



**Programa de Mestrado Profissional
em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT**

GRAZIELE SOUZA MÓZER

***PARA QUE SERVEM
OS NÚMEROS IRRACIONAIS?
MANIFESTAÇÕES EM
ARITMÉTICA, COMBINATÓRIA E
GEOMETRIA***

Orientador:

Humberto José Bortolossi

**UNIVERSIDADE
FEDERAL
FLUMINENSE**

**NITERÓI
MARÇO/2013**

Graziele Souza Mózer

***Para que Servem Os Números Irracionais?
Manifestações em Aritmética, Combinatória e
Geometria***

Niterói – RJ

Março / 2013

Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Graziele Souza Mózer

***Para que Servem Os Números Irracionais?
Manifestações em Aritmética, Combinatória e
Geometria***

Dissertação apresentada à Coordenação do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional – PROFMAT da Universidade Federal
Fluminense para a obtenção do título de Mestre
em Matemática

Orientador:
Humberto José Bortolossi

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Março / 2013

Dissertação de Mestrado Profissional sob o título “*Para que Servem Os Números Irracionais? Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria*”, defendida por Grazielle Souza Mózer e aprovada em 8 de março de 2013, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Humberto José Bortolossi
Doutor em Matemática pela PUC-Rio
Orientador

Abel Rodolfo García Lozano
Doutor em Engenharia de Produção pela UFRJ

Marcelo Miranda Viana da Silva
Doutor em Matemática pelo IMPA

Miriam del Milagro Abdón
Doutora em Matemática pelo IMPA

Sebastião Marcos Antunes Firmo
Doutor em Matemática pela PUC-Rio

A todos os professores que levam a sério a missão de ensinar e que se transformam dia a dia na busca de aprimoramento.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus por me dar forças, saúde e por colocar pessoas certas em meu caminho!

Agradeço aos meus pais que sempre colocaram os estudos como prioridade em minha vida, me incentivando e sacrificando suas vidas para que eu tivesse melhores oportunidades.

Meu namorado, grande companheiro, que está ao meu lado em todas as horas e constantemente me encorajando a crescer profissionalmente. Muito obrigada!

Aos colegas e amigos que estudaram comigo durante esses dois anos, obrigada pela companhia na hora do almoço, pelas palavras de conforto quando algo não ia bem, pelo estímulo quando o desânimo aparecia e por deixar meus sábados mais alegres.

Aos professores do PROFMAT e a todos os outros professores que também fizeram parte da minha formação, a minha gratidão e reconhecimento pelo trabalho realizado.

Em especial, agradeço ao professor Humberto Bortolossi, meu orientador, sempre muito crítico e muito bem humorado, que não economizou ao dedicar seu tempo precioso à minha formação e ao meu trabalho de forma tão competente.

E não poderia deixar de agradecer também à CAPES pela bolsa concedida que viabilizou minha dedicação aos estudos durante estes dois anos de curso.

A primeira regra do ensino é saber o que se deve ensinar. A segunda, é saber um pouco mais do que aquilo que se deve ensinar. (George Polya)

A aprendizagem ocorre sempre que conexões são feitas ou são questionadas por associações inesperadas. (Linda Pound)

Resumo

No Ensino Básico, a justificativa apresentada para o estudo dos números irracionais se apoia principalmente no fato de que esses números aparecem em Geometria com fórmulas para o cálculo de perímetros, áreas e volumes e em Álgebra com soluções de equações. Neste trabalho procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais: apresentamos vários exemplos onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em aritmética, combinatória e geometria seja útil aos colegas professores e aos alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.

Palavras-chave: números irracionais; ensino e aprendizagem de Matemática; aplicações em Aritmética, Combinatória e Geometria.

Abstract

In Basic Education, the justification given for the study of irrational numbers is based mainly on the fact that these numbers appear in geometry with formulas to calculate perimeters, areas and volumes and in algebra to solve equations. In this dissertation, we take a different approach to irrational numbers: we present several examples where something interesting and not obvious happens because a certain number is irrational. We hope this new perspective that articulates irrational numbers with problems in arithmetic, geometry and combinatorics would be helpful for in-service and pre-service teachers of mathematics interested in the teaching and learning of irrational numbers.

Keywords: irrational numbers; teaching and learning of Mathematics; applications in Arithmetic, Combinatorics and Geometry.

Sumário

Lista de Figuras

1	Introdução	p. 11
2	Números Irracionais e Geoplanos	p. 13
3	Números Irracionais e Epiciclos	p. 20
4	Números Irracionais e Representações Decimais	p. 25
4.1	A Representação Decimal de um Número Real	p. 25
4.2	Caracterização dos Números Irracionais	p. 30
4.3	Interpretação Geométrica	p. 33
5	Números Irracionais e Outras Manifestações	p. 41
5.1	Bilhar em uma mesa quadrada	p. 41
5.2	Ladrilhamentos aperiódicos de Penrose	p. 42
5.3	Dissecção do retângulo em quadrados	p. 48
5.4	A Função de Dirichlet	p. 49
5.5	Curvas do Espirógrafo	p. 51
	Referências Bibliográficas	p. 54

Lista de Figuras

2.1	Um geoplano.	p. 13
2.2	Triângulos com vértices em uma malha quadrada.	p. 14
2.3	Não existe em \mathbb{R}^2 triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras – o argumento da área.	p. 15
2.4	Triângulos com vértices em uma malha isométrica.	p. 16
2.5	Não existe em \mathbb{R}^2 triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica – o argumento da área.	p. 17
2.6	Triângulo equilátero com vértices em uma malha hexagonal.	p. 19
2.7	Triângulo equilátero no espaço com vértices com coordenadas inteiras.	p. 19
3.1	Movimentos epicíclicos.	p. 20
3.2	Trajetórias de alguns movimentos epicíclicos.	p. 21
3.3	Epiciclos no livro Almagesto de Cláudio Ptolomeu.	p. 24
4.1	Gráfico de T	p. 33
4.2	Iteração 1 para $a = 0,\overline{138}$	p. 35
4.3	Iteração 2 para $a = 0,\overline{138}$	p. 35
4.4	Iteração 3 para $a = 0,\overline{138}$	p. 36
4.5	Iteração 4 para $a = 0,\overline{138}$	p. 36
4.6	Iteração 1 para $a = 0,945$	p. 37
4.7	Iteração 2 para $a = 0,945$	p. 38
4.8	Iteração 3 para $a = 0,945$	p. 38
4.9	Iteração 4 para $a = 0,945$	p. 39
4.10	Iteração 200 para $a = \sqrt{2}/10$	p. 40

5.1	Exemplos de tacadas na mesa de bilhar quadrada.	p. 41
5.2	Mais exemplos de tacadas na mesa de bilhar quadrada.	p. 42
5.3	Dois ladrilhamentos por quadrados.	p. 43
5.4	Exemplo de ladrilhamento periódico.	p. 44
5.5	Peças do ladrilhamento aperiódico de Penrose.	p. 45
5.6	Justaposições proibidas nos ladrilhamentos de Penrose.	p. 46
5.7	Exemplos de justaposições permitidas nos ladrilhamentos de Penrose.	p. 46
5.8	Peças do ladrilhamento aperiódico de Penrose com extensões e cortes.	p. 47
5.9	Ladrilhamento parcial de Penrose com 115 pipas e 75 dardos.	p. 48
5.10	Retângulo perfeito de Zbigniew Moroń.	p. 49
5.11	Exemplos de <i>hipotrocoides</i>	p. 51
5.12	Exemplos de <i>epitrocoides</i>	p. 52
5.13	Espirógrafo e suas curvas.	p. 53

1 Introdução

Os números irracionais são apresentados aos estudantes bem cedo, geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental, quando há a necessidade de ampliar os conjuntos numéricos para abordar certos conteúdos da Matemática: o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, o cálculo do perímetro e da área de círculos e soluções de equações quadráticas. O assunto é normalmente retomado no 1º ano do Ensino Médio por conta do estudo das funções reais elementares que fazem parte do currículo deste ano.

Várias pesquisas tem apontado para a dificuldade de se ensinar e aprender esse assunto na escola básica e nos cursos de formação de professores de Matemática: [10], [19], [21], [22], [23], [24], [26] e [28]. Neste cenário, um erro frequente detectado entre os alunos é o de eles considerarem, por exemplo, que π é igual a 3,14 e que $\sqrt{3}$ é igual a 1,73. Afinal, ao calcularem perímetros, áreas e volumes, o que geralmente se faz, no final, é substituir π e $\sqrt{3}$ por suas aproximações mais conhecidas com uma ou duas casas decimais após a vírgula. O próprio Simon Newcomb, importante astrônomo e matemático, declarou em 1882 que:

“Se a razão entre a circunferência de um círculo e seu diâmetro fosse escrita com 35 casas decimais, isto seria suficiente para determinar toda a circunferência do universo visível com um erro não maior do que o menor comprimento visível no mais potente microscópio.”

Logarithmic and Other Mathematical Tables: With Examples of Their Use and Hints on The Art of Computation, Simon Newcomb, tradução nossa¹).

Como nos diz [15], nos dias atuais, com o avanço tecnológico, seria necessário aumentar bastante o número de casas decimais de π para que a declaração de Newcomb continuasse sendo válida. Ainda assim, segundo [15], para a maioria das situações práticas, não são necessárias aproximações de π com muitas casas decimais². O mesmo acontece frequentemente com

¹Citação original: “If the ratio of the circumference of a circle to its diameter be written to thirty five places of decimals, the result will give the whole circumference of the visible universe without an error as great as the minutest length visible in the most powerful microscope.”

²[15] cita uma anedota que adaptamos para o Português: *O que é π ? Resposta de um matemático: π é a razão da medida da circunferência de um círculo pela medida do seu diâmetro. Resposta de um programador de com-*

outros números irracionais em questões práticas: pode-se substituí-los por uma aproximação sem maiores problemas ([15] dá exemplos em Música e na construção de caixas acústicas).

O fato é que os alunos não se deparam com situações onde eles precisem usar que um determinado número ($\sqrt{3}$, por exemplo) é irracional.

Ao invés de relacionar números irracionais com cálculos de perímetros, áreas e volumes ou soluções de equações como costumam fazer muitos livros didáticos, neste trabalho procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais: apresentamos vários exemplos onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em aritmética, combinatoria e geometria seja útil a colegas professores e a alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.

putadores: π é 3,141592653589 em precisão dupla. Resposta de um físico: π é 3,14159 mais ou menos 0,00005. Resposta de um engenheiro: π é cerca de 22/7. Resposta de um geógrafo: PI é a sigla do Estado do Piauí. Resposta de um crítico de cinema: Pi é o protagonista do filme “A Vida de Pi” dirigido por Ang Lee.

2 *Números Irracionais e Geoplanos*

O geoplano (*geoboard* em inglês) é uma ferramenta de manipulação para o ensino de geometria inventado pelo matemático e educador egípcio Caleb Gattegno (1911-1988). Ele é constituído por uma placa, geralmente retangular, de madeira ou isopor, com pregos fixados, em torno dos quais se enrolam elásticos coloridos de borracha, o que permite modelar polígonos cujos vértices são representados pelos pregos (Figura 2.1).

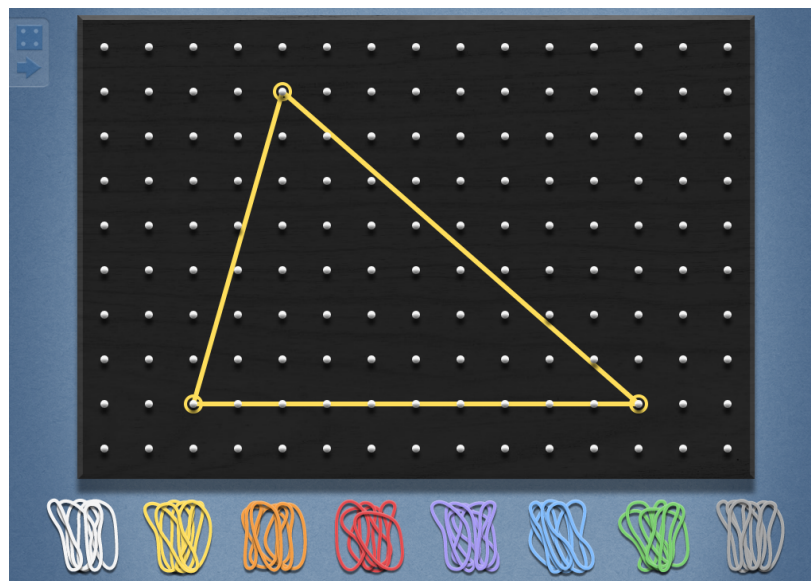


Figura 2.1: Um geoplano.
Fonte: The Math Learning Center.

O geoplano tem sido usado no ensino de perímetros, áreas, semelhança e congruência de polígonos, ângulos, transformações geométricas, simetrias e muitos outros assuntos. Entre as atividades clássicas sugeridas para o geoplano está investigar quais são os tipos de triângulos que podem ser construídos com ele. Uma versão virtual dessa atividade está disponível no endereço <<http://www.uff.br/cdme/jct/>> ([7]). Usando um geoplano (concreto ou virtual), o leitor não terá dificuldade de verificar que é possível construir um triângulo retângulo isósceles, um triângulo retângulo escaleno, um triângulo acutângulo isósceles, um triângulo acutângulo escaleno, um triângulo obtusângulo isósceles e um triângulo obtusângulo escaleno.

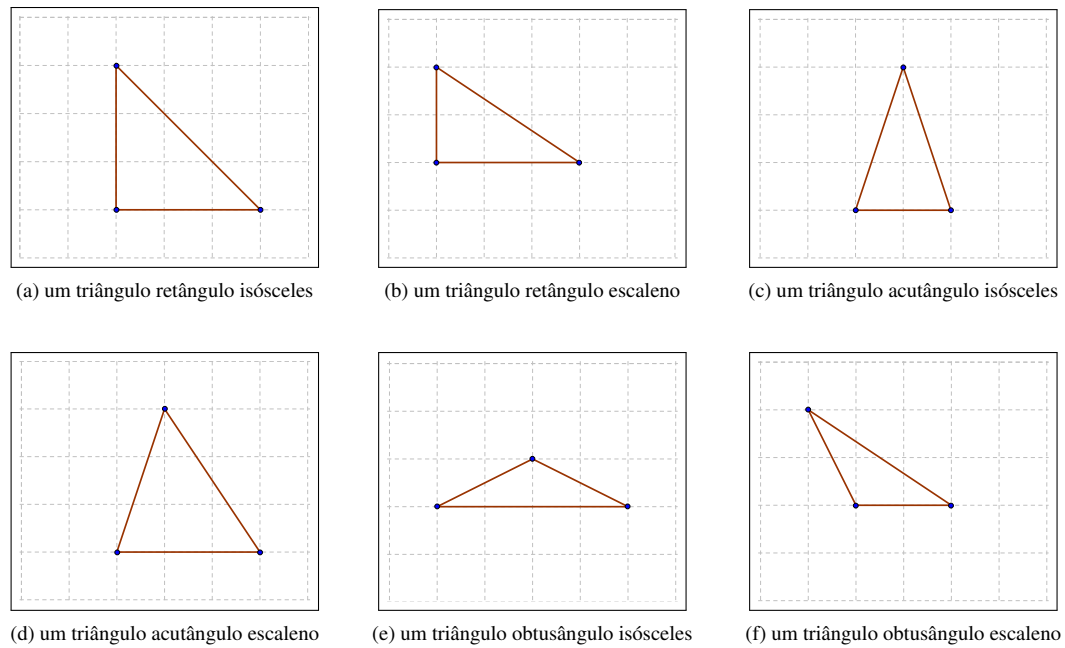


Figura 2.2: Triângulos com vértices em uma malha quadrada.

Uma pergunta que surge, neste contexto, é se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano. Note que o geoplano pode ser modelado através de uma malha quadrada, isto é, através do conjunto de pontos do plano cartesiano da forma (i, j) , com i e j inteiros. Assim, em termos matemáticos, perguntar se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano é equivalente a perguntar se existe triângulo equilátero com coordenadas inteiras. Como veremos no próximo teorema, a resposta a esta pergunta é não, porque $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Teorema 2.1 Não existe em \mathbb{R}^2 triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que seja possível construir um triângulo equilátero ABC com coordenadas inteiras: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$ com x_A, y_A, x_B, y_B, x_C e y_C números inteiros. Sejam ℓ a medida dos lados desse triângulo equilátero, $CDEF$ o retângulo com vértices $D = (x_A, y_C)$, $E = (x_A, y_B)$ e $F = (x_C, y_B)$ e a, b, c, d, e e f as medidas dos segmentos \overline{CF} , \overline{FB} , \overline{BE} , \overline{EA} , \overline{AD} e \overline{DC} , respectivamente (Figura 2.3).

Observe que a, b, c, d, e e f são números inteiros por se tratarem de diferenças de números inteiros (isto é, diferenças das coordenadas de A, B, C, D, E e F). Temos também que a área do retângulo $CDEF$ é um número inteiro por tratar-se de um produto de números inteiros (af). Denotemos por S_{ABC} a área do triângulo ABC . Observe que

$$S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC}).$$

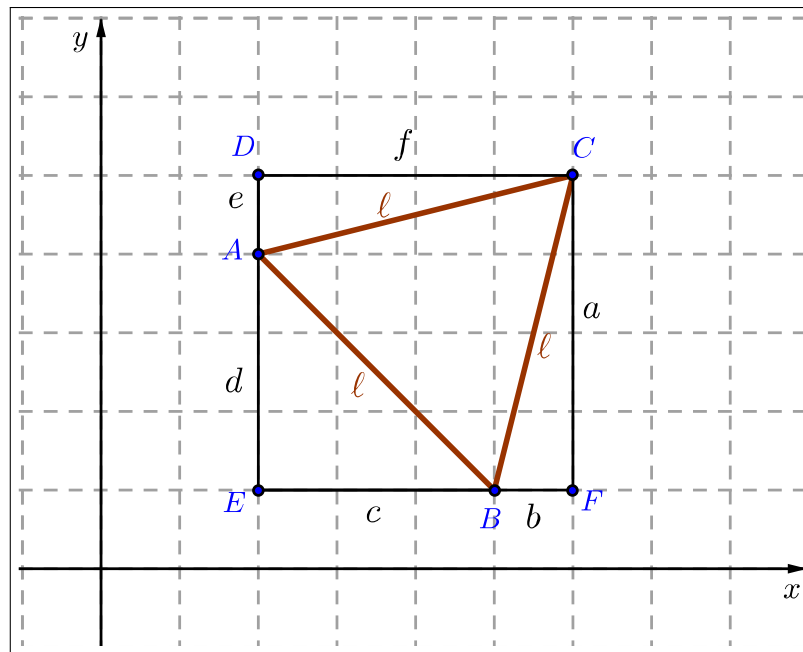


Figura 2.3: Não existe em \mathbb{R}^2 triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras – o argumento da área.

Assim, $\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$, de modo que $\ell^2\sqrt{3} = 4af - 2(ab + cd + ef)$. Note que o lado direito dessa equação é um número inteiro por tratar-se de somas e produtos entre inteiros. Temos também que ℓ^2 é um número inteiro, uma vez que $\ell^2 = a^2 + b^2$. Daí, concluímos que

$$\sqrt{3} = \frac{4af - 2(ab + cd + ef)}{\ell^2}$$

é um número racional, o que é um absurdo! Portanto, não existe em \mathbb{R}^2 triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras. ■

Observação: Existem outras provas para o teorema anterior usando diferentes técnicas (trigonometria, números complexos, determinantes, vetores, o Teorema de Pick). Todas utilizam o fato de que $\sqrt{3}$ é irracional.

Corolário 2.1 Não existe em \mathbb{R}^2 triângulo equilátero com vértices com coordenadas racionais.

Demonstração: Suponha, por absurdo, que exista um triângulo equilátero ABC cujos vértices possuam coordenadas racionais. Neste caso, usando as mesmas notações e seguindo os mesmos passos introduzidos na demonstração do teorema anterior, também concluiríamos que

$$\sqrt{3} = \frac{4af - 2(ab + cd + ef)}{\ell^2},$$

o que é um absurdo, pois $\sqrt{3}$ é um número irracional e o número $\frac{4af-2(ab+cd+ef)}{l^2}$ é racional (já que é o resultado de operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números racionais).

Outra forma de demonstrar este corolário é a seguinte: suponhamos, por absurdo, que exista um triângulo equilátero ABC cujos vértices possuam coordenadas racionais. Aplicando uma homotetia adequada, podemos ampliar o triângulo ABC preservando seus ângulos, a proporcionalidade de seus lados e de tal modo que seus vértices possuam coordenadas inteiras. Ou seja, a partir de um triângulo equilátero com vértices de coordenadas racionais, podemos construir um novo triângulo equilátero com vértices de coordenadas inteiras. Mas, como já sabemos, isso é um absurdo. Portanto, não existe em \mathbb{R}^2 triângulo equilátero com vértices de coordenadas racionais. ■

Outro tipo de malha que pode ser considerada no plano é a malha isométrica: a malha cujos pontos são da forma $i(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) + j(0, 1) = (\frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{i+2j}{2})$, com i e j números inteiros, ou seja, uma malha formada por justaposições de triângulos equiláteros. Em uma malha isométrica é possível construir quase todos os tipos de triângulos, incluindo o equilátero (Figura 2.4).

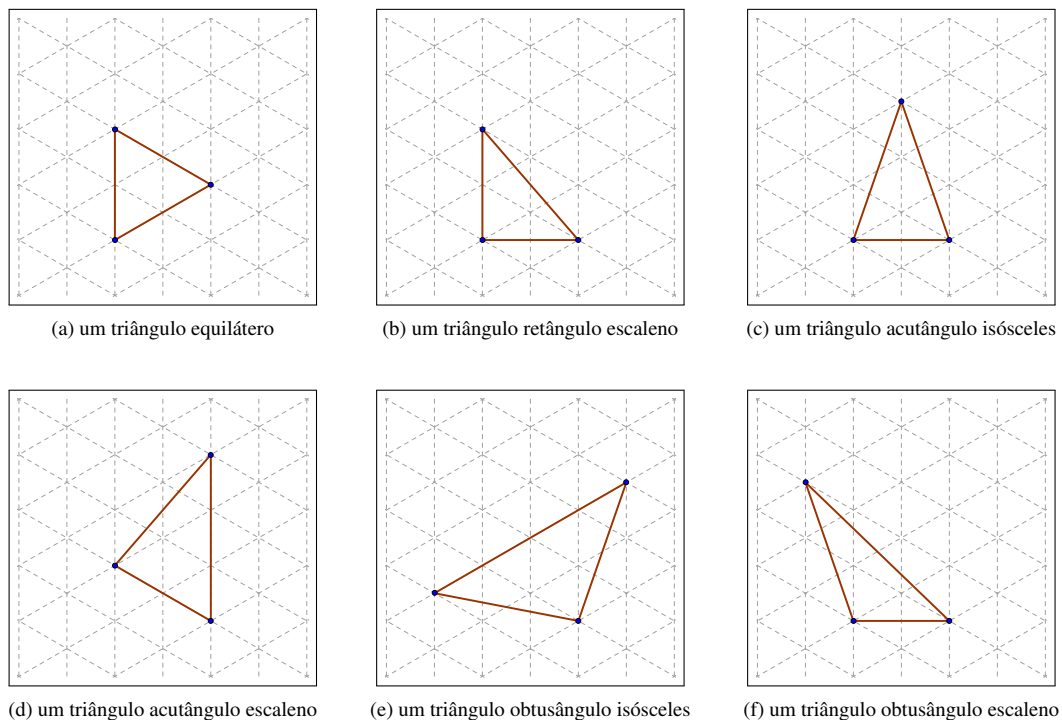


Figura 2.4: Triângulos com vértices em uma malha isométrica.

Observe que o único triângulo que não aparece na Figura 2.4 é o triângulo retângulo isósceles. Como veremos no próximo teorema, isto acontece novamente porque $\sqrt{3}$ é um número irracional.

Teorema 2.2 Não existe em \mathbb{R}^2 triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que seja possível construir um triângulo retângulo isósceles ABC com vértices sobre os pontos da malha isométrica: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C, y_C)$, com x_A , x_B e x_C números da forma $\frac{i\sqrt{3}}{2}$, i inteiro, e com y_A , y_B e y_C números racionais. Sejam ℓ a medida dos catetos desse triângulo retângulo isósceles, $CDEF$ o retângulo com vértices $D = (x_A, y_C)$, $E = (x_A, y_B)$ e $F = (x_C, y_B)$ e a , b , c , d , e e f as medidas dos segmentos \overline{CF} , \overline{FB} , \overline{BE} , \overline{EA} , \overline{AD} e \overline{DC} , respectivamente (Figura 2.5).

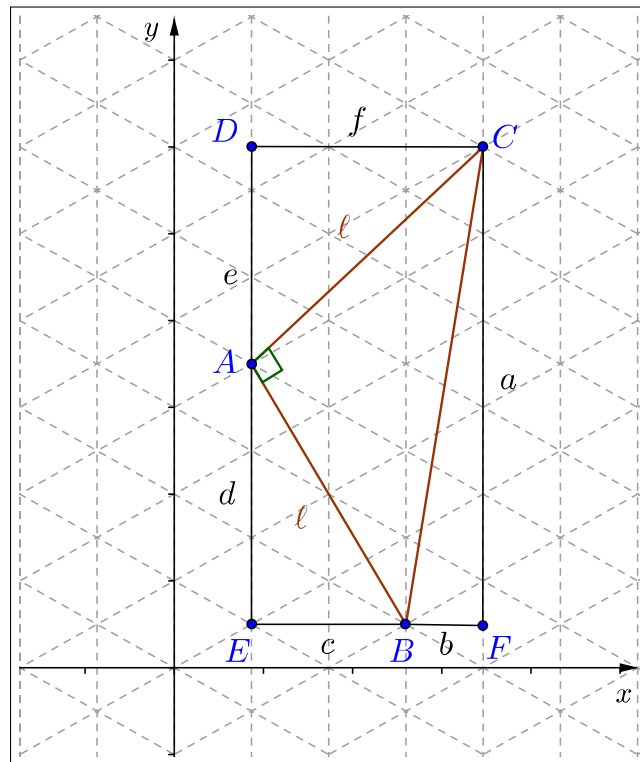


Figura 2.5: Não existe em \mathbb{R}^2 triângulo retângulo isósceles com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica – o argumento da área.

Na Figura 2.5 temos que a , d e e são números racionais por se tratarem de diferenças de racionais. As medidas b , c e f são números da forma $\frac{i\sqrt{3}}{2}$, com i inteiro, por se tratarem de diferenças de números desse mesmo tipo.

Observe agora que a área do retângulo $CDEF$ é dada por: $S_{CDEF} = af$. Como a é racional e f é da forma $\frac{i\sqrt{3}}{2}$, então S_{CDEF} é um número da forma $r\sqrt{3}$, com r um número racional. Note também que a área do triângulo ABC é igual a $\frac{\ell^2}{2}$ e que as áreas dos triângulos ACD , ABE e BCF são números da forma $s\sqrt{3}$, com s racional. Logo, a soma das áreas desses três triângulos

é da forma $t\sqrt{3}$, com t racional. Uma vez que a área do triângulo ABC é dada por $S_{ABC} = S_{CDEF} - (S_{ACD} + S_{ABE} + S_{BCF})$, segue-se então que

$$\frac{\ell^2}{2} = r\sqrt{3} - t\sqrt{3} = (r-t)\sqrt{3}. \quad (*)$$

Perceba que $\ell^2 = c^2 + d^2 = f^2 + e^2$ é um número da forma $(\frac{i\sqrt{3}}{2})^2 + d^2 = \frac{3i^2}{4} + d^2$, ou seja, ℓ^2 e, portanto, $\ell^2/2$ é um número racional. Por outro lado, na equação (*), temos que $(r-t)\sqrt{3}$ é um número irracional, pois $r-t$ é um número racional (não nulo, pois, caso contrário, por (*), ℓ seria igual a zero, o que não é o caso), $\sqrt{3}$ é um número irracional e o produto de um número irracional por um racional não-nulo é um número irracional. Temos assim uma contradição! Portanto, não existe em \mathbb{R}^2 triângulo retângulo isósceles com vértices sobre as coordenadas de uma malha isométrica. ■

Corolário 2.2 (A Vingança do Triângulo Equilátero) Não existe em \mathbb{R}^2 quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica.

Demonstração: Suponha por absurdo que exista quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica. Note que ao traçarmos uma das diagonais desse quadrado obteremos dois triângulos retângulos isósceles com vértices sobre os pontos da malha isométrica, o que é um absurdo pelo Teorema 2.2! Portanto, não existe em \mathbb{R}^2 quadrado com vértices sobre os pontos de uma malha isométrica. ■

Entre as malhas que podem ser construídas usando-se justaposições de polígonos regulares, existe ainda a malha hexagonal, aquela formada por hexágonos regulares adjacentes (conforme [2]). E na malha hexagonal? É possível construir um triângulo equilátero? E um quadrado? É fácil ver que é possível construir um triângulo equilátero na malha hexagonal (Figura 2.6).

Contudo, como na malha isométrica, não é possível construir um quadrado. Com efeito: um hexágono regular de lado igual a 1 é composto por seis triângulos equiláteros de lado 1. Então, se fosse possível construir um quadrado na malha hexagonal, também seria possível construir na malha isométrica. Mas já sabemos que tal fato é impossível.

Observação: Vimos que no plano cartesiano \mathbb{R}^2 não é possível construir um triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras. E no espaço \mathbb{R}^3 ? De fato, é possível construir um triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras no espaço \mathbb{R}^3 . O triângulo de vértices $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$ é equilátero (Figura 2.7): veja que a medida do

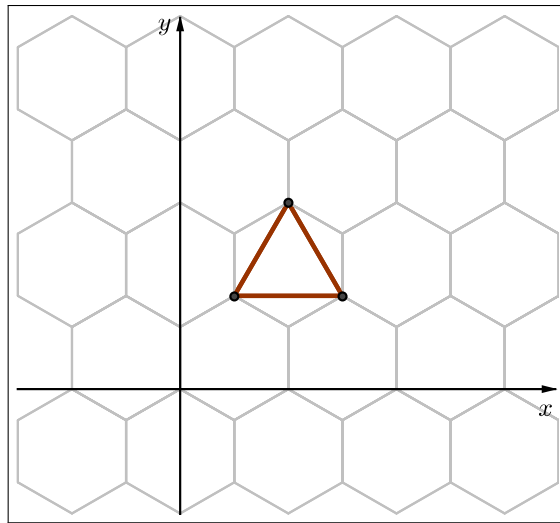


Figura 2.6: Triângulo equilátero com vértices em uma malha hexagonal.

lado \overline{AB} é igual a $\|AB\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$. Igualmente, temos que as medidas dos lados \overline{AC} e \overline{BC} são respectivamente iguais a $\|AC\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $\|BC\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. Assim, o triângulo ABC é equilátero.

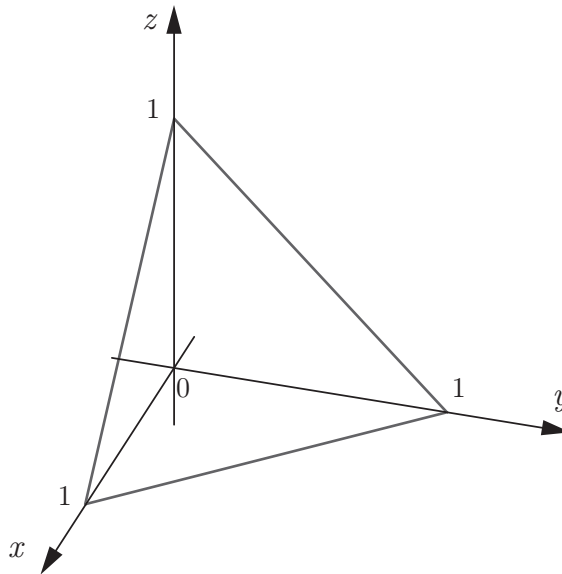


Figura 2.7: Triângulo equilátero no espaço com vértices com coordenadas inteiras.

3 *Números Irracionais e Epiciclos*

Dizemos que um ponto P descreve um *movimento epicíclico* se sua posição ao longo do tempo pode ser descrita pela combinação de dois movimentos circulares uniformes da seguinte maneira: o ponto P descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_2 sobre uma circunferência C_2 de raio $r_2 > 0$ e centro S , e o ponto S , por sua vez, descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_1 sobre uma circunferência C_1 de raio $r_1 > 0$ e centro em O . Supondo, sem perda de generalidade, que $O = (0,0)$ e que, no instante $t = 0$, $S = (r_1, 0)$ e $P = (r_1 + r_2, 0)$, a posição $(x(t), y(t))$ do ponto P , em função do tempo t , é dada por (Figura 3.1):

$$\begin{cases} x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t), \\ y(t) = r_1 \sin(w_1 t) + r_2 \sin(w_2 t). \end{cases} \quad (3.1)$$

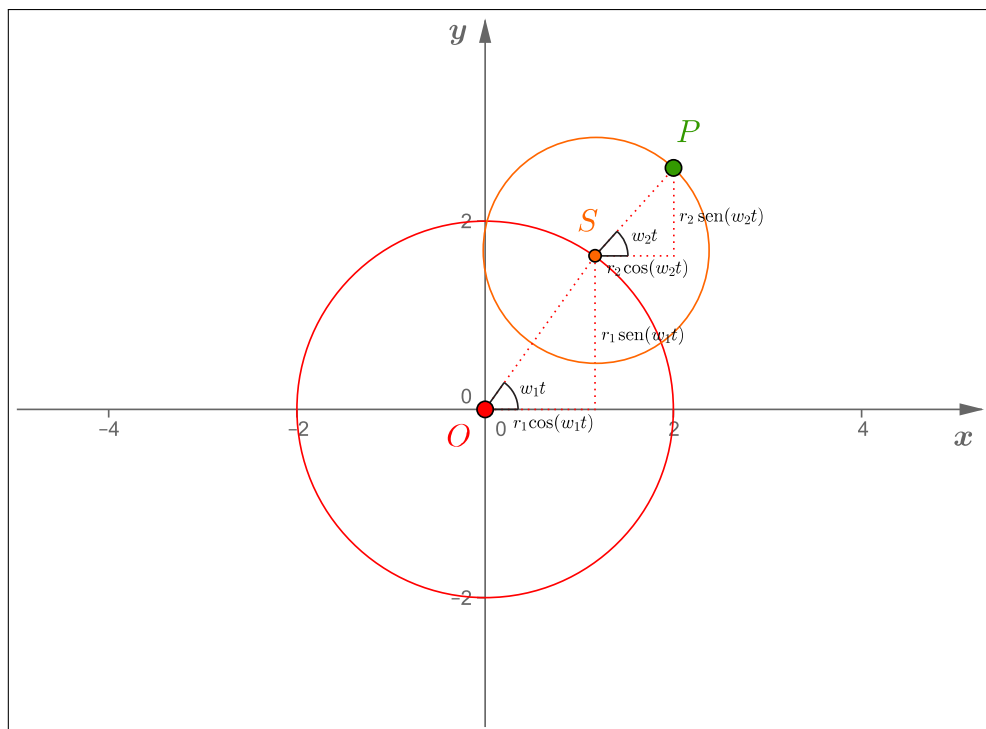
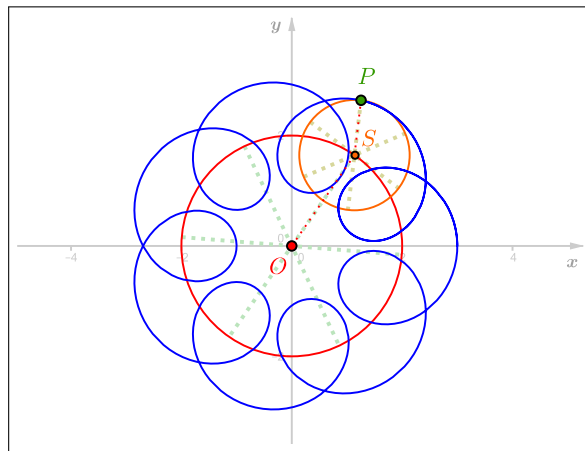
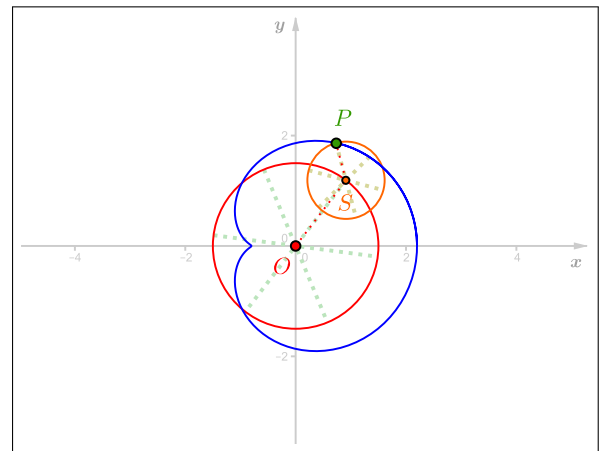


Figura 3.1: Movimentos epicíclicos.

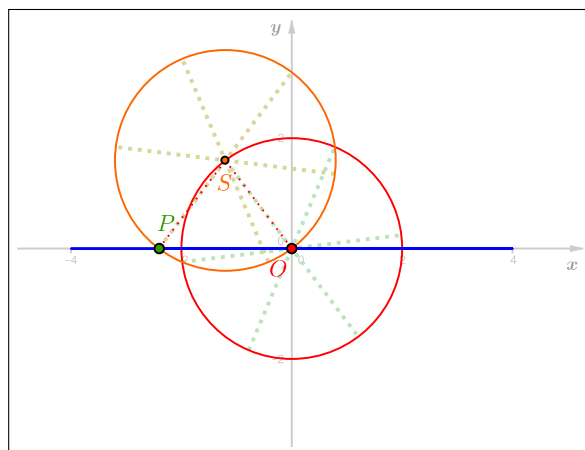
A Figura 3.2 descreve alguns exemplos de trajetórias de movimentos epicíclicos para diversos valores dos parâmetros r_1 , w_1 , r_2 e w_2 .



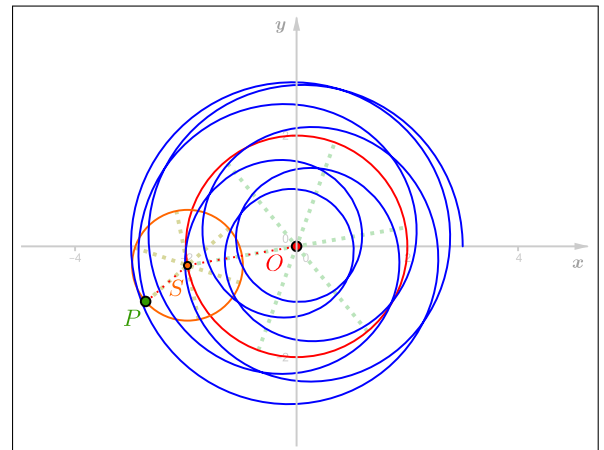
(a) $r_1 = 2; w_1 = 1; r_2 = 1; w_2 = 8$.



(b) $r_1 = 1,5; w_1 = 2; r_2 = 0,7; w_2 = 4$ (cardioide).



(c) $r_1 = 2; w_1 = 1; r_2 = 2; w_2 = -1$.



(d) $r_1 = 2; w_1 = \sqrt{2}; r_2 = 1; w_2 = 1$.

Figura 3.2: Trajetórias de alguns movimentos epicíclicos.

Lembramos que uma trajetória $t \mapsto (x(t), y(t))$ é *periódica* com período $T > 0$ se, para todo $t \in \mathbb{R}$, $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$. O menor $T > 0$, se existir, tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, é denominado o *período fundamental* da trajetória. Observe que os movimentos epicíclicos (a), (b) e (c) da Figura 3.2 descrevem trajetórias periódicas: a trajetória do Item (a) tem período fundamental $T = 2\pi$, a do Item (b) tem período fundamental $T = \pi$ e a do Item (c) tem período fundamental $T = 2\pi$. Quando uma trajetória de um movimento epicíclico é periódica? Será que a trajetória do movimento epicíclico do Item (d) da Figura 3.2 é periódica? O teorema a seguir nos dá a resposta!

Teorema 3.1 Um movimento epicíclico descrito pelas Equações 3.1 descreve uma trajetória periódica se, e somente se, $w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional caso $w_2 \neq 0$.

Demonstração:

(\Rightarrow) Suponha que a trajetória no movimento epicíclico descrito pelas Equações 3.1 seja periódica. Assim, existe $T > 0$ tal que $x(T+t) = x(t)$ e $y(T+t) = y(t)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Se $w_2 = 0$, nada há para se fazer. Suponha então que $w_2 \neq 0$. Fazendo $t = 0$, obtemos que $x(T) = x(0)$ e $y(T) = y(0)$, isto é,

$$r_1 \cos(w_1 T) + r_2 \cos(w_2 T) = r_1 + r_2 \quad \text{e} \quad r_1 \sin(w_1 T) + r_2 \sin(w_2 T) = 0. \quad (3.2)$$

Portanto,

$$\cos(w_1 T) = \frac{r_1 + r_2 - r_2 \cos(w_2 T)}{r_1} \quad (3.3)$$

e $r_1 \sin(w_1 T) = -r_2 \sin(w_2 T)$. Desta última equação, segue-se que $r_1^2 \sin^2(w_1 T) = r_2^2 \sin^2(w_2 T)$, isto é,

$$r_1^2 [1 - \cos^2(w_1 T)] = r_2^2 [1 - \cos^2(w_2 T)]. \quad (3.4)$$

Escrevendo $a = \cos(w_2 T)$ e substituindo-se (3.3) em (3.4), concluímos que

$$r_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1 + r_2 - r_2 a}{r_1} \right)^2 \right] = r_2^2 (1 - a^2).$$

Logo, $r_1^2 - (r_1^2 + r_2^2 + r_2^2 a^2 + 2r_1 r_2 - 2r_1 r_2 a - 2r_2^2 a) = r_2^2 (1 - a^2)$ e, sendo assim, $-2r_1 r_2 + 2r_1 r_2 a + 2r_2^2 a = 2r_2^2$. Como $r_2 > 0$, dividindo-se os dois lados desta última equação por $2r_2$, vemos que $-r_1 + r_1 a + r_2 a = r_2$ ou, ainda,

$$r_1(a - 1) = -r_2(a - 1).$$

Daí teremos que $r_1 = -r_2$ ou $a - 1 = 0$. Como r_1 e r_2 são positivos, segue-se que $r_1 \neq -r_2$ e, desta maneira, obrigatoriamente $a - 1$ deve ser igual a zero. Logo, $\cos(w_2 T) = 1$ e, portanto,

$$w_2 T = 2k\pi \quad (3.5)$$

para algum k inteiro diferente de zero. Substituindo-se (3.5) em (3.2), vemos que $r_1 \sin(w_1 T) + r_2 \sin(2k\pi) = 0$ e, como $\sin(2k\pi) = 0$, segue-se que $r_1 \sin(w_1 T) = 0$, isto é, $\sin(w_1 T) = 0$. Logo, $w_1 T = q\pi$, para algum q inteiro. Assim, $w_1/w_2 = (w_1 T)/(w_2 T) = (q\pi)/(2k\pi) = q/(2k)$ é um número racional.

(\Leftarrow) Se $w_2 = 0$, então $x(t) = r_1 \cos(w_1 t) + r_2$ e $y(t) = r_2 \sin(w_1 t)$. Se $w_1 = 0$, então $x(t) = r_1 + r_2$ e $y(t) = 0$. Em particular, para qualquer $T > 0$, $x(t+T) = r_1 + r_2 = x(t)$ e $y(t+T) = 0 = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, isto é, a trajetória do movimento epicíclico é periódica. Se $w_1 \neq 0$, tomando-se $T = (2\pi/|w_1|)$, então

$$x(t+T) = r_1 \cos(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t \pm 2\pi) + r_2 = r_1 \cos(w_1 t) + r_2 = x(t)$$

e

$$y(t+T) = r_1 \sin(w_1(t + 2\pi/|w_1|)) = r_1 \sin(w_1 t \pm 2\pi) = r_1 \sin(w_1 t) = y(t),$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a trajetória do movimento epicíclico também é periódica se $w_1 \neq 0$. Isto encerra o caso $w_2 = 0$. Suponha então que w_2 seja diferente de zero e que w_1/w_2 seja um número racional, digamos, $w_1/w_2 = a/b$, com a e b inteiros, b com o mesmo sinal de w_2 . Seja $T = 2b\pi/w_2$. Note que $T > 0$ e que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} x(t+T) &= r_1 \cos(w_1(t+T)) + r_2 \cos(w_2(t+T)) = r_1 \cos(w_1(T+t)) + r_2 \cos(w_2(T+t)) \\ &= r_1 \cos(w_1 T) \cos(w_1 t) - r_1 \sin(w_1 t) \sin(w_1 T) + \\ &\quad r_2 \cos(w_2 T) \cos(w_2 t) - r_2 \sin(w_2 t) \sin(w_2 T) \\ &= r_1 \cos(w_1(2b\pi/w_2)) \cos(w_1 t) - r_1 \sin(w_1 t) \sin(w_1(2b\pi/w_2)) + \\ &\quad r_2 \cos(w_2(2b\pi/w_2)) \cos(w_2 t) - r_2 \sin(w_2 t) \sin(w_2(2b\pi/w_2)) \\ &= r_1 \cos(2b\pi(w_1/w_2)) \cos(w_1 t) - r_1 \sin(w_1 t) \sin(2b\pi(w_1/w_2)) + \\ &\quad r_2 \cos(2b\pi(w_2/w_2)) \cos(w_2 t) - r_2 \sin(w_2 t) \sin(2b\pi(w_2/w_2)) \\ &= r_1 \cos(2b\pi(a/b)) \cos(w_1 t) - r_1 \sin(w_1 t) \sin(2b\pi(a/b)) + \\ &\quad r_2 \cos(2b\pi) \cos(w_2 t) - r_2 \sin(w_2 t) \sin(2b\pi) \\ &= r_1 \cos(2a\pi) \cos(w_1 t) - r_1 \sin(w_1 t) \sin(2a\pi) + \\ &\quad r_2 \cos(2b\pi) \cos(w_2 t) - r_2 \sin(w_2 t) \sin(2b\pi) \\ &= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t) = x(t). \end{aligned}$$

Argumentos análogos mostram que $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Mostramos então que existe $T = 2b\pi/w_2 > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$ e $y(t+T) = y(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo assim, a trajetória do movimento epicíclico é periódica. ■

Observação: Os gregos antigos usaram os movimentos epicíclicos para explicar os movimentos dos corpos celestes no céu. A escolha de círculos se deve ao fato deles considerarem o círculo como a curva perfeita e, sendo assim, a única digna para um corpo celeste se movimentar. Este modelo persistiu do século III a.C. (com Apolônio de Perga) até o século XV d.C. (com

Johannes Kepler). A Figura 3.3 (extraída do livro *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu) ilustra o modelo cinemático de Ptolomeu para o movimento dos planetas Marte, Júpiter e Saturno.

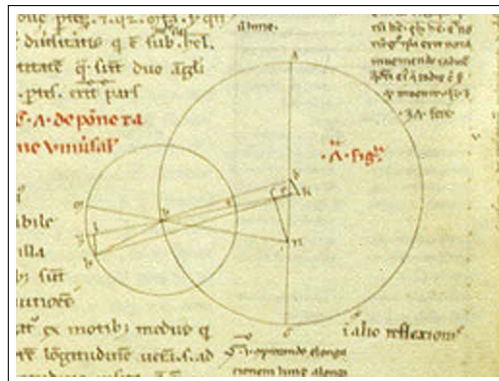


Figura 3.3: Epíclis no livro *Almagesto* de Cláudio Ptolomeu.
Fonte: Museu do Vaticano.

Apesar do sistema ptolomaico conseguir modelar o movimento retrógrado dos planetas, o modelo básico da teoria dos epiciclos oferece apenas uma aproximação muito simples para o movimento real. Por exemplo, o uso do modelo básico implica que os arcos retrógrados são de mesmo tamanho e que eles estão igualmente espaçados. Mesmo os antigos astrônomos gregos sabiam que isto não acontecia. Por este motivo, várias modificações foram sugeridas para o modelo básico a fim de incorporar estas irregularidades.

Com as Leis de Kepler e as Leis de Newton, os epiciclos caíram em desuso. Mas, como afirma [5], “*O desaparecimento dos epiciclos foi apenas temporário: mais tarde, como a Fênix, eles renasceram de suas próprias cinzas. De fato, como observado (talvez pela primeira vez) por G. V. Schiaparelli no último século, as expansões em séries de Fourier trouxeram os epiciclos de volta, em uma roupagem moderna, em mecânica celeste.*” (tradução nossa¹). Séries de Fourier (e, por associação, os epiciclos) têm outras aplicações. Segundo [16], o trabalho científico de Matemática mais citado de todos os tempos trata justamente da Análise de Fourier; aproximadamente 3/4 dos prêmios Nobel em Física foram ganhos por trabalhos feitos usando-se ferramentas e conceitos da Análise de Fourier; o prêmio Nobel de Química de 1985 e os prêmios Nobel de Medicina de 1962, 1979 e 2003 também estão relacionados com a Análise de Fourier. Para o leitor interessado em entender a conexão entre epiciclos e séries de Fourier, recomendamos o excelente artigo [20].

Por fim, indicamos o *site* [6], o qual oferece um conjunto de atividades (acessíveis a alunos do Ensino Médio) que relacionam os epiciclos com funções trigonométricas.

¹Citação original: “*However, the disappearance of the epicycles was only temporary: some time later, like the Phoenix, they rose again from their ashes. In fact, as remarked (perhaps for the first time) by G. V. Schiaparelli in the last century, Fourier series expansions brought the epicycles back again, in modern dress, in celestial mechanics.*”.

4 *Números Irracionais e Representações Decimais*

Na escola aprendemos que uma maneira de se exprimir um número real é através de sua representação decimal. Este tipo de representação permite caracterizar os números irracionais:

um número real é irracional
se, e somente se,
sua representação decimal é infinita e não periódica.

Nosso objetivo principal aqui é demonstrar este resultado (Seção 4.2) e ilustrá-lo através de uma interpretação geométrica no contexto de composições repetidas de uma certa função (Seção 4.3). Como ponto de partida, na Seção 4.1, descrevemos de forma precisa em que consiste a representação decimal de um número real.

4.1 A Representação Decimal de um Número Real

O que é 2506? E 12,25? Por que $12,25 = \frac{49}{4}$? Qual o significado de $0,\bar{3}$? Por que $0,\bar{3} = \frac{1}{3}$?

Desde pequenos aprendemos que qualquer número pode ser expresso usando-se apenas dez algarismos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Para números inteiros não negativos, estes símbolos contam as unidades, as dezenas, as centenas, os milhares, etc. O primeiro algarismo (da direita para a esquerda) conta as unidades, o segundo, as dezenas, o terceiro, as centenas, e assim sucessivamente. Por exemplo, 2506 são 2 milhares, 5 centenas, 0 dezenas e 6 unidades, ou ainda, $2506 = 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$.

Quando tratamos de números reais que não são inteiros sua representação decimal contém uma vírgula para separar a parte inteira (à esquerda da vírgula) da parte fracionária (à direita, é claro). A sequência de números que representa a parte fracionária contam os décimos, os centésimos, os milésimos, etc. Por exemplo, para o número 12,25, sua parte fracionária, “0,25”, são 2 décimos e 5 centésimos, ou ainda, $0,25 = 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100}$. Sendo assim, $12,25 =$

$12 + 2 \cdot \frac{1}{10} + 5 \cdot \frac{1}{100} = \frac{12 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5}{100} = \frac{1225}{100} = \frac{49}{4}$. O número $\frac{49}{4}$ é um exemplo de número real que tem uma *representação decimal finita*, pois ele pode ser representado por um número finito de dígitos (no caso, 4 dígitos). Mais geralmente, dizemos que um número real $x \geq 0$ tem uma representação decimal finita se existem dígitos A_1, A_2, \dots, A_n e a_1, a_2, \dots, a_m tais que

$$x = A_1 A_2 \dots A_n, a_1 a_2 \dots a_m = A_1 \cdot 10^{n-1} + A_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + A_n + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_m}{10^m}$$

ou

$$A_1 A_2 \dots A_n, a_1 a_2 \dots a_m = \frac{A_1 A_2 \dots A_n a_1 a_2 \dots a_m}{10^m},$$

com $A_1 \neq 0$ se $n > 1$.

E $0, \overline{3}$? (Onde $\overline{3}$ é uma notação para infinitos três.) Qual é o significado dessa representação? O que significa colocar “infinitos” dígitos em uma representação decimal? A definição aqui é bem mais elaborada! Para entender o significado de $0, \overline{3}$ é preciso considerar a seguinte sequência

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{10}, \\ x_2 &= \frac{33}{100}, \\ &\vdots, \\ &\quad \quad \quad \text{\textit{k} dígitos 3} \\ x_k &= \frac{\overbrace{3 \dots 3}^{\text{\textit{k} dígitos 3}}}{10^k}. \end{aligned}$$

Esta sequência converge para um certo número real x (isto é, existe um número real x tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$). Posto isto, $0, \overline{3}$ nada mais é do que uma notação para representar o número x . Neste contexto, dizemos que $0, \overline{3}$ é uma *representação decimal* do número x . Uma vez que, quando k vai para infinito, $(1/10)^k$ converge para 0 segue-se que

$$\begin{aligned} x_k &= \frac{\overbrace{3 \dots 3}^{\text{\textit{k} dígitos 3}}}{10^k} = \frac{3 \cdot 10^{k-1} + 3 \cdot 10^{k-2} + \dots + 3 \cdot 10 + 3}{10^k} = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \dots + \frac{3}{10^k} \\ &= \frac{3/10 \cdot ((1/10)^k - 1)}{1/10 - 1} \end{aligned}$$

converge para $-(3/10)/(1/10 - 1) = 1/3$. Portanto,

$$0, \overline{3} = x = \frac{1}{3}.$$

$1/3$ é um exemplo de número real que possui uma representação decimal infinita, pois não é

possível representá-lo usando-se uma quantidade finita de dígitos. Mais precisamente, dizemos que um número real $x \geq 0$ tem uma representação decimal infinita se existem dígitos A_1, A_2, \dots, A_n e $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ tais que

$$x = A_1A_2\dots A_n, a_1a_2\dots a_k\dots, \quad (4.1)$$

com $A_1 \neq 0$ se $n > 1$ e, também, não existe natural p tal que $a_k = 0$ para todo $k \geq p$ (isto é, nem todo a_k é zero a partir de certo ponto). É importante ter em mente o significado da Expressão (4.1): ela denota o fato que o limite da sequência

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1A_2\dots A_n + \frac{a_1}{10}, \\ x_2 &= A_1A_2\dots A_n + \frac{a_1a_2}{100}, \\ x_3 &= A_1A_2\dots A_n + \frac{a_1a_2a_3}{1000}, \\ &\vdots \\ x_k &= A_1A_2\dots A_n + \frac{a_1a_2\dots a_k}{10^k} \end{aligned}$$

é o número real x , isto é, $A_1A_2\dots A_n, a_1a_2\dots a_k\dots$ é uma representação decimal do número x . Note que a sequência (x_k) é não-decrescente e limitada superiormente. Assim, pelo Axioma do Supremo, (x_k) é convergente.

Observação: Em alguns livros tais como [13], os autores definem apenas representações decimais infinitas e colocam as “representações decimais finitas” como uma forma abreviada de se escrever representações cujos dígitos são todos iguais a zero a partir de um certo ponto. Assim:

$$x = A_1A_2\dots A_n, a_1a_2\dots a_m \underbrace{000\dots}_{\text{infinitos zeros}}$$

pode ser escrito simplesmente como

$$x = A_1A_2\dots A_n, a_1a_2\dots a_m,$$

com $A_1 \neq 0$ se $n > 1$ e, também, $a_m \neq 0$. Adotaremos esta convenção aqui.

Será que todo número real não negativo possui uma representação decimal? Por exemplo, $\sqrt{2}$ possui uma representação decimal (isto é, existem dígitos $A_1, A_2, \dots, A_n, a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ tais que $A_1A_2\dots A_n, a_1a_2\dots a_k\dots = \sqrt{2}$)? O teorema a seguir nos diz que $\sqrt{2}$ como qualquer outro número real não negativo possui uma representação decimal.

Teorema 4.1 Todo número real não negativo possui uma representação decimal.

Demonstração (conforme Seção 9.1 de [13]): Vamos mostrar primeiro que todo número real $x > 0$ possui uma representação decimal. Vamos escrever: $x = I + F$, onde $I = [x]$ é a parte inteira de x (um número inteiro não negativo) e F é a parte fracionária de x (com $0 \leq F < 1$). Analisaremos I e F separadamente.

Se $I > 0$, então existe $s \in \mathbb{N}$ tal que $10^s \leq I < 10^{s+1}$. Sejam A_1 e I_1 , respectivamente, o quociente e o resto da divisão de I por 10^s . Logo,

$$I = A_1 \cdot 10^s + I_1,$$

com $0 < A_1 = [10^{-s}I] < 10$ e $0 \leq I_1 < 10^s$. Do mesmo modo, teremos:

$$\begin{aligned} I_1 &= A_2 \cdot 10^{s-1} + I_2 && (\text{com } 0 \leq A_2 < 10 \text{ e } 0 \leq I_2 < 10^{s-1}), \\ I_2 &= A_3 \cdot 10^{s-2} + I_3 && (\text{com } 0 \leq A_3 < 10 \text{ e } 0 \leq I_3 < 10^{s-2}), \\ &\vdots \\ I_{s-1} &= A_s \cdot 10 + I_s && (\text{com } 0 \leq A_s < 10 \text{ e } 0 \leq I_s < 10), \\ I_s &= A_{s+1} && (\text{com } 0 \leq A_{s+1} < 10). \end{aligned}$$

Desta maneira, fazendo substituições retroativas temos que

$$\begin{aligned} I &= A_1 \cdot 10^s + I_1 \\ &= A_1 \cdot 10^s + A_2 \cdot 10^{s-1} + I_2 \\ &= A_1 \cdot 10^s + A_2 \cdot 10^{s-1} + A_3 \cdot 10^{s-2} + I_3 \\ &\vdots \\ &= A_1 \cdot 10^s + A_2 \cdot 10^{s-1} + \cdots + A_s \cdot 10 + A_{s+1}. \end{aligned}$$

Assim, I pode ser expresso sob a forma $I = A_1 \cdot 10^s + A_2 \cdot 10^{s-1} + \cdots + A_s \cdot 10 + A_{s+1}$, onde $A_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, $i \in \{1, 2, \dots, s+1\}$ e $A_1 \neq 0$ (se $s > 0$), isto é, $A_1 A_2 \dots A_s A_{s+1}$ é uma representação decimal para o inteiro I :

$$I = A_1 A_2 \dots A_s A_{s+1}.$$

Consideraremos agora F . Seja $f_1 = F$ (com $0 \leq f_1 < 1$). Defina $a_1 = [10f_1]$, de modo que $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e $10f_1 = a_1 + f_2$ (com $0 \leq f_2 < 1$). Assim, $a_1 \leq 10f_1 < a_1 + 1$. Logo, $\frac{a_1}{10} \leq$

$f_1 < \frac{a_1+1}{10}$. Do mesmo modo vamos definir a_2, a_3, \dots por

$$\begin{aligned} a_2 &= [10f_2], & 10f_2 &= a_2 + f_3 & (\text{com } 0 \leq f_2 < 1), \\ a_3 &= [10f_3], & 10f_3 &= a_3 + f_4 & (\text{com } 0 \leq f_3 < 1), \\ &\dots \\ a_n &= [10f_n], & 10f_n &= a_n + f_{n+1} & (\text{com } 0 \leq f_n < 1), \end{aligned}$$

onde $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo, fazendo substituições sucessivas, teremos:

$$\begin{aligned} F = f_1 &= \frac{a_1}{10} + \frac{f_2}{10} \\ &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{f_3}{10^2} \\ &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{f_4}{10^3} \\ &\vdots \\ &= \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \frac{f_4}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \frac{f_{n+1}}{10^n}. \end{aligned}$$

Assim, $F = F_n + g_{n+1}$, onde

$$F_n = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 a_2 \dots a_n}{10^n} \quad \text{e} \quad 0 \leq g_{n+1} = \frac{f_{n+1}}{10^n} < \frac{1}{10^n}. \quad (4.2)$$

Se mostrarmos que $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n = F$, então seguirá que $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ é uma representação decimal do número F . Como $1/10^n$ converge para zero quando n tende a infinito, segue-se de (4.2) que g_{n+1} também converge para zero. Consequentemente, uma vez que $F_n = F - g_{n+1}$, vemos que quando n tende a infinito, F_n tende a F , como queríamos. Note que, se $10^n F$ é um inteiro, para algum n , então $f_{n+1} = 0$ e, portanto, $a_{n+1} = a_{n+2} = \dots = 0$, isto é, a representação decimal para F que construímos anteriormente é finita. ■

Observação: O Teorema 4.1 garante que todo número real ≥ 0 possui uma representação decimal. A pergunta que surge é se esta representação é sempre única, isto é, se um mesmo número real ≥ 0 pode ou não ter mais do que uma representação decimal. A resposta é que existem números reais que possuem duas representações decimais diferentes. Por exemplo, $0,5$ e $0,4\bar{9}$ são duas representações diferentes para o número $1/2$. Por outro lado, se nos restringirmos às representações decimais que excluem aquelas com período 9 (ou seja, aquelas que possuem infinitos noves a partir de uma certa casa decimal), então cada número real ≥ 0 possui uma única representação decimal. Ao leitor interessado numa demonstração para este fato, sugerimos a referência [13].

Observação: Uma das vantagens do sistema de numeração decimal posicional é a de poder representar qualquer número natural usando apenas dez símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Contudo, para explicar como esse sistema funciona, (além dos símbolos de multiplicação \cdot e adição $+$), é necessário um símbolo extra para representar o número dez. Por quê? Considere, por exemplo, o número cento e quarenta e cinco. No sistema de numeração decimal posicional, este número é representado por 145 e a explicação que costumamos encontrar nos livros para este fato é a seguinte:

$$145 = 1 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0.$$

Se tentarmos usar esta explicação para justificar a representação decimal do número dez, teremos:

$$10 = 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0,$$

o que não é adequado, pois estamos usando a própria representação decimal do número dez para explicar a representação decimal do número dez. Assim, para evitar a explicação circular, é necessário um outro símbolo para representar o número dez: talvez a própria palavra “dez”, o símbolo A (que representa o número dez no sistema de numeração hexadecimal) ou o símbolo romano “X”.

4.2 Caracterização dos Números Irracionais

Há casos de números com representação decimal infinita em que a parte fracionária possui uma regularidade: a partir de certo dígito aparece um bloco de algarismos, chamado de *período* da representação decimal, tal que, a partir dele a parte fracionária é composta apenas por sucessivas repetições desse bloco. Por exemplo, o número racional $679/5500$ tem a seguinte representação decimal: $0,1234545\dots45\dots$, isto é, o bloco de algarismos 45 se repete após o terceiro dígito depois da vírgula. Para explicitar que 45 é o período da representação decimal de $679/5500$, usa-se a seguinte notação: $0,123\overline{45}$. Mais geralmente, dizemos que um número F possui uma representação decimal infinita periódica se existem dígitos $A_1, \dots, A_s, b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n$ tais que

$$F = A_1 \dots A_s b_1 \dots b_m \overline{a_1 \dots a_n}.$$

Nem todo número real possui uma representação decimal finita ou infinita periódica, como é o caso da constante de Champernowne (o número obtido concatenando-se os inteiros positivos e interpretando-os como dígitos à direita da vírgula):

$$C_{10} = 0,123456789101112131415\dots$$

O próximo teorema fornece uma caracterização dos números irracionais positivos em termos da não finitude e não periodicidade de suas representações decimais.

Teorema 4.2 Um número real positivo é irracional se, e somente se, ele possui uma representação decimal que é infinita e não periódica.

Demonstração: Observe que para demonstrarmos o Teorema (4.2), basta demonstrar que

$$\begin{array}{l} \text{um número real positivo é racional} \\ \text{se, e somente se,} \\ \text{sua representação decimal é finita ou infinita periódica.} \end{array} \quad (*)$$

Como a condição da representação decimal de um número real F ser finita ou infinita periódica se refere apenas à parte fracionária do número, podemos sem perda de generalidade considerar apenas números reais F no intervalo $[0, 1[$.

Prova de (\Rightarrow) do Teorema (*). Seja $F \in [0, 1[$ um número racional. Então, podemos dizer que $F = p/q$, para p e q inteiros e $0 < p < q$. Daí, para achar a representação decimal de F basta dividirmos o numerador p pelo denominador q usando o Algoritmo da Divisão. Os restos que podem aparecer na execução do algoritmo são números inteiros maiores ou iguais a 0 e menores que q : $0, 1, 2, 3, \dots, (q - 1)$. Se em algum momento o resto for igual a 0, então, F possui uma representação decimal finita. Mas, se 0 não aparecer como resto em momento algum, então F possui representação decimal infinita e periódica, pois, pelo Princípio da Casa dos Pombos, os restos começarão a se repetir, fazendo com que o resultado no quociente também comece a se repetir formando assim um período.

Observação: a demonstração que apresentamos aqui (e que é comumente apresentada nos livros) tem a vantagem ser mais fácil de se entender, pois ela usa um dispositivo que é familiar ao leitor: o Algoritmo da Divisão. Contudo, ela omite o fato do porquê do Algoritmo da Divisão obter uma representação decimal para números racionais. Para o leitor interessado em consultar uma demonstração mais completa para o fato de que um número racional possui uma representação decimal finita ou infinita periódica, recomendamos o livro [13].

Prova de (\Leftarrow) do Teorema (*). Seja $F \in [0, 1[$ tal que F possui uma representação decimal finita ou infinita periódica. Se a representação decimal de F é finita, então podemos escrever $F = 0,a_1a_2\dots a_n$, com $a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Assim,

$$F = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} = \frac{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n}{10^n}$$

é racional. Agora suponha que a representação decimal de F é infinita e periódica. Logo, podemos escrever

$$F = 0, b_1 b_2 \dots b_m \overline{a_1 a_2 \dots a_n},$$

com $b_1, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Então,

$$\begin{aligned} F &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \dots + \frac{b_m}{10^m} + \frac{a_1}{10^{m+1}} + \frac{a_2}{10^{m+2}} + \dots + \frac{a_n}{10^{m+n}} \\ &\quad + \frac{a_1}{10^{m+n+1}} + \frac{a_2}{10^{m+n+2}} + \dots + \frac{a_n}{10^{m+2n}} \\ &\quad + \frac{a_1}{10^{m+2n+1}} + \frac{a_2}{10^{m+2n+2}} + \dots + \frac{a_n}{10^{m+3n}} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{a_1}{10^{m+(k-1)n+1}} + \frac{a_2}{10^{m+(k-1)n+2}} + \dots + \frac{a_n}{10^{m+kn}} + \dots \\ &= \frac{\overbrace{b_1 \cdot 10^{m-1} + b_2 \cdot 10^{m-2} + \dots + b_m}^b}{10^m} + \frac{\overbrace{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n}^a}{10^{m+n}} \\ &\quad + \frac{\overbrace{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n}^a}{10^{m+2n}} \\ &\quad + \frac{\overbrace{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n}^a}{10^{m+3n}} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{\overbrace{a_1 \cdot 10^{n-1} + a_2 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_n}^a}{10^{m+kn}} + \dots \\ &= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} \left(1 + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{10^{2n}} + \dots + \frac{1}{10^{(k-1)n}} + \dots \right) = \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} \\ &= \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^{m+n}} \cdot \frac{10^n}{10^n - 1} = \frac{b}{10^m} + \frac{a}{10^n - 1} \cdot \frac{1}{10^m} = \frac{b(10^n - 1) + a}{10^m(10^n - 1)}. \end{aligned}$$

Observe que tanto o numerador quanto o denominador de F são inteiros. Logo, F é racional. ■

Observação: Com relação aos números reais negativos, definimos sua representação decimal como sendo a representação decimal de seu simétrico (que é positivo), acrescentando apenas o sinal “-” à sua esquerda. Assim, por exemplo, se a representação decimal do simétrico de x for 2,356, então a de x será -2,356. Com esta definição, o Teorema 4.2 pode ser generalizado: um número real é irracional se, e somente se, ele possui uma representação decimal que é infinita e não periódica.

4.3 Interpretação Geométrica

Uma leitura geométrica para o fato de um número real a no intervalo $[0, 1)$ ser irracional se, e somente se, a possuir uma representação decimal infinita não periódica pode ser feita com o uso da função $T : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ definida por:

$$T(x) = \begin{cases} 10x, & \text{se } 0 \leq x < 1/10, \\ 10x - 1, & \text{se } 1/10 \leq x < 2/10, \\ 10x - 2, & \text{se } 2/10 \leq x < 3/10, \\ 10x - 3, & \text{se } 3/10 \leq x < 4/10, \\ 10x - 4, & \text{se } 4/10 \leq x < 5/10, \\ 10x - 5, & \text{se } 5/10 \leq x < 6/10, \\ 10x - 6, & \text{se } 6/10 \leq x < 7/10, \\ 10x - 7, & \text{se } 7/10 \leq x < 8/10, \\ 10x - 8, & \text{se } 8/10 \leq x < 9/10, \\ 10x - 9, & \text{se } 9/10 \leq x < 1, \end{cases}$$

cujo gráfico é dado na Figura 4.1.

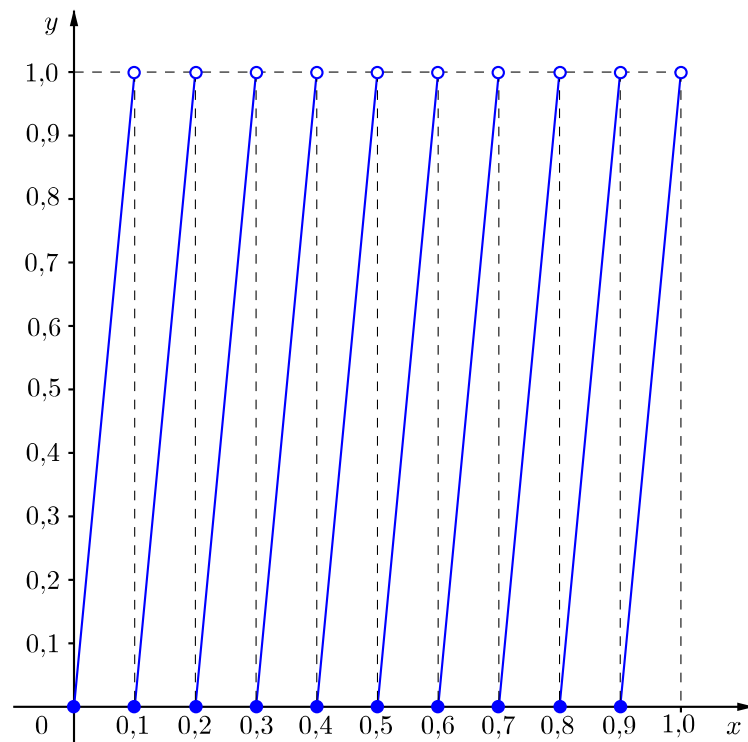


Figura 4.1: Gráfico de T .

Para construir esta interpretação geométrica, dado $a \in [0, 1)$, vamos estudar a sequência de números reais definida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a, \\
 a_1 &= T(a), \\
 a_2 &= T^2(a) = (T \circ T)(a) = T(T(a)), \\
 a_3 &= T^3(a) = (T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(a))), \\
 a_4 &= T^4(a) = (T \circ T \circ T \circ T)(a) = T(T(T(T(a)))), \\
 &\vdots \\
 a_k &= T^k(a) = \underbrace{(T \circ T \circ \dots \circ T)}_{k-1 \text{ composições}}(a) \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Por exemplo, se $a = 0,\overline{138}$, então teremos a sequência:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a &= 0,\overline{138}; \\
 a_1 &= T(a) &= 0,38\overline{138}; \\
 a_2 &= T^2(a) &= 0,8\overline{138}; \\
 a_3 &= T^3(a) &= 0,\overline{138}; \\
 a_4 &= T^4(a) &= 0,38\overline{138}; \\
 a_5 &= T^5(a) &= 0,8\overline{138}; \\
 a_6 &= T^6(a) &= 0,\overline{138}; \\
 a_7 &= T^7(a) &= 0,38\overline{138}; \\
 a_8 &= T^8(a) &= 0,8\overline{138}; \\
 &\vdots &\vdots \\
 a_{3k} &= T^{3k}(a) &= 0,\overline{138}; \\
 a_{3k+1} &= T^{3k+1}(a) &= 0,38\overline{138}; \\
 a_{3k+2} &= T^{3k+2}(a) &= 0,8\overline{138}. \\
 &\vdots &\vdots
 \end{aligned}$$

Observe que o conjunto $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é finito, uma vez que possui apenas três elementos: $0,\overline{138}$; $0,38\overline{138}$ e $0,8\overline{138}$.

Uma forma de representar graficamente a sequência (a_n) é marcar os pares ordenados do tipo $(a_k, a_{k+1}) = (T^k(a), T^{k+1}(a))$ no plano cartesiano. Assim, na Iteração 1, começamos pelo ponto $(a_0, a_1) = (a, T(a)) = (0,\overline{138}; 0,38\overline{138})$ (Figura 4.2).

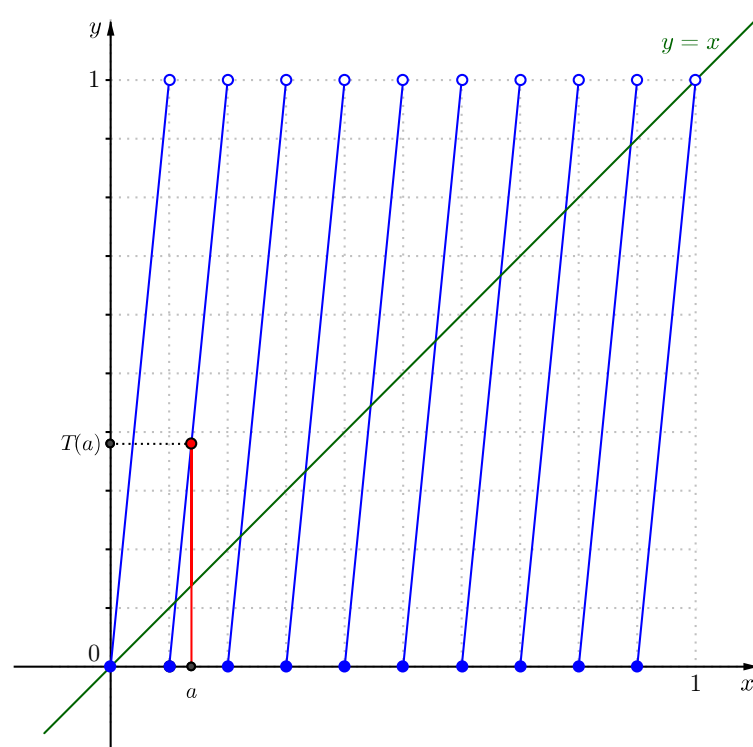


Figura 4.2: Iteração 1 para $a = 0,\overline{138}$.

A seguir, marcamos os pontos $(a_1, a_2) = (T(a), T^2(a)) = (0,38\overline{138}; 0,8\overline{138})$ e $(a_2, a_3) = (T^2(a), T^3(a)) = (0,8\overline{138}; 0,1\overline{38})$ (Figura 4.3 e 4.4).

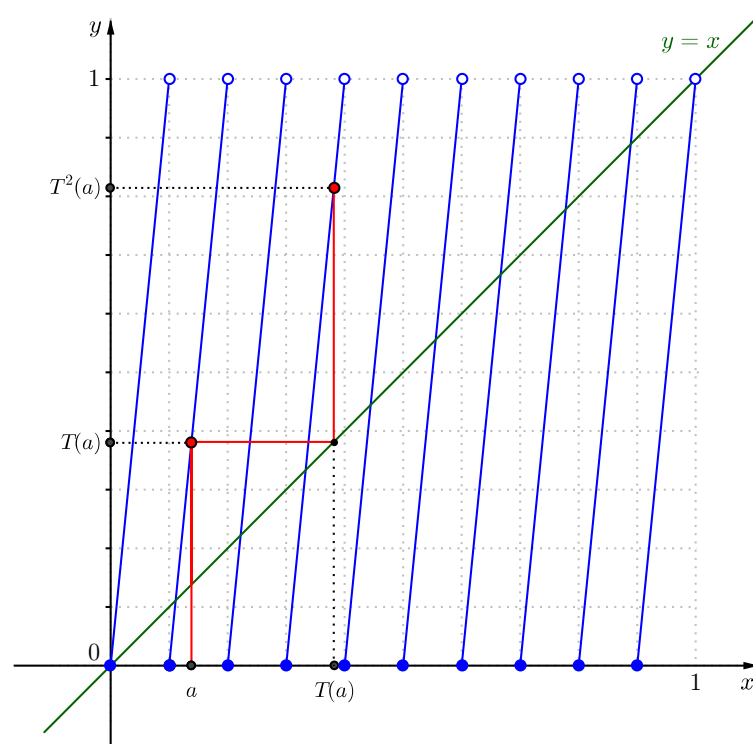


Figura 4.3: Iteração 2 para $a = 0,\overline{138}$.

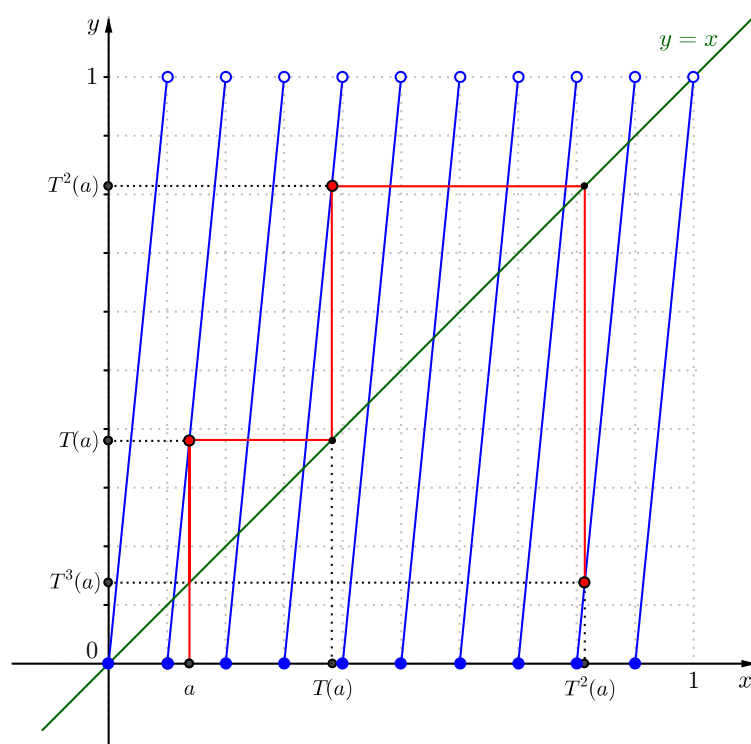


Figura 4.4: Iteração 3 para $a = 0,138$.

Veja que se continuarmos marcando, o próximo ponto, (a_3, a_4) , coincidirá com (a_0, a_1) (Figura 4.5). A partir daí, os novos pontos coincidirão com os 3 primeiros, na ordem descrita acima, formando um ciclo.

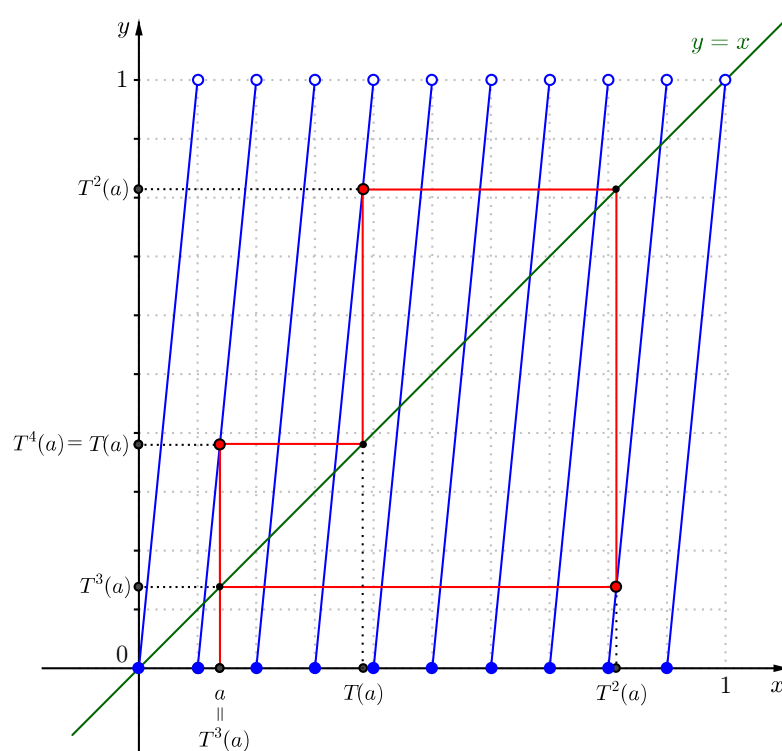


Figura 4.5: Iteração 4 para $a = 0,138$.

Vamos ver um outro exemplo, agora com um número que possua representação decimal finita. Se $a = 0,945$, então teremos a sequência:

$$\begin{aligned} a_0 &= a &= 0,945; \\ a_1 &= T(a) &= 0,45; \\ a_2 &= T^2(a) &= 0,5; \\ a_3 &= T^3(a) &= 0; \\ a_4 &= T^4(a) &= 0; \\ &\vdots &\vdots \\ a_k &= T^k(a) &= 0; \\ &\vdots &\vdots \end{aligned}$$

Observe que o conjunto $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$, neste caso, também é finito, uma vez que possui apenas quatro elementos: 0,945; 0,45; 0,5 e 0. Assim, marcando os três primeiros pontos no plano, teremos as Figuras 4.6, 4.7 e 4.8. A partir daí todos os pontos passarão a coincidir com a origem do sistema (Figura 4.9).

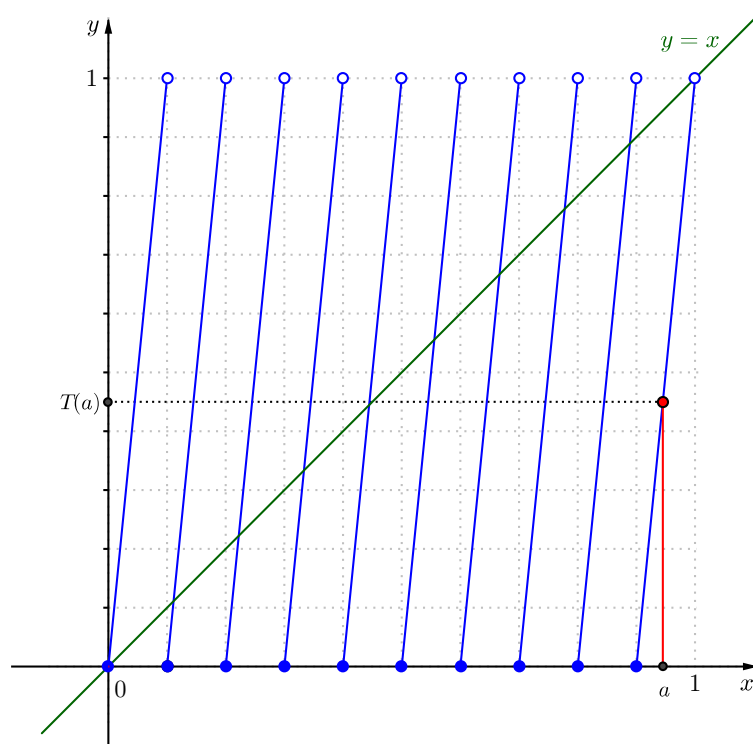


Figura 4.6: Iteração 1 para $a = 0,945$.

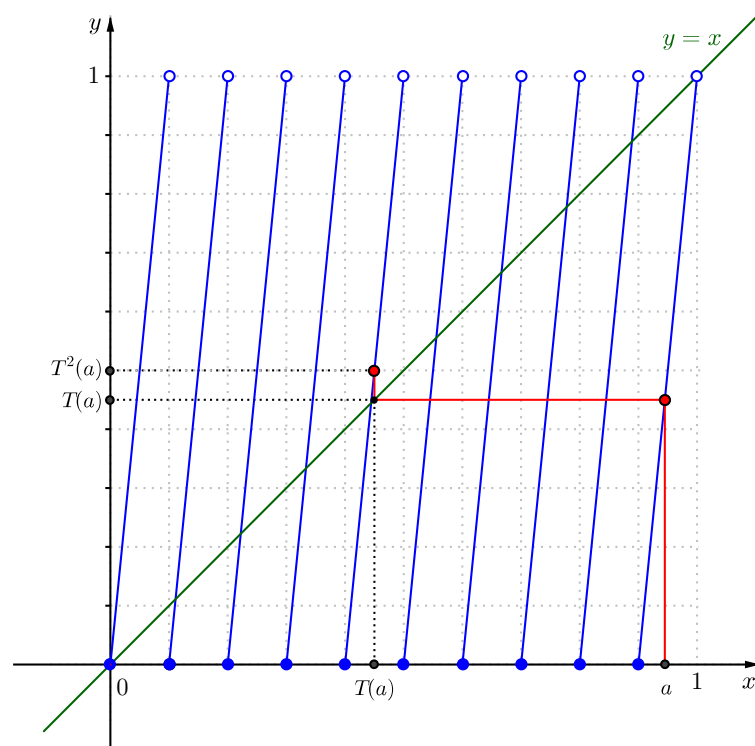


Figura 4.7: Iteração 2 para $a = 0,945$.

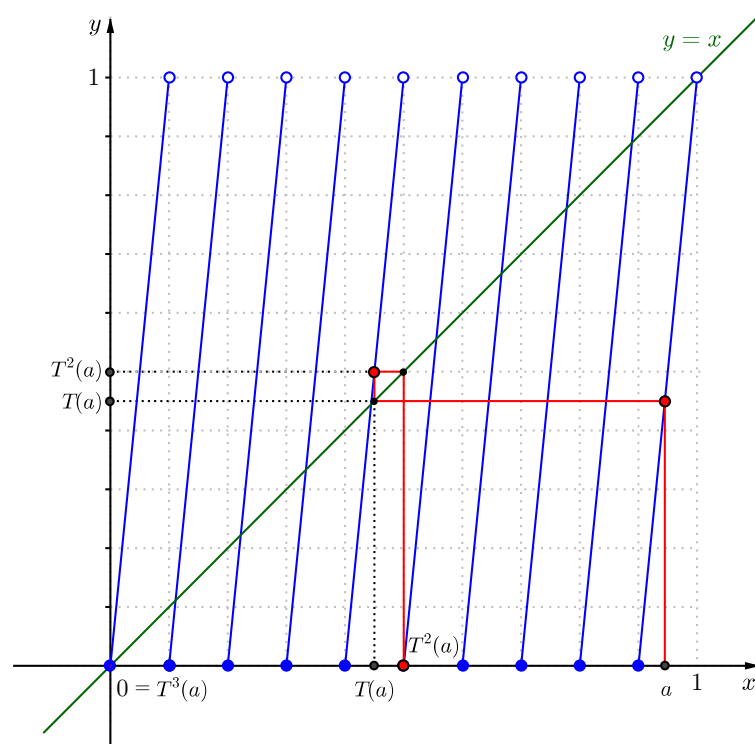


Figura 4.8: Iteração 3 para $a = 0,945$.

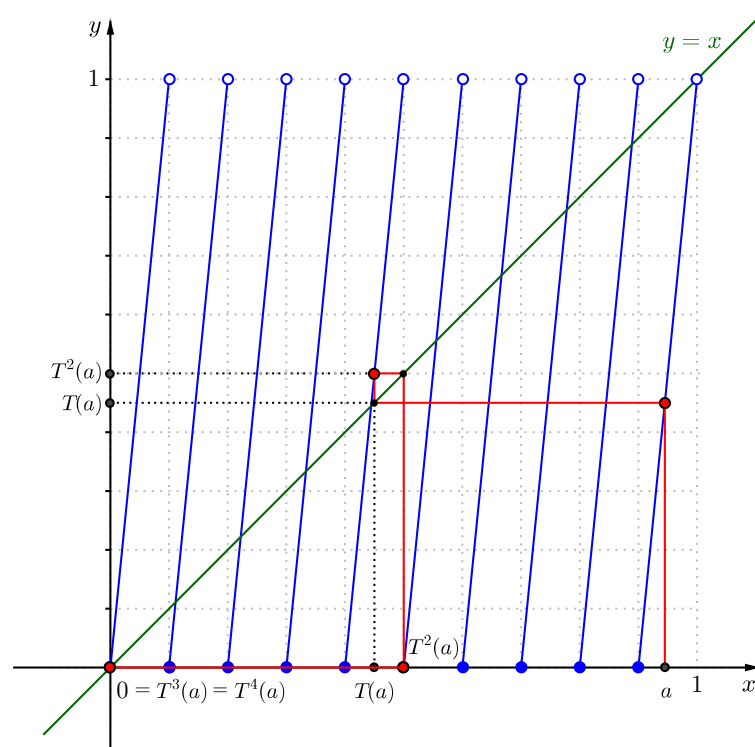


Figura 4.9: Iteração 4 para $a = 0,945$.

Vejam agora, o que acontece com o processo descrito acima ao escolhermos um número irracional a . Considere, portanto, $a = \frac{\sqrt{2}}{10} = 0,1414213562\dots \in [0, 1)$. A sequência (a_n) de iteradas obtidas a partir deste número é dada por:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= a &= 0,1414213562\dots; \\
 a_1 &= T(a) &= 0,414213562\dots; \\
 a_2 &= T^2(a) &= 0,14213562\dots; \\
 a_3 &= T^3(a) &= 0,4213562\dots; \\
 a_4 &= T^4(a) &= 0,213562\dots; \\
 a_5 &= T^5(a) &= 0,13562\dots; \\
 a_6 &= T^6(a) &= 0,3562\dots; \\
 a_7 &= T^7(a) &= 0,562\dots; \\
 a_8 &= T^8(a) &= 0,62\dots; \\
 &\vdots \\
 a_k &= T^k(a); \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Observe que neste caso, como a representação decimal de $\sqrt{2}/10$ é infinita e não-periódica, o conjunto $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é infinito.

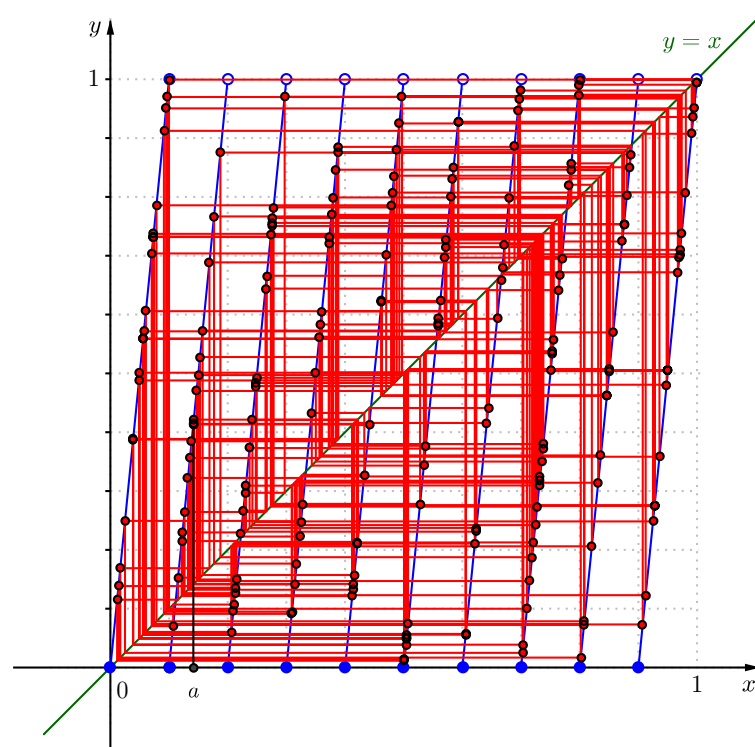


Figura 4.10: Iteração 200 para $a = \sqrt{2}/10$.

Mais geralmente, não é difícil de se perceber que se $a \in [0, 1)$ é um número racional, então $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto finito e, reciprocamente, se $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto finito, então a é racional. Do mesmo modo, $a \in [0, 1)$ é um número irracional se, e somente se, $\{T^k(a) \mid k \in \mathbb{N}\}$ é um conjunto infinito.

5 *Números Irracionais e Outras Manifestações*

5.1 *Bilhar em uma mesa quadrada*

Suponha uma mesa de bilhar hipotética, quadrada, com 1 m de lado e com apenas 4 caçapas, uma em cada um dos quatro vértices A , B , C e D do quadrado. Nessa mesa, a tacada inicial é sempre feita a partir do vértice A , a bola se move sem atrito e, ao tocar um dos lados da mesa, a bola é refletida com ângulo igual ao de incidência (a menos que ela saia por uma das caçapas).

A pergunta que fazemos é: na tacada inicial, qual deve ser o ângulo θ que a trajetória da bola deve fazer com a lateral AB da mesa para que a bola seja encaçapada? As Figuras 5.1 e 5.2 exibem várias trajetórias da bola para diferentes valores de θ .

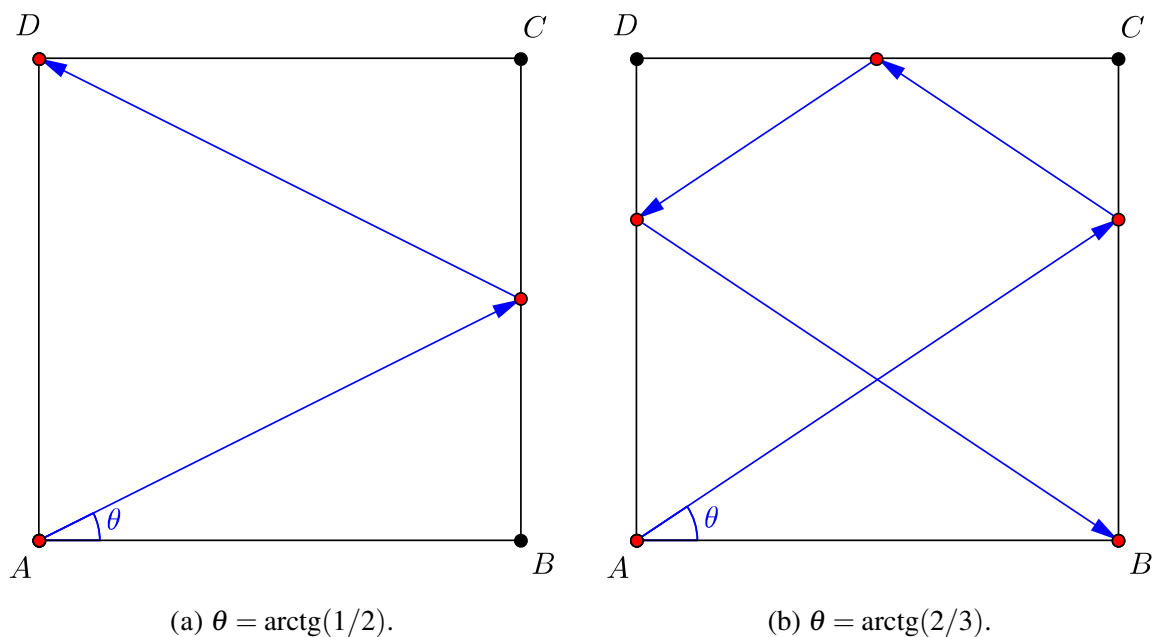


Figura 5.1: Exemplos de tacadas na mesa de bilhar quadrada.

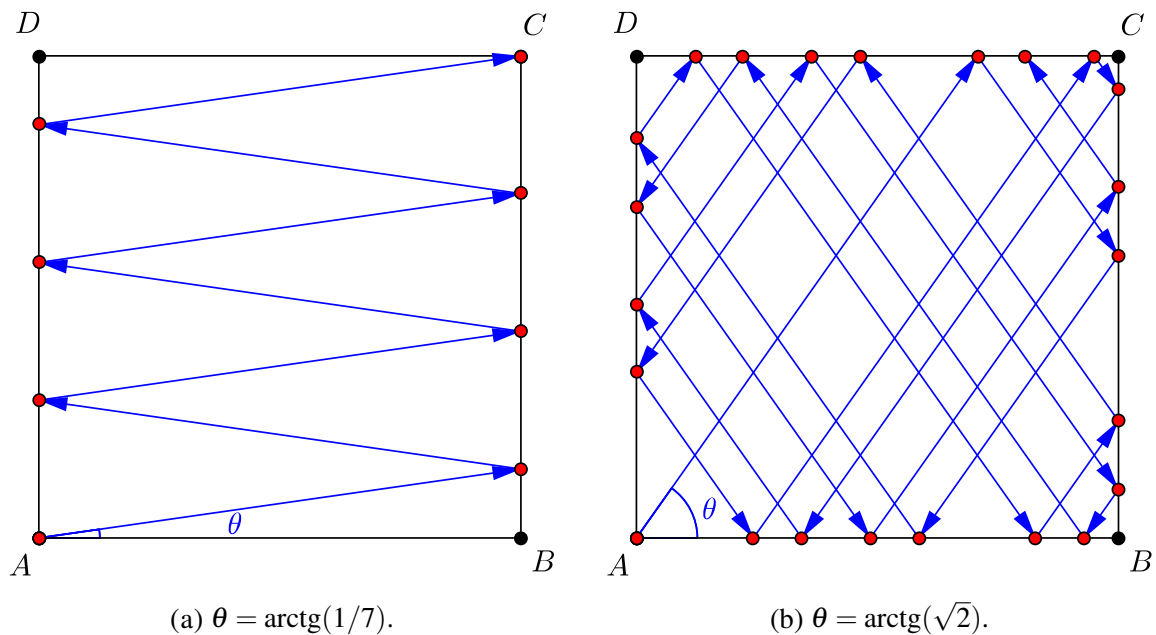


Figura 5.2: Mais exemplos de tacadas na mesa de bilhar quadrada.

É possível demonstrar que, seguindo as regras descritas anteriormente, **a bola vai encaixar-se, e somente se, $\text{tg}(\theta)$ é um número racional**. Assim, por exemplo, a trajetória da bola do Item (b) da Figura 5.2 nunca vai atingir uma das caçapas, pois $\text{tg}(\theta) = \sqrt{2}$ é um número irracional. A demonstração desse resultado pode ser encontrada no artigo [27].

5.2 Ladrilhamentos aperiódicos de Penrose

Definição 5.1 (Conforme [4])

- Um conjunto de polígonos é um *ladrilhamento* (ou *pavimentação*) do plano se, e somente se, o conjunto de polígonos cobre sem cruzamentos o plano. Cobrir significa que todo ponto do plano pertence a pelo menos um polígono do conjunto. Sem cruzamentos significa que toda interseção de dois polígonos tem área nula.
- Aos vértices dos polígonos chamamos de *nós* do ladrilhamento. Os segmentos de retas que têm por extremos dois nós consecutivos de um mesmo lado de polígono chamamos de *arestas*.

- Um ladrilhamento é *lado-lado* se, e somente se, toda aresta é lado comum a dois polígonos. Resulta, portanto, que todo nó na fronteira de um polígono da pavimentação é vértice do polígono. Nas pavimentações parciais por quadrados apresentadas na Figura 5.3, apenas (a) é lado-lado.

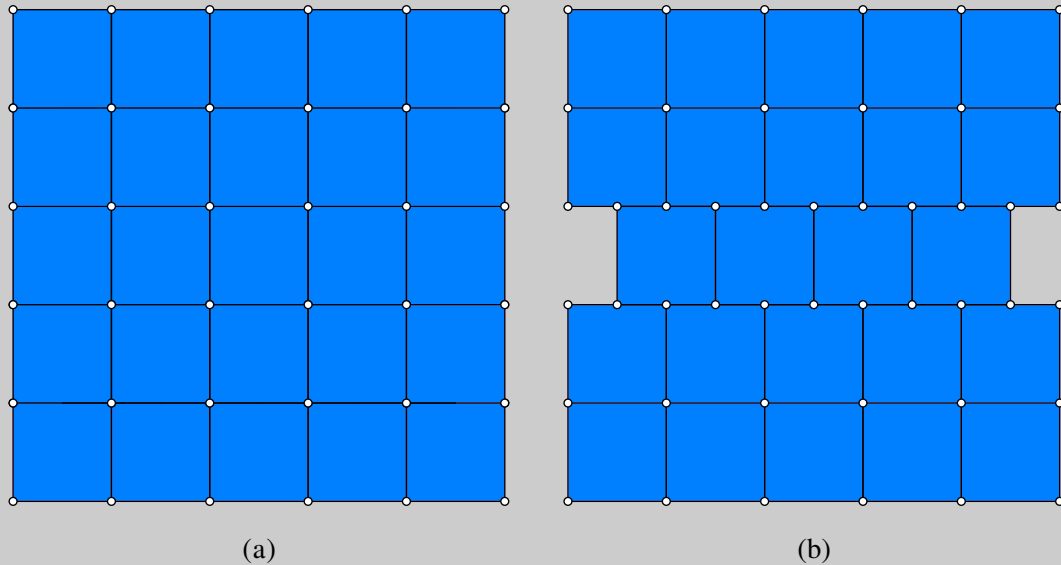


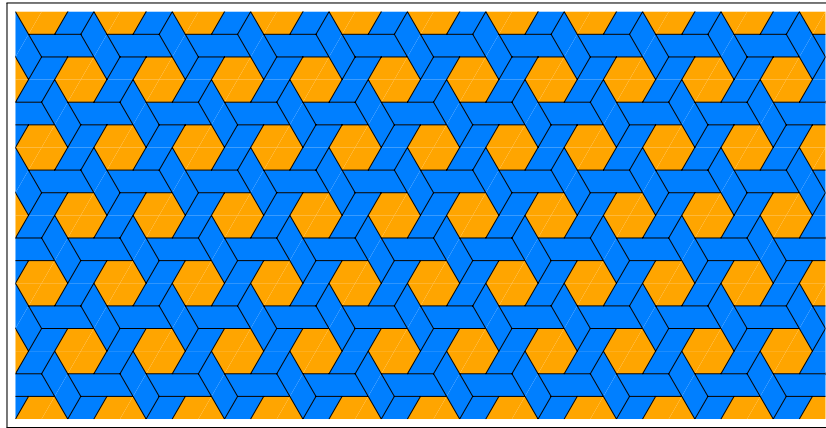
Figura 5.3: Dois ladrilhamentos por quadrados.

Existem apenas três tipos ladrilhamentos lado-lado do plano que usam apenas um tipo de polígono regular: aqueles que usam apenas triângulos equiláteros, aqueles que usam apenas quadrados e aqueles que usam apenas hexágonos regulares. Se permitirmos o uso de mais de um tipo de polígono regular, mas exigindo que a distribuição de polígonos ao redor de cada vértice seja a mesma, obteremos 11 ladrilhamentos lado-lado que satisfazem estas condições (os assim denominados *ladrilhamentos arquimedianos*). Para mais detalhes e provas, sugerimos as referências [2], [4], [8], [12] e [25].

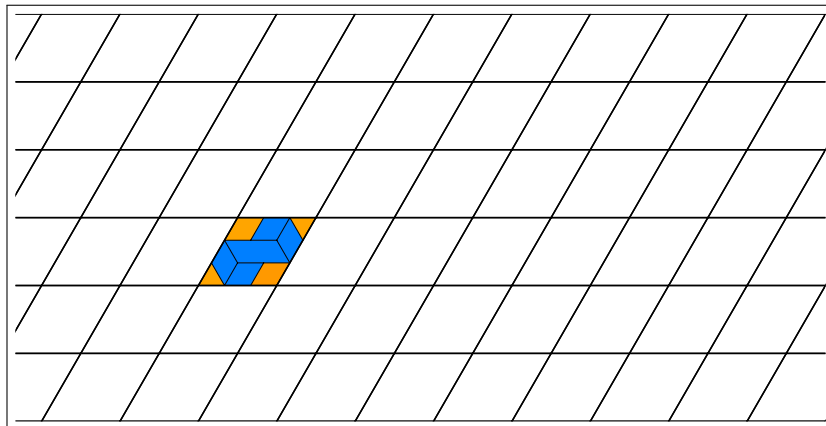
Definição 5.2 (Conforme [18]) Dizemos que um ladrilhamento por polígonos é *periódico* se existe uma região no plano em formato de um paralelogramo de tal modo que ao se justapor cópias da parte do ladrilhamento nesta região, obtém-se o ladrilhamento inicial.

O ladrilhamento da Figura 5.4 (a) (composto por hexágonos regulares e paralelogramos) é periódico, pois a parte do ladrilhamento na região em formato de paralelogramo indicada na

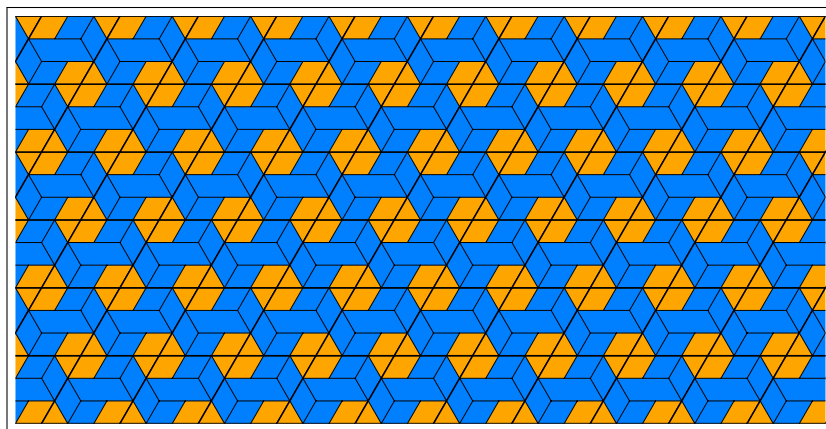
Figura 5.4 (b) é tal que se justapormos cópias desta região, como indicado na Figura 5.4 (c), obteremos o ladrilhamento inicial. A Figura 5.3 (b) é um exemplo de ladrilhamento não periódico.



(a)



(b)



(c)

Figura 5.4: Exemplo de ladrilhamento periódico.

Apesar do ladrilhamento por quadrados da Figura 5.3 (b) não ser periódico, é possível rearranjar as peças do ladrilhamento (no caso, os quadrados), de forma a obter um novo ladrilhamento que é periódico: o da Figura 5.3 (a)! Será que existem ladrilhamentos para os quais qualquer rearranjo de suas peças nunca produzirá um ladrilhamento periódico? Ladrilhamentos com esta propriedade são denominados *aperiódicos*.

Definição 5.3 Um ladrilhamento por polígonos é *aperiódico* se qualquer rearranjo de suas peças nunca produzirá um ladrilhamento periódico.

Como nos relata [11], em 1961, Hao Wang conjecturou que não existiriam ladrilhamentos aperiódicos. Esta conjectura foi refutada em 1966 por Robert Berger em sua tese de doutorado pela Universidade de Harvard: Berger exibiu um ladrilhamento aperiódico do plano com 20.426 peças diferentes. Posteriormente, ele reduziu o número de peças diferentes para 104 e, depois, Donald Knuth conseguiu reduzir este número para 94. Em 1971, Raphael M. Robinson exibiu um ladrilhamento aperiódico com apenas 6 peças diferentes.

Surpreendentemente, Roger Penrose, em 1974, descobriu dois quadriláteros simples, denominados “pipa” e “dardo” (Figura 5.5), com os quais é possível construir um ladrilhamento aperiódico.

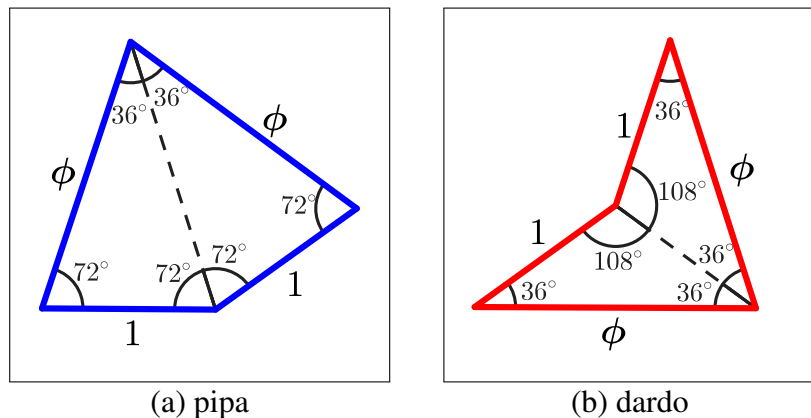


Figura 5.5: Peças do ladrilhamento aperiódico de Penrose.

A pipa é formada por dois triângulos isósceles acutângulos áureos congruentes (triângulos cujos ângulos internos medem 36°, 72° e 72°) e, o dardo, por dois triângulos isósceles obtusângulos áureos congruentes (triângulos cujos ângulos medem 108°, 36° e 36°). Os lados de um triângulo isósceles acutângulo áureo são proporcionais a 1, φ e φ, onde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ é o número de ouro. Os lados de um triângulo isósceles obtusângulo áureo, por sua vez, são pro-

porcionais a ϕ , 1 e 1. Para obter ladrilhamentos aperiódicos, certas justaposições são proibidas, como as indicadas na Figura 5.6.

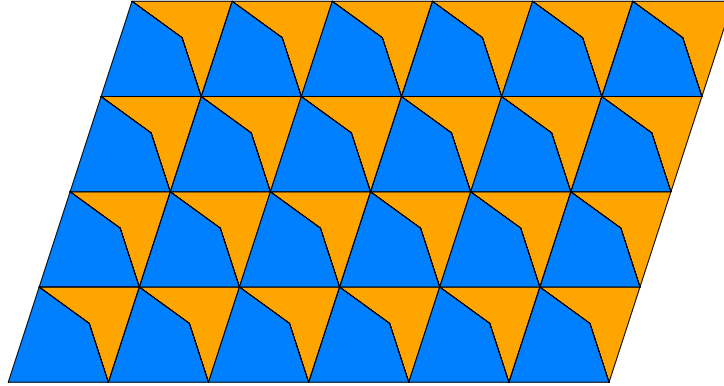


Figura 5.6: Justaposições proibidas nos ladrilhamentos de Penrose.

Existem várias maneiras de se modificar as peças para forçar as justaposições válidas. Uma delas, proposta pelo matemático John Conway, consiste em pintar arcos de círculos com cores diferentes e permitir apenas justaposições que só justaponham arcos de uma mesma cor, como as indicadas na Figura 5.7. Outra estratégia é criar extensões e cortes, conforme a Figura 5.8, de modo que as peças modificadas só se encaixam nas justaposições permitidas.

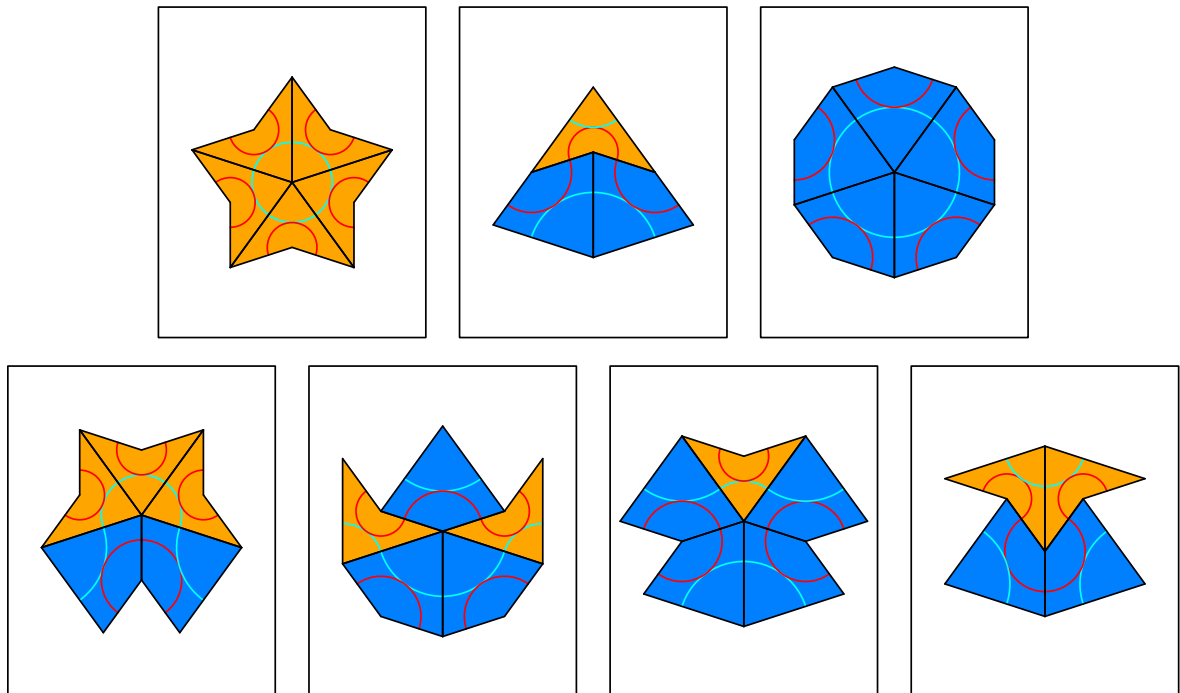


Figura 5.7: Exemplos de justaposições permitidas nos ladrilhamentos de Penrose.

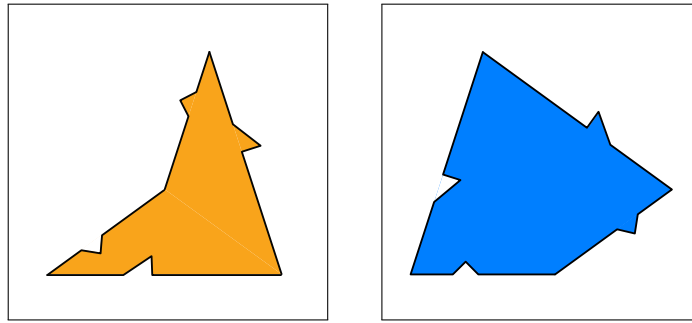


Figura 5.8: Peças do ladrilhamento aperiódico de Penrose com extensões e cortes.

É possível demonstrar que: (1) existem infinitos ladrilhamentos não periódicos construídos com as peças de Penrose modificadas e (2) que qualquer outro ladrilhamento também não será periódico (isto é, que o ladrilhamento de Penrose é aperiódico). O leitor interessado poderá encontrar os detalhes no livro [12]. **O fato do ladrilhamento de Penrose ser aperiódico é uma consequência do fato do número de ouro $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ser irracional.** A ideia básica da demonstração é a seguinte: ao se construir um ladrilhamento, a razão entre o número de pipas e o número de dardos é aproximadamente igual a ϕ . Por exemplo, no ladrilhamento parcial da Figura 5.9, existem 115 pipas e 75 dardos, de modo que a razão neste ladrilhamento parcial é igual a $115/75 \approx 1,5$. No limite, isto é, no ladrilhamento completo, a razão é exatamente igual a ϕ . Se o ladrilhamento fosse, por absurdo, periódico, a razão seria um número racional, pois a razão entre as quantidades de cada tipo de peça no ladrilhamento completo é igual a razão entre as quantidades de cada tipo de peça em um padrão limitado representativo do ladrilhamento e este número, por sua vez, é um número racional, dado que no padrão representativo as quantidades de cada tipo de peça são finitas. Mas, aí, teríamos uma contradição, pois $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ é um número irracional.

Segundo [3], embora os ladrilhamentos de Penrose tenham se desenvolvido no contexto da Matemática Recreativa, rapidamente eles foram colocados a serviço para explicar um novo fenômeno em Cristalografia, o estudo dos sólidos que são “ordenados” em nível macroscópico. Historicamente, era assumido que esta ordem era criada por uma repetição de uma unidade fundamental, isto é, que a “ordenação” se dava de forma periódica. Em 1982, Dan Schechtman e seus associados esfriaram rapidamente uma amostra de alumínio e magnésio e observaram que a liga produzia um padrão de difração que não era periódico. Após a descoberta de Schechtman, outros exemplos deste fenômeno foram observados. É agora aceito que estes materiais, os *quasicristais*, surgem como os análogos tridimensionais dos ladrilhamentos de Penrose. Para saber um pouco mais sobre os quasicristais e como sua descoberta valeram um prêmio Nobel, indicamos as referências [3] e [29].

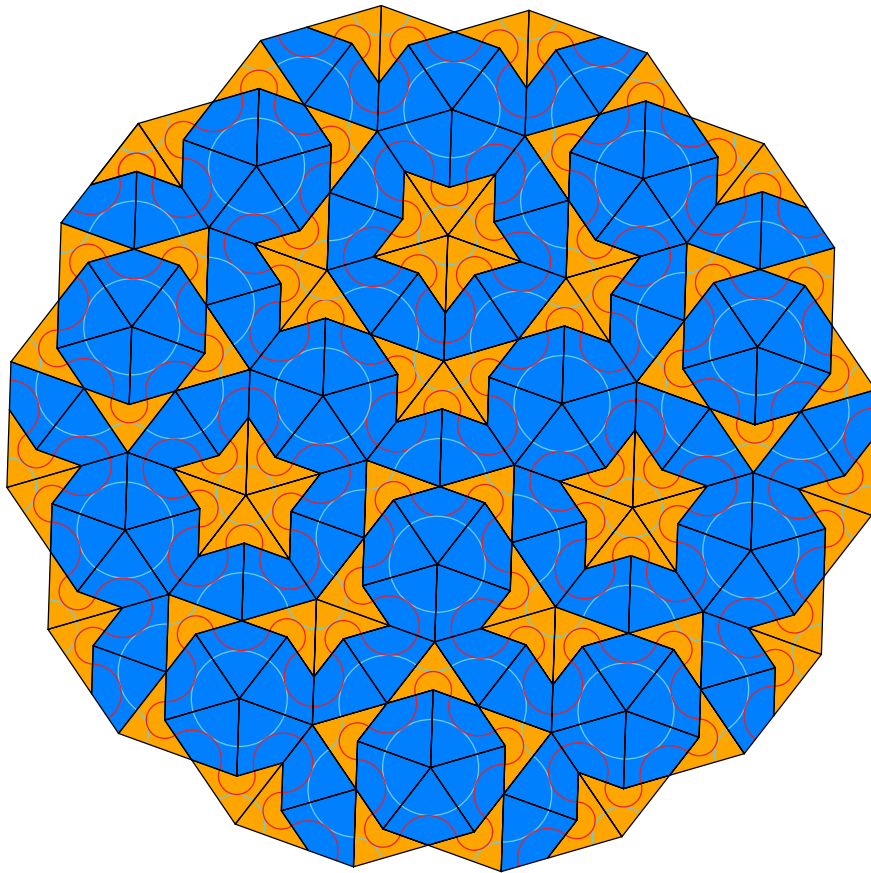


Figura 5.9: Ladrilhamento parcial de Penrose com 115 pipas e 75 dardos.

5.3 Dissecção do retângulo em quadrados

Nesta seção apresentaremos como números irracionais se relacionam com o problema da dissecção de retângulos em quadrados. O problema é o seguinte: dado um retângulo, é sempre possível decompô-lo em quadrados, ou seja, é sempre possível encontrar quadrados que cubram esse retângulo sem cruzamentos¹? A resposta foi dada pelo matemático alemão Max Dehn em 1903: **um retângulo pode ser decomposto em quadrados, se, e somente se, a razão das medidas dos seus lados é um número racional.** É fácil demonstrar que se a razão das medidas dos lados de um retângulo é um número racional, então ele pode ser decomposto em quadrados. De fato: suponha um retângulo de dimensões $a \times b$ tal que a/b seja racional. Então, existem inteiros positivos p e q tais que $a/b = p/q$. Em particular, note que $a/p = b/q$. Divida agora o lado de medida a em p segmentos de mesmo tamanho e o lado de medida b em q segmentos de mesmo tamanho. Estas subdivisões dos lados do retângulo $a \times b$ induz uma subdivisão do próprio retângulo em retângulos menores todos de tamanho $(a/p) \times (b/q)$.

¹Como no caso da Definição 5.1, *cobrir* significa que todo ponto do retângulo pertence a pelo menos um quadrado e *sem cruzamentos* significa que toda interseção de dois quadrados tem área nula.

Como $a/p = b/q$, esses retângulos são, na verdade, quadrados. Assim, conseguimos provar que qualquer retângulo cujo a razão entre seus lados é racional, pode ser decompostos em quadrados. A demonstração da recíproca é mais sofisticada. Ao leitor interessado indicamos as referências [1] e [15].

Uma variante do problema de dissecção dos retângulos é considerar decomposições por quadrados de tamanhos diferentes: um retângulo é dito *perfeito* se este pode ser descomposto com um número finito de quadrados não sobrepostos de tamanhos diferentes. Em 1925, o matemático polonês Zbigniew Moron publicou o primeiro retângulo perfeito (Figura 5.10)². Ele possui dimensões 33×32 e pode ser ladrilhado com 9 quadrados diferentes. Os números no interior do quadrado indicam a medida do lado do quadrado.

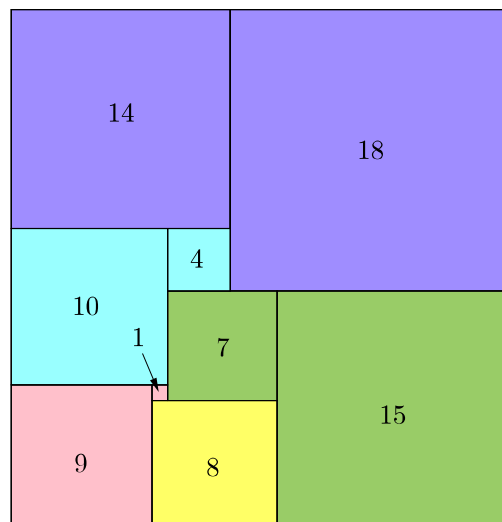


Figura 5.10: Retângulo perfeito de Zbigniew Moron.

Surpreendentemente, a condição da razão das medidas dos lados de um retângulo ser racional é suficiente para que ele seja perfeito. A demonstração desse fato pode ser encontrada no artigo [9]. Para mais informações sobre dissecções de retângulos em quadrados, recomendamos o site <<http://www.squaring.net/>>.

5.4 A Função de Dirichlet

Para $m, n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, considere a função:

$$g(x) = \cos^n(m!\pi x).$$

²Este retângulo perfeito apareceu na Questão 6 da Segunda Fase da Prova da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas em 2005.

O que acontece com o valor de $g(x)$ se m e n forem suficientemente grandes? Vamos supor um valor racional para x , digamos $x = p/q$, onde p e q são inteiros e $q \neq 0$. Assim,

$$g(x) = g\left(\frac{p}{q}\right) = \cos^n\left(m!\pi\frac{p}{q}\right).$$

Agora, se aumentarmos o valor de m , em algum momento q dividirá $m!$, isto é, $m!/q$ será um número inteiro, digamos, k e, mais ainda, teremos que kp é um número par. Portanto, para m suficientemente grande,

$$g(x) = g\left(\frac{p}{q}\right) = \cos^n\left(m!\pi\frac{p}{q}\right) = \cos^n(k\pi p) = 1.$$

Desta maneira, para m e n suficientemente grandes, $g(x) = 1$.

Vamos reservar este resultado e façamos outro exercício. Suponha, agora, que x seja irracional. Observe que neste caso, seja qual for o valor de m , ao multiplicar $m!$ por x , o produto $m!x$ será sempre irracional. Então, é impossível que $\cos(m!\pi x)$ seja igual a 1 ou a -1 . Logo, $-1 < \cos(m!\pi x) < 1$. Agora, quanto mais aumentarmos o valor de n , mais o valor da potência irá se aproximar de zero.

Resumindo, **se x é um número racional, $g(x)$ é igual 1 para m suficientemente grande. Se x é irracional, é possível fazer $g(x)$ ficar tão próximo de 0 quanto se queira, desde que tomemos n suficientemente grande.** Usando a notação de limites, este resultado pode ser escrito assim:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(m!\pi x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Segundo [17], a *Função de Dirichlet*

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ é racional,} \\ 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

foi introduzida pelo matemático alemão Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet em 1829 em um artigo sobre séries de Fourier. Foi o matemático francês René-Louis Baire que no final do século XIX estabeleceu a igualdade

$$D(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n(m!\pi x).$$

A Função de Dirichlet e esta igualdade estabelecida por Baire fazem parte da história da evolução do conceito de função. Mais detalhes podem ser encontrados em [17].

5.5 Curvas do Espirógrafo

Uma *hipotrocoide* é uma curva plana descrita pela trajetória de um ponto P fixado em um círculo C_2 de raio $r > 0$ e centro S que desliza tangencialmente *por dentro* de um outro círculo C_1 de raio $R > 0$ e centro O . Se d é a distância P até S e se supormos que $O = (0,0)$, então é possível mostrar que a posição $(x(\theta), y(\theta))$ do ponto P em função do ângulo θ (em radianos) formado pelo eixo das abscissas e a reta OS é dada por:

$$\begin{cases} x(\theta) = (R-r)\cos(\theta) + d\cos\left(\frac{R-r}{r}\theta\right), \\ y(\theta) = (R-r)\sin(\theta) - d\sin\left(\frac{R-r}{r}\theta\right). \end{cases}$$

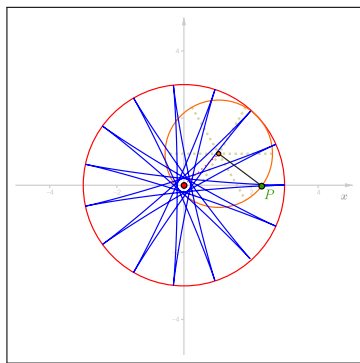
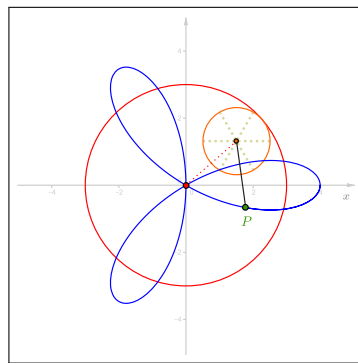
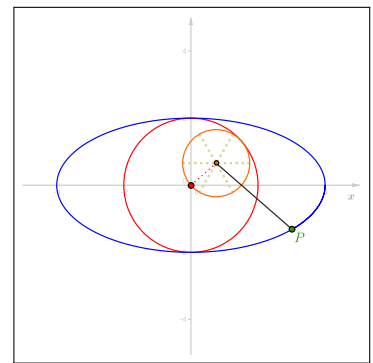
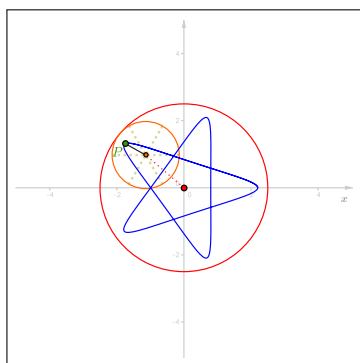
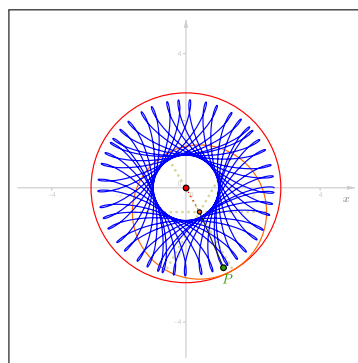
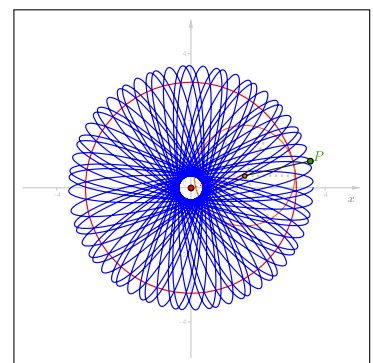
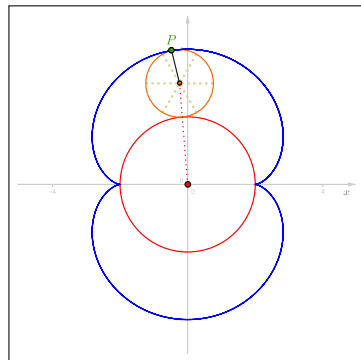
(a) $R = 3; r = 1,6; d = 1,6$.(b) $R = 3; r = 1; d = 2$.(c) $R = 2; r = 1; d = 3$.(d) $R = 2,5; r = 1; d = 0,7$.(e) $R = 2\sqrt{2}; r = 2; d = 1,8$.(f) $R = \pi; r = 1,5; d = 2$.

Figura 5.11: Exemplos de *hipotrocoides*.

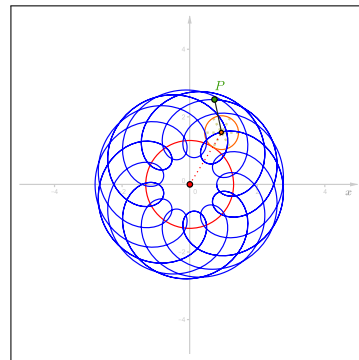
Se o círculo C_2 deslizar tangencialmente *por fora* do círculo C_1 , a trajetória do ponto P

descreverá uma curva que é denominada *epitrocoide*:

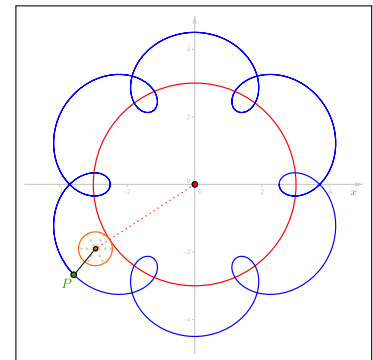
$$\begin{cases} x(\theta) = (R+r)\cos(\theta) - d\cos\left(\frac{R+r}{r}\theta\right), \\ y(\theta) = (R+r)\sin(\theta) - d\sin\left(\frac{R+r}{r}\theta\right). \end{cases}$$



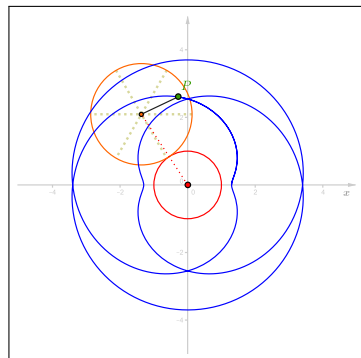
(a) $R = 2; r = 1; d = 1.$



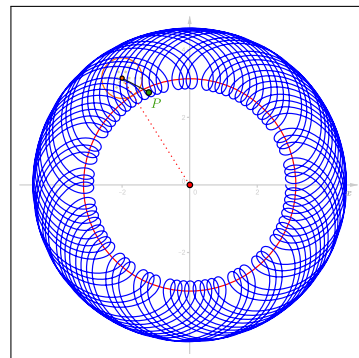
(b) $R = 1,3; r = 0,5; d = 1.$



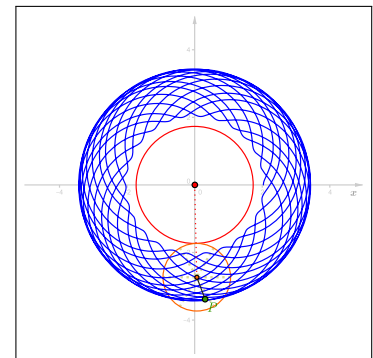
(c) $R = 3; r = 0,5; d = 1.$



(d) $R = 1; r = 1,5; d = 1,2.$



(e) $R = \pi; r = 0,6; d = 0,9.$



(f) $R = \sqrt{3}; r = 1; d = 0,7.$

Figura 5.12: Exemplos de *epitrocoides*.

Quando, numa hipotrocoide, tivermos $d = r$, ou seja, quando o ponto P pertencer à fronteira do círculo C_2 , a curva recebe o nome especial de *hipocicloide* (a Figura 5.11 (a) é um exemplo de hipocicloide). Se o mesmo ocorrer em uma epitrocoide, a curva correspondente será chamada de *epicicloide* (a Figura 5.12 (a) é um exemplo de epicicloide).

Um resultado muito interessante neste contexto, semelhante ao obtido para os epiciclos no Capítulo 3 neste contexto, é o seguinte: **hipotrocoides e epitrocoides são curvas periódicas se, e somente se, a razão R/r entre os raios dos círculos é um número racional.** A prova deste resultado pode ser obtida seguindo basicamente o mesmo procedimento adotado para provar

o Teorema 3.1 do Capítulo 3.

Hipotrocoides e epitrocoides com $d < r$ podem ser desenhadas com um *espirógrafo*, um brinquedo de desenho geométrico, composto de engrenagens e anéis dentados de plástico, que foi desenvolvido pelo britânico Denys Fisher e vendido pela primeira vez em 1965.

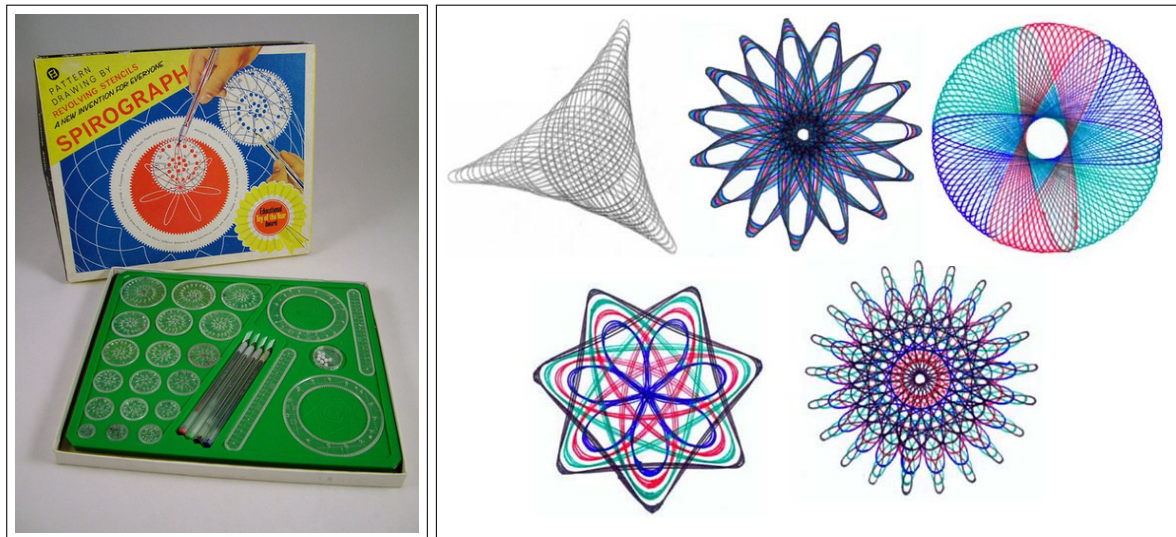


Figura 5.13: Espirógrafo e suas curvas.

Fonte: Steve Berry (imagem da esquerda) e Wikimedia Commons (imagem da direita).

Referências Bibliográficas

- [1] AIGNER, M.; ZIEGLER, G. M. *Proofs from the Book*. Berlim Heidelberg: Springer-Verlag, 2010.
- [2] ALVES, S.; DALCIN, M. *Mosaicos no Plano*. Revista do Professor de Matemática, p. 3-12, 1999.
- [3] AUSTIN, D. *Penrose Tiles Talk Across Miles*. Feature Column of The American Mathematical Society. Disponível em: < <http://www.ams.org/featurecolumn/archive/penrose.html> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [4] BARBOSA, R. M. *Descobrimo Padrões em Mosaicos*. Atual Editora, 2005.
- [5] BOCCALETTI, D. *From The Epicycles of The Greeks to Kepler's Ellipse – The Breakdown of The Circle Paradigm*. Cosmology Through Time – Ancient and Modern Cosmology in The Mediterranean Area, Monte Porzio Catone (Rome), Italy, 2001. Disponível em: < <http://arxiv.org/pdf/physics/0107009/> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [6] BORTOLOSSI, H. J. *Epíclis e Interpolação Trigonométrica*, 2013. Disponível em: < <http://www.uff.br/cdme/epiciclos/> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [7] BORTOLOSSI, H. J. *Jogo da Classificação dos Triângulos*, 2013. Disponível em: < <http://www.uff.br/cdme/jct/> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [8] BORTOLOSSI, H. J. *Pavimentação com Polígonos Regulares*, 2013. Disponível em: < <http://www.uff.br/cdme/ppr/> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [9] BROOKS, R. L.; SMITH, C. A. B.; STONE, A. H.; TUTTE, W. T. *The Dissection of Rectangles into Squares*. Duke Mathematical Journal, v. 7, n. 1, p. 312-340, 1940.
- [10] FERREIRA, M. L.; BARROS, R. A. *Análise Real nos Cursos de Licenciatura: A Necessidade de Uma Nova Abordagem para O Ensino de Números Irracionais*. Terceiro Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Universidade Federal do Ceará, 2012.
- [11] GARDNER, M. *Penrose Tiles To Trapdoor Ciphers ... and The Return of Dr. Matrix*. Washington D.C.:The Mathematical Association of America, 1997.
- [12] GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C. *Tilings and Patterns*. New York: W. H. Freeman and Company, 1987.
- [13] HARDY, G. H.; WRIGHT, E. M.; HEATH-BROWN, D. R.; SILVERMAN, J.H. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, 2009.

- [14] HADDOW, M. *A Nova Definição de Critais – Ou Como Ganhar Um Prêmio Nobel*. Science in School. Disponível em: <<http://www.scienceinschool.org/2012/issue24/crystals/portuguese>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [15] HAVIL, J. *The Irrationals: A Story of the Numbers You Can't Count On*. New Jersey: Princeton University Press, 2012.
- [16] KAMMLER, D. W. *A First Course in Fourier Analysis*. New York: Cambridge University Press, 2007.
- [17] KLEINER, I. *Excursions in The History of Mathematics*. New York: Birkhäuser, 2012.
- [18] PARKS, H.; MUSSER, G.; TRIMPE, L.; MAURER, V.; MAURER, R. *A Mathematical View of Our World*. Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2007.
- [19] PASQUINI, R. C. G. *Um Tratamento para Os Números Reais via Medição de Segmentos: Uma Proposta, Uma Investigação*. Tese de Doutorado, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, v, Rio Claro, 2007.
- [20] PAWLEY, M. G. *Closed Plane Curves Described by Finite and Infinite Sums of Rotating Vectors*. Journal of The Franklin Institute, v. 307, n. 3, p. 155-173, 1979.
- [21] POMMER, W. M. *A Construção de Significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Uma Proposta de Abordagem Envolvendo Os Eixos Constituintes dos Números Reais*. Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2012.
- [22] RIPOLL, C. C. *O Ensino de Números Reais na Escola Básica – I*. Palestra proferida no Estágio dos Professores Premiados da OBMEP, IMPA, 2006. Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=DckcXDMDBUs>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [23] RIPOLL, C. C. *O Ensino de Números Reais na Escola Básica – II*. Palestra proferida no Estágio dos Professores Premiados da OBMEP, IMPA, 2006. Disponível em: <<http://www.youtube.com/watch?v=L4PRxXPYRzU>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [24] RIPOLL, C. C. *Mal Ditas Frases Encontradas em Livros Didáticos de Matemática para A Escola Básica*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. <http://www.mat.ufrgs.br/~fundamentos1/Mal_ditas.pdf>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [25] SALLUM, E. M. *Ladrilhamentos*. Textos da Matemateca do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Disponível em: <<http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/ladrilhamentos.pdf>>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [26] SANTOS, J. C. *Números Reais: Um Desafio na Educação Básica*. Curso de Especialização para Professores do Ensino Fundamental e Médio, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2007. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia_Real.pdf>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.

- [27] SARAIVA, António, *Bilhares de Inteiros*. Boletim da SPM 57, p. 1-31, 2007. Disponível em: < <http://www.atractor.pt/mat/bilhar/bilhar.pdf> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [28] SOUTO, A. M. *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: < <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/22AlexandreMachado.pdf> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.
- [29] YANO, C. *Quasicristais Reconhecidos*. Instituto Ciência Hoje, Sociedade Brasileira para O Progresso da Ciência, 2011. Disponível em: < <http://cienciahoje.uol.com.br/especiais/premio-nobel-2011/quasicristais-reconhecidos> >. Acesso em: 12 de fevereiro de 2013.