

---

Equações de diferenças lineares de ordem superior  
e aplicações

*Walter Fernandes da Silva Junior*

---



SERVIÇO DE PÓS-GRADUAÇÃO DO ICMC-USP

Data de Depósito:

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Walter Fernandes da Silva Junior**

## Equações de diferenças lineares de ordem superior e aplicações

Dissertação apresentada ao Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre – Programa de Mestrado Profissional em Matemática. *VERSÃO REVISADA*

Área de Concentração: Matemática

Orientadora: Profa. Dra. Maria Aparecida Bená

**USP – São Carlos**  
**Outubro de 2016**

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca Prof. Achille Bassi  
e Seção Técnica de Informática, ICMC/USP,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

J634e Junior, Walter Fernandes da Silva  
Equações de diferenças lineares de ordem superior  
e aplicações / Walter Fernandes da Silva Junior;  
orientadora Maria Aparecida Bená. - São Carlos - SP,  
2016.  
96 p.

Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-graduação  
em Mestrado Profissional em Matemática em Rede  
Nacional) - Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação, Universidade de São Paulo, 2016.

1. Equação de diferenças. 2. solução. 3. equação  
característica. 4. estabilidade. I. Bená, Maria  
Aparecida, orient. II. Título.

**Walter Fernandes da Silva Junior**

## Higher-order linear difference equations and applications

Master dissertation submitted to the Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação – ICMC-USP, in partial fulfillment of the requirements for the degree of the Master – Program in Mathematics Professional Master. *FINAL VERSION*

Concentration Area: Mathematics

Advisor: Profa. Dra. Maria Aparecida Bená

**USP – São Carlos**  
**October 2016**



*Dedico este trabalho a Deus, a minha família, aos meus amigos e professores do PROFMAT,  
aos meus colegas professores da EE Djanira Velho e a minha namorada.*





# AGRADECIMENTOS

---

---

Em primeiro lugar agradeço a Deus por estar realizando mais este sonho. Só Ele sabe o quanto foi difícil superar todas as dificuldades para ingressar e conseguir terminar mais esta etapa.

Agradeço a Walter Fernandes da Silva e Silvana Couto Dornel, meus pais, por me mostrarem desde cedo que não há conquistas sem batalhas.

Agradeço a minha namorada, Priscylla da Silva Tavares Quadros, por me apoiar e ter paciência nos momentos de sofrimento durante esta difícil caminhada.

Agradeço a todos os professores do PROFMAT, sem exceção, por compartilharem suas experiências abrindo os meus olhos para o conhecimento. Em especial, agradeço à professora Dra Maria Aparecida Bená, minha orientadora.

Agradeço aos amigos do PROFMAT pela amizade e apoio nestes dois anos juntos.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro que viabilizou o tempo semanal ideal de dedicação ao Mestrado.



*“Mas os que esperam no Senhor renovarão as forças, subirão com asas como águias; correrão,  
e não se cansarão; caminharão, e não se fatigarão.”  
(Isaías 40;31)*



# RESUMO

JUNIOR. S. F. W. **Equações de diferenças lineares de ordem superior e aplicações**. 2016. 96 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

As equações de diferenças desempenham papel fundamental na modelagem de problemas em que o tempo é medido em intervalos discretos, por exemplo, horas, dia, mês, ano. Elas têm aplicações em Matemática, Física, Engenharia, Economia, Biologia e Sociologia.

O objetivo desse trabalho é estudar as equações de diferenças lineares de ordem superior, focando aspectos teóricos, métodos de determinação das soluções destas equações e análise da estabilidade de soluções de equações de diferenças de 2<sup>a</sup> ordem com coeficientes constantes. Exemplos e aplicações ilustram a teoria desenvolvida. É apresentada uma proposta didática relacionada ao tema para ser trabalhada no ensino médio.

**Palavras-chave:** Equação de diferenças, solução, equação característica, estabilidade.



# ABSTRACT

JUNIOR. S. F. W. **Equações de diferenças lineares de ordem superior e aplicações**. 2016. 96 f. Dissertação (Mestrado – Programa de Mestrado Profissional em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC/USP), São Carlos – SP.

The difference equations play a key role in shaping problems in which time is measured in discrete intervals, e.g., hour, day, month, year. They may be applied to Mathematics, Physics, Engineering, Economics, Biology and Sociology.

The aim of this work is to study the higher-order linear difference equations, focusing on the theoretical aspects, on the methods used to determine the solutions of these equations and also on the analysis of the stability of 2nd-order difference equations with constants coefficients. Examples and applications depict the developed theory. In addition, a didactic proposal related to the topic to be worked on high school is presented.

**Key-words:** Difference equation, solution, characteristic equation, stability.





# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

---

---

Figura 1 – Diagrama dos casais de coelhos . . . . .	22
Figura 2 – Raízes características reais distintas . . . . .	71
Figura 3 – Raízes características imaginárias . . . . .	72
Figura 4 – A sequência $x_n = 3(2)^n + 2(-1)^n$ é divergente . . . . .	73
Figura 5 – A sequência $x_n = 6(2)^n - 4n(2)^n$ é divergente . . . . .	74
Figura 6 – A solução $x_n = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ é uma sequência convergente . . . . .	75
Figura 7 – A solução $x_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$ é uma sequência divergente . . . . .	75
Figura 8 – A sequência $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ oscila em torno do eixo $n$ . . . . .	76
Figura 9 – Região de estabilidade no plano $(\beta; \alpha)$ . . . . .	84
Figura 10 – Registro do grupo C . . . . .	94
Figura 11 – Registro do grupo E . . . . .	95
Figura 12 – Registro do grupo F . . . . .	96



# LISTA DE TABELAS

---

---

Tabela 1 – Tabela do número de coelhos . . . . .	22
Tabela 2 – Operadores diferença e antidiferença de $x_n$ . . . . .	34
Tabela 3 – Somas finitas . . . . .	36
Tabela 4 – A solução particular $x_{p,n}$ . . . . .	56
Tabela 5 – Função geradora de $f(x)$ . . . . .	63
Tabela 6 – Expansão da função geradora . . . . .	65
Tabela 7 – Salário oferecido e salário exigido . . . . .	87
Tabela 8 – Tabela do Grupo C . . . . .	88
Tabela 9 – Tabela do Grupo E . . . . .	88
Tabela 10 – Tabela do Grupo F . . . . .	89



# SUMÁRIO

---

---

1	INTRODUÇÃO . . . . .	21
2	OPERADORES DIFERENÇA, DE DESLOCAMENTO E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS . . . . .	25
2.1	Os operadores diferença e de deslocamento . . . . .	25
2.2	O operador antidiferença . . . . .	32
2.3	Classificação das equações de diferenças . . . . .	37
2.4	Existência e unicidade de solução . . . . .	37
3	EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR	41
3.1	Resultados iniciais . . . . .	41
3.2	Equações com coeficientes constantes . . . . .	51
3.2.1	<i>Solução geral da equação não homogênea</i> . . . . .	51
3.2.2	<i>Método dos coeficientes indeterminados</i> . . . . .	56
3.2.3	<i>Uso dos operadores <math>\Delta</math> e <math>E</math></i> . . . . .	57
3.2.4	<i>Método das funções geradoras</i> . . . . .	60
3.3	Equações com coeficientes variáveis . . . . .	65
4	EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES DE 2ª ORDEM: ESTABILIDADE E APLICAÇÕES . . . . .	69
4.1	Estabilidade das soluções de equações de 2ª ordem com coeficientes constantes . . . . .	69
4.2	Aplicações . . . . .	79
5	PROPOSTA DIDÁTICA . . . . .	85
5.1	A negociação de salários . . . . .	85
5.1.1	<i>Atividade em sala de aula</i> . . . . .	87
5.1.2	<i>Resultados</i> . . . . .	89
5.1.3	<i>Conclusão</i> . . . . .	89
	REFERÊNCIAS . . . . .	91
	APÊNDICE A ATIVIDADE DIDÁTICA . . . . .	93



---

# INTRODUÇÃO

---

As equações de diferenças têm aplicações em diferentes áreas do conhecimento: na Matemática, Física, Engenharia, Economia, Biologia, em Sociologia, entre outras. Com o surgimento do computador digital, elas adquiriram o seu real valor no contexto atual da matemática. Estas equações, na maioria dos casos, descrevem fenômenos no decorrer do tempo. Este é medido em intervalos regulares de forma a ser caracterizado como uma variável discreta. Por exemplo, ao se estudar o efeito da administração de certa dose de droga em um indivíduo, a unidade de tempo poderá ser representada em horas, para o cálculo do número de células em uma cultura de bactérias, poderá ser dias, salários e prestações são pagos mensalmente ou semanalmente, o imposto de renda é anual, o produto nacional bruto pode ser estipulado por um ano, o lucro líquido de aplicações financeiras pode ser bimestral e etc.

Um dos primeiros problemas envolvendo equações de diferenças surge por volta de 1202, proposto pelo matemático e comerciante da idade média, Leonardo de Pisa (1175-1250), mais conhecido como Fibonacci, o qual constava da seguinte questão:

*Quantos casais de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só casal, se em cada mês cada casal gera um novo casal, que se torna produtivo a partir do segundo mês?*

Considera-se que os coelhos estão em um local fechado de forma permanente e que não há casos de mortalidade dos mesmos. Se  $n$  representa o número de meses, a Tabela 1 e a Figura 1 retratam esta situação.

Assim, 377 é a resposta do problema proposto por Fibonacci. Observe que o novo valor pode ser determinado adicionando-se os dois últimos valores, ou seja, se  $F_n$  representa os números de casais de coelhos no mês  $n$ , então

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Algum tempo depois foi acrescentado no início da sequência o número 1, o que originou os números de Fibonacci, que são  $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ .

$n$	pares de coelhos
0	1
1	2
2	3
3	5
4	8
$\vdots$	$\vdots$
12	377

Tabela 1 – Tabela do número de coelhos

Fonte: (LUIS, 2006)



Figura 1 – Diagrama dos casais de coelhos

Mais de 600 anos depois, em 1843, Jacques Binet publicou uma fórmula que determina o  $n$ -ésimo número de Fibonacci, sem a determinação de todos os outros os números anteriores da sequência. Essa fórmula é a solução da equação de diferenças citada anteriormente, e é dada por

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

Tal expressão denomina-se solução particular da equação de Fibonacci. Para a determinação de uma solução particular de uma equação de diferenças faz-se necessário a existência de condições iniciais. No caso da solução geral, esta depende de constantes arbitrárias e o número destas é o mesmo da ordem da equação. Para se determinar esta solução, torna-se necessário a aplicação de métodos específicos.



O seguinte trabalho está voltado ao estudo das equações de diferenças lineares de ordem superior e algumas aplicações. Visando à apresentação do trabalho em questão, segue uma breve descrição da abordagem de cada capítulo.

O Capítulo 1 consiste na Introdução.

No Capítulo 2 são introduzidos conceitos básicos das equações de diferenças, contendo as definições de operadores diferença, antidiferença e de deslocamento, além de resultados sobre existência e unicidade de solução de uma equação de diferenças linear.

O Capítulo 3 aborda a teoria fundamental para a resolução das equações de diferenças lineares de ordem superior. São estudados métodos de resolução para as equações homogêneas, não homogêneas, com coeficientes constantes e com coeficientes variáveis.

O Capítulo 4 aborda a estabilidade das soluções das equações de diferenças de 2ª ordem com coeficientes constantes. Exemplos e aplicações são apresentados para ilustrar a teoria desenvolvida.

O Capítulo 5 apresenta uma proposta didática desenvolvida em sala de aula, visando a aplicação do modelo de *negociação de salários*, o qual é baseado em uma equação de diferenças de 2ª ordem com coeficientes constantes.

O Apêndice contém os anexos dos trabalhos desenvolvidos pelos alunos.



---

# OPERADORES DIFERENÇA, DE DESLOCAMENTO E EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS

---

Neste capítulo, são abordadas definições que servem de base para o desenvolvimento do trabalho. São introduzidos os operadores diferença, antidiferença e de deslocamento e a relação destes com as equações de diferenças.

As propriedades destes operadores são fundamentais para o estudo das equações de diferenças. Quando possível, é feito um paralelo entre estas propriedades e as propriedades do cálculo diferencial e integral. Exemplos são apresentados para ilustrar esses conceitos. São classificados alguns tipos de equações de diferenças e são introduzidos resultados da existência e unicidade de solução de equações lineares.

Mais detalhes sobre a teoria de equações de diferenças podem ser encontrados nas referências ([FERNANDES, 2015](#)), ([LUIS, 2006](#)) e ([ELAYDI, 2004](#)).

## 2.1 Os operadores diferença e de deslocamento

Inicialmente, adota-se que a sequência de termos  $x_0, x_1, x_2, \dots$  será representada por  $(x_n)_0^\infty$  ou, simplesmente,  $x_n, n \in \mathbb{Z}_0^+$ .

**Definição 1.** *Chama-se primeira diferença da sequência  $(x_n)_0^\infty$  à sequência  $(\Delta x_n)_0^\infty$ , dada pela seguinte expressão*

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad n \in \mathbb{Z}_0^+. \quad (2.1)$$

A segunda diferença  $(\Delta^2 x_n)_0^\infty$  representa a primeira diferença da sequência  $(\Delta x_n)_0^\infty$ , ou seja,

$$\begin{aligned}\Delta^2 x_n &= \Delta(\Delta x_n) = \Delta x_{n+1} - \Delta x_n \\ &= x_{n+2} - x_{n+1} - (x_{n+1} - x_n) \\ &= x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n.\end{aligned}$$

De forma geral, para qualquer  $k \in \mathbb{Z}^+$ , a diferença de ordem  $k$  é representada por

$$\begin{aligned}\Delta^k x_n &= \Delta(\Delta^{k-1} x_n) \\ &= \Delta^{k-1} x_{n+1} - \Delta^{k-1} x_n, \quad n = k, k+1, \dots\end{aligned}$$

**Definição 2.** Chama-se equação de diferenças a equação que envolve o termo  $x_n$  e as suas diferenças  $\Delta x_n, \Delta^2 x_n, \dots$

Por exemplo,

$$2\Delta^2 x_n - 3\Delta x_n + 5x_n = 0 \quad (2.2)$$

é uma equação de diferenças.

Pode-se expressar cada  $x_{n+i}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , em função de  $x_n$  e de suas diferenças.

Assim,

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \Delta x_n \\ x_{n+2} &= x_{n+1} + \Delta x_{n+1} \\ &= x_n + \Delta x_n + \Delta x_n + \Delta^2 x_n \\ &= x_n + 2\Delta x_n + \Delta^2 x_n. \\ &\vdots\end{aligned}$$

Trabalhando estas relações e substituindo na equação de diferenças, esta transforma-se numa equação que engloba alguns dos  $n$ -ésimos termos da sucessão  $(x_n)_0^\infty$ . Por exemplo, a equação (2.2) pode transformar-se na equação

$$2(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) - 3(x_{n+1} - x_n) + 5x_n = 0,$$

ou seja,

$$2x_{n+2} - 7x_{n+1} + 10x_n = 0. \quad (2.3)$$

**Definição 3.** Denomina-se operador diferença da sequência  $(x_n)_0^\infty$  a primeira diferença da sequência  $(x_n)_0^\infty$ .

Desta forma, também se representa o operador diferença da sequência  $(x_n)_0^\infty$  por

$$\Delta x_n = x_{n+1} - x_n, \quad n \in \mathbb{Z}_0^+. \quad (2.4)$$

**Definição 4.** Denomina-se operador deslocamento da sequência  $(x_n)_0^\infty$ , e representa-se por  $Ex_n$ , a expressão

$$Ex_n = x_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_0^+. \quad (2.5)$$

Sendo  $I$  o operador identidade, ou seja,  $Ix_n = x_n$ , segue que  $\Delta^0 x_n = Ix_n = x_n$  e  $E^0 x_n = Ix_n = x_n$ . Tem-se que  $\Delta^0 = E^0 = I$ , por convenção.

**Teorema 1.** Se  $E$  é o operador deslocamento da sequência  $(x_n)_0^\infty$ , então

$$E^k x_n = x_{n+k}, \quad k \in \mathbb{Z}_0^+. \quad (2.6)$$

*Demonstração.* A demonstração é realizada por indução em  $k$ . Para  $k = 0$  é trivial. Suponha  $E^k x_n = x_{n+k}$  (hipótese de indução). Desta forma,

$$E^{k+1} x_n = E(E^k x_n) = E x_{n+k} = x_{n+k+1},$$

e assim, é verdadeiro que  $E^{k+1} x_n = x_{n+k+1}$  (tese de indução).  $\square$

**Definição 5.** Dois operadores  $O_1$  e  $O_2$  são equivalentes se, para qualquer sequência  $x_n$  a que são aplicáveis, verifica-se a relação  $O_1 x_n = O_2 x_n, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Para representar a equivalência de dois operadores  $O_1$  e  $O_2$ , escreve-se

$$O_1 \equiv O_2.$$

Desta forma,

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n = (I + \Delta)x_n,$$

e, assim, verifica-se a equivalência funcional

$$\Delta \equiv E - I \quad \text{ou} \quad E \equiv \Delta + I.$$

Os operadores  $\Delta$  e  $E$  comutam entre si uma vez que, pelo Teorema 2

$$\Delta E x_n = \Delta[E x_n] = \Delta[x_{n+1}] = x_{n+2} - x_{n+1}$$

e

$$E \Delta x_n = E[\Delta x_n] = E[x_{n+1} - x_n] = x_{n+2} - x_{n+1}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \Delta^m \Delta^n &\equiv \Delta^n \Delta^m \equiv \Delta^{m+n} \\ E^m E^n &\equiv E^n E^m \equiv E^{m+n}. \end{aligned}$$

Pelo binômio de Newton, com  $k \in \mathbb{Z}^+$ , segue que

$$\Delta^k x_n = (E - I)^k x_n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} E^{k-i} (-I)^i x_n = \sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} x_{n+k-i},$$

e

$$E^k x_n = (\Delta + I)^k x_n = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \Delta^i x_n.$$

**Exemplo 1.** Cálculo de  $\Delta^3 \sin(n\theta)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ .

$$\begin{aligned}\Delta^3 \sin(n\theta) &= \sum_{i=0}^3 (-1)^i \binom{3}{i} \sin[(n+3-i)\theta] \\ &= \sin[(n+3)\theta] - 3\sin[(n+2)\theta] + 3\sin[(n+1)\theta] - \sin(n\theta).\end{aligned}$$

**Teorema 2.** Os operadores  $\Delta$  e  $E$  são lineares.

*Demonstração.* Sejam  $(x_n)_0^\infty$  e  $(y_m)_0^\infty$  duas seqüências quaisquer. Para provar que os operadores são lineares, deve-se mostrar que

$$\Delta[ax_n + by_m] = a\Delta x_n + b\Delta y_m$$

e

$$E[ax_n + by_m] = aEx_n + bEy_m,$$

para quaisquer constantes  $a$  e  $b$ .

Para o operador diferença tem-se

$$\begin{aligned}\Delta[ax_n + by_m] &= (ax_{n+1} + by_{m+1}) - (ax_n + by_m) \\ &= a(x_{n+1} - x_n) + b(y_{m+1} - y_m) \\ &= a\Delta x_n + b\Delta y_m,\end{aligned}$$

e no caso do operador deslocamento,

$$\begin{aligned}E[ax_n + by_m] &= ax_{n+1} + by_{m+1} \\ &= aEx_n + bEy_m.\end{aligned}$$

□

**Teorema 3.** (Soma de Abel) Sejam  $(x_n)_0^\infty$  e  $(y_n)_0^\infty$  duas seqüências quaisquer. Então

$$\sum_{k=1}^n x_k y_k = x_{n+1} \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n \left( \Delta x_k \sum_{r=1}^k y_r \right).$$

*Demonstração.*

$$\begin{aligned}x_{n+1} \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n \left( \Delta x_k \sum_{r=1}^k y_r \right) &= x_{n+1} \sum_{k=1}^n y_k - \sum_{k=1}^n \left( (x_{k+1} - x_k) \sum_{r=1}^k y_r \right) \\ &= x_{n+1} \sum_{k=1}^n y_k - (x_2 - x_1)y_1 - \\ &\quad (x_3 - x_2)(y_1 + y_2) - \dots - (x_{n+1} - x_n)(y_1 + \dots + y_n) \\ &= x_{n+1} \sum_{k=1}^n y_k + \sum_{k=1}^n x_k y_k - x_{n+1} \sum_{k=1}^n y_k \\ &= \sum_{k=1}^n x_k y_k.\end{aligned}$$

□

**Lema 1.** Se  $n_0 < n \in \mathbb{Z}_0^+$ , então  $\sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k = x_n - x_{n_0}$ .

*Demonstração.* Seja  $n_0 < n \in \mathbb{Z}_0^+$ . Então

$$\begin{aligned} \sum_{k=n_0}^{n-1} \Delta x_k &= \sum_{k=n_0}^{n-1} x_{k+1} - x_k \\ &= x_{n_0+1} - x_{n_0} + x_{n_0+2} - x_{n_0+1} + x_{n_0+3} - x_{n_0+2} + \dots + x_n - x_{n-1} \\ &= x_n - x_{n_0}. \end{aligned}$$

□

Estes operadores podem ser aplicados às funções de variável discreta.

Seja  $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$  um polinômio de grau  $k$  com coeficientes reais e  $k \in \mathbb{Z}^+$ . O operador diferença de  $p(n)$  é dado por

$$\begin{aligned} \Delta p(n) &= p(n+1) - p(n) \\ &= \left( a_0(n+1)^k + a_1(n+1)^{k-1} + \dots + a_{k-1}(n+1) + a_k \right) \\ &\quad - \left( a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_{k-1}n + a_k \right). \end{aligned}$$

Nota-se que

$$\begin{aligned} (n+1)^k &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^{k-i} \\ &= \binom{k}{0} n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \binom{k}{2} n^{k-2} + \dots + \binom{k}{k-1} n + 1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (n+1)^{k-1} &= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^{k-1-i} \\ &= \binom{k-1}{0} n^{k-1} + \binom{k-1}{1} n^{k-2} + \binom{k-1}{2} n^{k-3} + \dots + \binom{k-1}{k-2} n + 1. \end{aligned}$$

Por substituição obtém-se

$$\Delta p(n) = a_0 k n^{k-1} + q_1(n), \quad (2.7)$$

onde  $q_1(n)$  é um polinômio em função de  $n$ , de grau  $k-2$ , com coeficientes reais.

A segunda diferença do polinômio escreve-se como

$$\begin{aligned} \Delta^2 p(n) &= \Delta(\Delta p(n)) \\ &= \Delta[a_0 k n^{k-1} + q_1(n)] \\ &= a_0 k [(n+1)^{k-1} - n^{k-1}] + q_1(n+1) - q_1(n). \end{aligned}$$

Como  $(n+1)^{k-1} - n^{k-1} = (k-1)n^{k-2} + \dots$  "um polinômio de grau  $k-3$ " e  $q_1(n+1) - q_1(n)$  é um polinômio de grau  $k-3$ , segue que

$$\Delta^2 p(n) = a_0 k(k-1) + q_2(n),$$

onde  $q_2(n)$  é um polinômio em função de  $n$  de grau  $k-3$ , com coeficientes reais.

Realizando  $k$  vezes o processo anterior, tem-se

$$\Delta^k p(n) = a_0 k! \quad (2.8)$$

e

$$\Delta^{k+i} p(n) = 0 \quad \text{para } i \geq 1. \quad (2.9)$$

Assim, o seguinte teorema fica provado.

**Teorema 4.** *Seja  $p(n) = a_0 n^k + a_1 n^{k-1} + \dots + a_k$  um polinômio de grau  $k$  com coeficientes reais e  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Então,  $\Delta^k p(n) = a_0 k!$  e  $\Delta^{k+i} p(n) = 0$  para  $i \geq 1$ .*

Com base neste teorema, há outro que pode ser considerado como o equivalente discreto do desenvolvimento de uma função em série de Mac-Laurin. Antes de enunciar este teorema, define-se, em primeiro lugar, potência fatorial.

**Definição 6.** *Denomina-se potência fatorial descendente de  $n$  de grau  $k$ , e representa-se por  $n^{(k)}$ , à expressão*

$$n^{(k)} = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n-i), \quad n, k \in \mathbb{Z}^+.$$

A potência fatorial ascendente é a expressão

$${}^{(k)}n = n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1} (n+i), \quad n, k \in \mathbb{Z}^+.$$

Observe que  $n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} = {}^{(k)}(n+k-1)$  e, desta forma,  $n^{(n)} = n! = {}^{(n)}1$ , ou seja, à potência fatorial descendente de grau  $n$  é igual à potência fatorial ascendente de 1 de grau  $n$ . Por convenção, escreve-se  $n^{(0)} = 1 = {}^{(0)}n$ .

**Teorema 5.** *(Fórmula de Mac-Laurin discreta) Seja  $p(n)$  um polinômio de grau  $k$  com coeficientes reais e  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Então*

$$p(n) = p(0) + \frac{\Delta p(0)}{1!}n + \frac{\Delta^2 p(0)}{2!}n^{(2)} + \frac{\Delta^3 p(0)}{1!}n^{(3)} + \dots + \frac{\Delta^k p(0)}{k!}n^{(k)}.$$



*Demonstração.* Seja  $p(n) = b_0 + b_1n + b_2n^{(2)} + b_3n^{(3)} + \dots + b_kn^{(k)}$  um polinômio de grau  $k$ . Tem-se  $p(0) = b_0$ .

Baseado no Teorema 4, tem-se  $\Delta^k p(n) = b_k k!$ . Assim, para  $n = 0$  segue que

$$\Delta^m p(0) = b_m m!, \quad 1 \leq m \leq k, \quad k \in \mathbb{Z}^+,$$

ou seja,

$$b_m = \frac{\Delta^m p(0)}{m!}, \quad 1 \leq m \leq k, \quad k \in \mathbb{Z}^+.$$

Assim,

$$p(n) = p(0) + \frac{\Delta p(0)}{1!}n + \frac{\Delta^2 p(0)}{2!}n^{(2)} + \frac{\Delta^3 p(0)}{1!}n^{(3)} + \dots + \frac{\Delta^k p(0)}{k!}n^{(k)}.$$

□

Considere, a seguir, o operador polinomial

$$p(E) = a_0 E^k + a_1 E^{k-1} + \dots + a_k I, \quad k \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.10)$$

Para  $b \in \mathbb{R}$ , tem-se que

$$\begin{aligned} p(E)b^n &= a_0 E^k b^n + a_1 E^{k-1} b^n + \dots + a_k I b^n \\ &= a_0 b^{n+k} + a_1 b^{n+k-1} + \dots + a_k b^n \\ &= b^n (a_0 b^k + a_1 b^{k-1} + \dots + a_k) \end{aligned}$$

ou seja,

$$p(E)b^n = b^n p(b). \quad (2.11)$$

Generalizando este resultado, tem-se o seguinte teorema.

**Teorema 6.** *Seja  $p(E)$  o operador polinomial definido na expressão (2.10) e  $g(n)$  uma função de argumento discreto. Então*

$$p(E)(b^n g(n)) = b^n p(bE)g(n).$$

*Demonstração.* Sabe-se que  $E(x_n y_n) = x_{n+1} y_{n+1} = E x_n E y_n$ . Assim,

$$\begin{aligned} p(E)(b^n g(n)) &= a_0 E^k b^n g(n) + a_1 E^{k-1} b^n g(n) + \dots + a_k I b^n g(n) \\ &= a_0 b^{n+k} E^k g(n) + a_1 b^{n+k-1} E^{k-1} g(n) + \dots + a_k b^n g(n) \\ &= b^n (a_0 b^k E^k g(n) + a_1 b^{k-1} E^{k-1} g(n) + \dots + a_k g(n)) \\ &= b^n p(bE)g(n). \end{aligned}$$

□

Também é possível se estabelecer regras para o produto e para o cociente do operador diferença. Estas são apresentadas no próximo teorema. Percebe-se que existe semelhança entre estas regras e as do cálculo diferencial e integral.

**Teorema 7.** *Sejam  $(x_n)_0^\infty$  e  $(y_n)_0^\infty$  duas seqüências quaisquer. Então,*

$$\begin{aligned} 1. \Delta[x_n y_n] &= E x_n \Delta y_n + y_n \Delta x_n, \\ 2. \Delta \left[ \frac{x_n}{y_n} \right] &= \frac{y_n \Delta x_n - x_n \Delta y_n}{y_n E y_n}, y_n \neq 0. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Sejam  $(x_n)_0^\infty$  e  $(y_n)_0^\infty$  duas seqüências quaisquer.

1.

$$\begin{aligned} \Delta[x_n y_n] &= x_{n+1} y_{n+1} - x_n y_n \\ &= x_{n+1} y_{n+1} - x_{n+1} y_n + x_{n+1} y_n - x_n y_n \\ &= x_{n+1} (y_{n+1} - y_n) + y_n (x_{n+1} - x_n) \\ &= E x_n \Delta y_n + y_n \Delta x_n. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \Delta \left[ \frac{x_n}{y_n} \right] &= \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} - \frac{x_n}{y_n} = \frac{x_{n+1} y_n - x_n y_{n+1}}{y_n y_{n+1}} \\ &= \frac{x_{n+1} y_n - x_n y_n + x_n y_n - x_n y_{n+1}}{y_n y_{n+1}} \\ &= \frac{y_n \Delta x_n - x_n \Delta y_n}{y_n E y_n}, y_n \neq 0. \end{aligned}$$

□

## 2.2 O operador antidiferença

**Definição 7.** *Se  $\Delta X_n = x_n$ , então a antidiferença de  $x_n$  é  $X_n + c$  e é representada pela expressão*

$$\Delta^{-1} x_n = X_n + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} x_n &= \Delta(X_n + c) = \Delta X_n + \Delta c = x_n \\ \Delta^{-1} \Delta X_n &= \Delta^{-1} x_n = X_n + c. \end{aligned}$$

Observe que  $\Delta \Delta^{-1} = I$  e,  $\Delta^{-1} \Delta \neq I$ . Portanto, os operadores  $\Delta$  e  $\Delta^{-1}$  não têm a propriedade comutativa.

São apresentados alguns exemplos envolvendo estes operadores.

**Exemplo 2.** *Cálculo dos operadores  $\Delta$  e  $\Delta^{-1}$  da seqüência  $(1)_0^\infty$ .*

Como  $x_n = 1, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ , então  $\Delta x_n = \Delta 1 = 0$ . Sabendo que  $\Delta n = 1$ , vem que  $\Delta^{-1} 1 = n + c$ .

**Exemplo 3.** Cálculo dos operadores  $\Delta$  e  $\Delta^{-1}$  da seqüência  $(n)_0^\infty$ .

Sabe-se que  $\Delta n = 1$ . Para se encontrar  $\Delta^{-1}n$ , note que

$$\Delta n^2 = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1.$$

Assim,  $\Delta^{-1}(2n+1) = n^2 + c_1$ , ou seja,  $2\Delta^{-1}n + \Delta^{-1}1 = n^2 + c_1$ . Portanto,  $2\Delta^{-1}n = -n + n^2 + c_2$  e, desta forma,  $\Delta^{-1}n = \frac{n(n-1)}{2} + c$ .

**Exemplo 4.** Cálculo dos operadores  $\Delta$  e  $\Delta^{-1}$  da seqüência  $(a^n)_0^\infty, n \in \mathbb{Z}_0^+$  e  $a \neq 1$ .

Note que  $\Delta a^n = (a-1)a^n$ . Aplicando o operador  $\Delta^{-1}$  nos dois membros, tem-se que

$$(a-1)\Delta^{-1}a^n = a^n + c_1 \Leftrightarrow \Delta^{-1}a^n = \frac{a^n}{a-1} + c, \quad a \neq 1.$$

**Exemplo 5.** Cálculo dos operadores  $\Delta$  e  $\Delta^{-1}$  da seqüência  $(na^n)_0^\infty, a \neq 1$ .

Tem-se que

$$\Delta na^n = na^n(a-1) + a^{n+1}.$$

Aplicando  $\Delta^{-1}$ , vem que

$$na^n + c_1 = (a-1)\Delta^{-1}na^n + a\Delta^{-1}a^n.$$

Assim,

$$\Delta^{-1}na^n = \frac{a^n}{a-1} \left( n - \frac{a}{a-1} \right) + c, \quad a \neq 1.$$

Na Tabela 2 estão representados, de forma resumida, os operadores  $\Delta$  e  $\Delta^{-1}$  de algumas seqüências  $x_n$ .

O somatório  $\sum_{i=m}^{n-1} x_i$ , com  $m, n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $m < n$ , pode ser determinado por meio do operador antidiferença. O seguinte teorema apresenta esse resultado.

**Teorema 8.** (Teorema Fundamental) Se  $\Delta X_n = x_n$  e  $m < n$  com  $m, n \in \mathbb{Z}_0^+$ , então

$$\sum_{i=m}^{n-1} x_i = \Delta^{-1}x_i|_m^n = X_n - X_m. \quad (2.12)$$

*Demonstração.* Por hipótese tem-se que

$$\begin{aligned} \sum_{i=m}^{n-1} x_i &= \sum_{i=m}^{n-1} (X_{i+1} - X_i) \\ &= X_{m+1} - X_m + X_{m+2} - X_{m+1} + \dots + X_n - X_{n-1} \\ &= X_n - X_m \\ &= \Delta^{-1}x_n - \Delta^{-1}x_m \\ &= \Delta^{-1}x_i|_m^n. \end{aligned}$$

□

$\{x_n\}_0^\infty$	$\Delta x_n$	$\Delta^{-1}x_n$
1	0	$n + c$
$n$	1	$\frac{n(n-1)}{2} + c$
$a^n$	$(a-1)a^n$	$\frac{a^n}{a-1} + c, a \neq 1$
$(-1)^n$	$2(-1)^{n+1}$	$\frac{1}{2}(-1)^{n+1} + c$
$na^n$	$na^n(a-1) + a^{n+1}$	$\frac{a^n}{a-1}\left(n - \frac{a}{a-1}\right) + c, a \neq 1$
$n(-1)^n$	$(-1)^{n+1}(2n+1)$	$\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\left(n - \frac{1}{2}\right) + c$
$(n+b)^{(k)}$	$k(n+b)^{k-1}$	$\frac{(n+b)^{(k+1)}}{k+1} + c, k \neq -1$
$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k-1}$	$\binom{n}{k+1} + c$
$(an+b)^{(k)}$	$ka(an+b)^{(k)}$	$\frac{(an+b)^{(k+1)}}{a(k+1)} + c$
$\log(n+a)$	$\log\left(1 + \frac{1}{n+a}\right)$	$\log \Gamma(n+a) + c$
$\cos(an+b)$	$-2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \sin\left(an - \frac{a}{2} + b\right)$	$\frac{\sin\left(an - \frac{a}{2} + b\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2}\right)} + c$
$\sin(an+b)$	$2 \sin\left(\frac{a}{2}\right) \cos\left(an - \frac{a}{2} + b\right)$	$-\frac{\cos\left(an - \frac{a}{2} + b\right)}{2 \sin\left(\frac{a}{2}\right)} + c$

Tabela 2 – Operadores diferença e antidiferença de  $x_n$ 

Fonte: (LUIS, 2006)

Fazendo  $m = 0$  em (2.12), tem-se

$$\Delta \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_i \right) = \Delta(X_n - X_0) = \Delta X_n - \Delta X_0 = x_n. \quad (2.13)$$

Aplicando  $\Delta^{-1}$  nos dois membros, obtém-se a fórmula

$$\Delta^{-1}x_n = \sum_{i=0}^{n-1} x_i + c, \quad (2.14)$$

para alguma constante arbitrária  $c$ . Desta forma, observa-se que o operador  $\Delta^{-1}$  representa uma operação semelhante à integral indefinida no cálculo integral, na versão discreta, da mesma forma que a expressão (2.12) é semelhante à integral definida, também na versão discreta.

Observa-se que na fórmula (2.12), se  $n-1 = m$ , então  $\sum_{i=m}^m x_i = X_{m+1} - X_m = \Delta X_m = x_m$ .

Se  $n = m$ , então  $\sum_{i=m}^{m-1} x_i = X_m - X_m = 0$ .

De (2.14), segue que o operador  $\Delta^{-1}$  é linear.

De fato,

$$\begin{aligned} \Delta^{-1}(ax_n + by_n) &= \sum_{i=0}^{n-1} ax_i + by_i + c \\ &= a \sum_{i=0}^{n-1} x_i + b \sum_{i=0}^{n-1} y_i + c \\ &= a\Delta^{-1}x_n + b\Delta^{-1}y_n, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Nos próximos exemplos, calcula-se a soma dos  $n + 1$  primeiros termos de uma sequência qualquer, utilizando o operador  $\Delta^{-1}$ .

**Exemplo 6.** Cálculo da soma geométrica  $\sum_{i=0}^n ar^i$ .

$$\sum_{i=0}^n ar^i = a\Delta^{-1}r^i|_0^{n+1} = a\frac{r^i}{r-1}|_0^{n+1} = a\left(\frac{r^{n+1}}{r-1} - \frac{1}{r-1}\right) = \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r-1}, \quad r \neq 1.$$

Note que se  $r = 1$ , então  $\sum_{i=0}^n a = a\Delta^{-1}1|_0^{n+1} = a(n+1)$ .

**Exemplo 7.** Cálculo da soma dos números ímpares  $\sum_{i=1}^n (2i-1)$ .

$$\sum_{i=1}^n (2i-1) = \Delta^{-1}(2i-1)|_1^{n+1} = \left(2\frac{i(i-1)}{2} - i\right)|_1^{n+1} = (i^2 - 2i)|_1^{n+1} = n^2.$$

**Exemplo 8.** Cálculo da soma  $\sum_{i=0}^n (a+bi)$ .

$$\sum_{i=0}^n (a+bi) = \Delta^{-1}(a+bi)|_0^{n+1} = \left(ai + b\frac{i(i-1)}{2}\right)|_0^{n+1} = a(n+1) + b\frac{n(n+1)}{2}.$$

**Exemplo 9.** Cálculo da soma dos quadrados  $\sum_{i=0}^n i^2$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i^2 &= \sum_{i=0}^n (i + i(i-1)) = \Delta^{-1}(i^{(1)} + i^{(2)})|_1^{n+1} \\ &= \frac{i^{(2)}}{2} + \frac{i^{(3)}}{3}|_0^{n+1} = \frac{(n+1)^{(2)}}{2} + \frac{(n+1)^{(3)}}{3} \\ &= \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{3} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

**Exemplo 10.** Cálculo da soma dos cubos  $\sum_{i=0}^n i^3$ .

Sabe-se que  $i^3 = i^{(1)} + 3i^{(2)} + i^{(3)}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n i^3 &= \Delta^{-1}(i^{(1)} + 3i^{(2)} + i^{(3)})|_1^{n+1} \\ &= \frac{i(i-1)}{2} + i(i-1)(i-2) + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{4}|_0^{n+1} \\ &= \frac{i^2(i-1)^2}{4}|_0^{n+1} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \end{aligned}$$

**Exemplo 11.** Cálculo da soma  $\sum_{i=0}^n i^4$ .

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^n i^4 &= \sum_{i=0}^n (i^{(4)} + 6i^{(3)} + 7i^{(2)} + i) = \Delta^{-1}(i^{(4)} + 6i^{(3)} + 7i^{(2)} + i)|_0^{n+1} \\ &= \frac{6i^{(5)} + 45i^{(4)} + 70i^{(3)} + 15i^{(2)}}{30} \Big|_0^{n+1} = \frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30}.\end{aligned}$$

**Exemplo 12.** Cálculo da soma dos cossenos  $\sum_{i=1}^n \cos(ai)$ .

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \cos(ai) &= \Delta^{-1} \cos(ai) \Big|_1^{n+1} = \frac{\sin(ai - \frac{a}{2})}{2 \sin(\frac{a}{2})} \Big|_1^{n+1} \\ &= \frac{\sin(na + \frac{a}{2}) - \sin(\frac{a}{2})}{2 \sin(\frac{a}{2})}.\end{aligned}$$

Na Tabela 3 é apresentado um resumo destas e de outras somas.

Soma	Resultado
$\sum_{i=0}^n ar^i$	$\begin{cases} \frac{a(r^{n+1} - 1)}{r - 1} & \text{se } r \neq 1 \\ a(n + 1) & \text{se } r = 1 \end{cases}$
$\sum_{i=0}^n (a + bi)$	$a(n + 1) + b \frac{n(n + 1)}{2}$
$\sum_{i=0}^n i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=0}^n i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$
$\sum_{i=0}^n i^4$	$\frac{n(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1)}{30}$
$\sum_{i=1}^n ir^i$	$\frac{(r-1)(n+1)r^{n+1} - r^{n+2} + r}{(r-1)^2}, r \neq 1$
$\sum_{i=1}^n i^2 r^i$	$\frac{r^{n+1}(1+r+2n(1-r)+n^2(1-r)^2) - r(r+1)}{(1-r)^3}, r \neq 1$
$\sum_{i=1}^n \log i$	$\log \Gamma(n + 1)$
$\sum_{i=1}^n i^{(k)}$	$\frac{(n+1)^{(k+1)} - 1}{k+1}$
$\sum_{i=1}^n \sin(ai + b)$	$\frac{-\cos(an + \frac{a}{2} + b) + \cos(\frac{a}{2} + b)}{2 \sin(\frac{a}{2})}$
$\sum_{i=1}^n \cos(ai)$	$\frac{\sin(na + \frac{a}{2} + b) - \sin(\frac{a}{2} + b)}{2 \sin(\frac{a}{2})}$

Tabela 3 – Somas finitas

Fonte: (LUIS, 2006)

## 2.3 Classificação das equações de diferenças

Sabe-se que uma equação de diferenças pode ser escrita com o envolvimento de alguns  $n$ -ésimos termos da sequência  $(x_n)_0^\infty$ . Em seguida, é apresentada uma definição alternativa à Definição 2 para equação de diferenças.

**Definição 8.** *Uma equação de diferenças para uma variável independente  $n \in \mathbb{Z}_0^+$  e para  $x_n \in \mathbb{R}$  desconhecido, é uma relação funcional da forma*

$$f(n, x_{n+k}, x_{n+k-1}, \dots, x_n) = 0. \quad (2.15)$$

**Definição 9.** *A ordem de (2.15) é definida pela diferença entre o maior e o menor índice dos termos da sequência  $(x_n)_0^\infty$ .*

Por exemplo, a equação  $x_{n+2} + x_n = 0$  é de segunda ordem.

**Definição 10.** *A equação (2.15) é linear, se  $f$  é linear nas variáveis  $x_{n+k}, \dots, x_n$ , caso contrário a equação é não linear.*

Mais especificamente, uma equação de diferenças de ordem  $k$  é linear se pode ser escrita na forma

$$f_0(n)x_{n+k} + f_1(n)x_{n+k-1} + \dots + f_{k-1}(n)x_{n+1} + f_k(n)x_n = g(n), \quad (2.16)$$

onde  $f_i(n), 0 \leq i \leq k$  e  $g(n)$  são funções de  $\mathbb{Z}_0^+ \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f_0(n) \neq 0$  e  $f_k(n) \neq 0$ .

**Definição 11.** *Se  $g(n) = 0$  em (2.16), diz-se que a equação é homogênea, caso contrário, ela é chamada não homogênea.*

**Definição 12.** *Se  $f$  não depende diretamente de  $n$  na equação (2.15), então diz-se que a equação é autônoma, caso contrário, a equação é não autônoma.*

As equações

$$x_{n+2} + 5x_n = n \quad \text{e} \quad nx_{n+1} + n^2x_n = 0$$

são não autônomas e lineares, sendo a primeira não homogênea, e a segunda, homogênea.

A equação

$$x_n x_{n+2} + 5x_n = \sin(x_n)$$

é autônoma, não linear e não homogênea.

## 2.4 Existência e unicidade de solução

**Definição 13.** *Uma sequência  $(x_n)_0^\infty$  é solução de uma equação de diferenças se, para todos os valores de  $n$ ,  $x_n$  satisfaz a equação.*

Por exemplo, a equação  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$  tem como solução

$$x_n = 2^n(c_1 + c_2n),$$

sendo  $c_1$  e  $c_2$  duas constantes arbitrárias.

De fato, substituindo os valores de  $x_{n+2}, x_{n+1}, x_n$  na equação, tem-se

$$\begin{aligned} x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n &= 2^{n+2}(c_1 + c_2n + 2c_2) - 2^{n+3}(c_1 + c_2n + c_2) + 2^{n+2}(c_1 + c_2n) \\ &= 2^{n+2}(c_1 + c_2n + 2c_2 - 2c_1 - 2c_2n - 2c_2 + c_1 + c_2n) \\ &= 2^{n+2}(0 + 0n) = 0. \end{aligned}$$

**Definição 14.** *A solução geral de uma equação de diferenças de ordem  $k$  é a solução  $x_n$  que depende de  $k$  constantes arbitrárias.*

A solução apresentada no exemplo anterior é a solução geral da equação. Caso  $c_1$  e  $c_2$  assumam valores particulares numéricos, tem-se uma solução particular única.

**Definição 15.** *A solução particular de uma equação de diferenças de ordem  $k$  é a solução que obedece a  $k$  condições impostas.*

Se essas condições são os  $k$  valores iniciais consecutivos de  $x_n$ , elas são chamadas de condições iniciais.

**Teorema 9.** *A equação (2.16) de ordem  $k$  tem uma, e somente uma, solução determinada por  $k$  condições iniciais.*

*Demonstração.* De fato, como  $f_0(n) \neq 0$  tem-se

$$x_{n+k} = \frac{1}{f_0(n)} [g(n) - f_1(n)x_{n+k-1} - \dots - f_{k-1}(n)x_{n+1} - f_k(n)x_n]. \quad (2.17)$$

Portanto, se forem arbitrados os valores de  $x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}$ , obtém-se de forma única o valor de  $x_{n+k}$  e, de modo semelhante, o de  $x_{n+k-1}, \dots$   $\square$

Se não for conhecido o valor de  $x_n$  e forem conhecidos  $x_{n+k}, x_{n+k-1}, \dots, x_{n+1}$ , pode-se obter o valor de  $x_n$ , já que  $f_k(n) \neq 0$ . De modo semelhante obtém-se os valores de  $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots$

Se forem dadas  $k$  condições consecutivas, mas não iniciais, procede-se da mesma forma. Com efeito, ao se substituir  $n$  por  $n_0$  na equação (2.17), pode-se escrever  $x_{n_0+k}$  em termos de  $x_{n_0+k-1}, x_{n_0+k-2}, \dots, x_{n_0}$ , ou seja,

$$x_{n_0+k} = \frac{1}{f_0(n_0)} [g(n_0) - f_1(n_0)x_{n_0+k-1} - \dots - f_{k-1}(n_0)x_{n_0+1} - f_k(n_0)x_{n_0}],$$

e assim, o valor de  $x_{n_0+k}$  está determinado. Para se encontrar  $x_{n_0+k+1}$ , substitui-se  $n$  por  $n_0 + 1$  na equação (2.17) e tem-se

$$x_{n_0+k+1} = \frac{1}{f_0(n_0+1)} [g(n_0+1) - f_1(n_0+1)x_{n_0+k} - \dots - f_k(n_0+1)x_{n_0+1}].$$



Repetindo este processo, determina-se todos os valores de  $x_n$  tais que  $0 \leq n_0 \leq n$ .

Se as condições impostas não forem consecutivas, o procedimento de determinação dos valores ocorre de modo semelhante, porém torna-se necessário uma quantidade superior de iterações, com o objetivo de se obter todos os valores intermediários da sequência.

Seguem dois exemplos que ilustram este procedimento.

**Exemplo 13.** Considere a equação de diferenças de 4ª ordem dada por

$$x_{n+4} - nx_{n+3} + \frac{n}{n+1}x_{n+1} - 3x_n = n^2, \quad (2.18)$$

onde  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 2$  e  $x_3 = -2$ . Tem-se que

$$x_{n+4} = nx_{n+3} - \frac{n}{n+1}x_{n+1} + 3x_n + n^2. \quad (2.19)$$

Fazendo  $n = 0$  em (2.19), segue que

$$x_4 = 3x_0 = 0.$$

Para  $n = 1$ , tem-se que

$$x_5 = x_4 - \frac{1}{2}x_2 + 3x_1 + 1 = -3,$$

e, para  $n = 2$ , vem que

$$x_6 = 2x_5 - \frac{2}{3}x_3 + 3x_2 + 4 = \frac{16}{3}.$$

Para  $n = 3$ , tem-se

$$x_7 = 3x_6 - \frac{3}{4}x_4 + 3x_3 + 9 = 19.$$

Por exaustão, determina-se  $x_n$ .

**Exemplo 14.** Seja a equação  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$  com as condições  $x_3 = 8$  e  $x_5 = 32$ . Logo,  $x_5 = 4x_4 - 4x_3 = 4x_4 - 32 = 32$ , isto é,  $x_4 = 16$ . Calculando  $x_4$ , tem-se  $x_4 = 4x_3 - 4x_2 = 32 - 4x_2 = 16$ , ou seja,  $x_2 = 4$ . Desta forma, obtém-se  $x_1 = 2$  e  $x_0 = 1$ . Os outros valores de  $x_n$  são obtidos de forma semelhante à do exemplo anterior.



# EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Neste capítulo são estudadas algumas técnicas essenciais para a resolução de equações de diferenças lineares de ordem superior, maior ou igual a 2. A teoria fundamental para a resolução dessas equações é abordada na seção 3.1. Na seção 3.2 é estudada a importante classe de equações lineares com coeficientes constantes. O método dos coeficientes indeterminados, o uso dos operadores  $\Delta$  e  $E$  e o método das funções geradoras são utilizados na busca de soluções particulares da equação não homogênea.

Alguns tipos de equações lineares com coeficientes variáveis podem ser resolvidas analiticamente. Na seção 3.3 é abordada a resolução de algumas formas específicas desse tipo de equação de diferenças.

## 3.1 Resultados iniciais

Considere a equação de diferenças linear de ordem  $k$  dada por

$$x_{n+k} + f_1(n)x_{n+k-1} + \dots + f_k(n)x_n = g(n), \quad (3.1)$$

onde  $f_1(n), \dots, f_k(n), g(n)$  são funções reais definidas em  $\mathbb{Z}_0^+$ . Observe que não há perda de generalidade em se considerar esta equação ao invés da equação (2.16), pois como  $f_0(n) \neq 0$ , pode-se sempre, por divisão, obter uma equação equivalente com o coeficiente de  $x_{n+k}$  igual a 1.

Quando  $g(n) = 0$ , tem-se a equação homogênea associada

$$x_{n+k} + f_1(n)x_{n+k-1} + \dots + f_k(n)x_n = 0. \quad (3.2)$$

A equação (3.2) pode ter várias soluções particulares. Para se representar cada uma dessas soluções, usa-se a notação  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$ , onde o primeiro índice identifica uma diferente

solução e o segundo índice representa a variável discreta independente, que em vários casos se interpreta como a variável tempo. Assim, representa-se o conjunto  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$  como sendo um conjunto de  $k$  soluções particulares da equação (3.2).

O conjunto  $S$  de todas as soluções, inclusive as particulares, da equação (3.2) tem uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo  $\mathbb{K}$  ( $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , se as soluções são reais e  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  se as soluções são complexas), de dimensão  $k$ . Essa afirmação será provada posteriormente.

Na busca de soluções das equações de diferenças lineares de ordem superior, são usados os resultados sobre o Casoratiano de uma matriz (determinante de uma matriz de Casorati de uma determinada sequência), os quais necessitam dos conceitos de dependência e independência linear.

**Definição 16.** Diz-se que as funções  $f_1(n), f_2(n), \dots, f_k(n)$  são linearmente independentes para  $n \geq n_0$  se  $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(n) = 0$  para todo  $n \geq n_0$ , então  $\alpha_i = 0$ ,  $\alpha_i \in \mathbb{C}$ . Se existir algum  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$  tal que  $\sum_{i=1}^k \alpha_i f_i(n) = 0$ , então as funções são ditas linearmente dependentes.

Na prática, duas funções são linearmente dependentes se uma é múltipla da outra, ou seja,  $f_1(n)$  e  $f_2(n)$  são linearmente dependentes se  $f_1(n) = \alpha f_2(n)$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{C} - \{0\}$ .

**Definição 17.** Diz-se que o conjunto  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$  é um conjunto fundamental de soluções da equação (3.2) se  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$  são  $k$  soluções linearmente independentes desta equação.

**Exemplo 15.** O conjunto  $\{1, n, 2^n\}$  é linearmente independente.

É necessário provar que para quaisquer constantes  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  da relação

$$\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 2^n = 0, \quad (3.3)$$

tem-se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Para se determinar as três incógnitas, são necessárias mais duas equações. Estas podem ser obtidas por derivações sucessivas da equação (3.3) em relação a  $n$ . Neste caso, obtém-se as relações  $\alpha_2 + \alpha_3 2^n \ln 2 = 0$  e  $\alpha_3 2^n \ln^2 2 = 0$ . Da última equação conclui-se que  $\alpha_3 = 0$  e, por substituição nas anteriores, conclui-se que (3.3) só é verdadeira para  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Logo, o conjunto é linearmente independente.

**Exemplo 16.** O conjunto  $\{1, n, (-2^n)\}$  é linearmente independente.

Sejam  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ . A equação

$$\alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 (-2)^n = 0 \quad (3.4)$$

não permite determinar o valor das três constantes  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  e também não viabiliza a obtenção de equações simples, como no exemplo anterior, por derivação na variável  $n$ . Sabendo que (3.4)

terá que ser válida para qualquer  $n$ , pode-se substituir  $n$  por  $n + 1$  e por  $n + 2$ , obtendo-se o sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 n + \alpha_3 (-2)^n = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 (n + 1) + \alpha_3 (-2)^{n+1} = 0, \\ \alpha_1 + \alpha_2 (n + 2) + \alpha_3 (-2)^{n+2} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

que resolvido em relação a  $\alpha_1, \alpha_2$  e  $\alpha_3$  origina  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ . Consequentemente, o conjunto dado é linearmente independente.

Observe que no caso de se ter um conjunto com muitas funções, a resolução de sistemas com o uso de técnicas de Álgebra Linear é mais simples e rápida que os métodos de eliminação e substituição.

No exemplo anterior, a matriz que caracteriza o sistema (3.5) é

$$K = \begin{bmatrix} 1 & n & (-2)^n \\ 1 & n + 1 & (-2)^{n+1} \\ 1 & n + 2 & (-2)^{n+2} \end{bmatrix}.$$

O sistema tem uma única solução se  $|K| \neq 0$ . Com efeito,  $|K| = 9(-2)^n \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ , o que permite concluir a independência linear.

**Definição 18.** *Sejam  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$   $k$  soluções da equação (3.2). A matriz de Casorati  $K(n)$ , de dimensão  $k \times k$ , da sequência de soluções é dada por*

$$K(n) = \begin{bmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \dots & x_{k,n} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \dots & x_{k,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n+k-1} & x_{2,n+k-1} & \dots & x_{k,n+k-1} \end{bmatrix}.$$

O determinante de  $K(n)$  denomina-se Casoratiano e será representado por  $C(n)$ .

**Exemplo 17.** *Cálculo do casoratiano da sequência de soluções  $1, (-2)^n, 3^n, (-4)^n$  da equação  $x_{n+4} + 2x_{n+3} - 13x_{n+2} - 14x_{n+1} + 24x_n = 0$ .*

$$C(n) = \begin{vmatrix} 1 & (-2)^n & 3^n & (-4)^n \\ 1 & (-2)^{n+1} & 3^{n+1} & (-4)^{n+1} \\ 1 & (-2)^{n+2} & 3^{n+2} & (-4)^{n+2} \\ 1 & (-2)^{n+3} & 3^{n+3} & (-4)^{n+3} \end{vmatrix} = (-2)^n 3^n (-4)^n \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & -8 & 27 & -64 \end{vmatrix}$$

$$= -2^n 3^n 4^n \begin{vmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -3 & -5 & -7 \\ 9 & -35 & 91 \end{vmatrix} = 7 \times 5^2 \times 3^{n+1} \times 2^{3n+2}$$

O Casoratiano de uma sequência de soluções de uma equação linear pode ser determinado pela fórmula de Abel. Para se obter esta fórmula, em primeiro lugar calcula-se o Casoratiano para uma equação de ordem 3. Em seguida procede-se a uma generalização para uma equação de ordem  $k$ .

Sejam  $x_n, y_n$  e  $z_n$  três soluções linearmente independentes da equação

$$x_{n+3} + f_1(n)x_{n+2} + f_2(n)x_{n+1} + f_3(n)x_n = 0, \quad (3.6)$$

$n \geq n_0$ . Para esta sequência de soluções tem-se que

$$C(n) = \begin{vmatrix} x_n & y_n & z_n \\ x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \end{vmatrix}$$

e substituindo  $n$  por  $n + 1$ , segue que

$$C(n+1) = \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ x_{n+3} & y_{n+3} & z_{n+3} \end{vmatrix}.$$

Escrevendo (3.6) na forma

$$x_{n+3} = -f_3(n)x_n - f_2(n)x_{n+1} - f_1(n)x_{n+2}$$

e substituindo, para cada uma das soluções particulares, a terceira linha de  $C(n+1)$ , resulta em

$$\begin{aligned} C(n+1) &= \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ -f_3(n)x_n & -f_3(n)y_n & -f_3(n)z_n \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ -f_2(n)x_{n+1} & -f_2(n)y_{n+1} & -f_2(n)z_{n+1} \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \\ x_{n+2} & y_{n+2} & z_{n+2} \\ -f_1(n)x_{n+2} & -f_1(n)y_{n+2} & -f_1(n)z_{n+2} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Pelas propriedades de determinantes, vê-se que os dois últimos são nulos (basta colocar em evidência  $-f_1$  e  $-f_2$ ). O primeiro determinante, depois de se colocar em evidência  $-f_3$  e trocar a primeira linha com a terceira, obtém-se  $C(n)$ , ou seja,

$$C(n+1) = -f_3(n)(-1)^2 C(n) = (-1)^3 f_3(n) C(n). \quad (3.7)$$

Pode-se interpretar (3.7) como sendo uma equação de diferenças linear de primeira ordem, cuja solução por recorrência é

$$\begin{aligned} C(n_0+1) &= (-1)^3 f_3(n_0) C(n_0) \\ C(n_0+2) &= (-1)^3 f_3(n_0+1) C(n_0+1) \\ &= (-1)^3 f_3(n_0+1) (-1)^3 f_3(n_0) C(n_0) \\ &= (-1)^6 f_3(n_0+1) f_3(n_0) C(n_0) \\ C(n_0+3) &= (-1)^3 f_3(n_0+2) C(n_0+2) \\ &= (-1)^3 f_3(n_0+2) (-1)^6 f_3(n_0+1) f_3(n_0) C(n_0) \\ &= (-1)^9 f_3(n_0+2) f_3(n_0+1) f_3(n_0) C(n_0) \\ C(n_0+4) &= (-1)^3 f_3(n_0+3) C(n_0+3) \\ &= (-1)^3 f_3(n_0+3) (-1)^9 f_3(n_0+2) f_3(n_0+1) f_3(n_0) C(n_0) \\ &= (-1)^{12} f_3(n_0+3) f_3(n_0+2) f_3(n_0+1) f_3(n_0) C(n_0) \\ &\vdots \\ C(n) &= (-1)^{3(n-n_0)} f_3(n-1) f_3(n-2) \dots f_3(n_0+3) f_3(n_0+2) f_3(n_0+1) f_3(n_0) C(n_0). \end{aligned}$$

Portanto,

$$C(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} (-1)^3 f_3(i) \right] C(n_0) = (-1)^{3(n-n_0)} \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} f_3(i) \right] C(n_0).$$

Em geral, se  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$  são  $k$  soluções linearmente independentes da equação (3.2), então o Casoratiano desta sequência de soluções para  $n \geq n_0$  é

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i) \right] C(n_0). \quad (3.8)$$

Para se estabelecer esta relação, note que

$$C(n+1) = \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & \cdots & x_{k,n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1,n+k} & x_{2,n+k} & \cdots & x_{k,n+k} \end{vmatrix}$$

e que para cada  $1 \leq i \leq k$ , tem-se

$$x_{i,n+k} = -f_k(n)x_{i,n} - f_{k-1}(n)x_{i,n+1} - \cdots - f_1(n)x_{i,n+k-1}.$$

Ao se substituir esta relação na última linha do determinante e ao se aplicar as propriedades de determinantes, tem-se

$$\begin{aligned} C(n+1) &= \begin{vmatrix} x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \cdots & x_{k,n+1} \\ x_{1,n+2} & x_{2,n+2} & \cdots & x_{k,n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -f_k(n)x_{1,n} & -f_k(n)x_{2,n} & \cdots & -f_k(n)x_{k,n} \end{vmatrix} \\ &= -f_k(n)(-1)^{k-1}C(n), \end{aligned}$$

ou seja,

$$C(n+1) = (-1)^k f_k(n)C(n), \quad (3.9)$$

que é uma equação linear de primeira ordem, cuja solução é dada por (3.8).

A fórmula (3.8) usada para se determinar o Casoratiano de um sistema de soluções é conhecida como fórmula de Abel. Assim, o processo anterior usado para determinar a fórmula de Abel é a demonstração do seguinte teorema.

**Teorema 10.** (Fórmula de Abel) *Sejam  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$   $k$  soluções linearmente independentes da equação (3.2) e  $C(n)$  o seu respectivo Casoratiano. Então, para  $n \geq n_0$ ,*

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i) \right] C(n_0).$$

Quando a equação (3.2) tem coeficientes constantes  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , o Casoratiano é

$$C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} [f_k]^{(n-n_0)} C(n_0).$$

Para  $n_0 = 0$ ,  $C(n) = (-1)^{kn} [f_k]^n C(0)$ .

Então,  $C(n) \neq 0$  sempre que  $C(0) \neq 0$ . Esta ideia conduz ao seguinte resultado.



**Corolário 1.** *Suponha que  $f_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$ . Então  $C(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$  se e só se  $C(n_0) \neq 0$ .*

*Demonstração.* Pelo Teorema 10 tem-se que  $C(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i) \right] C(n_0)$ . Como, por hipótese,  $f_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$ , então  $\prod_{i=n_0}^{n-1} f_k(i) = f_k(n) \neq 0$ . Portanto,  $C(n) = f_k(n)C(n_0)$  com  $f_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$ . Assim, sempre que  $C(n) \neq 0$ , então  $C(n_0) \neq 0$  e vice-versa.  $\square$

Através da análise do resultado precedente, uma condição suficiente para garantir que um conjunto de soluções é linearmente independente, é garantir que o seu Casoratiano seja sempre diferente de 0. O seguinte teorema expressa esta ideia.

**Teorema 11.** *O conjunto de soluções  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$  da equação (3.2) é um conjunto fundamental de soluções se, e só se, para algum  $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$ ,  $C(n_0) \neq 0$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Seja  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$  um conjunto fundamental de soluções da equação (3.2). Então  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$  são linearmente independentes, pois  $C(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$ . Logo,  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_0^+ : C(n_0) \neq 0$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que para algum  $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$  se tem  $C(n_0) \neq 0$ . Pelo Corolário 1, existe  $n \geq n_0$  tal que  $C(n) \neq 0$ . Então, pelas propriedades de determinante, segue que  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$  são soluções linearmente independentes.  $\square$

**Exemplo 18.** *A sequência de soluções  $x_{1,n} = n$  e  $x_{2,n} = n^2$  é linearmente independente.*

De fato,

$$C(n) = \begin{vmatrix} n & n^2 \\ n+1 & (n+1)^2 \end{vmatrix} = n^2 + n \neq 0, \forall n \geq 1.$$
 Logo,  $\exists n_0 \in \mathbb{Z}_0^+ : C(n_0) \neq 0$  e assim conclui-se a independência linear.

**Exemplo 19.** *Considerando a equação de diferenças de 4ª ordem dada por*

$$x_{n+4} + 2x_{n+3} - 3x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0,$$

*o conjunto  $\{1, n, (-2)^n, n(-2)^n\}$  é um conjunto fundamental de soluções da equação.*

Inicialmente é necessário provar que a sequência dada é um conjunto de soluções da equação. Essa verificação é imediata pela substituição de cada sequência na equação dada. Para provar que a sequência de soluções  $1, n, (-2)^n$  e  $n(-2)^n$  é linearmente independente, é preciso mostrar que o Casoratiano desta sequência é não nulo para algum  $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$ .

$$C(n) = \begin{vmatrix} 1 & n & (-2)^n & n(-2)^n \\ 1 & n+1 & (-2)^{n+1} & (n+1)(-2)^{n+1} \\ 1 & n+2 & (-2)^{n+2} & (n+2)(-2)^{n+2} \\ 1 & n+3 & (-2)^{n+3} & (n+3)(-2)^{n+3} \end{vmatrix}$$

Para  $n = n_0 = 0$ , vem que

$$C(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & -8 & -24 \end{vmatrix} = -162.$$

Logo, pelo Teorema 11, o sistema de soluções é linearmente independente, ou seja, é um conjunto fundamental de soluções.

Falta garantir em quais condições uma equação de diferenças linear de ordem  $k$  possui um sistema fundamental de soluções. Este é o conteúdo do teorema fundamental dado a seguir.

**Teorema 12.** (Teorema fundamental) *Se  $f_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$ , então a equação (3.2) possui um sistema fundamental de soluções para  $n \geq n_0$ .*

*Demonstração.* O Teorema da Existência e Unicidade de solução de uma equação linear de ordem  $k$ , abordado na seção 2.4, garante que existem soluções  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$  a partir das condições iniciais  $x_{i,n_0+i-1} = 1, x_{i,n_0} = x_{i,n_0+1} = \dots = x_{i,n_0+i-2} = x_{i,n_0+i} = \dots = x_{i,n_0+k-1} = 0, 1 \leq i \leq k$ .

Assim, para cada  $i$  tem-se

$$\begin{aligned} x_{1,n_0} &= 1 & \text{e } x_{1,n_0+j} &= 0 \text{ com } j = 1, \dots, k-1 \\ x_{2,n_0+1} &= 1 & \text{e } x_{2,n_0+j} &= 0 \text{ com } j = 0, 2, \dots, k-1 \\ x_{3,n_0+2} &= 1 & \text{e } x_{3,n_0+j} &= 0 \text{ com } j = 0, 1, 3, \dots, k-1 \\ &\vdots & & \\ x_{k,n_0+k-1} &= 1 & \text{e } x_{k,n_0+j} &= 0 \text{ com } j = 0, 1, \dots, k-2, \end{aligned}$$

de onde segue que

$$C(n_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = |I| = 1.$$

Então, pelo Teorema 11, o conjunto  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$  é um conjunto fundamental de soluções da equação (3.2).  $\square$

Para se provar que o conjunto  $S$  tem estrutura de espaço vetorial, é necessário introduzir os seguintes lemas:

**Lema 2.** *Qualquer combinação linear de elementos de  $S$  pertence a  $S$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{j,n} \in S$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_j \in \mathbb{K}$ . Tem-se que

$$\begin{aligned} x_{1,n+k} + f_1(n)x_{1,n+k-1} + \dots + f_k(n)x_{1,n} &= 0 \\ x_{2,n+k} + f_1(n)x_{2,n+k-1} + \dots + f_k(n)x_{2,n} &= 0 \\ \vdots & \\ x_{k,n+k} + f_1(n)x_{j,n+k-1} + \dots + f_k(n)x_{j,n} &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação por  $\alpha_1$ , a segunda por  $\alpha_2$  e assim sucessivamente até a multiplicação da última por  $\alpha_j$ , tem-se que

$$\begin{aligned} (\alpha_1 x_{1,n+k} + \alpha_2 x_{2,n+k} + \dots + \alpha_j x_{j,n+k}) + f_1(n)(\alpha_1 x_{1,n+k-1} + \alpha_2 x_{2,n+k-1} + \dots + \alpha_j x_{j,n+k-1}) + \\ \dots + f_k(n)(\alpha_1 x_{1,n} + \alpha_2 x_{2,n} + \dots + \alpha_j x_{j,n}) = 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $\alpha_1 x_{1,n} + \alpha_2 x_{2,n} + \dots + \alpha_j x_{j,n} \in S$ .  $\square$

**Observação 1.** *Uma das consequências que se pode tirar do lema anterior, é que se  $x_{1,n}$  e  $x_{2,n}$  são duas soluções particulares de (3.2) e  $\alpha$  e  $\beta \in \mathbb{K}$ , então  $\alpha x_{1,n} + \beta x_{2,n}$  também é uma solução particular da equação (3.2).*

**Lema 3.** *Se  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$  são  $k$  soluções linearmente independentes da equação (3.2), então qualquer outra solução  $x_{k+1,n}$  é linearmente dependente com as soluções anteriores.*

*Demonstração.* Sejam  $x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}$   $k$  soluções linearmente independentes da equação (3.2) e suponha que o conjunto  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}, x_{k+1,n}\}$  é ainda linearmente independente, com  $x_{k+1,n}$  sendo outra solução de (3.2). Logo, o Casoratiano desta sequência de soluções é

$$C(n) = \begin{vmatrix} x_{1,n} & x_{2,n} & \dots & x_{k,n} & x_{k+1,n} \\ x_{1,n+1} & x_{2,n+1} & \dots & x_{k,n+1} & x_{k+1,n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{1,n+k-1} & x_{2,n+k-1} & \dots & x_{k,n+k-1} & x_{k+1,n+k-1} \\ x_{1,n+k} & x_{2,n+k} & \dots & x_{k,n+k} & x_{k+1,n+k} \end{vmatrix}.$$

Para cada  $1 \leq i \leq k+1$ , tem-se

$$x_{i,n+k} = -f_k(n)x_{i,n} - f_{k-1}(n)x_{i,n+1} - \dots - f_1(n)x_{i,n+k-1}.$$

Substituindo cada valor de  $x_{i,n+k}$  na última linha e aplicando as propriedades de determinantes, segue que  $C(n) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}_0^+$ . Então, não existe nenhum  $n_0 \in \mathbb{Z}_0^+$  tal que  $C(n_0) \neq 0$ . Logo, pelo Teorema 11, o conjunto  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}, x_{k+1,n}\}$  não é linearmente independente, o que contraria a hipótese.  $\square$

**Teorema 13.** *O conjunto  $S$  de todas as soluções da equação (3.2) é um espaço vetorial sobre  $\mathbb{K}$ , de dimensão  $k$ .*

*Demonstração.* Através do Lema 2, prova-se que as propriedades de espaço vetorial são satisfeitas. Pelo Teorema 12, a equação (3.2) possui um sistema fundamental de soluções para  $n \geq n_0$ , ou seja, possui  $k$  soluções linearmente independentes. O Lema 3 garante que qualquer outra solução da equação pode ser expressa como combinação linear das sequências do sistema fundamental de soluções. Assim,  $\dim(S) = k$ .  $\square$

**Observação 2.** *Se  $\{x_{1,n}, x_{2,n}, \dots, x_{k,n}\}$  é um sistema fundamental de soluções da equação (3.2), então, a partir dos resultados anteriores, tem-se que a solução geral de (3.2) é*

$$x_n = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{i,n},$$

para constantes arbitrárias  $\alpha_i \in \mathbb{K}$ ,  $1 \leq i \leq k$ .

Observa-se que qualquer solução da equação (3.2), pode ser obtida a partir da solução geral, escolhendo-se adequadamente as constantes  $\alpha_i$ .

A estrutura de espaço vetorial de  $S$  garante que existem infinitos conjuntos fundamentais de soluções da equação (3.2). A solução geral da equação linear homogênea de ordem  $k$  depende de  $k$  constantes arbitrárias. A unicidade da solução só é obtida após a imposição de  $k$  condições, obtendo-se, desta forma, uma solução particular.

**Teorema 14.** *Se  $x_{1,n}$  e  $x_{2,n}$  são soluções da equação (3.1), então  $x_{1,n} - x_{2,n}$  é uma solução da equação (3.2).*

*Demonstração.* Por hipótese tem-se que

$$\begin{aligned} x_{1,n+k} + f_1(n)x_{1,n+k-1} + \dots + f_k(n)x_{1,n} &= g(n) \\ x_{2,n+k} + f_1(n)x_{2,n+k-1} + \dots + f_k(n)x_{2,n} &= g(n) \end{aligned}$$

Subtraindo as relações acima, obtém-se

$$(x_{1,n+k} - x_{2,n+k}) + f_1(n)(x_{1,n+k-1} - x_{2,n+k-1}) + \dots + f_k(n)(x_{1,n} - x_{2,n}) = 0,$$

ou seja,  $x_{1,n} - x_{2,n}$  é uma solução da equação (3.2).  $\square$

A resolução da equação não homogênea (3.1) depende da resolução da equação homogênea (3.2) que lhe está associada, assim como da determinação de uma solução particular da equação não homogênea, como se vê no seguinte resultado.

**Teorema 15.** Se  $\{x_{1,n}, \dots, x_{k,n}\}$  é um sistema fundamental de soluções da equação (3.2) e  $x_{p,n}$  é uma solução particular da equação (3.1), então a solução geral da equação (3.1) é representada por

$$x_n = x_{p,n} + \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{i,n},$$

com  $\alpha_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq k$ .

*Demonstração.* Seja  $x_n$  uma solução da equação (3.1). Pelo Teorema 14,  $x_n - x_{p,n}$  é solução da equação (3.2). Logo  $x_n - x_{p,n} \in S$ . Pelo Lema 3,  $x_n - x_{p,n}$  pode ser expressa como combinação linear de  $x_{1,n}, \dots, x_{k,n}$ , ou seja,  $x_n - x_{p,n} = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_{i,n}$  para  $\alpha_i \in \mathbb{K}$  com  $1 \leq i \leq k$ .  $\square$

**Observação 3.** O Teorema 15 diz que a solução geral da equação não homogênea (3.1) é  $x_n = x_{h,n} + x_{p,n}$ , onde  $x_{h,n}$  é a solução geral da equação homogênea associada e  $x_{p,n}$  uma solução particular da equação não homogênea.

## 3.2 Equações com coeficientes constantes

Quando os coeficientes  $f_i(n)$  da equação (3.1) são todos constantes, obtém-se uma importante classe de equações de diferenças que são as equações com coeficientes constantes.

Considere a equação de diferenças de ordem  $k$

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \dots + p_k x_n = g(n), \quad (3.10)$$

onde  $p_1, \dots, p_k$  são constantes com  $p_k \neq 0$ . A equação (3.10) pode ser reescrita na forma

$$\sum_{i=0}^k p_i x_{n+k-i} = g(n), \quad p_0 = 1. \quad (3.11)$$

A sua correspondente equação homogênea é

$$\sum_{i=0}^k p_i x_{n+k-i} = 0. \quad (3.12)$$

O objetivo é encontrar um conjunto fundamental de soluções da equação (3.12) e, obviamente, determinar a sua solução geral. A seguir, é aplicado o método dos coeficientes indeterminados para se determinar uma solução particular da equação (3.11), e assim exibir sua solução geral.

### 3.2.1 Solução geral da equação não homogênea

A análise consiste na busca de solução da equação (3.12) na forma  $x_n = \lambda^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Substituindo  $\lambda^n$  na equação (3.12), o problema se reduz à resolução da equação algébrica

$$\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + p_2\lambda^{k-2} + \dots + p_k = 0. \quad (3.13)$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, esta equação tem  $k$  raízes não nulas.

**Definição 19.** Diz-se que (3.13) é a equação característica da equação (3.12). As soluções  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  de (3.13) são conhecidas como raízes características.

Como referências complementares consultar (ELAYDI, 2004) e (SHONE, 2002).

**Teorema 16.** Se as raízes características  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são todas distintas, então o conjunto  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$  é um conjunto fundamental de soluções.

*Demonstração.* Pelo Teorema 11 sabe-se que  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$  é um conjunto fundamental de soluções se, e somente se,  $C(0) \neq 0$ , onde  $C(n)$  é o determinante da matriz de Casorati  $K(n)$ .

$$K(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Esta matriz é conhecida como matriz de Vandermonde e o seu determinante  $C(0)$ , como determinante de Vandermonde. Neste caso,

$$C(0) = \prod_{1 \leq i < j \leq k} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Como por hipótese  $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$ , então  $C(0) \neq 0$ , e assim, o conjunto  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$  é um conjunto fundamental de soluções.  $\square$

**Observação 4.** Pelos Teoremas 16 e 13 conclui-se que o conjunto fundamental de soluções  $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_k^n\}$  configura-se numa base de dimensão  $k$  do conjunto  $S$  de todas as soluções da equação (3.12), e assim, a sua solução geral é

$$x_{h,n} = \sum_{i=1}^k c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{C}. \quad (3.14)$$

Utilizando a propriedade  $E^k x_n = x_{n+k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  (Teorema 1), pode-se escrever a equação de diferenças não homogênea de ordem  $k$  com coeficientes constantes em função do operador  $E$ . Para esta propriedade, a equação (3.10) tem a forma

$$(E^k + p_1 E^{k-1} + p_2 E^{k-2} + \dots + p_{k-1} E + p_k) x_n = g(n). \quad (3.15)$$

Escrevendo o operador polinomial na forma  $f(E)$  vem que

$$f(E)x_n = g(n). \quad (3.16)$$

Sabe-se que a solução geral da equação homogênea relacionada ( $f(E)x_n = 0$ ), é encontrada através das raízes características, ou seja, das soluções da equação  $f(\lambda) = 0$ . Como esta equação tem grau  $k$ , tem-se

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_k),$$

e, desta forma,

$$f(E) = (E - \lambda_1)(E - \lambda_2) \dots (E - \lambda_k).$$

Os fatores  $(E - \lambda_i)$  comutam, já que, por exemplo,

$$\begin{aligned} (E - a)(E - b)x_n &= (E - a)(x_{n+1} - bx_n) = x_{n+2} - bx_{n+1} - ax_{n+1} + abx_n \\ (E - b)(E - a)x_n &= (E - b)(x_{n+1} - ax_n) = x_{n+2} - ax_{n+1} - bx_{n+1} + abx_n. \end{aligned}$$

Assim, a equação reduzida assume a forma

$$(E - \lambda_1)(E - \lambda_2) \dots (E - \lambda_k)x_n = 0. \quad (3.17)$$

Como cada fator  $(E - \lambda_i)$  comuta, então cada um colabora para a solução  $x_n$ . Desta forma, a solução de  $(E - \lambda_i)x_n = 0$  é solução particular de (3.17). O mesmo acontece se uma raiz  $\lambda_j$  tem multiplicidade  $m_j$ . Neste caso, o fator  $(E - \lambda_j)^{m_j}$  também contribui para a solução de  $x_n$ . Deste modo, pode-se escrever (3.17) no formato

$$(E - \lambda_j)^{m_j}x_n = 0.$$

Assim, as soluções de  $(E - \lambda_j)^{m_j}x_n = 0$  são soluções da equação (3.17).

No Teorema 16, supôs-se que as raízes características eram todas diferentes. Logo, possuíam multiplicidade 1. Suponha agora que as raízes características não são todas diferentes. Sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  raízes características com multiplicidade  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , respectivamente. Neste caso, escreve-se a equação (3.12) na forma

$$(E - \lambda_1)^{m_1}(E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r}x_n = 0. \quad (3.18)$$

Assim, as soluções de

$$(E - \lambda_i)^{m_i}x_n = 0 \quad (3.19)$$

são soluções da equação (3.18). Para se determinar a solução de (3.18), faz-se necessário determinar um conjunto fundamental de soluções da equação (3.19), para  $1 \leq i \leq r$ .

**Teorema 17.** *O conjunto  $G_i = \{\lambda_i^n, n\lambda_i^{n-1}, n^2\lambda_i^{n-2}, \dots, n^{m_i-1}\lambda_i^{n-m_i+1}\}$  é um conjunto fundamental de soluções de (3.19).*

*Demonstração.* Primeiramente, prova-se que  $n^q \lambda_i^n$ ,  $0 \leq q \leq m_i - 1$  é solução de (3.19). Pelo Teorema 6 sabe-se que

$$\begin{aligned} (E - \lambda_i)^{m_i} (n^q \lambda_i^n) &= \lambda_i^n (\lambda_i E - \lambda_i)^{m_i} n^q \\ &= \lambda_i^{n+m_i} (E - I)^{m_i} n^q \\ &= \lambda_i^{n+m_i} \Delta^{m_i} n^q \\ &= 0, \end{aligned}$$

pelo Teorema 4, uma vez que  $m_i > q$ . Como  $\lambda_i \neq 0$ , então o conjunto  $G_i$  é linearmente independente se o conjunto  $\{1, n, n^2, \dots, n^{m_i-1}\}$  for linearmente independente. Seja  $n \geq n_0$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_i}$  constantes não nulas. Da relação  $\alpha_1 1 + \alpha_2 n + \dots + \alpha_{m_i} n^{m_i-1} = 0$ , tem-se  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m_i} = 0$ , e desta forma, o conjunto  $\{1, n, n^2, \dots, n^{m_i-1}\}$  é linearmente independente e, portanto,  $G_i$  é um conjunto fundamental de soluções.  $\square$

Já se sabe como determinar a solução de (3.19). Para calcular a solução geral de (3.18), faz-se necessário encontrar um conjunto fundamental de soluções. Esta necessidade é o conteúdo do próximo teorema.

**Teorema 18.** O conjunto  $G = \bigcup_{i=1}^r G_i$  é um conjunto fundamental de soluções da equação (3.18).

*Demonstração.* Tem-se que o conjunto  $G$  é dado por

$$\{\lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_r^n, n\lambda_1^n, n\lambda_2^n, \dots, n\lambda_r^n, n^2\lambda_1^n, n^2\lambda_2^n, \dots, n^2\lambda_r^n, \dots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, n^{m_2-1}\lambda_2^n, \dots, n^{m_r-1}\lambda_r^n\}$$

Deve-se provar que para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq r$  a expressão  $n^q \lambda_i^n$ ,  $0 \leq q \leq m_i - 1$  é solução da equação (3.18). Seja  $i = 1$  (para os demais valores de  $i$  é análogo). Substituindo a expressão  $n^q \lambda_1^n$  na equação (3.18) vem que

$$(E - \lambda_1)^{m_1} (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} n^q \lambda_1^n = 0,$$

e pela comutatividade dos fatores, resulta que

$$\begin{aligned} (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} (E - \lambda_1)^{m_1} n^q \lambda_1^n &= (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} \lambda_1^n (E \lambda_1 - \lambda_1)^{m_1} n^q \\ &= (E - \lambda_2)^{m_2} \dots (E - \lambda_r)^{m_r} \lambda_1^{n+m_1} \Delta^{m_1} n^q \\ &= 0, \end{aligned}$$

pois  $m_1 > q$ .  $\square$

Em relação à independência linear, observe que da relação

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^n (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + \dots + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1}) = 0,$$

tem-se  $\alpha_{i,j} = 0$ ,  $1 \leq i \leq r$ ,  $0 \leq j \leq m_i - 1$ .



**Corolário 2.** A solução geral da equação (3.18) é

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^n (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + \dots + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1}), \quad (3.20)$$

onde  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{K}$

*Demonstração.* Pela observação 2 e pelo Teorema 17, tem-se que

$$\lambda_i^n (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + \dots + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1})$$

é a solução geral de (3.19) e, conseqüentemente, uma solução de (3.18). Novamente, utilizando a observação 2 e o Teorema 18, segue que

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i^n (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + \dots + \alpha_{i,m_i-1}n^{m_i-1})$$

é a solução geral de (3.18). □

**Observação 5.** (Raízes características complexas) Suponha que na determinação das raízes características da equação  $x_{n+2} + p_1x_{n+1} + p_2x_n = 0$ , obtém-se um par de raízes complexas conjugadas  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$  e  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$  com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Neste caso, a solução geral da equação é

$$x_n = c_1(\alpha + i\beta)^n + c_2(\alpha - i\beta)^n, c_1, c_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.21)$$

Pela fórmula de Moivre, segue que

$$\begin{aligned} x_n &= c_1[\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))] + c_2[\rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))] \\ &= \rho^n[(c_1 + c_2)\cos(n\theta) + i(c_1 - c_2)\sin(n\theta)], \end{aligned}$$

com  $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  e  $\theta = \arctan(\frac{\beta}{\alpha})$ . Suponha, sem perda de generalidade, que  $\bar{c}_1 = c_2$ . Fazendo a substituição, tem-se que

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n[(c_1 + \bar{c}_1)\cos(n\theta) + i(c_1 - \bar{c}_1)\sin(n\theta)] \\ &= \rho^n[k_1\cos(n\theta) + k_2\sin(n\theta)], \end{aligned}$$

com  $k_1 = c_1 + \bar{c}_1 \in \mathbb{R}$  e  $k_2 = i(c_1 - \bar{c}_1) \in \mathbb{R}$ .

Para mais detalhes, consulte as referências (MORGADO, 2014) e (SHONE, 2002).

**Exemplo 20.** Resolução da equação  $x_{n+6} - 10x_{n+4} - 20x_{n+3} + 5x_{n+2} + 132x_{n+1} + 180x_n = 0$ .

As raízes características são  $\lambda_1 = 3$ ,  $\lambda_2 = -2$  com multiplicidade 2,  $\lambda_3 = -1 + 2i$  e  $\lambda_4 = -1 - 2i$ . Para as raízes complexas tem-se  $\rho = \sqrt{5}$  e  $\theta = -\arctan 2$ . Desta forma, a solução geral da equação é

$$x_n = (\alpha_1 + \alpha_2n)3^n + (\alpha_3 + \alpha_4n)(-2)^n + (\sqrt{5})^n(\alpha_5\cos(n\theta) + \alpha_6\sin(n\theta)), \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

### 3.2.2 Método dos coeficientes indeterminados

Para a determinação da solução geral da equação não homogênea (3.10), faz-se necessário o conhecimento de uma solução particular da equação, o qual será obtida pelo método dos coeficientes indeterminados. O nome se deve ao fato da escolha de uma função para solução particular, a qual depende de certas constantes a serem determinadas. A aplicação torna-se simples quando  $g(n)$  é expressa na forma de funções elementares. Basicamente, o método consiste no seguinte:

1. Se  $g(n)$  for uma das funções da Tabela 4, deve-se escolher para  $x_{p,n}$  a opção correspondente na Tabela 4.
2. Caso a opção escolhida constitua uma solução da equação homogênea associada, deve-se multiplicar a opção  $x_{p,n}$  por  $n^q$ , no qual  $q$  é o menor inteiro positivo tal que  $n^q x_{p,n}$ , não é solução da equação homogênea associada.
3. Se  $g(n)$  é a soma de um conjunto de funções correspondentes a diferentes entradas da Tabela 4, toma-se para  $x_{p,n}$  a soma das correspondentes opções.

$g(n)$	opção para $x_{p,n}$
$ra^n$	$c_1 a^n$
$rn^k$	$c_0 + c_1 n + \dots + c_k n^k$
$rn^k a^n$	$(c_0 + c_1 n + \dots + c_k n^k) a^n$
$r \sin bn, r \cos bn$	$c_1 \sin bn + c_2 \cos bn$
$ra^n \sin bn, ra^n \cos bn$	$(c_1 \sin bn + c_2 \cos bn) a^n$
$rn^k a^n \sin bn, rn^k a^n \cos bn$	$(c_0 + c_1 n + \dots + c_k n^k) a^n \sin bn + (d_0 + d_1 n + \dots + d_k n^k) a^n \cos bn$

Tabela 4 – A solução particular  $x_{p,n}$

Fonte: (LUIS, 2006)

**Exemplo 21.** Obtenção da solução geral da equação  $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 7x_n = n2^n$ .

As raízes características são  $-1$  e  $-7$ . A solução da equação homogênea associada é  $x_{h,n} = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(-7)^n$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Como o 2º membro da equação é  $n2^n$  e nenhuma das soluções da equação homogênea toma esta forma, então usa-se a opção  $x_{p,n} = (c_0 + c_1 n)2^n$ . Substituindo na equação dada segue que

$$(c_0 + c_1(n+2))2^{n+2} + 8(c_0 + c_1(n+1))2^{n+1} + 7(c_0 + c_1 n)2^n = n2^n$$

ou seja,

$$27c_0 + 24c_1 + 27c_1 n = n.$$

Obtém-se  $c_1 = \frac{1}{27}$  e  $c_0 = -\frac{8}{243}$ . Desta forma, a solução geral da equação é

$$x_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(-7)^n + \left(-\frac{8}{243} + \frac{1}{27}n\right)2^n, \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

**Exemplo 22.** Cálculo da solução geral da equação  $x_{n+2} - x_n = n2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ .

É fácil ver que  $x_{h,n} = \alpha_1 + \alpha_2(-1)^n$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Logo, para este caso,  $x_{p,n} = (c_0 + c_1n)2^n \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) + (d_0 + d_1n)2^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ . Substituindo na equação, tem-se  $c_0 = \frac{8}{25}$ ,  $c_1 = -\frac{1}{5}$ ,  $d_0 = d_1 = 0$ .

**Exemplo 23.** Cálculo da solução geral da equação  $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 1 + n$ .

Observe que  $x_{h,n} = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Logo, para este caso,  $x_{p,n} = c_0n + c_1$ . Substituindo na equação, tem-se  $c_0 = \frac{1}{2}$  e  $c_1 = \frac{5}{4}$ , ou seja, a solução geral é  $x_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 2^n + \frac{n}{2} + \frac{5}{4}$ .

### 3.2.3 Uso dos operadores $\Delta$ e $E$

Os operadores  $\Delta$  e  $E$  também podem ser usados para se determinar uma solução particular da equação (3.11). Para este fim, são introduzidas algumas propriedades fundamentais desses operadores.

**Definição 20.** O inverso do operador  $(E - \lambda I)$  é o operador  $(E - \lambda I)^{-1}$  tal que

$$(E - \lambda I)(E - \lambda I)^{-1} = I, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

**Teorema 19.** Seja  $\lambda \in \mathbb{C}$ . O inverso de  $E - \lambda I$  é dado por

$$(E - \lambda I)^{-1} = \lambda^{n-1} \Delta^{-1} \lambda^{-n}. \quad (3.22)$$

*Demonstração.* Usando a relação (3.22) e o Teorema 5, tem-se

$$\begin{aligned} (E - \lambda I)(E - \lambda I)^{-1} &= (E - \lambda I)\lambda^{n-1} \Delta^{-1} \lambda^{-n} = \lambda^{n-1} (\lambda E - \lambda I) \Delta^{-1} \lambda^{-n} \\ &= \lambda^{n-1} \lambda \Delta \Delta^{-1} \lambda^{-n} = I. \end{aligned}$$

□

**Corolário 3.** Para  $m \in \mathbb{N}$ , tem-se

$$(E - \lambda I)^{-m} = \lambda^{n-m} \Delta^{-m} \lambda^{-n}. \quad (3.23)$$

*Demonstração.* De fato,

$$\begin{aligned} (E - \lambda I)^m (E - \lambda I)^{-m} &= (E - \lambda I)^m \lambda^{n-m} \Delta^{-m} \lambda^{-n} \\ &= \lambda^{n-m} \lambda^m \Delta^m \Delta^{-m} \lambda^{-n} \\ &= I \end{aligned}$$

□

A relação (3.23) pode ser usada para se determinar a solução de (3.19). Da relação (3.19) e de (3.23), segue que

$$x_n = (E - \lambda I)^{-m_i}(0) = \lambda_i^{n-m_i} \Delta^{-m_i} \lambda_i^{-n}(0) = \lambda_i^{n-m_i} \Delta^{-m_i}(0),$$

$\Delta^{-m_i}(0) = q_i(n)$ , onde  $q_i(n)$  é um polinômio de grau inferior a  $m_i$ . Portanto,  $x_n = \lambda_i^{n-m_i} q_i(n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ . Desta forma, a solução geral de (3.18) é dada por

$$x_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^{n-m_i} q_i(n). \quad (3.24)$$

Como  $\lambda^{-m_i}$  não depende de  $n$ , então  $\alpha_i \lambda^{-m_i}$  é uma constante e assim, (3.22) assume a forma

$$x_n = \sum_{i=1}^r \alpha_i \lambda_i^n q_i(n),$$

que é equivalente a (3.20).

**Teorema 20.** *Seja  $f(\lambda)$  um polinômio de grau  $k$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  com  $f(\lambda) \neq 0$ . Então,*

$$f^{-1}(E) \lambda^n = \frac{\lambda^n}{f(\lambda)}. \quad (3.25)$$

*Demonstração.* Usando as relações (3.25) e (2.11), tem-se

$$f(E) f^{-1}(E) \lambda^n = \frac{f(E) \lambda^n}{f(\lambda)} = \lambda^n.$$

□

**Teorema 21.** *Seja  $f(\lambda)$  um polinômio de grau  $k$  e  $\lambda_1 \in \mathbb{C}$  uma raiz de  $f$  com multiplicidade  $m$ . Então, fazendo  $f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^m g(\lambda)$ , tem-se*

$$f^{-1}(E) \lambda_1^n = \frac{\lambda_1^{n-m} n^{(m)}}{g(\lambda_1) m!}. \quad (3.26)$$

*Demonstração.* Usando a relação (3.26), o Teorema 6 e as equações (2.11) e (2.8), tem-se que

$$\begin{aligned}
 f(E)f^{-1}(E)\lambda_1^n &= \frac{f(E)\lambda_1^{n-m}n^{(m)}}{g(\lambda_1)m!} = \lambda_1^{n-m}\frac{f(\lambda_1E)n^{(m)}}{g(\lambda_1)m!} \\
 &= \lambda_1^{n-m}\frac{\lambda_1^m(E-I)^m g(\lambda_1E)n^{(m)}}{g(\lambda_1)m!} \\
 &= \lambda_1^n\frac{g(\lambda_1E)\Delta^m n^{(m)}}{g(\lambda_1)m!} \\
 &= \lambda_1^n\frac{g(\lambda_1E)m!}{g(\lambda_1)m!} \\
 &= \lambda_1^n.
 \end{aligned}$$

□

**Teorema 22.** *Seja  $f(\lambda)$  um polinômio de grau  $k$  e  $x_n$  uma sequência. Então*

$$f^{-1}(E)\lambda^n x_n = \lambda^n f^{-1}(\lambda E)x_n, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.27)$$

*Demonstração.*

$$f(E)f^{-1}(E)\lambda^n x_n = f(E)\lambda^n f^{-1}(\lambda E)x_n = \lambda^n f(\lambda E)f^{-1}(\lambda E)x_n = \lambda^n x_n.$$

□

Estes resultados podem ser usados para se calcular a solução particular da equação (3.16). Os próximos casos são os mais comuns:

1.  $g(n) = c$ ,  $c$  constante. Se  $f(1) \neq 0$ , por (3.25) tem-se

$$x_{p,n} = f^{-1}(E)c = c f^{-1}(E)1^n = c \frac{1^n}{f(1)} = \frac{c}{\sum_{i=0}^k p_i}.$$

2.  $g(n) = \sum_{i=1}^s \alpha_i \lambda_i^n$  com  $f(\lambda_i) \neq 0$ .

$$x_{p,n} = f^{-1}(E) \sum_{i=1}^s \alpha_i \lambda_i^n = \sum_{i=1}^s \alpha_i f^{-1}(E)\lambda_i^n = \sum_{i=1}^s \alpha_i \frac{\lambda_i^n}{f(\lambda_i)}.$$

3.  $g(n) = \sum_{i=1}^s \alpha_i \lambda_i^n$ ,  $f(\lambda_i) \neq 0$  e  $\lambda_j$  é uma raiz de  $f(\lambda)$  com multiplicidade  $m$ .

De (3.25) e (3.26), segue que

$$x_{p,n} = \sum_{i=1, i \neq j}^s \alpha_i \frac{\lambda_i^n}{f(\lambda_i)} + \alpha_j \frac{\lambda_j^{n-m} n^{(m)}}{g(\lambda_j)m!}, \text{ onde } f(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^m g(\lambda).$$

4.  $g(n) = e^{in\theta}$ . Neste caso usa-se o 2º ou o 3º caso, fazendo  $\lambda = e^{i\theta}$ .

5.  $g(n) = \cos(n\theta)$ ,  $g(n) = \sin(n\theta)$ . Proceda-se como no 4º caso, tomando a parte real ou a imaginária, dependendo do caso.

### 3.2.4 Método das funções geradoras

O método das funções geradoras é um outro método que permite solucionar equações de diferenças lineares com coeficientes constantes.

**Definição 21.** Denomina-se série de potências a uma série da forma

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n,$$

onde  $x$  é uma variável e  $a_n$  são constantes chamadas coeficientes da série.

Uma série de potências pode convergir para alguns valores de  $x$  e divergir para outros valores de  $x$ . A soma da série é uma função

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

cujo domínio é o conjunto de todos os  $x$  para os quais a série converge.

Se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n$  e  $\sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n$  são duas séries de potências, a soma destas gera a série de potências dada por

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)x^n$$

e o produto é a série cujo coeficiente de  $x^n$  para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  é

$$a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0 = \sum_{i,j \geq 0; i+j=n} a_ib_j,$$

ou seja, a série de potências produto é

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \sum_{i,j \geq 0; i+j=n} a_ib_j \right] x^n.$$

Para mais detalhes sobre o assunto, consulte a referência (STEWART, 2013).

**Definição 22.** A função geradora para a sequência  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  de números reais ou complexos é a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n.$$

Observe que qualquer polinômio é uma particular série de potências. Por exemplo, o polinômio  $5x^2 + 2x^3 + 3x^6$  pode ser escrito como  $0 + 0x + 5x^2 + 2x^3 + 0x^4 + 0x^5 + 3x^6 + 0x^7 + \dots$ , que é uma série de potências com vários coeficientes nulos.

**Teorema 23.** 1. Se  $a_n$  é o coeficiente de  $x^n$  na função geradora

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)^k,$$

então  $a_n = \binom{k+n-1}{n}$ ;

2.  $(1 - x^m)^n = 1 - \binom{n}{1}x^m + \binom{n}{2}x^{2m} - \dots + (-1)^n x^{nm}$ ;

3.  $(1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1})^n = (1 - x^m)^n (1 + x + x^2 + \dots)^n$ .

*Demonstração.* 1.  $f(x) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} x^i \right)^k = \left( \frac{1}{1-x} \right)^k = (1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-k}{n} (-1)^n x^n$ , onde

$$\begin{aligned} \binom{-k}{n} &= \frac{(-k)!}{n!(-k-n)!} = \frac{-k(-k-1)\dots(-k-n+1)}{n!} \\ &= (-1)^n \frac{k(k+1)\dots(k+n-1)}{n!} = (-1)^n \frac{(k+n-1)!}{n!(k-1)!} \\ &= (-1)^n \binom{k+n-1}{n}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\binom{-k}{n}$  em  $f(x)$ , tem-se

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k+n-1}{n} (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n} x^n$$

e desta forma, o coeficiente de  $x^n$  é  $\binom{k+n-1}{n}$ .

2. Substitua  $t = (-x^m)$  no binômio  $(1+t)^n$  para obter o desenvolvimento desejado.

3. Note que

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1} = (1 - x^m)(1 + x + x^2 + \dots)$$

e elevando-se ambos os membros ao expoente  $n$ , obtém-se a igualdade desejada.  $\square$

**Teorema 24.** Se  $f(x)$  e  $g(x)$  forem as funções geradoras relacionadas às sucessões  $(a_n)_0^\infty$  e  $(b_n)_0^\infty$ , respectivamente, então

1.  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  é a função geradora associada à sequência  $(\alpha a_n + \beta b_n)$ ;

2.  $(1-x)f(x)$  é a função geradora associada à sequência  $(a_n - a_{n-1})_0^\infty$  (adota-se que  $a_{-1} = 0$ );

3.  $(1+x+x^2+\dots)f(x)$  é a função geradora associada à sequência  $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)_0^\infty$ ;

4.  $f(x)g(x)$  é a função geradora da sequência  $(a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \dots + a_nb_0)_0^\infty$ ;

5.  $xf'(x)$  é a função geradora da sequência  $(na_n)_0^\infty$ , onde  $f'(x)$  é a derivada em relação à variável  $x$ .

*Demonstração.* Seja  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  e  $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ . Então

$$1. \alpha f(x) + \beta g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) x^n$$

2.

$$\begin{aligned} (1-x)f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = a_0 - a_0x + a_1x - a_1x^2 + \dots \\ &= (a_0 - a_{-1}) + (a_1 - a_0)x + (a_2 - a_1)x^2 + \dots + (a_n - a_{n-1})x^n + \dots \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (1+x+x^2+\dots)f(x) &= (1+x+x^2+\dots)(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots) \\ &= a_0 + (a_0+a_1)x + (a_0+a_1+a_2)x^2 + \dots \\ &\quad + (a_0+a_1+a_2+\dots+a_n)x^n + \dots \end{aligned}$$

$$4. f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j} \right] x^n,$$

$$5. f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \text{ e assim, } xf'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^n.$$

□

**Observação 6.** Note que  $(1-x)(1+x+x^2+\dots) = 1$ , pois  $f(x) = 1+x+x^2+\dots = \frac{1}{1-x}$  (esta série converge para  $|x| < 1$ ) é a função geradora da sequência constante  $(1)_0^\infty$ . A função  $g(x) = (f(x))^k = \left(\frac{1}{1-x}\right)^k$  é a função geradora da sequência  $\left(\binom{k+n-1}{n}\right)_0^\infty$ , segundo o Teorema 23.

**Exemplo 24.** Obtenção da função geradora associada à sequência  $(3n+5n^2)_0^\infty$ .

A função  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  é a função geradora associada à sequência  $(1)_0^\infty$ . De acordo com o Teorema 24, item 5,  $xf'(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$  é a função geradora da sequência  $(n)_0^\infty$ . Aplicando-se novamente este princípio, tem-se que  $x\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$  é a função geradora de  $(n^2)_0^\infty$ . Assim, a função geradora de  $(3n+5n^2)_0^\infty$  é  $3xf'(x) + 5x(xf'(x))' = \frac{2x(4+x)}{(1-x)^3}$ .



Na Tabela 5 pode-se visualizar a função geradora de algumas sequências.

Assim, dada uma sequência, é possível determinar a função geradora associada e esta função contém toda a informação relativa à sequência em questão, e às vezes é mais simples manipular a função ao invés da sequência. O termo geral da sequência pode ser recuperado a partir do coeficiente de  $x^n$  no desenvolvimento em série de potências. Utiliza-se esta ideia para resolver equações de diferenças.

Para se resolver a equação de diferenças linear de ordem  $k$  com coeficientes constantes

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \dots + p_k a_n = g(n), \quad p_k \neq 0,$$

basta seguir as etapas:

$(a_n)_0^\infty$	função geradora $f(x)$	Domínio de convergência
1	$\frac{1}{1-x}$	$ x  < 1$
$n$	$\frac{x}{(1-x)^2}$	$ x  < 1$
$n^2$	$\frac{x(x+1)}{(1-x)^3}$	$ x  < 1$
$n^3$	$\frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$	$ x  < 1$
$n^4$	$\frac{x(x^3+11x^2+11x+1)}{(1-x)^5}$	$ x  < 1$
$(n+m)^{(m)}$	$\frac{m!}{(1-x)^{m+1}}$	$ x  < 1$
$n^{(m)}$	$\frac{m!x^m}{(1-x)^{m+1}}$	$ x  < 1$
$k^n$	$\frac{1}{1-kx}$	$ x  < \frac{1}{k}$
$(n+m)^{(m)} k^n$	$\frac{m!}{(1-kx)^{m+1}}$	$ x  < \frac{1}{k}$
$e^{\alpha n}$	$\frac{1}{1-e^{\alpha}x}$	$ x  < \frac{1}{e^{\alpha}}$
$k^n \cos \theta n$	$\frac{1-kx \cos \theta}{1-2kx \cos \theta + k^2 x^2}$	$ x  < \frac{1}{k}$
$k^n \sin \theta n$	$\frac{kx \sin \theta}{1-2kx \cos \theta + k^2 x^2}$	$ x  < \frac{1}{k}$
$\binom{n}{m}$	$\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}$	$ x  < 1$
$\binom{k}{n}$	$(1+x)^k$	$ x  < 1$
$\binom{k+n-1}{n}$	$\frac{1}{(1-x)^k}$	$ x  < 1$

Tabela 5 – Função geradora de  $f(x)$

Fonte: (LUIS, 2006)

1. Multiplica-se os dois membros da equação por  $x^{n+k}$ ;
2. Escreve-se a nova equação em termos da função geradora  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  e a resolve em função de  $f(x)$ ;
3. Transforma-se a expressão encontrada para  $f(x)$  em série de potências de  $x$ , de forma que se identifique o coeficiente  $a_n$  de  $x^n$ ;
4. A solução da equação é a expressão encontrada para  $a_n$ .

**Exemplo 25.** Resolução da equação  $a_{n+1} - 2a_n = -\frac{n}{3}$ ,  $a_0 = 1$  pelo método das funções geradoras.

Seja  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Multiplicando os dois membros da equação por  $x^{n+1}$ , tem-se

$$a_{n+1}x^{n+1} - 2a_nx^{n+1} = -\frac{n}{3}x^{n+1}.$$

Expressando esta equação em termos da função geradora  $f(x)$ , segue que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+1} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+1} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} nx^{n+1},$$

ou seja,

$$f(x) - a_0 - 2xf(x) = -\frac{x}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} nx^n.$$

Como

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nx^n = x(1 + 2x + 3x^2 + \dots) = x(x + x^2 + x^3 + \dots)' = x \left( -1 + \frac{1}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

segue que

$$f(x)(1-2x) = \frac{-x^2}{3(1-x)^2} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-2x} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2+n-1}{n} x^n + \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1+2^{n+1}}{3} x^n, \end{aligned}$$

pela Tabela 5. Logo, a solução da equação é  $a_n = \frac{n+1+2^{n+1}}{3}$ .

**Exemplo 26.** Resolução da equação  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n$ ,  $a_0 = 1, a_1 = 2$ .

Seja  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Multiplicando os dois membros da equação por  $x^{n+2}$  e expressando a nova equação em termos da função geradora  $f(x)$ , tem-se

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}x^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}x^{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^{n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^{n+2},$$

ou seja,

$$f(x) - a_1x - a_02x(f(x) - a_0) + x^2f(x) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n.$$

Portanto,

$$f(x)(1-2x+x^2) = \frac{x^2}{1-2x} + 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{1-2x},$$

onde  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n x^n$  e, desta forma, a solução da equação é  $a_n = 2^n$ .

Visando-se encontrar o termo geral da sequência  $a_n$ , faz-se necessário expandir a função geradora encontrada em série de potências de  $x$ . A Tabela 6 contém a expansão de algumas funções geradoras.

Função geradora	Expansão
$(1+x)^k$	$\binom{k}{0} + \binom{k}{1}x + \binom{k}{2}x^2 + \dots + \binom{k}{k}x^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n}x^n$
$(1+rx)^k$	$\binom{k}{0} + \binom{k}{1}rx + \binom{k}{2}r^2x^2 + \dots + \binom{k}{k}r^kx^k = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n}r^n x^n$
$(1+x^m)^k$	$\binom{k}{0} + \binom{k}{1}x^m + \binom{k}{2}x^{2m} + \dots + \binom{k}{k}x^{km} = \sum_{n=0}^k \binom{k}{n}x^{nm}$
$(1+x)^{-k}$	$\binom{-k}{0} + \binom{-k}{1}x + \binom{-k}{2}x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k+n-1}{n}x^n$
$(1+rx)^{-k}$	$\binom{-k}{0} + \binom{-k}{1}rx + \binom{-k}{2}r^2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{k+n-1}{n}r^n x^n$
$(1-x)^{-n}$	$\binom{-k}{0} + \binom{-k}{1}(-x) + \binom{-k}{2}(-x)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n}x^n$
$(1-rx)^{-k}$	$\binom{-k}{0} + \binom{-k}{1}(-rx) + \binom{-k}{2}(-rx)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n-1}{n}r^n x^n$
$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$	$\binom{k}{k}x^k + \binom{k+1}{k}x^{k+1} + \dots = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}x^n$

Tabela 6 – Expansão da função geradora

Fonte: (LUIS, 2006)

### 3.3 Equações com coeficientes variáveis

Grande parte das equações de diferenças lineares com coeficientes variáveis de ordem superior ou igual a dois, não possuem solução analítica. Contudo, existem algumas equações para as quais é possível se determinar uma solução explícita.

Nesta seção, são abordados métodos que permitem a obtenção de solução para alguns tipos de equações com coeficientes variáveis. Às vezes se consegue identificar uma solução não nula da equação homogênea. Neste caso, pode-se reduzir a ordem da equação. Por exemplo, para uma equação de 2ª ordem, é possível encontrar a 2ª solução conhecendo-se a primeira.

Assim, suponha que  $x_{1,n}$  é uma solução conhecida da equação

$$x_{n+2} + f_1(n)x_{n+1} + f_2(n)x_n = 0, \quad (3.28)$$

e seja  $x_{2,n}$  a outra solução a determinar. Pelo Teorema 7, sabe-se que

$$\Delta \frac{x_{2,n}}{x_{1,n}} = \frac{x_{1,n}\Delta x_{2,n} - x_{2,n}\Delta x_{1,n}}{x_{1,n}x_{1,n+1}} \quad (3.29)$$

e como  $\{x_{1,n}, x_{2,n}\}$  é um conjunto solução, segue que  $C(n) = x_{1,n}x_{2,n+1} - x_{1,n+1}x_{2,n}$ . Logo,

$$\Delta \frac{x_{2,n}}{x_{1,n}} = \frac{C(n)}{x_{1,n}x_{1,n+1}}. \quad (3.30)$$

Pela fórmula de Abel (Teorema 10) tem-se que  $C(n) = \left[ \prod_{i=n_0}^{n-1} f_2(i) \right] C(n_0)$ . Aplicando-se  $\Delta^{-1}$  nos dois membros de (3.30), tem-se

$$x_{2,n} = x_{1,n} \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{\left[ \prod_{j=n_0}^{i-1} f_2(j) \right] C(n_0)}{x_{1,i}x_{1,i+1}}. \quad (3.31)$$

Assim, a solução geral da equação (3.28) é

$$x_n = x_{1,n} \left[ \alpha_1 + \alpha_2 \sum_{i=n_0}^{n-1} \frac{\left[ \prod_{j=n_0}^{i-1} f_2(j) \right] C(n_0)}{x_{1,i}x_{1,i+1}} \right]. \quad (3.32)$$

**Exemplo 27.** Resolução da equação  $x_{n+2} - x_{n+1} - \frac{1}{n+1}x_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ .

Observe que  $x_{1,n} = n+1$  é uma solução da equação e que

$$C(n) = \left[ \prod_{i=0}^{n-1} \frac{-1}{n+1} \right] C(0) = C(0) \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Logo,

$$x_{2,n} = (n+1) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!(i+1)(i+2)}.$$

Desta forma, a solução geral da equação é

$$x_n = \alpha_1(n+1) + \alpha_2(n+1) \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{(i+2)!}.$$

Pode-se usar também, o método das funções geradoras para encontrar a primeira solução da equação e, em seguida, utilizar o método anterior para determinar a segunda.

**Exemplo 28.** Cálculo da solução de  $(n+2)a_{n+2} - (n+3)a_{n+1} + 2a_n = 0$ ,  $n \in \mathbb{Z}_0^+$ .

Seja  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ . Multiplicando cada termo da equação por  $x^{n+2}$  e aplicando somatórios em  $n$ , que variam de 0 até  $+\infty$ , tem-se que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)a_{n+2}x^{n+2} - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+3)a_{n+1}x^{n+2} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+2} = 0.$$

Pelas propriedades de somatório, vem que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} na_n x^n - x \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)a_n x^n + 2x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0.$$

Como  $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n x^{n-1}$ , segue que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} na_n x^n = x(f'(x) - a_1) \quad \text{e} \quad x \sum_{n=1}^{+\infty} (n+2)a_n x^n = x^2 f'(x) + 2x(f(x) - a_0)$$

e, assim,

$$x(1-x)f'(x) - 2x(1-x)f(x) = a_1 x - 2xa_0,$$

ou seja,

$$f'(x) - 2f(x) = \frac{a_1 - 2a_0}{1-x}.$$

Quando  $a_1 = 2a_0$ , esta equação tem solução  $f(x) = e^{2x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!}$ , pois uma solução é  $a_{1,n} = \frac{2^n}{n!}$ .

Para se encontrar a segunda solução, procede-se de forma semelhante à utilizada no exemplo anterior. Como  $C(n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2}{i+2}$ , então o Casoratiano satisfaz a equação  $C(n+1) = \frac{2}{n+2}C(n)$ .

Assim,  $C(n) = \frac{2^n}{(n+1)!}$  e a 2ª solução é

$$a_{2,n} = \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{2^i}{(i+1)!}}{\frac{2^i}{i!} \frac{2^{i+1}}{(i+1)!}} = \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i!}{2^{i+1}}.$$

Desta forma, a solução geral da equação dada é

$$a_n = \alpha_1 \frac{2^n}{n!} + \alpha_2 \frac{2^n}{n!} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{i!}{2^{i+1}}.$$

Em alguns casos, a equação com coeficientes variáveis pode ser reduzida a uma equação com coeficientes constantes.

Com efeito, seja a equação

$$c_k x_{n+k} + c_{k-1} f(n) x_{n+k-1} + \dots + c_0 f(n) f(n-1) \dots f(n-k+1) x_n = g(n), \quad (3.33)$$

onde  $c_i$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, k$ , são coeficientes numéricos. Efetuando a substituição

$$x_n = f(n-k)f(n-k-1) \dots f(b) y_n, \quad n \geq k+b,$$

e dividindo os dois membros de (3.33) por  $f(n)f(n-1) \dots f(b)$ , tem-se

$$c_k y_{n+k} + c_{k-1} y_{n+k-1} + \dots + \alpha_1 y_{n+1} + a_0 y_n = \frac{g(n)}{f(n)f(n-1) \dots f(b)},$$

que é uma equação de diferenças linear de ordem  $k$ , não homogênea com coeficientes constantes.

**Exemplo 29.** Resolução da equação  $x_{n+2} - 3nx_{n+1} + 2n(n-1)x_n = 0$ .

Seja  $x_n = (n-2)(n-3)\dots 2 \cdot 1 \cdot y_n = (n-2)!y_n$ ,  $n \geq 2$ . Dividindo os dois membros da equação por  $n!$ , tem-se  $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$ , cuja solução geral é  $y_n = \alpha_1 + \alpha_2 2^n$  e assim,  $x_n = (n-1)!(\alpha_1 + \alpha_2 2^n)$ .

# EQUAÇÕES DE DIFERENÇAS LINEARES DE 2ª ORDEM: ESTABILIDADE E APLICAÇÕES

Neste capítulo são estabelecidos resultados sobre a estabilidade das soluções de equações de 2ª ordem com coeficientes constantes. Também é feita uma análise sobre a estabilidade de uma particular equação de 2ª ordem não homogênea em que a perturbação é uma constante.

Exemplos são apresentados para ilustrar a teoria desenvolvida e complementados com aplicações que envolvem a sequência de Fibonacci, crescimento populacional de escargots, racionamento de água e o modelo do produto nacional.

## 4.1 Estabilidade das soluções de equações de 2ª ordem com coeficientes constantes

Uma solução  $x_{p,n}$  da equação (3.1) é estável, se para qualquer outra solução  $x_n$  da equação (3.1), a diferença  $D_n = x_n - x_{p,n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{Z}_0^+$  é limitada. Quando  $\lim_{n \rightarrow +\infty} D_n = 0$ ,  $x_{p,n}$  é assintoticamente estável. A solução  $x_{p,n}$  é instável se não for estável.

Em geral, não se pode tirar conclusões sobre o comportamento assintótico das soluções de uma equação linear de ordem  $k$ . Entretanto, para as equações com coeficientes constantes, é possível se estabelecer alguns resultados.

Para mais detalhes sobre o assunto, consultar as referências (LUIS, 2006) e (ELAYDI, 2004).

**Teorema 25.** *A solução  $x_n$  da equação (3.11) é assintoticamente estável se as raízes características estão todas dentro do círculo unitário no plano complexo.*

*Demonstração.* Sabe-se que  $x_n = x_{h,n} + x_{p,n}$  e de (3.20), tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x_{p,n}| &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \sum_{i=1}^r \lambda_i^n (\alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}n + \alpha_{i,2}n^2 + \dots + \alpha_{i,m_{i-1}}n^{m_{i-1}}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^r \lim_{n \rightarrow +\infty} |\lambda_i|^n (|\alpha_{i,0}| + |\alpha_{i,1}|n + |\alpha_{i,2}|n^2 + \dots + |\alpha_{i,m_{i-1}}|n^{m_{i-1}}). \end{aligned}$$

Logo,  $|\lambda_i| < 1 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} |x_n - x_{p,n}| = 0$ . □

**Teorema 26.** *A solução  $x_{p,n}$  da equação (3.11) é estável se o valor absoluto das raízes características é menor ou igual a 1 e, quando o valor absoluto for 1, a solução é estável se as raízes forem simples.*

*Demonstração.* Se o valor absoluto das raízes características for menor do que 1, por (3.20)  $D_n$  é limitada. Quando o valor absoluto de alguma raiz for 1, então  $D_n$  só é limitada se a raiz for simples, pois caso contrário, para um polinômio em  $n$  de grau maior ou igual a 1,  $D_n$  nunca será limitada. □

Com o objetivo de simplificar a análise sobre a estabilidade das soluções, o estudo da mesma será baseado em equações de diferenças lineares de 2ª ordem com coeficientes constantes, ou seja, equações da forma

$$x_{n+2} + p_1x_{n+1} + p_2x_n = 0. \quad (4.1)$$

Suponha  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  raízes da equação característica associada à equação (4.1). Então, se:

1.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais e distintas, a solução geral da equação é  $x_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$ . Desta forma  $x_{1,n} = \lambda_1^n$  e  $x_{2,n} = \lambda_2^n$  são duas soluções linearmente independentes da equação (4.1). Suponha  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  (a análise para  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$  é análoga). Para esta situação, seja  $\lambda_1$  a raiz dominante e  $x_{1,n}$  a solução dominante. O comportamento do limite da solução é determinado pela solução dominante, já que

$$x_n = \lambda_1^n \left[ \alpha_1 + \alpha_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n \right].$$

Como  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| < 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^n = 0$ . Logo,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_1 \lambda_1^n$ .

Há seis situações que podem ser destacadas neste caso (ver Figura 2):



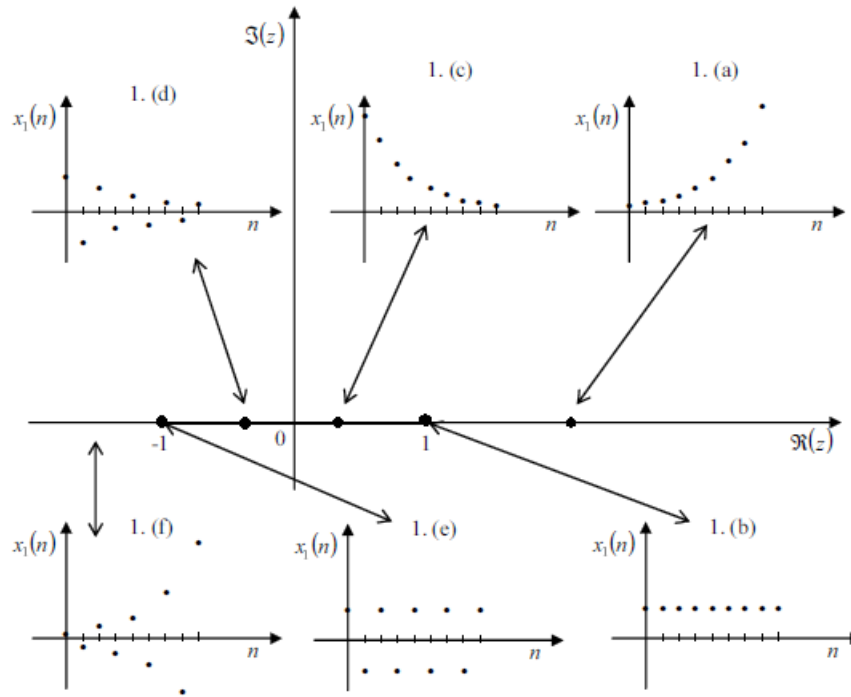


Figura 2 – Raízes características reais distintas

Fonte: (LUIS, 2006)

(a)  $\lambda_1 > 1$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha_1 > 0 \\ -\infty, & \text{se } \alpha_1 < 0 \end{cases}$ , a sequência  $(\alpha_1 \lambda_1^n)_0^\infty$  diverge e assim a solução é instável;

(b)  $\lambda_1 = 1$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \alpha_1$ , a sequência  $(\alpha_1 \lambda_1^n)_0^\infty$  é constante e assim a solução é estável;

(c)  $0 < \lambda_1 < 1$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ , a sequência  $(\alpha_1 \lambda_1^n)_0^\infty$  é monótona decrescente e assim a solução é assintoticamente estável;

(d)  $-1 < \lambda_1 < 0$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ , a sequência  $(\alpha_1 \lambda_1^n)_0^\infty$  oscila convergindo para zero sendo a solução assintoticamente estável;

(e)  $\lambda_1 = -1$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \begin{cases} \alpha_1, & \text{se } n \text{ é par} \\ -\alpha_1, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$ , a sequência  $(\alpha_1 \lambda_1^n)_0^\infty$  oscila entre  $-\alpha_1$  e  $\alpha_1$  acarretando uma solução instável;

(f)  $\lambda_1 < -1$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$ , a sequência  $(\alpha_1 \lambda_1^n)_0^\infty$  oscila, porém a amplitude aumenta e assim a solução é instável.

2.  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$  é uma raiz de multiplicidade 2. A solução geral da equação é  $x_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) \lambda^n$  e, nesta situação, se  $|\lambda| \geq 1$ , então  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \infty$  e assim a solução é instável. Para  $|\lambda| < 1$  tem-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \lambda^n = 0$  e assim  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = 0$ . Logo, a solução é assintoticamente estável.

3.  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são duas raízes complexas conjugadas na forma  $a \pm ib$ . A solução da equa-

ção é  $x_n = \rho^n(\alpha_1 \cos(n\theta) + \alpha_2 \sin(n\theta))$ , onde  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  e  $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$ . Seja  $\omega = \tan^{-1}\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$ , ou seja,  $\cos \omega = \frac{\alpha_1}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$  e  $\sin \omega = \frac{\alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}$ . Logo,

$$\begin{aligned} x_n &= \rho^n \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} [\cos(\omega) \cos(n\theta) + \sin(\omega) \sin(n\theta)] \\ &= \alpha \rho^n \cos(n\theta - \omega). \end{aligned}$$

Neste caso, a solução oscila, pois a função cosseno também oscila. Há três situações para serem analisadas (ver Figura 3):

(a)  $\rho > 1$ , as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  estão fora do círculo unitário. A solução  $x_n$  oscila aumentando a amplitude e, desta forma, a solução é instável;

(b)  $\rho = 1$ , as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  estão sobre a circunferência unitária. A solução  $x_n$  oscila de forma constante mantendo a amplitude, e assim, a solução é estável;

(c)  $\rho < 1$ , as raízes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$  estão dentro do círculo unitário. A solução  $x_n$  oscila, mas convergindo para zero e assim a solução é assintoticamente estável.

**Observação 7.** Note que a solução da equação (4.1) oscila em torno de zero se, e somente se, nenhuma das raízes características é real positiva ou complexa conjugada, e é assintoticamente estável se, e somente se,  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ .

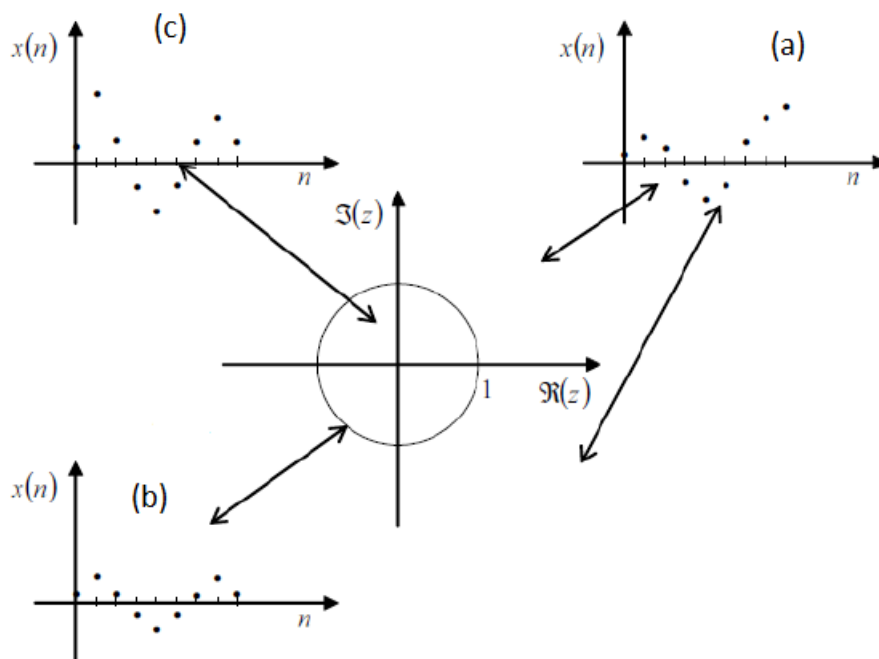


Figura 3 – Raízes características imaginárias

Fonte: (LUIS, 2006)

**Observação 8.** Na análise da estabilidade da solução da equação (4.1), não se considerou a dependência de condições iniciais. As soluções particulares podem apresentar comportamentos diferentes, dependendo das condições impostas.

**Exemplo 30.** A equação de diferenças

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 2x_n \quad (4.2)$$

tem equação característica  $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ , cujas raízes são  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = -1$ .

A solução geral de (4.2) é dada por

$$x_n = c_1(2)^n + c_2(-1)^n.$$

Considerando as condições iniciais  $x_0 = 5$  e  $x_1 = 4$ , a solução particular de (4.2) tem a forma

$$x_n = 3(2)^n + 2(-1)^n.$$

Pela Figura 4, observa-se que  $x_n \rightarrow \infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

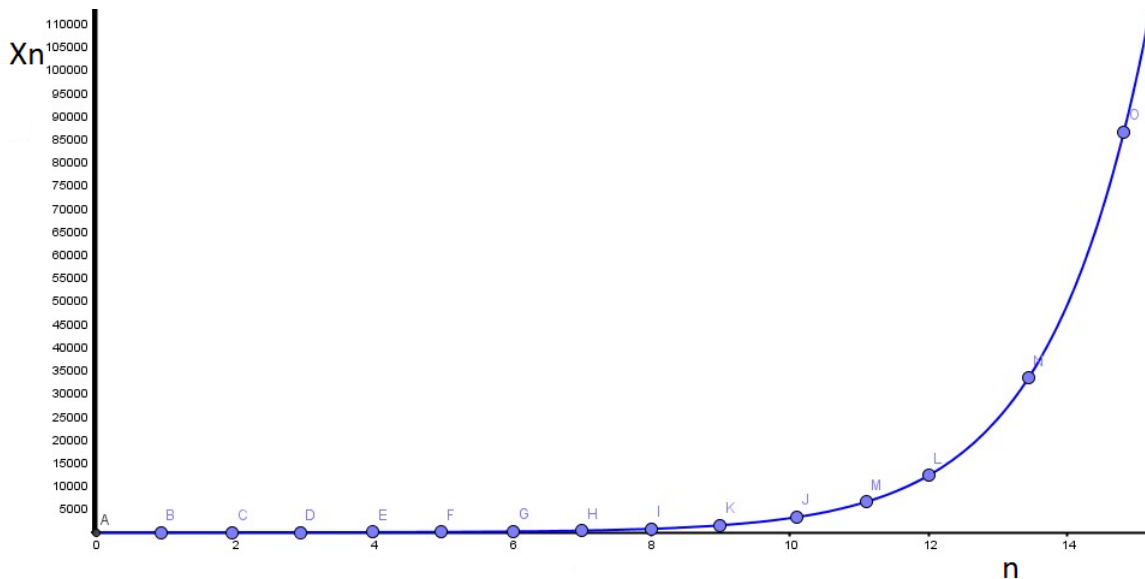


Figura 4 – A sequência  $x_n = 3(2)^n + 2(-1)^n$  é divergente

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Exemplo 31.** Seja

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} - 4x_n \quad (4.3)$$

A equação característica associada à (4.3) é dada por  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ . Portanto,  $\lambda = 2$  é uma raiz de multiplicidade 2.

A solução geral de (4.3) é dada por

$$x_n = c_1(2)^n + c_2n(2)^n.$$

Supondo  $x_0 = 6$  e  $x_1 = 4$ , a solução particular de (4.3) é

$$x_n = 6(2)^n - 4n(2)^n.$$

Pela Figura 5, observa-se que  $x_n \rightarrow -\infty$  quando  $n \rightarrow \infty$ .

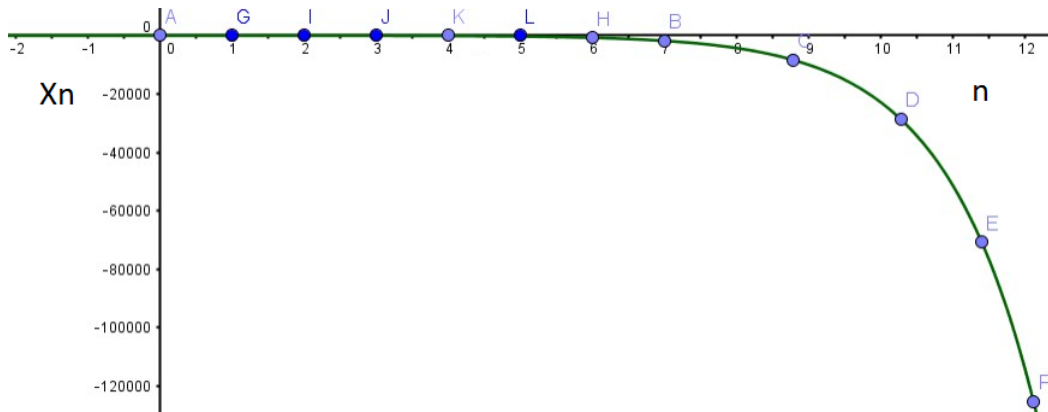


Figura 5 – A sequência  $x_n = 6(2)^n - 4n(2)^n$  é divergente

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Exemplo 32.** A equação de diferenças

$$x_{n+2} - 2ax_{n+1} + 2a^2x_n = 0; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = a \quad \text{e} \quad a > 0 \quad (4.4)$$

tem equação característica dada por

$$\lambda^2 - 2a\lambda + 2a^2 = 0,$$

cujas raízes são  $\lambda_1 = a(1 + i)$  e  $\lambda_2 = a(1 - i)$ . Então,  $\rho = a\sqrt{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

A solução de (4.4) é dada por

$$x_n = (a\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Como  $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \leq 1$ ,  $x_n$  terá oscilações decrescentes quando  $a\sqrt{2} < 1$ .

Observe, na Figura 6, que  $x_n \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Exemplo 33.** A equação de diferenças

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = 1 \quad (4.5)$$

tem equação característica dada por

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

cujas raízes são  $\lambda_1 = 1 + i$  e  $\lambda_2 = 1 - i$ . Então,  $\rho = \sqrt{2}$  e  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

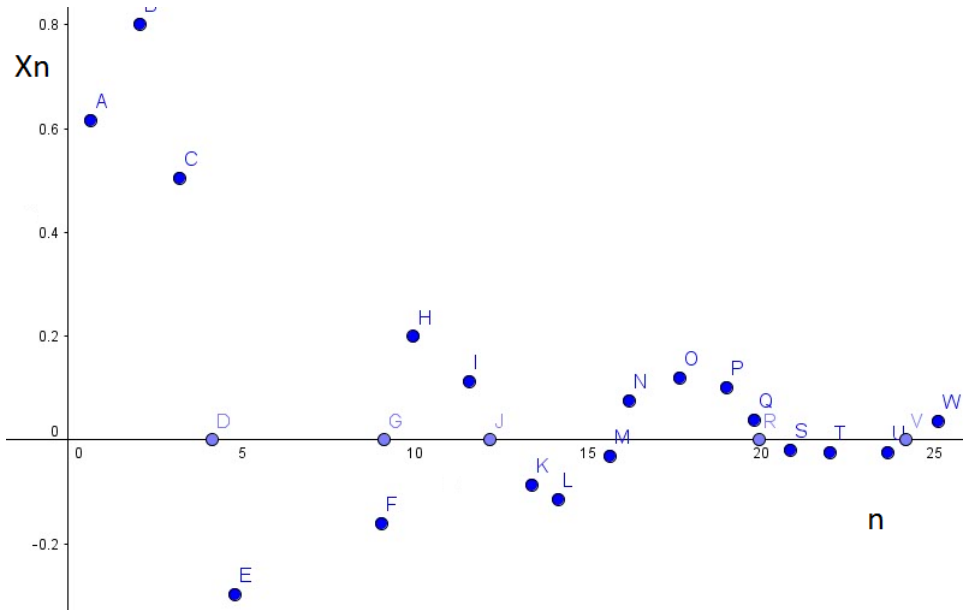


Figura 6 – A solução  $x_n = \left(\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  é uma sequência convergente

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando as condições iniciais dadas, a solução particular de (4.5) é dada por

$$x_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right).$$

Neste caso, a amplitude  $\rho^n = (\sqrt{2})^n$  é crescente e o comportamento da solução é dado na Figura 7.

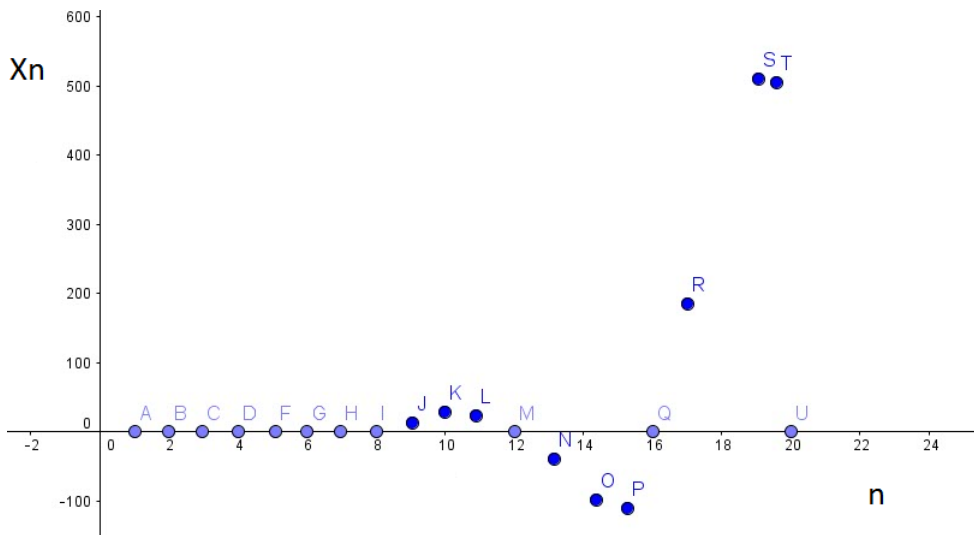


Figura 7 – A solução  $x_n = (\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)$  é uma sequência divergente

Fonte: Elaborada pelo autor.

**Exemplo 34.** A equação de diferenças

$$x_{n+2} + x_n = 0; \text{ com } x_0 = 0; \quad x_1 = 1 \tag{4.6}$$

tem polinômio característico dado por

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i \text{ e } \lambda_2 = -i.$$

Assim,  $\rho = 1$  e  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

A solução da equação (4.6) é

$$x_n = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Usando as condições iniciais, obtém-se  $c_1 = 0$  e  $c_2 = 1$ . Então,

$$x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

é a solução particular de (4.6).

O comportamento de  $x_n$  está retratado na Figura 8.

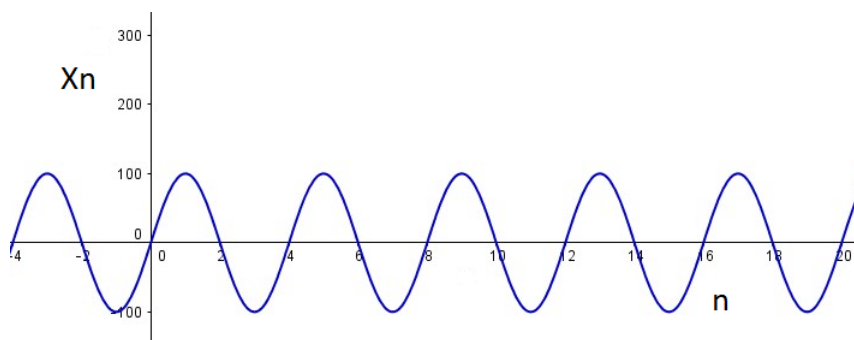


Figura 8 – A sequência  $x_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  oscila em torno do eixo  $n$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Considere a equação não homogênea com coeficientes constantes

$$x_{n+2} + p_1 x_{n+1} + p_2 x_n = c, \quad (4.7)$$

onde  $c$  é uma constante não nula.

Conhecida a solução da equação homogênea associada, é necessário determinar uma solução particular para se exibir a correspondente solução geral.

No caso da equação (4.7), se a constante não faz parte da solução homogênea, então a solução particular só pode ser constante.

Na determinação dos pontos de equilíbrio da equação (4.7), ou seja, os valores para os quais  $x_{n+2} = x_{n+1} = x_n = x^*$ , verifica-se que  $x^* = \frac{c}{1 + p_1 + p_2}$  é uma solução particular de (4.7).

Assim, a solução geral é  $x_n = x_{h,n} + x^*$ . Tem-se que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$  se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{h,n} = 0$ .

Mas,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{h,n} = 0$  quando  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$  e  $|\lambda_1| < 1$ , ou seja, quando  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ . Também se verifica que todas as soluções da equação (4.7) oscilam em torno de  $x^*$  se, e somente se, nenhuma das raízes características é real positiva ou complexa conjugada.

Independente das raízes características fornecerem informações sobre a estabilidade assintótica de uma equação de diferenças de 2ª ordem, é importante, nas aplicações, se ter um critério de estabilidade baseado nos coeficientes  $p_1$  e  $p_2$  de (4.1) e (4.7).

O seguinte teorema estabelece esse critério.

**Teorema 27.** *Os pontos de equilíbrio das equações (4.1) e (4.7) são assintoticamente estáveis, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x^*$  se, e somente se,  $1 + p_1 + p_2 > 0$ ,  $1 - p_1 + p_2 > 0$  e  $1 - p_2 > 0$ .*

*Demonstração.* ( $\Rightarrow$ ) Por hipótese tem-se que  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes de  $\lambda^2 + p_1\lambda + p_2 = 0$ .

Sejam

$$\lambda_1 = \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}$$

e

$$\lambda_2 = \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2}.$$

No caso em que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, ou seja  $p_1^2 - 4p_2 \geq 0$ , tem-se

$$\begin{aligned} -2 + p_1 &< \sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1 \\ -2 + p_1 &< -\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1. \end{aligned}$$

A somatória das raízes resulta em  $-p_1$  e, como as raízes variam entre  $-1$  e  $1$ , tem-se que  $-2 < -p_1 < 2$ , ou seja,  $-2 < \lambda_1 + \lambda_2 < 2$ . Desta forma,  $2 + p_1 > 0$  e  $2 - p_1 > 0$ . Baseado em  $|\lambda_1| < 1$ , tem-se que  $\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 + p_1$ , ou seja,  $p_1^2 - 4p_2 < (2 + p_1)^2$ . Portanto  $1 + p_1 + p_2 > 0$ . Como  $|\lambda_2| < 1$ , tem-se que  $\sqrt{p_1^2 - 4p_2} < 2 - p_1$  e assim,  $1 - p_1 + p_2 > 0$ .

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são raízes complexas conjugadas, então  $\lambda_1 = \frac{-p_1 + i\sqrt{4p_2 - p_1^2}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{-p_1 - i\sqrt{4p_2 - p_1^2}}{2}$  e como  $-1 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$ , então  $\lambda_1\lambda_2 < 1$ , ou seja,  $p_2 < 1$ .

( $\Leftarrow$ ) Suponha que  $1 + p_1 + p_2 > 0$ ,  $1 - p_1 + p_2 > 0$  e  $1 - p_2 > 0$ . É preciso mostrar que  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ , onde  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são as raízes da equação característica.

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são complexas conjugadas, então  $\lambda_{1,2} = \frac{-p_1 \pm i\sqrt{4p_2 - p_1^2}}{2}$  com  $4p_2 - p_1^2 > 0$ . Desta última relação segue que  $p_2 > 0$ . Então,

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{\frac{p_1^2}{4} + \frac{4p_2 - p_1^2}{4}} = \sqrt{p_2} < 1.$$

Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são reais, da relação  $1 + p_1 + p_2 > 0$ , tem-se que  $-4p_2 < 4p_1 + 4$ ,  $1 + p_1 > -p_2$  e  $2 + p_1 > 1 - p_2 > 0$ . Então,

$$|\lambda_1| = \left| \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \right| < \left| \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 + 4p_1 + 4}}{2} \right| = \left| \frac{-p_1 + (p_1 + 2)}{2} \right| = 1.$$

Da relação  $1 - p_1 + p_2 > 0$ , segue que  $-4p_2 < 4 - 4p_1$  e  $2 - p_1 > 1 - p_2 > 0$ . Assim,

$$|\lambda_2| = \left| \frac{-p_1 - \sqrt{p_1^2 - 4p_2}}{2} \right| < \left| \frac{-p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_1 + 4}}{2} \right| = \left| \frac{-p_1 - (2 - p_1)}{2} \right| = 1.$$

Portanto,  $\max \{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} < 1$ . □

**Exemplo 35.** A obtenção das condições para as quais a solução da equação

$$x_{n+2} - a(1+b)x_{n+1} + abx_n = 1, \quad a, b > 0$$

a) converge para o ponto de equilíbrio  $x^*$  e

b) oscila em torno do ponto de equilíbrio  $x^*$ .

O ponto de equilíbrio é  $x^* = \frac{1}{1-a}$ ,  $a \neq 1$

a) Aplicando as condições do teorema à equação dada, tem-se

$$a < 1, \quad 1 + a + 2ab > 0, \quad ab < 1$$

A segunda desigualdade  $1 + a + 2ab > 0$  é sempre satisfeita, pois  $a > 0$  e  $b > 0$ . Logo,  $0 < a < 1$  e  $0 < b < \frac{1}{a}$ .

b) A solução oscila em torno de  $x^*$  se as raízes características forem reais negativas ou complexas conjugadas.

As raízes características são

$$\lambda_{1,2} = \frac{a(b+1)}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2(1+b)^2 - 4ab}}{2}.$$



No primeiro caso, tem-se

$$a^2(1+b)^2 > 4ab \quad \text{ou} \quad a > \frac{4b}{(1+b)^2}$$

e

$$a(1+b) < 0 \quad \text{e} \quad a(b+1) > \sqrt{a^2(1+b)^2 - 4ab},$$

o que é impossível. Portanto, se  $a > \frac{4b}{(1+b)^2}$  não há solução oscilatória.

Se  $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$ , tem-se que  $a < \frac{4b}{(1+b)^2}$ . Portanto, todas as soluções da equação oscilam em torno de  $x^*$  se  $a < \frac{4b}{(1+b)^2}$ .

## 4.2 Aplicações

### A sequência de Fibonacci

Na Introdução cita-se o seguinte problema proposto por Leonardo de Pisa (1175 - 1250), conhecido como Fibonacci: "Quantos casais de coelhos haverá em um ano, começando com um só casal, se em cada mês cada casal adulto gera um novo casal, o qual se tornará adulto em dois meses?"

Este problema pode ser formulado através de uma equação de diferenças

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}, \quad \text{com} \quad x_0 = 1 \quad \text{e} \quad x_1 = 1, \quad (4.8)$$

onde  $x_n$  é o número de casais no período  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

Esta equação gera a sequência 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... conhecida como sequência de Fibonacci.

A solução da equação (4.8) é obtida em termos das raízes da equação característica,

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

que são  $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ . Portanto, a solução geral de (4.8) é

$$x_n = \alpha_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes.

Através das condições iniciais  $x_0 = 1$  e  $x_1 = 1$ , tem-se

$$\begin{cases} 1 &= \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 &= \alpha_1 \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \alpha_2 \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right). \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \text{ e } \alpha_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}.$$

Logo, a solução particular de (4.8) é

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}.$$

Observa-se que  $\lambda_1 > 1$  e  $-1 < \lambda_2 < 0$ ; assim, a raiz característica dominante é  $\lambda_1$  pois  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , o que garante que a sequência de Fibonacci é crescente e não limitada, e portanto não convergente.

A razão dos termos sucessivos da sequência de Fibonacci fornece uma nova sequência que é convergente, ou seja,

$$b_n = \frac{x_{n+1}}{x_n} \rightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

De fato, seja  $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n > 0$ . Portanto,

$$\frac{1}{\phi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{x_{n+1}}.$$

Como  $x_n$  satisfaz a equação (4.8), então

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n + x_{n-1}}{x_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n-1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Logo, o valor do limite de  $b_n$  deve satisfazer a equação

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \text{ ou } \phi^2 = \phi + 1.$$

Como  $\phi > 0$ , então

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,61803\dots,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (número áureo).}$$

Para mais detalhes, consultar a referência (BASSANEZI, 2010).

## Crescimento populacional de escargots

Escargots são moluscos gastrópodes terrestres de concha espiralada calcária, pertencentes à subordem Stylommatophora, que também inclui as lesmas. São animais com ampla distribuição ambiental e geográfica.

Na dinâmica do crescimento populacional dos escargots, vamos considerar 3 estágios distintos: ovos, jovens e adultos, supondo que não há mortalidade em nenhum estágio.

### Considerações:

a) Todo escargot adulto desova e o faz a cada 4 meses.

Seja  $c$  a quantidade de ovos viáveis em uma desova;  $c > 0$ . Então,  $C_n = A_n c$  é a quantidade de ovos viáveis num estágio  $n$ , onde  $A_n$  é a quantidade de escargots adultos em  $n$ .

b) Um escargot jovem torna-se adulto em 8 meses.

Seja  $B_n$  a quantidade de jovens em cada estágio  $n$ . Cada estágio  $n$  corresponde a 4 meses. Então,  $C_n = (\text{ovos provenientes da desova dos adultos}) + (\text{ovos provenientes da desova dos jovens que chegaram à fase adulta})$ , ou seja,

$$C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1}.$$

$A_n = (\text{adultos no estágio } n-1) + (\text{jovens que chegaram à fase adulta})$ , ou seja,

$$A_n = A_{n-1} + B_{n-1}.$$

$B_n = (\text{ovos do estágio } n-1)$ , ou seja,

$$B_n = C_{n-1}.$$

Tem-se assim o sistema

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + B_{n-1} \\ B_n = C_{n-1} \\ C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1}. \end{cases}$$

O sistema pode ser transformado numa equação de diferenças linear de segunda ordem.

De fato, da segunda equação do sistema, tem-se  $B_{n-1} = C_{n-2}$  e da terceira e primeira equações, respectivamente, vem que  $C_n = cA_{n-1} + cB_{n-1} = cA_{n-1} + c(A_n - A_{n-1}) = cA_n$ . Logo,  $A_n = A_{n-1} + B_{n-1} = A_{n-1} + C_{n-2} = A_{n-1} + cA_{n-2}$ . Considerando-se as condições iniciais  $A_0 = a$ ,  $B_0 = C_0 = 0$ , obtém-se a equação de diferenças

$$\begin{cases} A_{n+1} = A_n + cA_{n-1} \\ A_0 = A_1 = a. \end{cases} \quad (4.9)$$

Observe que se  $c = 0$ , isto é, se não há novos ovos no sistema, então  $A_{n+1} - A_n = 0 \Rightarrow A_n = A_0$  (constante), para todo  $n \geq 1$ .

Se  $c \neq 0$ , a equação característica de (4.9) é  $\lambda^2 - \lambda - c = 0$ , cujas raízes são

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2} \Rightarrow |\lambda_1| > 1 \\ \lambda_2 &= \frac{1 - \sqrt{1 + 4c}}{2} \Rightarrow |\lambda_2| = \frac{\sqrt{1 + 4c} - 1}{2} < 1 \Leftrightarrow 0 < c < 2.\end{aligned}$$

Logo, a solução geral é dada por

$$A_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$$

e a solução particular é determinada com os coeficientes obtidos do sistema

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = a \\ \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 = a. \end{cases}$$

Como  $\alpha_1 > 0$  e  $\lambda_1 > 1$ , a sequência  $A_n$  é crescente e não limitada, isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = +\infty$ .

## Racionamento de Água

Em determinadas regiões, o racionamento de água tornou-se necessário na vida das pessoas. Numa certa região, é permitido regar as hortaliças entre 21 horas e 9 horas. Suponha que as pessoas podem adicionar uma quantidade  $q$  de água às suas hortaliças neste período, porém metade desta quantidade é perdida por evaporação no intervalo de 9 horas às 21 horas. Assume-se que as hortaliças contêm uma quantidade inicial  $q_0$  de água às 21 horas do 1º dia do racionamento.

Seja  $y_n$  a quantidade de água no solo após  $n$ -ésimos períodos de 12 horas. Assim

$$\begin{aligned}y_1 &= y_0 + q, & y_2 &= \frac{y_0}{2} + \frac{q}{2} \\ y_3 &= \frac{y_1}{2} + q, & y_4 &= \frac{y_2}{2} + \frac{q}{2} \\ y_5 &= \frac{y_3}{2} + q, & y_6 &= \frac{y_4}{2} + \frac{q}{2}\end{aligned}$$

Assim, se  $n$  é ímpar tem-se que  $y_{n+2} = \frac{1}{2}y_n + q$  e se  $n$  é par, tem-se  $y_{n+2} = \frac{1}{2}y_n + \frac{q}{2}$ . De forma geral, tem-se

$$y_{n+2} - \frac{1}{2}y_n = \frac{q}{4}(3 - (-1)^n).$$

A solução da equação homogênea associada é

$$y_{h,n} = c_1 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n + c_2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n.$$

Usando o método dos coeficientes indeterminados, tem-se que  $y_{p,n} = \frac{q}{2}(3 - (-1)^n)$ . Assim, a solução geral do modelo é

$$y_n = c_1 \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n + c_2 \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^n + \frac{q}{2}(3 - (-1)^n).$$

Como as condições iniciais são  $y_0 = q_0$  e  $y_1 = q_0 + q$ , segue que

$$c_1 = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}(q_0 - q) \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}(q_0 - q).$$

Observe que quando  $n$  cresce,  $y_n$  oscila entre  $q$  e  $2q$ .

## Produto nacional

O produto nacional  $P_n$ , nos países capitalistas, é dado por

$$P_n = C_n + I_n + G_n,$$

onde  $C_n$  representa as despesas do consumo público,  $I_n$  as despesas dos investimentos privados e  $G_n$  as despesas governamentais. Em geral, o período  $n$  é representado em anos.

Alguns pressupostos, aceitos em Economia, são assumidos.

1. As despesas de consumo público no período  $n$  são proporcionais ao produto nacional no período  $n - 1$ , ou seja,  $C_n = \alpha P_{n-1}$ ,  $\alpha > 0$ . A constante  $\alpha$  é mundialmente conhecida na economia por "propensão marginal a consumir".

2. Os gastos de investimento privado no período  $n$  são proporcionais à diferença do consumo público no período  $n$  com o do período  $n - 1$ , ou seja,  $I_n = \beta \Delta C_{n-1}$ ,  $\beta > 0$ .

3. As despesas governamentais são constantes no decorrer do tempo. Suponha, sem perda de generalidade, que  $G_n = 1$ .

Assim, o produto nacional no período  $n$  é dado por

$$P_n = \alpha P_{n-1} + \beta \Delta[\alpha P_{n-2}] + 1, \quad n = 2, 3, \dots$$

Esta equação é equivalente à equação

$$P_{n+2} - \alpha(\beta + 1)P_{n+1} + \alpha\beta P_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

O ponto de equilíbrio desta equação é  $P^* = \frac{1}{1 - \alpha}$ . Pelo exemplo 35, as soluções desta equação oscilam em torno do ponto de equilíbrio, ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \rightarrow P^*$  se  $\alpha < \frac{4\beta}{(1 + \beta)^2}$  (isto ocorre quando as raízes da equação característica são complexas). Pelo Teorema 27, o ponto de equilíbrio  $P^*$  é assintoticamente estável (ou simplesmente estável na linguagem econômica), se

$$1 - \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta > 0, \quad 1 + \alpha(1 + \beta) + \alpha\beta > 0 \quad \text{e} \quad 1 - \alpha\beta > 0.$$

A segunda condição é automaticamente verificada, pois  $\alpha$  e  $\beta$  são positivos. As outras duas condições podem ser reescritas na forma

$$\alpha < 1 \text{ e } \alpha < \frac{1}{\beta}.$$

Estas duas últimas condições são necessárias e suficientes para que o produto nacional  $P^*$  seja estável. Significam que a "propensão marginal a consumir" é menor que 1 e, quando multiplicada por  $\beta$ , também é inferior a 1. Se estas duas condições forem satisfeitas, a sequência dos valores do produto nacional converge para  $P^*$ , independentemente dos valores iniciais. Na Figura 9, pode-se visualizar a região de estabilidade em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ .

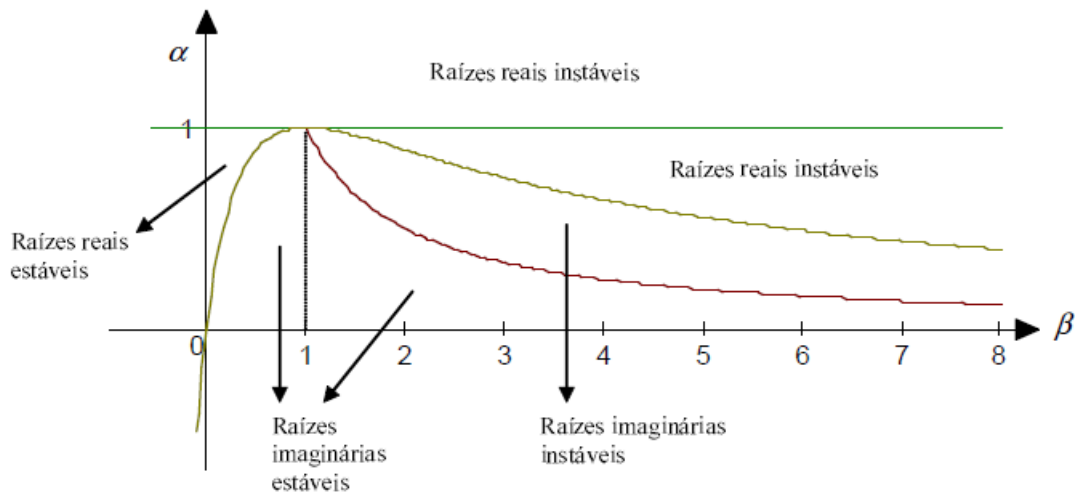


Figura 9 – Região de estabilidade no plano  $(\beta; \alpha)$

Fonte: (LUIS, 2006)

---

## PROPOSTA DIDÁTICA

---

Neste capítulo é apresentada uma proposta didática envolvendo uma situação do cotidiano (negociação de salários), na qual fica evidenciada a utilização de uma equação de diferenças de 2ª ordem com coeficientes constantes.

O modelo de negociação de salários é representado por uma equação de diferenças de 2ª ordem e será utilizado como base para uma atividade didática com os alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual de Ribeirão Preto. A escolha desta sala deve-se ao bom desempenho apresentado pelos alunos em Matemática.

Os pré-requisitos para a aplicação do modelo são as teorias de sistemas de equações do 1º grau, construção de tabelas e disposição de dados na mesma, os quais são ensinados nos oitavos e nonos anos do ensino fundamental. Desta forma, pode-se aplicar a atividade nos três anos do ensino médio.

O objetivo da atividade didática é simular uma prática que ocorre nas empresas envolvendo a Matemática. O tempo de aplicação utilizado foi de duas aulas de 50 minutos cada.

Inicialmente será apresentada a formulação matemática do modelo, e em seguida, será descrita a atividade realizada com os alunos. Para finalizar, serão descritos os resultados da atividade desenvolvida na escola e feita a comparação dos mesmos com os resultados gerados pelo modelo.

### 5.1 A negociação de salários

É considerado um modelo simples para a negociação de salários entre os trabalhadores e a administração de uma empresa.

Na negociação, o trabalhador solicita um salário de  $L_0$  reais/mês e a diretoria oferece  $M_0$  reais/mês. Em situações reais essas negociações podem demorar, fazendo com que ocorram

várias reuniões entre as partes interessadas. A cada passo da negociação, o representante dos trabalhadores apresenta uma exigência salarial e, em contrapartida, a diretoria apresenta uma contraproposta inferior ao exigido pelos trabalhadores, o que exige mais reuniões de negociação.

Um modelo matemático para esta situação pode ser construído assumindo que a cada etapa da negociação, o novo salário apresentado pela diretoria, acrescenta ao último oferecido uma fração  $\alpha$  da diferença entre o último salário oferecido e o exigido pelos trabalhadores. Da mesma forma, o representante dos trabalhadores atualiza o valor pedido anteriormente, subtraindo à última proposta uma fração  $\beta$  da diferença entre o exigido e o oferecido na etapa anterior.

Sejam  $M_n$  e  $L_n$ , respectivamente, o salário oferecido pela diretoria e o exigido pelos trabalhadores na  $n$ -ésima reunião. As equações que representam as negociações são dadas por

$$M_{n+1} = M_n + \alpha(L_n - M_n) \quad \text{e} \quad L_{n+1} = L_n - \beta(L_n - M_n), \quad (5.1)$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes positivas tais que  $0 < \alpha, \beta < 1$ .

As equações (5.1) podem ser reescritas na forma

$$M_{n+1} = (1 - \alpha)M_n + \alpha L_n \quad \text{e} \quad L_{n+1} = \beta M_n + (1 - \beta)L_n.$$

Eliminando-se  $L_n$  da 1ª equação, tem-se

$$M_{n+2} = (1 - \alpha)M_{n+1} + \alpha \left[ (1 - \beta) \frac{M_{n+1} - (1 - \alpha)M_n}{\alpha} + \beta M_n \right],$$

ou seja,

$$M_{n+2} - (2 - \alpha - \beta)M_{n+1} + (1 - \alpha - \beta)M_n = 0. \quad (5.2)$$

A equação característica de (5.2) é  $\lambda^2 - (2 - \alpha - \beta)\lambda + (1 - \alpha - \beta) = 0$ , que possui as soluções  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 1 - \alpha - \beta$ . Desta forma, a solução de (5.2) é

$$M_n = A + B(1 - \alpha - \beta)^n,$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias.

A solução  $L_n$  pode ser encontrada através da relação  $L_n = \frac{M_{n+1} - (1 - \alpha)M_n}{\alpha}$ . Substituindo o valor de  $M_n$ , tem-se

$$L_n = \frac{A + B(1 - \alpha - \beta)^n - (1 - \alpha)[A + B(1 - \alpha - \beta)^n]}{\alpha} = A - B \frac{\beta}{\alpha} (1 - \alpha - \beta)^n.$$

As constantes  $A$  e  $B$  podem ser determinadas impondo as condições iniciais, ou seja,  $A + B = M_0$  e  $A - B \frac{\beta}{\alpha} = L_0$ . A partir destas relações tem-se que  $A = \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha + \beta}$  e  $B = \frac{\alpha(M_0 - L_0)}{\alpha + \beta}$ . Como  $L_0 > M_0$ , então  $A > 0$  e  $B < 0$ . Substituindo os valores das constantes nas respectivas expressões,



tem-se

$$M_n = \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha + \beta} - \frac{(L_0 - M_0)\alpha}{\alpha + \beta} (1 - \alpha - \beta)^n$$

$$L_n = \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha + \beta} + \frac{(L_0 - M_0)\beta}{\alpha + \beta} (1 - \alpha - \beta)^n$$

A partir destas relações, é possível tirar as seguintes conclusões:

1. O salário oferecido pela diretoria e o exigido pelos trabalhadores é estável se  $0 < \alpha + \beta < 1$ ;

2. No decorrer das negociações, se ocorrer convergência, ou seja, se  $M_n$  crescer lentamente e  $L_n$  decrescer lentamente, então  $0 < \alpha + \beta < 1$  ( $1 - \alpha - \beta > 0$ , pois, caso contrário, poderia originar uma oscilação indesejada e, desta forma, não haveria convergência);

3. O salário final que satisfaz ambas as partes é

$$w = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{\alpha L_0 + \beta M_0}{\alpha + \beta}.$$

Observe que o salário final  $w$  varia entre  $M_0$  e  $L_0$ , ou seja,  $M_0 < w < L_0$ .

Na Tabela 7 é apresentado um caso particular em que  $L_0 = 1000$  reais,  $M_0 = 900$  reais,  $\alpha = 0,12$  e  $\beta = 0,15$ .

$n$	$M_n$	$L_n$	$n$	$M_n$	$L_n$
0	900	1000	13	943,7	945,37
1	912	985	14	943,9	945,12
2	920,76	974,05	15	944,04	944,93
3	927,15	966,05	16	944,15	944,8
4	931,82	960,82	17	944,23	944,7
5	935,23	955,96	18	944,29	944,63
6	937,71	952,85	19	944,33	944,58
7	939,53	950,58	20	944,36	944,54
8	940,86	948,92	21	944,38	944,51
9	941,82	947,71	22	944,4	944,49
10	942,53	946,83	23	944,41	944,48
11	943,05	946,18	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
12	943,42	945,71	$\infty$	944,44	944,44

Tabela 7 – Salário oferecido e salário exigido

Fonte: (LUIS, 2006)

### 5.1.1 Atividade em sala de aula

A atividade prática foi realizada com os alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola estadual, localizada na cidade de Ribeirão Preto/SP. Inicialmente o professor fez a apresentação

do modelo, explicou a Tabela 7 e explanou sobre a proposta didática, dando esclarecimento, sobre os termos de uma negociação salarial. Durante as explicações, o professor observou que os alunos tinham noção de como é realizada uma negociação salarial.

Assim, foi proposto aos alunos que constituíssem grupos de 6 pessoas, os quais formariam uma empresa fictícia, onde 3 integrantes representariam a classe trabalhadora e os outros 3, a diretoria da instituição criada.

Os grupos criaram as empresas e elaboraram as tabelas de negociação semelhantes à Tabela 7 do modelo de negociação de salários. O objetivo desta atividade foi comparar os valores criados pelos alunos durante a negociação com os valores encontrados utilizando a fórmula apresentada no modelo, para  $\alpha = 0,12$  e  $\beta = 0,15$ .

Foram selecionados alguns grupos e suas negociações, os quais são descritos a seguir.

O grupo C criou uma empresa de comércio de produtos tendo o chocolate como matéria prima (Tabela 8). O grupo E desenvolveu uma empresa de comércio de jóias (Tabela 9) e o grupo F criou uma empresa que realiza manutenção em aparelhos celulares (Tabela 10).

O erro percentual apresentado nas tabelas é obtido pela diferença entre o valor estipulado pelo aluno e o gerado segundo a fórmula do modelo de negociação de salários, dividindo-se tal diferença pelo salário gerado pelo modelo e em seguida multiplicando-se por 100.

Seguem abaixo as tabelas de comparação:

Etapa(n)	Grupo C					
	Salário oferecido (modelo)(Mn)	Salário oferecido (alunos)(Mn)	Erro percentual	Salário exigido (modelo)(Ln)	Salário exigido (alunos)(Ln)	Erro percentual
0	R\$ 2.750,00	R\$ 2.750,00	0,00%	R\$ 3.000,00	R\$ 3.000,00	0,00%
1	R\$ 2.780,00	R\$ 2.800,00	-0,72%	R\$ 2.962,50	R\$ 2.850,00	3,80%
2	R\$ 2.801,90	R\$ 2.425,00	13,45%	R\$ 2.935,13	R\$ 2.600,00	11,42%
3	R\$ 2.817,89	R\$ 2.475,00	12,17%	R\$ 2.915,14	R\$ 2.550,00	12,53%
4	R\$ 2.829,56	R\$ 2.500,00	11,65%	R\$ 2.900,55	R\$ 2.525,00	12,95%
5	R\$ 2.838,08	R\$ 2.510,00	11,56%	R\$ 2.889,90	R\$ 2.520,00	12,80%
6	R\$ 2.844,30	R\$ 2.515,00	11,58%	R\$ 2.882,13	R\$ 2.519,00	12,60%
7	R\$ 2.848,84	R\$ 2.450,00	14,00%	R\$ 2.876,45	R\$ 2.455,00	14,65%
8	R\$ 2.852,15	R\$ 2.400,00	15,85%	R\$ 2.872,31	R\$ 2.420,00	15,75%
9	R\$ 2.854,57	R\$ 2.420,00	15,22%	R\$ 2.869,29	R\$ 2.420,00	15,66%

Tabela 8 – Tabela do Grupo C

Fonte: Elaborada pelo autor.

Etapa(n)	Grupo E					
	Salário oferecido (modelo)(Mn)	Salário oferecido (alunos)(Mn)	Erro percentual	Salário exigido (modelo)(Ln)	Salário exigido (alunos)(Ln)	Erro percentual
0	R\$ 4.800,00	R\$ 4.800,00	0,00%	R\$ 5.000,00	R\$ 5.000,00	0,00%
1	R\$ 4.824,00	R\$ 4.600,00	4,64%	R\$ 4.970,00	R\$ 4.900,00	1,41%
2	R\$ 4.841,52	R\$ 4.100,00	15,32%	R\$ 4.948,10	R\$ 4.300,00	13,10%
3	R\$ 4.854,31	R\$ 3.700,00	23,78%	R\$ 4.932,11	R\$ 3.900,00	20,93%
4	R\$ 4.863,65	R\$ 3.200,00	34,21%	R\$ 4.920,44	R\$ 3.500,00	28,87%
5	R\$ 4.870,46	R\$ 2.500,00	48,67%	R\$ 4.911,92	R\$ 2.800,00	43,00%
6	R\$ 4.875,44	R\$ 1.900,00	61,03%	R\$ 4.905,70	R\$ 2.100,00	57,19%
7	R\$ 4.879,07	R\$ 1.500,00	69,26%	R\$ 4.901,16	R\$ 1.700,00	65,31%

Tabela 9 – Tabela do Grupo E

Fonte: Elaborada pelo autor.

Etapa(n)	Grupo F					
	Salário oferecido (modelo)(Mn)	Salário oferecido (alunos)(Mn)	Erro percentual	Salário exigido (modelo)(Ln)	Salário exigido (alunos)(Ln)	Erro percentual
0	R\$ 1.750,00	R\$ 1.750,00	0,00%	R\$ 2.900,00	R\$ 2.900,00	0,00%
1	R\$ 1.888,00	R\$ 1.900,00	-0,64%	R\$ 2.727,50	R\$ 2.500,00	8,34%
2	R\$ 1.988,74	R\$ 2.000,00	-0,57%	R\$ 2.601,58	R\$ 2.300,00	11,59%
3	R\$ 2.062,28	R\$ 2.050,00	0,60%	R\$ 2.509,65	R\$ 2.280,00	9,15%
4	R\$ 2.115,96	R\$ 2.080,00	1,70%	R\$ 2.442,54	R\$ 2.240,00	8,29%
5	R\$ 2.155,15	R\$ 2.095,00	2,79%	R\$ 2.393,56	R\$ 2.239,00	6,46%
6	R\$ 2.183,76	R\$ 2.100,00	3,84%	R\$ 2.357,80	R\$ 2.150,00	8,81%
7	R\$ 2.204,65	R\$ 2.120,00	3,84%	R\$ 2.331,69	R\$ 2.149,00	7,84%
8	R\$ 2.219,89	R\$ 2.130,00	4,05%	R\$ 2.312,63	R\$ 2.130,00	7,90%

Tabela 10 – Tabela do Grupo F

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 5.1.2 Resultados

A atividade desenvolvida em sala de aula proporcionou aos alunos exercitar o conhecimento através do trabalho em grupo. Os mesmos demonstraram interesse e criatividade na execução do desafio proposto. Apresentaram soluções e novas ideias que complementaram a aula prática.

Ficou evidente para o professor a importância do uso de modelos do cotidiano para estimular tanto o aprendizado da Matemática, quanto a participação dos alunos.

Durante o desenvolvimento deste trabalho prático houve uma troca de conhecimentos entre o mestre e os aprendizes, e ambos cresceram no aprendizado e no aperfeiçoamento quanto à forma de relacionamento e convivência entre si e com a Matemática.

### 5.1.3 Conclusão

Diferentemente da Matemática essencialmente abstrata que é ensinada aos discentes da educação básica, os alunos que participaram desta atividade didática, tiveram a oportunidade de vivenciar uma Matemática prática, presente no nosso cotidiano, por meio de uma aplicação de equação de diferenças de 2ª ordem com coeficientes constantes, envolvendo uma negociação de salários entre empregados e empregadores.

A transformação desta mentalidade passa por duas influências positivas: o método de abordagem de conteúdos de Matemática utilizado pelo docente aliando teoria e prática, e a contrapartida dada pelos alunos demonstrando interesse e participação no aprendizado de novas técnicas e conteúdos, aplicáveis a situações do dia-a-dia.

No desenvolvimento dessa atividade prática, os alunos do 1º ano do ensino médio dessa escola pública de Ribeirão Preto/SP demonstraram com essa postura, que tal experiência foi gratificante e enriquecedora tanto para o professor quanto para os alunos.



## REFERÊNCIAS

---

---

BASSANEZI, R. C. **Ensino aprendizagem com modelagem matemática**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

ELAYDI, S. **An introduction to difference equations**. 3. ed. San Antonio: Springer, 2004.

FERNANDES, F. R. **Equações de diferenças de 1ª ordem e aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2015.

LUIS, R. D. G. **Equações de diferenças lineares e aplicações**. Dissertação (Mestrado) — Universidade da Madeira, 2006.

MORGADO, A. C. **Matemática discreta**. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

SHONE, R. **Economic dynamics - Phase diagrams and their economic applications**. 2. ed. Cambridge: Cambridge, 2002.

STEWART, J. **Cálculo**. vol 2, 7 ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.



---

## ATIVIDADE DIDÁTICA

---

As negociações realizadas pelos grupos foram registradas em folhas de caderno, as quais encontram-se digitalizadas aqui para facilitar a leitura dos dados.

Os nomes dos alunos participantes de cada grupo foram preservados.

Seguem as negociações de alguns grupos:

Nome da Empresa: Chocomania

Nome da diretoria: [REDACTED]

GRUPO C

Etapas	Salário oferecido	Salário exigido
1	2,450	3000
2	2,800	2,850
3	2,425	2,600
4	2,475	2,550
5	2,500	2,525
6	2,510	2,520
7	2,515	2,519
8	2,450	2,455
9	2,400	2,420
10	2,420	

Figura 10 – Registro do grupo C

Fonte: Integrantes do Grupo C



Nome da empresa: Jóia Rosa

Directorio: [REDACTED]

Ramo da empresa: Ouro, jóia, pedras preciosas.

sindicato: [REDACTED]

ETAPA	SALÁRIO OFERECIDO	SALÁRIO EXIGIDO
1	4800	5000
2	4600	4900
3	4100	4300
4	3700	3900
5	3200	3500
6	2500	2800
7	1900	2100
8	1500	1700

Figura 11 – Registro do grupo E

Fonte: Integrantes do Grupo E

GAP'S      Grupo F

Directora      Trabalhadora

[REDACTED]

Ramo da Empresa

Maintenance em aparelho de celular

Sindicato

[REDACTED]

Salário oferecido	Salário exigido
1750	2900
1900	2500
2000	2300
2050	2280
2080	2240
2095	2239
2100	2150
2120	2149
2130	2130

Figura 12 – Registro do grupo F

Fonte: Integrantes do Grupo F