UNIVERSIDADE FEDERAL DE RORAIMA
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

HÉWERTON ALVES MARTINS

MATEMÁTICA FINANCEIRA COM ABORDAGEM EM EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

Boa Vista - RR

2016

HÉWERTON ALVES MARTINS

MATEMÁTICA FINANCEIRA COM ABORDAGEM EM EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda

Boa Vista - RR

2016

Dados Internacionais de Catalogação na publicação (CIP)
Biblioteca Central da Universidade Federal de Roraima

M386m Martins, Héwerton Alves.
Matemática financeira com abordagem em educação financeira para o Ensino Médio / Héwerton Alves Martins. – Boa Vista, 2016.
69f. : il.

Orientador: Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Roraima, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

1 – Matemática financeira. 2 – Educação financeira. 3 – Educação básica. I – Título. II – Castañeda, Alberto Martin Martinez (orientador).

CDU – 51:336

HÉWERTON ALVES MARTINS

MATEMÁTICA FINANCEIRA COM ABORDAGEM EM EDUCAÇÃO FINANCEIRA PARA O ENSINO MÉDIO

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da Sociedade Brasileira de Matemática - SBM e Universidade Federal de Roraima - UFRR, como parte dos requisitos para a obtenção do título de MESTRE em Matemática.

Trabalho aprovado. Boa Vista - RR, 19 de julho de 2016.

Prof. Dr. Alberto Martin Martinez Castañeda
Orientador

Prof. Dr. Oscar Tintorer Delgado
UERR

Prof. Dr. Lindeval Fernandes de Lima
UFRR

Boa Vista - RR
2016

AGRADECIMENTOS

Primeiro ao meu bom Deus e a minha nossa Senhora da Aparecida, ao qual sou devoto, por realizarem os meus sonhos e me darem forças além de sabedoria para que eu pudesse caminhar com os meus estudos.

Em seguida, a minha esposa Cintia de Castro e os seus pais, por terem sempre me ajudado e acreditado em mim. Meu sogro e a minha sogra são como uns pais para mim, pois sempre me orientaram e me deram forças quando poucos acreditavam em meu sucesso.

A minha família, por terem mesmo na distância ajudado com suas orações e orientações.

Aos professores do PROFMAT em Boa Vista-RR, em especial ao meu orientador Alberto Martin Martinez Castañeda, que além de me ajudar ao longo deste tempo, sempre acreditou em meu potencial e suas aulas marcaram em minha vida.

Aos amigos do PROFMAT facebook, John William, Bruno Brody e tantos outros, por terem me ajudado pela rede social em diversas ocasiões, em especial ao amigo John William, que foi uma espécie de coorientador em meu mestrado.

Aos meus discentes da UFRR, que sempre me apoiaram e deram ideias incríveis para que eu pudesse desenvolver esta dissertação.

Ao meu amigo Eduardo Soares Codevilla, por ter me ajudado constantemente no desenvolvimento deste trabalho e acima de tudo, por compartilhar várias horas do seu tempo para me auxiliar em diversas dúvidas. Eduardo é como irmão, um amigo para toda vida. Orientou-me a sua maneira, dando uma visão de administrador ao meu trabalho.

E finalmente, não menos importante, o meu grande amigo Carlos Augusto Carvalho, um profissional exemplar, um homem de caráter ímpar e que, me ajudou demais nesta dissertação, principalmente ao sugerir o tema voltado para a área econômica.

RESUMO

A situação financeira econômica atual vivida por nosso país nos faz refletir sobre a importância de estudarmos a Educação Financeira desde o ensino básico, a fim de instruirmos nossos jovens para que tenhamos um país saudável financeiramente. Neste trabalho, é abordado maneiras distintas de orientar nossos discentes do ensino médio sobre como investir, financiar e acima de tudo, conhecer os fundos de investimentos mais usados em nosso país. Familiarizados com estes fundos de investimentos, os jovens aprenderão como é importante economizar e investir. Métodos como aproximação linear de Newton ajudará aos jovens nos cálculos financeiros, bem como os colocarão perante uma ferramenta fundamental nesta área. O estudo sobre sistemas de amortizações auxiliará nossos jovens quanto aos financiamentos mais usados em nosso país, principalmente na aquisição do seu primeiro carro ou imóvel. A metodologia usada foi essencialmente uma pesquisa bibliográfica a partir da qual se consegue aprofundar no assunto pesquisado. A seguir, ajustou-se as hipóteses iniciais e delineou-se a estratégia concreta para o cumprimento dos objetivos propostos. Conclui-se que, com exercícios exemplos voltados para o cotidiano das pessoas, desperta-se um maior interesse pelos alunos em aprender a Matemática Financeira e aplicá-la em diversas situações de suas vidas.

Palavras-chave: Matemática financeira. Educação financeira. Educação básica

ABSTRACT

Our motherland's current economic situation makes us reflect on the importance of studying the Financial Education since elementary school, so that we can educate our younger generation to make our country a healthier financially. This dissertation discusses many distinguished fashions for teaching high school students on how to invest, finance and, above all, getting them to know the investment funds that are used the most in our country. After being familiarized with these investment funds, the young students will learn the importance of saving and investing. Methods like Newton's linear approximation will help in their financial calculations, as well as making them acquainted with a fundamental tool for this field. The study of amortization systems will help students acknowledge our country's most common financing choices, especially regarding the purchase of their first car or real estate. The methodology chosen for this dissertation was essentially a bibliographical research. In conclusion, with the help of examples and exercises with a focus on the daily life, there will be a greater interest among kids and teenagers in learning Financial Mathematics and its application in the most diverse situations.

Key-words: Financial mathematics . Financial education. Basic education.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Administrar o dinheiro na fase inicial da vida adulta é um grande desafio. A maioria dos jovens do ensino médio não tem experiência nenhuma em lidar com o dinheiro e menos ainda em planejar suas finanças. Vivenciam as inúmeras tentações consumistas, o que representa um perigo para as finanças pessoais, especialmente com as facilidades existentes para obterem um crédito. Isto resulta em uma geração que começa a se endividar logo cedo, já que as fontes de rendas adquiridas com estágios ou bolsas-auxílios não são suficientes para bancar o estilo de vida que a maioria dos jovens procura. Diante disto, surge a necessidade de trabalhar a educação financeira no ensino médio mostrando a eles que o controle financeiro é importante para todas as idades e etapas da vida. A abordagem do investimento em renda fixa despertará nos jovens a curiosidade sobre a caderneta de poupança e os contratos de depósitos bancários (CDB) prefixado e pós-fixado. Através da renda fixa, os jovens do ensino médio estarão familiarizados com as taxas Selic, IOF, alíquota, entre outros conceitos financeiros. Com a atual crise vivida pelo nosso país, quanto mais cedo a nossa população souber poupar e investir, melhor será para a saúde financeira pessoal, familiar e da nossa pátria.

Os contratos de financiamentos em Renda Fixa proporcionam aos jovens a curiosidade e o desejo em investir assegurando assim um futuro econômico melhor para eles e o nosso país. No cenário econômico atual, que não apresenta sintomas de mudança para melhor no curto prazo, com o aumento da inflação e das taxas de juros, os jovens entenderão que, investir em renda fixa é mais vantajoso do que a poupança.

A alta da Selic beneficia a renda fixa e tira a atratividade da caderneta de poupança, cujos rendimentos fixos são em 6,87 porcento ao ano mais a variação da taxa referencial, segundo Almeida (2015). Atualmente a poupança vem perdendo para a inflação o que torna um investimento ruim. A abordagem da Renda Fixa no Ensino Médio trará aos jovens conhecimentos financeiros, que possam ao ingressar no mercado de trabalho usufruírem da melhor maneira possível.

Inicialmente será abordada a importância e benefícios da educação financeira na sociedade atual e em seguida, no capítulo dois, se oferece uma sinopse sobre a Matemática Financeira, para que os jovens estejam familiarizados com os juros, descontos, taxas e aplicações. Posteriormente se trata de um estudo sobre Renda Fixa, com o objetivo de aguçar a curiosidade dos jovens estudantes mediante o conhecimento aprofundado da caderneta de poupança e os certificados de depósito bancário, e desenvolver a capacidade de discernir qual seria o investimento mais conveniente sob determinadas condições. No último capítulo (quatro), se estudam os sistemas de amortização objetivando que os jovens do ensino médio entendam sobre os financiamentos e suas amortizações, e com isso, consigam tomar a melhor decisão possível na hora da contratação de um possível financiamento.

Para responder a seguinte indagação, os jovens do ensino médio sabem da importância do controle financeiro? Os capítulos abaixo explicam melhor essa problemática observada neste estudo.

1.1 Justificativa

A inclusão de assuntos relacionados com investimentos financeiros em Renda Fixa e Sistemas de Amortização nos conteúdos da Matemática Financeira, ministrados nas disciplinas de Matemática do Ensino Médio, mostrará aos jovens a importância de investir e como criar um orçamento, despertando a curiosidade em como fazer o dinheiro render ao invés de depreciar, assim como na escolha do melhor sistema de amortização a ser utilizado em um possível financiamento. Os estudos em renda fixa e sistemas de amortização proporcionarão uma abrangência maior sobre as taxas de juros, amortizações e capitalização. Nos Estados Unidos é comum visualizarmos a Educação Financeira nas Escolas e a aplicabilidade deste ensino na sociedade jovem americana. Um estudo feito em Abril de 2016 pela Serasa Experian (A Serasa Experian é líder na América Latina em serviços de informações para apoio na tomada de decisões das empresas. No Brasil, é sinônimo de solução para todas as etapas do ciclo de negócios, desde a prospecção até a cobrança, oferecendo às organizações as melhores ferramentas) revela que em março deste ano o número de brasileiros inadimplentes chegou a 60 milhões, que totalizaram 256 bilhões de reais em dívidas em atraso e representam 41 porcento da população com mais de 18 anos do país. E o mais alarmante, a pesquisa aponta que 77,2 porcento dos inadimplentes ganham até dois salários mínimos.

Tais dados levantados, mostram a necessidade de educarmos os nossos jovens para tomadas de decisões quanto aos investimentos e financiamentos a serem feitos. Este trabalho visa trabalhar de uma forma mais didática, através de exemplos, que despertem um maior interesse dos jovens para com a Matemática Financeira. A educação econômica e financeira dos jovens os capacitará para o exercício de cidadania e acarretará na avaliação de suas escolhas de candidatos nas eleições para diferentes estâncias.

2 OBJETIVO

Produzir um material de consulta destinado a professores e alunos do Ensino Médio, que contribua para estimular a introdução de conteúdos e métodos de ensino na prática docente da disciplina de Matemática, propiciando que os alunos desse nível se interessem pela Matemática Financeira aplicada à análise de investimentos e sua utilização no cotidiano, de modo que consigam aplicar seus métodos para a melhoria da saúde financeira pessoal, o que de fato beneficiará à família e o país.

3 METODOLOGIA

A metodologia utilizada consistiu basicamente de uma pesquisa bibliográfica na qual foram consultados diversos livros, meios de comunicações, artigos científicos e de divulgação, impressos ou tomados da Internet. A partir da análise dos materiais obtidos foi possível uma compreensão e um aprofundamento do assunto pesquisado e se confirmou a hipótese inicial da conveniência de introduzir nas disciplinas matemáticas na escola uma abordagem da Matemática Financeira encaminhada para a compreensão da dinâmica elementar das finanças pessoais e familiares, que motive e ofereça uma qualificação inicial aos alunos do Ensino Médio para sua utilização na prática no seu cotidiano. Assim, foi delineado um caminho concreto para o cumprimento dos objetivos propostos na dissertação. No trabalho está incluído a demonstração matemática de algumas proposições e a resolução de determinados problemas como exemplos. Após a análise e síntese necessárias, foi escrita uma dissertação sobre o assunto que constitui o nosso trabalho de conclusão de Curso de Mestrado (TCC) e ficará disponível para publicação eletrônica no Sistema de Controle Acadêmico (SAC) do PROFMAT, e na biblioteca central da Universidade Federal de Roraima. Finalmente, pretendemos redigir um artigo para publicação em alguma revista especializada após a defesa e aprovação.

4 EDUCAÇÃO FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

Neste capítulo resumimos algumas opiniões de importantes autores que constituem uma referência no tema da educação financeira dos jovens na escola, como elementos do marco teórico da dissertação.

O ensino sobre educação financeira pode mudar todo o sistema atual. Segundo Peretti (2007), o segredo está no desenvolvimento humano. Depois de familiarizar com a Educação Financeira os jovens estarão mais preparados para o mercado de trabalho e sobre a realidade do nosso país. Para Peretti (2007) a baixa qualidade do ensino e o desconhecimento da população no que tange a Educação Financeira, tornaram-se uma preocupação, pois tudo gira em torno da educação. O atual modelo educacional não prepara os estudantes para o mercado de trabalho e a realidade do nosso país, pois o conteúdo programático sobre matemática financeira é abordado de forma descontextualizada, sem abordar a economia atual ou alertar sobre investimentos e financiamentos.

Para Martins (2004), os alunos desconhecem noções do comércio, economia, finanças ou impostos. O atual sistema educacional ignora tais assuntos, o que é incompreensível, já que a alfabetização financeira é fundamental para o crescimento de uma região e nação. De acordo com Peretti (2007) a falta de capacidade do jovem de administrar seus próprios recursos é o resultado do analfabetismo financeiro. O objetivo da educação financeira é orientar, capacitar e delinear os jovens do ensino médio a fim de que atinjam a maturidade financeira. A educação financeira na escola pode contribuir para a formação do caráter e a maturidade, pois mostra a necessidade de não agir por impulsos consumistas e refletir sobre os desejos imediatos de consumo em função da tomada de uma melhor decisão para o bolso. A matemática financeira auxilia na tomada da decisão final proporcionando as ferramentas necessárias para a análise quantitativa.

Peretti (2007) divide a educação financeira em onze passos dos quais se tornam pilares para o ensino aprendizado dos jovens do ensino médio. O primeiro passo, o aluno precisa se descobrir, o que ele gostaria de ser. Em seguida, no segundo passo observa-se na necessidade de refletir a respeito da vida em seu histórico (passado, presente e futuro), futuro este ligado ao primeiro passo. Já no terceiro passo, o jovem é disciplinado e aprende a eliminar o desperdício, desenvolvendo assim uma maturidade financeira incrível. No quarto passo, desenvolve-se a consciência de que para adquirir algo é preciso aprender a conquistar. No quinto passo, o princípio da doação e solidariedade, pois se quer algo, aprende a doar nem que seja a si mesmo para um bem comum. Isto fortalece o espírito e os objetivos são alcançados facilmente.

No sexto passo, devemos evitar as desculpas, delinear os objetivos a fim de cumpri-los da melhor maneira possível. Já no sétimo passo, é preciso ter medo, não em excesso, mas de forma demasiada a fim de ter controle e evitar atitudes impulsivas. O oitavo passo, trata-se do hábito da economia, onde desenvolve-se a autoconfiança e o controle com equilíbrio. Percebemos no nono passo que os jovens já adquiriram uma consciência financeira bem desenvolvida administrando seus próprios recursos. No décimo passo o jovem aprende a investir o bem adquirido, analisando a situação do mercado financeiro. Já no décimo primeiro e último passo, os jovens aprendem sobre economia doméstica e passam o conhecimento adquirido para sua família, criando assim uma maturidade financeira.

Após entendermos os onze passos, fica mais fácil a compreensão sobre Peretti (2007) quando ele afirma que uma mentalidade inteligente e saudável sobre o dinheiro é criar consciência dos limites. É saber adquirir o dinheiro, gastar de forma equilibrada, poupar um percentual do que foi adquirido, investir de forma sensata e acima de tudo doar uma parte, pois dinheiro produz dinheiro. De acordo com o site da Confederação Nacional do Comércio de Bens, Serviços e Turismo (CNC), o percentual das famílias endividadas no país em fevereiro de 2016 equivale a 60,8%. As taxas de juros mais elevadas e o cenário menos favorável do mercado de trabalho impactaram negativamente para este percentual inadimplente elevado. O mais incrível a ser observado na pesquisa da CNC, é que 25,4% das famílias com dívidas têm mais da metade de sua renda mensal comprometida com o pagamento de dívidas. Esta pesquisa corrobora com a importância do ensino em educação financeira para o Ensino Médio, pois os jovens de hoje precisam desse amadurecimento para ajudarem suas famílias e a saúde financeira do nosso país. O Brasil hoje vive uma situação econômica instável, onde a inflação assusta a todos. Porém, para D'Aquino (2008) tudo cabe no orçamento, quando se tem planejamento independentemente da situação financeira vivida pelo país.

Percebe-se que a educação financeira dá aos jovens uma visão holística das habilidades em tomarem as decisões necessárias e com qualidade na gestão pessoal e familiar. De acordo com Matta (2007) a educação financeira é um conjunto de informações que ajudam os jovens a entenderem e lidarem com sua renda, aprendendo a gerir o dinheiro, gastos e financiamentos, poupanças e investimentos. A educação financeira no mundo já é algo que vem sendo desenvolvido há mais tempo. De acordo com Holzmann e Miralles (2005), o processo de educação financeira, aparentemente, está mais desenvolvido nos Estados Unidos, Reino Unido, Canadá, Austrália e Nova Zelândia. Segundo Vieira et al (2011) apontam que nos Estados Unidos a educação financeira é conteúdo obrigatório nas escolas secundárias. Uma pesquisa realizada e aplicada aos consumidores que haviam recebido o ensino financeiro nestas escolas, constatou que esta medida contribui para o enriquecimento dos mesmos na fase adulta.

Já no Brasil, a educação financeira não é muito explorada e isto reflete em nossa situação econômica atual. De acordo com Frankenberg (1999), no Brasil, pouca ou nenhuma educação financeira, inflação alta, erros cometidos por sucessivos governos do passado resultaram em conceitos financeiros equivocados e errôneos. Entretanto, segundo Vieira et al. (2011), isto tende a mudar após uma parceria entre o governo e entidades brasileiras onde surgiu a Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF), que conta com a colaboração do Ministério da Educação, Ministério da Justiça e outros órgãos.

Vale ressaltar que, o conhecimento adquirido nas escolas servirá de base para a formação dos jovens a terem uma saúde financeira equilibrada e tomarem decisões acertadas no futuro.

De acordo com o site da AEF-BRASIL (Associação de Educação Financeira do Brasil), a educação financeira foi testada nos anos de 2010 e 2011, como projeto piloto, envolvendo 891 escolas públicas de cinco estados brasileiros (Tocantins, Rio de Janeiro, Minas Gerais, São Paulo e Ceará) divididos pelas regiões Norte, Nordeste e Sudeste, contando com a participação de aproximadamente vinte e sete mil discentes e mil e oitocentos docentes. O resultado, a partir de um método de avaliação rigoroso do Banco Mundial, apontou maior capacidade do jovem poupar, planejar e investir. Neste projeto, observou-se também um maior diálogo entre os pais e jovens sobre o orçamento familiar, criando assim uma economia doméstica. De acordo com a AEF-BRASIL, foi elaborado um livro onde as estratégias de disseminação propostas são em formato aberto e assistido. No formato aberto, uma plataforma virtual é oferecida e apresenta materiais didáticos sobre o tema e disponibiliza todo o seu conteúdo para download, possibilitando que o educador escolha baixar os livros do aluno e professor na íntegra ou por temas. O material está disponível no site www.educacaofinanceiranaescola.org.br. Já no formato assistido, por meio de parceria com o Ministério da Educação, em 2014, 2969 escolas públicas do Ensino Médio, que participaram do projeto piloto, e que participam dos Programas Ensino Médio Inovador e Mais Educação, que tenham feito a opção por oferecer educação econômica para seus alunos, receberam os livros impressos e aos seus professores foi oferecida, pela AEF-Brasil, a formação presencial e à distância com o objetivo de contribuir com o desenvolvimento da temática em sala de aula; além disto, a Associação busca instituições educacionais interessadas, por meio de franquia social, em aplicar os livros para seus alunos. Neste formato, recebem a autorização para imprimir o material e acesso aos manuais de aplicação em redes e sistemas educacionais.

Observa-se no site do Programa de Educação Financeira Nas Escolas, que o programa tem como objetivo contribuir para o desenvolvimento da cultura de planejamento, prevenção, poupança, investimento e consumo consciente. A Educação

Financeira, no Programa, é inteiramente comprometida com o estar no mundo. O modelo conceitual adotado se baseia na premissa de que o cotidiano acontece sempre em um espaço e um tempo determinados. Na dimensão espacial, os conceitos da educação financeira se pautam no impacto das ações individuais sobre o contexto social, ou seja, das partes com o todo e vice-versa. Essa dimensão compreende ainda os níveis individual, local, regional, nacional e global, que se encontram organizados de modo inclusivo. Na dimensão temporal, os conceitos são abordados com base na noção de que as decisões tomadas no presente podem afetar o futuro. Os espaços são atravessados por essa dimensão que conecta passado, presente e futuro numa cadeia de inter-relacionamentos.

A proposta do programa se baseia em sete objetivos intimamente ligados às dimensões descritas, sendo que quatro deles se relacionam à dimensão espacial e os demais a dimensão temporal.

1 – Formar para a cidadania: direito de usufruir várias possibilidades que a vida oferece, tais como liberdade, igualdade, propriedade, participação política, educação, saúde, moradia, trabalho, dentre outras. O exercício da cidadania é ingrediente indispensável da construção de uma sociedade democrática e justa;

2 – Ensinar a consumir e a poupar de modo ético, consciente e responsável: o consumo em níveis adequados é imprescindível para o bom funcionamento da economia, a questão é torná-lo uma prática ética, consciente e responsável;

3 – Oferecer conceitos e ferramentas para a tomada de decisão autônoma baseada em mudança de atitude: a compreensão da linguagem do mundo financeiro, através de um programa educativo, possibilita ao indivíduo obter as informações necessárias para que tome suas decisões de modo autônomo, independente;

4 – Formar disseminadores: crianças e jovens que podem ajudar suas famílias na determinação de seus objetivos de vida, bem como dos meios mais adequados para alcançá-los.

E três objetivos estão mais alinhados com a dimensão temporal, pois articulam passado, presente e futuro.

5 – Ensinar a planejar a curto, médio e longo prazos: para se alcançar determinada situação, é necessário um planejamento envolvendo priorizações e renúncias que não seriam cogitadas pelo pensamento exclusivo do presente;

6 – Desenvolver a cultura de prevenção: é prudente planejar pensando nas intempéries da vida. Ninguém está isento de enfrentar situações adversas e inesperadas no dia a dia que, por vezes, exigem o dispêndio de uma quantidade de dinheiro não prevista no orçamento;

7 – Proporcionar possibilidade de mudança da condição atual: mobilidade social é entendida como a capacidade que uma família apresenta de aprimorar sua condição socioeconômica a partir de conhecimentos e competências oferecidos pela Educação Financeira.

Ainda de acordo com o site do programa, ao desenvolver este programa, os jovens aprenderão a resolver suas dificuldades, bem como planejar melhor suas vidas para que consigam ter mais condições de alcançarem suas metas e sonhos. Nesse sentido as escolas têm como contribuir de forma significativa ao educar os alunos financeiramente, pois eles, por sua vez, levariam esse conhecimento para suas famílias em um efeito multiplicador. Para o Ensino Médio o programa oferece uma proposta pedagógica visando reafirmar a transversalidade do tema Educação Financeira e sua articulação com o currículo escolar. O material oferece ao estudante informações e orientações que colaboram com a construção do pensamento financeiro consistente e o desenvolvimento de comportamentos financeiros autônomos e saudáveis, para que ele possa, como protagonista de sua história, planejar e fazer acontecer a vida que deseja para si próprio, em conexão com o grupo familiar e social a que pertence, segundo o site do programa.

Dividido em três livros, o jovem aprenderá sobre vida familiar cotidiana, vida social, bens pessoais, trabalho, empreendedorismo, grandes projetos, bens públicos, economia do país e economia do mundo, objetivando nas dimensões espaciais e temporais. O sucesso do programa fez com que o MEC apoiasse a inserção da temática educação financeira no currículo da educação básica. Segundo o Portal do MEC, A educação financeira está entre os temas da atualidade sugeridos para compor a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Trata-se do conjunto de conhecimentos entendidos como essenciais para o fortalecimento da cidadania e voltados para ajudar a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes.

Ainda, de acordo com o artigo do Portal do MEC, no Brasil, a educação financeira vem conquistando espaço como política de Estado a partir da publicação do Decreto nº 7.397, de 22 dezembro de 2010, que instituiu a Estratégia Nacional de Educação Financeira (Enef). Desde então, ações acerca da temática são compartilhadas, de forma integrada, por órgãos e entidades públicas e da sociedade, nos âmbitos federal, estadual e municipal. A concretização da Enef é realizada por meio do Comitê Nacional de Educação Financeira (Conef) e do Grupo de Apoio Pedagógico (GAP), colegiado criado para assessorar o comitê e apreciar, revisar e validar conteúdos e metodologias pedagógicas, relacionados à educação financeira.

Nota-se no site do Programa de Educação Financeira nas Escolas, o GAP é presidido permanentemente pelo Ministério da Educação e desempenha funções de caráter deliberativo e consultivo ao avaliar e validar todo o material didático utilizado e disseminado nos programas. Esses programas são operados pela Associação de Educação Financeira do Brasil (AEF-Brasil), com sede em São Paulo e instituída por meio de convênio firmado junto ao Conef. A AEF-Brasil é também responsável pela execução das ações aprovadas nas reuniões deste colegiado.

Ao debater sobre investimento, é importante salientar que ele consiste de três variáveis fundamentais, a rentabilidade, o risco da transação e o horizonte temporal. Pensando nisto, uma proposta sugerida por este autor aos docentes do Ensino Médio, é um jogo simples sobre sou um investidor. Neste jogo, o docente proporá ao aluno em poupar semanalmente uma certa quantia seguindo o esquema de poupar um real na primeira semana, dois reais na segunda semana, três reais na terceira semana e assim sucessivamente até completarmos trinta e duas semanas, que correspondem aproximadamente oito meses. Diante disto, ao final do período o jovem terá o montante de quinhentos e vinte e oito reais poupados. O aluno perceberá que poupar fará o seu dinheiro multiplicar dentro de um determinado prazo. Isto traz ao aluno a reflexão de que poupar é investir, sendo um dos pilares da Educação Financeira, como mencionado acima pelo Programa de Educação Financeira nas Escolas. O sucesso financeiro de uma pessoa não é apenas poupar, temos que lembrar disto, mas de como ela consegue administrar o dinheiro que tem.

Outra sugestão aos docentes, é orientar aos jovens sobre investir em ações. Para tanto, o site da Folhainvest criou um simulador em parceria com a BM-FBOVESPA, com o objetivo de proporcionar às pessoas o conhecimento sobre o mercado de ações do Brasil, simulando compra e venda de ações das empresas do Brasil. O aplicativo pode ser visto no site da Folhainvest e utilizado de forma online.

Quando o jovem entende a importância da Matemática Financeira e Educação Financeira sobre as nossas vidas, ele está apto a ajudar seus familiares e a si próprio. O Instituto Brasileiro de Defesa do Consumidor (Idec), desenvolveu uma planilha de orçamento doméstico para auxiliar na administração deste orçamento e contribuir para que os jovens e suas famílias alcancem seus objetivos. Essa planilha está disponível no site do Idec e pode ser abordada pelos docentes em forma de trabalho extra-classe, onde os jovens podem simular uma situação problema que seria discutida posteriormente em sala de aula. Nesta discussão, é de grande importância enfatizar os termos referidos na planilha, principalmente os ganhos, gastos, investimentos, empréstimos e outros.

Diante do que foi debatido e analisado neste programa, percebemos a importância da educação financeira nas escolas assim como uma metodologia de ensino que despertará nos discentes o desejo em aprender e transmitir para seus familiares e meio que convive o conhecimento adquirido. Tal metodologia será vista nos capítulos a seguir.

5 MATEMÁTICA FINANCEIRA NO ENSINO MÉDIO

É discutido constantemente o que fazer para melhorar o processo de ensino-aprendizagem em Matemática. O modelo de escola reflexiva sempre é debatido e uma excelente opção é aliar conteúdos matemáticos com a realidade do aluno, ao qual denominamos de aluno reflexivo. Neste capítulo expomos algumas considerações ao respeito de autores consultados e entramos na parte matemática.

Segundo Cortez (2003), a Sociedade da informação que vivemos é complexa e contraditória, com muitas informações sem saber lidar e selecioná-las, o que prejudica o desenvolvimento do espírito crítico. Cabe ao aluno, gerir informações para transformá-las em conhecimento. O professor não é a única fonte do saber. O conhecimento só existe com a aprendizagem. O professor reflexivo deve processar informações acuradas e criticamente. Tal reflexão deve ampliar seu desempenho e competência profissional visando o todo. Com criatividade e capacidade de encontrar meios de como interagir na vida social, o professor deve tomar abertura para aprender e ensinar essa visão para seus alunos. A formação crítica, reflexiva, deve combinar observações para resolver os problemas, numa visão de valorizar a relação professor-aluno. Quanto a escola reflexiva ela é uma comunidade com atores sociais que deve unir a sociedade com um objetivo comum: educar. Ela liga sociedade adulta com crianças e jovens em desenvolvimento. Deve estar contextualizada com a cultura local e articular com o contexto nacional e global. Deve ter personalidade, utilizar do próprio conhecimento para desenvolver-se. Seus atores devem ter um único objetivo: a educação das novas gerações.

Diante desta explanação e de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais:

> A matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente. A atividade matemática escolar não é “olhar para coisas prontas e definitivas”, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade. No ensino de matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos (PCN’s, 2000, p.19).

Percebe-se que a Matemática possui diversas aplicações e a Matemática Financeira está presente em nosso cotidiano e é de suma importância para o sistema econômico atual do nosso país. Alguns exemplos dos quais utilizamos a Matemática Financeira são observados no financiamento de imóveis e carros, aplicações financeiras, investimentos em Renda Fixa e em outras situações. Em todas as movimentações financeiras elas são baseadas em uma taxa de juros. Ao realizarmos um empréstimo a forma de pagamento é feita através das prestações mensais acrescidas dos juros e o saldo devedor é abatido pelo valor amortizado. A presença da Matemática Financeira na Economia, Administração e outras áreas acadêmicas é corriqueira e segundo Leithold (1988), para uma completa compreensão das aplicações seja a análise marginal em economia, a otimização em administração, a modelação matemática do crescimento de bactérias em biologia, ou o crescimento logístico em ecologia é necessário um conhecimento dos conceitos matemáticos que estão presentes na formulação dos modelos envolvidos.

Para entendermos melhor a importância da Matemática Financeira, devemos nos atentar para os juros encontrados em qualquer transação financeira. Antes de definirmos o que é juros, é importante conhecermos um pouquinho da história. Segundo Livius (1905) documentos históricos redigidos pela civilização Suméria, por volta de 3000 a.C., revelam que o mundo antigo desenvolveu um sistema formalizado de crédito baseado em dois principais produtos, o grão e a prata. Antes de existirem as moedas, o empréstimo de metal era feito baseado em seu peso. Arqueólogos descobriram pedaços de metais que foram usados no comércio nas civilizações de Tróia, Babilônia, Egito e Pérsia. Antes do empréstimo em dinheiro ser desenvolvido, o empréstimo de cereais e de prata facilitava a dinâmica do comércio. Na República Romana, no ano do consulado de Marco Fábio Ambusto (pela terceira vez) ou Tito Quíncio ou Marco Popílio, a taxa de juros foi reduzida para 8 e 1/3 porcento, mesmo assim, os plebeus continuavam sem conseguir pagar suas dívidas.

Conhecida a história, definimos juros como rendimento que se obtém quando se empresta dinheiro por um determinado tempo. Os juros são para o credor, aquele que tem algo a receber, uma compensação pelo tempo que ficará sem utilizar o dinheiro emprestado. Por outro lado, quem faz um empréstimo em dinheiro, pagará um acréscimo pela utilização do dinheiro. A este acréscimo também definimos como juros, de acordo com SAMANEZ, 2010.

Os juros podem ser simples ou compostos. Atualmente o regime de juros compostos é o mais utilizado no sistema financeiro, portanto mais útil para os cálculos de situações cotidianas.

Segundo Samanez (2010), no regime de juros simples, os juros de cada período são calculados sempre sobre o mesmo principal. Vale ressaltar que, não existe capitalização de juros neste regime. Nesse regime, a taxa de juros pode ser convertida para outro prazo qualquer com base em produtos e quociente, sem alterar o seu valor, ou seja, mantém a proporcionalidade existente entre valores realizáveis em diferentes datas. A aplicação de juros simples é muito limitada e indicada apenas para prazos de tempos curtíssimos.

Ainda, de acordo com Iezzi, Hazzan, Degenszajn (2013), a Matemática Financeira estuda os procedimentos utilizados em pagamentos de empréstimos, bem como os métodos de análises de investimento. Quando uma pessoa empresta a outra um valor monetário durante um tempo, essa quantia é chamada de principal. O valor que o emprestador cobra pelo uso do dinheiro, é chamado de juros. A taxa de juros expressa como porcentagem do principal. Ela representa os juros numa certa unidade de tempo. No regime de juros compostos, os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte, dizemos então, que os juros são capitalizados. No Brasil, o regime de juros compostos é o mais utilizado em operações tradicionais.

Além dos juros, é importante familiarizarmos com suas taxas. A taxa SELIC (Sistema Especial de Liquidação e Custódia), é responsável pela negociação de títulos públicos. Já a taxa referencial, conhecida como TR, reúne a taxa de juros dos 30 maiores bancos, e daí calcula-se a sua média, essas taxas são coletadas diariamente, obedecendo uma sequência e utilizada para o cálculo da Caderneta de Poupança. Outras taxas são encontradas em transações financeiras, tais como:

- Taxas fixas, que caracterizam por nunca variarem ao longo do tempo em todo o processo de amortização da dívida. Desde o início até o final do contrato, as taxas serão as mesmas, e por isto oferecem ao devedor a possibilidade de usufruir de níveis de risco extremamente reduzidos durante todo o período de pagamento.

- Taxa variável, estão sujeitas às oscilações de mercado, e os valores associados às mesmas alteram-se frequentemente, oferecendo assim grandes incertezas relativamente à totalidade do pagamento a ser efetuado no futuro. Em compensação, o valor inicial tende a ser extremamente mais baixo do que na taxa fixa.

- Taxa nominal, identificada como taxa anual nominal, esta é uma taxa que deverá sempre constar nos contratos de crédito e aplicações financeiras, e têm uma correspondência equivalente ao período total de um ano.

- Taxa efetiva, entre os diversos tipos de taxas existentes, a taxa efetiva é aquela aplicada quando o período de aplicação é igual ao período de capitalização, e reflete o número exato referente ao valor total a pagar pelos juros, ao contrário da taxa nominal.

- Taxa proporcional, segundo Samanez (2010), é determinada pela relação simples entre a taxa considerada na operação e o número de vezes em que ocorrem os juros. Este conceito, basicamente, é utilizado somente no regime de juros simples, no sentido de que o valor dos juros é proporcional apenas ao tempo.

- Taxa over, trata-se de uma taxa nominal, pois costuma ser expressa ao mês ou ao ano com capitalização diária, porém válida somente para os dias úteis. No Brasil, essa taxa se aplica em transações realizadas com títulos de renda fixa.

Conhecer os diversos tipos de taxas existentes é uma medida essencial para quem pretende usufruir de um crédito, pois permite-lhe avaliar os diversos fatores inerentes ao contrato, através da utilização de conhecimento factual para efetuar uma escolha mais sensata e ponderada.

Introduzir a Matemática Financeira no Ensino Médio mostrando aos discentes a importância dos investimentos assim como a abordagem do melhor sistema de amortização nos financiamentos, despertará o interesse desses jovens pela financeira. Iezzi, Hazzan, Degenszajn (2013) faz isso em seu livro Fundamentos de Matemática Elementar - Matemática Comercial, Financeira e Estatística Descritiva. Antes de abordar a Matemática Financeira, os autores supramencionados, mostram a importância da Matemática Comercial com uma abordagem profunda no estudo da razão, proporção, grandezas diretamente e inversamente proporcionais, porcentagem, variação percentual e como já mencionado neste capítulo, taxas de inflação.

Robert T. Kiyosaki (Kiyosaki, 2000) em seu livro: Pai Rico Pai Pobre, retrata a importância de se começar cedo a ensinar educação financeira às crianças. Infelizmente a grande maioria dos pais não assume esse compromisso, nem tem condições de fazê-lo. Portanto, cabe aos professores, construtores de personalidade, ajudar a interromper este ciclo vicioso, educando-se financeiramente e orientando os jovens e adultos a serem mais racionais e menos emotivos no campo das finanças. Mas é através da orientação adequada das crianças que se terá o resultado esperado, pois são elas que implantarão uma nova cultura financeira na sociedade.

Com essas premissas, a Matemática Financeira tem grande relevância em nossos estudos atuais. A proposta de sairmos do corriqueiro estudo de juros simples e compostos e levar aos discentes a aplicabilidade dos juros no dia a dia, faz com que este trabalho seja apreciado e valorizado, objetivando em um melhor ensino aprendizado.

De acordo com Santos (2007), conhecer os conteúdos matemáticos que estão envolvidos nas atividades financeiras tais como os cálculos dos juros simples e compostos, as capitalizações e amortizações de dívidas, investimentos e financiamentos é sem dúvida, uma forma agradável de dar significado a diversos conteúdos importantes da Matemática no Ensino Médio, tais como: razões, proporções, porcentagens, funções, progressões, entre outros.

O discente do Ensino Médio vê na Matemática Financeira uma oportunidade de ingressar com mais facilidade no mercado de trabalho. Com o início das atividades profissionais este passa a envolver-se mais diretamente com a utilização do dinheiro e sente a necessidade de compreender como funcionam as operações financeiras. De acordo com a Secretaria de Estado da Educação do Paraná (2008), é importante que o aluno do Ensino Médio compreenda a Matemática Financeira aplicada aos diversos ramos da atividade humana e sua influência nas decisões de ordem pessoal e social.

A Matemática Financeira possui um leque de aspectos positivos ao aprendizado. Assim, cabe ao docente desenvolver atividades interessantes e motivadoras envolvendo o contexto social onde o discente está inserido. Por diversas vezes o aluno fará indagações como, vale a pena comprar à vista ou à prazo? Esta é a melhor taxa de juros? Este é o melhor sistema de amortização? Como posso melhor investir o meu dinheiro? A explanação conceitual dos tópicos presentes em financeira e exercícios resolvidos em sala de aula podem ilustrar essas situações problemas e estimulando aos alunos resolvê-las. Ao final desse debate, o aluno levará consigo para vida toda um conhecimento adquirido, gerindo melhor o seu dinheiro e desenvolvendo a educação financeira para si e o meio ao qual convive.

Para responder tais perguntas, é importante que o jovem do ensino médio já esteja familiarizado com a matemática comercial e alguns conceitos básicos como, razão e proporção, regra da sociedade, regra de três, porcentagem, variação percentual e outros.

5.1 MATEMÁTICA FINANCEIRA NO BRASIL E ESTADOS UNIDOS

Segundo Yazbek (2015), sobre uma pesquisa realizada em dezenove de novembro de 2015 pela S&P Ratings Services Global Financial Literacy Survey (Pesquisa Global de Educação Financeira da divisão de ratings e pesquisas da Standard & Poor's) que foi baseada em entrevistas realizadas em 2014 com mais de 150 mil adultos, revela que o Brasil está na 74^a posição em um ranking global sobre educação financeira, que conta com 144 países. De acordo com Yazbek (2015), este é um dos mais extensos estudos já realizados sobre educação financeira no mundo. A pesquisa investigou se os entrevistados de cada país dominavam quatro conceitos básicos da Matemática Financeira: aritmética, diversificação de risco, inflação e juros compostos. O país com a população mais educada financeiramente é a Noruega, seguido por Dinamarca e Suécia. Para o espanto de todos, os Estados Unidos, um dos países mais ricos do mundo, ficou apenas em décimo quarto lugar neste ranking.

Este estudo mostra a importância da Matemática Financeira para os dias atuais. Pois para educarmos financeira os nossos jovens, é de extrema relevância o domínio dos conceitos básicos em financeira. Atualmente no Brasil, de acordo com as Orientações Curriculares, no bloco de números e operações, encontramos:

> No trabalho com Números e operações deve-se proporcionar aos alunos uma diversidade de situações, de forma a capacitá-los a resolver problemas do quotidiano, tais como: operar com números inteiros e decimais finitos; operar com frações, em especial com porcentagens; fazer cálculo mental e saber estimar ordem de grandezas de números; usar calculadora e números em notação científica; resolver problemas de proporcionalidade direta e inversa; interpretar gráficos, tabelas e

> dados numéricos veiculados nas diferentes mídias; ler faturas de contas de consumo de água, luz e telefone; interpretar informação dada em artefatos tecnológicos (termômetro, relógio, velocímetro). Por exemplo, o trabalho com esse bloco de conteúdos deve tornar o aluno, ao final do ensino médio, capaz de decidir sobre as vantagens/desvantagens de uma compra à vista ou a prazo; avaliar o custo de um produto em função da quantidade; conferir se estão corretas informações em embalagens de produtos quanto ao volume; calcular impostos e contribuições previdenciárias; avaliar modalidades de juros bancários. (BRASIL, 2006, v. 2, p. 70).

As orientações sugerem que os jovens dominem não apenas a Matemática Financeira, mas que possuem um domínio holístico sobre probabilidade, aritmética, análise de dados e funções. É importante nos dias atuais, o docente acrescentar em seu planejamento o uso da tecnologia, como planilhas do Excel. Para tanto, as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, afirma:

> As planilhas eletrônicas, mesmo sendo ferramentas que não foram pensadas para propósitos educativos, também podem ser utilizadas como recursos tecnológicos úteis à aprendizagem matemática. Planilhas oferecem um ambiente adequado para experimentar sequências numéricas e explorar algumas de suas propriedades, por exemplo, comparar o comportamento de uma sequência de pagamentos sob juros simples e juros compostos. Também oferecem um ambiente apropriado para trabalhar com análises de dados extraídos de situações reais. É possível organizar atividades em que os alunos têm a oportunidade de lidar com as diversas etapas do trabalho de análise de dados reais: tabular, manipular, classificar, obter medidas como média e desvio padrão e obter representações gráficas variadas. (BRASIL, 2006, v. 2. p. 89).

O uso de tais tecnologias procura mudar o cenário do ensino atual, assim como as sugestões de exercícios inseridas nos exemplos abordados por este trabalho.

As propostas sugeridas podem ser constatadas por Morgado (1993), que ministrou com grande êxito um curso de Matemática Financeira para professores do Ensino Médio no Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) em 1992. Em seu livro, que ressalta a possibilidade de os docentes explorarem de forma simples e prática a Matemática Financeira por meio de comparações dos assuntos com problemas reais e do cotidiano. É importante os professores propiciarem aulas mais dinâmicas e interessantes, fazendo uma relação direta e clara com seus pré-requisitos a serem trabalhados.

Em um artigo publicado pelo NEW YORK TIMES, o professor da Universidade de Brown, Munford (2011) afirma que, a Matemática nos Estados Unidos é um grande problema. O desempenho dos alunos em testes nacionais e internacionais estão em queda quando o tema abordado são os números. E de acordo com o professor Munford, as escolas americanas oferecem uma sequência de álgebra, geometria, pré-cálculo e cálculo. Para ele, este currículo altamente abstrato não é a melhor maneira de preparar os alunos para a vida. Ainda de acordo com o professor David Munford, a maioria dos cidadãos seriam melhor servidos por estudar como as hipotecas são pagas, como os computadores são programados e como os resultados estatísticos de um ensaio clínico devem ser entendidos. O professor evidencia em suas palavras a importância da Matemática Financeira assim como assuntos relacionados a matemática no cotidiano das pessoas. Ele ainda sugere para o currículo de Matemática no Ensino Norte Americano, substituir álgebra, geometria e cálculo por finanças e engenharia básica, por exemplo. No curso de finanças, os alunos aprenderiam a função exponencial, utilizar fórmulas em planilhas, estudar os orçamentos das pessoas, empresas e governos. Munford (2011), finaliza sugerindo que, os conselhos de educação estaduais e faculdades, assim como os pais, possuem uma escolha real. Manter a sequência tradicional Matemática do Ensino Médio, onde não é o único caminho para a competência da Matemática, ou, utilizarem da alfabetização quantitativa universal, onde os tópicos de ensinos fazem sentido para todos os alunos e pode ser usado por eles ao longo de suas vidas. Em uma entrevista concedida para a Revista Veja (2011), o professor Munford foi enfático ao dizer que, nos dias atuais o estudo sobre polinômios não têm utilidade alguma para 99,9% da população. Ao invés disso, deveríamos ensinar finanças e engenharia básica, por exemplo. Tal relato, serve para impactar nas pessoas, que existem outros caminhos além daqueles sugeridos pelas escolas.

Percebe-se que tanto no Brasil como em uma das maiores economias do mundo, Estados Unidos, o ensino sobre finanças é de grande importância para a sociedade atual. É pesando nisto, que este trabalho abordará temas atuais dos quais deveriam ser inseridos no currículo de Matemática Financeira do Ensino Médio.

5.2 MATEMÁTICA COMERCIAL

5.2.1 Razão e Proporção

Para Iezzi, Hazzan, Degenszajn (2013), dados dois números a e b, chama-se de razão de a para b, ao quociente , que também pode ser indicado por a:b. O número a é chamado de antecedente e o número b de consequente. Ressalta-se, que quando a e b forem medidas de uma mesma grandeza, elas devem ser expressas na mesma unidade. A igualdade entre duas ou mais razões chamamos de proporção.

O exemplo a seguir exemplificará melhor as definições sobre razão e proporção.

1- Supõe-se que em Janeiro de 2016, as vendas de uma empresa tenham sido de 300 mil reais e que no mês seguinte sejam de 450 mil reais. Segundo os autores Iezzi, Hazzan, Degenszajn (2013), ao compararmos os dois valores dizendo que sua diferença é de 150 mil reais, não nos oferece uma ideia relativa do crescimento de vendas.

Entretanto, ao se aplicar a razão entre os dois meses, 450:300 que é igual a 1,5, temos uma noção de que no mês de fevereiro houve um crescimento de 50% em relação ao mês de Janeiro. Ainda em relação ao exemplo dado, suponhamos agora, que as vendas do mês de março sejam de 600 mil reais e as do mês de Abril, 900 mil reais. Dessa forma, a razão das vendas entre Abril e Março é de 900:600 que é igual a 1,5 e, portanto, essa razão equivale à razão de 450:300, que pode ser representada como segue abaixo:

$$\frac{450}{300} = \frac{900}{600}.$$

Observa-se que o crescimento das vendas de fevereiro para março foi de

$$\frac{600}{450} = 1,33,$$

entretanto, para o mês abril houve uma diminuição do crescimento retornando a razão obtida inicialmente.

A seguir são enunciados e demonstrados algumas das propriedades essenciais das proporções, que se aplicam na solução de diferentes problemas.

• Proposição 1: (Propriedade Fundamental da Proporcionalidade): Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios (IEZZI, HAZZAN, DEGENSZAJN, 2013). Ou seja, se a, b, c, d são números reais tais que,

$$b \neq 0, d \neq 0, \text{ e } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então, } ad = bc.$$

Demonstração:

Como,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow bd\frac{a}{b} = bd\frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc,$$

e duas razões $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são ditas equivalentes, se existe um número k pertencente aos reais tal que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$.

• Proposição 2: Seja $b \neq 0, d \neq 0$, enuncia-se: A soma dos antecedentes está para a soma dos consequentes, assim como, cada antecedente está para o seu consequente. Se

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ então, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Demonstração:

Temos,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc,$$

somando-se ab membro a membro, segue:

$$ad + ab = bc + ab \Rightarrow a(b+d) = b(a+c) \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Porém,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ logo, } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

• Proposição 3: Considerando n maior ou igual a 2 e pertencente aos naturais, segue:

$a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ pertencentes aos reais, com $b_1, b_2, ..., b_n \neq 0$, tais que,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}.$$

Então,

Demonstração:

Por hipótese,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n},$$

seja k pertencente aos reais tal que,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n} = k.$$

Elevando-se cada expressão à potência n, resulta:

$$\frac{a_1^n}{b_1^n} = \frac{a_2^n}{b_2^n} = ... = \frac{a_n^n}{b_n^n} = k^n. \text{ [1]}$$

Por outro lado,

$$\frac{a_1.a_2.....a_n}{b_1.b_2.....b_n} = \frac{a_1}{b_1}.\frac{a_2}{b_2}.....\frac{a_n}{b_n} = k.....k = k^n. \text{ [2]}$$

De [1] em [2] resulta a tese:

$$\frac{a_1.a_2.....a_n}{b_1.b_2.....b_n} = \frac{a_1^n}{b_1^n} = \frac{a_2^n}{b_2^n} = ... = \frac{a_n^n}{b_n^n}.$$

Observação: Tomando os valores n=2 e n=3, tem-se os resultados particulares que usualmente aparecem nos textos sobre estes conteúdos:

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para o quadrado do seu consequente. Isto é,

$$\frac{ac}{bd} = \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}.$$

Se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ o produto dos antecedentes está para o produto dos consequentes, assim como o cubo de cada antecedente está para o cubo do seu consequente. Ou seja,

$$\frac{ace}{bdf} = \frac{a^3}{b^3} = \frac{c^3}{d^3} = \frac{e^3}{f^3}.$$

Os exemplos a seguir exemplificarão melhor as propriedades mencionadas acima.

01) Um investidor aplicou 40 mil reais, sendo 16 mil reais em uma caderneta de poupança e o restante em ações. Calcule a razão entre:

a) o valor aplicado em ações e o valor total investido.

$$\frac{24000}{40000} = \frac{3}{5}.$$

b) o valor aplicado em caderneta de poupança e o valor total investido.

$$\frac{16000}{40000} = \frac{2}{5}.$$

c) o valor aplicado em ações e o valor aplicado em caderneta de poupança.

$$\frac{24000}{16000} = \frac{3}{2}.$$

No próximo exemplo, aplica-se a regra da sociedade, tal regra é usada com auxílio da proposição 2.

02) Três sócios, João, Pedro e Marcos, resolveram abrir uma pizzaria. João investiu 60 mil reais, Pedro investiu 80 mil reais e Marcos investiu 100 mil reais. Após um ano de funcionamento, a pizzaria deu um lucro de 48 mil reais. Se esse lucro for distribuído aos sócios de forma que a quantia recebida seja diretamente proporcional ao valor investido, quanto recebeu cada um?

Ora, percebe-se no exemplo acima que se trata de grandezas diretamente proporcionais, ou seja, a razão entre a medida "a"de uma e a correspondente "b"da outra com $b \neq 0$, for constante igual a k e diferente de zero, a razão entre cada valor de b e seu correspondente a também é constante e vale o inverso de k. Desse modo, temos que o lucro de cada sócio está para o valor investido por cada um, onde "a"refere-se ao lucro de João, "c"refere-se ao lucro de Pedro e "e"refere-se ao lucro de Marcos, vem:

$$\frac{a+c+e}{60+80+100} = \frac{a}{60} = \frac{c}{80} = \frac{e}{100} = \frac{a+c+e}{240}.$$

Logo, resolvendo as igualdades separadamente através da propriedade fundamental de Razão e Proporção e observando que a soma dos lucros a+b+e refere-se ao lucro da Pizzaria, vem:

$$\frac{a}{60} = \frac{c}{80} = \frac{e}{100} = \frac{48}{240}.$$

Temos,

$$240a = 60.48; 240c = 80.48; 240e = 100.48.$$

Logo,

$$\frac{a}{60} = \frac{c}{80} = \frac{e}{100} = \frac{48}{240}.$$

Sendo assim,

$$240a = 60.48; 240c = 80.48; 240e = 100.48.$$

Logo,

$$a = \frac{60.48}{240}; c = \frac{80.48}{240}; e = \frac{100.48}{240}.$$

Conclui-se que,

$$a = 12; c = 16; e = 20.$$

Desse modo, conclui-se que o lucro de João foi de 12 mil reais, o lucro de Pedro foi de 16 mil reais e o lucro de Marcos foi de 20 mil reais, no período mencionado.

Já no terceiro exemplo, usa-se uma situação ao qual será abordado o uso de grandezas inversamente proporcionais.

03) Um pintor A faz um trabalho em 5 horas e um pintor B faz o mesmo trabalho em 4 horas. Mantida a eficiência de cada um, em quanto tempo os dois juntos realizam o trabalho?

Para resolver este tipo de situação problema, é interessante encontra a fração correspondente do trabalho feito em uma hora. Para o pintor A, temos $\frac{1}{5}$ do trabalho realizado em uma hora e já para o pintor B, temos $\frac{1}{4}$ do trabalho realizado na primeira hora. Notemos que as grandezas são inversamente proporcionais, pois quando o produto da medida $"a"$ de uma e a correspondente $"b"$ da outra for constante e diferente de zero, $a.b = k$, percebe-se que $"a"$ será diretamente proporcional ao inverso de $"b"$, pois $\frac{a}{\frac{1}{b}} = k$.

Dada a definição, temos que a soma dos trabalhos realizados pelos pintores na primeira hora é equivalente ao inverso do trabalho realizado em x horas, logo,

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{9}{20} = \frac{1}{x} \Rightarrow 9x = 20 \Rightarrow x = \frac{20}{9} = (2 + \frac{2}{9})\text{horas.}$$

Transformando a fração da hora em minutos vem:

$$\frac{2}{9}.60 \text{ minutos } = \frac{120}{9} = (13 + \frac{13}{9})\text{minutos.}$$

Analogamente, faz-se a transformação para segundos, segue:

$$\frac{3}{9}.60 \text{ segundos = 20 segundos.}$$

Logo, os dois pintores juntos realizarão o trabalho em 2 horas 13 minutos e 20 segundos.

O próximo exemplo refletirá uma situação problema onde se aplica a regra de três composta.

04) Vinte máquinas, funcionando 6 horas por dia, durante 80 dias, produzem 100 mil peças. Determine o número de dias que 30 dessas máquinas, funcionando 8 horas por dia, produzem 250 mil peças.

Inicialmente é importante tabelar os dados contidos no problema acima, desse modo, vem:

Máquinas	Horas por dia	Dias	Peças
20	6	80	100 mil
30	8	x	250 mil

Isolando o termo desconhecido e comparando as demais variáveis com os dias trabalhados temos:

$$\frac{80}{x} \text{ [1]},$$

porém, se aumentarmos o número dias as máquinas produzirão mais peças, logo,

$$\frac{100mil}{250mil}\text{, grandeza diretamente proporcional. [2]}$$

Por outro lado, se aumentarmos o número de dias para produzirmos uma quantidade x de peças, significa que teremos menos máquinas trabalhando, logo,

$$\frac{30}{20}\text{, grandeza inversamente proporcional. [3]}$$

Agora, se aumentarmos o número de dias para produzirmos uma quantidade x de peças, significa que teremos menos horas trabalhadas por dia, logo,

$$\frac{8}{6}\text{, grandeza inversamente proporcional. [4]}$$

Desse modo, comparando [1] com [2], [3] e [4] a proporcionalidade ficará:

$$\frac{80}{x} = \frac{100}{250}.\frac{30}{20}.\frac{8}{6} \Rightarrow \frac{80}{x} = \frac{4}{5} \Rightarrow 4x = 400 \Rightarrow x = 100.$$

Conclui-se que, precisará de 100 dias para atender a situação problema.

5.2.2 Porcentagem

As razões de denominador 100 são chamadas de razões centesimais ou porcentagem. As porcentagens são indicadas pelo numerador seguido do símbolo de % (por cento). Por exemplo, suponhamos hipoteticamente que os valores do Produto Interno Bruto (PIB) do Brasil e da Argentina, em bilhões de reais, em dois anos consecutivos que chamaremos de 1 e 2, sejam PIB ano 1 do Brasil igual a 600 bilhões e o da Argentina igual a 400 bilhões, já o PIB ano 2 do Brasil é igual a 660 bilhões e o da Argentina é igual a 452 bilhões, verificamos que o crescimento do PIB brasileiro corresponde a 60 bilhões e o argentino 52 bilhões. Dessa maneira, a razão entre o crescimento do PIB e o PIB do ano 1 vale, $\frac{60}{600}$ bilhões para o Brasil e $\frac{52}{400}$ bilhões para a Argentina. Uma das maneiras de compararmos essas razões consiste em expressarmos ambas com o mesmo denominador, preferencialmente, igual a 100. Logo,

$$\frac{52}{400} = \frac{x}{100} \Rightarrow 4x = 52 \Rightarrow x = 13e\frac{60}{600} = \frac{x}{100} \Rightarrow 6x = 60 \Rightarrow x = 10.$$

Portanto,

$$\frac{52}{400} = \frac{13}{100} = 0,13 = 13\%e\frac{60}{600} = \frac{10}{100} = 0,1 = 10\%.$$

A seguir, veremos alguns exemplos dos quais o emprego da porcentagem é usado em um contexto social onde o discente está inserido e que, motivará ao mesmo no processo de ensino aprendizagem.

01) Um investidor comprou um terreno por R$ 60.000,00 no bairro Cidade Satélite em Boa Vista-RR, e o vendeu, um ano após a compra, por R$ 90.000,00. Qual o lucro, em porcentagem sobre o preço de custo?

Nessa situação problema, é importante que, o discente tenha conhecimento sobre preço de custo, preço de venda e lucro. O preço de custo no problema acima é o valor investido na compra do terreno, R$ 60.000,00. Já o preço de venda é dado após a venda efetuada um ano depois da compra, R$ 90.000,00. O lucro dessa transação é a diferença entre o preço de venda pelo preço de custo, R$ 30.000,00. Para respondermos o problema, a razão entre o lucro e o preço de custo é dada por,

$$\frac{30000}{60000} = \frac{1}{2} = 0,5 = 50\%.$$

02) Um brinco de ouro cujo preço de tabela é de R$ 720,00 é vendido com um desconto de 20%. Qual o preço após sofrer o desconto?

Nesse exemplo foi abordado o desconto em uma transação. Aqui, os jovens terão um contato imediato com os valores abatidos em uma negociação e poderão diferenciar desconto de juros. Como o brinco custa R$ 720,00 e sofreu um desconto de 20%, é importante que, o discente faça a correlação do inteiro 100% com o valor descontado 20%, logo, $100\% - 20\% = 80\%$, desse modo observamos que, o valor do brinco custará após o desconto, 80% do valor inicial, ou seja, $720.80\% = 0,8.720 = 576$. Logo, o brinco custará após o desconto, R$ 576,00.

03) Um funcionário de uma empresa cujo salário mensal vale S paga uma prestação P do financiamento de seu imóvel. Se inicialmente esse funcionário gasta, mensalmente, 10% do seu salário com a prestação do P do financiamento, qual o

salário S desse funcionário sabendo que, houve um aumento de 25% no preço da prestação o que proporciona um acréscimo de R$ 120,00 em sua despesa mensal?

É importante o aluno relacionar o aumento percentual do salário com o que gasta dele. Sendo assim, $P = 10\% de S = 0,1S$. Agora, é necessário encontrarmos uma nova equação da prestação em função do salário. Como houve um aumento percentual de 25% no valor da prestação, vamos multiplicar membro a membro a equação anterior por 1,25, que corresponde ao aumento de 25%. Logo, $1,25P = 1,25.0,1S = 0,125S$. Percebemos nessa equação que, ao aumentarmos 25% no valor da prestação o funcionário gastará $12,5\%$ do seu salário com a mesma. Sendo assim, temos inicialmente um gasto de 10% do salário com a prestação e realizando a diferença com o novo gasto, encontraremos um percentual de aumento equivalente a $2,5\%$ do salário $(12,5\% - 10\% = 2,5\%)$. Isso implica que, os $2,5\%$ correspondem ao acréscimo de $R\$120,00$, logo, o salário do funcionário será o inteiro 100%, que equivale a 40 vezes o aumento percentual registrado, ou seja, $40.R\$120,00 =R 4.800,00.

04) No Brasil, o imposto de renda (IR) é descontado dos salários mensais da seguinte forma:

1) Para salários de até R$ 1903,98, o IR é zero.

2) De R$ 1903,99 até R$ 2826,65 é tributado em $7,5\%$.

3) De R$ 2826,66 até R$ 3751,05 é tributado em 15%.

4) De R$ 3751,06 até R$ 4664,68 é tributado em $22,5\%$.

5) Acima de R$ 4664,68 é tributado em $27,5\%$.

A tabela acima está vigente desde 01/04/2015, medida provisória 670/2015 convertida na lei 13149/2015. De acordo com a tabela acima, chamando de x a renda e de y o imposto de renda, expresse y em função de x.

Aqui o jovem do ensino médio estará familiarizado com os valores atuais do IR, além de ter um conhecimento básico em função linear a fim de encontrar a mesma. Para tanto, é importante observar os intervalos descritos na tabela acima. Inicialmente, no caso 1 da tabela percebemos que o IR é igual a zero, ou seja, y = 0. Já para o caso 2, temos:

$$y = (0,075)(x - 1903,99) = 0,075x - 142,80.$$

No caso 3, encontra-se a função:

$$y = (0,075)(922,66) + (0,15)(x - 2826,66) = 69,20 + 0,15x - 424 = 0,15x - 354,80.$$

Para o caso 4, faremos:

$$y = (0,075)(922,66) + (0,15)(924,39) + (0,225)(x - 3751,06).$$

Logo,

$$y = 69,20 + 138,66 + 0,225x - 843,99.$$

Conclui-se que,

$$y = 0,225x - 636,13.$$

Finalmente chega-se ao caso 5, onde:

$$y = (0,075)(922,66) + (0,15)(924,39) + (0,225)(913,62) + (0,275)(x - 4664,68).$$

Logo,

$$y = 69,20 + 138,66 + 205,56 + 0,275x - 1282,79.$$

Conclui-se que,

$$y = 0,275x - 869,37$$

Esses resultados são geralmente indicados pela tabela a seguir:

Salário	Alíquota do IR	Parcela a deduzir
Até R$ 1903,98	Isento	-
De R$ 1903,99 até R$ 2826,65	7,5%	R$ 142,80
De R$ 2826,66 até R$ 3751,05	15%	R$ 354,80
De R$ 3751,06 até R$ 4664,68	22,5%	R$ 636,13
Acima de R$ 4664,69	27,5%	R$ 869,37

5.2.3 Variação percentual

Segundo Iezzi, Hazzan, Degenszajn (2013), chamamos de variação percentual entre duas grandezas, que assumam V_0 na data inicial e V_t na data futura, a razão entre a diferença dessas grandezas pela grandeza inicial, ou seja, $j = \dfrac{V_t - V_0}{V_0}$, onde j é a variação percentual.

A partir daí, demonstra-se as variações percentuais acumuladas como veremos a seguir:

Se indicarmos por $V_0, V_1, V_2, ..., V_n$ os valores das grandezas nas datas $0, t_1, t_2, ..., t_n$ poderemos escrever:

$$j = \frac{V_t - V_0}{V_0} = \frac{V_t}{V_0} - 1$$,

logo,

$$j_1 = \frac{V_1}{V_0} - 1 \Rightarrow V_1 = V_0(1 + j_1).$$

Para j_2,

$$j_2 = \frac{V_2}{V_1} - 1 \Rightarrow V_2 = V_1(1 + j_2) = V_0(1 + j_1)(1 + j_2).$$

Para j_3,

$$j_3 = \frac{V_3}{V_2} - 1 \Rightarrow V_3 = V_2(1 + j_3) = V_0(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3).$$

Conclui-se que,

$$V_n = V_0(1 + j_1)(1 + j_2)(1 + j_3)...(1 + j_n).$$

A variação percentual entre as datas 0 e $"n"$ damos o nome de variação percentual acumulada, também conhecida como,

$$j_{ac} = \frac{V_n}{V_0} - 1.$$

Substituindo o numerador, temos:

$$j_{ac} = \frac{V_0(1 + j_1)(1 + j_2)...(1 + j_n)}{V_0} - 1 = (1 + j_1)(1 + j_2)...(1 + j_n) - 1.$$

Veremos a seguir alguns exemplos dos quais poderemos utilizar na abordagem da variação percentual nos jovens do ensino médio.

01) Em 2014 o número de habitantes do estado de Roraima era aproximadamente 497 mil e em 2015 esse número subiu para aproximadamente 506 mil. Qual a variação percentual entre as datas consideradas?

Temos, $j = \frac{506000}{497000} - 1 = 0,018 = 1,8\%$. Ou seja, houve uma variação de $1,8\%$ de aumento habitacional em um ano.

02) Um automóvel 0 Km custa R$ 65.000,00. Um ano depois, o preço teve um decréscimo de 20% e, após mais um ano, teve outro decréscimo de 5%. Qual a taxa acumulada de decréscimo no período?

Sabemos que,

$$j_{ac} = (1 + j_1)(1 + j_2)...(1 + j_n) - 1,$$

onde i representa a taxa.

Logo,

$$j_{ac} = (1 - 0,2)(1 - 0,5) - 1 = 0,8.0,95 - 1 = -0,24 = -24\%.$$

Ou seja, no biênio mencionado, o automóvel teve uma desvalorização de 24%.

5.2.4 Inflação e Deflação

Segundo Iezzi, Hazzan, Degenszajn (2013), defini-se inflação ao fenômeno do aumento persistente e generalizado dos preços de bens e de serviços, com conseqüente perda do poder aquisitivo da moeda. O governo coloca como meta o combate à inflação, que atualmente chegou aos dois dígitos, como pode ser visto no quadro 2 em Fundos de investimentos em renda fixa. Este combate é importante e essencial para a saúde financeira do país, pois a inflação acarreta grandes distorções numa economia de mercado. Por outro lado, entende-se por deflação o fenômeno da queda persistente dos preços dos bens e de serviços, de acordo com IEZZI, HAZZAN, DEGENSZAJN, 2013. A deflação acarreta problemas como a queda do investimento, que culmina na queda da produção e principalmente no aumento de desemprego. O mais grave no caso de uma deflação, é que ela pode levar um país a uma depressão, como ocorreu com a crise dos Estados Unidos entre 1929 e 1933. Geralmente, para se conter a deflação, o governo aumenta os gastos públicos.

De acordo com os autores supramencionados, a inflação é medida segundo a composição de uma cesta básica de produtos com quantidades físicas bem determinadas. Em seguida, os preços destes produtos são coletados mensalmente e então, com base no preço médio desses produtos, obtém-se o valor da cesta básica. A taxa de inflação mensal é a variação percentual do valor médio da cesta calculada entre um mês e o mês anterior.

Os exemplos abaixo são situações cotidianas voltadas para a Matemática Financeira e que, envolvem variações dos preços das mercadorias devido a inflação ou deflação.

01) Uma pesquisa realizada neste ano de 2016 quanto ao preço de uma mercadoria, foram registrados os seguinte valores no último dia do mês: Janeiro: R$ 5,20, Fevereiro: R$ 6,50 e Março: R$ 7,10. Determine a taxa de juros acumulada ao final do trimestre.

Nessa questão devemos observar os aumentos sucessivos e encontrarmos as taxas mensais de aumento, para em seguida, calcular a taxa de juros acumulados. Sendo assim, temos:

Janeiro – Fevereiro: $\dfrac{6,50}{5,20} - 1 = 1,25 - 1 = 0,25 = 25\%.$

Fevereiro – Março: $\frac{7,10}{6,50}-1 = 1,092-1 = 0,092 = 9,2\%$.

Taxa de juros acumulada $= (1+0,25)(1+0,092)-1 = 0,365 = 36,5\%$ ao trimestre.

02) Em um determinado período em que a inflação é de 9,5%, qual a perda do poder aquisitivo da moeda, sabendo que a cesta básica nesse período equivale a R$ 90,00?

Para solucionar esta situação problema, é necessário tomarmos um valor arbitrário da moeda, por exemplo, R$ 900,00. Dessa forma, temos:
O poder aquisitivo de R$ 900,00 equivale a quanto esse valor consegue comprar a cesta básica, logo, $900 : 90 = 10$ cestas básicas. Porém, ao final do período, o valor da cesta básica é de $(1+0,095).90 =$ R$ 98,55 e com R$ 900,00 comprará $900 : 98,55 = 9,13$ cestas básicas. A variação percentual do poder aquisitivo é $\frac{9,13}{10}-1 = -0,087 = -8,7\%$. Portanto, a moeda teve uma perda de poder aquisitivo igual a $8,7\%$.

5.3 JUROS SIMPLES E COMPOSTOS

5.3.1 Juros Simples

Como já foi descrito anteriormente, os juros simples são resultados do produto do capital pela taxa e o prazo da aplicação, de acordo com SAMANEZ, 2010. Vale ressaltar que, não existe capitalização de juros nesse regime, pois os juros de determinado período não são incorporados ao principal. Logo, dado ao comportamento linear dos cálculos no regime de juros simples e denominando como P o capital principal, J o juros simples, i a taxa de juros simples e n o período da transação, tem-se, $J = P.i.n$.

O exemplo a seguir é uma situação problema onde o jovem do ensino médio aplicará o regime de juros simples em mais de um período. Desse modo, vem:

01) Certo aluno que cursava o terceiro ano do ensino médio, tem os seguintes compromissos a pagar para quitar a sua formatura: R$ 2000,00 daqui a três meses e R$ 4000,00 daqui a oito meses. Ele quer trocar esses débitos por dois pagamentos iguais, um para dez meses e outro para doze meses. Determine o valor desses pagamentos sabendo que, a taxa de juros simples é de 10% ao mês.

Terceiro mês:

$$\frac{2000}{1+0,1.3} = \frac{2000}{1,3} = 1538,46.$$

Oitavo mês:

$$\frac{4000}{1+0,1.8} = \frac{2000}{1,8} = 2222,22.$$

Décimo mês:

$$\frac{x}{1+0,1.10} = \frac{x}{2}.$$

Décimo segundo mês:

$$\frac{x}{1+0,1.12} = \frac{x}{2,2}.$$

Percebemos que, pelos dados do problema, os dois esquemas de pagamento são equivalentes em determinada data, logo:

$$1538,46 + 2222,22 = \frac{x}{2} + \frac{x}{2,2} = \frac{2,2x + 2x}{4,4}.$$

Logo,

$$\frac{4,2x}{4,4} = \frac{2,1x}{2,2} \Rightarrow 3760,68.2,2 = 2,1x.$$

Conclui-se que,

$$x = 3939,76.$$

Os juros simples têm aplicações práticas limitadas, pois raramente são usados nas operações financeiras e comerciais. Entretanto, o seu uso restringe-se às operações de curto prazo. Por sua vez, nestas operações, em seus cálculos não costumam apurar seu custo ou rentabilidade efetiva por meio desse regime.

5.3.2 Juros Compostos

Vimos que os juros compostos é o mais comum no dia a dia e são chamados de juros capitalizados. Abaixo, vamos analisar mensalmente o que ocorre com um montante (M) de um capital (P) aplicado a uma taxa de juros composta (i) durante três períodos:
Ao final do primeiro período: $M = P(1+i)$.
Ao final do segundo período: $M = P(1+i)(1+i)$.
Ao final do terceiro período: $M = P(1+i)(1+i)(1+i)$.

Generalizando para n períodos, podemos calcular diretamente o montante, logo:

$$M = P(1+i)(1+i)(1+i)...(1+i) \Rightarrow M = P(1+i)^n.$$

Observa-se que, na fórmula, a taxa de juros deve sempre se referir à mesma unidade de tempo do período financeiro. Perceba-se que o fator $M = P(1+i)^n$ é conhecido como fator de capitalização, ou seja, é o número pelo qual devemos multiplicar o valor da aplicação inicial para obter o seu valor futuro.

01) Cintia deposita R$ 1500,00 em uma caderneta de poupança. Dois meses depois, deposita mais R$ 2000,00 e, três meses depois desse último depósito, realiza uma retirada de R$ 1000,00. Qual será o saldo da poupança ao final do sexto mês, considerando que a taxa de juros compostos obtida é de 5% ao mês?

Inicialmente vamos calcular os juros gerados ao final do sexto mês com a primeira aplicação feita por Cintia, temos:

$$M = P(1+i)^n \Rightarrow M = 1500(1+0,05)^6 = 2010,14.$$

Em seguida, calcularemos os juros após a segunda aplicação, vem:

$$M = 2000(1+0,05)^4 = 2431,01.$$

É importante calcularmos os juros sobre a retirada, logo,

$$M = 1000(1+0,05) = 1050,00.$$

Desse modo, o saldo da caderneta de poupança ao final do sexto mês será, $2010,14 + 2431,01 - 1050,00 =$ R$3391,15.

O exemplo a seguir trabalha com equivalências de capitais envolvendo juros compostos e é muito usado nos dias atuais através do fluxo de caixa, entretanto, o exemplo será solucionado por comparação das transações no período mencionado, segue:

02) Uma pessoa tem uma dívida de R$ 5000,00 com vencimento em dois anos e uma dívida de R$ 20000,00 com vencimento em seis anos. Pretende quitar seus débitos por meio de um pagamento único a ser realizado ao final de quatro anos. Considerando uma taxa de juros composta de 10% ano ano, determinar o valor do pagamento único para quitação da dívida.

Por equivalência de capitais, percebemos que o valor do pagamento único deve ser igual ao valor atualizado no quarto ano, segue:

Até o quarto ano:

$$5000.(1,1)^2 = 6050.$$

Do quarto ano ao final do sexto ano:

$$20000.(1,1)^{-2} = 16528,93.$$

Sendo assim, o valor x a ser pago no quarto ano será: $x = 6050,00 + 16528,93 =$ R$ 22578,93.

O próximo exemplo reflete uma situação corriqueira de antecipação de dívida. Para solucionar este problema, é importante que o jovem do ensino médio fique atento aos juros nos períodos explicitados pelo problema, segue:

03) Um jovem adquiriu uma dívida em regime de juros compostos de 5% ao mês, ao qual pagará da seguinte forma: no final de seis meses, no fim de dez meses e no fim de doze meses. Daqui a quantos dias deve ser feito um pagamento único de , para liquidar a dívida?

Para resolver este problema vamos primeiramente calcular o valor presente da dívida, logo:

$$P = \frac{500}{(1,05)^6} + \frac{400}{(1,05)^{10}} + \frac{800}{(1,05)^{12}} = 373,13 + 245,40 + 444,44 = 1062,97.$$

Em seguida vamos calcular o prazo do pagamento único, vem:

$$M = P(1+i)^n.$$

Logo,

$$1600 = 1062,97(1+0,05)^n \Rightarrow 1,51 = (1,05)^n.$$

Aplicando logaritmo decimal membro a membro, vem:

$$log 1,51 = log(1,05)^n \Rightarrow n = \frac{log 1,51}{log 1,05} = \frac{0,1790}{0,0212} = 8,44 meses.$$

Transformando para dias, segue:

$$240 dias + \frac{44}{100}.30 dias = 240 + 13,2 = 253 dias.$$

5.4 SÉRIES PERIÓDICAS UNIFORMES

As séries periódicas uniformes podem ser divididas em séries postecipadas, antecipadas e diferidas, segundo IEZZI, HAZZAN, DEGENSZAJN, 2013. Os autores, definem séries postecipadas como aquelas em que os pagamentos ocorrem no final de cada período e não na origem, exemplo, fatura do cartão de crédito. As séries antecipadas, são aquelas onde os pagamentos são feitos no início de cada período respectivo, por exemplo, financiamentos com pagamento à vista. Já nas séries diferidas, o período de carência constitui-se em um prazo que separa o início da operação do período de pagamento da primeira parcela, por exemplo, promoções do tipo compre hoje e só pague comece a pagar somente daqui a 30 dias.

Demonstrando o valor presente de uma série de parcelas uniformes e postecipadas,seja R o valor unitário dos termos da série, P o valor presente, i a taxa de juros compostos e n o período da transação, temos:
Primeiro mês: $R(1+i)^{-1}$.
Segundo mês: $R(1+i)^{-2}$.
Terceiro mês: $R(1+i)^{-3}$.
N-ésimo mês: $R(1+i)^{-n}$.
Logo, o valor presente dos termos da série será:

$$P = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \frac{R}{(1+i)^3} + ... + \frac{R}{(1+i)^n}.$$

Porém, podemos escrever a equação acima como:

$$P = R[(1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + (1+i)^{-3} + ... + (1+i)^{-n}],$$

o somatório entre colchetes trata-se da soma dos termos de uma progressão geométrica finita. Utilizando a forma conhecida da soma dos termos das progressões geométricas, podemos desenvolver a equação P da seguinte maneira:

$$P = R[\frac{(1+i)^{-1} - (1+i)^{-n}.(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-1}}] = R[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}].$$

A seguir alguns exemplos dos quais exemplificarão melhor a fórmula acima deduzida.

01) Um notebook cujo preço à vista é R\$ 3000,00 será pago em seis prestações mensais iguais que vencem ao final de cada mês. Considerando que o juro composto cobrado é de 5% ao mês, calcule o valor das prestações.

Para calcularmos as prestações, vamos recorrer a fórmula

$$P = R[\frac{(1+i)^n - 1}{i.(1+i)^n}],$$

onde P é o principal, ou seja, R\$ 3000,00. Temos:

$$3000 = R[\frac{(1+0,05)^6 - 1}{0,05.(1+0,05)^6}] = R.\frac{0,3401}{0,0670} = 5,0761R \Rightarrow R = \frac{3000}{5,0761} = 591,01.$$

Logo, as prestações serão no valor de R$ 591,01.

02) Uma pessoa entregou o seu veículo usado na compra de um novo, onde ela pode abater R$ 30000,00 do valor à vista, que é R$ 74000,00. O saldo será pago por meio de determinada entrada mais 24 prestações mensais postecipadas de R$ 1400,00 cada. Considerando que foi aplicado juros nominais de 24% ao ano, capitalizados mensalmente, determine o valor da entrada.

Inicialmente vamos calcular a taxa de juros efetiva mensal, segue:

$$\frac{0,24}{12} = 0,02 = 2\%.$$

Agora vamos calcular as prestações, temos:

$$74000 - 30000 - E = 350[\frac{(1+0,02)^{24}-1}{0,02.(1+0,02)^{24}}] = 350.\frac{0,6084}{0,0322} = 6613,04$$

Logo,

$$44000 - E = 6613,04 \Rightarrow E = 37386,96.$$

Conclui-se que, a entrada será de R$ 37386,96.

03) Um financiamento de R$ 100000,00 será pago em 36 prestações mensais a juros efetivos de 2% ao mês. Considerando que foi contratado um período de carência de 6 meses, calcular o valor das prestações antecipadas e postecipadas.

a) Cálculo das prestações antecipadas:

Observa-se que no caso das prestações serem antecipadas, a primeira parcela será paga no início do primeiro mês que segue o término da carência e os juros são capitalizados e incorporados ao principal, logo: R$ 100.000,00 . $(1,02)^5$ = R$ 110.408,08. Com isso, temos,

$$R = \frac{110408,08}{\frac{(1,02)^{36}-1}{(1,02)^{36}.0,02}} = \frac{110408,08}{\frac{1,0399}{0,0408}} = \frac{110408,08}{25,49} = 4331,43.$$

As prestações antecipadas serão de R$ 4331,43.

b) Cálculo das prestações postecipadas:

Nesse caso, o pagamento da primeira parcela ocorrerá no fim do primeiro mês que se segue após o término da carência e as prestações devem ser calculadas sobre o principal capitalizando durante o período de carência, segue:

$$R = \frac{100000.(1,02)^6}{\frac{(1,02)^{36}-1}{(1,02)^{36}.0,02}} = \frac{112616,24}{25,49} = 4418,06.$$

As prestações postecipadas serão de R$ 4418,06.

6 FUNDOS DE INVESTIMENTOS EM RENDA FIXA

Os fundos de Investimentos, são aplicações em títulos de renda públicos ou privados. Possuem gestão que buscam o retorno do capital investido, não contam com a garantia do administrador ou outra qualquer (SHOPINVEST, 2007). Neste capítulo são apresentados os fundos de investimentos em reda fixa, com ênfase nos certificados de depósitos bancários (CDB) e na caderneta de poupança.

Renda fixa são títulos que pagam, em períodos definidos, uma certa remuneração, que pode ser determinada no momento da aplicação ou no momento do resgate. A maneira mais fácil de entender o que é um título de renda fixa é imaginar cada título como um empréstimo. Cada vez que se compra um título de renda fixa é emprestado dinheiro ao órgão emissor do título, que pode ser público ou privado. Os juros cobrados são as remunerações recebidas ao emprestar o dinheiro (aquisição do título de renda fixa).

Segundo Cerbasi (2008), no momento do investimento é pré-estabelecido à forma de cálculo dos juros sobre o capital emprestado, que pode ser; Prefixado ou Pós-fixado. O principal objetivo destes investimentos é fazer com que os bancos, empresas e o governo, consigam recursos da população a uma taxa de juros mais baixa, do que seria se captassem diretamente de bancos.

Segundo Fortuna (2010) cita que a formação dos fundos de renda fixa deve possuir 80% dos ativos em investimentos de renda fixa, tendo como principal fator de risco a variação da taxa de juros doméstica e/ou variação do índice de preços.

Segundo circular do Banco do Brasil Os títulos de renda fixa se caracterizam por possuírem regras estabelecidas de remuneração. Isto é, são aqueles títulos cujo rendimento é conhecido previamente (juro prefixado) ou que depende de indexadores (taxa de câmbio ou de inflação, taxa de juros, etc.). Os investimentos em títulos de renda fixa exige que se observem algumas características específicas dessa categoria de ativo. Suas características mais importantes são: quem é o emissor do título; qual é o prazo título; e qual é o tipo de rendimento do título.

Segundo a Receita Federal (2007) o mercado de Renda Fixa:

> Compõe-se de ativos de renda fixa aqueles cuja remuneração ou retorno de capital pode ser dimensionado no momento da aplicação. Os títulos de renda fixa são públicos ou privados, conforme a condição da entidade ou empresa que os emite. Como títulos de renda fixa públicos citam-se as Notas do Tesouro Nacional (NTN), os Bônus do Banco Central (BBC), os Títulos da Dívida Agrária (TDA), bem como os títulos estaduais e municipais. Como títulos de renda fixa privados, aqueles emitidos por instituições ou empresas de direito privado, citam-se as

> Letras de Câmbio (LC), os Certificados de Depósito Bancário (CDB), os Recibos de Depósito Bancário (RDB) e as Debêntures. Equiparam-se a operações de renda fixa, para fins de incidência do imposto de renda na fonte, as operações de mútuo e de compra vinculada à revenda, no mercado secundário, tendo por objeto ouro, ativo financeiro, as operações de financiamento, inclusive box, realizadas em bolsas de valores, de mercadorias e de futuros e as operações de transferência de dívidas, bem como qualquer rendimento auferido pela entrega de recursos a pessoa jurídica.

Os títulos Prefixados são aqueles cuja a rentabilidade é conhecida no momento da aquisição. Esta rentabilidade está associada a um valor previamente conhecido (juros) e uma data de vencimento. Nesse tipo de investimento o valor investido é resgatado na data de vencimento acrescido da remuneração. Alguns exemplos de títulos Prefixados são a caderneta de poupança e alguns títulos públicos como a Letra do Tesouro Nacional e Nota do Tesouro Nacional série F.

Já os títulos Pós-Fixados o seu rendimento está associado a indicadores do mercado além de terem uma garantia fornecida pelo emissor como percentual mínimo de ganho. Ou seja, na data de vencimento, o investidor resgata o seu investimento acrescido da remuneração determinada por estes indicadores no período de investimento. São exemplo de títulos pós-fixados, Certificado de Depósito Bancário, Letra Financeira do Tesouro, além de outros títulos públicos e privados.

Algumas formas de investir em títulos de renda fixa são através dos Certificados de Depósito Bancário e Caderneta de Poupança. Os CDBs (certificados de depósitos bancários) são títulos prefixados ou pós-fixados. Ao investir em CDB ou qualquer outro título em renda fixa, é importante comparar vários títulos ao mesmo tempo para se beneficiar desta mesma diversificação, pois com ela diminui-se o risco das aplicações.

6.1 CADERNETA DE POUPANÇA

É o fundo de investimento em renda fixa mais simples e tradicional, com liquidez de 30 em 30 dias e isenta do imposto de renda. A sua remuneração é composta pela valorização da taxa referencial mais 0,5% ao mês. Este é o único investimento garantido pelo governo federal.

Com rendimentos pequenos e fixos de 6,17% ao ano mais TR (taxa referencial), a caderneta de poupança é o segundo pior investimento disponível no Brasil, só ganha do rendimento do FGTS com seus terríveis 3% ao ano mais TR (taxa referencial). Nem todos têm consciência de que a caderneta mal cobre a inflação, e mesmo tendo os investidores resistem em sair dela. Os motivos são sempre os mesmos, segurança e liquidez para o colchão financeiro (CALIL,2014).

No quadro abaixo observa-se a desvalorização da poupança nos três primeiros meses do ano e no último trimestre de 2015. Nota-se que, em Agosto de 2015 a poupança teve o seu maior rendimento no período explicitado abaixo.

Tabela 1 - Rendimento da Poupança

Data	Rendimento Mensal	Rendimento Acumulado
Janeiro/2015	0,6058%	0,6058%
Fevereiro/2015	0,5882%	1,1975%
Março/2015	0,5169%	1,7206%
Abril/2015	0,6302%	2,3617%
Maio//2015	0,6079%	2,9839%
Junho/2015	0,6159%	3,6182%
Julho/2015	0,6822%	4,3251%
Agosto/2015	0,7317%	5,0884%
Setembro/2015	0,6876%	5,8111%
Outubro/2015	0,6930%	6,5443%
Novembro/2015	0,6799%	7,2687%
Dezembro/2015	0,6303%	7,9448%

Fonte: IPCA 2015

A tabela a seguir mostra a variação da inflação no ano de 2015. Este índice é calculado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Tabela 2 - Variação da Inflação

Data	Variação Mensal	Variação Anual
Janeiro/2015	1,24%	7,1378%
Fevereiro/2015	1,22%	7,7018%
Março/2015	1,32%	8,1286%
Abril/2015	0,71%	8,1716%
Maio//2015	0,74%	8,4731%
Junho/2015	0,79%	8,8944%
Julho/2015	0,62%	9,5586%
Agosto/2015	0,22%	9,5259%
Setembro/2015	0,54%	9,4932%
Outubro/2015	0,82%	9,9293%
Novembro/2015	1,01%	10,4762%
Dezembro/2015	0,96%	10,6735%

Fonte: IPCA 2015

Atualmente a remuneração da poupança é incapaz de compensar a própria inflação que gira em torno de 10,6735% ao ano como podemos observar na tabela 2 acima. Já na tabela 1, verificamos que a poupança rendeu no mesmo período 7,9448% anuais.

Para ilustrar melhor as informações contidas nas tabelas acima, segue o exemplo abaixo:

01) Cintia aplicou em Janeiro de 2015, R$ 1.000,00 na poupança para ser resgatado em Janeiro de 2016. Neste período ela teve um rendimento de R$ 79,45 como podemos observar abaixo ou pela calculadora do cidadão disponível no site do Banco Central.

$$\text{Juros} = 1000.1,079448.1 = \text{R\$ 1.079,45.}$$

A inflação neste período foi de R$ 106,74, pois 1000 . 1,106735 = R$ 1.106,74. Ou seja, verificamos que o valor investido por Cintia na Caderneta de Poupança rendeu bem abaixo da inflação, implicando no péssimo investimento feito por ela.

Outro exemplo sobre aplicação na caderneta de poupança

02) Um investidor aplicou R$ 10.000,00, que recebeu de décimo terceiro salário, em uma caderneta de poupança com data base no dia 02. No primeiro mês, a variação da taxa referencial foi de 0,7%, no segundo mês, a variação foi de 0,8% e, no terceiro mês, de 0,6%. Determine o rendimento da poupança ao final do trimestre.

No exemplo acima é importante mostrar a taxa fixa da poupança de 0,5%.
Rendimento ao final do primeiro mês

$$10000.(1 + 0,005).(1 + 0,007) = 10000.1,005.1,007 = \text{R\$ 10.120,35.}$$

Rendimento ao final do segundo mês

$$10120,35.(1 + 0,005).(1 + 0,008) = 10120,35.1,005.1,008 = \text{R\$ 10.252,32.}$$

Rendimento ao final do terceiro mês

$$10252,32.(1 + 0,005).(1 + 0,006) = 10252,32.1,005.1,006 = \text{R\$ 10.365, 40.}$$

Observamos acima que o rendimento ao final do trimestre foi de R$ 365,40. Levando em consideração a inflação anual de 2015, o rendimento obtido pela situação problema foi viável, pois ficou acima da inflação.

6.2 CERTIFICADO DE DEPÓSITO BANCÁRIO (CDB)

Segundo Kerr (2011) defini-se CDB como títulos emitidos pelos bancos para captação de recursos. Estes títulos podem ser prefixados ou pós-fixados. Nas aplicações de CDB, o imposto sobre operações financeiras (IOF) incide quando o resgate/vencimento for inferior a trinta dias. A alíquota do imposto de renda é variável e depende do prazo de aplicação.

Os bancos competem por recursos dos investidores, assim, cada banco oferece seus CDBs com características ligeiramente diferentes uma das outras, de modo a diferenciar o produto e interessar a um segmento de potenciais investidores.

A Caixa Econômica Federal oferece dois tipos de CDB, o CDB Prefixado e o CBD Flex. Segundo o site da Caixa Econômica Federal, o CDB prefixado permite que o investidor saiba quanto o seu dinheiro vai render antes mesmo de aplicá-lo. O valor mínimo para investir é de R$ 1.000,00. Já o CDB Flex, é um título de renda fixa com juros flutuantes e data de pagamento preestabelecida. O valor mínimo para investir é de R$ 200,00.

O Banco do Brasil oferece cinco tipos de CDB, o CDB DI Parceria, CDB DI, CDB DI SWAP, CDB PRÉ e CDB PRÉ COM SWAP. Os valores mínimos para investir são respectivamente, R$ 500,00, R$ 500,00, R$ 100.000,00, R$ 500,00 e R$ 500.000,00.

Já o Banco Bradesco oferece três modalidades de CDB, o CDB Fácil, CDB Prefixado e CDB Fidelidade. No CDB fácil, o investidor aplicará no mínimo dois mil reais. Pelo CDB Prefixado a aplicação mínima também é de dois mil reais, porém, no momento da aplicação é conhecida a rentabilidade. A vantagem do CDB Fidelidade é no tempo de aplicação. O investidor aplicará o mínimo de dois mil reais, entretanto, a taxa remunerada do CDB Fidelidade aumenta de acordo com a permanência e, cada vez que ela sobe, é válida por todo o período anterior, segundo o site do Bradesco.

Conhecido alguns modelos de CDBs, é importante ressaltar a tabela fixa da alíquota do imposto de renda, que incide em cada uma das aplicações de CDB.

Até 180 dias a alíquota é de 22,5%, de 181 dias a 360 dias é de 20%, de 361 dias a 720 dias é de 17,5% e acima de 720 dias é de 15%. Estes impostos são debitados das remunerações adquiridas nos investimentos em CDBs. Abaixo seguem dois exemplos de aplicações em CDBs. O primeiro exemplo refere-se a um CDB prefixado e o segundo exemplo ilustrará a aplicação em um CDB pós-fixado.

01) Um investidor aplica R$ 100.000,00 em um CDB prefixado, tendo contrato com o banco uma taxa de 15% ao ano, por um período de 60 dias. Determine:
a) o montante bruto da aplicação,
b) o rendimento bruto da aplicação,

c) o imposto de renda retido na fonte,
d) o montante líquido,
e) a taxa efetiva líquida da aplicação no período.

a) Montante = $100000(1+1,25\%)^2$, aqui é importante converter a taxa anual para mensal ou diária, logo, a razão de 15 para 12 equivale a 1,25. Montante $= 100000.1,01252 = R\$102.515,63$.
b) Rendimento $= 102515,63 - 100000 = R\$2.515,63$.
c) IR $= 2515,63.22,5\% = 2515,63.0,225 = R\$566,02$.
d) Montante Líquido $= 102515,63 - 566,02 = R\$101.949,61$.

e) Taxa = $\dfrac{101949,61}{100000} - 1 = 0,019496 = 1,95\%$.

02) Um investidor aplica R$ 100.000,00 em um CDB pós-fixado, que paga taxa referencial mais 12% ao ano, por um período de 240 dias. A variação da taxa referencial no período foi de 1,5%. Determine:
a) o montante bruto da aplicação,
b) o rendimento bruto da aplicação,
c) o imposto de renda retido na fonte,
d) o montante líquido,
e) a taxa efetiva líquida da aplicação no período.

a) Montante $= 100000.(1 + 0,01)^8.(1 + 0,015)$, aqui é importante converter a taxa anual para mensal ou diária, logo, a razão de 12 para 12 equivale a 1. Observa-se que, 240 dias correspondem a 8 meses. Montante $= 100000.(1,01)^8.(1,015) = R\$109.909,96$.
b) Rendimento $= 109909,96 - 100000 = R\$9.909,96$.
c) IR $= 9909,96.20\% = 9909,96.0,2 = R\$1.981,99$.
d) Montante Líquido $= 109909,96 - 1981,99 = R\$107.927,97$.

e) Taxa $= \dfrac{107927,97}{100000} - 1 = 0,0792797 = 7,93\%$.

6.3 APROXIMAÇÃO LINEAR DE NEWTON-RAPHSON

Atualmente, alguns livros didáticos do Ensino Médio apresentam tópicos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, como limite e derivada. Entretanto, esses temas, na maioria das vezes, não são ensinados sob o pretexto de serem difíceis e impróprios a esse segmento da educação, devendo ficar restritos ao ensino superior. Assim sendo, o Cálculo faz parte do livro didático, mas não do currículo do Ensino Médio. Para mudar isso, sugere-se a inclusão dos tópicos de limite e derivada como um facilitador para cálculos financeiros e outros.

Segundo Ávila (2006), o conceito de derivada pode ser ensinado, com grande vantagem logo na primeira série do Ensino Médio, em paralelo com o ensino de funções. Ainda, de acordo com Ávila, os professores insistem em cumprir programas extensos, com conteúdos fragmentados e sem significados. Na sua opinião, seria de maior relevância ensinar noções básicas de cálculo e suas aplicações, pois dessa forma, o ensino estaria de acordo com a proposta do PCN'S.

Ávila (2006) reforça que, o ensino de derivada deve fazer parte do Ensino Médio e que, o fato de derivada ser considerada difícil nessa fase é devido ao seu ensino desnecessário procedido de um capítulo exaustivo sobre limite. Para Ávila (2006), a abordagem desse tema deve ser de forma direta e concreta, pois ela ao lado de integral é o alicerce de toda a ciência e tecnologia dos últimos anos.

Diante dessa explanação, pretende-se mostrar de que forma a utilização de conceitos do cálculo pode tornar o ensino da Matemática Financeira mais amplo e contextualizado, como por exemplo, a inserção da aproximação linear de Newton.

Um método prático para auxiliar a Matemática Financeira é a aproximação linear de Newton. Ele tem como objetivo estimar as raízes de uma função. Para isto, escolhe-se uma aproximação inicial e em seguida calcula-se a equação tangente da função nesse ponto e a interseção dela com o eixo das abcissas, a fim de termos uma melhor aproximação. Repetindo o processo, cria-se um método para definirmos a raiz da função. O método de Newton pode ser representado por $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$.

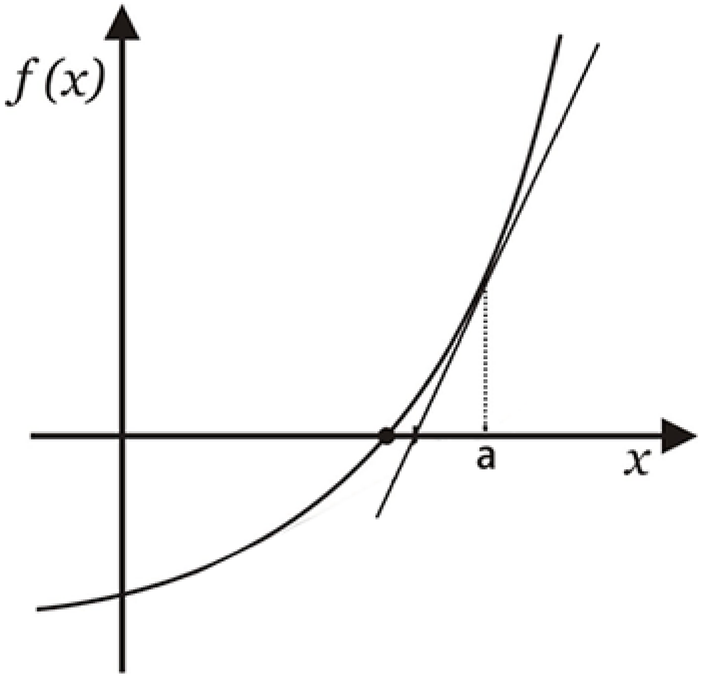
De acordo com Anton, Biven, Davis (2007) se uma função f for diferenciável em a, então uma porção suficientemente ampliada do gráfico de f centrada no ponto $P(a, f(a))$ tem aparência de um segmento de reta. Isto é ilustrado na figura 1 abaixo. Por essa razão, costuma-se dizer que uma função diferenciável em a é localmente linear em a. A reta que melhor aproxima do gráfico de f na vizinhança de $P(a, f(a))$ é a reta tangente ao gráfico de f em $"a"$ dada pela equação $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$. Isto é denominado aproximação linear local de f em $"a"$.

Este método é de grande utilidade na Matemática Financeira, pois através dele é possível encontrarmos uma aproximação para as potências envolvendo os decimais. Veremos alguns exemplos:

01) Calcularemos o valor aproximado de $(2,001)^5$.

Seja $f(x) = x^5$, o exercício se resume a encontrar o valor de f(2,001).
É necessário atribuirmos um valor $"a"$ próximo de 2,001 e do qual saibamos o valor de $f(a)$. Para este exemplo, vamos usar $a = 2$, pois está bem próximo de 2,001 e é inteiro, o que facilitará os cálculos. Logo, $f(2) = 2^5 = 32$. Derivando $f(x)$ encontra-

Figura 1 – Gráfico Aproximação Linear de Newton



Fonte: O autor (2016)

mos $f'(x) = 5x^4$. Precisamos encontrar $f'(a)$, como $a = 2$, temos $f'(2)$ equivalente a $5.2^4 = 80$.
Usando a aproximação linear de Newton, vem:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \Rightarrow f(2,001) = f(2) + f'(2)(2,001 - 2).$$

Logo,

$$f(2,001) = 32 + 80.(0,001) = 32 + 0,08 = 32,08.$$

Conclui-se que,

$$f(2,001) = 32,08.$$

Desse modo, o valor aproximado de $(2,001)^5$ é igual a 32,08.

02) Um investidor aplica R$ 100.000,00 em um CDB pós-fixado, que paga taxa referencial mais 12% ao ano, por um período de 240 dias. A variação da taxa referencial no período foi de 1,5%. Determine o montante bruto da aplicação.

Montante $= 100000.(1 + 0,01)^8(1 + 0,015)$, aqui é importante converter a taxa anual para mensal ou diária, logo, a razão de 12 para 12 equivale a 1. Observa-se que, 240 dias correspondem a 8 meses.
Montante $= 100000.(1,01)^8(1,015)$, precisamos calcular $(1,01)^8$ antes de resolvermos o

produto. Fazendo $f(x) = x^8$ e atribuindo um valor para "a"próximo de 1,01, tomaremos $a = 1$, logo, $f(1) = 1$. Derivando a função f, temos $f'(x) = 8x^7$. Calculando $f'(1)$, vem, $f'(1) = 8(1)^7 = 8$. Aplicando a aproximação linear $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$,

temos,

$$f(1,01) = f(1) + f'(1)(1,01 - 1),$$

logo,

$$f(1,01) = 1 + 8.0,01 = 1,08.$$

Desta forma, $(1,01)^8$ é aproximadamente igual a 1,08. Após esta conclusão fica fácil calcularmos o Montante na situação problema, pois $100000.1,08.1,015 = 108.1015 =$ R$ 109.620,00 aproximadamente. Vale ressaltar que o Tesouro Nacional usa seis casas decimais (de acordo com a portaria 374 de 14 de Julho de 2015 do Ministério da Fazenda) para efeito de cálculo e na aproximação linear citada neste exemplo foi feito o truncamento para duas casas decimais.

7 SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO

Neste capítulo são descritos os sistemas de amortização mais utilizados na prática financeira no Brasil.

Segundo Samanez (2010) amortização é um processo financeiro pelo qual uma dívida ou obrigação é paga progressivamente por meio de parcelas, de modo que ao término do prazo estipulado o débito seja liquidado. As parcelas são obtidas pela soma entre amortização e os juros. Essa soma permite distinguir o que representa a devolução do principal (amortização) daquilo que representa o serviço da dívida (juros).

O termo carência designa o período que vai desde a data de aquisição do empréstimo até a data em que será paga a primeira prestação. Em geral, esse período é negociado entre o credor e contratante. Vale ressaltar que qualquer sistema de amortização pode ter ou não um período de carência.

Os mais utilizados sistemas de amortização de empréstimos são:
- Sistema de Amortização Francês (conhecido também como Tabela Price)
- Sistema de Amortização Constante (SAC)
- Sistema de Amortização Americano (SAA)
- Sistema de Amortizações Misto (SAM), conhecido como Sistema de Amortizações Crescentes (Sacre).

Ainda, segundo Samanez (2010), algumas vezes, os bancos e as instituições financeiras criam sistemas de amortizações específicos, que são adequados a determinadas situações ou características de seu mercado ou seus clientes.

As prestações ou parcelas são de grande importância em um financiamento, pois dependendo de como ela é constituída, os valores podem ser crescentes, decrescentes ou constantes ao longo da quitação da dívida adquirida. É preciso ficarmos atentos pois todo empréstimo implica no pagamento de juros. Ao entender a dinâmica de um empréstimo bancário, isto facilita na escolha do tipo de financiamento.

7.1 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO CONSTANTE (SAC)

O atual mercado financeiro oferece variadas operações de crédito para quem deseja financiar carro, imóveis, constituir um negócio próprio, investir na empresa, entre outras opções. As instituições financeiras oferecem um capital que deverá ser devolvido com juros durante o período pré-determinado. As formas de quitar o empréstimo são inúmeras, vamos abordar o funcionamento do sistema de amortizações constantes, que consiste no pagamento da dívida baseada em parcelas de amortizações iguais com prestações e juros decrescentes.

Segundo Samanez (2010), Pelo SAC, o principal é reembolsado em cotas de amortizações iguais, sendo que, as prestações e os juros decrescem linearmente com o tempo. A amortização é calculada dividindo-se o valor do principal pelo número de períodos de pagamento. O exemplo abaixo, ilustrará melhor o funcionamento do Sistema de Amortização Constante (SAC).

01) Um banco disponibiliza para uma pessoa o crédito de R$ 100.000,00 para ser pago pelo SAC em 5 parcelas mensais. Sendo a taxa de juros de 5% ao mês, determine o valor a ser pago pela pessoa após a quitação do empréstimo.

$$\text{Amortização} = \frac{Valorprincipal}{Quantidadedemeses} = \frac{100000}{5} = \text{R\$ 20.000,00.}$$

Calculando os juros, vem:

Juros (1) = 5% . 100000 = 5000 Prestação (1) = 20000 + 5000 = 25000.
Juros (2) = 5% . 80000 = 4000 Prestação (2) = 20000 + 4000 = 24000.
Juros (3) = 5% . 60000 = 3000 Prestação (3) = 20000 + 3000 = 23000.
Juros (4) = 5% . 40000 = 2000 Prestação (4) = 20000 + 2000 = 22000.
Juros (5) = 5% . 20000 = 1000 Prestação (5) = 20000 + 1000 = 21000.

Organinzando os juros encontrados na tabela abaixo, vem:

Mês	Saldo Devedor (R$)	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)
0	100.000,00	-	-	-
1	80.000,00	20.000,00	5.000,00	25.000,00
2	60.000,00	20.000,00	4.000,00	24.000,00
3	40.000,00	20.000,00	3.000,00	23.000,00
4	20.000,00	20.000,00	2.000,00	22.000,00
5	0	20.000,00	1.000,00	21.000,00

Somando-se as prestações obteremos o montante equivalente a R$ 115.000,00, valor a ser pago pela pessoa após ter adquirido o empréstimo de R$ 100.000,00 por um período de 5 meses.

Observa-se que, os juros e as prestações decrescem linearmente com o tempo, como podemos visualizar na tabela acima e estão representados na figura 2 abaixo.

Devido a essa linearidade podemos colocar tanto os juros quanto as prestações em sequências aritméticas, como por exemplo,

$$J(5000, 4000, 3000, 2000, 1000) \text{ e } P(25000, 24000, 23000, 22000, 21000).$$

Desta forma, para determinarmos uma prestação n-ésima ou juros m-ésimo, basta utilizarmos a fórmula do termo geral de uma progressão aritmética, dada por:

$$a_n = a_k + (n - k)r,$$

onde a_n é a prestação ou juros desejados, a_k é uma prestação ou um juros conhecidos, $''n''$ é o tempo correspondente da prestação ou juros desejados, $''k''$ é o tempo correspondente da prestação ou jutos conhecidos e $''r''$ é a razão da linearidade.

Para calcularmos o total de juros ou montante, basta utilizarmos a fórmula da soma dos termos da progressão aritmética encontrada na sequência formada pelos juros ou prestações. Essa fórmula e dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Ou seja, o montante e os juros são determinados pela metade do produto entre a soma do juros ou montante iniciais por o juros ou montante finais pela quantidade de tempo contratado.

Figura 2 – Planilha Sistema de Amortização

Planilha Sistema de Amortização

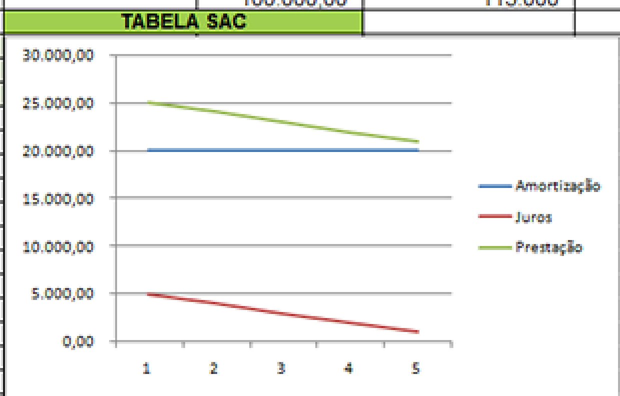
TABELA SAC

Financiamento	Prazo (meses)	Taxa Anual (C.E.T.)	Taxa Mensal	Prestação Máxima	Renda Mínima
R$ 100.000,00	5	79,59%	5,000%	R$ 25.000,00	R$ 83.400,00

* preencha os campos amarelos

Parc	Saldo Inicial	Juros	Saldo Atualizado	Amortização	Prestação	Saldo Devedor
1	100.000,00	5.000	105.000	20.000,00	25.000	80.000,00
2	80.000,00	4.000	84.000	20.000,00	24.000	60.000,00
3	60.000,00	3.000	63.000	20.000,00	23.000	40.000,00
4	40.000,00	2.000	42.000	20.000,00	22.000	20.000,00
5	20.000,00	1.000	21.000	20.000,00	21.000	0,00
Totais pagos		15.000		100.000,00	115.000	

Juros devidos:	R$ 15.000
Principal devido:	R$ 100.000,00
Total devido	R$ 115.000,00



Fonte: O autor (2016)

Com a progressão determinada pelas prestações do exemplo 1 acima, podemos calcular de maneira mais rápida e eficiente, a dívida total adquirida pela pessoa diante do Banco. Vejamos:

Dada a sequência (25000, 24000, 23000, 22000, 21000), observamos que a razão é igual a menos 1000 e tempo corresponde a cinco meses, logo a soma será:

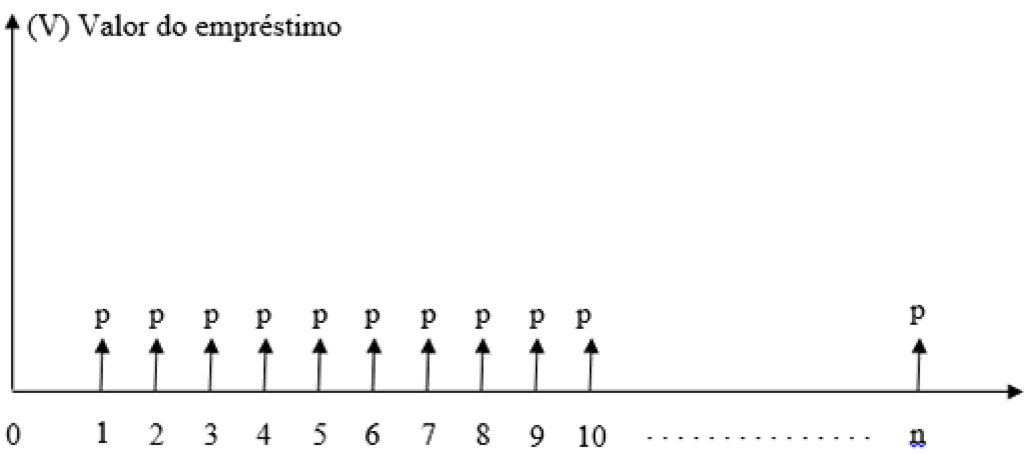
$$S_n = \frac{(25000 + 21000)5}{2} = \text{R\$ 115.000,00.}$$

7.2 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO FRANCÊS (TABELA PRICE)

Esse sistema admite prestações constantes ao longo de todo o período de amortização. Já a amortização aumentará com o tempo e os juros diminuirão. Vale ressaltar que, cada prestação é composta de duas parcelas, amortização e juros. A amortização diminui o valor da dívida e os juros remuneram o capital. Logo, $Presta\text{ção} = Amortiza\text{ção} + Juros$.

Esse sistema corresponde à sequência de anuidades periódicas postecipadas, como observa-se na figura 3.

Figura 3 – Sequência das Anuidades Periódicas Postecipadas



Fonte: O autor (2016)

Observa-se que V é o valor do empréstimo na data 0 e p é o valor de cada prestação até o n-ésimo tempo contratado.

Segundo Samanez (2010), o sistema de amortização francês é o mais utilizado pelas instituições financeiras e o comércio em geral, o devedor obriga-se a devolver o principal acrescido de juros em prestações iguais. Como os juros incidem sobre o saldo devedor, que por sua vez decresce à medida que as prestações são quitadas, eles serão decrescentes, e portanto as amortizações serão crescentes.

As prestações no sistema de amortização francês são obtidas através da fórmula:

$$P = C.\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}.$$

onde P refere-se a prestação, C (valor do empréstimo), i (taxa) e n (tempo).

Segundo Iezzi, Hazzan, Degenszajn (2013), consideremos um valor C que deve ser pago em prestações iguais de valor P nas datas $1, 2, 3, ..., n$ e suponhamos que a taxa de juros compostos cobrada no financiamento seja i por período de tempo n.

Chamamos esse conjunto de sequência uniforme de pagamentos, como vimos na figura 3. Podemos indicar o valor atual das prestações, representados por P, à taxa i, como:

$$C = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}.$$

Considerando que o segundo membro dessa expressão é a soma dos termos de uma Progressão Geométrica finita, cuja razão é $q = \frac{1}{1+i}$ e cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{P}{1+i}$, podemos aplicar a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma Progressão Geométrica finita, como segue:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Assim, temos:

$$C = \frac{\frac{P}{1+i}[\frac{1}{(1+i)^n} - 1]}{\frac{1}{1+i} - 1} = P.\frac{\frac{1}{1+i}[\frac{1-(1+i)^n}{(1+i)^n}]}{\frac{1-(1+i)}{1+i}} = P.\frac{\frac{[1-(1+i)^n]}{(1+i)^n}}{-i} = P.\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{i}.$$

E, finalmente:

$$P = C.\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}.$$

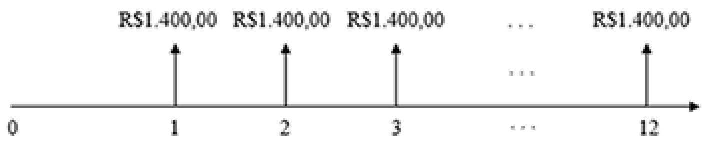
Veremos a seguir alguns exemplos sobre a aplicação do sistema de amortização francês.

01) Um banco concedeu um empréstimo para uma pessoa adquirir um carro.

O pagamento deveria ser feito em 12 prestações mensais de R$ 1.400,00 cada uma, sem entrada. Qual o valor do empréstimo, sabendo-se que a taxa de juros compostos cobrada pelo banco foi de 3% ao mês?

O empréstimo deve ser pago em 12 prestações mensais uniformes, sem entrada, conforme mostra a figura 4 a seguir:

Figura 4 – Resolução do Exemplo 01 - PRICE



Fonte: O autor (2016)

Assim temos P = 1400, n = 12 e i = 3% a.m. (ao mês). O valor do empréstimo corresponde ao valor atual desses pagamentos, que, conforme a fórmula dada, vale:

$$1400 = C.\frac{(1+0,03)^{12}.0,03}{(1+0,03)^{12}-1} = C.\frac{(1,03)^{12}.0,03}{(1,03)^{12}-1}.$$

Logo,

$$1400 = C.\frac{0,0429}{0,43} \Rightarrow 1400.0,43 = 0,0429C.$$

Conclui-se que,

$$602 = 0,0429C \Rightarrow C = \text{R\$ 14.032,63.}$$

02) Um empréstimo de R$ 100.000,00 será pago pelo sistema de amortização francês em cinco prestações mensais postecipadas. Se a taxa de juros for de 5% ao mês, determine o valor do montante a ser pago ao final dos cinco meses.

Primeiro devemos calcular a prestação, segue:

$$P = 100000.\frac{(1+0,05)^5.0,05}{(1+0,05)^5-1} = 100000.\frac{(1,05)^5.0,05}{(1,05)^5-1} =$$

$$100000.\frac{1,28.0,05}{1,28-1} = 100000.\frac{0,064}{0,28} = \frac{6400}{0,28} = R\$22.857,14.$$

Em seguida calcularemos a amortização e os juros.

$$Prestação = Amortização + Juros,$$

temos:

Prestação (1) = Amortização (1) + Juros (1), como Juros (1) = 5% . 100000 = 5000, vem: 23.097,62 = Amortização (1) + 5000, logo Amortização (1) = R$ 18.097,40.

Prestação (2) = Amortização (2) + Juros (2), como Juros (2) = 5% . 82.902,60 = 4107,14, vem: 23.097,62 = Amortização (2) + 4107,14, logo Amortização (2) = R$ 19.002,31

Prestação (3) = Amortização (3) + Juros (3), como Juros (3) = 5% . 62.900,29 = 3169,94, vem: 23.097,62 = Amortização (3) + 3169,94, logo Amortização (3) = R$ 19.952,47

Prestação (4) = Amortização (4) + Juros (4), como Juros (4) = 5% . 42.947,82 = 2185,58, vem: 23.097,62 = Amortização (4) + 2185,58, logo Amortização (4) = R$ 20.950,13

Prestação (5) = Amortização (5) + Juros (5), como Juros (5) = 5% . 21.997,68 = 1152,00, vem: 23.097,62 = Amortização (4) + 1152,00, logo Amortização (5) = R$ 21.997,68

Mês	Saldo Devedor (R$)	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)
0	100.000,00	-	-	-
1	82.902,60	18.097,40	5.000,00	23.097,62
2	62.900,29	19.002,31	4.095,30	23.097,62
3	42.947,82	19.952,47	3.145,15	23.097,62
4	21.997,68	20.950,13	2.147,48	23.097,62
5	0	21.997,68	1.099,93	23.097,62

O montante equivalente ao empréstimo feito será cinco vezes o valor da prestação, o que equivale a R$ 115.488,70.

Observa-se que o sistema de amortização francês é menos vantajoso que o sistema de amortização constante em um financiamento. Apesar das parcelas inicias do SAC serem maiores, o PRICE leva desvantagem por manter a uniformidade de suas parcelas, uma vez que, no SAC as prestações são decrescentes.

Na figura 5 abaixo podemos observar de maneira detalhada a variação dos juros e das amortizações no sistema PRICE.

Figura 5 – Planilha do Sistema de Amortização Francês (PRICE)

Planilha Sistema de Amortização Francês — TABELA PRICE

Financiamento	Prazo (meses)	Taxa Anual (C.E.T.)	Taxa Mensal	Prestação Máxima	Renda Mínima
R$ 100.000,00	5	79,59%	5,000%	R$ 23.098,00	R$ 77.000,00

* preencha os campos amarelos

Parc	Saldo Inicial	Juros	Saldo Atualizado	Amortização	Prestação	Saldo Devedor
1	100.000,00	5.000	105.000	18.097,40	23.097,62	81.902,60
2	81.902,60	4.095,30	85.997,90	19.002,31	23.097,62	62.900,29
3	62.900,29	3.145,15	66.045,43	19.952,47	23.097,62	42.947,82
4	42.947,82	2.147,48	45.095,30	20.950,13	23.097,62	21.997,68
5	21.997,68	1.099,93	23.097,62	21.997,68	23.097,62	
Juros devidos:		R$ 15.488,08				
Principal devido:		R$ 100.000,00				
Total devido		R$ 115.488,10				

Fonte: O autor (2016)

7.3 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO AMERICANO (SAA)

Segundo Samanez (2010), definimos Sistema de Amortização Americano como sistema onde o capital inicial é restituído por meio de uma parcela única ao fim da operação. Os juros podem ser pagos periodicamente ou capitalizados e pagos juntamente com o capital inicial no fim do prazo acertado.

01) Cintia faz um financiamento, no valor de R$ 50.000,00, pelo Sistema Americano de Amortização, à taxa de juros de 10% ao ano. O principal (capital inicial) deverá ser restituído ao final de 5 anos, sendo os juros pagos durante o prazo de carência. Determine o valor total desembolsado por Cintia, durante o período de carência.

Inicialmente construiremos a planilha para facilitar a análise.

$$\text{Juros} = 10\% \,.\, 50000 = 5000$$

Mês	Saldo Devedor (R$)	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)
0	50.000,00	-	-	-
1	50.000,00	-	5.000,00	5.000,00
2	50.000,00	-	5.000,00	5.000,00
3	50.000,00	-	5.000,00	5.000,00
4	50.000,00	-	5.000,00	5.000,00
5	0	50.000,00	5.000,00	55.000,00

Logo, concluímos que Cintia desembolsará ao final de 5 anos, 4.5000+55000 = R$ 75.000,00.

7.4 SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO MISTO (SAM)

No Sistema de Amortização Misto as prestações são obtidas através da média aritmética simples do Sistema de Amortização Constante com o Sistema de Amortização Francês. Os juros é o produto entre o saldo devedor com a taxa de desconto e a amortização é a diferença entre as prestações e os juros. Os juros também são obtidos através da média aritmética dos juros correspondentes dos dois sistemas, assim como a amortização.

Samanez (2010) afirma que uma das desvantagens do SAM é que suas prestações iniciais são ligeiramente mais altas que as do PRICE. Contudo, após a metade do período, o mutuário sentirá uma queda substancial no comprometimento de sua renda com o pagamento das prestações.

No Sistema Misto, as prestações são decrescentes assim como os juros. Já a amortização é crescente.

01) Admita-se que você esteja interessado na compra de um veículo popular no valor de R$ 30.000,00. Um vendedor lhe propõe uma entrada de R$ 6.000,00 mais 12 prestações mensais a uma taxa prefixada de 18% ao ano. Usando o Sistema de Amortização Misto, construa a tabela para esse financiamento.

Primeiro devemos encontrar as prestações obtidas nos sistemas francês e constante. Pelo SAC, observamos que a prestação será dada por $P = A + J$, sendo o valor amortizado a razão entre o saldo devedor pelo tempo de financiamento, logo, $\frac{24000}{12} = 2000$. Encontrada a amortização precisamos calcular o juros, que é definido pelo produto entre o saldo devedor e a taxa de juros. Temos taxa de 18% ao ano, que corresponde a 1,5% ao mês. Logo, os juros do primeiro mês será de $J = \frac{1,5}{100}.24000 = 360$. Dessa forma, obtemos a primeira prestação do SAC que será equivalente a R$ 2360,00.

Em seguida calcularemos a prestação no Sistema de Amortização Francês através da fórmula:

$$P = C.\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}.$$

Cálculo da prestação:

$$P = 24000.\frac{(1+0,015)^{12}.0,015}{(1+0,015)^{12} - 1} = 24000.\frac{(1,015)^{12}.0,015}{(1,015)^{12} - 1}.$$

Logo,

$$24000.\frac{(1,1956).0,015}{(1,1956) - 1} = 24000.\frac{(0,0179)}{(0,1956)} = 24000.0,0916885 = R\$2.200,52.$$

Vimos que no Sistema de Amortização Misto a prestação é obtida através da média aritmética simples entre as prestações do SAC e PRICE, logo,

$$P = \frac{2360 + 2200,52}{2} = \text{R\$ 2.280,26.}$$

Para o segundo mês precisaremos calcular apenas a prestação do SAC, uma vez que a prestação do PRICE é constante. Logo,

$$J_2 = \frac{1,5}{100}.22079,74 = 331,20.$$

Agora é possível encontrarmos a segunda prestação do SAC,

$$P_2 = 2000 + 331,20 = 2331,20.$$

Calculando a média teremos a segunda prestação do sistema misto,

$$P_2 = \frac{2331,20 + 2200,52}{2} = R\$2.265,86.$$

De forma análoga calcularemos as prestações para os meses subsequentes e observando a linearidade obtida nas prestações e juros do Sistema de Amortização Constante, logo, aplicando esta progressão aritmética decrescente no Sistema de Amortização Misto, teremos:

Cálculo da décima segunda prestação do SAM

$$P_{12} = 2280,26 - 11.14,40 = 2280,26 - 158,40 = 2121,86$$

Cálculo do décimo segundo juros do SAM

$$J_{12} = 360 - 11.28,80 = 360 - 316,80 = 43,20$$

Ou seja, após 12 meses no Sistema de Amortização Misto, o veículo terá custado:

$$Entrada + Soma_{12} = 6000 + \frac{(2280,26 + 2121,86).12}{2} = \text{R\$ 32.412,72.}$$

Mês	Saldo Devedor (R$)	Amortização (R$)	Juros (R$)	Prestação (R$)
0	24.000,00	-	-	-
1	22.079,74	1920,26	360,00	2280,26
2	20.145,15	1934,66	331,20	2.265,86
3	18.196,09	1949,06	302,04	2.251,46
...	...	...	...	...
12	0	2078,66	43,20	2.121,86

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos que a Matemática Financeira é importantíssima na educação dos nossos jovens. A abordagem desse tema com situações do cotidiano aos quais os jovens estão inseridos, faz com que eles despertem um interesse maior pelo assunto, assim como, planejando os seus futuros. O professor, ou melhor, o educador precisa desenvolver atividades que tragam para a sala de aula situações que fazem parte da rotina dos jovens. Ao falar de dinheiro, é importante aguçar no jovem a importância de como adquirir, investir e aplicar. Vale ressaltar que a interdisciplinaridade no estudo de Educação Financeira é essencial. A Educação Financeira não pode ser tratada como uma disciplina isolada, ela deve ser trabalhada de forma transversal, atualizada e inserida no conteúdo das disciplinas como matemática, história, português, entre outras. A temática é holística e traz várias reflexões em muitos assuntos, desde o consumo consciente, o desperdício, a utilização dos recursos naturais, cálculos de juros e impostos, investimentos, financiamentos e acima de tudo, da doação.

O conhecimento adquirido pelos jovens do ensino médio trará reflexões positivas em suas vidas e nas de suas famílias. Os pais que possuem uma vida financeira desorganizada poderão aprender muito com os seus filhos, onde eles passarão a ser os agentes transformadores em suas residências, contribuindo assim para a diminuição das despesas e controlando o orçamento.

De acordo com o Caderno de Educação Financeira do Banco Central do Brasil (2013), todo cidadão pode desenvolver habilidades para melhorar sua qualidade de vida e a de seus familiares, a partir de atitudes comportamentais e de conhecimentos básicos sobre gestão de finanças pessoais aplicados em seu dia a dia.

Em cada capítulo deste trabalho, foram abordados vários exemplos de como os professores educadores, poderão trabalhar em sala de aula a Matemática Financeira enfatizando a Educação Financeira, em uma abordagem clara, atualizada e interdisciplinar. Apresenta-se, a seguir, sugestões de objetivos para nortear a seleção dos conteúdos, métodos e demais categorias didáticas.

- Que os alunos do Ensino Médio criem o hábito de leitura das publicações na área de investimentos em renda fixa, de modo a desenvolverem a capacidade crítica na análise de investimentos;

- Que os alunos do Ensino Médio se interessem e se familiarizem com as alternativas de investimentos em renda fixa e se qualifiquem, a um nível introdutório, na utilização dos métodos quantitativos da Matemática Financeira para a tomada de decisões no âmbito financeiro (financiamentos, créditos, investimentos, valor temporal do dinheiro, taxas de juros, inflação e sistemas de amortização) e

- Que os alunos do Ensino Médio sejam capazes de utilizarem conhecimentos e métodos elementares da Matemática Financeira para efetuarem as análises de investimentos em renda fixa e compreendendo a importância da Educação Financeira nos dias atuais.

Após este estudo, os jovens terão um poder de decisão equilibrado quando forem investir, pois compreenderão a importância do hábito de poupar como forma de melhorarem suas qualidades de vida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADVFN BRASIL. Indicadores Econômicos - IPCA. Disponível em: http://br.advfn.com/indicadores/ipca/2015. Acesso em: 23 jan. 2016.

ALMEIDA, M. Veja como ficam poupança e renda fixa. Revista Exame, [S.l], 29 abr. 2015. Seu Dinheiro. Disponível em: <http://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/ noticias/selic-sobe-a-13-25-veja-como-ficam-poupanca-e-renda-fixa>. Acesso em: 30 abr. 2015.

ASSOCIAÇÃO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA DO BRASIL. Educação financeira no ensino médio. Disponível em: <http://www.aefbrasil.org.br/ index.php/programas-e-projetos/educacao-financeira-nas-escolas/educacao-financeira-no-ensino-medio/>. Acesso em: 16 mar. 2016.

ÁVILA, G. Limites e Derivadas no Ensino Médio. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, s.v, n.60,p.30-38, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 2006.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Educação Financeira - Gestão de Finanças Pessoais (Conteúdo Básico). Brasília: 2013.

BANCO CENTRAL DO BRASIL. Calculadora do Cidadão. Disponível em: <https://www3.bcb.gov.br/CALCIDADAO/publico/corrigirPelaPoupanca.do?method=corrigirPelaPoupanca>. Acesso em: 23 jan. 2016.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Departamento de Políticas de Ensino Médio. Orientações Curriculares do Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2006.

CONFEDERAÇÃO NACIONAL DO COMÉRCIO DE BENS, SERVIÇOS E TURISMO. Percentual de famílias endividadas cai em fevereiro. Disponível em: <http://www.cnc.org.br/noticias/economia/ percentual-de-familias-endividadas-cai-para-608-em-fevereiro>. Acesso em: 16 mar. 2016.

CERBASSI, Gustavo, 1974. Investimentos inteligentes: para conquistar e multiplicar seu primeiro milhão. Rio de Janeiro: Thomas Nelson Brasil, 2008.

CORTEZ, Isabel Alarcão, 2003, Professores Reflexivos em Uma Escola Reflexiva. São Paulo. Editora Cortez, 2003.Capítulos 1, 2 e 4.

D'AQUINO, Cássia. Educação financeira. Como educar seus filhos. Rio de Janeiro: Else vier, 2008.

EDUCAÇÃO FINANCEIRA NA ESCOLA. Programa. Disponível em: <http://www. edu-fina nceiranaescola.gov.br/o-programa/>. Acesso em: 16 mar. 2016.

FINANCEONE. Rendimento e histórico da poupança. Disponível em: <http://financ eone.com.br/investimentos/ rendimento-e-historico-da-poupanca>. Acesso em: 14 fev. 2016.

FRANKENBERG, Louis. Seu futuro financeiro: você é o maior responsável. 6. ed., Rio de Janeiro: Campus, 1999.

FOLHA UOL. Notas do Tesouro Nacional Série F. Disponível em: <http://carodi nheiro.blo gfolha.uol.com.br/2012/11/30/ntn-f-notas-do-tesouro-nacional-serie-f-parte-1-2/>. Acesso em: 13 fev. 2016.

FOLHAINVEST. Participe do Simulador. Disponível em: <http://folhainvest.folha.uol.com .br>. Acesso em: 01 mai. 2016.

FORTUNA, Eduardo. Mercado Financeiro e de Capitais. 18. ed., Rio de Janeiro: Quality-mark,2010.

HOLZMANN, R.; MIRALLES, M. P. The role, limits of, and alternatives to financial education in support of retirement saving in the OECD, Eastern Europe and beyond. The World Bank, Oct. 2005

HOWARD, Anton; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. 'Cálculo Volume 1'. [S.l.]: Editora Book man, 8. ed., 2007.

IEZZI, GELSON; HAZZAN, Samuel; DEGENSZAJN, David. Fundamentos de Matemática Elementar - Matemática Comercial, Matemática Financeira e Estatística Descritiva – 2. ed. São Paulo: Atual, 2013

INFOMONEY. Como funciona o mercado de renda fixa. Disponível em: <http://www.infomoney.com.br/educacao/ guias/noticia/368197/como-funciona-mercado-renda-fixa>. Acesso em: 13 fev. 2016.

INSTITUTO BRASILEIRO DE DEFESA DO CONSUMIDOR. Planilha Orçamento Doméstico. Disponível em: <http://www.idec.org.br/especial/ planilha-orcamento-domestico>. Acesso em: 30 abr. 2016.

LEITHOLD, Louis. Matemática aplicada à economia e administração. São Paulo: Harbra, 1988. Vol. Único.

LIVIUS, Titus. The History of Rome, vol. 2, coleção Everyman's Library, J. M. Dent & Sons, Ltd., London, 1905.

KERR, Roberto. Mercado Financeiro e de Capitais – Pearson - 2011

KIYOSAKI, R. Pai Rico, Pai Pobre: o que os ricos ensinam a seus filhos sobre dinheiro. Rio de Janeiro: Campos, 60 ed., 2000.

MARTINS, José Pio. Educação financeira ao alcance de todos. 1. ed. São Paulo, SP. Fundamento, 2004.

MATTA, Rodrigo Octávio Beton. Oferta e demanda de informação financeira pessoal: O Programa de Educação Financeira Do Banco Central do Brasil e os universitários do Distrito Federal. 2007. Dissertação (Mestrado em Ciência de da Informação) – Universidade de Brasília, 2007.

MORGADO, Augusto Cezar. Progressões e Matemática Financeira. 1. ed. Rio de Ja neiro, RJ. IMPA, 1995.

NEW YORK TIMES. How to Fix Our Math Education. Disponível em: <http://www.nytimes.com/2011/08/25/opinion/how-to-fix-our-math-education.html?>. Acesso em: 30 abr. 2016.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. Diretrizes Curriculares da Educação Bá sica. Matemática, Curitiba, SEED, 2008.

PCN. Parâmetros Curriculares Nacionais: Secretaria de Educação Fundamental. vol.3. 2ed. Brasília, 2000.

PERETTI, Luis Carlos. Aprenda a cuidar do seu dinheiro. 1. ed. Dois Vizinhos, PR. Im pressul, 2007.

PERETTI, Luis Carlos. Educação financeira na escola e na família. 2. ed. Dois Vizinhos, PR. Impressul, 2007.

PERETTI, Luis Carlos. Educação financeira: gestão empresarial: Um guia para ajudar resolver seus problemas. 1 ed. Dois Vizinhos, PR. Impressul, 2007.

RECEITA FEDERAL. Aplicações financeiras – renda fixa e renda variável. Disponível em: <http://www.receita.fazenda.gov.br/ PessoaFisica/IRPF/2004/Perguntas/AplicFinan RenFixaRenVariavel.htm>. Acesso em: 07 mar. 2016.

REVISTA EXAME ABRIL. Não confunda poupança com caderneta de poupança. Disponível em: <http://exame.abril.com.br/ rede-de-blogs/etiqueta-financeira/2014/07/08/ nao-confunda-poupanca-com-caderneta-de-poupanca/>. Acesso em: 14 fev. 2016.

REVISTA EXAME ABRIL. Estados Unidos também penam para ensinar Matemática. Disponível em: <http://veja.abril.com.br/noticia/educacao/estados-unidos-tambem-penam-para-ensinar-matematica>. Acesso em: 30 abr. 2016.

SAMANEZ, Carlos. Matemática Financeira. 5 Edição. São Paulo: Pearson, 2010

SANTOS, E.A. dos. Matemática Financeira. Uma Abordagem Contextual. UEL, 2007.PDE

SERASA EXPERIAN. Inadimplência atinge 60 milhões de brasileiros e bate recorde. Disponível em: <http://noticias.serasaexperian.com.br/ inadimplencia-atinge-60-milhoes-de-brasileiros-e-bate-recorde-80-dos-devedores-ganham-ate-dois-salarios-mini mos/>. Acesso em: 30 abr. 2016.

TESOURO DIRETO. Características dos Títulos Públicos. Disponível em: <http://www.tesouro.fazenda.gov.br/caracteristicas-dos-titulos-publicos>. Acesso em: 13 fev. 2016.

VIEIRA, Saulo Fabiano Amancio; BATAGLIA, Regiane Tardiolle Manfre; SEREIA, Vanderlei José. Educação financeira e decisões de consumo, investimento e poupança: uma análise dos alunos de uma universidade pública do Norte do Paraná. Revista de Administração da UNIMEP, São Paulo, v.9, n.3, p. 61-84, setembro/dezembro. 2011.

YAZBEK, Priscilla. Ranking Global de Educação Financeira. Artigo publicado em Revista Exame. Disponível em: <http://exame.abril.com.br/seu-dinheiro/noticias/brasil-e-o-74o-em-ranking-global-de-educacao-financeira>. Acesso em: 30 abr. 2016.