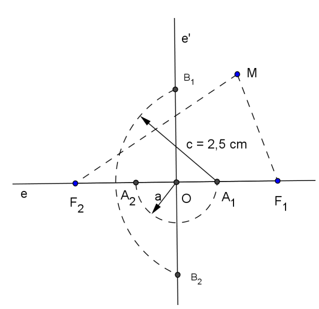

Figura 3.28: Exercício 3.4.5

Os segmentos A_1A_2 e B_1B_2 são a solução do problema.

Exercício 3.5. Determine graficamente o diâmetro imaginário de uma hipérbole em que o diâmetro principal é $2a = 30$mm e a distância focal é $2c = 78$mm . Qual o comprimento do diâmetro imaginário?

Exercício 3.6. Demonstre que se um ponto P pertence a uma hipérbole, o seu simétrico P' em relação ao eixo real a também pertence a hipérbole.

Exercício 3.7. Prove que: "Toda reta que passa pelo centro O de uma elípse, intercepta a mesma nos pontos M e M', tais que O é ponto médio do segmento MM'".

Exercício 3.8. De uma hipérbole são dados um foco e dois de seus pontos M e M' simétricos em relação ao eixo imaginário. Construa os diâmetros principal e secundário. Com estas informações é possível obter a hipérbole graficamente pela construção por pontos?

Exercício 3.9. Construa a diretriz de uma parábola da qual são conhecidos o foco, um ponto M e a direção horizontal da diretriz.

Exercício 3.10. Obtenha o foco de uma parábola da qual são conhecidos dois pontos M e M' simétricos em relação ao eixo e que pertencem a parábola.

Exercício 3.11. Construa uma parábola por ponto sabendo que a distância do ponto A, pertencente a parábola, até o foco F é igual a 3cm.

Exercício 3.12. Uma parábola tem parâmetro $p = 20$mm. Uma reta s passa pelo vértice D da mesma formando com a diretriz um ângulo de $45°$, e intercepta a parábola num segundo ponto X. Determine matematicamente e graficamente a distância do ponto X ao foco da parabola.

Capítulo 4

Explorando Curvas

4.1 A Oval de Cassini

Considere o problema: Qual o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais o produto das distâncias até dois pontos fixos é constante?

Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) foi um astrônomo e matemático italiano que, nas suas tentativas de compreender o movimento dos corpos celestes apresentou estranhas curvas como alternativas às trajetórias elípticas de Kepler (1571-1630). A resolução deste problema gera equações que quando representadas graficamente apresentam curvas que ficaram conhecidas como ovais de Cassini, mesmo que muitas vezes não apresentem aspecto de ovais. Este problema foi uma suposição de Cassini para explicar o movimento orbital em torno de dois focos.

Considere o diagrama a seguir:

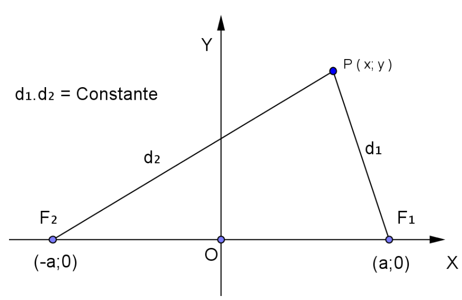

Figura 4.1: Oval de Cassini 1

No diagrama, os pontos $F_2(-a;0)$ e $F_1(a;0)$ são fixados ao longo do eixo Ox, simetricamente em relação a origem O. Os mesmos são os focos da curva que queremos equacionar. Considere o ponto P móvel em relação à origem O. Suas coordenadas cartesianas são $(x;y)$; d_1 é a distância de P ao foco F_1 e d_2 é a distância de P ao foco F_2. O padrão de movimento de P é tal que $d_1.d_2 = k$, onde $k > 0$ é fixo. Nestas condições, qual a equação que descreve a trajetória de P ?

Definindo como S o conjunto dos pontos que satisfazem o lugar geometrico em questão, temos:

$$\begin{aligned} P(x;y) \in S &\Leftrightarrow d(P,F_1).d(P,F_2) = k \\ \sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2}.\sqrt{(x-(-a))^2+(y-0)^2} &= k \end{aligned}$$

Quadrando ambos os lados e desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} &[(x-a)^2+y^2].[(x+a)^2+y^2] = k^2 \\ &\quad \Rightarrow (x-a)^2.(x+a)^2 + y^2[(x-a)^2+(x+a)^2] + y^4 = k^2 \\ &\quad \Rightarrow (x^2-2xa+a^2).(x^2+2xa+a^2) + y^2[(x^2-2xa+a^2)+ \\ &\qquad\quad + (x^2+2xa+a^2)] + y^4 = k^2 \ . \end{aligned}$$

Fazendo as distributivas e cancelando alguns termos obtemos

$$\begin{aligned} &(x^4+2x^3a+x^2a^2-2x^3a-4x^2a^2-2xa^3+x^2a^2+2xa^3+a^4)+ \\ &\qquad + y^2(2x^2+2a^2) + y^4 = k^2 \\ &\qquad\Rightarrow x^4 - 2x^2a^2 + a^4 + 2x^2y^2 + 2a^2y^2 + y^4 = k^2 \ . \end{aligned}$$

Reagrupando, resulta na equação geral do lugar geométrico procurado:

$$(x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2-x^2) = k^2 - a^4 \ . \tag{4.1}$$

Usando o software geogebra, serão apresentadas três situações diferentes da equação (4.1):

Caso 1) $k > a^2$

O trajeto de P se assemelha a um “biscoito”, desde que a diferença $k^2 - a^4$ não seja muito grande.

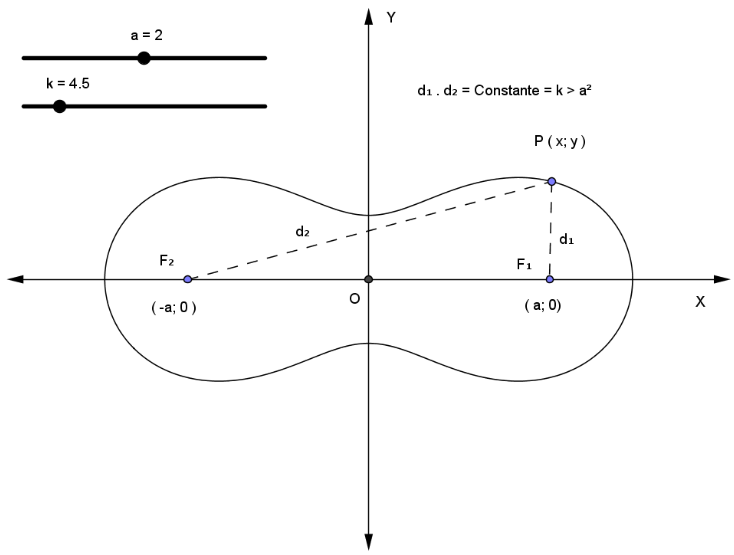

Figura 4.2: Oval de Cassini 2

Quando o produto $d_1.d_2 = k > a^2$ crescer gradualmente tendendo para o infinito (considerado em cada caso particular, pois k é uma constante), ou seja, quando $k^2 - a^4 > 0$ aumentar cada vez mais, então o gráfico de “biscoito”, tenderá para uma oval e desta para uma forma circular.

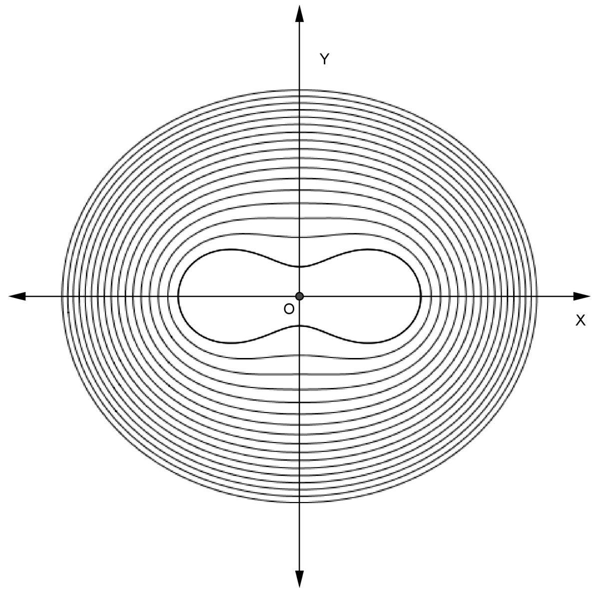

Figura 4.3: Oval de Cassini 3

Caso 2) $k = a^2$

Aqui o trajeto de P se assemelha a um "oito deitado".

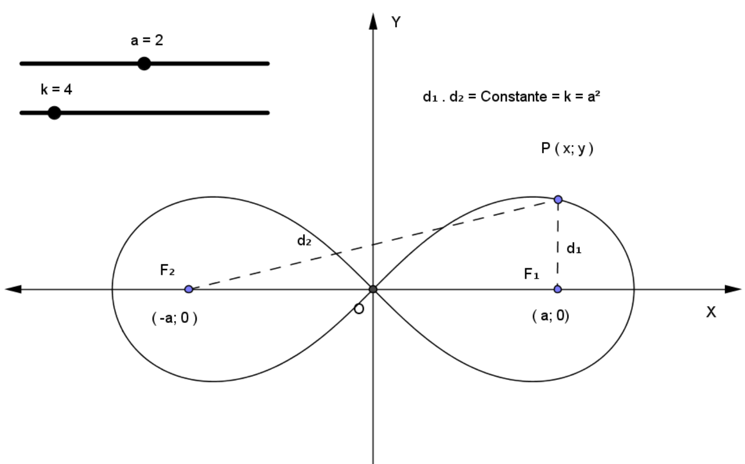

Figura 4.4: Oval de Cassini 4

Caso 3) $k < a^2$

Aqui ocorre um curioso fenômeno geométrico. É como se a origem cortasse o "oito deitado" gerado no caso 2 ($k = a^2$) dividindo-o em duas partes simétricas em relação ao eixo Oy. Cada parte tem um aspecto oval. E também é como se o ponto P tivesse um reflexo de sua trajetória do lado esquerdo. De fato, cada ponto da parte do gráfico da esquerda também obedece a lei do produto $d_1.d_2 = k < a^2$.

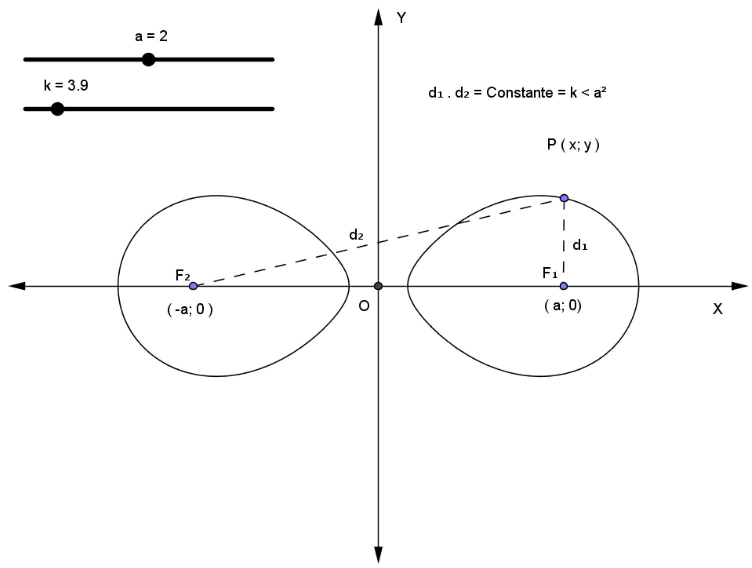

Figura 4.5: Oval de Cassini 5

Quando o produto $d_1.d_2 = k$ tender para zero, então os aspectos ovais se retrairão, um para a esquerda e o outro para a direita, onde cada um diminuirá de tamanho, ficando cada vez mais parecido com um círculo cujo centro é o seu respectivo foco.

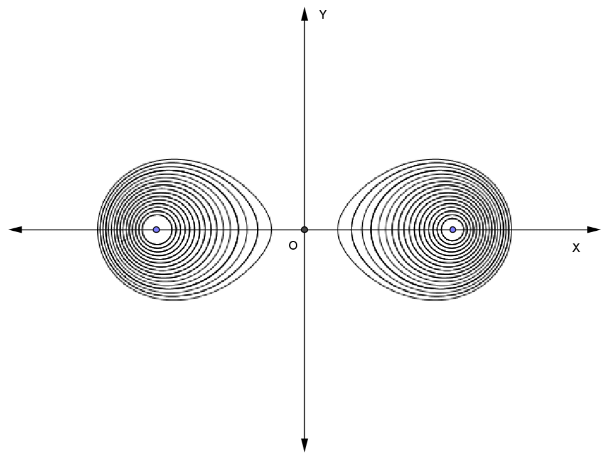

Figura 4.6: Oval de Cassini 6

Podemos perceber que existem variados “tipos” de lugares geométricos já pré estabelecidos, mas nada impede que possamos através da curiosidade Matemática explorar novos lugares geométricos, pois esta é a beleza da Matemática, a curiosidade, a busca de inovações e nunca podemos perder este foco, já que Matemática é sustentada por estas grandes idéias de “curiosos”.

Atividade Proposta 4.1. Usando algum software de geometria dinâmica (Geogebra, Cabri-Geometré,...) construa uma oval de Cassini e explore as situções mostradas acima, variando os valores de k e a.

Atividade Proposta 4.2. Agora iremos construir uma oval de Cassini com régua e compasso. O ponto importante aqui é entender como realizar *graficamente* uma divisão.

a) Considere três segmentos no plano de comprimentos u, v e u'. Usando o Teorema de Tales explique como construir uma quarto segmento de comprimento v', e tal que $u'.v' = u.v$.

b) Agora se F_1, F_2 são dois pontos do plano e R é um retângulo de lados u, v, de sorte que sua área é $k = uv$, explique como construir pontos que distam d_1 de F_1 e $d_2 = k/d_1$ de F_2. Os valores de $d_1 > 0$ são escolhidos arbitrariamente.

4.2 O Círculo de Apolônio

Recapitulamos alguns lugares geométricos que são construídos *a partir de* dois pontos fixos (F_1 e F_2) e um escalar positivo k. Para que o ponto P esteja nesses lugares geométricos deve ser:

- $d(P, F_1) + d(P, F_2) = k \Longrightarrow$ Elípse;
- $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k \Longrightarrow$ Hipérbole;
- $d(P, F_1).d(P, F_2) = k \Longrightarrow$ Oval de Cassini;

Analisando os lugares geométricos acima vemos que são todos definidos de forma análoga, diferindo entre eles apenas o ser a adição, a subtração ou a multiplicação a operação aritmética utilizada. Isso nos induz a definir um lugar geométrico nesses mesmos termos, mas utilizando a operação de divisão.

O **Círculo de Apolônio** Γ é definido como o lugar geométrico dos pontos do plano para os quais o quociente entre as distâncias a dois pontos fixos é constante,

$$P \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; \frac{d(P, F_1)}{d(P, F_2)} = k.$$

Segundo Eves, Apolônio de Perga era conhecido como o grande geômetra por seus contemporâneos, é considerado pelos historiadores modernos da Matemática como um dos três grandes matemáticos da Grécia Antiga, que também incluem Euclides (300 a.C.) e Arquimedes (287a.C - 190 a.C.). Entre seus trabalhos encontra-se o importante tratado "As Cônicas", obra-prima da Geometria clássica. Nesse tratado, Apolônio demonstra que as cônicas: Parábola, a Hipérbole e a Elípse, são o resultado da intersecção do plano com o cone reto ou oblíquo.

Considere o diagrama cartesiano abaixo:

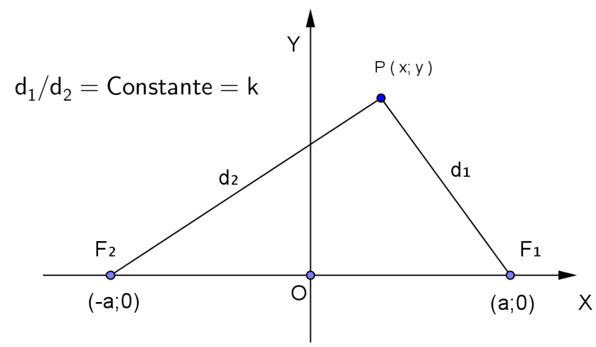

Figura 4.7: Círculo de Apolônio 1

No diagrama, os pontos $F_2(-a;0)$ e $F_1(a;0)$ são fixados ao longo do eixo Ox, simetricamente em relação a origem O. Os mesmos são os focos da curva que queremos equacionar. Considere o ponto P móvel em relação à origem O. Sua coordenada cartesiana é $(x;y)$; d_1 é a distância de P ao foco F_1 e d_2 é a distância de P ao foco F_2. O padrão de movimento de P é tal que $\frac{d(P,F_1)}{d(P,F_2)} = k$. Nestas condições, qual a equação que descreve a trajetória de P?

$$P(x;y) \in \Gamma \Leftrightarrow \frac{d(P,F_1)}{d(P,F_2)} = k$$

$$\sqrt{\frac{(x-a)^2 + (y-0)^2}{(x-(-a))^2 + (y-0)^2}} = k$$

Quadrando ambos os lados e desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned} & \frac{(x-a)^2 + (y-0)^2}{(x-(-a))^2 + (y-0)^2} = k^2 \\ & \Rightarrow\ (x-a)^2 + y^2 = k^2.[(x+a)^2 + y^2] \\ & \Rightarrow\ x^2 - 2xa + a^2 + y^2 = k^2(x^2 + 2xa + a^2 + y^2) \\ & \Rightarrow\ (1-k^2)(x^2 + y^2 + a^2) - 2xa(1+k^2) = 0\ . \end{aligned} \tag{4.2}$$

Assim como a oval de Cassini, foi utilizado o software geogebra para representar os diferentes aspectos desta curva:

Caso 1) $k = 1$

A equação obtida acima (4.2) reduz-se a: $-2xa(1+k^2) = 0$, portanto, $x = 0$. Esta é precisamente a equação da reta perpendicular ao segmento F_1F_2 e que passa pelo seu ponto médio. Ou seja, se $k = 1$ obviamente o lugar geométrico Γ é a própria *mediatriz* de F_1F_2.

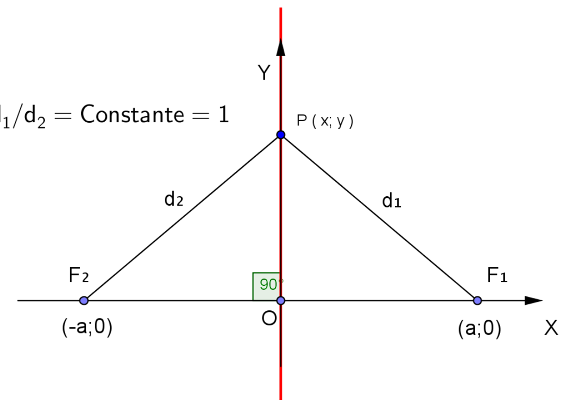

Figura 4.8: Círculo de Apolônio 2

Nos demais casos admitiremos que $k \neq 1$. Dividindo a equação (4.2) por $(1-k^2)$, com $k \neq 1$, temos:

$$x^2 + y^2 - \frac{2a(1+k^2)}{(1-k^2)}x + a^2 = 0 \tag{4.3}$$

Se considerarmos que a equação analítica da circunferência no plano, com centro em $C(x_c; y_c)$, raio r e $P(x; y)$ um ponto pertencente a circunferência, temos:

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_c - 2yy_c + x_c^2 + y_c^2 - r^2 = 0 \tag{4.4}$$

Comparando as equações (4.3) e (4.4), percebemos que a equação resultante (4.3) é um caso particular de circunferência.

$$x_c = \frac{a(1+k^2)}{1-k^2}; y_c = 0; r = \frac{2ak}{|1-k^2|} \tag{4.5}$$

Mostremos agora as diferentes variaçoes do círculo de Apôlonio conforme os valores de k:

Caso 2) $k = 0$

A equação geral fica

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = 0$$

Assim o centro da circunferencia $C(x_c; y_c)$ terá coordenada $x_c = a$ e $y_c = 0$, e raio $r = 0$, ou seja, a circunferência degenera em um ponto, que é o foco $F_1(a; 0)$.

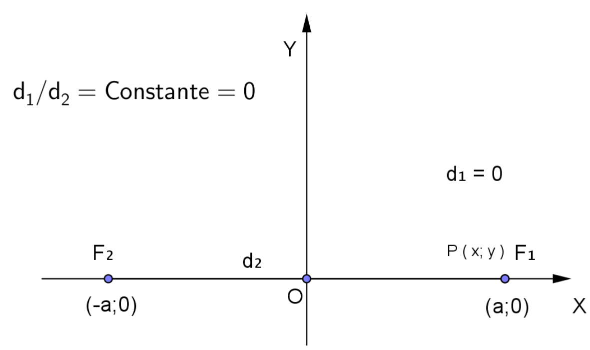

Figura 4.9: Círculo de Apolônio 3

Caso 3) $k \neq 1$ **e** $k \neq 0$

Para quaisquer valores de $k \neq 0$ ou $k \neq 1$, teremos os círculos de Apolônio.

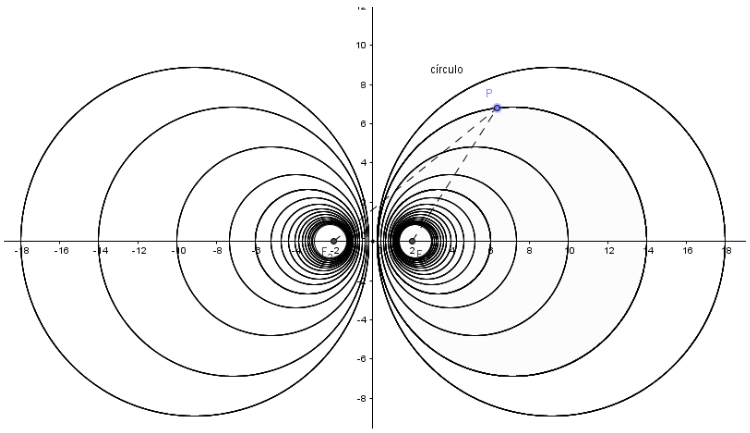

Figura 4.10: Círculo de Apolônio 4

4.2.1 Propriedade do Círculo de Apolônio

Observe a figura abaixo:

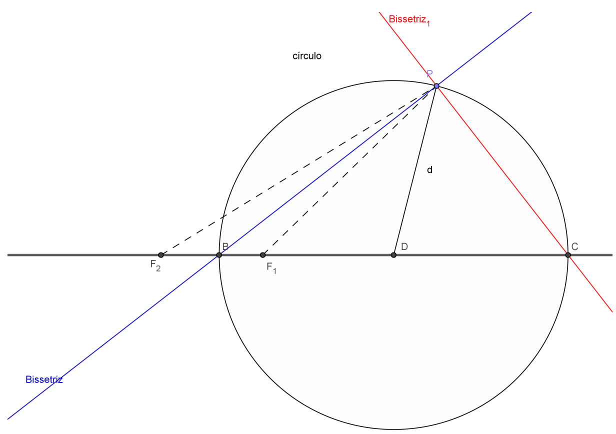

Figura 4.11: Círculo de Apolônio 5

Considerando o triângulo PF_1F_2, e traçando as bissetrizes internas e externas em relação ao vertice P conforme ilustra o desenho, determinamos os pontos B e C. O ponto D é o centro do círculo de Apolônio e ponto médio de BC. Assim pelo teorema das bissetrizes, temos as relações:

$$\frac{\overline{PF_2}}{\overline{PF_1}} = \frac{\overline{BF_2}}{\overline{BF_1}} = \frac{\overline{CF_2}}{\overline{CF_1}}$$

Note que

$$\overline{CF_2} = \overline{CD} + \overline{DF_2}$$
$$\overline{CF_1} = \overline{CD} + \overline{DF_1}$$
$$\overline{BF_2} = \overline{DF_2} - \overline{CD}$$
$$\overline{BF_1} = \overline{CD} - \overline{DF_1}$$
$$\overline{CD} = \overline{DP} \quad \text{e} \quad \overline{CD} = \overline{OP} = \overline{OB}(\text{raio da circunferência}),$$

Então podemos reescrever as razões da seguinte maneira:

$$\frac{\overline{DF_2} - \overline{CD}}{\overline{CD} - \overline{DF_1}} = \frac{\overline{CD} + \overline{DF_2}}{\overline{CD} + \overline{DF_1}}$$

Desenvolvendo, temos:

$$\begin{aligned}(\overline{DF_2} - \overline{CD}).(\overline{CD} + \overline{DF_1}) &= (\overline{CD} - \overline{DF_1}).(\overline{CD} + \overline{DF_2}) \\ \Rightarrow \overline{DF_2}\ \overline{CD} + \overline{DF_1}\ \overline{DF_2} - \overline{CD}^2 - \overline{CD}\ \overline{DF_1} &= \\ = \overline{CD}^2 + \overline{CD}\ \overline{DF_2} - \overline{DF_1}\ \overline{CD} - \overline{DF_1}\ \overline{DF_2} \\ \Rightarrow 2\overline{CD}^2 = 2\overline{DF_1}\ \overline{DF_2}\ .\end{aligned}$$

Dividindo a última equação acima por 2 obtemos a propriedade:

$$\overline{DP}^2 = \overline{DF_1}\ \overline{DF_2}\ .$$

Atividade Proposta 4.3. Dados os pontos F_1 e F_2 no plano, construa o lugar geométrico dos pontos P tais que $\frac{PF_1}{PF_2} = \frac{2}{3}$.

Capítulo 5

Desenho Geométrico

5.1 Origem do Desenho Geométrico

De acordo com Eves, desde o tempo pré-histórico, o homem utilizava os símbolos gráficos para se comunicar, com o objetivo de demonstrar de uma maneira física, as sensações que lhes eram importantes, de forma que estas sensações pudessem ficar documentadas. Assim, por meio de uma linguagem gráfica, os homens das cavernas registravam seu cotidiano nas paredes da sua habitação. A linguagem gráfica é universal, pois independe dos idiomas, além de proporcionar muitas vezes compreensão imediata e interpretação exata dos símbolos usados.

Dessa maneira esses povos estabeleceram uma forma de comunicação comum, que posteriormente foi aprimorada conforme os seus conhecimentos e limites tecnológicos, possibilitando o surgimento da escrita, que nada mais é do que a combinação de pequenos símbolos desenhados. O desenvolvimento contínuo das civilizações trouxeram ao homem a necessidade de adquirir outros conhecimentos.

Enquanto os gregos, berço da construção do conhecimento geométrico, buscavam a racionalidade do universo, com explicações mais rigorosas, surgia a necessidade de dar um novo enfoque à Matemática. Quando os egípcios e babilônicos construíram as pirâmides e templos, surgiu a necessidade de medir terrenos, necessidade essa, que deu origem ao conceito de Geometria: geos (terra) e metron (medida).

A partir da Geometria, nasce o Desenho Geométrico, que tem sido entendida como forma de concretizar os conhecimentos teóricos da Geometria de forma gráfica.

Levando em consideração um passado tão expressivo, que possibilitou ao homem tantas conquistas, e que partiu do aprimoramento de técnicas primitivas, qual o papel que o Desenho Geométrico desempenha no mundo de hoje? Seu ensino tem sido valorizado? Como o Desenho Geométrico pode contribuir para o desenvolvimento de novas ciências e tecnologias? Estes questionamentos foram alguns pontos que impulsionaram a exploração desta dissertação com intuito de buscar ou a resgatar a valorização que a construção geométrica propicia ao ensino de Matemática.

5.2 O Ensino de Desenho Geométrico no Brasil

Segundo Elenice Zuin, o Desenho Geométrico permaneceu no Brasil como uma componente curricular escolar durante 40 anos de 1931 a 1971. Apesar da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional de 1961, propor opções onde o Desenho não seria uma matéria obrigatória nos currículos, ela permaneceu até 1970.

Em 1971 o Ensino Fundamental no Brasil sofreu grandes mudanças,a Lei n° 5692, Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, foi promulgada. A referida lei deixava claro que a disciplina desenho geometrico deixava de ser um componente curricular obrigatória, passando esta a ser uma disciplina do núcleo optativo, que integraria a parte diversificada do currículo, onde a escola teria total liberdade de escolher.

As construções geométricas executadas com instrumentos como régua e compasso também não seriam mais obrigatórias em vestibulares de Arquitetura e Engenharia na década de 70. São essas decorrências que acentuaram a dispensa do Desenho Geométrico como matéria obrigatória nas escolas (Zuin).

Algumas escolas mantiveram as construções geométricas nas aulas de Educação Artística, confirmando a valorização dos traçados geométricos por determinados grupos, os quais prestigiam e legitimam estes conhecimentos.

Este fato permanece até a década de 80, quando algumas editoras lançam coleções de Desenho Geométrico, para serem utilizados de 5° à 8° série do primeiro grau, o que nos aponta uma revalorização das construções geométricas pelas escolas. Com isso podemos perceber que o ensino oferecido a uma classe não era o mesmo destinado a outra. Conhecimentos acerca do Desenho Geométrico que estimulavam o raciocínio lógico-dedutivo eram aplicados somente às escolas de elite, enquanto as classes menos favorecidas estudavam Educação Artística voltada para o trabalho manual onde não há um estímulo ao raciocínio lógico.

Hoje sabe-se que de acordo com os PCNs atuais para o Ensino Fundamental, há uma busca no resgate do tramento das construções geométricas, mas percebemos que falta um currículo mais específico e definido por parte dos sistemas de ensino para o ensino das construções geométricas. A maioria dos livros apresentam os conceitos de geometria construtiva de forma fragmentada, ou como um apêndice ou curiosidade mostrando assim a não valorização real que se deve dar a tal assunto.

5.3 Importância do Desenho Geométrico

Elon Lima, considera os desenhos das figuras geométricas parte importante para a compreensão, a fixação e a imaginação criativa. Ele acha fundamental que o estudante por si só desenhe a figura, procurando caminhos, imaginando construções, pesquisando interconexões, forçando o raciocínio e exercitando a mente.

Assim podemos definir que Desenho Geométrico é um conjunto de técnicas e processos para construções de formas geométricas.

É muito fácil observar as formas geométricas em tudo ao nosso redor, presentes no cotidiano como, por exemplo, nas ruas, nas casas, na natureza...

A Geometria estuda as figuras relacionando-as com números (abstratos), que são suas medidas. O desenho estuda as figuras (abstratas), relacionando com suas representações (que são concretas).

O desenho concretiza os conhecimentos teóricos da Geometria, conseguindo definir conceitos, demonstrar propriedades e resolver problemas.

A maneira mais didática de estudar a Geometria seria junto com o Desenho Geométrico, pois todos os ramos do conhecimento estão entrosados entre si e separá-los como nos dias de hoje pode torná-los fragmentados.

De acordo com Zuin as principais vantagens ao aluno de se trabalhar com Desenho Geométrico são:

1. O Desenho possibilita concretizar os conhecimentos teóricos da Geometria, demonstrando graficamente as propriedades das figuras geométricas.

2. Ao estudar Desenho, o aluno aprende a linguagem gráfica, precisa e concisa, a mais antiga das linguagens, como vimos na origem do Desenho Geométrico. A criatividade técnico-científica, que é a capacidade de pesquisar e encontrar soluções consegue-se com uma teoria mínima, curta e inesquecível do Desenho.

3. O Desenho Geométrico pode desenvolver capacidades importantes como: organização, autodisciplina, iniciativa, serenidade e capricho.

4. Exercícios de Desenho apropriados estimulam a conexão de neurônios cerebrais, desenvolvendo a visão espacial.

Assim percebemos como a disciplina Desenho Geométrico é importante para a formação intelectual dos nossos educandos, daí a importância em resgatar tal componente curricular nos sistemas de ensino.

5.4 Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino

De acordo com Polya, a metodologia da resolução de problemas fundamenta-se em um estudo chamado Heurística, que nada mais é que o estudo dos métodos e regras que conduz a descoberta e a investigação.

Na proposta de Polya, o método de resolução de problemas matemáticos deve a maneira na qual visualizamos a Matemática, como uma ciência indutiva e experimental. Mas de acordo com o autor, a Matemática indutiva não é apresentada aos alunos como uma ciência que pode ser inventada. Levando isto em consideração, Polya defende que este é o problemas da falta de motivação e interesses dos alunos no aprendizado da Matemática, pois ela deve ter um significado concreto.

Polya defende tambem que a resolução é uma habilitação prática, na qual adquirimos uma vez que exercitamos e imitamos. Assim Polya, divide a resolução de um problema matemático em quatro etapas:

1. Compreender o Problema

   Esta fase baseia-se no princípio de ler e interpretar o que seu leu. Para Polya não podemos responder a uma pergunta se não a entendemos. Compreender ou interpretar o enunciado do problema nada mais é que identificar o que se pretende descobrir, quais são os dados relevantes do problema e a condiçãode existencia da solução.

Muitas vezes nesta fase o aluno já pode ter um direcionamento em relação a resposta que o mesmo precisa encontrar para satisfazer as condições explícitas no problema.

2. Estabelecer um Plano

   Uma vez que o aluno conseguiu compreender o que se está querendo descobrir no problema, e hora do mesmo transformar esta interpretação em linguagem Matemática.

   Nesta fase ele irá transpor suas interpretações de modo que apareçam operações, equações ou expressões.

   Para atingir esta transposição, Polya sugere que devemos uma vez já considerado o que se pretende descobrir, pensar num problema conhecido que tenha a mesma incógnita e o mesmo questionamento. Lembrando que para Polya resolver problema é exercitar e imitar.

3. Execução do Plano

   Para Polya, executar o plano é resolver as equações ou operações obtidas na fase anterior, estabelecendo um plano; nesta fase o aluno usa suas técnicas matemáticas em operações e equações a fim de solucionar o problema.

   Uma vez que o mesmo não conhece o conteúdo matemático que irá ajudá-lo a solucionar o problema, a situação de aprendizagem não se dá, pois houve falhas quando o conteúdo específico foi trabalhado.

   Para executar o plano, o aluno deve lembrar de todos os dados levantados na interpretação do problema, pois estes sem dúvida irão contribuir para que ele execute de forma correta a técnica de resolução.

4. Retrospecto.

    Segundo Polya, a partir do momento que um aluno chega ao resultado final da resolução, ele passa para o próximo e esquece aquele que acabou de trabalhar.

    Uma vez que o aluno chegou a resposta do problema, ele precisa verificar se a resposta encontrada satisfaz o problema, uma vez que ele ja havia tido uma suposta resposta no início do problema quando o estava interpretando. Além disto, quando o aluno começa a verificar o que ele realizou para dar sua resposta final, ele tem a condição de aprender realmente sobre a resolução daquele problema, pois ele refaz as interpretações, verifica se não há erro na transposição para a linguagem Matemática e caminha sobre a técnica utilizada para resolver a equação obtida.

    Feito isto o aluno percebe que aprendeu a resolver aquele tipo de problema e quando se deparar com outro problema poderá usar esta vivência em prol de uma melhor interpretação da nova situção problema que se encontra. Resolver problemas, segundo Polya, é exercitar e imitar o que já foi realizado em experiências anteriores, adaptando-as.

Capítulo 6

Considerações Finais

A proposta de resgate do ensino das construções geométricas apresentadas no trabalho tem por objetivo único promover uma melhoria no processo ensino aprendizado da geometria nas escolas de educação básica, através da metodologia de resolução de problemas.

Afinal acredita-se que a disciplina Desenho Geométrico seja de fundamental importância para o desenvolvimento de várias habilidades, tais como coordenação motora, organização de ideias, investigação de possíveis soluções de problemas, planejamento de estratégias de resolução, dentre outras.

Para atingir tal fim, devem-se propor mudanças na realidade de ensino, implantando projetos que desenvolvam melhorias, material didático mais adequado e que valorize a construção geométrica, uma melhor capacitação do professor para que possa incentivar seus alunos a aprenderem a disciplina.

Portanto espera se que este trabalho seja um pequeno passo na busca de propostas eficazes para o resgate e a melhoria do ensino de Desenho Geométrico, na qual tem por objetivo capacitar e desenvolver em nossos alunos o estímulo ao raciocínio lógico dedutivo para que promovam, além da construção de um conhecimento mais fundamentado e significativo da Geometria, também a capacidade de pensar em situações cotidianas complexas de maneira mais estruturadas e embasadas por conhecimentos.

Bibliografia

[1] EVES, Howard, *Introdução à história da Matemática*, tradução de H. H. Domingues, Editora da Unicamp, 5. ed., 2011.

[2] POLYA, George, *A arte de resolver problemas*, Ed. Interciências, Rio de Janeiro, 1945.

[3] LIMA, Elon L., *Medida e Forma em Geometria: comprimento, área, volume e semelhança*, SBM, Belo Horizonte, 1991.

[4] ZUIN, E. S. L, *Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações*, Anais da XV Reunião Anual da Anped (CD-ROM), Caxambu, 2002.

[5] Muniz Neto, Antonio C., *Tópicos de matemática Elementar: Geometria euclidiana plana*, SBM, 2a.ed., Rio de Janeiro, 2013.

[6] Brasil,MEC., *Parâmetros curriculares nacionais*, 1998.

[7] Putnoki, José Carlos, *Que se devolvam a Euclides a régua e o compasso*, Revista do professor de matemática (13), 1998.

[8] Putnoki, José Carlos, *Elementos de geometria e desenho geométrico*, Ed. Scipione,vol.1 e 2; 1989.