UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

ESTUDO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

AGENOR FERREIRA DE BRITO FILHO

CRUZ DAS ALMAS
2016

ESTUDO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

AGENOR FERREIRA DE BRITO FILHO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Profž Dr. Juarez dos Santos Azevedo

CRUZ DAS ALMAS

2016

FICHA CATALOGRÁFICA

B77794e

Brito Filho, Agenor Ferreira de.

Estudo para resolução de problemas de otimização envolvendo funções trigonométricas / Agenor Ferreira de Brito Filho._ Cruz das Almas, BA, 2016.

52f.; il.

Orientador: Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. Mestrado Profissional em Matemática

1.Matemática – Funções. 2.Matemática – Trigonometria. 3.Derivação – Maximo e Mínimo. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 510

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

ESTUDO PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO ENVOLVENDO FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

AGENOR FERREIRA DE BRITO FILHO

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Mestrado em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, e a Sociedade Brasileira de Matemática como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Orientador: Juarez dos Santos Azevedo

Prof. Dr. Juarez dos Santos Azevedo - UFRB

Membro: Jarbas Alves Fernandes

Prof. Me. Jarbas Alves Fernandes - UFRB

Membro:

Prof. Me. Paulo Henrique Ribeiro do Nascimento - UFRB

Cruz das Almas, 21 de Julho de 2016.

A minha esposa Ana PAULA
e meu filho Állan,
com muito carinho e amor.

"A alegria está na luta, na tentativa, no sofrimento envolvido e não na vitória propriamente dita."

Mahatma Gandhi

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente à Deus, que é a minha força maior, e à minha Mãe (em memória) que lutou enquanto pôde para que eu chegasse até aqui. Em seguida, à minha esposa Ana Paula e ao meu filho Állan, que souberam ter paciência nas horas em que estive ausente para a realização deste curso.

Agradeço à meus amigos Iuri Jones, Carlos Eduardo (Cadu), Alexsandro, Luiz Rocha e Ângelo Araújo pelo apoio e pelas palavras de incentivo e amizade que fizeram com que este momento pudesse se concretizar.

Agradeço à minha família e, de um modo especial, à minha irmã Cláudia e ao meu cunhado Gabriel, pelo apoio e incentivo durante o período de estudo, bem como fora dele.

Agradeço aos professores da UFRB por todos os ensinamentos que me passaram durante a realização deste curso e, em especial, ao professor Paulo Nascimento.

Agradeço em especial a meu orientador, professor Juarez Azevedo, pela sua dedicação enquanto Professor, orientação deste trabalho e por ter me incentivado durante o toda minha trajetória até este momento final.

Agradeço aos professores da banca examinadora por terem aceitado participar deste trabalho, bem como pelas suas correções e sugestões adicionadas à ele.

E finalmente a todos os amigos e parentes que, de alguma maneira, estiveram ao meu lado e contribuíram para a conclusão desta empreitada, os meus sinceros agradecimentos.

Agenor Ferreira de Brito Filho.

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um estudo para a resolução de alguns problemas de otimização envolvendo funções trigonométricas. Para isso, são apresentados inicialmente os principais conceitos relativos à circunferência trigonométrica: razões, funções e identidades. Em seguida, são mostrados os conceitos e os principais teoremas sobre limite, continuidade e derivação, para então, a partir desse embasamento teórico, iniciar os estudos para determinação dos pontos máximos e mínimos. Após a apresentação desses conhecimentos, mostra-se o estudo da variação das funções, onde são apresentados os teoremas de Fermat, Rolle, Lagrange e os testes da primeira e segunda derivadas, que são essenciais para a resolução dos problemas de otimização presentes no último capítulo.

Palavras-chave: Resolução. Problemas de Otimização. Funções Trigonométricas. Derivação. Máximos e Mínimos.

ABSTRACT

This work aims to present a study to solve some optimization problems involving trigonometric functions. For this, they are initially presented the main concepts related to trigonometric circumference: reasons, functions and identities. Are then shown the concepts and the main theorems on limits, continuity and derivation, and then, from this theoretical basis, initiate studies to determine the maximum and minimum points. After the presentation of this knowledge, shows the study of the variation of functions, which are presented the theorems of Fermat, Rolle,Lagrange and the first test and second derivatives, which are essential for solving optimization problems present in the last chapter.

Keywords: Resolution. Optimization problems. Trigonometric functions. Derivation. Maximum and Minimum.

Lista de ilustrações

Sumário

INTRODUÇÃO

Os problemas de otimização são aqueles nos quais se pretende determinar uma solução ótima, na qual se busca minimizar ou maximizar uma função, através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável. Estes problemas são bastante comuns em diversas áreas do conhecimento, com aplicações na Engenharia, Economia, Geometria, Biologia e Medicina (STEWART, 2006).

Geralmente, para solucionar esse tipo de problema, precisamos passar por algumas etapas executadas sequencialmente: especificamente começa-se por equacionar a situação proposta, calculam-se as derivadas de ordem um e dois da função, determinam-se os pontos críticos e então verifica-se, neste conjunto, a existência de pontos de máximo ou mínimo, apresentando-se, em seguida, a resposta procurada.

Este tópico não é recente na matemática e, a fim de confirmar este fato, citamos a obra de Euclides de Alexandria por volta do século IV a.C. (COMMANDINO, 1944), que estabelece os primeiros problemas de otimização em forma de proposições. A título de exemplo, a primeira proposição referente a esta obra diz que se tomarmos um ponto no interior de uma circunferência e a partir deste traçarmos vários segmentos tocando a mesma, o maior será aquele que passa pelo centro. A segunda, que quando tomamos um ponto no exterior de uma circunferência e traçamos, a partir deste, várias retas tocando a parte côncava da mesma, o maior segmento será aquele que passa pelo seu centro. A terceira, que o maior segmento ligando dois pontos pertencentes a uma circunferência é o seu diâmetro.

Para a resolução desses problemas, ainda não se usava os conceitos de derivada. Na época, eram usados métodos de redução ao absurdo, congruência de triângulos e relações entre ângulos de figuras com demonstrações bastante extensas. Como veremos adiante, com o passar do tempo, os métodos de resolução foram ficando mais simples e sofisticados. Atualmente, não é necessário fazer uma demonstração tão extensa como a que é encontrada nos Elementos de Euclides, visto que podemos utilizar a equação da distância entre os pontos que formam o segmento em questão e calcular os seus extremos, através da derivada desta função. Mas, como veremos a seguir, as ideias que deram origem a derivada só vieram a florescer após as descobertas de Pierre de Fermat.

Em seguida, no século XVII, apresentamos Pierre de Fermat (1601 -1665), que começou a trabalhar em torno do ano de 1629 e criou um método para achar os pontos numa curva polinomial da forma $y = f(x)$ onde a função assume um valor máximo ou mínimo. Para isso, ele comparou $y = f(x)$ num ponto com o valor de $y = f(x + E)$ num ponto vizinho. Ele notou que esses valores eram bem diferentes, mas num "alto" ou num "baixo" da curva essa variação era quase imperceptível (BOYER, 1996).

Portanto, o que Fermat havia percebido era que, quanto menor o intervalo E entre os dois pontos, mais próximo esse ponto ficava dos extremos da função. Então, para achar os valores de máximo e de mínimo, ele igualava $f(x)$ com $f(x + E)$ e percebia que, embora esses valores não fossem extremamente iguais, eram bem próximos. Com isso, determinava as abscissas dos pontos de máximo e de mínimo de um polinômio. Esse processo hoje é chamado de diferenciação, pois o modelo de Fermat equivalia a igualar

$$\lim_{E\to 0} \frac{F(x+E) - f(x)}{E}$$

a zero e, desta forma, esse processo é a essência da análise infinitesimal. Ele descobriu também como aplicar esse processo de valores vizinhos para achar a tangente de uma curva algébrica da forma $y = f(x)$. O processo de Fermat equivale a dizer que:

$$\lim_{E\to 0} \frac{F(a+E) - f(a)}{E}$$

é a inclinação da tangente em $x = a$ e foram essas ideias que deram origem ao conceito de derivada (BOYER, 1996).

Posteriormente, Guillaume-François-Antoine de L'Hôpital (1661-1744), nascido em Paris, na França, escreveu a obra "Análise dos infinitamente pequenos por linhas curvas", publicada no ano de 1696, na mesma cidade. Esta obra tinha características diferentes das obras de Euclides, pois já se usava o cálculo diferencial para solucionar os problemas de otimização (SANTIAGO, 2008). Ainda, de acordo com a mesma autora, para a resolução dos problemas supracitados, L'Hôpital começava por equacionar a situação proposta, calculava a derivada da função e os seus zeros e então, depois de concluir que nesse ponto a função tinha um máximo ou mínimo, apresentava a resposta final.

Desta breve análise histórica, podemos notar que os problemas de otimização surgiram muito antes do conceito de derivada, pois os primeiros problemas foram identificados na obra de Euclides. Além disso, verifica-se que, com o passar do tempo, a forma de resolução também se tornou mais simples, principalmente após a utilização das derivadas. Outra constatação é que os primeiros problemas, encontrados no livro de Euclides, não eram práticos e, com o passar do tempo, foram se tornando mais aplicados ao cotidiano em diversas áreas.

A proposta desse trabalho é estudar a resolução de alguns problemas de otimização envolvendo funções trigonométricas. Por essa razão, na maioria dos problemas selecionados, estaremos buscando determinar uma equação que relacione o lado de um triângulo retângulo com um determinado ângulo e, quase sempre, teremos alguma função trigonométrica direta ou inversa envolvida. Portanto, estaremos interessados em buscar o ângulo ótimo que vai maximizar ou minimizar medida do lado de um triângulo ou o tamanho do segmento ótimo que vai minimizar ou maximizar um determinado ângulo.

Podemos citar como exemplos do que acabamos de expor: a busca do melhor ângulo para um cirurgião implantar um vaso sanguíneo em uma artéria, a determinação do melhor ângulo visual para um observador enxergar um quadro a uma determinada distância, a obtenção do melhor ângulo para se dobrar uma folha de metal e construir uma calha onde a capacidade de carregar água seja máxima, ou mesmo o cálculo do tamanho máximo de uma viga de ferro para poder passar por um corredor fazendo um determinado ângulo com os lados.

Para atingir os objetivos propostos, estruturamos esse trabalho da seguinte forma:

O Capítulo 1, dividido em três seções, traz os conceitos básicos relacionados à circunferência trigonométrica, como as funções diretas, inversas e as principais identidades. Apresenta também as propriedades topológicas da reta, cujo objetivo é estabelecer a noção de limite, de continuidade e, principalmente, de derivação. Além disso, trás o conceito de derivada e as regras de derivação para as principais funções trigonométricas.

O Capitulo 2, dividido em duas seções, mostra, inicialmente, os conceitos relacionados a pontos máximos e mínimos e os principais Teoremas (de Fermat e de Weierstrass) que fornecem informações sobre o sinal da derivada. Em seguida, apresenta os Teoremas de Rolle, de Lagrange, e os testes da primeira e da segunda derivadas, que são conhecimentos essenciais para se estudar o crescimento e o decrescimento das funções.

O Capítulo 3, que contem alguns problemas de otimização com funções trigonométricas selecionados, utiliza os conceitos, regras, métodos e teoremas apresentados nos dois capítulos anteriores para solucioná-los.

A Conclusão contém um resumo do que foi feito e as considerações finais sobre o tema.

1

DEFINIÇÕES PRELIMINARES

Neste Capítulo, com base em (LIMA, 2004) e (FLEMMING, 1987), definiremos a partir da circunferência trigonométrica, as principais razões trigonométricas e as funções trigonométricas diretas e inversas. Em seguida, apresentaremos algumas noções topológicas da reta que serão utilizadas nas definições de limite, continuidade e derivada. Esse conhecimento será utilizado como pré requisito para os dois capítulos seguintes.

1.1 A Circunferência trigonométrica

Definição 1. *Considere o sistema cartesiano ortogonal xOy. Chamamos de* ***circunferência trigonométrica*** *a circunferência λ de centro em O raio r unitário.*

Verifica-se que o comprimento desta circunferência é 2π (raio é igual a 1) e que a medida absoluta α, em radianos, de um arco e o comprimento l desse arco são iguais, pois $\alpha = \dfrac{l}{r}$.

Consideremos como positivo o sentido anti-horário do percurso de seus arcos medidos a partir do ponto $E(1,0)$ de intersecção da circunferência com o semieixo positivo das abscissas (Figura 1).

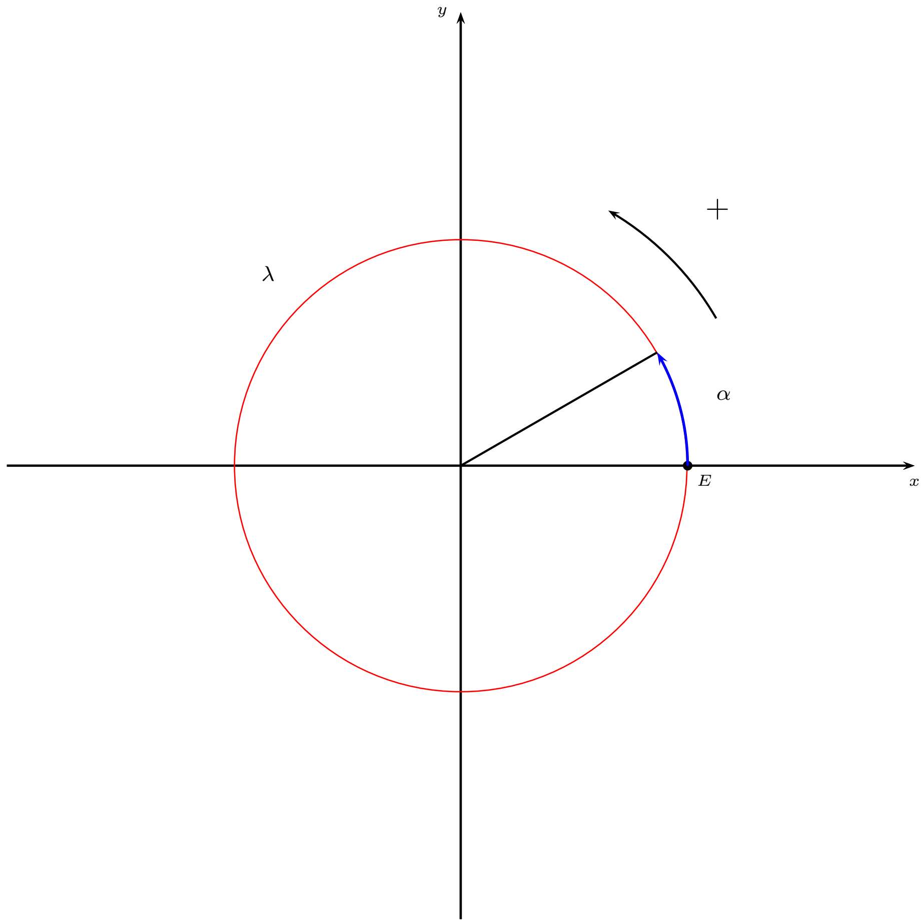

Figura 1 – Circunferência Trigonométrica

Vamos definir uma aplicação de $\mathbb{R}$ sobre λ, ou seja, associar a cada número real x um único ponto P da circunferência λ, do seguinte modo:

- Se $x = 0$, então P coincide com E;
- Se $x > 0$, então realizamos a partir de E um percurso de comprimento de x, no sentido anti-horário e marcamos P como ponto final;
- Se $x < 0$, então realizamos a partir de E um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário e marcamos P como ponto final do percurso.

Desta forma, o ponto P é a imagem de x na circunferência e temos, como exemplos:

- A imagem de $\dfrac{\pi}{2}$ é $B(0, 1)$;
- A imagem de $-\dfrac{\pi}{2}$ é $B'(0, -1)$ (sentido horário);
- A imagem de π é $E'(-1, 0)$;
- A imagem de $\dfrac{3\pi}{2}$ é $B'(0, -1)$;

❏ A imagem de 2π é $E(1,0)$,

ou seja, se P é a imagem do elemento x_0, então P também é imagem dos números: $x_0+2\pi$, $x_0+4\pi$, $x_0+6\pi$, $x_0-2\pi$, $x_0-4\pi$, $x_0-6\pi$, etc.

Em resumo, P é a imagem dos elementos pertencentes ao seguinte conjunto:

$$\{x \in \mathbb{R}; x = x_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}\,. \tag{1}$$

1.1.1 Funções trigonométricas diretas

Na circunferência trigonométrica, vamos definir as funções trigonométricas que são funções angulares, importantes no estudo dos triângulos e na modelação de fenômenos periódicos. Podem ser definidas como razões entre dois lados de um triângulo retângulo em função de um ângulo. Para isso, vamos considerar quatro eixos: eixo dos senos, dos cossenos, das tangentes e das cotangentes, de acordo com a Figura 2.

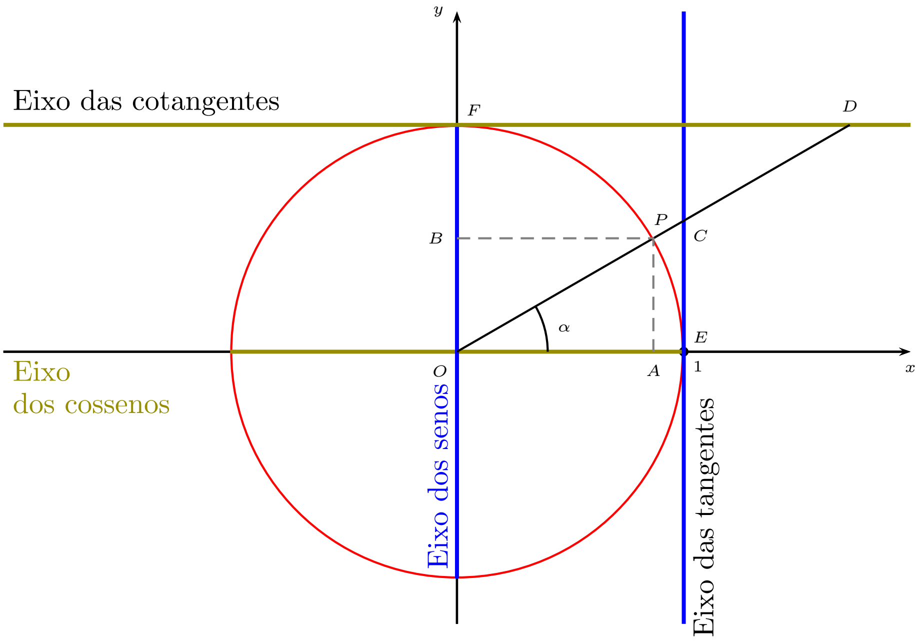

Figura 2 – Funções Trigonométricas

Definição 2. *Considerando o triângulo OAP, o seno de α é a ordenada B do ponto P, ou seja, é a razão entre o cateto oposto ao ângulo α ($AP = OB$) e a hipotenusa $OP = 1$. Denominamos de* ***Função seno*** *a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a todo número α associa a ordenada do ponto P, imagem de α na circunferência trigonométrica. Observemos que a função $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ é uma função periódica de período 2π , ou seja, $\operatorname{sen}(\alpha) = \operatorname{sen}(\alpha+2\pi)$ (ver Figura 3). Pela mesma figura, observamos que a imagem do seno é o intervalo $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \le y \le 1\}$.*

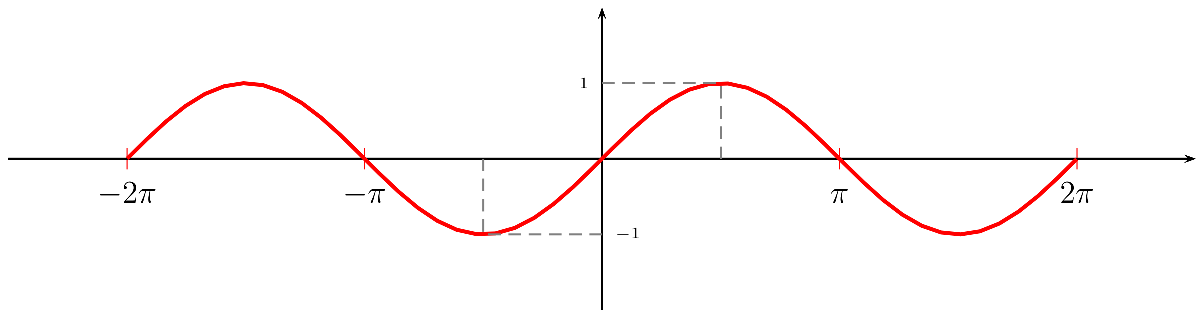

Figura 3 – Gráfico do Seno.

Observemos, na Figura 3, que a imagem do seno é o intervalo $\{y \in \mathbb{R}; -1 \leq y \leq 1\}$ e seu período é 2π.

Definição 3. *Considerando o triângulo OAP, o cosseno de α é a abscissa A do ponto P, ou seja, é a razão entre o cateto adjacente ao ângulo α (OA) e a hipotenusa $OP = 1$. Denominamos de **Função cosseno** a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a todo número α associa a abscissa do ponto P, imagem de α na circunferência trigonométrica. Observemos que a função $f(x) = \cos(x)$ é uma função periódica de período 2π , ou seja, $\cos(\alpha) = \cos(\alpha + 2\pi)$ (ver Figura 4). Pela mesma figura, observamos que a imagem do cosseno é o intervalo $\{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 1\}$.*

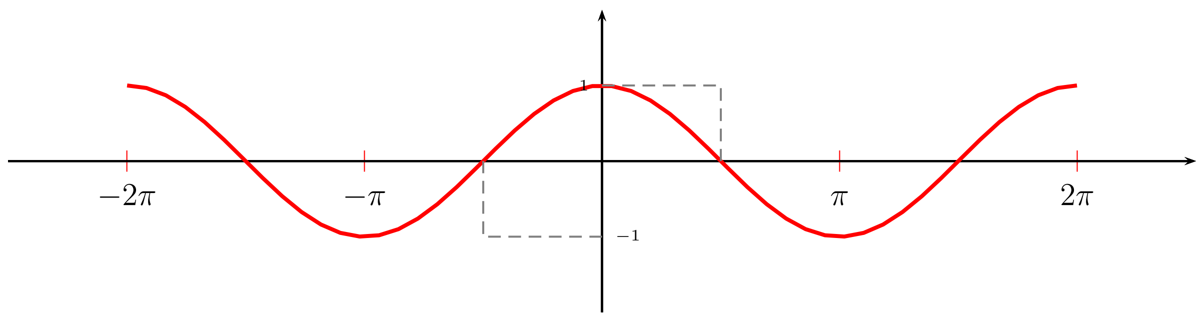

Figura 4 – Gráfico do Cosseno.

Definição 4. *Considerando os triângulos semelhantes OAP e OEC, a tangente de α é a medida do segmento EC, que corresponde a razão entre o cateto oposto ao ângulo α (AP) e o cateto adjacente OA (esta última relação é obtida usando a proporção entre os lados desses dois triângulos, pois $\dfrac{CE}{AP} = \dfrac{OE}{OA}$ e $OE = 1$). Levando em consideração a reta $\overrightarrow{OP}$ e sendo C a sua intersecção com o eixo das tangentes, denominamos de **Função tangente** a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a todo número α associa a medida do segmento EC, imagem de α. Observemos que a função $f(x) = \tan(x)$ é uma função periódica de período π. É importante observar que esta função não está definida para $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ (Figura 5). Pela mesma figura observamos que a imagem da tangente é $\mathbb{R}$.*

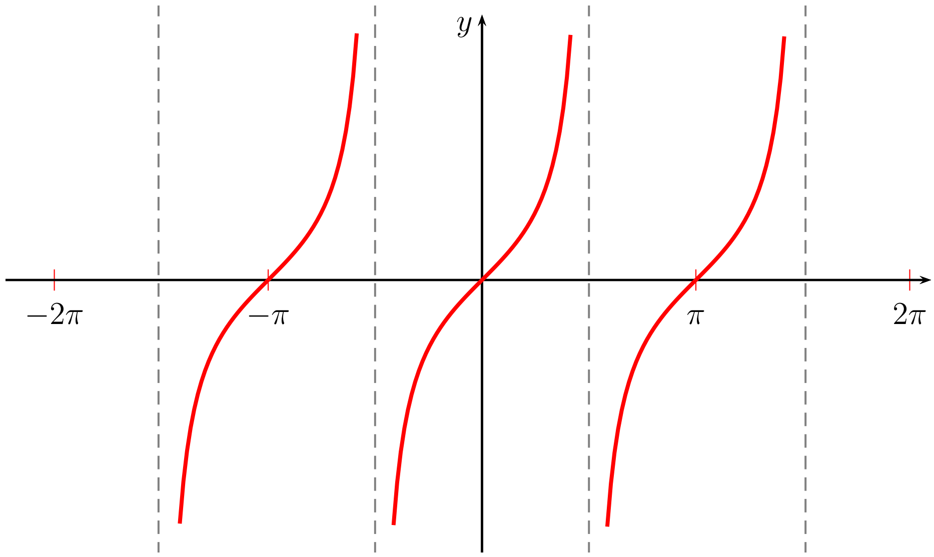

Figura 5 – Gráfico da Tangente.

Definição 5. *Considerando os triângulos semelhantes OBP e OFD, a cotangente de α é a medida do segmento DF, que corresponde a razão entre o cateto adjacente ao ângulo α (OA) e o cateto oposto AP (esta última relação é obtida usando a proporção entre os lados desses dois triângulos, pois $\dfrac{DF}{PB} = \dfrac{OF}{OB}$ e $OF = 1$). Levando em consideração a reta $\overrightarrow{OP}$ e sendo D a sua intersecção com o eixo das cotangentes, denominamos de **Função cotangente** a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a todo número α associa a medida do segmento DF, imagem de α. Observemos que a função $f(x) = \cot(x)$ é uma função periódica de período π. É importante observar que esta função não está definida para $\alpha = k\pi$ (Figura 6). Pela mesma figura observamos que a imagem da cotangente é $\mathbb{R}$.*

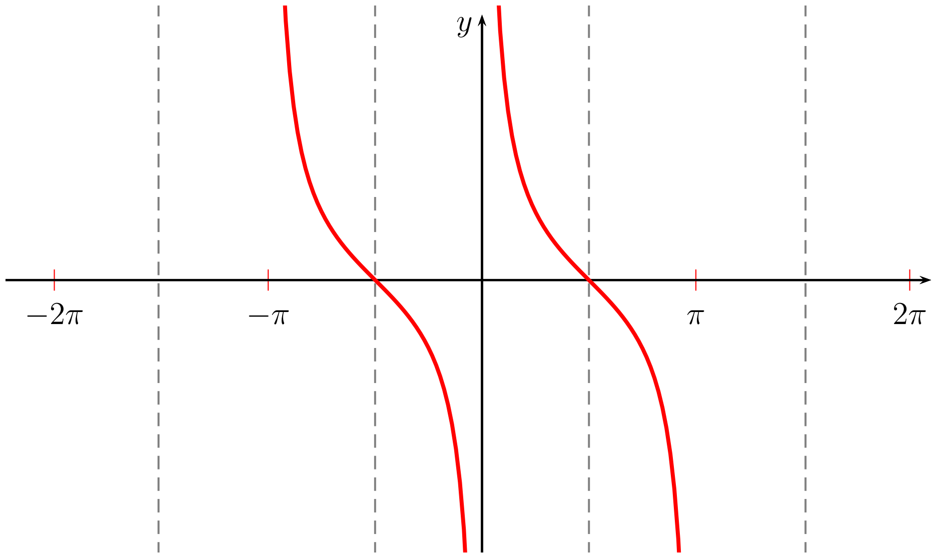

Figura 6 – Gráfico da Cotangente.

Definição 6. *Considerando a reta $\overrightarrow{DB}$, tangente à circunferência em C e sendo B sua intersecção com o eixo dos cossenos, chama-se secante de α a medida da abscissa OB do pontoB (Figura 7). Denominamos de* ***Função secante*** *a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que a todo número α associa a medida do segmento OB, imagem de α. Observemos que a função $f(x)=\sec(x)$ é uma função periódica de período 2π. É importante observar que esta função não está definida para $\alpha=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (Figura 8). Pela mesma figura observamos que a imagem da secante é $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$.*

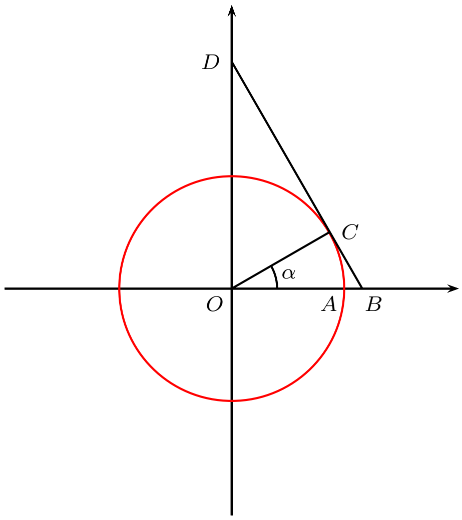

Figura 7 – Circunferência para secante e cossecante.

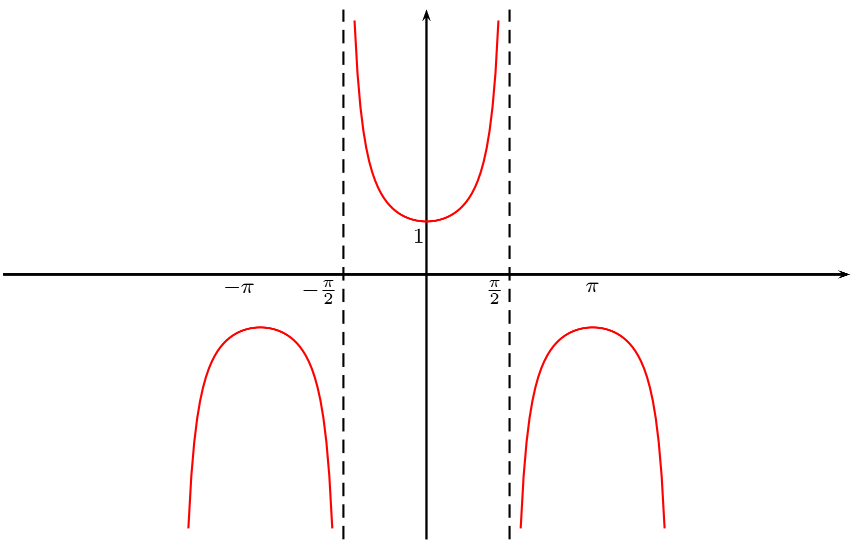

Figura 8 – Gráfico da secante.

Definição 7. *Considerando a reta* $\overrightarrow{DB}$*, tangente à circunferência em* C *e sendo* D *sua intersecção com o eixo dos senos, chama-se cossecante de* α *a medida da ordenada* OD *do ponto* D *(Figura 7). Denominamos de* ***Função cossecante*** *a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que a todo número* α *associa a medida do segmento* OD*, imagem de* α*. Observemos que a função* $f(x) = \csc(x)$ *é uma função periódica de período* 2π*. É importante observar que esta função não está definida para* $\alpha = k\pi$ *(Figura 9). Pela mesma figura observamos que a imagem da cossecante é* $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$*.*

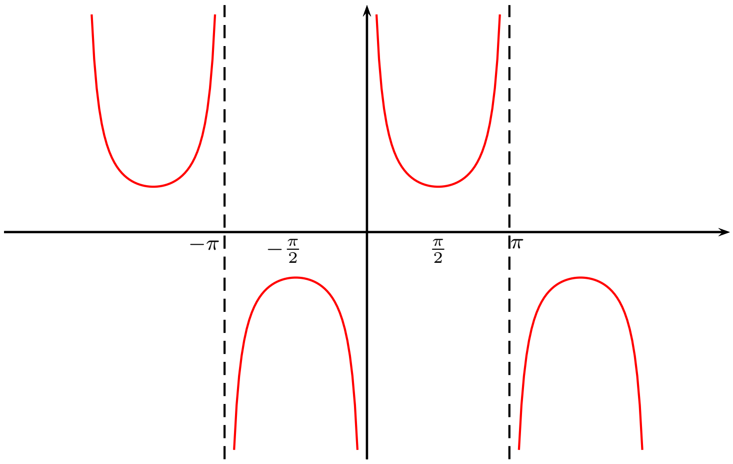

Figura 9 – Gráfico da cossecante.

1.1.2 Funções trigonométricas inversas

Além das funções diretas, como veremos mais adiante, as funções inversas também tem grande importância na resolução dos problemas de otimização. Por essa razão, vamos apresentar suas principais definições.

A função $y = \operatorname{sen}(x)$ não possui uma inversa em $\mathbb{R}$, pois para cada y existem infinitos valores de x que satisfazem a relação $y = \operatorname{sen}(x)$. Geometricamente, qualquer reta paralela ao eixo dos x de equação $y = b$, com $b \in \{-1 \leq x \leq 1\}$, intersecta o gráfico da função infinitas vezes. Para evitar esta situação, restringimos o domínio de $\operatorname{sen}(x)$ ao intervalo $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, para obter uma nova função que não apresentará este problema. A rigor essas duas funções são diferentes, pois tem domínios diferentes.

Definição 8. *Vamos definir uma função da seguinte maneira:*

$$f : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1],$$

tal que $f(x) = \operatorname{sen}(x)$*. Esta nova função possui inversa chamada* ***Função Arco seno*** *definida por:*

$$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

cuja notação é $y = f^{-1}(x) = \text{asen}(x)$*, ou seja,* $y = \text{asen}(x) \Rightarrow \text{sen}\,(y) = x$*.*

Para representar graficamente a função $f^{-1}(x) = \text{asen}(x)$*, usamos a simetria de* f *e* f^{-1} *em relação a* $y = x$*.*

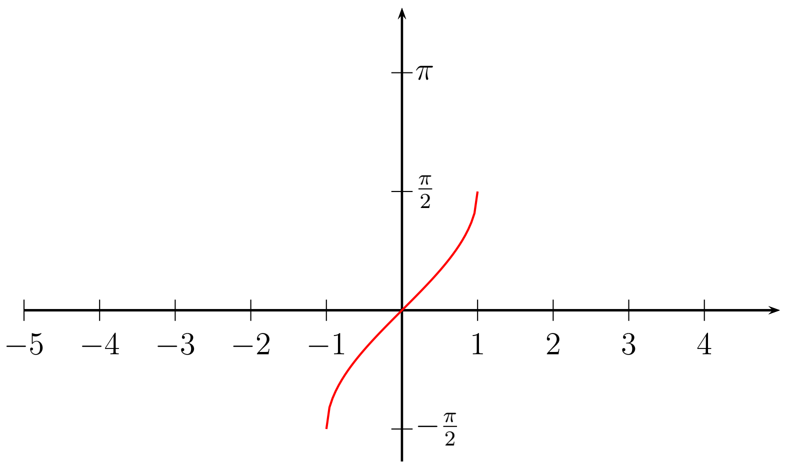

Figura 10 – Gráfico da função arco seno de x.

Observação: O domínio usado para definir a função arco seno poderia ser substituído por qualquer dos intervalos seguintes: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$, ..., etc; essa observação também será válida para as outras funções trigonométricas definidas desta seção.

Definição 9. *Vamos definir uma função da seguinte maneira:*

$$f^{-1} : [0, \pi] \to [-1, 1]\,,$$

tal que $f(x) = \cos(x)$*. Esta nova função possui inversa chamada* ***Função Arco cosseno*** *definida por:*

$$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]\,,$$

cuja notação é $y = f^{-1}(x) = \text{acos}(x)$*, ou seja,* $y = \text{acos}(x) \Rightarrow \cos\,(y) = x$*.*

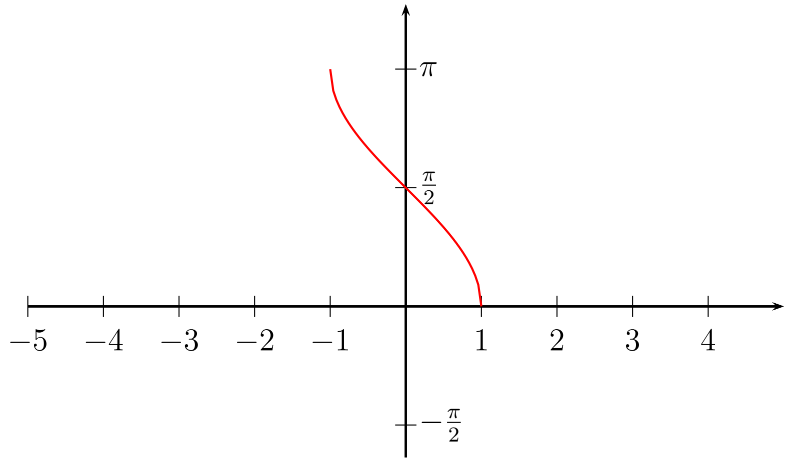

Figura 11 – Gráfico da função arco cosseno de x.

Observação: O domínio usado para definir a função arco-cosseno poderia ser substituído por qualquer dos intervalos seguintes: $[\pi, 2\pi]$, $[2\pi, 3\pi]$, ..., etc.

Definição 10. *Vamos definir uma função da seguinte maneira:*

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R},$$

tal que $f(x) = \tan(x)$. *Esta nova função possui inversa chamada* ***Função Arco tangente*** *definida por:*

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

cuja notação é $y = f^{-1}(x) = \operatorname{atan}(x)$, *ou seja,* $y = \operatorname{atan}(x) \Leftrightarrow \tan(y) = x$.

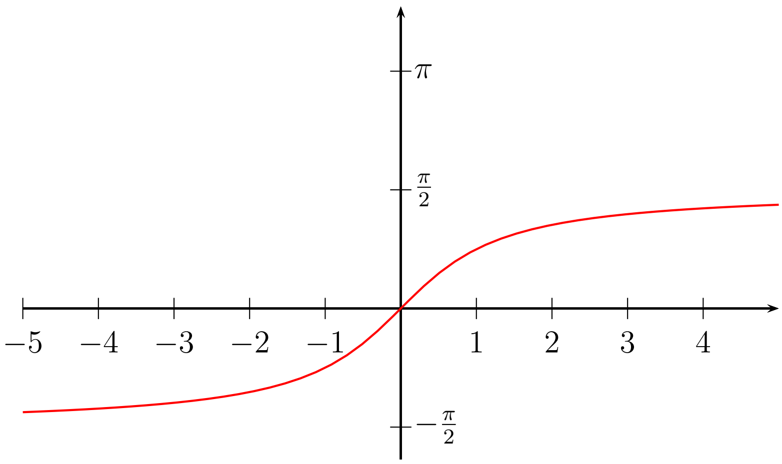

Figura 12 – Gráfico da função arco tangente de x.

Observação: O domínio usado para definir a função arco-tangente poderia ser substituído por qualquer dos intervalos seguintes: $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right)$, ..., etc.

1.1.3 Relações trigonométricas fundamentais

Vamos definir agora, para cada $x \neq \frac{k\pi}{2}$, as relações fundamentais que guardam entre si os valores de $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, $\csc(x)$, $\sec(x)$ e $\cot(x)$.

Será mostrado que, a partir de um desses valores, é sempre possível encontrar os outros.

Teorema 1. *Para todo x real vale a relação:* $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1$.

Demonstração:

Suponha que $x \neq \dfrac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ e considere a Figura 2.

O triângulo OAP é retângulo em A e, portanto,

$$|OA|^2 + |AP|^2 = |OP|^2 .$$

Segue que

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1.$$

Se $x = \dfrac{k\pi}{2}$, verificamos que para os valores de x iguais a 0, π, $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$ e seus côngruos que os respectivos valores de $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ também satisfazem a tese.

Teorema 2. *Para todo x real, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, vale a relação:* $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

Demonstração: Considerando a Figura 2, se $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, então a sua imagem será diferente de 0, π, $\dfrac{\pi}{2}$ e $\dfrac{3\pi}{2}$. Logo,

$$\Delta OAP \sim \Delta OEC \Rightarrow \frac{|EC|}{|OE|} = \frac{|AP|}{|OA|}.$$

Portanto,

$$\tan(x) = \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{|\cos(x)|},$$

pois $|OE| = 1$.

Se $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$, temos que $\tan(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$.

1.2 Limite e continuidade de funções

Nesta seção, apresentaremos algumas das principais definições e propriedades associadas à topologia da reta, bem como os conceitos de limite, continuidade e derivada. Esses conhecimentos serão utilizados para as demonstrações apresentadas nas seções seguintes.

1.2.1 Propriedades topológicas

As propriedades topológicas dos subconjuntos da reta são aquelas que se baseiam nas noções de proximidade e limite, estabelecendo, com grande generalidade, as propriedades das funções contínuas e dos conjuntos onde elas são definidas.

Definição 11. *Um ponto a é **interior** a um conjunto X quando existe um número $\epsilon > 0$ tal que o intervalo aberto $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ está contido em X. O conjunto dos pontos interiores a um conjunto X representa-se por $intX$.*

Definição 12. *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se **aberto** quando $A = intA$, ou seja, quando todos os pontos de A são interiores a A.*

Definição 13. *Um ponto a é **aderente** a um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando a é limite de alguma sequência de pontos $x_n \subset \mathbb{X}$.*

Definição 14. *Chama-se **fecho** de um conjunto X ao conjunto $\overline{X}$ formado por todos os pontos aderentes a X.*

Definição 15. *Um conjunto chama-se **fechado** quando $X = \overline{X}$, ou seja, todo ponto aderente a X pertence a X.*

Definição 16. *Um ponto a chama-se **ponto de acumulação** de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ quando toda vizinhança V de a contém algum ponto de X diferente do ponto a. Em outras palavras ponto de acumulação é um ponto em um conjunto que pode ser aproximado tão bem quanto se queira por infinitos outros pontos do conjunto. Um ponto de acumulação de um conjunto pode ou não pertencer a esse conjunto. Por exemplo, 2 é ponto de acumulação do intervalo $(0, 2)$, embora não pertença a este intervalo, que é aberto.*

Definição 17. *Chama-se **derivado** de X ao conjunto X' formado por todos os pontos de acumulação de X. Portanto $a \in X' \Leftrightarrow a \in \overline{X - \{a\}}$.*

Definição 18. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se **limitado superiormente** quando existe algum $a \in \mathbb{R}$ tal que $x \leq a$ para todo $x \in X$. Neste caso diz-se que a é uma cota superior de X.*

Definição 19. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se **limitado inferiormente** quando existe algum $b \in \mathbb{R}$ tal que $b \leq x$ para todo $x \in X$. Neste caso diz-se que b é uma cota inferior de X.*

Definição 20. *A menor das cotas superiores de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se **supremo**, ou sup X.*

Definição 21. *A maior das cotas inferiores de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ chama-se **ínfimo**, ou inf X.*

Definição 22. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito **limitado** se for limitado superiormente e inferiormente.*

Definição 23. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é dito **compacto** quando é limitado e fechado. Se X é compacto então possui um ínfimo e um supremo, ou seja, contém um elemento mínimo e um elemento máximo.*

1.2.2 Limite e continuidade

A compreensão das noções de limite e continuidade são essenciais para o entendimento de um dos conceitos fundamentais deste trabalho que é o de Derivada.

Definição 24. *. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto de números reais, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real cujo domínio é X e $a \in X'$ um ponto de acumulação do conjunto X. Diz-se que o número real L é o* ***limite*** *de $f(x)$ quando x tende para a, e escreve-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que se tem $|f(x) - L| < \epsilon$ sempre que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$. Simbolicamente temos:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \equiv \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in X, 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

Isto significa que se pode tomar $f(x)$ tão próximo de L quanto se queira desde que se tome $x \in X$ suficientemente próximo, porém diferente, de a.

Definição 25. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$, uma função definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}$. Diz-se que f é* ***contínua*** *no ponto $a \in X$ quando, para todo $\epsilon > 0$ dado arbitrariamente, pode-se obter $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Simbolicamente temos:*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Para a função ser contínua num ponto é necessário que este ponto pertença ao domínio da função. Daí, decorre que se f é contínua em a, então três condições deverão estar satisfeitas:

1. $f(a)$ está definida, ou seja, existe $f(a)$;
2. existe o $\lim_{x \to a} f(x)$;
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

O Teorema do limite trigonométrico fundamental é muito usado no cálculo. A partir dele é possível calcular vários outros importantes limites envolvendo funções trigonométricas. Neste trabalho o mesmo será utilizado na demonstração da derivada do seno e do cosseno. Para a sua demonstração usaremos o resultado abaixo, conhecido como Teorema do Confronto.

Teorema 3. ***do Confronto****. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Se, para todo $x \in X$, $x \neq a$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ e, além disso, tivermos $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.*

Demonstração*: Dado arbitrariamente $\epsilon > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que:*

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta_1 \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

e

$$x \in X, 0 < |x - a| < \delta_2 \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon.$$

Seja $\delta = min\,\{\delta_1, \delta_2\}$. *Então*

$$\begin{aligned} x \in X, 0 < |x-a| < \delta \quad &\Rightarrow \quad L-\epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L+\epsilon \\ &\Rightarrow \quad L-\epsilon < g(x) < L+\epsilon. \\ Logo \quad & \lim_{x\to a} g(x) = L. \end{aligned}$$

Teorema 4. ***Limite trigonométrico fundamental***. $\lim\limits_{\alpha\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha} = 1.$

Demonstração: *Usaremos a Figura 2 , as razões trigonométricas para* $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ *e o fato de que* $\operatorname{sen}(\alpha)$ *e* $\cos(\alpha)$ *são funções pares.*

Denotemos por A_1 *e* A_2 *as áreas dos triângulos* EOP *e* EOC*, respectivamente, e por* A *a área do setor circular* EOP*. Então,*

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{OE\cdot AP}{2}, \\ A_2 &= \frac{OE\cdot EC}{2} \\ e\ A &= \frac{\alpha\cdot OE^2}{2}. \end{aligned}$$

Como $OE = 1$, $AP = sin(\alpha)$ *e* $EC = tan(\alpha)$*, temos que:*

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{2}, \\ A_2 &= \frac{\tan(\alpha)}{2} \\ e\ A &= \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Obviamente

$$\begin{aligned} A1 < A < A2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{2} < \frac{(\alpha)}{2} < \frac{\tan(\alpha)}{2} \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\alpha) < \alpha < \tan(\alpha). \end{aligned}$$

Como $\operatorname{sen}(\alpha) > 0$ *para* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$*, dividindo a desigualdade acima por* $\operatorname{sen}(\alpha)$ *ficamos com :*

$$1 < \frac{\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha)} < \frac{1}{\cos(\alpha)} \Leftrightarrow 1 > \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha} > \cos(\alpha). \quad (I)$$

Como $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha}$ *e* $\cos(\alpha)$ *são funções pares, então:*

$$\frac{\operatorname{sen}(-\alpha)}{(-\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\alpha} \ e \ \cos(-\alpha) = \cos(\alpha).$$

Portanto, a desigualdade (I) vale para qualquer $\alpha \neq 0$.

Como $\lim_{\alpha \to 0} \cos(\alpha) = 1$ *e* $\lim_{\alpha \to 0} 1 = 1$, *pelo* ***Teorema 3, do confronto****, segue que:*

$\lim_{\alpha \to 0} \dfrac{\text{sen}\,(\alpha)}{\alpha} = 1.$

1.3 Derivação

Nesta seção, apresentaremos um dos principais tópicos deste trabalho, que é o conceito de Derivada. Veremos, no capítulo seguinte, que o entendimento deste conceito será fundamental, pois está presente nos principais teoremas utilizados na resolução dos problemas de otimização.

1.3.1 Conceito de derivada e interpretação geométrica

Definição 26. *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A* ***derivada*** *da função f no ponto a é o limite:*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Quando o limite acima existir, diremos que f é derivável no ponto a. Se existir $f'(x)$ em todos os pontos $x \in X \cap X'$, diremos que f é derivável no conjunto X e, sendo assim, obtemos uma nova função, $f'(x)$, chamada de derivada de f:

$$f' : X \cap X' \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f'(x).$$

Definição 27. *Considerando-se a função $q : x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, definida no conjunto $X - \{a\}$, geometricamente, $q(x)$ representa a inclinação (ou coeficiente angular) da secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$. Quando fazemos os valores de x se aproximarem do valor de a, a reta que passará pelo ponto $(a, f(a))$ terá inclinação igual a $f'(a)$ e será chamada de* ***tangente ao gráfico de*** *f.*

Portanto, podemos dizer que, o limite das inclinações das retas secantes que passam pelos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ quando $x \mapsto a$, é a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$.

Quando tomamos $h = x - a \Rightarrow x = a + h$, a derivada de f no ponto $a \in X \cap X'$ transforma-se no limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Desta forma, esta nova função é definida no conjunto $Y = \{h \in \mathbb{R} - \{0\}\, ; a + h \in X\}$, que tem 0 como ponto de acumulação.

O próximo teorema estabelece uma relação entre a derivada de uma função e sua continuidade num determinado ponto.

Teorema 5. *Se f possui derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$.*

Demonstração:

Por hipótese, temos que $f'(c)$ existe e, por definição,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Devemos provar que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Inicialmente iremos multiplicar e dividir $[f(x) - f(c)]$ por $x - c$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) - f(c) &= \lim_{x \to c} \left[(x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] \\
&= \lim_{x \to c} (x - c) \cdot \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \\
&= 0 \cdot f'(c),
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = 0.$$

Desta forma, temos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to c} f(x) &= \lim_{x \to c} (f(x) - f(c) + f(c)) \\
&= \lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) + \lim_{x \to c} f(c) \\
&= 0 + f(c) \\
&= f(c).
\end{aligned}$$

Concluímos que $f(x)$ é contínua em $x = c$.

Definição 28. *Seja $y = f(x)$ uma função definida em $a \in X \cap X'_+$, então a **derivada à direita** de f no ponto a, denotada por $f'_+(a)$ é definida por:*

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

desde que o limite exista.

Definição 29. *Seja $y = f(x)$ uma função definida em $b \in X \cap X'_-$, então a **derivada à esquerda** de f no ponto b, denotada por $f'_-(b)$ é definida por:*

$$f'_{-}(b) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} = \lim_{h \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b},$$

desde que o limite exista.

1.3.2 Regras de derivação

Vamos apresentar nesta seção algumas proposições e teoremas que permitirão obter as derivadas das funções trigonométricas.

Proposição 1. ***Derivada da função constante****: Seja k uma constante e $f(x) = k$, para todo x, então $f'(x) = 0$.*

Proposição 2. ***Derivada da função potência****: Seja n um número inteiro e $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.*

Proposição 3. ***Derivada da soma de funções****: Sejam f, g duas funções deriváveis em x e $h(x) = f(x) + g(x)$, então:*

$$h'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Proposição 4. ***Derivada do produto de funções****: Sejam f e g duas funções deriváveis em x e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, então:*

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Proposição 5. ***Derivada do quociente de funções****: Sejam f e g duas funções deriváveis em x e $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, em que $g(x) \neq 0$, então:*

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Teorema 6. ***Regra da cadeia****: Seja $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$, $f(X) \subset Y$, $a \in X \cap X'$, $b = f(a) \in Y \cap Y'$. Se existem $f'(a)$ e $g'(b)$ então $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ é derivável em a , e vale a seguinte expressão $(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a)$, conhecida como* ***regra da cadeia****.*

Demonstração: Temos que:

$$f(a+h) = f(a) + [f'(a) + \rho] \cdot h,$$

onde $\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0$ e $\rho = \rho(h)$.

$$g(b+k) = g(b) + [g'(a) + \sigma] \cdot k,$$

onde $\lim_{k \to 0} \sigma(k) = 0$ e $\sigma = \sigma(k)$.

Pondo $k = f(a+h) - f(a) = (f'(a) + \rho) \cdot h$, temos que: $f(a+h) = b + k$ e:

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(a+h) &= g(f(a+h)) \\
&= g(b+k) \\
&= g(b) + (g'(b) + \sigma) \cdot k \\
&= g(b) + (g'(b) + \sigma) \cdot (f'(a) + \rho) \cdot h \\
&= g(b) + (g'(b) \cdot f'(a) + \theta) \cdot h
\end{aligned}$$

com $\theta(h) = \sigma(f(a+h) - f(a)) \cdot (f'(a) + \rho(h)) + g'(b) \cdot \rho(h)$.

Como f é contínua no ponto a e ρ é contínua em 0, temos que:

$\lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$.

Logo $\lim_{h \to 0} \theta(h) = 0$, o que prova o teorema.

Obs. A função $\rho(h)$ foi definida para todo h tal que $(a+h) \in X$, inclusive $h = 0$. Daí a razão para sua continuidade. Para maiores detalhes vide (LIMA, 2004).

Teorema 7. ***Derivada da função inversa***: *Seja $f : X \to Y \subset \mathbb{R}$ uma função que possui inversa $g = f^{-1} : Y \to X \subset \mathbb{R}$. Se f é derivável no ponto $a \in X \cap X'$ e g é contínua no ponto $b = f(a)$ então g é derivável no ponto b se, e somente se, $f'(a) \neq 0$. Então $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.*

Demonstração: Como g é contínua em b o $\lim_{y \to b} g(y) = g(b) = a$.

Além disso, $y \in Y - \{b\} \Rightarrow g(y) \neq a$. Logo:

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} &= \lim_{y \to b} \left(\frac{g(y) - a}{f(g(y)) - f(a)} \right) \\
&= \lim_{y \to b} \left(\frac{f(g(y)) - f(a)}{g(y) - a} \right)^{-1} \\
&= \frac{1}{f'(a)}.
\end{aligned}$$

Logo, $g'(b)$ existe e é igual a $\dfrac{1}{f'(a)}$ quando $f'(a) \neq 0$.

Reciprocamente, se existe $g'(b)$, então , como $g \circ f = id_X$, a regra da cadeia nos dá $g'(b) \cdot f'(a) = 1$ e portanto, $f'(a) \neq 0$, com $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$.

Definição 30. *Seja f uma função derivável em um certo intervalo I, se a função $f'(x)$, que é conhecida como derivada primeira de $f(x)$, é novamente derivável no mesmo in-*

tervalo, então existe a função derivada de $f'(x)$, denotada por $f''(x)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$ que é chamada de ***derivada segunda*** *de $f(x)$. Diz-se, então, que $f(x)$ é duas vezes derivável.*

Considerando esse procedimento sucessivamente e supondo que $f(x)$ é n vezes derivável, obtém-se a função derivada n-ésima ou derivada de ordem n, de $f(x)$ indicada como $f^n(x)$. As funções $f'(x), f''(x), \ldots, f^n(x)$, são chamadas de ***derivadas sucessivas*** *de $f(x)$.*

1.3.3 Derivada das funções trigonométricas

Nesta subseção, estaremos apresentando e demonstrando a derivação das principais funções trigonométricas que serão usadas na resolução dos problemas do capítulo 3.

Proposição 6. ***Derivada do Seno****: Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, com x medido em radianos. Se $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ então $f'(x) = \cos(x)$.*

Demonstração: Considerando a identidade do seno da soma, dada por: $\operatorname{sen}(x+h) = \operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h)$ e usando a definição de derivada temos que:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \cos(x)\operatorname{sen}(h)) - \operatorname{sen}(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x) cos(h) - \operatorname{sen}(x)}{h} + \frac{cos(x)\operatorname{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0} \left[\operatorname{sen}(x).\frac{cos(h) - 1}{h} + cos(x).\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x). \lim_{h\to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} + \lim_{h\to 0} cos(x). \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}.\mathbf{(I)}
\end{aligned}
$$

Como x é considerado como uma constante quando fazemos um limite para $h \to 0$ na expressão **(I)**, temos que:

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x)\ \mathbf{(II)}$$

e

$$\lim_{h\to 0} cos(x) = cos(x).\ \mathbf{(III)}$$

Usando o Teorema 4 (Limite trogonométrico fundamental):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} = 1.\ \mathbf{(IV)}$$

Então, resta calcular, na expressão (I), o $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{cos(h)-1}{h}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{cos(h)-1}{h}.\frac{cos(h)+1}{cos(h)+1}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{cos^2(h)-1}{h(cos(h)-1)} \\
&= \lim_{h\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2 h}{h(cos(h)-1)} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}.\frac{\operatorname{sen}(h)}{cos(h)+1} \\
&= -\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}.\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{cos(h)+1} \\
&= -1.\frac{0}{1+1} = 0.
\end{aligned}$$

Colocando esse último resultado e os outros obtidos em **(II)**, **(III)** e **(IV)** na expressão **(I)**, temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x).\lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} + \lim_{h\to 0} cos(x).\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h} \\
&= \operatorname{sen}(x).0 + cos(x).1 = cos(x).
\end{aligned}$$

Proposição 7. ***Derivada do Cosseno***: *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f(x) = \cos(x)$, com x medido em radianos. Se $f(x) = \cos(x)$ então $f'(x) = -\operatorname{sen}(x)$.*

Demonstração: Considerando a identidade do cosseno da soma, dada por: $\cos(x+h) = \cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)$ e usando a definição de derivada temos que:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{cos(x+h)-cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(x)\cos(h) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h) - cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{\cos(x)cos(h) - cos(x)}{h} - \frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} \left[cos(x).\frac{cos(h)-1}{h} - \operatorname{sen}(x).\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0} cos(x).\lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} - \lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x).\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(h)}{h}. \ \textbf{(I)}
\end{aligned}$$

Como x é considerado como uma constante quando fazemos um limite para $h \to 0$ na expressão **(I)**, temos que:

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x). \ \textbf{(II)}$$

e

$$\lim_{h\to 0} cos(x) = \cos(x). \ \textbf{(III)}$$

Usando o Limite Trigonométrico Fundamental

$$\lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} = 1. \textbf{ (IV)}$$

e utilizando o valor de $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{cos(h)-1}{h} = 0$, calculado na demonstração da derivada do seno, e os outros resultados obtidos em **(II)**, **(III)** e **(IV)** na expressão **(I)** temos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} cos(x). \lim_{h\to 0} \frac{cos(h)-1}{h} - \lim_{h\to 0} \text{sen}(x). \lim_{h\to 0} \frac{\text{sen}(h)}{h} \\ &= cos(x).0 - \text{sen}(x).1 = -\text{sen}(x) \end{aligned}$$

Proposição 8. ***Derivada da Tangente***: *Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,com $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, onde $f(x) = \tan(x)$, e x medido em radianos. Se $f(x) = \tan(x)$ então $f'(x) = \sec^2(x)$.*

Demonstração: Considerando as derivadas do seno e cosseno já demonstradas anteriormente, a identidade para a função tangente, dada por $\tan(x) = \dfrac{\text{sen}(x)}{\cos(x)}$, e a regra da derivada de um quociente, temos que:

$$u(x) = \text{sen}(x) \Rightarrow u'(x) = \cos(x)$$

e

$$v(x) = \cos(x) \Rightarrow v'(x) = -\text{sen}(x).$$

Portanto, se $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, então

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \text{sen}(x)\cdot(-\text{sen}(x))}{[\cos(x)]^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \text{sen}^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2} \\ &= \sec^2(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \sec^2(x).$$

Proposição 9. ***Derivada do Arco seno***: *Seja a função $y = \text{asen}(x)$, definida em $I = [-1, 1]$, com imagens em $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, que é a inversa de $x = \text{sen}\,(y)$. Se $y = \text{asen}(x) \Rightarrow y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.*

Demonstração: Sabemos que:

$$y = \text{asen}(x) \Rightarrow x = \text{sen}\,(y)\,.$$

De acordo com as proposiçoes 6 e 7, temos que:

$$x = \text{sen}\,(y) \Rightarrow x' = \cos\,(y)\,.$$

Empregando a regra da derivada da inversa, do Teorema 7,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x'} \\ &= \frac{1}{\cos(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2(y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = \text{asen}(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposição 10. ***Derivada do Arco cosseno***: *Seja a função* $y = \text{acos}(x)$, *definida em* $I = [-1, 1]$, *com imagens em* $[0, \pi]$, *que é a inversa de* $x = \cos(y)$. *Se* $y = \text{acos}(x) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Demonstração: Sabemos que:

$$y = \text{acos}(x) \Rightarrow x = \cos(y).$$

De acordo com as proposiçoes 6 e 7, temos que:

$$x = \cos(y) \Rightarrow x' = \text{sen}(y).$$

Empregando a regra da derivada da inversa, do Teorema 7,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x'} \\ &= \frac{1}{\text{sen}(y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(y)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = \text{acos}(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Proposição 11. ***Derivada do Arco tangente***: *Seja a função* $y = \text{atan}(x)$, *definida de* $\mathbb{R}$ *em* $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, *que é a inversa de* $x = \tan(y)$. *Se* $y = \text{atan}(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Demonstração: Sabemos que:

$$y = \operatorname{atan}(x) \Rightarrow x = \tan(y).$$

De acordo com as proposição 8, temos que:

$$x = \tan(y) \Rightarrow x' = \sec^2(x).$$

Empregando a regra da derivada da inversa, do Teorema 7,

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{x'} \\ &= \frac{1}{\sec^2(y)} \\ &= \frac{1}{1+\tan^2(y)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y = \operatorname{atan}(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}.$$

No próximo capítulo faremos um estudo sobre a variação das funções, com o objetivo de determinar os pontos críticos das mesmas. Essa é a condição essencial para se determinar o valor máximo ou mínimo, que será a solução final para cada um dos problemas propostos.

2

ESTUDO DA VARIAÇÃO DAS FUNÇÕES

Este capítulo está baseado nas idéias de (LIMA, 2004) e está dividido em duas seções. Na primeira, apresentaremos alguns conceitos relacionados a pontos máximos e mínimos e veremos que a derivada é a principal ferramenta para estudar o crescimento de uma função na vizinhança de um ponto. Na segunda seção, vamos apresentar e provar alguns teoremas que estabelecem uma ligação entre a derivada de uma função e o crescimento e decrescimento desta.

Todo esse conhecimento será utilizado na resolução dos problemas de otimização presentes no próximo capítulo.

2.1 Máximos e Mínimos

Definição 1. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui um **máximo local** no ponto $a \in \mathbb{X}$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \leq f(a)$. A imagem de a, $f(a)$, é chamada **valor máximo local** de f.*

Definição 2. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui um **mínimo local** no ponto $a \in \mathbb{X}$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in X \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) \geq f(a)$. A imagem de a, $f(a)$, é chamada **valor mínimo local** de f.*

Definição 3. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui um **máximo absoluto** no ponto $a \in \mathbb{X}$ quando existe $f(a) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. A imagem de a, $f(a)$, é chamada **valor máximo absoluto** de f.*

Definição 4. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui um **mínimo absoluto** no ponto $a \in \mathbb{X}$ quando existe $f(a) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{X}$. A imagem de a, $f(a)$, é chamada **valor mínimo absoluto** de f.*

Definição 5. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui um **máximo local estrito** no ponto $a \in \mathbb{X}$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta) \Rightarrow f(x) < f(a)$. A imagem de a, $f(a)$, é chamada **valor máximo local estrito** de f.*

Definição 6. *Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ possui um* ***mínimo local estrito*** *no ponto $a \in \mathbb{X}$ quando existe $\delta > 0$ tal que $x \in (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta) \Rightarrow f(x) > f(a)$. A imagem de a, $f(a)$, é chamada* ***valor mínimo local estrito*** *de f.*

Em geral, um ponto a, de máximo ou de mínimo, de uma função f é chamado **ponto extremo** de f. Neste caso o valor de $f(a)$ é chamado de **valor extremo** de f.

A função $f(x) = \cos(x)$ assume seu **valor máximo** (local e absoluto) em 1, um número infinito de vezes, uma vez que $\cos(nx) = 1$ para todo n inteiro e $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ para todo x. Da mesma forma, assume seu **valor mínimo** (local e absoluto) em -1, pois $\cos(2n + 1)\pi = -1$ para todo n inteiro.

A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen}(x)$, possui máximos locais estritos nos pontos $(4k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$ e mínimos locais estritos em $(4k - 1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Veremos agora, com os próximos teoremas, que o sinal da derivada fornece informações importantes sobre a variação da função.

Teorema 1. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável à direita, no ponto $a \in X \cap X'_+$. Se $f'_+(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta \Rightarrow f(a) < f(x)$.*

Demonstração: Temos que $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) > 0$. Então, pelas propriedades de limite, existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $a < x < a + \delta \Rightarrow \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0$, e, portanto, $f(x) - f(a) > 0$.

Observação: Trocando-se os sinais '>' e '<', '+' e '-', obtêm-se mais três teoremas análogos a este, com demonstrações semelhantes. Para maiores detalhes, consultar [1].

Teorema 2. *Seja $a \in X$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda. Se $f : X \to \mathbb{R}$ possui, no ponto a, uma derivada $f'(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que $x, y \in X$ e $a - \delta < x < y < a + \delta$ implicam $f(x) < f(a) < f(y)$.*

Teorema 3. ***(de Fermat)***: *Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função derivável no ponto a e possui um máximo ou um mínimo local nesse ponto, então $f'(a) = 0$.*

Demonstração: De fato se fosse $f'(a) > 0$, o Teorema 2 excluiria a existência de máximo e mínimo local no ponto a. Um análogo do mesmo Teorema tambem diria que não pode ser $f'(a) < 0$. Logo, deve ser $f'(a) = 0$.

O Teorema 3 garante que num extremo local interior de uma função derivável f, a reta tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

Observemos que a recíproca do Teorema 3 é falsa, ou seja, existem funções deriváveis no ponto a do seu domínio, $f'(a) = 0$ e a não é ponto extremo de f. Por exemplo, a função $f(x) = x^3$ tem derivada nula no ponto 0 mas é crescente em toda reta, logo não assume máximo nem mínimo em ponto algum. É necessário também, para a validez desse Teorema, que exista a derivada e que o ponto a seja ponto de acumulação dos dois lados.

Definição 7. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável no ponto $a \in X$. Se $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ não existe, a é chamado* ***Ponto Crítico*** *de f.*

O Teorema 5, conhecido como Teorema de Weierstrass, será muito útil na resolução de alguns problemas de otimização. Para demonstrá-lo usaremos o Teorema 4, a seguir, cuja demonstração encontra-se em (LIMA, 2004).

Teorema 4. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto então $f(X)$ é compacto.*

Teorema 5. ***(de Weierstrass)****: Toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, definida num compacto X, é limitada e atinge seus extremos, isto é, existem x_1 e $x_2 \in X$ tais que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ para todo $x \in X$.*

Demonstração: Como X é compacto, pelo Teorema 4, $f(X)$ também é compacto, ou seja, limitado e fechado. Então, o supremo de $f(X) \in f(X)$ e o ínfimo de $f(X) \in f(X)$. Logo, existem x_1 e $x_2 \in X$ tais que $inf f(X) = f(x_1)$ e $sup f(X) = f(x_2)$.

Para encontrar um máximo ou um mínimo absoluto de uma função contínua em um intervalo fechado, ou esse intervalo é local, nesse caso ocorre em um número crítico, ou acontece em um extremo do intervalo.

Sendo assim, o procedimento abaixo sempre funciona e é conhecido **como "Método do intervalo fechado"**:

1. Encontre os valores de f nos números críticos de f em (a, b);

2. Encontre os valores de f nos extremos do intervalo;

3. O maior valor das etapas 1 e 2 é o valor máximo absoluto e o menor valor é o mínimo absoluto.

2.2 Crescimento e decrescimento

Teorema 6. ***(de Rolle)****: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável no intervalo aberto (a, b) e tal que $f(a) = f(b)$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração: *No primeiro caso f é constante em $[a, b]$. Neste caso $f'(c) = 0$ em (a, b), isto é, para todo $c \in (a, b)$ temos que $f'(c) = 0$.*

No segundo caso, f atingirá seu mínimo m ou seu máximo M num ponto interior $c \in (a, b)$, pois se ambos fossem atingidos nas extremidades, teríamos $m = M$ e f seria *constante. Pelo Teorema de Fermat, temos $f'(c) = 0$. O máximo e o mínimo de f em $[a, b]$ são atingidos, em virtude do Teorema de Weierstrass, pois f é contínua no compacto $[a, b]$.*

Observação: Este teorema afirma que se uma função é derivável em (a, b), contínua em $[a, b]$ e assume valores iguais nos extremos do intervalo, então em algum ponto de (a, b) a tangente ao gráfico de f é paralela ao eixo dos x.

Teorema 7. ***(de Lagrange ou do Valor Médio)***: *Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então, existe um ponto $c \in (a, b)$, tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração: Seja $g(x)$ o polinômio de grau ≤ 1 tal que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Então $g'(x)$ é constante e, de fato $g'(x) = \dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$ para todo $x \in [a, b]$. A função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = f(x) - g(x)$, satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, logo existe $c \in (a, b)$, tal que $\varphi'(c) = 0$, o que dá a conclusão desejada.

Observação: Este teorema afirma que se uma função é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então existe um ponto $c \in (a, b)$, tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $P(c, f(c))$ é paralela à reta determinada pelos pontos $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$, por terem coeficientes angulares iguais.

Teorema 8. *Seja f é uma função contínua em $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b), então:*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é crescente em $[a, b]$;*
2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é decrescente em $[a, b]$.*

Demonstração: Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer em $[a, b]$ tais que $x_1 < x_2$. Então, f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em (x_1, x_2). Pelo Teorema do Valor Médio, segue que existe um ponto $c \in (x_1, x_2)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \ \mathbf{(I)}.$$

De acordo com o item 1, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Daí $f'(c) > 0$. Como $x_1 < x_2$ então $x_2 - x_1 > 0$.

De acordo com o item **(I)** concluimos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$.

Logo, f é crescente em $[a, b]$.

De acordo com o item 2, $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$. Daí $f'(c) < 0$. Como $x_1 < x_2$ então $x_2 - x_1 > 0$.

De acordo com o item **(I)** concluimos que $f(x_2) - f(x_1) < 0$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$.

Logo, f é decrescente em $[a, b]$.

Segundo este Teorema, sendo a função f crescente, os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f são não negativos. Por outro lado se f for decrescente, geometricamente significa que os coeficientes angulares das retas tangentes ao gráfico de f são não positivos.

A seguir, demonstraremos dois Teoremas que estabelecem critérios para determinação dos pontos extremos de uma função.

Teorema 9. ***Teste da primeira derivada****: Seja f uma função contínua num intervalo fevhado $[a, b]$ que possui derivada em todo ponto do intervalo (a, b), exceto possivelmente num ponto c. Então:*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) < 0$ para todo $x > c$, então f tem um máximo relativo em c.*

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x < c$ e $f'(x) > 0$ para todo $x > c$, então f tem um mínimo relativo em c.*

Demonstração: Prova do item 1: Usando o Teorema 8, podemos concluir que f é crescente em $[a, c]$ e decrescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) < f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um máximo relativo em c.

Prova do item 2: Usando o Teorema 8, podemos concluir que f é decrescente em $[a, c]$ e crescente em $[c, b]$. Portanto, $f(x) > f(c)$ para todo $x \neq c$ em (a, b) e assim f tem um mínimo relativo em c.

Geralmente para determinação dos pontos extremos, o primeiro passo, de acordo com o teorema de Fermat, é determinar os valores de x que anulam f'. Esses são os possíveis candidatos a extremantes. Então, de acordo com o Teorema 9:

- ❏ c é ponto de máximo local de f, se existir uma vizinhança V de c, tal que $f'(x)$ é positiva à esquerda e negativa à direita de c.

- ❏ c é ponto de mínimo local de f, se existir uma vizinhança V de c, tal que $f'(x)$ é negativa à esquerda e positiva à direita de c.

- ❏ c não é ponto extremante de f, se existir uma vizinhança V de c, tal que, para todo $x \in V$ e $x \neq c$ tem-se $f'(x)$ sempre com o mesmo sinal.

Uma outra opção para determinação dos pontos extremos é o teste da segunda derivada que veremos a seguir.

Teorema 10. ***Teste da segunda derivada***: *Seja f uma função contínua e derivável até segunda ordem no intervalo $I = (a, b)$, com derivadas f' e f'' também contínuas em I. Seja $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. Então:*

1. *Se $f''(c) < 0$, então c é ponto de máximo local de f;*
2. *Se $f''(x) > 0$, então c é ponto de mínimo local de f;*

Demonstração: Para prova usaremos o seguinte resultado: Se limite de $f(x)$ quando x tende a a existe e é negativo, então, existe um intervalo aberto, contendo a, tal que, $f(x) < 0$ para todo $x \neq a$ no intervalo.

Prova do item 1. Por hipótese $f”(c)$ existe e $f”(c) < 0$. Então:

$$f''(c) = \lim_{x \to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0.$$

Portanto, existe um intervalo aberto I, contendo c, tal que

$$\frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} < 0$$

para todo $x \in I$. (1)

Seja A o intervalo aberto que contem todos os pontos $x \in I$ tais que $x < c$. Então, c é o extremo direito do intervalo aberto A.

Seja B o intervalo aberto que contem todos os pontos $x \in I$ tais que $x > c$. Então, c é o extremo esquerdo do intervalo aberto B.

Se $x \in A$, temos $x - c < 0$. De (1), resulta que $f'(x) > f'(c)$.

Se $x \in B$, temos $x - c > 0$. De (1), resulta que $f'(x) < f'(c)$.

Como $f'(c) = 0$, concluimos que, se $x \in A$, $f'(x) > 0$ e, se $x \in B$, $f'(x) < 0$.

Pelo critério da derivada primeira, f tem um valor máximo relativo em c.

A prova do item 2 é análoga.

3 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Aproveitando o conhecimento adquirido nos dois últimos capítulos e a fim de motivar o aprendizado, esse capítulo trás a resolução de alguns problemas de otimização com funções trigonométricas.

Problema I. *Uma pequena cidade com 8.000 habitantes deve ser abastecida por um tanque de água que deve ser construído com uma barra de metal de largura 24 m dobrando-se para cima 1/3 da barra de cada lado, fazendo-se um ângulo θ com a horizontal e colocando-se dois pedaços de barras iguais em forma de trapézio na parte da frente e no fundo, de forma a não deixar vazar a água. A frente e o fundo deste tanque tem a forma de um trapézio de acordo com a Figura 13. Se o comprimento deste tanque for de 10 m, qual será volume máximo de água que ele poderá armazenar sem transbordar?*

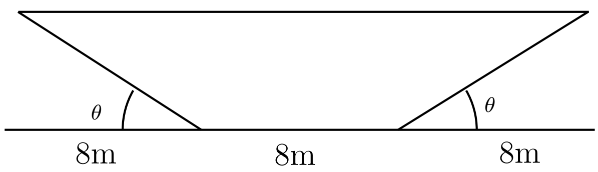

Figura 13 – Ilustração do Problema I.

Observemos que quando a área do trapézio for máxima, o volume de água armazenado no tanque também será. Portanto, vamos escrever a área desse trapézio em função de θ de acordo com a Figura 13:

$$A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}.$$

Onde A = área do trapézio, B = base maior, b = base menor e h = altura.

Pela mesma Figura:

$B = 8 + 2 \cdot 8 \cdot \cos(\theta)$, $b = 8$ e $h = 8 \cdot \operatorname{sen}(\theta)$ então:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{(8 + 8 + 2 \cdot 8 \cdot \cos(\theta))}{2} \cdot 8 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ &= 64 \cdot (1 + \cos(\theta)) \cdot \operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Para $\theta \in [0, \pi]$, que é nosso intervalo de interesse no problema, calculemos a primeira derivada de $A(\theta)$:

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= 64 \cdot [(-\operatorname{sen}(\theta)) \cdot \operatorname{sen}(\theta) + (1 + \cos(\theta)) \cdot \cos(\theta)] \\ &= 64 \cdot [-\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos(\theta) + \cos^2(\theta)] \\ &= 64 \cdot [-(1 - \cos^2(\theta)) + \cos(\theta) + \cos^2(\theta)] \\ &= 64 \cdot [-1 + \cos^2(\theta) + \cos(\theta) + \cos^2(\theta)] \\ &= 64 \cdot [2 \cdot \cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1]. \end{aligned}$$

Encontraremos os pontos críticos fazendo $A'(\theta) = 0$, substituindo $\cos(\theta) = u$ e calculando primeiramente as raízes de um polinômio de segundo grau:

$$A'(\theta) = 64 \cdot \left[2u^2 + u - 1\right].$$

Calculando as raízes de $2u^2 + u - 1 = 0$, que são $u = -1$ ou $u = \frac{1}{2}$, encontramos $\theta = \pi$ ou $\theta = \frac{\pi}{3}$ como pontos críticos.

Comparando $A(\theta)$ nos extremos do domínio e nos pontos críticos: $A(0) = 0$, $A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 100 \cdot (1 + \frac{1}{2}) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ e $A(\pi) = 0$.

Concluímos, de acordo com o **método do intervalo fechado**, que a área máxima é alcançada quando escolhemos $\theta = \frac{\pi}{3}$. Para o seu cálculo basta substituir o valor encontrado de $\theta = \frac{\pi}{3}$ na equação:

$$A(\theta) = 64 \cdot (1 + \cos(\theta)) \cdot \operatorname{sen}(\theta).$$

Lembrando que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\begin{aligned} A\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 64 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 64 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 48 \cdot \sqrt{3} \\ &\approx 83,1m^2. \end{aligned}$$

Para o cálculo do volume basta utilizar a fórmula do volume de um prisma de base trapezoidal, onde, a área da base já foi encontrada e a altura é o comprimento dado, ambos convertidos em decímetros:

V = área da base $\times$ altura $= 8.310 \cdot 100 = 831.000\ dm^3 = 831.000$ litros.

Problema II. *Em relação ao problema de abastecimento de água da questão anterior, se para a construção do tanque de água, a barra de metal tiver agora* $30\ m$ *e for dobrada ao meio, colocando-se um pedaço de metal na forma triangular na frente e outro igual no fundo de maneira a não vazar, como na figura 14, qual será a distância máxima entre os pontos* A *e* B *para que o tanque tenha volume máximo? Nesta situação qual será o volume máximo de água deste tanque? Lembremos que o comprimento deste tanque é de 10m.*

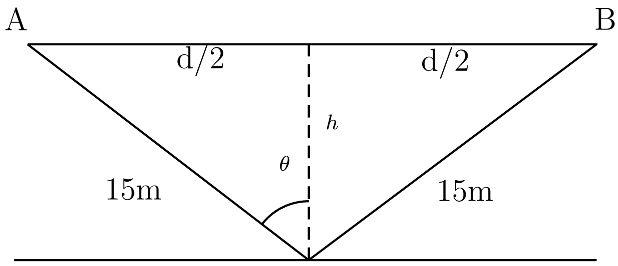

Figura 14 – Ilustração do Problema II.

Observemos que quando a área do triângulo for máxima, o volume de água armazenado no tanque também será. Portanto, vamos escrever a área desse triângulo em função de θ de acordo com a Figura 14:

Usando as razões trigonométricas temos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta) &= \frac{\frac{d}{2}}{15} \\ &\Rightarrow \frac{d}{2} = 15 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ &\Rightarrow d = 2 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}(\theta). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{h}{15} \\ &\Rightarrow h = 15 \cdot \cos(\theta). \end{aligned}$$

Logo, a área do triângulo em função de $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ será:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{d \cdot h}{2} \\ &\Rightarrow A(\theta) = \frac{2 \cdot 15 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot 15 \cdot \cos(\theta)}{2} \\ &\Rightarrow A(\theta) = \frac{225 \cdot (2 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta))}{2} \\ &\Rightarrow A(\theta) = 112,5 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \theta). \end{aligned}$$

Calculemos a primeira derivada e façamos $A'(\theta) = 0$ para determinar os pontos críticos:

$$\begin{aligned} A'(\theta) &= 225 \cdot \cos(2 \cdot \theta) = 0 \\ &\Rightarrow \cos(2 \cdot \theta) = 0 \\ &\Rightarrow 2 \cdot \theta = \frac{\pi}{2} \\ &\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Utilizaremos o **teste da segunda derivada (Teorema 10)** para verificar se o ponto é de máximo ou de mínimo:

$$\begin{aligned} A''(\theta) &= -450 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \theta) \\ &= -450 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \\ &= -450 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \\ &= -450 \cdot 1 \\ &= -450 < 0. \end{aligned}$$

Então, $\theta = \frac{\pi}{4}$ é ponto de máximo e:

$$\begin{aligned} d &= 30 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ &= 30 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{4}) \\ &= 30 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= 15\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Logo, $15\sqrt{2}m$ é a distância entre A e B para que a área do triângulo seja máxima e igual a:

$$\begin{aligned} A(\theta) &= 112,5 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \theta) \\ &= 112,5 \cdot \operatorname{sen}(2 \cdot \frac{\pi}{4}) \\ &= 112,5 \cdot \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) \\ &= 112,5 \cdot 1 \\ &= 112,5m^2. \end{aligned}$$

Portanto, o volume máximo deste tanque de água em forma de um prisma de base triangular será encontrado multiplicando-se a área da base pela altura, convertidas em decímetros cúbicos.

V = área da base $\times$ altura $= 11.250 \cdot 100 = 1.125.000\ dm^3 = 1.125.000$ litros.

Problema III. *Um outdoor de propaganda de 4 m de altura está localizado verticalmente em cima de um pedestal, numa avenida, de tal modo que seu bordo inferior está 5 m acima do nível do olho de um observador, de acordo com a Figura 15 abaixo. Determine a que distância* $\boldsymbol{x}$ *de um ponto diretamente abaixo do outdoor o observador deve se colocar, de modo a maximizar o ângulo* θ *entre as linhas de visão do topo e da base do mesmo.*

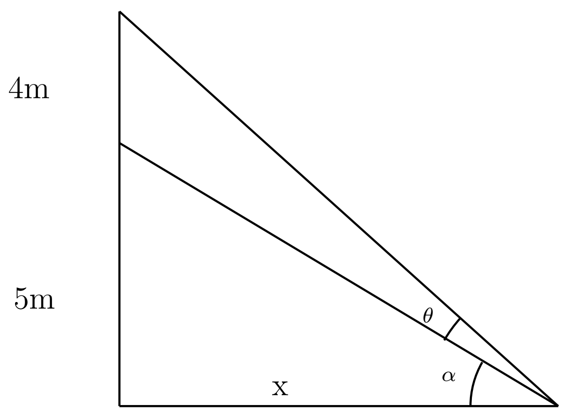

Figura 15 – Ilustração do Problema III.

Aplicando-se as razões trigonométricas, definição de tangente, nos dois triângulos retângulos da figura abaixo, temos que:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\theta) = \frac{4+5}{x} \quad &\Rightarrow \quad \alpha+\theta = \operatorname{atan}(4+5) \\ &\Rightarrow \quad \alpha+\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{9}{x}\right) \\ &\Rightarrow \quad \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{9}{x}\right) - \alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

e

$$\tan(\alpha) = \frac{5}{x} \Rightarrow \alpha = \operatorname{atan}\left(\frac{5}{x}\right). \tag{3}$$

Substituindo (3) em (2), temos:

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{9}{x}\right) - \operatorname{atan}\left(\frac{5}{x}\right), \forall\, x \in (0, +\infty)\,.$$

Vamos determinar os pontos críticos, calculando a primeira derivada e igualando a zero. Lembrando que a derivada de $\operatorname{atan}(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{9}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{9}{x^2}\right) - \frac{1}{1+\left(\frac{5}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{5}{x^2}\right)\\
&= -\frac{9}{x^2+9^2} + \frac{5}{x^2+5^2}\\
&= \frac{9x^2 - 9\cdot 5x^2 + 5x^2 + 5\cdot 9^2}{(x^2+9^2)\cdot(x^2+5^2)}.
\end{aligned}$$

Colocando x^2 em evidência no numerador vem:

$$\begin{aligned}
\theta'(x) &= \frac{(-9+5)\,x^2 + 9\cdot 5\,(-5+9)}{(x^2+9)\cdot(x^2+5)}\\
&= \frac{-4x^2 + 9\cdot 5\cdot 4}{(x^2+9^2)\cdot(x^2+5^2)}\\
&= \frac{4\cdot(-x^2+45)}{(x^2+9^2)\cdot(x^2+5^2)}.
\end{aligned}$$

Analisando esta última expressão, podemos notar que o denominador é um número positivo. Para que $\theta'(x)$ seja igual a zero, basta que:

$$\begin{aligned}
-x^2 + 45 = 0 \;&\Rightarrow\; x^2 = 45\\
&\Rightarrow\; x = \sqrt{45}\\
&\Rightarrow\; x = 3\sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Como x é um número positivo, então $x = 3\sqrt{5}$ que é ponto crítico de $\theta(x)$.

Testando alguns valores na vizinhança de $x = 3\sqrt{5} = 6,7082$, por exemplo, $\theta'(6,7081) = 0,0000006324 > 0$ e $\theta'(6,7083) = -0,00000058451 < 0$, constatamos que esse ponto é máximo de acordo com o **Teorema 9 (teste da primeira derivada)**.

Portanto, o observador deve se colocar a $6,7\ m$ de um ponto diretamente abaixo do outdoor, para maximizar o ângulo de $16,61°$ entre as linhas de visão do topo e da base.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho nos trouxe uma visão geral sobre a evolução dos problemas de otimização, desde a época de Euclides até os dias atuais. Ao tratar especificamente sobre otimização com funções trigonométricas, também esperamos estar contribuindo para enriquecer os conhecimentos sobre Trigonometria de muitos estudantes que chegam às Universidades com deficiência no domínio desse tópico.

Uma outra constatação é que, da época de Euclides até os dias atuais, a forma de resolução dos problemas de otimização foi se tornando mais simples e eficiente, ou seja, antes as demonstrações eram extremamente construtivas, repetitivas e extensas e passaram a ser mais curtas e diretas como notamos na resolução dos problemas do Capítulo 3. Essa evolução aconteceu principalmente após a utilização do conceito de derivada e deste ser aplicado ao cálculo de máximos e mínimos de uma função.

Outros fatos que merecem destaque é que, primeiro, os problemas de otimização surgiram antes de surgir o conceito de derivada, que passou a ser, após o seu aparecimento, um divisor de águas para a resolução desses problemas. O segundo fato é que os problemas de otimização, inicialmente, eram mais abstratos, e, com o passar dos tempos, foram se tornando mais aplicados ao cotidiano, à Física, à Engenharia, Economia e Medicina.

Além disso, analisando o que preconiza os PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) ([11]), a aprendizagem contextualizada visa que o aluno aprenda a mobilizar competências para solucionar problemas com contextos apropriados, de maneira a ser capaz de transferir essa capacidade de resolução de problemas para o mundo social e produtivo. Diante disso, acreditamos que a contextualização e resolução dos problemas de otimização propostos possam contribuir de forma significativa para que o estudante perceba a aplicabilidade e utilidade do tema, no dia a dia, em diversas áreas do conhecimento. Todos esses fatores naturalmente facilitarão o aprendizado.

Acreditamos também ser possível a inclusão de conceitos básicos de limites e derivadas no Ensino Médio, desde que se utilize recursos gráficos como apoio e se faça uma seleção de funções mais simples e elementares para facilitar o entendimento. A noção desses tópicos, neste nível de ensino, é de grande importância para a compreensão de intervalos de crescimento, decrescimento, ponto máximo ou mínimo e ponto crítico de funções. Além do mais, isso proporcionará aos alunos uma melhor preparação e motivação para o ingresso no ensino superior, uma vez que existe também uma grande dificuldade dos alunos da graduação das áreas de exatas quando começam a estudar a disciplina de Cálculo. A inclusão desses novos conceitos poderá ser feita no segundo ano, pois nesta fase os alunos já estudaram os diversos tipos de funções.

Enfim, espera-se que tanto os docentes quanto os discentes possam estar ampliando o seu leque de conhecimentos e melhorando, assim, o ensino e a aprendizagem da Matemática no tópico Resolução de Problemas de Otimização com Funções Trigonométricas.

REFERÊNCIAS

[1] LIMA, Elon L. **Curso de análise**. Volume 1. 11a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[2] LIMA, Elon L. **Análise Real**. Volume 1. 7a ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[3] STEWART, J. **Cálculo: Volume 1**. 5 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

[4] FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Mirian Buss. **Cálculo A**. 6a ed. Makron Books:, 1987.

[5] AYRES Jr., F. **Trigonometria**. Coleção Schaum. Ed, MN Graw-hill do Brasil, Ltda.

[6] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

[7] BOYER, C. B. **The History of the Calculus and its Conceptual Development**. New York: Dover Publications, 1959.

[8] COMMANDINO, Frederico. **Elementos de Geometria**. São Paulo: Edições Cultura, 1944.

[9] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Ed. UNICAMP, 1995.

[10] ORIENTAÇÕES curriculares para o ensino médio (OCEM): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/DPEM, 2006.

[11] PARÂMETROS curriculares nacionais (PCNEM): ciências da natureza, matemática

e suas tecnologias: Secretaria de Educação Media. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[12] THOMAS, George B. **Cálculo**. Volume 1. 11a ed. São Paulo: PEARSON, 2009.

[13] SANTIAGO, Ana Elisa Esteves. **Evolução histórica dos problemas de otimização e o seu tratamento no ensino secundário português nos séculos XX e XXI**. 2008. 285 f. Tese (Doutorado em Educação) Departamento de Didática da Matemática, Universidade de Salamanca, Salamanca. 2008.

[14] POLYA, George. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 2a Ed., 2006.